Universidade do Minho
Escola de Ciências

Conceição Veloso Nogueira

Propriedades Algorítmicas Envolvendo a Pseudovariedade LSI

Julho de 2010

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Conceição Veloso Nogueira

Propriedades Algorítmicas Envolvendo a Pseudovariedade LSI

Tese de Doutoramento em Ciências
Ramo do Conhecimento Matemática

Trabalho efectuado sob a orientação do
Professor Doutor José Carlos Cruz Costa

Julho de 2010

Agradecimentos

O meu profundo agradecimento ao meu orientador, Professor Doutor José Carlos Costa, por me ter introduzido nesta nobre área da Matemática, a Álgebra. Agradeço por todo o apoio, encorajamento, disponibilidade e oportunidade de disfrutar do seu conhecimento ao longo da elaboração desta dissertação.

Agradeço aos meus familiares e amigos, em especial à minha mãe, à minha irmã e ao Miguel, pelo seu apoio incondicional durante esta etapa da minha vida.

O meu reconhecimento ao Instituto Politécnico de Leiria por me ter proporcionado as condições necessárias para a escrita desta dissertação.

Esta dissertação obteve a concessão de uma bolsa da FCT, SFRH/BD/37011/2007. Teve ainda o apoio do Centro de Matemática da Universidade do Minho e do projecto Automata, Semigroups and Applications, PTDC/MAT/65481/2006. Agradeço a todos.

Propriedades algorítmicas envolvendo a pseudovariedade LSl

Resumo

Os problemas de decidibilidade incluem-se entre os mais importantes e mais frutíferos da área dos semigrupos finitos e linguagens formais. É sabido que a decidibilidade não é preservada por alguns dos operadores de pseudovariedades mais comuns, tais como o supremo, o produto semidirecto, o produto de Mal'cev, entre outros [1, 58, 25]. Uma ideia recentemente explorada por vários autores consiste na imposição de propriedades mais fortes nas pseudovariedades sob as quais os operadores serão aplicados de forma a garantir que as pseudovariedades resultantes serão decidíveis. Neste contexto Almeida introduziu uma forma mais forte de decidibilidade, chamada *hiperdecidibilidade* [5], a qual foi mais tarde refinada em colaboração com Steinberg [16, 17], originando a noção de *mansidão*. Recentemente foi proposta por Almeida [7] uma extensão da noção de mansidão, designada por *mansidão completa*.

A noção de mansidão (e suas generalizações) revelou-se uma das mais promissoras para a obtenção de resultados de decidibilidade de pseudovariedades. Motivados por esta observação, dedicamos a parte final deste trabalho a estas noções: mostramos que **LSl** é completamente mansa e provamos a mansidão de pseudovariedades supremo envolvendo **LSl**, onde **LSl** denota a pseudovariedade dos semi-reticulados locais.

Anteriormente, determinamos uma base de ω-identidades para a ω-variedade gerada por **LSl**. Estudamos também uma outra propriedade algorítmica, relacionada com a mansidão, da pseudovariedade **LSl**: o cálculo dos seus conjuntos pontuais e pontuais idempotentes.

Algorithmic properties involving the pseudovariety LSl

Abstract

Decidability problems are among the most important and fruitful of the area of finite semigroups and formal languages. It is known that decidability is not preserved by some of the most common pseudovariety operators, such as join, semidirect product, Mal'cev product, between others [1, 58, 25]. An idea which has been recently explored by several authors is to impose stronger properties on the pseudovarieties upon which the operators are to be applied that will guarantee that the resulting pseudovarieties will be decidable. In this context Almeida introduced a stronger form of decidability, called *hyperdecidability* [5], which was later refined in collaboration with Steinberg [16, 17], leading to the notion of *tameness*. Recently it was proposed by Almeida [7] an extension of the notion of tameness, called *complete tameness*.

The notion of tameness (and its generalizations) proved to be one of the most promising for obtaining results decidability of pseudovarieties. Motivated by this observation, we dedicate the final part of this work to these concepts: we show that **LSl** is completely tame and we prove the tameness of pseudovariety joins involving **LSl**, where **LSl** denotes the pseudovariety of local semilattices.

Previously, we determine a basis of ω-identities for the ω-variety generated by **LSl**. We also study another algorithmic property, related with tameness, of pseudovariety **LSl**: the computation of its pointlike and idempotent pointlike sets.

Conteúdo

Introdução

Em 1976 foi introduzida no tratado de Eilenberg [39] a noção de *pseudovariedade de semigrupos*, como sendo uma classe não vazia de semigrupos finitos fechada para subsemigrupos, produtos directos finitos e imagens homomorfas. Nesse tratado, Eilenberg provou o seu "teorema das variedades", que estabelece uma correspondência biunívoca entre estas classes de semigrupos e certas classes (variedades) de linguagens racionais. As pseudovariedades passaram a desempenhar um papel central na teoria de semigrupos finitos e desde logo se revelaram o meio mais adequado para estabelecer ligações com as teorias de linguagens racionais e autómatos, e mais recentemente com outras áreas da matemática tais como complexidade e lógicas temporais. Estas ligações e as consequentes aplicações em ciências da computação constituem a principal motivação da teoria.

Uma pseudovariedade diz-se decidível se existe algum algoritmo para testar se um dado semigrupo finito pertence ou não à pseudovariedade. Estabelecer a decidibilidade (ou a indecibilidade) de pseudovariedades é um dos problemas centrais da teoria de semigrupos finitos, sendo motivado principalmente pelo teorema das variedades de Eilenberg, e pelo problema da complexidade de Krohn-Rhodes de um semigrupo [47] que permanece em aberto há 40 anos. Este último problema surgiu após Krohn e Rhodes [47] terem estabelecido que todo o semigrupo finito pertence a algum produto semidirecto iterado da forma

$$\mathbf{A} * (\mathbf{G} * \mathbf{V})^n,$$

com $n \in \mathbb{N}_0$, onde $\mathbf{G}$ denota a pseudovariedade dos grupos finitos e $\mathbf{A}$ denota a pseudovariedade dos semigrupos finitos aperiódicos. Tal deu origem à noção de *complexidade* de um semigrupo finito S que é definida como sendo o menor n tal que $S \in \mathbf{A} * (\mathbf{G} * \mathbf{V})^n$.

Sendo as pseudovariedades frequentemente definidas pela aplicação a outras pseudovariedades de algum operador determinado por geradores, e sabendo-se que alguns dos operadores mais úteis como o supremo, o produto semidirecto e o produto de Mal'cev não preservam a decidibilidade [1, 58, 25], procurou-se obter propriedades mais finas para os argumentos de tais operadores que garantissem a decidibilidade dos seus valores. Uma das mais promissoras é a mansidão, introduzida por Almeida e Steinberg na tentativa de encontrar condições gerais que pudessem ser usadas para calcular produtos semidirectos de pseudovariedades [16].

Vários graus da noção de mansidão desempenham papéis importantes em áreas desde teoria geométrica de grupos e topologia geométrica até teoria de modelos. Uma noção mais fraca, mas que tem aplicações na decidibilidade, em particular de produtos de Mal'cev, é a de conjunto **V**-pontual num semigrupo finito, onde **V** é uma dada pseudovariedade. As origens desta noção podem-se situar num caso particular da conjectura de tipo II de Rhodes [44] provada por C. Ash [24]. Uma extensão da noção de mansidão, designada por mansidão completa, foi proposta recentemente por Almeida [7]. Ao contrário da mansidão, a mansidão completa é uma noção auto-dual e é mais adequada para trabalhar com outros operadores para além do produto semidirecto.

Observe-se que as pseudovariedades de semigrupos e de outras álgebras constituem uma adaptação para o universo das estruturas finitas do conceito, introduzido por Birkhoff, de *variedade de álgebras* de um certo tipo. A tentativa de transpor para o universo das pseudovariedades determinadas características das variedades de álgebras deparou-se com o facto de as variedades de álgebras possuirem objectos livres e tal não ser verdade para as pseudovariedades em geral. É neste contexto que surgem os semigrupos pró-**V**, ou profinitos no caso da pseudovariedade **S** de todos os semigrupos finitos, os quais possuem objectos livres. Para a sua construção consideramos os limites projectivos dos membros de uma pseudovariedade **V** munidos da topologia discreta. As *pseudopalavras* são os elementos do semigrupo pró-**V** livre gerado por A, $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$, que é o limite projectivo dos elementos A-gerados de **V**. De acordo com a introdução de [17], pode afirmar-se que as propriedades algébrico-combinatórias gerais dos elementos de **V** ficam codificadas em $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$. Encontra-se assim justificado o grande interesse, que tem surgido nas últimas três décadas, no conhecimento das propriedades dos semigrupos profinitos relativamente livres, isto é, semigrupos da forma $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$, para algum alfabeto A e pseudovariedade **V**.

Para provar a mansidão de uma pseudovariedade **V** específica é necessário, em geral, um conhecimento profundo acerca dos seus semigrupos pró-**V** livres. A mansidão é parametrizada por uma assinatura implícita σ. Provar a σ-mansidão de uma pseudovariedade **V** consiste em resolver dois subproblemas: mostrar que o problema da σ-palavra para $\mathbf{V}$ é decidível e que $\mathbf{V}$ é σ-redutível. Informalmente, $\mathbf{V}$ é σ-redutível quando dado um sistema de equações associado a um grafo finito com restrições racionais, a existência de uma solução por pseudopalavras módulo $\mathbf{V}$ implica a existência de uma solução do sistema por σ-palavras módulo $\mathbf{V}$ satisfazendo as mesmas restrições. Quando, em vez de sistemas associados a grafos, são considerados sistemas finitos genéricos de equações de σ-termos obtém-se a noção de σ-redutibilidade completa.

Neste trabalho foram resolvidos vários problemas envolvendo a pseudovariedade $\mathbf{LSl}$ dos semigrupos finitos localmente semi-reticulados, ou seja, semigrupos S tais que eSe é um semigrupo idempotente e comutativo para todos os idempotentes $e \in S$. Esta pseudovariedade está associada, através da correspondência de Eilenberg, à bem conhecida variedade das linguagens localmente testáveis, como mostrado independentemente por Brzozowski e Simon [28] e McNaughton [52].

Esta dissertação encontra-se dividida em três partes. A primeira parte é dedicada às definições e resultados que são preliminares do trabalho original apresentado. Estes preliminares são constituídos por três capítulos. O primeiro situa-se no âmbito da teoria de semigrupos, autómatos e linguagens. No segundo capítulo abordam-se as variedades algébricas, as pseudovariedades de semigrupos e as variedades de linguagens. Finalmente, o terceiro capítulo é dedicado aos semigrupos profinitos relativamente livres e às operações implícitas.

A segunda parte é constituída pelos Capítulos 4 a 6. O Capítulo 4 consiste na apresentação de alguns resultados básicos acerca dos semigrupos livres pró-$\mathbf{LSl}$. No Capítulo 5, exibimos uma base infinita de ω-identidades para a ω-variedade gerada pela pseudovariedade $\mathbf{LSl}$ e mostramos que essa ω-variedade não é finitamente baseada. A finalizar a segunda parte encontra-se o Capítulo 6, onde é apresentado um algoritmo para calcular os subconjuntos pontuais de um dado semigrupo finito com respeito à pseudovariedade $\mathbf{LSl}$. O algoritmo pode ser adaptado ao cálculo dos conjuntos pontuais idempotentes, como mostrado nesse capítulo.

Na terceira parte, constituída pelos Capítulos 7 e 8, são apresentados como resultados principais a mansidão completa de $\mathbf{LSl}$ e a mansidão de supremos envolvendo a pseudovariedade $\mathbf{LSl}$. Concretamente, no Capítulo 7 provamos a κ-redutibilidade completa de $\mathbf{LSl}$, onde κ denota a *assinatura canónica*, resultando a sua mansidão completa do facto de o problema da κ-palavra para $\mathbf{LSl}$ ser decidível. Refira-se que, a demonstração de que $\mathbf{LSl}$ é completamente κ-redutível permitiu obter a κ-plenitude de $\mathbf{LSl}$. No Capítulo 8 provamos que, se $\mathbf{V}$ é uma pseudovariedade κ-mansa que satisfaz a pseudoidentidade $xy^{\omega+1}z = xyz$, então a pseudovariedade supremo $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ também é κ-mansa. Como uma consequência, deduzimos que $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ é decidível. Em particular, os supremos $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{Ab}$, $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{G}$, $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{OCR}$ e $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{CR}$ são decidíveis. Aqui, $\mathbf{Ab}$, $\mathbf{OCR}$ e $\mathbf{CR}$ denotam, respectivamente, as pseudovariedades: dos grupos abelianos, dos semigrupos completamente regulares ortodoxos e dos semigrupos completamente regulares.

Parte I

Preliminares

Capítulo 1

Semigrupos, autómatos e linguagens

Este capítulo é destinado a introduzir notações, definições e resultados básicos da teoria de semigrupos, autómatos e linguagens. No entanto, aproveitamos também para recordar algumas definições de álgebra universal.

De um modo geral as demonstrações serão omitidas. As referências principais para a obtenção de mais pormenores e demonstrações são os livros de Howie [45], Almeida [4] e Eilenberg [39] no que diz respeito aos semigrupos, o livro de Lothaire [49] no respeitante às palavras e os livros de Pin [55] e Eilenberg [39] para as linguagens. As definições referentes às álgebras em geral são retiradas de Almeida [4, 7].

1.1 Elementos de Álgebra Universal

Comecemos por fixar alguma notação e intoduzir os conceitos de semigrupo, monóide e grupo; os quais vão ser utilizados, após a introdução do conceito de álgebra, como exemplos de estruturas algébricas.

Um *semigrupo* é um par ordenado $(S, \cdot)$ onde S é um conjunto não vazio e $\cdot$ é uma operação binária associativa definida sobre S (usualmente adoptaremos uma notação multiplicativa para a operação de semigrupo). Isto é, $\cdot$ é uma aplicação de $S \times S$ em S (que designaremos por *multiplicação*), que a cada elemento (s, t) de $S \times S$ associa um elemento $s \cdot t$ de S (o qual designaremos de *produto* de s por t), tal que, para quaisquer $r, s, t \in S$,

$$(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t). \tag{1.1}$$

Quando daí não advier confusão, escreveremos habitualmente S para designar um semigrupo $(S, \cdot)$; st em vez de $s \cdot t$, e por fim s^n (onde n é um inteiro positivo) em vez de $s \cdots s$, o produto de n cópias de s.

Seja $X \subseteq S$. Usaremos a notação $|X|$ para referir a cardinalidade do conjunto X. Em particular, o número $|S|$ representa a cardinalidade do conjunto S e será designado a *ordem* de S. Se $|S|$ é finito, S diz-se um *semigrupo finito*, caso contrário, diremos que S é um *semigrupo infinito*.

Um elemento 1_M de um semigrupo M diz-se um *elemento neutro* se

$$1_M \cdot m = m \cdot 1_M = m \tag{1.2}$$

para qualquer $m \in M$. Num semigrupo existe no máximo um elemento neutro. A notação 1_M será por vezes simplificada escrevendo-se apenas 1. Um *monóide* é um semigrupo com elemento neutro.

Um semigrupo S que possui a seguinte propriedade

$$\forall s, t \in S \; \exists u, v \in S, \; su = t \text{ e } vs = t,$$

diz-se um *grupo*. Esta não é a definição mais comum para grupo, mas é-lhe equivalente, na qual um grupo é definido como sendo um monóide G em que para cada elemento $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ tal que

$$g^{-1}g = gg^{-1} = 1_G. \tag{1.3}$$

Num grupo, os elementos g e g^{-1} são ditos *inversos* um do outro.

Observe-se agora que semigrupos, monóides e grupos são exemplos de estruturas algébricas, isto é, de conjuntos munidos de operações, agrupados em classes de acordo com o tipo de operações consideradas.

1.1.1 Exemplos de estruturas algébricas

Fixemos, para o restante desta secção, uma assinatura algébrica finita σ.

Comecemos por recordar que uma *assinatura algébrica* consiste de um conjunto $\mathcal{O}$ de *símbolos de operação* juntamente com uma *função de aridade* α de $\mathcal{O}$ em $\mathbb{N}$ que a cada símbolo de operação f associa a sua *aridade* $\alpha(f)$ (a qual tomaremos como sendo finita). Um símbolo de operação de aridade n diz-se n-ário. Em particular, os símbolos de aridade 0, 1 e 2 serão denominados, respectivamente, constantes, unários e binários. O conjunto de todos os símbolos n-ários de $\mathcal{O}$ será representado por $\mathcal{O}_n$.

Usualmente a aridade será subentendida e iremos referir-nos unicamente à assinatura σ. Consideraremos apenas o caso em que $\mathcal{O} = \{f_1, \ldots, f_k\}$ é um conjunto finito e denotaremos σ simplesmente por

$$\sigma = \{f_1, \ldots, f_k\}.$$

Sendo necessário explicitamos a aridade n_i de cada f_i. Por exemplo, a assinatura pode ser $\mu = \{\cdot\}$ onde $\cdot$ é um símbolo binário.

Uma *σ-álgebra* $\mathcal{A}$ consiste de um conjunto não vazio A, designado de *universo de* $\mathcal{A}$, juntamente com uma *função de interpretação* de domínio $\mathcal{O}$ que a cada símbolo de operação n-ário f associa uma função

$$f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$$

(ou seja, uma operação n-ária sobre A) dita de *interpretação de f em $\mathcal{A}$*. Não havendo perigo de confusão, a notação $f^{\mathcal{A}}$ é simplificada escrevendo-se apenas f.

Uma álgebra é dita *trivial, finita* ou *infinita* conforme o seu universo é um conjunto singular, finito ou infinito, respectivamente. Habitualmente, a função de interpretação será subentendida e por vezes confudiremos uma σ-álgebra com o seu universo.

Podemos portanto definir um semigrupo como uma μ-álgebra satisfazendo a identidade (1.1). Um monóide pode ser interpretado como uma μ'-álgebra satisfazendo as identidades (1.1) e (1.2), onde a assinatura $\mu' = \{\cdot, 1\}$ consiste de uma operação binária $\cdot$ e de uma constante 1 (pela sua unicidade podemos considerar o elemento neutro como a interpretação de uma constante). Finalmente, um grupo pode ser interpretado com uma μ''-álgebra satisfazendo as identidades (1.1), (1.2) e (1.3), onde a assinatura $\mu' = \{\cdot, 1, ^{-1}\}$ consiste de uma operação binária $\cdot$, de uma constante 1 e de uma operação unária $^{-1}$.

