PROCESSOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA POR ALUNOS DO 9º ANO DE ESCOLARIDADE

Paulo Ferreira Correia
Escola Secundária/3 de Barcelos
ferreiracorreiapaulo@gmail.com
José António Fernandes
Centro de Investigação em Educação, Universidade do Minho
jfernandes@iep.uminho.pt

Resumo
Neste texto apresentam-se os processos de resolução de problemas de Combinatória desenvolvidos pelos alunos de duas turmas do 9º ano de escolaridade no ano lectivo 2008/2009. Para tal, foi aplicada uma ficha de descoberta, resolvida pelos alunos organizados em pequenos grupos e incluindo problemas de arranjos completos, arranjos simples, permutações simples e combinações simples.
Em geral, os resultados do estudo revelam que a intervenção de ensino permitiu aos alunos desenvolver as suas capacidades de raciocínio combinatório, aprofundando os seus processos de resolução de problemas em Combinatória, ultrapassando limitações das suas estratégias espontâneas e adoptando estratégias em consonância com o saber normativo.

Palavras-chave: Processos de resolução de problemas; Operações combinatórias; Alunos do 9º ano de escolaridade.

1. Introdução

Na opinião de Piaget e Inhelder (s/d), atingido o período das operações formais, os adolescentes descobrem espontaneamente procedimentos sistemáticos de enumeração e de contagem combinatória. Discordando de Piaget, Fischbein (1975) advoga que a instrução é necessária para que a criança adquira as técnicas combinatórias, acrescentando que, recorrendo a métodos adequados de representação, é possível preparar para o estádio seguinte, bem como acelerar o processo de transição entre estádios.

Comparativamente com outras áreas da matemática, em matemática discreta nem sempre estão disponíveis métodos poderosos de resolução de problemas, o que exige uma intervenção criativa e imaginativa por parte do aluno (Kapur, 1970). No entanto, a intervenção do aluno pode ser enfraquecida pelo facto de muitos professores de Matemática se sentirem tentados a reduzir a solução a um número manobrável e previsível de etapas ou regras, requerendo, consequentemente, o mínimo de pensamento por parte do aluno (Gardiner, 1991).

Muitas vezes, mesmo resolvendo correctamente um problema combinatório para vários casos particulares, os alunos falham na descoberta de uma solução geral, ao não serem capazes de relacionar as soluções de uma forma recursiva (Hadar & Hadass, 1981). É importante que os alunos vão além da enumeração sistemática e da construção de diagramas de árvore, retirando o máximo proveito destas estratégias para encontrarem procedimentos mais eficientes, como descobrir a natureza multiplicativa de um processo de contagem (DeGuire, 1991).

Segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), nas actividades de resolução de problemas de Combinatória em que intervêm os arranjos e as permutações, a recursão assume um papel importante na construção de uma dada configuração a partir de outra de menor dimensão. Também o raciocínio analógico constitui, na opinião de English (2005), um processo fundamental na aprendizagem matemática, ao permitir a identificação de conexões entre as ideias matemáticas e cuja falha é uma das maiores causas das dificuldades dos alunos na resolução de problemas.

Da análise das estratégias espontâneas utilizadas por alunos do 9º ano de escolaridade na resolução de problemas de Combinatória, entendidas como estratégias usadas pelos alunos antes do ensino formal do tema (intuições primárias na terminologia de Fischbein, 1975), Correia (2008) verificou que os alunos recorreram à estratégia de "enumeração", seguindo-se as estratégias de "diagrama de árvore", "fórmula" e, por fim, a "operação" numérica. Além disso, um número considerável de respostas baseou-se em duas destas estratégias, concretamente a "enumeração e operação" e "diagrama de árvore e operação".

Neste mesmo estudo, Correia verificou que o desempenho dos alunos em Combinatória, avaliado através das respostas correctas, foi influenciado pelo tipo de operação combinatória, pela grandeza dos parâmetros envolvidos nas operações combinatórias (maiores valores dos parâmetros maior dificuldade) e pelo desempenho em Matemática (melhor desempenho a Matemática maior número de respostas correctas).

No caso do tipo de operação combinatória, verificou-se que os alunos tiveram menos dificuldades nos arranjos com repetição, seguindo-se os arranjos simples, as permutações simples e, finalmente, as combinações simples com dificuldades muito acentuadas. Nesta última operação, a principal dificuldade dos alunos residiu no facto de considerarem a ordem, tal como tinham feito nos arranjos. Também no estudo realizado por Silva, Fernandes e Soares (2004), envolvendo alunos do 12.º ano, sem ensino de Combinatória, se verificou uma ordem de dificuldade das operações combinatórias semelhante.

O facto de os alunos terem adoptado estratégias espontâneas que conduziram às respostas correctas nos problemas mais simples levou o autor a concluir que os alunos estavam em condições para iniciarem o estudo do tema, tendo em vista melhorar procedimentos incompletos, ainda que sistemáticos, por eles usados nos problemas mais difíceis, que conduziram à resolução dos problemas de forma inadequada.

A necessidade do ensino para desenvolver a capacidade combinatória dos alunos é também salientada no estudo realizado por Silva, Fernandes e Soares (2004), antes citado, em que não se obtiveram resultados consideravelmente melhores em problemas combinatórios semelhantes, embora alguns deles envolvendo um maior número de elementos.

Entendendo-se que os problemas combinatórios podem desempenhar um papel fundamental na aprendizagem de métodos gerais de resolução de problemas (Roa, 2000) e considerando-se essencial que o professor conheça a forma como raciocinam os alunos aquando da realização de uma qualquer tarefa, aqui especificamente de Combinatória, neste estudo investigaram-se os processos utilizados pelos alunos na resolução de problemas de Combinatória em situação de ensino.

2. Metodologia

A investigação, aqui apresentada, centrou-se no estudo do desenvolvimento dos processos de resolução de problemas sobre as operações combinatórias usados por alunos do 9º ano de escolaridade, quando se encontravam envolvidos numa intervenção de ensino sobre esse tema.

No estudo, que decorreu no início do ano lectivo 2008/2009, participaram 39 alunos de duas turmas do 9º ano, com média de idades de 14 anos e média das classificações a Matemática no 7º e 8º anos de escolaridade, respectivamente, 3,5 e 3,4.

Os dados usados no presente estudo foram obtidos a partir das produções escritas dos alunos, incidindo sobre os processos de construção das respostas aos problemas combinatórios apresentados.

A intervenção de ensino centrou-se nas estratégias espontâneas dos alunos sobre as operações combinatórias, na aprendizagem por descoberta e no trabalho de grupo, tendo sido constituídos 9 grupos de 4 ou 5 elementos, que puderam interagir entre si por sua iniciativa. Em geral, o trabalho de grupo é valorizado por Petocz e Reid (2007) ao referirem, com base em vários estudos, que o trabalho e a avaliação em grupo permitem aos professores desenvolverem tarefas mais compreensivas, capacita os alunos a adquirirem um *insight* sobre as dinâmicas e os processos de grupo, possibilita aos alunos o desenvolvimento de *skills* interpessoais, permite expor os alunos aos pontos de vista de outros membros do grupo, encoraja os alunos a prepararem-se para o ponto de 'vista real' e promove a reflexão e a discussão como parte essencial do processo de se tornarem práticos, competentes e reflexivos.

No caso do ensino da Combinatória, Almeida e Ferreira (s/d) realizaram um estudo piloto com uma turma do 2º ano do curso médio, envolvendo o ensino das operações combinatórias e em que os alunos trabalharam em grupo, tendo concluído que os alunos desenvolveram significativamente o seu raciocínio combinatório. Também Eizenberg e Zaslavsky (2003), estudando o efeito da colaboração na resolução de problemas de Combinatória, concluíram que o trabalho em pares permitiu aos alunos construir um conjunto mais amplo de abordagens para a obtenção da solução do que aqueles que trabalharam individualmente.

Em cada operação combinatória, começou-se por aplicar uma actividade de descoberta, utilizada por Correia (2008) e atendendo ao nível de dificuldade observado pelo autor. Assim, da mais fácil para a mais difícil, exploraram-se os arranjos com repetição, arranjos simples, permutações simples e combinações simples, durante 5 sessões de 45 minutos (ver Tabela 1).

Tabela 1 – Actividades de descoberta exploradas na intervenção de ensino

Actividades		Questões			
		a)	b)	c)	d)
Actividade 1 –	Formar números	$\overline{A}_2^3$	$\overline{A}_2^5$	$\overline{A}_2^n$	$\overline{A}_3^5$
Actividade 2 –	Definir bandeiras com barras horizontais	A_2^3	A_2^5	A_2^n	A_3^5
Actividade 3 –	Dispor amigos em fila para tirar uma fotografia	P_3	P_5	P_n	—
Actividade 4 –	Formar grupos de pessoas para participarem num concurso	C_2^3	C_2^5	C_2^n	C_3^5

Exceptuando as questões c), em todos os outros casos apresentava-se um exemplo de configuração.

Durante a realização das tarefas propostas, os alunos decidiram livremente sobre as estratégias a utilizar na resolução das questões e o professor desempenhou o papel de questionar, orientar e incentivar os alunos.

Na análise de dados, partindo das produções escritas dos alunos, classificámos os processos de construção das respostas aos problemas combinatórios apresentados pelos alunos com base nas estratégias de *enumeração* (sistemática e não sistemática), *tabela de dupla entrada*, *operação numérica* e *fórmula*, adaptadas de outros estudos (Fischbein & Grossman, 1997; Navarro-Pelayo, 1994; Roa, 2000; Silva, Fernandes & Soares, 2004).