Aproveitamos agora para definir mais dois exemplos de estruturas algébricas que encontraremos neste trabalho, a saber, os reticulados e as álgebras de Boole. Consideremos a assinatura $\nu = \{\wedge, \vee\}$ onde $\wedge$ e $\vee$ são operações binárias. Definimos então um *reticulado* R como sendo uma ν-álgebra satisfazendo as seguintes identidades

(R.1) leis associativas: $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;

(R.2) leis comutativas: $x \wedge y = y \wedge x, \ x \vee y = y \vee x$;

(R.3) leis de idempotência: $x \wedge x = x, \quad x \vee x = x$;

(R.4) leis de absorção: $x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x$;

para quaisquer $x, y, z \in R$. Refira-se que todo o reticulado induz uma ordem parcial sobre o seu universo tal que quaisquer dois elementos admitem um supremo e um ínfimo. Inversamente, uma ordem parcial que verifica estas condições define um reticulado.

Um reticulado R diz-se *distributivo* se as seguintes identidades são satisfeitas

(D.1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

(D.2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;

para todos os elementos $x, y, z \in R$. Consideremos a assinatura $\nu' = \{\wedge, \vee, {}', 0, 1\}$ onde $\wedge$ e $\vee$ são os símbolos que constituem a assinatura ν, a operação ${}'$ é unária e 0 e 1 são constantes. Definimos por fim uma *álgebra de Boole* B como sendo uma ν'-álgebra satisfazendo as identidades (R.1)-(R.4), (D.1), (D.2) e

- $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 1 = 1$;
- $x \wedge x' = 0$, $x \vee x' = 1$;

para todos os elementos $x, y, z \in B$.

1.1.2 Subálgebras, homomorfismos, congruências, produtos directos

Nesta subsecção introduzimos, de forma não exaustiva, os conceitos de subálgebra, homomorfismo, congruência e produto directo, os quais podem ser definidos de forma similar para todas as classes de álgebras de um mesmo tipo. Esta abordagem mais geral é necessária para os Capítulos 2 e 5.

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas σ-álgebras com universos, respectivamente, A e B.

- **Subálgebras**

  Diz-se que $\mathcal{B}$ é uma *σ-subálgebra* de $\mathcal{A}$ se verifica as seguintes condições:

  - B é um subconjunto não vazio de A;
  - toda a operação de $\mathcal{B}$ é a restrição da operação correspondente de $\mathcal{A}$, ou seja, para todos os $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in \mathcal{O}_n$ e $a_1, \ldots, a_n \in B$, tem-se

$$f^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n).$$

Note-se que toda a intersecção não vazia de universos de σ-subálgebras de $\mathcal{A}$ é ainda o universo duma σ-subálgebra de $\mathcal{A}$. Assim, para um conjunto $X \subseteq A$

tal que $X \cup \mathcal{O}_0 \neq \emptyset$, pode-se definir a σ-subálgebra de $\mathcal{A}$ cujo universo é o mais pequeno que contém X, a qual diremos ser *gerada* por X. Neste caso, o conjunto X é chamado o *conjunto gerador* (diz-se também que X é um *conjunto de geradores*). Uma álgebra é dita *finitamente gerada* se ela admite um conjunto finito de geradores.

• **Homomorfismos**

Um *homomorfismo* de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ é uma função $\varphi : A \to B$ tal que, para todos os $f \in \mathcal{O}_n$ e $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$\varphi(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)).$$

Para além disso, diz-se que:

- $\mathcal{B}$ é *imagem homomorfa* de $\mathcal{A}$ se existe um homomorfismo sobrejectivo (dito um *epimorfismo*) de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$;

- φ é um *monomorfismo* se é injectivo;

- $\mathcal{A}$ é *isomorfa* a $\mathcal{B}$ se existe um homomorfismo bijectivo (dito um *isomorfismo*) de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$;

- um homomorfismo de uma álgebra $\mathcal{A}$ nela própria é um *endomorfismo*;

- $\mathcal{B}$ *divide* (ou é um *divisor* de) $\mathcal{A}$, e escreve-se $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$, se $\mathcal{B}$ é imagem homomorfa de alguma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Note-se qua a relação $\prec$ é transitiva. Em geral identificaremos duas álgebras isomorfas.

• **Congruências**

Uma *congruência* sobre $\mathcal{A}$ é uma relação de equivalência R sobre o seu universo tal que, para todos os $f \in \mathcal{O}_n$ e $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$, se tem

$$a_1 \, R \, b_1, \ldots, a_n \, R \, b_n \Longrightarrow f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \, R \, f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Seja R uma congruência sobre $\mathcal{A}$. Representa-se por a/R a classe de R contendo $a \in A$. O conjunto quociente A/R de todas as classes a/R, munido das operações

$$f^{\mathcal{A}/R}(a_1/R, \ldots, a_n/R) = f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)/R$$

onde $f \in \mathcal{O}_n$ e $a_1, \ldots, a_n \in A$, é uma σ-álgebra. Esta álgebra é denotada por $\mathcal{A}/R$ e diz-se a *álgebra quociente* de $\mathcal{A}$ por R.

A função natural

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A}/R \\ & a & \mapsto & a/R \end{array}$$

é um epimorfismo, chamado a *projecção canónica* de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}/R$.

• **Produtos directos**

Dada uma família não vazia $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ de σ-álgebras, o seu *produto directo* é a σ-álgebra

$$\mathcal{D} = \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i,$$

cujo universo é o produto cartesiano $\prod_{i\in I} A_i$ dos universos das álgebras $\mathcal{A}_i$, para a qual se define, para $f \in \mathcal{O}_n$, $b_1, \ldots, b_n \in \prod_{i\in I} A_i$ e $j \in I$,

$$f^{\mathcal{D}}(b_1, \ldots, b_n)(j) = f^{\mathcal{A}_j}(b_1(j), \ldots, b_n(j)).$$

Para cada $j \in I$, está-lhe associado o homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} p_j: & \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i & \to & \mathcal{A}_j \\ & b & \mapsto & b(j) \end{array}$$

o qual é designado por *projecção sobre a componente de índice* j.

Por convenção, para $I = \emptyset$, $\mathcal{D}$ é a álgebra trivial. Se $I = \{1, \ldots, n\}$ com $n \in \mathbb{N}$, escreve-se frequentemente $\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$ em vez de $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$. No caso de $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ para todo o $i \in I$, o produto directo representa-se por $\mathcal{A}^I$ e diz-se uma *potência* de $\mathcal{A}$.

1.1.3 Termos e álgebras livres

Recordamos agora algumas noções que posteriormente serão úteis.

• **Termos**

Seja X um conjunto tal que $X \cup \mathcal{O}_0 \neq \emptyset$. Os elementos de X são denominados *variáveis*. Denota-se por T_X^σ o conjunto dos σ-*termos* sobre X, sendo caracterizado como o mais pequeno conjunto que satisfaz as seguintes propriedades:

- $X \cup \mathcal{O}_0 \subseteq T_X^\sigma$;
- se $t_1, \ldots, t_n \in T_X^\sigma$ e $f \in \mathcal{O}_n$, então $f(t_1, \ldots, t_n) \in T_X^\sigma$.

O conjunto T_X^σ é munido naturalmente de uma estrutura $\mathcal{T}_X^\sigma$ de σ-álgebra definindo-se, para todo o $f \in \mathcal{O}_n$ e $t_1, \ldots, t_n \in T_X^\sigma$,

$$f^{\mathcal{T}_X^\sigma}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n).$$

A σ-álgebra assim obtida é designada por *álgebra dos σ-termos sobre X*.

• **Álgebras livres**

Para simplificar a notação, utilizaremos a partir daqui a mesma notação para uma σ-álgebra e o seu universo.

Seja $\mathcal{C}$ uma classe de σ-álgebras e seja F uma σ-álgebra gerada por um conjunto X. Diz-se que F satisfaz a *propriedade universal para $\mathcal{C}$ sobre X* se para todo o $C \in \mathcal{C}$ e para toda a função $\varphi : X \to C$ existe um único homomorfismo $\overline{\varphi} : F \to C$ que estende φ, ou seja, $\overline{\varphi}$ é tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\iota"'] & & C \\ & F \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

(isto é, $\varphi = \overline{\varphi} \circ \iota$) onde ι é a função de inclusão de X sobre F. Nestas condições, diz-se que a álgebra F é *livremente gerada por X*.

Note-se que, dadas duas álgebras $F_1, F_2 \in \mathcal{C}$, se F_1 e F_2 satisfazem a propriedade universal para $\mathcal{C}$ sobre X, então F_1 e F_2 são isomorfas.

Teorema 1.1.1 *Seja X um conjunto tal que $X \cup \mathcal{O}_0 \neq \emptyset$ e seja $\mathcal{C}$ a classe de todas as σ-álgebras sobre X. A álgebra dos σ-termos sobre X satisfaz a propriedade universal para $\mathcal{C}$ sobre X.*

1.2 Semigrupos

Dado que trabalharemos essencialmente com semigrupos, dedicamos esta secção à introdução de notações, definições e resultados básicos de semigrupos.

1.2.1 Definições básicas

A partir de um semigrupo S é sempre possível construir um monóide, o qual denotaremos por S^1. Se S tem elemento neutro, então $S^1 = S$. Caso contrário, tomamos um elemento que não pertence a S, denotado por 1, e definimos $S^1 = S \cup \{1\}$ munido da multiplicação que estende a multiplicação de S e que tem 1 como elemento neutro.

Um elemento s de um semigrupo S diz-se *cancelável à direita* (resp. *cancelável à esquerda*) se para quaisquer $r, t \in S$

$$rs = ts \Longrightarrow r = t$$

(resp. $sr = st$ implica $r = t$). Diz-se que s é *cancelável* se é simultaneamente cancelável à direita e à esquerda. Um semigrupo S é *cancelável* se todos os seus elementos são canceláveis. Note-se que se G é um grupo então G é cancelável.

Um semigrupo S diz-se *comutativo* se

$$st = ts,$$

para quaisquer $s, t \in S$.

A um elemento s de um semigrupo S que verifique $st = s$, para todo o $t \in S$, chama-se um *(elemento) zero à esquerda*. A noção de *(elemento) zero à direita* é definida dualmente. Se um semigrupo S possui um elemento que é simultaneamente zero à esquerda e zero à direita, então esse elemento é único e diz-se que é o *(elemento) zero* do semigrupo (habitualmente representado por 0 ou 0_S), e que S é um semigrupo com zero.

Um *idempotente* de um semigrupo S é um elemento e de S tal que

$$e = e^2.$$

Note-se que os elementos neutro e zero de um semigrupo, se existirem, são idempotentes. Denotaremos por $E(S)$ o conjunto dos idempotentes de S.

Um semigrupo S diz-se um *semigrupo idempotente* ou uma *banda* se todos os seus elementos são idempotentes, ou seja, se $S = E(S)$. Uma banda comutativa diz-se um *semi-reticulado*. Tem-se como exemplo fundamental de um semi-reticulado o monóide $U_1 = \{0, 1\}$, com dois elementos, munido do produto $00 = 01 = 10 = 0$ e $11 = 1$. Dado um conjunto A, o *conjunto das partes* (ou *conjunto potência*) de A, representado por $\mathcal{P}(A)$, munido da operação binária de união é um monóide. O monóide $\mathcal{P}(A)$ é também um semi-reticulado.

Sejam S um semigrupo e $s \in S$. Diz-se que s é *regular* se existe $t \in S$ tal que $sts = s$. Se todos os elementos de S são regulares, dizemos que S é um *semigrupo regular*. Se S é regular e os seus idempotentes formam um subsemigrupo, dizemos que S é um *semigrupo ortodoxo*. Um *inverso* de s é um elemento $s' \in S$ tal que

$$ss's = s \ \text{ e } \ s'ss' = s';$$

os elementos s e s' dizem-se *mutuamente inversos*. Note-se que um elemento de S que admite um inverso é necessariamente regular. Um elemento pode ter mais do que um inverso. Um *semigrupo inverso* é um semigrupo no qual todo o elemento tem um e um só inverso.

Exemplo 1.2.1 *Considere o conjunto B_2 constituído pelas seguintes matrizes*

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Equipado com a multiplicação usual de matrizes, B_2 é um semigrupo. Denotando

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

obtém-se

$$ab = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; ba = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto $B_2 = \{a, b, ab, ba, 0\}$. Além disso, as relações $aa = bb = 0$, $aba = a$ e $bab = b$ são suficientes para obter completamente a multiplicação em B_2. Refira-se que B_2 é um semigrupo inverso e, em particular, é também um semigrupo regular.

Um semigrupo S diz-se *nilpotente* se

$$es = se = e$$

para todos os $e \in E(S)$ e $s \in S$, ou seja, se S possui um único idempotente e esse idempotente é o elemento zero.

Sejam X e Y subconjuntos de um semigrupo S. O seu produto é o conjunto

$$XY = \{xy \in S \mid x \in X, \; y \in Y\}.$$

O conjunto $\mathcal{P}(S)$ munido desta operação é um semigrupo, chamado o *semigrupo das partes* (ou *semigrupo potência*) de S. Para um elemento $s \in S$, escreveremos simplesmente Xs (resp. sX) em vez de $X\{s\}$ (resp. $\{s\}X$).

Seja $U \subseteq \mathcal{P}(S)$. Usaremos a notação $\downarrow U$ para representar o conjunto

$$\bigcup_{X \in U} \mathcal{P}(X).$$

Recordemos que um subconjunto não vazio T de um semigrupo S é um *subsemigrupo* de S se $T^2 \subseteq T$. Um subsemigrupo T de um semigrupo S diz-se um *subgrupo* de S se T é um grupo para a operação em S. A noção formal de subgrupo de um grupo é coerente com esta noção. No caso de S ser um monóide, dizemos que T é um *submonóide* de S se T é um subsemigrupo de S que contém o elemento neutro de S. Por exemplo, para o monóide U_1 tem-se que o subconjunto

$\{0\}$ é um subsemigrupo de U_1 e é um monóide, mas não é um submonóide de U_1 pois não contém o elemento neutro 1_{U_1}. No entanto, $\{0\}$ é um subgrupo de U_1.

Se e é um idempotente de um semigrupo S então o conjunto eSe é um subsemigrupo de S que tem e como elemento neutro. O monóide eSe é designado por *monóide local* de S associado a e. Um semigrupo S diz-se *localmente semi-reticulado* (resp. *localmente trivial*) se para todo o idempotente $e \in S$, o monóide local eSe é um semi-reticulado (resp. $eSe = \{e\}$).

Tendo em conta que identificaremos dois quaisquer semigrupos isomorfos, usaremos por vezes a seguinte noção de subsemigrupo: T é um subsemigrupo de S se existe um monomorfismo de T em S. Esta definição é consistente devido ao próximo resultado.

Proposição 1.2.2 *Seja $\varphi : S \to T$ um homomorfismo de semigrupos.*

1) Se U é um subsemigrupo de S, então $\varphi(U)$ é um subsemigrupo de T.

2) Se V é um subsemigrupo de T e $\varphi^{-1}(V)$ é não vazio, então $\varphi^{-1}(V)$ é um subsemigrupo de S.

Seja X um conjunto não vazio. Denotaremos por $\mathcal{B}_X$ o conjunto de todas as relações binárias sobre X. Munindo o conjunto $\mathcal{B}_X$ da operação binária $\circ$, definida pela regra

$$\rho \circ \sigma = \{(x,y) \in X \times X \mid \exists z \in X \ : (x,z) \in \rho \ \text{ e } (z,y) \in \sigma\}$$

para quaisquer $\rho, \sigma \in \mathcal{B}_X$, obtém-se um semigrupo. A operação $\circ$ será designada por *composição*.

Para um conjunto não vazio X, denotamos por $\mathcal{T}_X$ o semigrupo de todas as funções de X em X. O conjunto $\mathcal{T}_X$ é um subsemigrupo de $\mathcal{B}_X$. Um semigrupo diz-se um *semigrupo de transformações* se for um subsemigrupo de $\mathcal{T}_X$, para algum conjunto X.

Dado um semigrupo S, a função

$$\begin{array}{ccc} S & \to & \mathcal{T}_{S^1} \\ s & \mapsto & \rho_s \end{array}$$

onde $\rho_s : S^1 \to S^1$ aplica $t \in S^1$ em ts é um monomorfismo. Esta observação dá origem ao próximo teorema, que é o análogo ao Teorema de Cayley para grupos e mostra que todo o semigrupo é um semigrupo de transformações [4, Secção 5.3].

Teorema 1.2.3 *Se S é um semigrupo, então S é um subsemigrupo de $\mathcal{T}_{S^1}$.*

1.2.2 Subsemigrupos gerados por uma parte do semigrupo

Seja S um semigrupo. Dado um subconjunto não vazio X de S, denotaremos por $\langle X\rangle$ o *subsemigrupo de S gerado por X*, o qual consiste de todos os elementos de S que podem ser escritos como produtos finitos de elementos de X, isto é, $x_1x_2\cdots x_n$, com $n\in\mathbb{N}$ e $x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$.

De particular interesse é o caso em que o *conjunto de geradores* é um conjunto singular $X=\{x\}$, no qual escreveremos simplesmente $\langle x\rangle$ em vez de $\langle\{x\}\rangle$. Neste caso referimo-nos a $\langle x\rangle$ como o *subsemigrupo monogénico* gerado pelo elemento x. Se o semigrupo S satisfaz $S=\langle x\rangle$ para algum x pertencente a S, dizemos que S é *monogénico.*

Proposição 1.2.4 *Seja S um semigrupo monogénico. Então, ou S é isomorfo ao semigrupo aditivo $\mathbb{N}$ ou S é finito.*

O resultado seguinte é fundamental em teoria de semigrupos finitos.

Proposição 1.2.5 *Se S é um semigrupo finito e $s\in S$, então existe $k\in\mathbb{N}$ tal que s^k é um idempotente.*

Demonstração. Seja $s\in S$. Como por hipótese S é finito, existem naturais distintos ℓ e m tais que $s^\ell=s^m$. Supondo $\ell<m$, seja $n=m-\ell$. Então $s^\ell=s^{\ell+n}$, donde $s^\ell=s^{\ell+2n}$, e mais geralmente, para cada $q\in\mathbb{N}_0$, tem-se $s^\ell=s^{\ell+qn}$. Pelo algoritmo de Euclides, todo o natural $t\geq\ell$ pode ser escrito na forma $t=\ell+qn+r$ para alguns $q\in\mathbb{N}_0$ e $r\in\{0,1,\ldots,n-1\}$. Logo, $s^t=s^{\ell+r}$. Conclui-se portanto que $\langle s\rangle=\{s,s^2,s^3,\ldots,s^{\ell+n-1}\}$.