3. Análise dos processos de construção das respostas

Nesta secção apresentam-se os processos utilizados por alunos do 9º ano de escolaridade na resolução das questões a), b), c) e d) da ficha de descoberta de Combinatória.

3.1. Questões a)

Enumeração. As respostas às questões a) das quatro operações combinatórias resultaram essencialmente da enumeração sistemática, com a fixação de elementos de referência a partir dos quais foram construídas as restantes configurações.

Nos arranjos com repetição, o procedimento algorítmico utilizado consistiu em: escolher um dos 3 algarismos disponíveis; fixar o elemento escolhido na primeira posição da sequência de elementos; associar ao algarismo fixado cada um dos 3 algarismos disponíveis; repetir os passos anteriores até serem fixados, na primeira posição da sequência, todos os elementos disponíveis.

Este também foi o algoritmo predominante na contagem dos arranjos simples de 3 elementos tomados 2 a 2. No entanto, as resoluções de alguns alunos assentaram num procedimento algorítmico que consistiu em: escolher uma das 3 cores disponíveis; associar a esta cor uma outra da lista diferente da fixada; trocar a posição das cores na configuração obtida; repetir os passos anteriores até se esgotarem as cores disponíveis.

Nas permutações, o procedimento algorítmico utilizado consistiu em: escolher um dos 3 nomes disponíveis; fixar o nome escolhido na primeira posição da sequência; completar a configuração com os 2 nomes restantes; definir uma segunda configuração trocando os nomes que ocupam a 2ª e 3ª posições da sequência; repetir os passos anteriores até terem sido fixados, na primeira posição da sequência, todos os nomes disponíveis.

Nas combinações ocorreram dois procedimentos algorítmicos distintos. O método predominante consistiu em: fixar o primeiro elemento da lista de nomes fornecida no enunciado do problema; associar a este nome cada um dos nomes que se encontravam à sua direita na lista de nomes apresentada; repetir os passos anteriores com o segundo elemento da lista de nomes, fornecida no enunciado do problema. O segundo método consistiu em: aplicar os procedimentos utilizados na contagem dos arranjos simples de 3 elementos tomados 2 a 2; desprezar as configurações que diferiam apenas na ordem de disposição dos elementos na configuração.

A enumeração não sistemática ocorreu residualmente no problema de permutações – nas resoluções de dois alunos, um do grupo 2 e outro do grupo 4 – e no problema de combinações – nas resoluções de cinco alunos, um de cada um dos grupos 2, 3, 4, 5 e 8.

Tabela de dupla entrada. Nas permutações, um aluno do grupo 2 efectuou uma tentativa falhada de resolução do problema através de uma tabela de dupla entrada. A dificuldade do aluno residiu na escolha dos elementos que deveriam ser considerados em cada uma das entradas, tendo considerado numa entrada os 3 nomes disponíveis e na outra as três posições que poderiam ser ocupadas pelos elementos da lista de nomes.

Nos arranjos simples, um aluno do grupo 2 optou por construir (correctamente) uma tabela de dupla entrada, considerando nas duas entradas os três nomes disponíveis e inutilizando as células da diagonal principal da tabela (correspondentes a configurações com elementos repetidos).

Nas combinações, todos os elementos do grupo 2 e dois elementos do grupo 4 optaram por construir uma tabela de dupla entrada, que lhes permitiu obter a resposta correcta para o problema, e cuja construção consistiu em: considerar nas duas entradas os três nomes disponíveis; inutilizar as células da diagonal principal; assinalar as células que corresponderiam a configurações possíveis; assinalar as células que corresponderiam a configurações que diferiam apenas na ordem de disposição dos elementos na configuração e que não contabilizaram na contagem final.

3.2. Questões b)

Enumeração. Os alunos que recorreram à enumeração não sistemática para obter as permutações e as combinações de 5 elementos tomados 2 a 2, perante a dificuldade em enumerar por tentativa e erro as configurações possíveis nas questões b), decidiram abandonar esta estratégia.

Nestas questões, a estratégia de enumeração sistemática tanto ocorre isolada como combinada com uma operação numérica. Nas enumerações completas efectuadas nos problemas de arranjos com repetição, arranjos simples e combinações, os alunos reproduzem os procedimentos algorítmicos utilizados na resolução das questões a).

Nas permutações, as tentativas para enumerar sistematicamente a totalidade ou parte das configurações possíveis saiu falhada para os grupos 1, 2, 4, 5, 6, 7 e 9, que procuraram obter a resposta ao problema tentando descobrir a lei de formação das permutações de 5 elementos através dos raciocínios desenvolvidos na contagem das permutações de 3 elementos e na resolução dos problemas de arranjos com e sem repetição. Nos grupos 3 e 8 foram efectuadas enumerações sistemáticas parciais, cujo procedimento algorítmico utilizado consistiu em: fixar um dos 5 elementos na primeira posição da sequência de nomes; fixar cada um dos restantes 4 elementos 6 vezes na segunda posição; fixar cada um dos restantes 3 elementos duas vezes na terceira posição; completar a configuração com os 2 elementos restantes; definir uma segunda configuração trocando os elementos que ocupam a 4ª e 5ª posições da sequência de nomes.

Tabela de dupla entrada. Nos arranjos simples, o grupo 2 adoptou esta estratégia, reproduzindo (correctamente) o procedimento utilizado por um dos elementos do grupo na resolução da questão a). Ainda, neste grupo, um aluno não foi capaz de construir uma tabela que lhe permitisse responder à questão e abandonou a estratégia.

Nas combinações, todos os alunos do grupo 2 mantiveram esta estratégia, reproduzindo correctamente o método utilizado na resolução da questão a). Já os dois elementos do grupo 4, que tinham utilizado esta estratégia na resolução da questão a), abandonaram-na e resolveram o problema através da enumeração sistemática.

Operação numérica. A escrita de uma expressão numérica, como única resolução do problema ou como resolução alternativa, impeliu os alunos a definirem expressões numéricas nas questões a) e a aplicá-las, de seguida, na resolução das questões b).

Nos arranjos com repetição, no grupo 1, a disposição das configurações toma a forma de um quadrado, facto que levou os alunos a estabelecerem uma analogia entre o número de configurações e o valor da área de um quadrado de lado 5 na questão b) e um quadrado de lado 3 na questão a) (ver Figura 1). As expressões numéricas obtidas nos grupos foram 5×5 ou 5^2 na questão b) e 3×3 ou 3^2 na questão a).

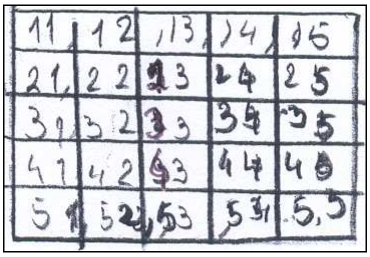


Figura 1. Resolução da questão b) de arranjos com repetição pelo grupo 1.

Nos arranjos simples, as expressões numéricas obtidas foram 5×4 e $5\times(5-1)$ na questão b) e 3×2 e $3\times(3-1)$ na questão a). Os elementos do grupo 2, que tinham resolvido a questão através de tabela de dupla entrada, excluindo os elementos da diagonal principal, obtiveram as expressões 5^2-5 na questão b) e 3^2-3 na questão a), estabelecendo uma relação entre os arranjos com e sem repetição de n elementos tomados 2 a 2, uma vez que $A_2^n = \overline{A}_2^n - n$, para $n \geq 2$. Estes alunos também apresentaram, como alternativa, as expressões 5×4 na questão b) e 3×2 na questão a).

Nas permutações, apenas os grupos 3 e 8 chegaram à expressão 24×5, resultado da sua persistência em obter um procedimento sistemático que garantisse uma enumeração parcial do número mínimo de configurações (24), para depois generalizar correctamente.

As dificuldades reveladas pelos alunos na resolução da questão impuseram a intervenção do professor, que sugeriu a utilização de *tracinhos* para representar a posição dos elementos na sequência de nomes. Não se tendo revelado suficiente esta sugestão, propôs-se que os alunos imaginassem a situação aplicada ao seu grupo e, se necessário, a simulassem. Com a última sugestão coloca-se uma nova questão, dada a existência de grupos com 4 elementos, o que desencadeou uma maior discussão inter-grupos. Dessa discussão, os alunos concluíram que há uma relação entre a lei de formação das permutações e dos arranjos simples, especificamente que $P_n = A_n^n$. As ideias surgidas nas simulações efectuadas e nas enumerações sistemáticas realizadas na resolução da questão a) foram transportadas para a resolução da questão b) e, representando por *tracinhos* as posições dos elementos na sequência de nomes, os alunos obtiveram as expressões numéricas $5\times4\times3\times2\times1$ para a questão b) e $3\times2\times1$ para a questão a).

Nas combinações, a expressão numérica resultou da interpretação das enumerações sistemáticas e das tabelas de dupla entrada construídas. A estruturação da enumeração efectuada também representou um factor facilitador na obtenção das expressões: $4+3+2+1$ na questão b) e $2+1$ na questão a). O grupo 7 contemplou mesmo a parcela 0 na expressão numérica obtida, significando que com o último elemento da lista de nomes não poderia se formada qualquer configuração, já que não havia nenhum elemento à sua direita (ver Figura 2).