Considere-se, agora, o menor natural i tal que $s^i=s^j$, para algum $j>i$. Tome-se o menor natural p, tal que $s^i=s^{i+p}$. Então, pelo exposto anteriormente,

$$\langle s\rangle=\{s,s^2,\ldots,s^i,s^{i+1},\ldots,s^{i+p-1}\},$$

e, pela escolha de i e p, os elementos $s,s^2,\ldots,s^{i+p-1}$ são todos distintos. Os números i e p são ditos, respectivamente, o *índice* e o *período* do elemento s.

Consideremos o subsemigrupo de $\langle s\rangle$, $G_s=\{s^i,s^{i+1},\ldots,s^{i+p-1}\}$. Prova-se que G_s é um grupo cíclico [45]. Conclui-se assim que o elemento neutro de G_s é o único idempotente de G_s e, consequentemente, o único idempotente de $\langle s\rangle$. ■

Resulta da demonstração anterior que $\langle s\rangle$ contém um único idempotente. Tal idempotente é representado usualmente por s^ω. Além disso, $s^{\omega-1}$ denota o inverso de $s^{\omega+1}(=s^\omega s)$ no subgrupo G_s que contém s^ω.

Diremos que um semigrupo finito S é *aperiódico* se, para todo o $s \in S$,

$$s^{\omega+1} = s^{\omega},$$

o que, pelo acima exposto, equivale a dizer que todos os subgrupos de S são triviais.

Uma consequência imediata da Proposição 1.2.5 é a seguinte propriedade.

Corolário 1.2.6 *Todo o semigrupo finito tem pelo menos um idempotente.*

Dado um semigrupo S, ao menor inteiro positivo n_S, caso exista, tal que para qualquer $s \in S$, s^{n_S} é um idempotente, chama-se o *expoente* de S.

O resultado seguinte afirma que existe sempre o expoente de um semigrupo finito.

Proposição 1.2.7 *Seja S um semigrupo finito. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo o $s \in S$, s^n é um idempotente.*

Uma demonstração do seguinte resultado clássico pode ser encontrada em [4, Proposição 3.7.1].

Lema 1.2.8 *Seja S um semigrupo finito e seja $k = |S|$. Para quaisquer $s_1, \ldots, s_k \in S$, existem inteiros $1 \leq i \leq j \leq k$, tais que,*

$$s_1 \cdots s_k = s_1 \cdots s_{i-1}(s_i \cdots s_j)^{\omega} s_{j+1} \cdots s_k.$$

1.2.3 Ideais

Um *ideal* de um semigrupo S é um subconjunto não vazio I de S tal que $S^1 I S^1 = I$. Todo o ideal de S é em particular um subsemigrupo de S. Um ideal I de um semigrupo S é dito um *ideal minimal* de S se, para todo o ideal J de S,

$$J \subseteq I \Rightarrow J = I,$$

ou seja, se I é um ideal minimal para a relação de inclusão. Um ideal minimal, se existir, é único e dizemos que é o *ideal mínimo* de S. De facto, se I e J são dois ideais minimais de S, então IJ é um ideal de S contido em $I \cap J$, mas como I e J são ideais minimais segue que $I = IJ = J$. Note-se que nem todos os semigrupos têm ideal minimal pois, por exemplo, o semigrupo aditivo dos inteiros positivos não possui ideal mínimo [48].

A existência de ideal mínimo está assegurada em dois casos importantes.

Exemplos 1.2.9 *Seja S um semigrupo.*

1) *Se S é finito, então S tem ideal mínimo (que se mostra ser o produto de todos os ideais de S).*

2) *Se S tem elemento zero, então $\{0\}$ é o ideal mínimo de S.*

Um semigrupo S diz-se *simples* se o único ideal de S é o próprio S. Portanto um semigrupo simples é ele próprio um ideal minimal.

1.2.4 Relações de Green

As relações de Green devem o seu nome a J. A. Green que as introduziu em 1951 e desempenham um papel fundamental no desenvolvimento da teoria de semigrupos. Algumas das mais importantes classes de semigrupos finitos podem ser definidas através delas.

Seja S um semigrupo. Comecemos por definir sobre S quatro relações de *quasi-ordem* (isto é, reflexivas e transitivas) denotadas por $\leq_{\mathcal{R}}$, $\leq_{\mathcal{L}}$, $\leq_{\mathcal{J}}$ e $\leq_{\mathcal{H}}$. Para $s, t \in S$,

$$\begin{array}{rcll} s \leq_{\mathcal{R}} t & \Longleftrightarrow & s = tv \quad \text{para algum} & v \in S^1 \ , \\ s \leq_{\mathcal{L}} t & \Longleftrightarrow & s = ut \quad \text{para algum} & u \in S^1 \ , \\ s \leq_{\mathcal{J}} t & \Longleftrightarrow & s = utv \quad \text{para alguns} & u, v \in S^1 \ , \\ s \leq_{\mathcal{H}} t & \Longleftrightarrow & s \leq_{\mathcal{R}} t \quad \text{e} \quad s \leq_{\mathcal{L}} t \ . & \end{array}$$

Cada uma delas dá origem a uma relação de equivalência do seguinte modo: para $\mathcal{K} \in \{\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{J}, \mathcal{H}\}$, define-se para quaisquer $s, t \in S$

$$s \mathcal{K} t \quad \text{se e só se} \quad s \leq_{\mathcal{K}} t \quad \text{e} \quad t \leq_{\mathcal{K}} s.$$

Consideremos ainda a menor relação de equivalência sobre S contendo $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$, denotada por $\mathcal{D}$. Como se pode verificar, as compostas $\mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ e $\mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ coincidem em cada semigrupo. Tem-se uma caracterização mais simples e útil

$$\mathcal{D} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}.$$

As relações $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{J}, \mathcal{H}$ e $\mathcal{D}$ são conhecidas como *relações de Green*.

O resultado que se segue é de grande importância no estudo dos semigrupos finitos.

Proposição 1.2.10 *Se S é um semigrupo finito, então $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ em S.*

Seja S um semigrupo. Para qualquer das relações de Green $\mathcal{K}$ sobre S, denotaremos por K_s a $\mathcal{K}$-classe contendo um dado elemento $s \in S$. Diz-se que S é $\mathcal{K}$-*trivial* se $\mathcal{K}$ é a relação de igualdade em S, isto é, se $K_s = \{s\}$ para todo o elemento $s \in S$. Se $\mathcal{K}$ é a relação universal em S, ou seja, se $K_s = S$ para todo o elemento $s \in S$, então S diz-se $\mathcal{K}$-*universal*.

Cada $\mathcal{D}$-classe num semigrupo S é tanto uma união de $\mathcal{R}$-classes como de $\mathcal{L}$-classes, enquanto que a intersecção não vazia de uma $\mathcal{R}$-classe e de uma $\mathcal{L}$-classe é uma $\mathcal{H}$-classe. Esta observação está na base do chamado *diagrama de Green* de um semigrupo. Neste diagrama, os elementos de cada $\mathcal{D}$-classe são organizados num rectângulo de quadrados onde cada quadrado constitui uma $\mathcal{H}$-classe, cada linha de quadrados uma $\mathcal{R}$-classe e cada coluna de quadrados uma $\mathcal{L}$-classe. Para indicar que uma dada $\mathcal{H}$-classe contém um idempotente é frequente representar um asterisco no quadrado correspondente a essa $\mathcal{H}$-classe.

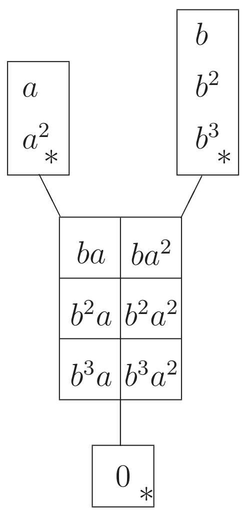
Antes de apresentarmos um exemplo com o diagrama de Green de um dado semigrupo, introduzimos a definição de semigrupo A-gerado onde A denota um conjunto não vazio.

Um semigrupo S diz-se *gerado por um conjunto* A ou A-*gerado* se existe uma função $\iota : A \to S$ tal que $\iota(A)$ gera S. Usualmente, abusando um pouco da notação, representamos o elemento $\iota(a)$ de S por a.

Exemplo 1.2.11 *Considere o semigrupo* $\{a, b\}$*-gerado*

$$S = \{a, a^2, b, b^2, b^3, ba, ba^2, b^2a, b^2a^2, b^3a, b^3a^2, 0\}$$

definido pelas relações $a^3 = a$; $b^4 = b$ *e* $ab = 0$. *O semigrupo* S *pode ser representado pelo seguinte diagrama de Green, que descreve a organização dos seus elementos de acordo com as relações de Green.*



Para finalizar apresentamos certas classes de semigrupos que podem ser definidas através das relações de Green, como referido anteriomente. Um semigrupo S é:

- um *grupo*, se $\mathcal{H}$ é a relação universal sobre S;
- *aperiódico*, se $\mathcal{H}$ é a relação trivial sobre S;
- *simples*, se $\mathcal{J}$ é a relação universal sobre S;
- *completamente regular*, se toda a $\mathcal{H}$-classe de S é um grupo.

1.2.5 Semigrupos compactos

Nesta subsecção introduzimos a definição de semigrupo compacto que será usada no decorrer deste trabalho e apresentamos algumas propriedades dos semigrupos compactos. A referência principal para a obtenção de mais pormenores e demonstrações é o livro de Carruth, Hildebrandt e Koch [29].

Por um *semigrupo topológico* entendemos um semigrupo S munido de uma topologia Hausdorff para a qual a multiplicação é contínua. Esta definição de semigrupo topológico é retirada de [29] mas não é unânime na literatura. Por exemplo, em [9] não é exigido que um semigrupo topológico seja Hausdorff. Note-se no entanto que, em [9] o axioma da separação de Hausdorff é assumido como parte integrante da definição de semigrupo compacto. Uma vez que neste trabalho estaremos essencialmente interessados em semigrupos compactos, a definição de semigrupo topológico escolhida não é determinante.

Um semigrupo topológico S diz-se um *semigrupo compacto* se para toda a família de conjuntos abertos $(U_j)_{j\in J}$, com $U_j \subseteq S$ para todo o j, tal que

$$\bigcup_{j\in J} U_j = S$$

existe um conjunto finito $\{j_1, j_2, \cdots, j_k\} \subseteq J$ tal que $U_{j_1} \cup U_{j_2} \cup \ldots \cup U_{j_k} = S$. Dado um qualquer semigrupo S, equipando S com a topologia discreta obtemos um semigrupo topológico. No caso de S ser finito obtemos um semigrupo compacto. Seguem algumas propriedades dos semigrupos compactos.

Teorema 1.2.12 *Seja S um semigrupo compacto. Então S tem um ideal mínimo, o qual é necessariamente fechado.*

Seja S um semigrupo topológico e seja X um subconjunto não vazio de S. O *fecho* de X em S, denotado por $\overline{X}$, é a intersecção dos subconjuntos fechados de S contendo X. O conjunto $\overline{\langle X \rangle}$ é um subsemigrupo de S e é designado o *subsemigrupo fechado de S gerado por X*. No caso de existir um elemento s de S tal que $S = \overline{\langle s \rangle}$, dizemos que o semigrupo topológico S é *monogénico*.

Teorema 1.2.13 *Seja S um semigrupo compacto monogénico. Então o seu ideal mínimo K é um grupo compacto monogénico, e qualquer subgrupo de S está contido em K.*

O Teorema 1.2.13 permite afirmar que, se s é um elemento de um semigrupo compacto S então $\overline{\langle s \rangle}$ contém um único idempotente, o qual será denotado por s^ω. Este idempotente está no ideal mínimo de $\overline{\langle s \rangle}$, que é um grupo, e denotaremos por $s^{\omega-1}$ o inverso de $s^{\omega+1}$ nesse grupo.

O próximo resultado é uma consequência do Teorema 1.2.13 e estende o Corolário 1.2.6 aos semigrupos compactos.

Corolário 1.2.14 *Seja S um semigrupo compacto. Então S contém um idempotente.*

1.3 Palavras

1.3.1 Palavras finitas

No que segue A denota um *alfabeto*, ou seja, um conjunto finito não vazio. Os elementos de A são chamados *letras*. Uma sequência finita $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de letras de A é denotada por $a_1 a_2 \cdots a_n$ e diz-se uma *palavra* sobre A. A sequência vazia é denotada por ε e diz-se a *palavra vazia*.

O conjunto de todas as palavras sobre A é denotado por A^* e A^+ representa o conjunto $A^* \setminus \{\varepsilon\}$. Munindo o conjunto A^+ (resp. A^*) com o *produto (de concatenação)* de palavras definido, para quaisquer duas palavras $u = a_1 \cdots a_n$ e $v = b_1 \cdots b_m$ de A^+, por

$$uv = a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m,$$

$$(u\varepsilon = u = \varepsilon u \ \text{ e } \ \varepsilon\varepsilon = \varepsilon),$$

obtém-se um semigrupo (resp. monóide), designado o *semigrupo livre gerado por A* (resp. *monóide livre gerado por A*). O próximo resultado justifica esta designação de A^+ (existe um resultado análogo para o monóide A^*).

Proposição 1.3.1 *Seja S um semigrupo. Se $\varphi : A \to S$ é uma função qualquer, então existe um e um só homomorfismo $\overline{\varphi} : A^+ \to S$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\iota"'] & & S \\ & A^+ \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

comuta (ou seja, $\varphi = \overline{\varphi} \circ \iota$), onde ι é a aplicação de inclusão de A sobre A^+.

O homomorfismo $\overline{\varphi}$, da proposição anterior, é chamado a *extensão natural* de φ a A^+ e é definido, para cada $w = a_1 a_2 \cdots a_n \in A^+$, em que $a_i \in A$ para todo o i, por

$$\overline{\varphi}(w) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)\cdots\varphi(a_n).$$

Seja w uma palavra sobre um alfabeto A. Denota-se por $|w|$ o *comprimento* da palavra w, que é o número de ocorrências de letras de A em w. O comprimento de ε é zero. O *conteúdo* de w é o conjunto de todas as letras de A que ocorrem em w e denota-se por $c(w)$.

Uma palavra $u \in A^*$ é um *prefixo* de uma palavra $w \in A^*$, e w é uma *extensão à direita* de u, se existe $z \in A^*$ tal que $w = uz$. Dualmente, $u \in A^*$ é um *sufixo* de $w \in A^*$, e w é uma *extensão à esquerda* de u, se existe $z \in A^*$ tal que $w = zu$. Para cada palavra $w \in A^*$ de comprimento maior ou igual a k, com $k \in \mathbb{N}_0$, denota-se por $p_k(w)$ (resp. $s_k(w)$) o prefixo (resp. sufixo) de w de comprimento k. Para uma palavra $w \in A^*$ denotamos por $i_k(w)$ (resp. $t_k(w)$) a palavra w se $|w| < k$ e a palavra $p_k(w)$ (resp. $s_k(w)$) no caso contrário.

O seguinte resultado é conhecido como o Teorema de Fine e Wilf [49].

Proposição 1.3.2 *Sejam $u, v \in A^+$. Se existem duas potências u^k e v^n de u e v, respectivamente, com o mesmo prefixo (ou sufixo) de comprimento pelo menos igual a $|u| + |v| - mdc(|u|, |v|)$, então u e v são potências de uma mesma palavra.*

Uma palavra $w \in A^+$ diz-se *primitiva* se não é potência de uma outra palavra, isto é, se $w = u^n$ para algum $u \in A^+$ e $n \geq 1$ então $w = u$ (e $n = 1$). Duas palavras w e z dizem-se *conjugadas* se existem palavras $u, v \in A^*$ tais que $w = uv$ e $z = vu$.

Lema 1.3.3 *Sejam $w, z \in A^+$. Se w é primitiva e z é conjugada de w, então z também é primitiva.*

Demonstração. Por hipótese z é conjugada de w e, portanto, existem palavras $u, v \in A^*$ tais que $w = uv$ e $z = vu$. Suponhamos que $z = r^k$, onde $r \in A^+$ e $k \in \mathbb{N}$. Então, existem $x, y \in A^*$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ tais que $r = xy$, $v = r^{k_1}x$, $u = yr^{k_2}$ e $k_1+k_2+1 = k$. Portanto, $w = uv = yr^{k_2}r^{k_1}x = (yx)^k$ donde, como w é primitiva, $k = 1$. Logo, $z = r$. Conclui-se assim que z é primitiva. ■

Dada uma ordem total sobre o alfabeto A, estende-se esta ordem a uma ordem total sobre A^+, $<_{lex}$, chamada *ordem lexicográfica*, a qual notaremos simplesmente por $<$. Para um par de palavras u, v de A^+ diz-se que $u < v$ se, ou $v \in uA^+$, ou existem $a, b \in A$ e $x, y, z \in A^*$ tais que $u = xay$ e $v = xbz$ com $a < b$.

Fixada uma ordem lexicográfica sobre A^+, uma palavra de *Lyndon* é uma palavra primitiva que é minimal na sua classe de conjugação. Por exemplo, para $A = \{a, b\}$ e $a < b$, a palavra $w = aba$ não é uma palavra de Lyndon. De facto, tomando $u = ab$ e $v = a$ tem-se $w = uv$ e $vu = aab < aba$. Agora, aab é uma palavra de Lyndon.

1.3.2 Palavras infinitas e palavras biinfinitas

Uma palavra *biinfinita* (resp. *infinita à direita*, *infinita à esquerda*) sobre A é uma sequência $w = (a_n)_n$ de letras de A indexada por $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{N}$, $-\mathbb{N}$). Denota-se $w(n) = a_n$ e diz-se que a_n é a letra de w *na posição* n. O conjunto de todas as palavras biinfinitas (resp. infinitas à direita, infinitas à esquerda) sobre A será denotado por $A^{\mathbb{Z}}$ (resp. $A^{\mathbb{N}}$, $A^{-\mathbb{N}}$).

Seja w uma palavra (finita ou infinita). Para inteiros i e j tais que $i \leq j$, a notação $w[i, j]$ representa a palavra $a_i \cdots a_j$. No caso em que $w \in A^{\mathbb{Z}}$ (resp. $w \in A^{\mathbb{N}}$) e $i \in \mathbb{Z}$ (resp. $i \in \mathbb{N}$), denota-se por $w[i, +\infty[$ a palavra infinita à direita $a_i a_{i+1} \cdots$ e diz-se que esta palavra é um *sufixo* (infinito) de w. Dualmente, se $w \in A^{\mathbb{Z}}$ (resp. $w \in A^{-\mathbb{N}}$) e $i \in \mathbb{Z}$ (resp. $i \in -\mathbb{N}$), denota-se por $w]-\infty, i]$ a palavra infinita à esquerda $\cdots a_{i-1}a_i$ e diz-se que esta palavra é um *prefixo* (infinito) de w.