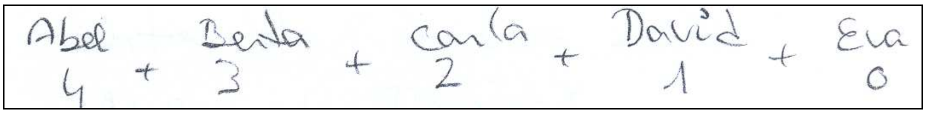


Figura 2. Expressão numérica obtida na questão b) de combinações pelo grupo 7.

A abordagem efectuada pelos alunos dos grupos 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 e 9 refere-se à soma dos $n-1$ primeiros números naturais, que dá as C_2^n, para $n\geq2$. Quanto ao grupo 6, os alunos obtiveram as expressões numéricas $\frac{5\times4}{2}$ na questão b) e $\frac{3\times2}{2}$ na questão a), estabelecendo uma relação entre os arranjos simples e as combinações de 5 e 3 elementos tomados 2 a 2, já que $C_2^n=\frac{1}{2}\times A_2^n$.

3.3. Questões c)

Fórmula. A obtenção de expressões numéricas nas questões a) e b) de cada grupo de problemas revelou-se essencial para os alunos obterem uma fórmula, dado que estas resultaram da transposição de raciocínios utilizados nos casos particulares para os casos gerais. A escrita de uma fórmula (em linguagem simbólica ou em linguagem corrente) nem sempre se revelou uma tarefa acessível, principalmente nos casos das permutações e das combinações. Por operação combinatória, obtiveram-se as seguintes expressões:

- 3^2, 5^2 e n^2 ou 3×3, 5×5 e $n\times n$ nos arranjos completos;
- 3×2, 5×4 e $n\times(n-1)$ ou $3\times(3-1)$, $5\times(5-1)$ e $n\times(n-1)$ ou 3^2-3, 5^2-5 e n^2-n nos arranjos simples;
- $3\times2\times1$, $5\times4\times3\times2\times1$ e $n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times(n-4)\times...\times1$ nas permutações;
- $2+1$, $4+3+2+1$ e $(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)+...+1$ ou $\frac{3\times2}{2}$, $\frac{5\times4}{2}$ e $\frac{n\times(n-1)}{2}$ nas combinações.

3.4. Questões d)

Enumeração. Na resolução das questões d) a estratégia de enumeração sistemática tanto ocorre isolada como combinada com uma operação numérica.

Nos arranjos com repetição, os grupos 7 e 9 enumeram sistematicamente as 125 possibilidades, adaptando o procedimento usado nas questões a) e b). O grupo 3 enumerou sistematicamente os 25 números com o algarismo 1 na casa das centenas e generalizou para a totalidade das possibilidades.

Nas combinações, os grupos 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 enumeraram de forma sistemática as 10 configurações possíveis, cujo procedimento algorítmico utilizado consistiu numa extensão do método adoptado na questão b) (ver Figura 6), acrescentando a cada configuração cada um dos elementos que se encontram à direita dos nomes fixados para obter as configurações com 3 elementos (ver Figura 7).

Tabela de dupla entrada. Nos arranjos simples, o grupo 2 deu continuidade à estratégia adoptada antes, o que consistiu em: considerar numa das entradas as 20 possibilidades obtidas na tabela construída na questão b) e na outra entrada as cinco cores disponíveis; inutilizar as células da tabela que correspondiam a configurações com elementos repetidos, ficando cada linha com apenas 3 possibilidades. Este grupo também manteve o método adoptado na contagem das combinações de 5 elementos tomados 2 a 2, excluindo as trocas de ordem (ver Figura 3).

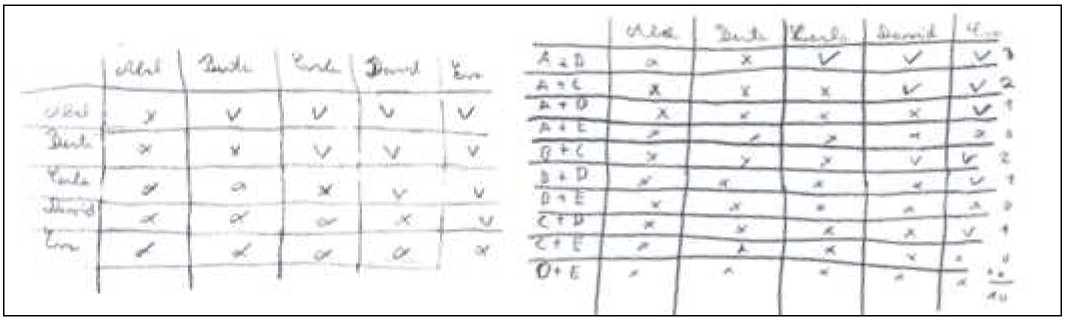


Figura 3. Resolução da questão d) de combinações pelo grupo 2.