Uma palavra $x \in A^*$ é um *factor* de uma palavra w (finita ou infinita), e w é uma *extensão* de x, se $x = \varepsilon$ ou $x = w[i, j]$, para alguns inteiros i e j com $i \leq j$. Neste caso, $w[i, j]$ diz-se uma *ocorrência* do factor x em w. Diremos que duas ocorrências $w[i, j]$ e $w[k, l]$ de factores numa palavra w são *disjuntas* (ou que *não se sobrepõem*) se os intervalos de inteiros $[i, j]$ e $[k, l]$ são conjuntos disjuntos. Para cada par de palavras $w, x \in A^*$, denotamos por $\mathrm{oc}(x, w)$ o número de ocorrências de x em w, e por $\mathrm{doc}(x, w)$ o número máximo de ocorrências disjuntas de x em

w. O conjunto de todos os factores de w de comprimento k, com $k \in \mathbb{N}_0$, será representado por $F_k(w)$.

Denotemos
$$A^\infty = A^+ \cup A^{\mathbb{N}} \quad \text{e} \quad A^{-\infty} = A^+ \cup A^{-\mathbb{N}}.$$

O produto de dois elementos w, z de A^∞ é definido como segue: se w, $z \in A^+$, então wz é definida do modo usual; palavras infinitas à direita são zeros à esquerda; finalmente, se w é uma palavra finita e z é uma palavra infinita à direita, então wz é a palavra infinita à direita definida por

$$(wz)_n \quad = \quad \begin{cases} w_n & \text{se } n \leq |w| \\ z_{n-|w|} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O produto de elementos de $A^{-\infty}$ é definido simetricamente. Note-se que, munidos com estas operações, A^∞ e $A^{-\infty}$ são semigrupos.

A noção de prefixo (resp. sufixo), anteriormente introduzida para palavras $w \in A^*$, é naturalmente estendida a palavras $w \in A^{\mathbb{N}}$ (resp. $w \in A^{-\mathbb{N}}$).

Uma palavra infinita à direita da forma $vu^{+\infty} = vuuu\cdots$, com $u \in A^+$ e $v \in A^*$, diz-se *ultimamente periódica* e u diz-se um *período* de $vu^{+\infty}$. Cada palavra ultimamente periódica $w \in A^{\mathbb{N}}$ admite uma única representação $w = vu^{+\infty}$, chamada a *forma normal de w*, tal que u é uma palavra de Lyndon e u não é um sufixo de v.

Exemplo 1.3.4 *Seja $w = abcaca^2ca^2ca^2\cdots$ uma palavra ultimamente periódica. Pode escrever-se*

$$w = abc(aca)^{+\infty} = abca(ca^2)^{+\infty} = abcac(a^2c)^{+\infty}.$$

Para esta última representação de w tem-se que $u = a^2c$ é um período de w tal que u é uma palavra de Lyndon e u não é um sufixo de $v = abcac$. Consequentemente, $abcac(a^2c)^{+\infty}$ é a forma normal de w.

Palavras infinitas à esquerda *ultimamente periódicas* são definidas simetricamente como sendo palavras da forma $u^{-\infty}v = \cdots uuuv$. Cada palavra ultimamente periódica $w \in A^{-\mathbb{N}}$ admite uma única representação $w = u^{-\infty}v$, chamada a *forma normal de w*, tal que u é uma palavra de Lyndon e u não é um prefixo de v. Uma palavra ultimamente periódica $w \in A^{\mathbb{N}}$ (resp. $w \in A^{-\mathbb{N}}$) que pode ser escrita na forma $w = u^{+\infty}$ (resp. $w = u^{-\infty}$) para algum $u \in A^+$, diz-se *periódica*.

Quando escrevemos uma palavra biinfinita específica, é necessário indicar qual a letra na posição 0. Fazemos isso colocando um "$\cdot$" à esquerda da letra. Por exemplo, dadas as palavras $x = (x_i)_{i\in -\mathbb{N}} \in A^{-\mathbb{N}}$ e $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, denotamos por $x \cdot y$ a palavra biinfinita

$$w = \cdots x_{-2}x_{-1} \cdot y_1y_2 \cdots .$$

Uma palavra biinfinita w diz-se *ultimamente periódica à esquerda* (resp. *ultimamente periódica à direita*) se $w = x \cdot y$ para alguma palavra infinita à esquerda $x \in A^{-\mathbb{N}}$ (resp. palavra infinita à direita $y \in A^{\mathbb{N}}$) ultimamente periódica. A palavra w diz-se *ultimamente periódica* se é simultaneamente ultimamente periódica à esquerda e ultimamente periódica à direita, e diz-se *periódica* se é possível escolher $x = u^{-\infty}$ e $y = u^{+\infty}$ para algum $u \in A^+$.

Define-se o *operador de translação* σ sobre $A^{\mathbb{Z}}$ como sendo a função σ de $A^{\mathbb{Z}}$ em $A^{\mathbb{Z}}$, definida para cada $w = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ por $\sigma(w) = (a_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$. A relação $\sim$ sobre $A^{\mathbb{Z}}$, dada por

$$w \sim z \quad \text{se e só se} \quad \exists n \in \mathbb{Z},\ w = \sigma^n(z),$$

é uma relação de equivalência. A classe de equivalência de um elemento $w \in A^{\mathbb{Z}}$ relativa a $\sim$ é chamada a *órbita* de w e é denotada por $\mathcal{O}(w)$. Nesta dissertação, na maior parte das vezes, estaremos interessados numa palavra biinfinita unicamente por causa dos seus factores. Uma vez que quaisquer duas palavras biinfinitas $\sim$-equivalentes têm os mesmos factores, usualmente não distinguiremos uma palavra biinfinita da sua órbita.

É bem sabido que uma palavra biinfinita w é periódica se e só se $w = \sigma^n(w)$ para algum $n > 0$ se e só se $\mathcal{O}(w)$ é um conjunto finito. Por exemplo, a órbita da palavra periódica $w = (aba)^{-\infty} \cdot (aba)^{+\infty}$ é

$$\mathcal{O}(w) = \{w, (baa)^{-\infty} \cdot (baa)^{+\infty}, (aab)^{-\infty} \cdot (aab)^{+\infty}\}. \tag{1.4}$$

Dadas palavras $x \in A^{-\mathbb{N}}$ e $y \in A^{\mathbb{N}}$, denotamos por xy a órbita da palavra biinfinita $x \cdot y$. Para $u \in A^+$, denotamos $u^{\infty} = u^{-\infty}u^{+\infty}$. Por exemplo, $(aba)^{\infty}$ representa a órbita $\mathcal{O}(w)$ em (1.4).

1.4 Grafos

Por um *grafo* Γ entendemos o que é usualmente chamado na literatura um multigrafo dirigido, dado por uma união disjunta $\mathcal{V}(\Gamma) \uplus \mathcal{E}(\Gamma)$ e duas funções de $\mathcal{E}(\Gamma)$ em $\mathcal{V}(\Gamma)$ denotadas por α_Γ e ω_Γ. Quando daí não advier confusão denotaremos estas funções simplesmente por α e ω. O conjunto $\mathcal{V}(\Gamma) \uplus \mathcal{E}(\Gamma)$ será denotado por Γ desde que não haja confusão entre conjunto e estrutura de grafo associada.

Os elementos de $\mathcal{V}(\Gamma)$ são os *vértices* de Γ e os elementos de $\mathcal{E}(\Gamma)$ são as *arestas* de Γ. As funções α e ω definem a *orientação* das arestas. Para qualquer aresta $\mathsf{e} \in \mathcal{E}(\Gamma)$, denota-se $\alpha(\mathsf{e}) \xrightarrow{\mathsf{e}} \omega(\mathsf{e})$ e diz-se que e *começa* em $\alpha(\mathsf{e})$ e *acaba* em $\omega(\mathsf{e})$, ou que $\alpha(\mathsf{e})$ é a *origem* de e e $\omega(\mathsf{e})$ é o *término* de e. Uma aresta com origem igual ao término é chamada um *lacete*.

Duas arestas e_1 e e_2 dizem-se *consecutivas* se

$$\omega(\mathsf{e}_1) = \alpha(\mathsf{e}_2).$$

Um *caminho* de Γ é uma sequência finita não vazia $\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n$ de arestas consecutivas de Γ, e é um *circuito* se $\alpha(\mathsf{e}_1) = \omega(\mathsf{e}_n)$. O inteiro n é denominado o *comprimento* do caminho.

Uma sequência $\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n$ diz-se um *caminho não orientado* se é possível inverter a orientação de algumas arestas de modo a obter um caminho. Similarmente, um caminho não orientado é um *circuito não orientado* se for possível inverter a orientação de algumas arestas de modo a obter um circuito.

Um grafo diz-se *fortemente conexo* se entre quaisquer dois vértices distintos v_1 e v_2 existe um caminho de v_1 para v_2. Diz-se *conexo* se para todo o par de vértices distintos de Γ existe um caminho não orientado entre eles. Um *subgrafo* de um grafo Γ é um grafo Γ' tal que $\mathcal{V}(\Gamma') \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$, $\mathcal{E}(\Gamma') \subseteq \mathcal{E}(\Gamma)$, e as funções $\alpha_{\Gamma'}$ e $\omega_{\Gamma'}$ são restrições de α_Γ e ω_Γ, respectivamente. A *componente conexa* (resp. *fortemente conexa*) de um vértice v de Γ é o maior subgrafo conexo (resp. fortemente conexo) de Γ contendo v.

Uma *etiquetagem* de um grafo Γ por um semigrupo S é uma função δ de Γ em S^1 tal que $\delta(\mathcal{E}(\Gamma)) \subseteq S$. A *etiqueta* de um caminho $\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n$ é por definição $\delta(\mathsf{e}_1) \cdots \delta(\mathsf{e}_n)$. Se $\gamma : \mathcal{E}(\Gamma) \to A^+$ é uma função, a *etiqueta* de um caminho não orientado $\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n$ é a forma reduzida da palavra

$$\gamma(\mathsf{e}_1)^{\epsilon_1} \cdots \gamma(\mathsf{e}_n)^{\epsilon_n}$$

no grupo livre gerado por A, onde $\epsilon_i = 1$ se no caminho não orientado a aresta e_i é lida no sentido directo e $\epsilon_i = -1$ no caso contrário. Dizemos que a função γ *comuta* se a etiqueta de qualquer circuito não orientado é igual a 1. Se γ é a restrição às arestas de uma etiquetagem δ de Γ, então dizemos também que δ comuta se γ comuta.

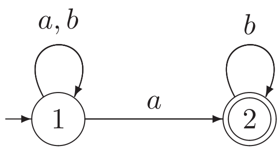
1.5 Autómatos e linguagens

1.5.1 Definições básicas

Um *autómato* é um quintuplo $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$, onde Q é o conjunto dos estados de $\mathcal{A}$, A denota o alfabeto, E é o conjunto das transições (um subconjunto de $Q \times A \times Q$), e I e F são subconjuntos de Q. Os elementos de I são os *estados iniciais* de $\mathcal{A}$, e os de F são os *estados finais*. Para uma transição $e = (p, a, q)$, também denotada $p \xrightarrow{a} q$, p é a *origem*, a é a *etiqueta*, e q é o *término*. Diz-se também que a transição e *começa* em p e *acaba* em q. Dizemos que um autómato é *finito* se o conjunto dos seus estados é finito. Recordemos que o alfabeto é assumido ser finito.

Um autómato é usualmente representado por um grafo: os vértices representam os estados e as arestas representam as transições. Os estados iniciais são assinalados com uma seta a entrar e os estados finais são indicados por um duplo círculo.

Exemplo 1.5.1 *Seja* $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$ *onde* $Q = \{1, 2\}$, $A = \{a, b\}$, $I = \{1\}$, $F = \{2\}$ *e* $E = \{(1, a, 1); (1, b, 1); (1, a, 2); (2, b, 2)\}$. *O autómato* $\mathcal{A}$ *é representado pelo diagrama seguinte:*



As definições usadas para grafos são adoptadas para os autómatos. Assim, uma transição que começa e acaba no mesmo estado, isto é, da forma (p, u, p) é chamada um *lacete*; duas transições (p, a, q) e (p', a', q') dizem-se *consecutivas* se $q = p'$. Um *caminho* p num autómato $\mathcal{A}$ é uma sequência finita não vazia

$$p : q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \dots q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n$$

de transições consecutivas. O estado q_0 é a *origem* de p e o estado q_n é o *término* de p. A *etiqueta* de p é a palavra $a_1 \cdots a_n$ sobre A e n, o número de transições que compõe p, é o seu *comprimento*. Convenciona-se ainda que existe um *caminho vazio* (ou seja, sem transições) de origem (e término) em cada estado e a sua etiqueta é a palavra vazia ε. Uma palavra $w \in A^+$ diz-se *reconhecida* por um autómato $\mathcal{A}$ se w é a etiqueta de pelo menos um caminho com origem num estado inicial e término num estado final.

Uma *linguagem* é um subconjunto do monóide livre A^*. Uma linguagem de A^+ é um subconjunto do semigrupo livre A^+. A *linguagem reconhecida* por um autómato $\mathcal{A}$ é o conjunto de todas as palavras reconhecidas por $\mathcal{A}$. No que segue trabalharemos em geral com linguagens de A^+; no entanto as definições e resultados podem ser adaptadas às linguagens de A^*.

Recordemos agora algumas operações definidas sobre linguagens.

- União de linguagens: $(L, K) \longmapsto L \cup K$.
- Concatenação de linguagens: $(L, K) \longmapsto LK$.
- Fecho positivo de uma linguagem: $L \longmapsto L^+$, onde

$$L^+ = \{u_1 \cdots u_n \in A^+ \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } u_1, \ldots, u_n \in L\},$$

ou seja, L^+ é o subsemigrupo de A^+ gerado por L.

Uma linguagem de A^+ diz-se *racional* se pode ser obtida a partir do conjunto vazio e dos subconjuntos singulares de A usando um número finito de vezes as operações: união, concatenação e fecho positivo.

1.5.2 Reconhecimento de linguagens

Seja $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F)$ um autómato finito. A cada palavra $w \in A^+$, corresponde uma relação binária sobre Q, denotada por $\mu(w)$, e definida por $(p, q) \in \mu(w)$ se existe um caminho em $\mathcal{A}$ de p para q com etiqueta w. O conjunto

$$\mu(A^+) = \{\mu(w) \mid w \in A^+\}$$

é um subsemigrupo de $\mathcal{B}_Q$. O semigrupo $\mu(A^+)$ é usualmente denotado por $S(\mathcal{A})$ e designado por *semigrupo de transição de* $\mathcal{A}$. A função $\mu : A^+ \to S(\mathcal{A})$ é um homomorfismo, chamado o *homomorfismo de transição de* $\mathcal{A}$.

A linguagem de A^+ reconhecida por $\mathcal{A}$ é o conjunto

$$L = \{w \in A^+ \mid \mu(w) \cap (I \times F) \neq \emptyset\} = \mu^{-1}(\mu(L)).$$

Dizemos que uma linguagem L de A^+ é *reconhecida* por um semigrupo S se existe um homomorfismo $\varphi : A^+ \to S$ tal que $L = \varphi^{-1}(\varphi(L))$.

O resultado seguinte enuncia a equivalência das noções de linguagem reconhecida por um autómato finito e linguagem reconhecida por um semigrupo finito.

Teorema 1.5.2 (Myhill [53]) *Uma linguagem L de A^+ é reconhecida por um autómato finito se e só se é reconhecida por um semigrupo finito.*

Esboço de uma demonstração. Tendo em consideração o descrito acima, facilmente concluímos que, se um autómato finito $\mathcal{A}$ reconhece uma linguagem L então o seu semigrupo de transição $S(\mathcal{A})$ reconhece L, o que justifica a implicação no sentido directo. Inversamente, se $L = \varphi^{-1}(\varphi(L))$ para um homomorfismo $\varphi : A^+ \to S$ num semigrupo finito S, pode construir-se um autómato que reconhece L como segue. Considerando a acção direita de A sobre S^1 definida por $s \cdot a = s\varphi(a)$, o autómato $\mathcal{A} = (S^1, A, E, \{1\}, \varphi(L))$, onde $E = \{(s, a, s \cdot a) \mid s \in S^1,\ a \in A\}$, reconhece L. Para mais detalhes consultar [55].

Uma linguagem de A^+ diz-se *reconhecível* se é reconhecida por algum autómato finito.

O próximo resultado é considerado como um dos fundadores da teoria das linguagens racionais e dos autómatos finitos.

Teorema 1.5.3 (Kleene [46]) *Uma linguagem de A^+ é racional se e só se é reconhecível.*

Consideremos um semigrupo S e um subconjunto P de S. Diz-se que uma congruência σ sobre S *satura* P se P é uma união de classes de equivalência módulo σ. Denotamos por σ_P a relação de equivalência sobre S definida por

$$s\,\sigma_P\,t \quad \text{se e só se} \quad \forall u, v \in S^1,\ (usv \in P \Leftrightarrow utv \in P),$$

a qual é uma congruência, chamada a *congruência sintáctica* de P sobre S. Além disso, σ_P é a maior congruência sobre S (no sentido de inclusão) que satura P. O semigrupo quociente S/σ_P é designado por *semigrupo sintáctico de P em S*. A congruência sintáctica foi introduzida em 1957 por Croisot [37] e é muito utilizada na teoria de semigrupos e linguagens.

Reparemos que toda a linguagem L de A^+ é reconhecida pelo seu *semigrupo sintáctico* $S(L) = A^+/\sigma_L$. Com efeito, se considerarmos a projecção canónica $\eta_L : A^+ \to S(L)$, que denominamos de *homomorfismo sintáctico de L*, pela definição de σ_L tem-se que $\eta_L^{-1}(\eta_L(L)) = L$.

O próximo resultado mostra que $S(L)$ é o menor semigrupo (no sentido da relação de divisão) que reconhece L.

Proposição 1.5.4 (Lallement [48]) *Uma linguagem L de A^+ é reconhecida por um semigrupo S se e só se $S(L)$ divide S.*

1.5.3 Linguagens localmente testáveis

A classe $\mathcal{L}t(A^+)$, das *linguagens localmente testáveis* sobre um alfabeto A, pode ser definida como sendo a álgebra de Boole gerada pelas linguagens da forma wA^*, A^*w e A^*wA^* com $w \in A^+$. Refira-se que esta é uma classe importante de linguagens racionais. O resultado seguinte, provado independentemente por Brzozowski e Simon [28] e McNaughton [52], fornece um algoritmo que permite decidir se uma linguagem é localmente testável ou não.

Teorema 1.5.5 *Uma linguagem $L \subseteq A^+$ é localmente testável se e só se $S(L)$ é um semigrupo finito localmente semi-reticulado.*

A relação $\sim_k$ sobre A^+ definida por

$$u \sim_k v \quad \text{se e só se} \quad i_{k-1}(u) = i_{k-1}(v),\ t_{k-1}(u) = t_{k-1}(v) \ \text{e}\ F_k(u) = F_k(v),$$

é uma congruência de índice finito. Alternativamente, uma linguagem L de A^+ é *localmente testável* se existe um natural k tal que L é saturada por $\sim_k$. Informalmente, para verificar se uma dada palavra u de A^+ pertence à linguagem L basta considerar os factores de u de comprimento k (a ordem pela qual estes factores ocorrem e a sua frequência não é relevante) e os seus prefixo e sufixo de comprimento $k-1$.

Observe-se que a terminologia usada para estas linguagens é justificada pelo facto do problema da pertença de uma dada palavra a uma destas linguagens poder ser decidido usando apenas informação "local". Note-se que, existe um tipo especial de autómatos, designados por *scanners*, que podem ser considerados como um modelo para computações que requerem apenas informação "local".

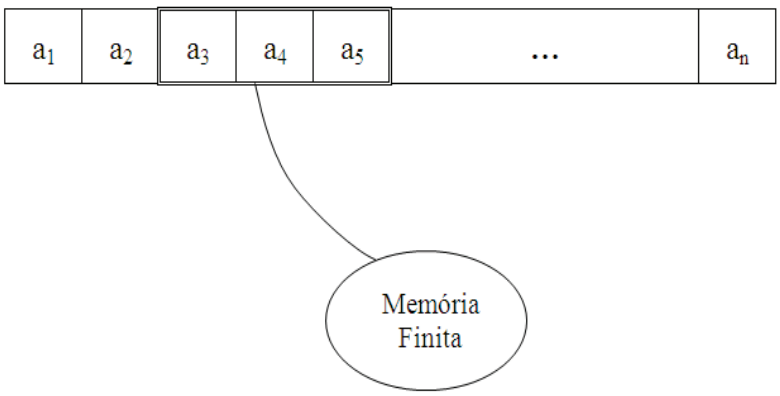


Ilustração de um scanner

Informalmente, um *scanner* é um autómato equipado com uma memória finita e uma janela "deslizante" de um comprimento fixo, digamos k, para fazer o scan da palavra de entrada. Para uma definição formal de scanner veja-se [26].

Podemos considerar um tipo especial de scanner em que a janela pode ser movida para trás da primeira letra e fora do alcance da última letra da palavra de entrada, permitindo assim a leitura dos factores de comprimento k e dos prefixos e sufixos de comprimento menor do que k. Por exemplo, para $k = 3$ e $bcbacb$ como palavra de entrada, representam-se no seguinte diagrama várias posições da janela.

$$\boxed{b}\,cbacb \qquad \boxed{bc}\,bacb \qquad \boxed{bcb}\,acb \qquad b\,\boxed{cba}\,cb \qquad \ldots \qquad bcbac\,\boxed{b}$$

Intuitivamente, para este tipo de scanner, podemos considerar a memória do scanner como um triplo (P, F, S), onde P codifica o conjunto de possíveis prefixos, F o conjunto de possíveis factores, e S o conjunto de possíveis sufixos.

Nestas condições, após o scan, o scanner memoriza os prefixos e sufixos de comprimento menor do que k e o conjunto dos factores de comprimento igual a k da palavra de entrada. Uma palavra é aceite pelo scanner se as listas de prefixos, factores e sufixos, obtidas após o scan, se encontram codificadas respectivamente por P, F e S. Assim, as linguagens localmente testáveis podem ser definidas em termos de scanners. Para uma abordagem mais formal consultar [26, Secção 2.3].

Existe um conceito de *semigrupo localmente testável*, estudado por Zalcstein em [67], que é similar ao de linguagem localmente testável. Um semigrupo S é *localmente testável* se é k-*testável* para algum $k > 0$, o que significa que, se duas palavras sobre o alfabeto S têm o mesmo conjunto de factores de comprimento k, o mesmo prefixo e o mesmo sufixo de comprimento $k-1$, então os produtos em S determinados por estas palavras são iguais. Também em [67], Zalcstein provou que uma linguagem é localmente testável se e só se o seu semigrupo sintáctico é localmente testável.

Capítulo 2

Variedades

Neste capítulo começamos por abordar as variedades algébricas e apresentar alguns resultados, destacando-se o teorema de Birkhoff que estabelece que as variedades são definidas por equações.

A Secção 2.2 é dedicada às variedades de semigrupos finitos, as quais designamos por pseudovariedades de semigrupos. É recordado, nessa secção, o teorema de Eilenberg-Schützenberger que mostra que as pseudovariedades são definidas "ultimamente" por equações.

Na Secção 2.3 são introduzidas as variedades de linguagens e é recordado um resultado de 1976, o teorema das variedades de Eilenberg, o qual constitui a formalização das fortes ligações que existem entre os semigrupos finitos e as linguagens racionais.

As referências principais para este capítulo são os livros de Almeida [4], de Eilenberg [39] e de Pin [55].

2.1 Variedades algébricas

O conceito de variedade algébrica deve-se a Birkhoff. Para a introdução deste conceito comecemos por referir alguns *operadores* sobre as classes de álgebras. Consideremos σ uma assinatura algébrica arbitrária. Fixemos uma classe $\mathcal{C}$ de σ-álgebras. Denota-se,

- $H(\mathcal{C})$ a classe das imagens homomorfas das álgebras de $\mathcal{C}$;

- $S(\mathcal{C})$ a classe das subálgebras de álgebras de $\mathcal{C}$;

- $P(\mathcal{C})$ a classe dos produtos directos de álgebras de $\mathcal{C}$.

Seja $O \in \{H, S, P\}$. Diz-se que $\mathcal{C}$ é *fechada* para o operador O se $O(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$. Diz-se que $\mathcal{C}$ é *fechada para a divisão* se $\mathcal{C}$ é fechada para os operadores H e S.

Uma classe não vazia de σ-álgebras, $\mathcal{V}$, diz-se uma *variedade de σ-álgebras* ou uma *σ-variedade* se é fechada para os operadores H, S e P. De forma equivalente, $\mathcal{V}$ é uma variedade se é fechada para a divisão e para produtos directos. Por exemplo, se $\mu = \{\cdot\}$ é a assinatura introduzida na Subsecção 1.1.1, a classe de todos os semigrupos forma uma variedade de μ-álgebras enquanto que a classe de todos os grupos não (pode ter-se um subsemigrupo de um grupo, o qual não é um grupo).

A intersecção de variedades também é uma variedade. Podemos portanto definir a variedade *gerada* por uma classe $\mathcal{C}$ de σ-álgebras, denotada por $V(\mathcal{C})$, como sendo a intersecção das variedades que contêm $\mathcal{C}$. Mais geralmente, temos o seguinte resultado [4, Proposição 1.3.4].

Proposição 2.1.1 *A variedade de σ-álgebras gerada por $\mathcal{C}$ é a classe dos divisores de produtos directos de elementos de $\mathcal{C}$.*

2.1.1 Variedades definidas por equações

Seja X um conjunto tal que $X \cup \mathcal{O}_0 \neq \emptyset$. Uma *$\sigma$-equação* sobre X é um par (t, r) de σ-termos sobre X, normalmente representada pela igualdade formal $t = r$. Uma equação da forma $t = t$ diz-se *trivial*. Denotaremos por Eq_X^σ o conjunto de todas as σ-equações sobre X.

Diz-se que uma σ-álgebra B *verifica* ou *satisfaz* uma σ-equação $t = r$, e escreve-se $B \models t = r$, se para qualquer função $\varphi : X \to B$, o único homomorfismo $\overline{\varphi} : T_X^\sigma \to B$ que estende φ é tal que $\overline{\varphi}(t) = \overline{\varphi}(r)$. Por exemplo, qualquer semigrupo satisfaz a equação $(xy)z = x(yz)$. Uma classe $\mathcal{C}$ de álgebras satisfaz um conjunto Σ de equações sobre X, e denota-se $\mathcal{C} \models \Sigma$, se

$$\forall B \in \mathcal{C}\ \forall t = r \in \Sigma,\ B \models t = r.$$

Dado um conjunto Σ de σ-equações, verifica-se que a classe de todas as σ--álgebras que satisfazem todas as equações de Σ é uma variedade, a qual se diz ser *definida* por Σ. A notação $[\Sigma]$ é utilizada para representar essa variedade. Uma classe de σ-álgebras $\mathcal{V}$ diz-se *equacional* se existe um conjunto Σ de equações tal que $\mathcal{V} = [\Sigma]$. Neste caso, diz-se que Σ é uma *base (de equações)* de $\mathcal{V}$.

O resultado fundamental seguinte foi demonstrado em 1935 por Birkhoff.

Teorema 2.1.2 (Birkhoff [27]) *Uma classe de álgebras do mesmo tipo é uma variedade se e só se ela é equacional.*

Consideremos agora $\Sigma \cup \{t = r\} \subseteq Eq_X^\sigma$. Denota-se por $\Sigma \models t = r$, e diz-se que Σ *implica* $t = r$, se para qualquer σ-álgebra B, $B \models \Sigma$ implica $B \models t = r$.

Vejamos como obter "construtivamente" $t = r$ a partir de Σ.

Definimos, recursivamente, os *subtermos* de um termo t por:

i) t é um subtermo de t;

ii) se $f \in \mathcal{O}_n$ e $f(t_1, \ldots, t_n)$ é um subtermo de t, então cada t_i também é um subtermo de t.

Seja Σ um conjunto de σ-equações sobre X. Chama-se *fecho dedutivo* de Σ ao menor subconjunto $D(\Sigma)$ de Eq_X^σ tal que $\Sigma \subseteq D(\Sigma)$ e:

1) $t = t \in D(\Sigma)$, para todo o $t \in T_X^\sigma$;

2) $t = r \in D(\Sigma) \Longrightarrow r = t \in D(\Sigma)$;

3) $t = r, r = s \in D(\Sigma) \Longrightarrow t = s \in D(\Sigma)$;

4) se $t = r \in D(\Sigma)$, s tem t como subtermo e s' é obtido a partir de s por substituição de uma ocorrência de t como um subtermo por r, então $s = s' \in D(\Sigma)$;

5) se $t = r \in D(\Sigma), x \in X, s \in T_X^\sigma$, t' e r' são obtidos de t e r, respectivamente, substituindo todas as ocorrências de x por s, então $t' = r' \in D(\Sigma)$.

Seja $\Sigma \cup \{t = r\}$ um conjunto de σ-equações sobre X. Dizemos por fim que $t = r$ é *dedutível* a partir das equações de Σ, e escrevemos $\Sigma \vdash t = r$, se existir uma *dedução* de $t = r$ a partir de Σ, isto é, uma sucessão finita

$$t_1 = r_1,\ t_2 = r_2,\ \ldots,\ t_n = r_n$$

de equações sobre X, tais que, cada $t_i = r_i$ ou pertence a Σ, ou é trivial ou é obtida de equações que a precedem na sucessão, usando uma das transformações indicadas em 2) a 5), e $t_n = r_n$ é a equação $t = r$.

Teorema 2.1.3 (Completude da lógica equacional-Birkhoff) *Seja* $\Sigma \cup \{t = r\} \subseteq Eq_X^\sigma$. *As condições seguintes são equivalentes:*

i) $\Sigma \models t = r$;

ii) $\Sigma \vdash t = r$;

iii) $t = r \in D(\Sigma)$.

Uma variedade diz-se *finitamente baseada* se admite uma base de equações finita. O resultado seguinte é bastante útil como veremos na Secção 5.1.

Corolário 2.1.4 *Seja Σ uma base qualquer de uma variedade finitamente baseada $\mathcal{V}$. Então Σ contém uma base finita de $\mathcal{V}$.*

Demonstração. Seja Υ uma base finita de $\mathcal{V}$. Então, para cada $\upsilon \in \Upsilon$, como $\mathcal{V} = [\Sigma]$, $\Sigma \models \upsilon$, donde $\Sigma \vdash \upsilon$. Como uma dedução de υ a partir de Σ envolve apenas um número finito de fórmulas de Σ, existe algum $\Sigma_\upsilon \subseteq \Sigma$ finito tal que $\Sigma_\upsilon \vdash \upsilon$. Então $\bigcup_{\upsilon \in \Upsilon} \Sigma_\upsilon$ é uma base nas condições pretendidas. ■

2.2 Pseudovariedades de semigrupos

Para as classes de σ-álgebras finitas dispomos de um conceito análogo ao de variedade definido na secção anterior. Trata-se do conceito de pseudovariedade de σ-álgebras introduzido por Eilenberg. Contudo, neste trabalho estaremos particularmente interessados nas pseudovariedades de semigrupos, noção que passamos a introduzir.

Uma *pseudovariedade* de semigrupos é uma classe não vazia, $\mathbf{V}$, de semigrupos finitos fechada para a divisão e produtos directos finitos. Dada uma pseudovariedade $\mathbf{V}$, o reticulado de todas as pseudovariedades contidas em $\mathbf{V}$, ditas *subpseudovariedades* de $\mathbf{V}$, denota-se por $\mathcal{P}_S(\mathbf{V})$.

Como exemplos de classes de semigrupos finitos que formam pseudovariedades de semigrupos podemos referir:

- $\mathbf{S}$, a classe dos semigrupos finitos;
- $\mathbf{I}$, a classe constituída pelos semigrupos com um único elemento, chamada a *pseudovariedade trivial*;
- $\mathbf{Sl}$, a classe dos semi-reticulados finitos;
- $\mathbf{G}$, a classe dos grupos finitos;
- $\mathbf{CR}$, a classe dos semigrupos finitos completamente regulares;

- $\mathbf{N}$, a classe dos semigrupos nilpotentes finitos;
- $\mathbf{K}$, a classe dos semigrupos finitos cujos idempotentes são zeros à esquerda;
- $\mathbf{D}$, a classe dos semigrupos finitos cujos idempotentes são zeros à direita.

Refira-se também as pseudovariedades definidas pelas relações de Green. Denotamos por $\mathbf{R}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{J}$ e $\mathbf{A}$ respectivamente as classes dos semigrupos finitos $\mathcal{R}$--triviais, $\mathcal{L}$-triviais, $\mathcal{J}$-triviais e $\mathcal{H}$-triviais, as quais são pseudovariedades de semigrupos.

Pelo contrário, as seguintes classes não constituem pseudovariedades de semigrupos:

- A classe dos monóides finitos;
- A classe dos semigrupos inversos finitos.

Para a primeira classe apresentada, note-se que um monóide finito pode ter subsemigrupos que não são monóides. Quanto à segunda tem-se, por exemplo, o semigrupo B_2 do Exemplo 1.2.1 que pertence à classe dos semigrupos inversos finitos. No entanto, se considerarmos $T = B_2 \backslash \{b\}$ verifica-se que T é um subsemigrupo de B_2 mas não é um semigrupo inverso, pois a não tem inverso em T.

Como referido inicialmente, a noção de pseudovariedade de semigrupos pode ser transferida para outras classes de álgebras finitas do mesmo tipo. Por exemplo, uma *pseudovariedade de monóides* é uma classe de monóides finitos fechada para a formação de submonóides, imagens homomorfas e produtos directos finitos. Como referido, a classe de todos os monóides finitos não é uma pseudovariedade de semigrupos, no entanto, é uma pseudovariedade de monóides a qual denotamos por $\mathbf{M}$.

A intersecção de pseudovariedades é ainda uma pseudovariedade. Dada uma classe $\mathcal{C}$ de semigrupos finitos, define-se a pseudovariedade *gerada* por $\mathcal{C}$ como sendo a intersecção das pseudovariedades que contêm $\mathcal{C}$, denotando-se por $\mathbf{V}(\mathcal{C})$. A pseudovariedade de semigrupos $\mathbf{V}(\mathcal{C})$ pode ainda ser definida de uma forma construtiva por:

$$\mathbf{V}(\mathcal{C}) = \{S \in \mathbf{S} : \exists n \in \mathbb{N}\ \exists S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{C},\ S \prec S_1 \times \ldots \times S_n\}.$$

No caso de $\mathcal{C} = \{S_1, \ldots, S_n\}$, escreve-se simplesmente $\mathbf{V}(S_1, \ldots, S_n)$ para denotar a pseudovariedade gerada por $\mathcal{C}$, a qual é também designada por *pseudovariedade gerada pelos semigrupos* $S_1, \ldots, S_n$. Note-se que $\mathbf{V}(S_1, \ldots, S_n) =$

$\mathbf{V}(S_1 \times \ldots \times S_n)$. Como exemplo de uma pseudovariedade gerada por um único semigrupo, refira-se a pseudovariedade de semigrupos $\mathbf{Sl}$, a qual é gerada pelo semi-reticulado U_1 [55].

A união de pseudovariedades não é em geral uma pseudovariedade. Por exemplo, $\mathbf{N} \cup \mathbf{Sl}$ não é uma pseudovariedade. Consideremos o semigrupo nilpotente $\{a, b\}$-gerado, $N = \{a, b, 0\}$, definido pelas relações $aa = ab = ba = bb = 0$ e o semi-reticulado U_1. De facto, $N \times U_1$ não é um semigrupo nilpotente (pois apesar de ter elemento zero possui um outro idempotente) nem é um semi-reticulado (porque nem todos os seus elementos são idempotentes). Isto só é possível porque $\mathbf{Sl}$ não é uma subpseudovariedade de $\mathbf{N}$ e também $\mathbf{N}$ não é uma subpseudovariedade de $\mathbf{Sl}$. Dadas duas pseudovariedades $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ tem-se que $\mathbf{V} \cup \mathbf{W}$ é uma pseudovariedade se e só se $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}$ ou $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$.

2.2.1 Pseudovariedades não equacionais

Nesta subsecção referimo-nos apenas a equações para semigrupos. Assim, consideremos a assinatura algébrica $\mu = \{\cdot\}$ onde $\cdot$ é uma operação binária. Note-se que, dado um alfabeto A, o semigrupo dos μ-termos sobre A coincide com A^+, o semigrupo livre gerado por A. Deste modo, no que segue, quando escrevemos "equação" subentende-se uma igualdade formal entre dois elementos de A^+.