Operação numérica. Nos arranjos com repetição, partindo das expressões numéricas obtidas na questão b), os grupos 1, 2 e 6 chegaram recursivamente à expressão 5^3 e os grupos 5 e 8 à expressão $5\times5\times5$. O grupo 3, partindo da enumeração sistemática parcial efectuada, obteve a expressão 25×5, que também foi a expressão obtida pelo grupo 4. No entanto, o grupo 4 partiu da enumeração sistemática efectuada na questão b), fazendo corresponder a cada configuração obtida em b) 5 configurações na questão d). Os grupos 7 e 9, depois de enumerarem as 125 possibilidades, também obtiveram a expressão 5^3. Uma vez compreendida a lei de formação dos arranjos com repetição de n elementos tomados 2 a 2, revelou-se uma tarefa relativamente fácil para estes alunos contar os $\overline{A}_3^5$.

Nos arranjos simples, partindo das expressões numéricas obtidas na questão b), os grupos 1, 5 e 7 obtiveram recursivamente a expressão $5\times(5-1)\times(5-2)$ e os grupos 4, 6, 8 e 9 obtiveram a expressão $5\times4\times3$. O grupo 3, partindo da enumeração sistemática parcial efectuada, obteve a expressão 12×5. O grupo 2, que através da tabela de dupla entrada chegou ao valor 60, confrontado com a necessidade de procurar uma expressão numérica como resposta alternativa (a pedido do professor), não foi capaz de utilizar a informação das tabelas de dupla entrada construídas nas questões b) e d). Perante esta dificuldade, o grupo tentou a possibilidade 5^3-5, mas que não conduz ao valor 60 encontrado. Analisando então as expressões obtidas nas questões a), b) e c) (respectivamente, 3^2-3, 5^2-5 e n^2-n), obtêm a forma factorizada das expressões obtidas inicialmente (isto é, 3×2, 5×4 e $n\times(n-1)$) e chegam à expressão $5\times4\times3$.

Nesta questão, os grupos 1, 4, 6 e 9, mostrando interesse em procurar uma fórmula para contar os arranjos simples de n elementos tomados 3 a 3 e incentivados pelo professor, foram bem sucedidos na sua procura. Mais ainda, as resoluções (ver Figura 4) mostram que estes grupos seriam capazes de encontrar uma fórmula para contar os A_k^n, para $k\leq n$, uma vez que escreveram a fórmula para amostras ordenadas sem repetição de quatro elementos.

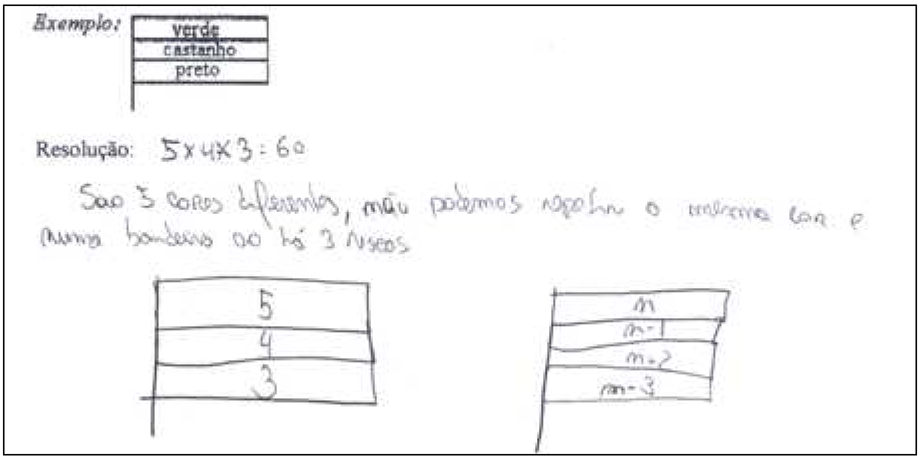


Figura 4. Resolução da questão d) de arranjos simples pelo grupo 4.

Nas combinações, por aplicação da regra da soma, os grupos 1, 2, 4, 5, 8 e 9 obtiveram a expressão $6+3+1$, que representa apenas a tradução do número de possibilidades de cada um dos conjuntos disjuntos de configurações, mas sem que se evidencie a compreensão da lei de formação. Os alunos do grupo 5 ainda procuraram regularidades na sucessão de valores calculados (ver Figura 5).

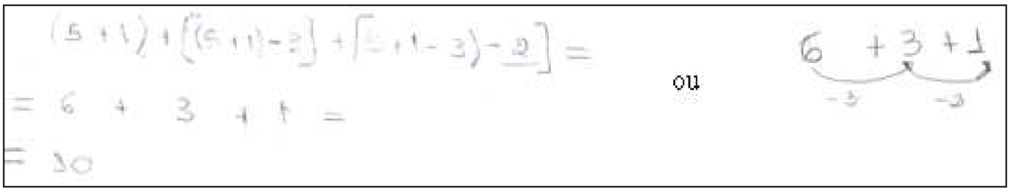


Figura 5. Procura de uma resolução alternativa para a questão d) de combinações pelo grupo 5.

As tentativas dos alunos para escreverem uma expressão numérica que traduzisse as combinações de 5 elementos tomados 3 a 3 falharam porque eles abandonaram o raciocínio utilizado na enumeração sistemática efectuada nas questões b) e d) (ver Figuras 6 e 7).

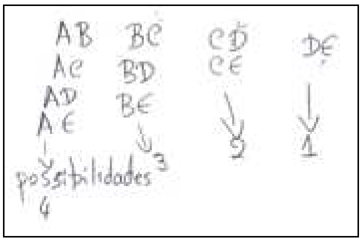


Figura 6. Resolução da questão b) de combinações pelo grupo 8.

Da enumeração sistemática efectuada, os alunos foram capazes de escrever a expressão numérica $4+3+2+1$.

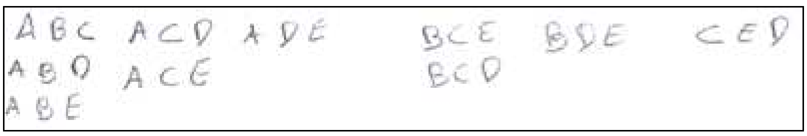


Figura 7. Resolução da questão d) de combinações pelo grupo 8.

Partindo da enumeração sistemática efectuada na questão d) e da expressão numérica obtida na questão b), os alunos não foram capazes de escrever a expressão numérica $(3+2+1)+(2+1)+1$.

Para além de terem sido capazes de transpor o raciocínio utilizado na enumeração sistemática efectuada na questão b) para a questão d), os alunos não conseguiram escrever uma expressão numérica para a questão d) partindo da expressão obtida na questão b) e da interpretação da enumeração sistemática efectuada na nova situação. Isto é, não concluíram que a resposta também poderia ser obtida por $C_3^5 = C_2^4 + C_3^4 = C_2^4 + (C_2^3 + C_3^3) = (1+2+3)+(1+2)+1 = 10$.

O grupo 2 foi o único a escrever a expressão $3+2+1+2+1+1$, mas sem que houvesse evidência de ter sido estabelecida uma relação entre esta expressão e a obtida na questão b) (ver Figura 3). O grupo 6 procurou uma expressão numérica do tipo das encontradas nas questões a), b) e c) (ver Figura 8).

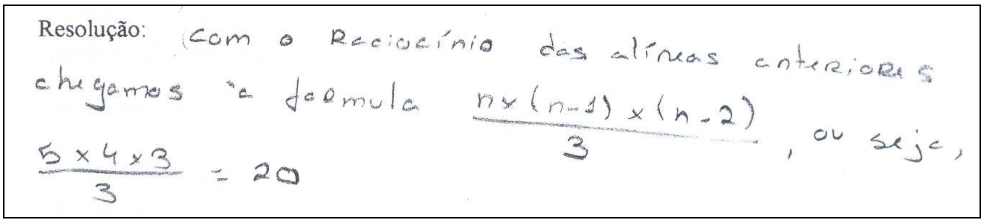
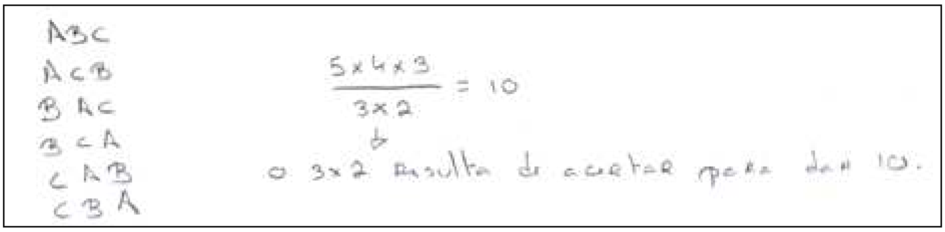

Resolução: Com o Raciocínio das alíneas anteriores chegamos à formula $\frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{3}$, ou seja, $\frac{5 \times 4 \times 3}{3} = 20$

Figura 8. Parte da resolução da questão d) de combinações pelo grupo 6.

Incentivados pelo professor, os alunos procuraram obter uma expressão numérica que conduzisse à resposta 10. Para tal, estando seguros da correcção da expressão do numerador, procuraram a resposta às suas dúvidas no denominador (ver Figura 9), uma vez que a divisão por 3 não conduz ao número de configurações obtidas por enumeração sistemática. Embora a resposta correcta tenha resultado de uma tentativa de adivinhação da expressão, os alunos, motivados pelo professor, efectuaram as 6 permutações possíveis das letras A, B e C, sem terem sido capazes de estabelecer uma relação com a questão a), de permutações; ou seja, não descobriram que $C_3^5 = \frac{1}{3!} \times A_3^5$.