Apesar dos conceitos de variedade e de pseudovariedade de semigrupos serem similares, o teorema de Birkhoff apresentado para variedades não se aplica no caso das pseudovariedades. Contudo, a classe dos semigrupos finitos que satisfazem um conjunto Σ de equações constitui uma pseudovariedade, que denotaremos por $[\Sigma]^F$ ou $[\![\Sigma]\!]$. Esta última notação foi introduzida agora por conveniência, mas será utilizada posteriormente num contexto mais abrangente. Observe-se que $[\Sigma]^F$ é a intersecção da variedade de semigrupos $[\Sigma]$ com a pseudovariedade $\mathbf{S}$, ou seja, é a subclasse dos semigrupos finitos da variedade de semigrupos $[\Sigma]$. Assim, uma pseudovariedade de semigrupos $\mathbf{V}$ diz-se *equacional* se $\mathbf{V} = [\![\Sigma]\!]$ para algum conjunto Σ de equações, ou seja, se $\mathbf{V} = \mathcal{V}^F$ para alguma variedade $\mathcal{V}$ de semigrupos. Neste caso, diz-se que Σ é uma *base de equações* de $\mathbf{V}$. As seguintes pseudovariedades são equacionais

$$\mathbf{S} = [\![x = x]\!], \quad \mathbf{I} = [\![x = y]\!], \quad \mathbf{Sl} = [\![xy = yx, x = x^2]\!].$$

Pelo contrário, as pseudovariedades $\mathbf{G}$ [41] e $\mathbf{N}$ [39] são pseudovariedades não equacionais uma vez que não satisfazem equações não triviais. Tem-se portanto o seguinte resultado.

Proposição 2.2.1 *Toda a pseudovariedade, distinta de* $\mathbf{S}$*, contendo* $\mathbf{G}$ *ou* $\mathbf{N}$ *é não equacional.*

Como já referimos, nem todas as pseudovaridades são equacionais. No entanto, o próximo teorema mostra que toda a pseudovariedade é a união de uma cadeia de pseudovariedades equacionais, podendo assim ser definida ultimamente através de equações.

Teorema 2.2.2 (Eilenberg-Schützenberger [39]) *Seja* $\mathbf{V}$ *uma pseudovariedade. Então existe uma sucessão* $(x_n = y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de equações tal que*

$$\mathbf{V} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{V}_k$$

onde $\mathbf{V}_k = \bigcap_{n\geq k} [\![x_n = y_n]\!]$*, ou seja,* $\mathbf{V}_k$ *é a pseudovariedade constituída pelos semigrupos que satisfazem todas as equações* $x_n = y_n$*, com* $n \geq k$*.*

Refira-se que a pseudovariedade $\mathbf{V} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{V}_k$ é constituída pelos semigrupos que satisfazem todas as equações $x_n = y_n$ a partir de uma certa ordem. Dizemos portanto que $\mathbf{V}$ é *definida ultimamente* pela sucessão $(x_n = y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como exemplos, apresentamos:

- $\mathbf{A} = \{S \in \mathbf{S} : \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p,\ S \models x^n = x^{n+1}\}$;
- $\mathbf{L} = \{S \in \mathbf{S} : \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p,\ S \models (xy)^n = y(xy)^n\}$;
- $\mathbf{G} = \{S \in \mathbf{S} : \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p,\ S \models x^{n!}y = yx^{n!} = y\}$;
- $\mathbf{N} = \{S \in \mathbf{S} : \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p,\ S \models x^n y = yx^n = x^n\}$.

Esta notação pode ser bastante simplificada se utilizarmos pseudoidentidades em vez de equações. O conceito de pseudoidentidade será introduzido mais à frente na Secção 3.5.

2.2.2 Operadores sobre pseudovariedades

- **Operadores de reticulados**

  Dadas duas pseudovariedades $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$,

1) o *ínfimo* $\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}$ é a intersecção $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$;

2) o *supremo* $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ é a pseudovariedade gerada pela união $\mathbf{V} \cup \mathbf{W}$.

Pode verificar-se que $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ é a classe de todos os divisores de todos os produtos directos da forma $S \times T$ com $S \in \mathbf{V}$ e $T \in \mathbf{W}$.

O cálculo da intersecção de duas pseudovariedades $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ não coloca grandes dificuldades. Se $\mathbf{V} = [\![\Sigma_1]\!]$ e $\mathbf{W} = [\![\Sigma_2]\!]$ (onde Σ_1 e Σ_2 são bases de pseudoidentidades para $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$, respectivamente), então

$$\mathbf{V} \cap \mathbf{W} = [\![\Sigma_1 \cup \Sigma_2]\!].$$

Pelo contrário, o cálculo de $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ é, em geral, muito complexo e este problema ainda está relativamente pouco estudado. A título de exemplo recordemos que $\mathbf{K} \wedge \mathbf{D} = \mathbf{N}$ e $\mathbf{K} \vee \mathbf{D} = \mathbf{LI}$.

- **Operador L**

Seja $\mathbf{V}$ uma pseudovariedade de semigrupos. Então, $\mathbf{V_M} = \mathbf{V} \cap \mathbf{M}$ é uma pseudovariedade de monóides. Utilizaremos, no que segue, a mesma notação para representar uma pseudovariedade de semigrupos $\mathbf{V}$ e a pseudovariedade de monóides $\mathbf{V_M}$.

Para uma pseudovariedade $\mathbf{V}$ de monóides denotamos

$$\mathbf{LV} = \{S \in \mathbf{S} \,|\, eSe \in \mathbf{V} \text{ para todo o } e \in E(S)\}.$$

Ou seja, $\mathbf{LV}$ é a classe dos semigrupos finitos cujos monóides locais estão em $\mathbf{V}$. A classe $\mathbf{LV}$ é uma pseudovariedade de semigrupos. Note-se que, se $\mathbf{V}$ é uma pseudovariedade de semigrupos, então $\mathbf{LV}$ pode ser definida da mesma forma e, claramente, $\mathbf{LV} = \mathbf{L}(\mathbf{V} \cap \mathbf{M})$.

Aproveitamos agora para introduzir duas pseudovariedades deste tipo, as quais desempenham um papel central neste trabalho. São elas a pseudovariedade $\mathbf{LI}$ dos semigrupos finitos localmente triviais, e a pseudovariedade $\mathbf{LSl}$ dos semigrupos finitos localmente semi-reticulados, isto é, semigrupos S tais que eSe é um semigrupo idempotente e comutativo para todos os idempotentes $e \in S$.

- **Operador $*$**

Sejam S e T semigrupos e denotemos por $\operatorname{End} S$ o monóide de todos os endomorfismos de S. Consideremos agora $\varphi : T^1 \to \operatorname{End} S$ um homomorfismo de monóides. Para $t \in T^1$ e $s \in S$, denotemos $\varphi(t)(s)$ por ${}^t s$. O *produto semidirecto* $S *_\varphi T$ é o semigrupo que consiste do conjunto $S \times T$ munido da seguinte operação

$$(s_1, t_1)(s_2, t_2) = (s_1 \, {}^{t_1} s_2, t_1 t_2),$$

para todos os $s_1, s_2 \in S$ e $t_1, t_2 \in T$. Em geral, o produto semidirecto de S e T denota-se simplesmente por $S * T$.

Dadas duas pseudovariedades de semigrupos $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$, denotamos por $\mathbf{V} * \mathbf{W}$ a pseudovariedade gerada por todos os produtos semidirectos da forma $S * T$ com $S \in \mathbf{V}$ e $T \in \mathbf{W}$, a qual é também designada por *produto semidirecto* de $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$.

A pseudovariedade $\mathbf{LSl}$ admite a seguinte decomposição em produto semidirecto

$$\mathbf{LSl} = \mathbf{Sl} * \mathbf{D},$$

a qual foi determinada independentemente por Brzozowski e Simon [28] e McNaughton [52].

• **Operador** Ⓜ

Um *morfismo relacional* $\mu : S \multimap T$ entre dois semigrupos S e T é uma função μ de S em $\mathcal{P}(T)$, tal que, para todos os $s_1, s_2 \in S$,

1) $\mu(s_1) \neq \emptyset$;

2) $\mu(s_1)\mu(s_2) \subseteq \mu(s_1 s_2)$.

Reparemos que se e é um idempotente de T tal que $\mu^{-1}(e) \neq \emptyset$ então $\mu^{-1}(e)$ é um subsemigrupo de S. De facto, se $s_1, s_2 \in S$ são tais que $e \in \mu(s_1)$ e $e \in \mu(s_2)$, então $e \in \mu(s_1)\mu(s_2) \subseteq \mu(s_1 s_2)$.

Sejam $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ duas pseudovariedades de semigrupos. Definimos o *produto de Mal'cev* de $\mathbf{V}$ por $\mathbf{W}$, e escrevemos $\mathbf{V} \circledm \mathbf{W}$, como sendo a pseudovariedade dos semigrupos finitos S para os quais existe um morfismo relacional

$$\mu : S \multimap T$$

num elemento T de $\mathbf{W}$ que verifique $\mu^{-1}(e) \in \mathbf{V}$ para cada idempotente e de T tal que $\mu^{-1}(e) \neq \emptyset$.

Pseudovariedades importantes admitem decomposições em produto de Mal'cev. Por exemplo, $\mathbf{J} = \mathbf{N} \circledm \mathbf{Sl}$, $\mathbf{R} = \mathbf{K} \circledm \mathbf{Sl}$ e $\mathbf{L} = \mathbf{D} \circledm \mathbf{Sl}$ [55].

Observe-se, por outro lado, que as pseudovariedades $\mathbf{S}$ e $\mathbf{A}$ são irredutíveis para o produto de Mal'cev, o produto semidirecto e o supremo [50].

2.3 Variedades de linguagens

Prosseguimos com a classificação das linguagens racionais que consiste em agrupá-las em variedades de linguagens racionais. Em seguida, apresentamos o notável teorema de Eilenberg [39] que estabelece uma bijecção natural entre as pseudovariedades de semigrupos e as variedades de linguagens racionais: a cada pseudovariedade $\mathbf{V}$ corresponde a variedade das linguagens racionais cujo semigrupo sintáctico pertence a $\mathbf{V}$.

Uma *variedade de linguagens* é uma correspondência $\mathcal{V}$ que associa a cada alfabeto A um conjunto $\mathcal{V}(A^+)$ de linguagens racionais de A^+ com as seguintes propriedades, para quaisquer alfabetos A e B,

1) $\mathcal{V}(A^+)$ é uma álgebra de Boole;

2) se $L \in \mathcal{V}(A^+)$ então, para qualquer $a \in A$, as linguagens $\{w \in A^+ : aw \in L\}$ e $\{w \in A^+ : wa \in L\}$ pertencem a $\mathcal{V}(A^+)$;

3) para todo o homomorfismo $\varphi : A^+ \to B^+$, $L \in \mathcal{V}(B^+)$ implica $\varphi^{-1}(L) \in \mathcal{V}(A^+)$.

Alternativamente, podemos considerar a variedade de linguagens $\mathcal{V}$ como sendo a classe das linguagens L sobre alfabetos específicos A tais que $L \in \mathcal{V}(A^+)$.

Seja $\mathbf{V}$ uma pseudovariedade. Uma linguagem L de A^+ diz-se $\mathbf{V}$-*reconhecível* se for reconhecida por um semigrupo de $\mathbf{V}$. Usaremos a notação $\mathcal{V}$ para representar a classe das linguagens racionais que associa a cada alfabeto A o conjunto $\mathcal{V}(A^+)$ das linguagens $\mathbf{V}$-reconhecíveis de A^+. Para uma linguagem L, ser reconhecida por um semigrupo de $\mathbf{V}$ equivale a dizer, devido à Proposição 1.5.4, que $S(L)$ pertence a $\mathbf{V}$. Segue o resultado anunciado.

Teorema 2.3.1 (Eilenberg [39]) *Para qualquer pseudovariedade* $\mathbf{V}$ *de semigrupos a classe* $\mathcal{V}$ *é uma variedade de linguagens. A correspondência* $\mathbf{V} \to \mathcal{V}$ *define uma bijecção entre as pseudovariedades de semigrupos e as variedades de linguagens.*

A classe das linguagens localmente testáveis, que denotamos anteriormente por $\mathcal{L}t$, pode também ser denotada por $\mathcal{LS}l$. Esta introdução de notação é baseada na caracterização das linguagens localmente testáveis apresentada no resultado seguinte, o qual consiste de uma reformulação do Teorema 1.5.5.

Teorema 2.3.2 (Brzozowski e Simon [28], McNaughton [52]) *A variedade de linguagens correspondente à pseudovariedade* $\mathbf{LSl}$ *é a classe das linguagens localmente testáveis.*

Note-se que, o Teorema 2.3.2 é uma particularização do Teorema 2.3.1.

Capítulo 3

Operações implícitas e semigrupos profinitos relativamente livres

Neste capítulo apresentamos os resultados fundamentais da teoria das operações implícitas e dos semigrupos profinitos relativamente livres. A teoria aqui apresentada baseia-se nos limites projectivos, mas existem outras abordagens alternativas [4, 7, 60]. No que segue, os limites projectivos constituem uma ferramenta fundamental: para cada pseudovariedade $\mathbf{V}$ de semigrupos e cada alfabeto A, associamos o limite projectivo dos elementos A-gerados de $\mathbf{V}$, chamado o semigrupo pró-$\mathbf{V}$ livre sobre A e denotado por $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$.

O conceito de operação implícita é introduzido na Secção 3.4, procedendo-se em seguida à identificação das operações implícitas A-árias sobre $\mathbf{V}$ com os elementos de $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$.

Na Secção 3.5 é introduzido o conceito de pseudoidentidade e recordado o teorema de Reiterman [57]. Em seguida são apresentados três exemplos simples, mas importantes para o decorrer deste trabalho, de semigrupos da forma $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$. O capítulo termina com uma secção dedicada às assinaturas implícitas.

Em geral não apresentaremos as demonstrações. Escolhemos os trabalhos de Almeida e Weil [20, 21], Almeida [9] e o livro de Rhodes e Steinberg [60] como referências principais para a obtenção de mais pormenores e demonstrações.

3.1 Limites projectivos

Um conjunto I munido de uma ordem parcial $\leq$ diz-se *dirigido* se para quaisquer $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ e $j \leq k$. Seja $(I, \leq)$ um conjunto dirigido e seja $(S_i)_{i\in I}$ uma família de álgebras tal que, para cada par (i,j) de elementos de I com $i \geq j$, existe um homomorfismo $\varphi_{i,j} : S_i \to S_j$. A família

$$\mathcal{F} = \{\varphi_{i,j} : S_i \to S_j \,|\, i,j \in I,\, i \geq j\}$$

diz-se um *sistema dirigido* se, para todos os $i,j,k \in I$ com $i \geq j \geq k$, verifica as seguintes condições (a notação id_{S_i} é usada para representar a função identidade em S_i)

(SD. 1.) $\varphi_{i,i} = id_{S_i}$;

(SD. 2.) $\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j} = \varphi_{i,k}$.

A família $\mathcal{F}$ é por vezes representada pela família de álgebras $(S_i)_{i\in I}$ com a família $(\varphi_{i,j})_{i,j\in I, i\geq j}$ subentendida. O *limite projectivo* (ou *limite inverso*) associado ao sistema dirigido $\mathcal{F}$, se for não vazio, é a subálgebra do produto directo $\prod_{i\in I} S_i$ definida por

$$\varprojlim \mathcal{F} = \{(s_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} S_i \,|\, i \geq j \Rightarrow \varphi_{i,j}(s_i) = s_j\}.$$

Chamamos *homomorfismo canónico* a cada restrição

$$\pi_i : \varprojlim (S_i)_i \to S_i$$

da projecção canónica de $\prod_{i\in I} S_i$ sobre S_i. Note-se que $\pi_j = \varphi_{i,j} \circ \pi_i$ para todos os $i,j \in I$ com $i \geq j$.

Seja $(S_i)_{i\in I}$ uma família de álgebras indexada por um conjunto dirigido $(I, \leq)$. Definimos um *sistema dirigido de homomorfismos* sobre uma álgebra T como sendo uma família de homomorfismos $(\rho_i : T \to S_i)_{i\in I}$ indexada por I, tal que

- para cada par (i,j) de elementos de I com $i \geq j$, existe um homomorfismo $\varphi_{i,j} : S_i \to S_j$, e estes homomorfismos tornam $(S_i)_{i\in I}$ um sistema dirigido;
- para todos os $i,j \in I$ com $i \geq j$, tem-se $\rho_j = \varphi_{i,j} \circ \rho_i$.

O limite projectivo possui a seguinte propriedade universal.

Proposição 3.1.1 *Seja $(\rho_i : T \to S_i)_{i\in I}$ um sistema dirigido de homomorfismos sobre uma álgebra T e seja $S = \varprojlim (S_i)_i$. Então, existe um único homomorfismo $\rho : T \to S$ tal que $\rho_i = \pi_i \circ \rho$ para todo o $i \in I$. Além disso, ρ é definido, para todo o $t \in T$, por $\rho(t) = (\rho_i(t))_i$.*

Esta propriedade define $\varprojlim (S_i)_i$ a menos de isomorfismo.

O homomorfismo ρ descrito na Proposição 3.1.1 diz-se *induzido* pelo sistema dirigido de homomorfismos $(\rho_i)_i$.

Uma vez que estaremos interessados em pseudovariedades de semigrupos, vamos agora assumir que as álgebras S_i são semigrupos finitos. Os conjuntos finitos serão considerados munidos com a topologia discreta. Obtemos assim um *sistema dirigido de semigrupos finitos*, isto é,

$$\mathcal{F} = \{\varphi_{i,j} : S_i \to S_j \,|\, i, j \in I,\, i \geq j\}$$

em que os S_i são semigrupos compactos e os homomorfismos $\varphi_{i,j} : S_i \to S_j$ são contínuos (ou seja, a imagem inversa de qualquer subconjunto aberto de S_j é um aberto em S_i). Consideremos agora o produto directo $\prod_{i\in I} S_i$ equipado com a topologia produto. Por definição, uma base de abertos para esta topologia é constituída pela família de todos os conjuntos da forma

$$\prod_{i\in I} U_i$$

onde U_i é um subconjunto aberto de S_i para cada $i \in I$, e $U_i \neq S_i$ apenas para um número finito de índices. Um *limite projectivo de semigrupos finitos* será então o limite projectivo de um sistema dirigido de semigrupos finitos, o qual consideraremos munido com a topologia induzida a partir da topologia produto.

O próximo resultado consiste de uma particularização de [40, Teorema 3.2.13].

Proposição 3.1.2 *Seja $(S_i)_{i\in I}$ um sistema dirigido em que os S_i são semigrupos compactos e os homomorfismos $\varphi_{i,j}$ são contínuos. Então, $\varprojlim(S_i)_i$ é um subsemigrupo compacto do produto directo $\prod_{i\in I} S_i$ e os homomorfismos canónicos $\pi_i : \varprojlim(S_i)_i \to S_i$ são contínuos.*

Da Proposição 3.1.2 resulta que um limite projectivo de semigrupos finitos é um semigrupo compacto e que os homomorfismos canónicos π_i são contínuos.

3.2 Semigrupos profinitos

Um *semigrupo profinito* é um semigrupo compacto S tal que, para quaisquer dois elementos distintos s_1 e s_2 de S, existe um homomorfismo contínuo φ de S num semigrupo finito T tal que $\varphi(s_1) \neq \varphi(s_2)$. Equivalentemente, um semigrupo profinito é definido como sendo um limite projectivo de semigrupos finitos.

Recordemos agora alguns conceitos de Topologia Geral. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é *conexo* se X não pode ser representado como a união disjunta, $X_1 \uplus X_2$, de dois subconjuntos abertos não vazios de X. O espaço X diz--se *totalmente desconexo* se as suas componentes conexas são conjuntos singulares e diz-se *zero-dimensional* se possui uma base de conjuntos abertos consistindo de abertos-fechados. Recordemos que um *aberto-fechado* de um espaço topológico é um conjunto da topologia que é simultaneamente aberto e fechado. Um espaço compacto é zero-dimensional se e só se é totalmente desconexo [65, Teorema 29.7]. Como referências para consultar estas ou outras definições e resultados básicos de Topologia Geral recomendam-se os livros de Engelking [40] e Willard [65].

O seguinte resultado é devido a Numakura [54]. Para uma demonstração veja--se, por exemplo, Almeida [7, Proposição 4.2].

Teorema 3.2.1 *Um semigrupo compacto é profinito se e só se é zero-dimensional.*

3.3 Semigrupos profinitos relativamente livres

Seja $\mathbf{V}$ uma pseudovariedade de semigrupos. Um *semigrupo pró-*$\mathbf{V}$ é um semigrupo compacto S tal que, para quaisquer dois elementos distintos s_1 e s_2 de S, existe um homomorfismo contínuo φ de S num semigrupo $T \in \mathbf{V}$ tal que $\varphi(s_1) \neq \varphi(s_2)$. Equivalentemente, um semigrupo pró-$\mathbf{V}$ é definido como sendo um limite projectivo de semigrupos de $\mathbf{V}$. É agora conveniente constatar que os semigrupos pró-$\mathbf{S}$ são exactamente os semigrupos profinitos. Seguem algumas propriedades dos semigrupos pró-$\mathbf{V}$, retiradas de [7, Secção 4].

1. O produto directo de semigrupos pró-$\mathbf{V}$ é pró-$\mathbf{V}$.
2. Um subsemigrupo fechado de um semigrupo pró-$\mathbf{V}$ também é pró-$\mathbf{V}$.
3. Um semigrupo finito é pró-$\mathbf{V}$ se e só se pertence a $\mathbf{V}$.

Seja A um alfabeto. Um semigrupo profinito A-gerado é uma função φ de A num semigrupo profinito S tal que o subsemigrupo gerado por $\varphi(A)$ é denso em S. Assim, por vezes diremos que S, um semigrupo profinito, é A-gerado se existe uma função $\varphi : A \to S$ que verifique as condições acima descritas, sendo φ referida como uma *função geradora de* S.

Consideremos a categoria $\mathcal{C}_A$ na qual os objectos são os semigrupos profinitos A-gerados e cujos homomorfismos (de semigrupos profinitos A-gerados) $\theta : \varphi \to \psi$ de $\varphi : A \to S$ em $\psi : A \to T$, são dados pelos homomorfismos contínuos de semigrupos $\theta : S \to T$ tais que $\theta \circ \varphi = \psi$. Note-se que entre dois objectos φ e ψ de $\mathcal{C}_A$ existe no máximo um homomorfismo de semigrupos profinitos A-gerados, o qual será designado por *homomorfismo de ligação*.

Podemos considerar um sistema dirigido em $\mathcal{C}_A$, dado por um conjunto dirigido I de índices, para cada $i \in I$ um objecto $\varphi_i : A \to S_i$ de $\mathcal{C}_A$ e, para cada par (i, j) de elementos de I com $i \geq j$, um homomorfismo de ligação

$$\varphi_{i,j} : \varphi_i \to \varphi_j$$

tal que para todos os $i, j, k \in I$ com $i \geq j \geq k$ são verificadas as condições $(SD.1)$ e $(SD.2)$.

Denotemos por $\mathbf{V}_0$ um conjunto contendo um representante de cada classe de isomorfismo dos elementos A-gerados de $\mathbf{V}$, os quais são objectos de $\mathcal{C}_A$. O conjunto $\mathbf{V}_0$ munido dos homomorfismos de ligação entre os seus elementos determina um sistema dirigido de semigrupos finitos. Assim, o limite projectivo deste sistema, que será denotado por $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$, é um semigrupo compacto. Note-se que $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ não depende, a menos de isomorfismo, da escolha de $\mathbf{V}_0$ [9]. Podemos assumir, por [20, Lema 1.3], que os homomorfismos canónicos $\pi_i : \overline{\Omega}_A\mathbf{V} \to S_i$ $(S_i \in \mathbf{V}_0)$ são sobrejectivos.

Para cada semigrupo profinito A-gerado $\varphi_S : A \to S$ com $S \in \mathbf{V}_0$, podemos considerar, de acordo com a Proposição 1.3.1, a extensão natural

$$\overline{\varphi}_S : A^+ \to S$$

de φ_S a A^+. Uma vez que S é finito, tem-se $\overline{\varphi}_S(A^+) = S$. Agora, pela propriedade universal dos limites projectivos, Proposição 3.1.1, estes homomorfismos $\overline{\varphi}_S$ induzem um homomorfismo único

$$\iota : A^+ \to \overline{\Omega}_A\mathbf{V}$$

o qual será designado o *homomorfismo natural* de A^+ em $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$. Em geral, ι é injectivo se e só se $\mathbf{V}$ não satisfaz qualquer equação sobre A não trivial. Nesse caso, podemo-nos referir a A^+ como um subsemigrupo de $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$. A restrição de ι a A será denotada por ι_A.

O teorema seguinte constitui um sumário das principais propriedades de $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ que podemos encontrar em [9, Secção 3.2].

Teorema 3.3.1 *Seja A um alfabeto e seja $\mathbf{V}$ uma pseudovariedade de semigrupos.*

1. *Se $\mathbf{V}$ não é a pseudovariedade trivial então a função $\iota_A : A \to \overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ é injectiva, pelo que os elementos de A podem ser identificados com as suas imagens por ι_A.*

2. *$\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ é um semigrupo topológico A-gerado (com ι_A uma função geradora) donde o subsemigrupo $\Omega_A\mathbf{V}$ gerado pela imagem de ι_A é denso em $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$.*

3. *Para todo o semigrupo pró-$\mathbf{V}$ S e para toda a função $\varphi : A \to S$ existe um único homomorfismo contínuo $\overline{\varphi} : \overline{\Omega}_A\mathbf{V} \to S$ tal que $\overline{\varphi} \circ \iota_A = \varphi$, ou seja, $\overline{\varphi}$ é tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\iota_A"'] & & S \\ & \overline{\Omega}_A\mathbf{V} \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Em particular, se A é um subconjunto de um conjunto finito B, então o único homomorfismo contínuo $\overline{\Omega}_A\mathbf{V} \to \overline{\Omega}_B\mathbf{V}$ induzido pela função inclusão $A \hookrightarrow B$ é injectivo [7, Proposição 4.6]. Identificaremos $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ com a sua imagem e portanto veremos $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ como o subsemigrupo fechado de $\overline{\Omega}_B\mathbf{V}$ gerado por A.

O semigrupo $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ será designado como o *semigrupo pró-$\mathbf{V}$ livre gerado por A*. Esta designação é justificada pelo ponto 3 do Teorema 3.3.1. No caso particular de $\overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ usaremos a designação de *semigrupo profinito livre gerado por A*. Note-se que, para alfabetos A e B com a mesma cardinalidade, $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ e $\overline{\Omega}_B\mathbf{V}$ são semigrupos compactos isomorfos, pelo que o semigrupo $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ pode ser também denotado por $\overline{\Omega}_n\mathbf{V}$ onde $n = |A|$. Um semigrupo profinito diz-se *relativamente livre* se é da forma $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ para algum alfabeto A e alguma pseudovariedade $\mathbf{V}$. Pelo ponto 3 do Teorema 3.3.1 resulta que $\Omega_A\mathbf{V}$ é o semigrupo livre na variedade gerada por $\mathbf{V}$.

Designaremos os elementos de $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ por *pseudopalavras módulo $\mathbf{V}$ sobre A* e os de $\overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ por *pseudopalavras sobre A*. Contudo, não havendo perigo de confusão, os elementos de $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ serão designados apenas por pseudopalavras. Além disso, os elementos de $\Omega_A\mathbf{V}$ (resp. $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}\setminus\Omega_A\mathbf{V}$) serão também referidos como sendo *pseudopalavras finitas* (resp. *pseudopalavras infinitas*).

Sejam S um semigrupo finito A-gerado e $\psi : \overline{\Omega}_A\mathbf{S} \to S$ um homomorfismo contínuo que respeita a escolha dos geradores. Denotamos por S^ε o monoíde obtido de S por acréscimo de um novo elemento neutro ε. Por convenção, o homomorfismo $(\overline{\Omega}_A\mathbf{S})^\varepsilon \to S^\varepsilon$ que estende ψ e que envia ε em ε será também denotado por ψ.

Dado $\pi \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$, dizemos que $\rho \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ é um *factor* (resp. um *prefixo*, um *sufixo*) de π se existem $\pi_1, \pi_2 \in (\overline{\Omega}_A\mathbf{S})^1$ tais que $\pi = \pi_1\rho\pi_2$ (resp. $\pi = \rho\pi_2$, $\pi = \pi_1\rho$). Uma palavra biinfinita w é um factor (biinfinito) de π se toda a palavra finita que é um factor de w é também um factor de π. Note-se que, uma palavra biinfinita w é um factor de π se e só se todo o elemento de $\mathcal{O}(w)$ é um factor de π.

Dada uma pseudopalavra π de $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$, a sequência $(\pi^{n!})_n$ converge em $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$. O seu limite, denotado por π^ω, é idempotente e, se σ é um homomorfismo contínuo de $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ num semigrupo finito S, então $\sigma(\pi^\omega)$ é a única potência idempotente de $\sigma(\pi)$.

O próximo resultado ([4, Corolário 5.6.2]) apresenta uma decomposição útil dos elementos infinitos dos semigrupos $\overline{\Omega}_A\mathbf{S}$.

Lema 3.3.2 *Se π é uma pseudopalavra infinita de $\overline{\Omega}_A\mathbf{S}$, então existem $\pi_1, \rho, \pi_2 \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ tais que $\pi = \pi_1\rho^\omega\pi_2$.*

Referimos agora uma situação na qual os semigrupos da forma $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ são particularmente simples de descrever. Se $\mathbf{V}$ é uma pseudovariedade gerada por um conjunto finito de semigrupos, então

$$\overline{\Omega}_A\mathbf{V} = \Omega_A\mathbf{V}.$$

Além disso, $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ é finito e é um elemento A-gerado de $\mathbf{V}$ [20]. A título de exemplo refira-se a pseudovariedade $\mathbf{Sl}$ a qual, como referido anteriormente, é gerada pelo semi-reticulado U_1 [55]. Portanto, $\overline{\Omega}_A\mathbf{Sl} = \Omega_A\mathbf{Sl}$ e $\overline{\Omega}_A\mathbf{Sl}$ é finito. De facto, não é difícil provar que, o semigrupo $\overline{\Omega}_A\mathbf{Sl}$ é isomorfo ao semigrupo $\mathcal{P}'(A) = \mathcal{P}(A)\backslash\{\emptyset\}$ com a operação de união, o qual é um subsemigrupo de $\mathcal{P}(A)$, e munido da topologia discreta.

Como exemplo de uma pseudovariedade em que $\overline{\Omega}_A\mathbf{V} = \Omega_A\mathbf{V}$ mas $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ é infinito apresentamos $\mathbf{V} = [\![x^2y = x^2 = yx^2]\!]$ [2].

Por outro lado, a pseudovariedade $\mathbf{N}$, dos semigrupos nilpotentes, constitui um caso em que $\overline{\Omega}_A\mathbf{V} \neq \Omega_A\mathbf{V}$. Como referido na Subsecção 2.2.1 a pseudovariedade $\mathbf{N}$ só satisfaz equações triviais, pelo que $\Omega_A\mathbf{N}$ é isomorfo a A^+. Refira-se que uma sucessão $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A^+ é convergente em $\overline{\Omega}_A\mathbf{N}$ quando é verificada uma das seguintes situações:

(1) w_n é constante, digamos igual a u, a partir de uma certa ordem;

(2) $\lim_n |w_n| = +\infty$.

No primeiro caso $(w_n)_n$ converge em $\overline{\Omega}_A\mathbf{N}$ para $u \in A^+$. No segundo caso $(w_n)_n$ converge em $\overline{\Omega}_A\mathbf{N}$ para um "ponto no infinito" que é um zero e que denotamos por 0 como habitualmente.

Portanto, $\overline{\Omega}_A\mathbf{N} = \Omega_A\mathbf{N} \cup \{0\}$ é a *compactificação de Alexandroff* de $\Omega_A\mathbf{N}$, ou seja, $\overline{\Omega}_A\mathbf{N}$ é o semigrupo topológico obtido de $\Omega_A\mathbf{N}$ pela adição de um "ponto no infinito", o qual é um zero. Os semigrupos $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ com $\mathbf{V} \in \{\mathbf{K}, \mathbf{D}, \mathbf{LI}\}$ serão abordados posteriormente na Secção 3.6.

Apresentamos agora uma importante aplicação do ponto 3 do Teorema 3.3.1. Se $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ são duas pseudovariedades tais que $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{W} \neq \mathbf{I}$, então visto que $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ é um semigrupo pró-$\mathbf{W}$ existe um único homomorfismo contínuo

$$p_{\mathbf{W},\mathbf{V}} : \overline{\Omega}_A\mathbf{W} \to \overline{\Omega}_A\mathbf{V}$$

cuja restrição a A é a função geradora $\iota_A : A \to \overline{\Omega}_A\mathbf{V}$. Este homomorfismo é sobrejectivo e é designado por *projecção canónica* de $\overline{\Omega}_A\mathbf{W}$ em $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$. Se $\pi \in \overline{\Omega}_A\mathbf{W}$, dizemos que $p_{\mathbf{W},\mathbf{V}}(\pi)$ é a *restrição* de π a $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ ou a *projecção* de π em $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$. Usaremos a notação simplificada $p_{\mathbf{V}}$ para denotar $p_{\mathbf{S},\mathbf{V}}$.

No caso particular em que $\mathbf{V} = \mathbf{Sl} \subseteq \mathbf{W}$, denotamos $p_{\mathbf{W},\mathbf{Sl}}$ por c e designamos $c(\pi)$ por *o conteúdo* de π. Recordemos que $\overline{\Omega}_A\mathbf{Sl}$ é isomorfo a $\mathcal{P}'(A)$ e $c(a) = \{a\}$ para todo o $a \in A$.

A topologia de $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ pode ser vista como a topologia induzida por uma distância d, conforme o breve resumo seguinte. As demonstrações podem ser consultadas em [9, Subsecção 3.4].

Seja S um semigrupo profinito. Para $u, v \in S$, denotamos por $r(u, v)$ a cardinalidade mínima de um semigrupo finito T que admite um homomorfismo contínuo $\varphi : S \to T$ com $\varphi(u) \neq \varphi(v)$. Definimos agora uma distância d sobre S fazendo

$$\begin{array}{rccl} d: & S \times S & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ & (u,v) & \mapsto & \begin{cases} 2^{-r(u,v)} & \text{se } u \neq v \\ 0 & \text{caso contário.} \end{cases} \end{array}$$

Pode verificar-se que esta função d é mesmo uma *ultramétrica*, isto é, satisfaz as seguintes propriedades, para todos os $u, v, w \in S$,

- $d(u, v) = 0$ se e só se $u = v$;
- $d(u, v) = d(v, u)$;
- $d(u, w) \leq max\{d(u, v), d(v, w)\}$.

A função d será designada por *métrica natural* sobre S.

Apresentamos agora o resultado anunciado, o qual consiste de uma particularização de [9, Proposição 3.9].

Proposição 3.3.3 *Para um semigrupo profinito relativamente livre* $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$, *a topologia de* $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ *coincide com a topologia induzida pela métrica natural.*

O resultado seguinte ([9, Teorema 3.10]) fornece uma construção alternativa de $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$.

Teorema 3.3.4 *O completado do semigrupo* $\Omega_A\mathbf{V}$ *com respeito à métrica natural é um semigrupo profinito isomorfo a* $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$.

A finalizar esta secção apresentamos um resultado que estabelece uma interessante ligação entre a topologia dos semigrupos pró-**V** livres e as propriedades combinatórias da variedade das linguagens **V**-reconhecíveis, quando **V** contém **N**. Para um resultado mais geral veja-se [4, Subsecção 3.6] ou [9, Subsecção 3.3].

Proposição 3.3.5 *Seja* $\mathbf{V}$ *uma pseudovariedade tal que* $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{V}$. *Uma linguagem* L *de* A^+ *é* $\mathbf{V}$*-reconhecível se e só se o fecho topológico,* $\overline{L}$, *de* L *em* $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ *é um aberto-fechado.*

Além disso, a colecção de todos os $\overline{L}$, *com* L *uma linguagem* $\mathbf{V}$*-reconhecível de* A^+, *constitui uma base para a topologia de* $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$.

3.4 Operações implícitas e semigrupos pró-V

Introduzimos nesta secção a noção de operação implícita. As pseudopalavras de um semigrupo profinito relativamente livre $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ são por vezes designadas também por operações implícitas A-árias sobre **V**. Justificamos, no que segue, esta terminologia.

Seja **V** uma pseudovariedade de semigrupos e consideremos $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ um alfabeto de cardinalidade $n \in \mathbb{N}$. Dado um semigrupo pró-**V** S, podemos interpretar S^A quer como o conjunto de todas as funções de A em S quer como uma potência directa de S, podendo neste último caso ser também representado por S^n. Pelo ponto 3 do Teorema 3.3.1, para cada $\varphi \in S^A$ existe um único homomorfismo contínuo $\overline{\varphi} : \overline{\Omega}_A\mathbf{V} \to S$ tal que $\overline{\varphi} \circ \iota_A = \varphi$. Isto permite-nos interpretar cada $\pi \in \overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ como uma operação $|A|$-ária (ou n-ária) em S, nomeadamente a aplicação $\pi_S : S^A \to S$ que envia cada $\varphi \in S^A$ em $\overline{\varphi}(\pi)$.

A função π_S assim definida, designada a *interpretação natural* de π como uma operação em S, é contínua e *comuta com homomorfismos* entre dois semigrupos pró-**V**, ou seja, se $\psi : S \to T$ é um homomorfismo contínuo entre dois semigrupos pró-$\mathbf{V}$ então o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} S^A \arrow[r, "\pi_S"] \arrow[d, "\psi^A"'] & S \arrow[d, "\psi"] \\ T^A \arrow[r, "\pi_T"] & T \end{tikzcd}$$

isto é, $\psi \circ \pi_S = \pi_T \circ \psi^A$ onde $\psi^A(\varphi) = \psi \circ \varphi$ para toda a função φ de S^A.