ABC
ACB
BAC
BCA
CAB
CBA

$\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 10$

o 3×2 resulta de acertar para dar 10.

Figura 9. Parte da resolução da questão d) de combinações pelo grupo 6.

4. Conclusões

Tomando por referência os resultados obtidos no estudo de Correia (2008), em que foram usadas as mesmas tarefas do presente estudo, podemos concluir que a intervenção de ensino permitiu aos alunos aprofundarem as suas estratégias espontâneas, vencendo limitações e erros. Este aprofundamento foi mais notório nas operações combinatórias de combinações e permutações e quando as operações combinatórias envolviam maiores valores dos parâmetros, situações que se têm revelado mais difíceis em outros estudos (e.g., Correia, 2008; Silva, Fernandes & Soares, 2004). Por outro lado, em contraste com a posição de Piaget e Inhelder (s/d), as dificuldades experimentadas pelos alunos na resolução destas questões reforça a necessidade de alguma intervenção de ensino para eles adquirirem as operações combinatórias, tal como advoga Fischbein (1975).

Na resolução das questões que envolviam um menor número de elementos os processos de resolução incidiram na enumeração sistemática. À medida que o número de elementos envolvidos na operação combinatória aumentava, os alunos sentiram a necessidade de conjugar a enumeração sistemática com uma operação numérica para generalizar para a totalidade dos casos. As situações que envolviam um maior número de elementos e as questões destinadas à escrita de uma fórmula, fizeram com que os alunos entendessem a importância de procurar processos mais eficazes, nomeadamente as regras do produto, da soma e do quociente, retirando o máximo proveito das enumerações efectuadas e das resoluções das questões mais simples, para a clarificação do significado dos operandos envolvidos nas expressões correctas.

Os processos de construção das respostas, ao envolveram os raciocínios indutivo, analógico e recursivo, enfatizam a importância dos problemas de Combinatória no desenvolvimento destes raciocínios, essenciais à resolução de problemas (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994).

Nos problemas de arranjos com e sem repetição, as resoluções dos alunos permitem especular sobre a possibilidade de serem capazes de escrever expressões para os $\overline{A}_k^n$ e para os A_k^n. Comparativamente, nos problemas de permutações e de combinações, os resultados destacam as dificuldades dos alunos nestas operações combinatórias, reflectindo dificuldades ao nível do raciocínio analógico, nomeadamente dificuldades em estabelecer conexões entre as P_n e os A_k^n e entre os A_k^n e as C_k^n.

Referências bibliográficas

Almeida, A. L. & Ferreira, A. C. (s/d). *Aprendendo análise combinatória através da resolução de problemas: um estudo com classes de 9º ano do ensino fundamental e 2º ano do ensino médio*. Consultado em 6 de Dezembro de 2008 em http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/261-1-A-gt11_almeida_e_ferreira_ta.pdf

Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento Combinatorio*. Madrid: Síntesis.

Correia, P. F. (2008). *Raciocínios em Combinatória de alunos do 9.º ano de escolaridade*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.

DeGuire, L. (1991). Permutations and Combinations: A problem-solving Approach for Middle School Students. In M. Kenney & C. Hirsch (Eds.), *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12* (pp. 59-66). Reston, VA: NCTM.

English, L. (2005). Combinatorics and the development of children`s combinatorial reasoning. In J. Graham, (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 121-141). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Eizenberg, M. & Zaslavsky, O. (2003). Cooperative problem solving in combinatorics: the interrelations between control processes and successful solutions. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 389-403.

Fischbein, E. & Grossman, A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 27-47.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel.

Gardiner, A. (1991). A cautionary note. In M. Kenney & C. Hirsch (Eds.), *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12* (pp. 10-17). Reston, VA: NCTM.

Hadar, N. & Hadass, R. (1981).The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics, 12*(4), 435-443.

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 3*(1), 111-127.

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*, Tese de doutoramento, Universidade de Granada.

Petocz, P. & Reid, A. (2007). Learning and assessment in statistics. In Phillips B. and Weldon L. (Eds.), *The Proceedings of the ISI/IASE Satellite on Assessing Student Learning in Statistics*, Voorburg: International Statistical Institute, The Netherlands, CD ROM.

Piaget, J. & Inhelder, B. (s/d). *A origem da ideia do acaso na criança*. Rio de Janeiro: Editora Record. (Tradução portuguesa do original de 1951)

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. Tese de doutoramento, Universidade de Granada.

Silva, D. N., Fernandes, J. A. & Soares, A. J. (2004). Intuições de alunos do 12.º ano em combinatória: Um estudo exploratório. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 61-84). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.