Uma operação $\pi = (\pi_S)_{S \in \mathbf{V}}$ com uma interpretação $\pi_S : S^A \to S$ sobre cada $S \in \mathbf{V}$ é chamada uma *operação implícita A-ária* (ou n-ária) *sobre* $\mathbf{V}$ se comuta com todo o homomorfismo $\psi : S \to T$ entre elementos de $\mathbf{V}$. Munido da operação binária definida para π, ρ operações implícitas A-árias sobre $\mathbf{V}$, $S \in \mathbf{V}$ e $\varphi \in S^A$, por

$$(\pi \cdot \rho)_S(\varphi) = \pi_S(\varphi) \cdot \rho_S(\varphi),$$

o conjunto de todas as operações implícitas A-árias sobre $\mathbf{V}$, que denotamos (provisoriamente) por $I_A\mathbf{V}$, forma um semigrupo. Como exemplos, os mais simples, de operações implícitas sobre $\mathbf{V}$ temos as operações explícitas que passamos a definir.

Para cada $a_i \in A$, x_{a_i} (também denotada por a_i desde que não haja confusão entre letra e operação ímplicita) é designada por *projecção sobre a i-ésima componente* e é definida para $S \in \mathbf{V}$, como sendo a aplicação

$$\begin{array}{cccc} (x_{a_i})_S : & S^n & \to & S \\ & (s_1, \ldots, s_n) & \mapsto & s_i. \end{array}$$

Os elementos do subsemigrupo de $I_A\mathbf{V}$ gerado pelo conjunto das projecções $\{x_{a_1}, \ldots, x_{a_n}\}$ dizem-se *operações explícitas* A-árias (ou n-árias) sobre $\mathbf{V}$.

Refira-se que as operações explícitas n-árias são operações implícitas n-árias induzidas pelas palavras de A^+. Por exemplo, se $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, a palavra finita $u = a_1 a_2 a_3^2 a_2 a_1$ define uma operação explícita 3-ária sobre $\mathbf{V}$, em que para cada $S \in \mathbf{V}$, a aplicação $u_S : S^3 \to S$ é definida, para cada $(s_1, s_2, s_3) \in S^3$, por

$$u_S(s_1, s_2, s_3) = s_1 s_2 s_3^2 s_2 s_1.$$

Pela interpretação natural tem-se que a cada elemento de $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ está associada uma operação implícita A-ária sobre $\mathbf{V}$. Por exemplo, para $A = \{a, b\}$, a pseudopalavra $\pi = ab$ é interpretada, em cada $S \in \mathbf{V}$, como a multiplicação de $S \times S$ em S. Consideremos assim a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Theta : & \overline{\Omega}_A\mathbf{V} & \rightarrow & I_A\mathbf{V} \\ & \pi & \mapsto & (\pi_S)_{S\in\mathbf{V}}. \end{array}$$

Teorema 3.4.1 *A aplicação Θ é uma bijecção.*

Demonstração. Comecemos por mostrar que Θ é injectiva. Como $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ é um semigrupo pró-$\mathbf{V}$, dados dois elementos distintos ρ, ρ' de $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ existem $S \in \mathbf{V}$ e um homomorfismo contínuo $\varphi : \overline{\Omega}_A\mathbf{V} \rightarrow S$ tais que $\varphi(\rho) \neq \varphi(\rho')$ o que, por [4, Lema 3.4.9], significa que $\rho_S(\varphi \circ \iota_A) \neq \rho'_S(\varphi \circ \iota_A)$, e portanto tem-se $\rho_S \neq \rho'_S$, concluindo assim a primeira parte da demostração.

Provemos agora que Θ é sobrejectiva. Seja $\pi = (\pi_S)_{S\in\mathbf{V}}$ uma operação implícita A-ária sobre $\mathbf{V}$. Apresentaremos, no que segue, um elemento w de $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ tal que $\Theta(w) = \pi$. Nesse sentido, recordemos que $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ pode ser representado como um limite projectivo de elementos de $\mathbf{V}$, nomeadamente como o limite projectivo de um sistema dirigido $\mathbf{V}_0$ contendo um representante de cada classe de isomorfismo dos elementos A-gerados de $\mathbf{V}$: $\varphi_i : A \rightarrow S_i$ $(i \in I)$ com os homomorfismos de ligação $\varphi_{i,j} : \varphi_i \rightarrow \varphi_j$ $(i \geq j)$. Seja $s_i = \pi_{S_i}(\varphi_i)$. Como π é uma operação implícita, tem-se

$$\varphi_{i,j}(s_i) = \varphi_{i,j}(\pi_{S_i}(\varphi_i)) = \pi_{S_j}(\varphi_{i,j} \circ \varphi_i) = \pi_{S_j}(\varphi_j) = s_j$$

sempre que $i \geq j$. Portanto $w = (s_i)_{i\in I}$ é um elemento do limite projectivo $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$. Para concluir a demostração resta mostrar que de facto $\Theta(w) = \pi$, ou seja, que $w_S = \pi_S$ para todo o $S \in \mathbf{V}$. Seja $\varphi \in S^A$. A imagem de φ em S é um elemento A-gerado de $\mathbf{V}$ e, portanto, é isomorfo a algum S_i. Uma vez que ambas w e π são operações implícitas, podemos assumir que $S = S_i$ e $\varphi = \varphi_i$. Assim, tem-se

$$w_S(\varphi) = w_{S_i}(\varphi_i) = \overline{\varphi_i}(w) = s_i = \pi_{S_i}(\varphi_i) = \pi_S(\varphi),$$

onde a igualdade $\overline{\varphi_i}(w) = s_i$ resulta da observação de que $\overline{\varphi_i}$ é precisamente o homomorfismo canónico $\pi_i : \overline{\Omega}_A\mathbf{V} \rightarrow S_i$. Isto completa a demonstração da igualdade $\Theta(w) = \pi$ e conclui a demonstração do teorema. ∎

Observe-se que como um elemento de $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$, a operação x_{a_i} é precisamente a imagem do elemento $a_i \in A$ pela função geradora $\iota_A : A \rightarrow \overline{\Omega}_A\mathbf{V}$. Assim, o subsemigrupo $\Omega_A\mathbf{V}$ (gerado pela imagem de ι_A) corresponde, através da função Θ, ao semigrupo das operações implícitas A-árias sobre $\mathbf{V}$ gerado pelas projecções x_{a_i} $(a_i \in A)$, ou seja, ao subsemigrupo das operações explícitas A-árias sobre $\mathbf{V}$. Por esta razão, os elementos de $\Omega_A\mathbf{V}$ são também designados por operações explícitas.

No domínio dos semigrupos finitos, existem duas outras operações implícitas que aparecem com frequência na literatura e que serão muito utilizadas no decorrer deste trabalho. São elas as operações unárias $^\omega$ ou a^ω, chamada *ω-potência*, e $^{\omega-1}$ ou $a^{\omega-1}$, chamada *$(\omega-1)$-potência*, as quais associam a cada elemento s, de um semigrupo finito S, os elementos s^ω e $s^{\omega-1}$ respectivamente. Tendo em consideração os resultados apresentados na Subsecção 1.2.5, estes dois exemplos de operações implícitas estendem-se naturalmente a semigrupos profinitos.

Observemos agora que, se $\pi = (\pi_S)_{S\in\mathbf{W}}$ é uma operação implícita sobre uma pseudovariedade $\mathbf{W}$ e $\mathbf{V}$ é uma subpseudovariedade de $\mathbf{W}$, então $(\pi_S)_{S\in\mathbf{V}}$ é uma operação implícita sobre $\mathbf{V}$. De facto, a projecção canónica $p_{\mathbf{W},\mathbf{V}}$ pode agora ser abordada como a aplicação

$$\begin{array}{rccc} p_{\mathbf{W},\mathbf{V}}: & \overline{\Omega}_A\mathbf{W} & \to & \overline{\Omega}_A\mathbf{V} \\ & (\pi_S)_{S\in\mathbf{W}} & \mapsto & (\pi_S)_{S\in\mathbf{V}}. \end{array}$$

Tendo em conta o Teorema 3.4.1, identificaremos operações implícitas A-árias sobre $\mathbf{V}$ com elementos de $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$. No entanto, será por vezes conveniente encarar os elementos do semigrupo pró-$\mathbf{V}$ livre como operações implícitas sobre $\mathbf{V}$. É neste contexto que introduzimos a seguinte observação.

Observação 3.4.2 *Uma sucessão $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de operações implícitas A-árias sobre $\mathbf{V}$ converge para $\pi \in \overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ se e só se, para todo o $S \in \mathbf{V}$, $\pi_S = (\pi_n)_S$, a partir de uma certa ordem, isto é, se e só se a sucessão $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coincide ultimamente com π em cada $S \in \mathbf{V}$.*

Por exemplo, o limite da sucessão de operações explícitas $(a^{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ sobre $\mathbf{V}$ é a operação implícita a^ω sobre $\mathbf{V}$. De facto, para cada semigrupo $S \in \mathbf{V}$ e cada elemento $s \in S$, $s^{n!}$ coincide com o idempotente s^ω para todo o $n \geq |S|$.

3.5 Pseudoidentidades

Uma *pseudoidentidade* é uma igualdade formal $\pi = \rho$ onde $\pi, \rho \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ para algum alfabeto A. Quando $\pi, \rho \in \Omega_A\mathbf{S}$, $\pi = \rho$ é também designada uma *identidade*. Veremos de seguida que esta designação é coerente com o conceito de equação para semigrupos, anteriormente introduzido. Diz-se que um semigrupo profinito S *verifica* ou *satisfaz* uma pseudoidentidade $\pi = \rho$, e escreve-se $S \models \pi = \rho$, se para qualquer função $\varphi : A \to S$, o único homomorfismo $\overline{\varphi} : A^+ \to S$ é tal que $\overline{\varphi}(\pi) = \overline{\varphi}(\rho)$. Note-se que, $S \models \pi = \rho$ se e só se for verificada a igualdade de funções $\pi_S = \rho_S$.

Uma classe $\mathcal{C}$ de semigrupos finitos *satisfaz* um conjunto Σ de pseudoidentidades, e denota-se $\mathcal{C} \models \Sigma$, se qualquer semigrupo S de $\mathcal{C}$ satisfaz qualquer pseudoidentidade de Σ. Segue das definições o seguinte resultado.

Lema 3.5.1 *Seja* $\mathbf{V}$ *uma pseudovariedade de semigrupos e seja* $p_{\mathbf{V}}$ *a projecção canónica. Então, para* $\pi, \rho \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$, *tem-se que* $\mathbf{V} \models \pi = \rho$ *se e só se* $p_{\mathbf{V}}(\pi) = p_{\mathbf{V}}(\rho)$.

Da mesma forma que para as equações, se Σ é um conjunto de pseudoidentidades, a classe dos semigrupos finitos que satisfazem todas as pseudoidentidades de Σ é uma pseudovariedade de semigrupos dada por

$$[\![\Sigma]\!] = \{S \in \mathbf{S} : S \models \Sigma\}.$$

Enunciamos de seguida um resultado que é o análogo para pseudovariedades ao teorema de Birkhoff para variedades.

Teorema 3.5.2 (Reiterman [57]) *Uma classe* V *de semigrupos finitos é uma pseudovariedade de semigrupos se e só se existe um conjunto* Σ *de pseudoidentidades tal que* $V = [\![\Sigma]\!]$.

Na realidade, o teorema de Reiterman é um pouco mais preciso, descreve as subpseudovariedades de uma pseudovariedade $\mathbf{V}$ por *pseudoidentidades sobre* $\mathbf{V}$, as quais são igualdades formais entre elementos de $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ para algum alfabeto A (veja-se [4]).

Quando $\mathbf{V} = [\![\Sigma]\!]$ diz-se que Σ é uma *base de pseudoidentidades* para $\mathbf{V}$. Estamos agora em condições de apresentar algumas das pseudovariedades referidas anteriormente de forma mais simples. Por exemplo, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{N}$ podem ser definidas por pseudoidentidades da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= [\![x^\omega y = yx^\omega = y]\!] = [\![x^\omega = 1]\!] \\ \mathbf{N} &= [\![x^\omega y = yx^\omega = x^\omega]\!] = [\![x^\omega = 0]\!]. \end{aligned}$$

Seguem ainda descrições por pseudoidentidades de algumas das pseudovariedades mais importantes neste trabalho:

- $\mathbf{K} = [\![x^\omega y = x^\omega]\!]$, $\mathbf{D} = [\![yx^\omega = x^\omega]\!]$, $\mathbf{LI} = [\![x^\omega yx^\omega = x^\omega]\!]$;
- $\mathbf{LSl} = [\![x^\omega yx^\omega yx^\omega = x^\omega yx^\omega, x^\omega yx^\omega zx^\omega = x^\omega zx^\omega yx^\omega]\!]$, $\mathbf{A} = [\![x^\omega = x^{\omega+1}]\!]$;
- $\mathbf{CR} = [\![x = x^{\omega+1}]\!]$.

3.6 Subpseudovariedades de LSl

Esta secção é dedicada à apresentação de três exemplos simples de semigrupos da forma $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$, onde $\mathbf{V} \in \{\mathbf{K}, \mathbf{D}, \mathbf{LI}\}$. A escolha destas pseudovariedades prende--se com a sua relevância para o que segue. Note-se que **K**, **D** e **LI** constituem importantes subpseudovariedades de **LSl**. Refira-se Almeida [4] como referência principal para os resultados apresentados nesta secção.

Recordemos que **N** é uma subpseudovariedade das pseudovariedades **K**, **D** e **LI**. Assim, começamos por introduzir o seguinte resultado.

Proposição 3.6.1 *Para uma pseudovariedade de semigrupos* $\mathbf{V}$ *e um alfabeto* A*,* $\Omega_A\mathbf{V}$ *é o semigrupo livre gerado por* A *e um espaço topológico discreto se e só se* $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{V}$.

3.6.1 As pseudovariedades K e D

Consideremos a pseudovariedade $\mathbf{K} = [\![x^\omega y = x^\omega]\!]$ dos semigrupos nos quais os idempotentes são zeros à esquerda. Podemos também escrevê-la como

$$\mathbf{K} = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \mathbf{K}_r,$$

onde $\mathbf{K}_r = [\![x_1 \cdots x_r y = x_1 \cdots x_r]\!]$.

Como $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{K}$, resulta da Proposição 3.6.1 que $\Omega_A\mathbf{K} = A^+$ é um espaço topológico discreto. Para cada inteiro $r \in \mathbb{N}$, consideremos o semigrupo

$$\Omega_A\mathbf{K}_r.$$

Prova-se que este semigrupo é isomorfo ao semigrupo S_r cujo conjunto suporte é formado por todas as palavras sobre A de comprimento menor ou igual a r, e onde o produto é dado para todos os $u, v \in S_r$ por $u \cdot v = i_r(uv)$.

Os semigrupos $S_r = \Omega_A\mathbf{K}_r$ $(r \geq 1)$ formam um conjunto gerador da pseudovariedade **K** nos quais podemos testar a validade de possíveis propriedades de **K**. Neste contexto, estes semigrupos são designados como *semigrupos-teste*. Mostra-se através deles que uma sucessão $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A^+ converge em $\overline{\Omega}_A\mathbf{K}$ se e só se é constante a partir de uma certa ordem, ou $|w_n| \to \infty$ e

$$\forall r \in \mathbb{N}\ \exists n_r \in \mathbb{N}, i, j \geq n_r \ \Rightarrow\ w_i \text{ e } w_j \text{ têm o mesmo prefixo de comprimento } r.$$

De facto, seja $(w_n)_n$ uma sucessão de $\Omega_A\mathbf{K}$ e suponhamos que $(w_n)_n$ converge em $\overline{\Omega}_A\mathbf{K}$, digamos para $\pi \in \overline{\Omega}_A\mathbf{K}$. Uma vez que os semigrupos S_r formam um conjunto gerador da pseudovariedade $\mathbf{K}$, $(w_n)_n$ converge em cada S_r e, portanto, ou $w_n = u$ para algum $u \in A^+$ e para todo o n suficientemente grande, ou $|w_n| \to \infty$ e $p_r(w_n)$ é constante para todo o n suficientemente grande. Conclui-se assim que, ou $\pi = u$ é finita, ou π não é finita e é um zero à esquerda em cada S_r e portanto π é um zero à esquerda. Conclui-se ainda no caso de π não ser finita o seguinte.

Corolário 3.6.2 *Se $\pi \in \overline{\Omega}_A\mathbf{K}\backslash\Omega_A\mathbf{K}$, então π pode ser identificada com a palavra infinita à direita*

$$a_1a_2a_3\cdots \in A^{\mathbb{N}}$$

em que a_i é a i-ésima letra de π, isto é, se $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de pseudopalavras finitas a convergir para π, então a_i é a i-ésima letra de todos os termos de w_n a partir de uma certa ordem.

Conclui-se assim que $\overline{\Omega}_A\mathbf{K} = A^+ \cup A^{\mathbb{N}}$. O produto em $\overline{\Omega}_A\mathbf{K}$ é estendido do produto em A^+ tendo os elementos de $A^{\mathbb{N}}$ como zeros à esquerda, ou seja, $wu = w$ para todo o $w \in A^{\mathbb{N}}$. Em $\overline{\Omega}_A\mathbf{K}$ a palavra infinita à direita $vu^{+\infty}$, onde $v \in A^*$ e $u \in A^+$, corresponde à pseudopalavra vu^{ω}. A topologia sobre A^+ é a discreta, enquanto que a topologia sobre $A^{\mathbb{N}}$ é a topologia produto da topologia discreta sobre A.

As linguagens $\mathbf{K}$-reconhecíveis de A^+ constituem a álgebra de Boole gerada pelas linguagens da forma wA^* com $w \in A^+$. Uma base de abertos-fechados para a topologia de $\overline{\Omega}_A\mathbf{K}$ é a família formada pelas linguagens da forma $\{w\}$ e wA^∞ com $w \in A^+$. Observe-se que wA^∞ é o conjunto de todas as palavras finitas e infinitas com prefixo w.

Como $\mathbf{D} = [\![yx^\omega = x^\omega]\!]$ é a pseudovariedade dos semigrupos nos quais os idempotentes são zeros à direita, um estudo para $\mathbf{D}$, análogo ao efectuado para $\mathbf{K}$, permite obter resultados duais para esta pseudovariedade. Em particular, destacamos que:

- $\mathbf{D} = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} \mathbf{D}_r$, onde $\mathbf{D}_r = [\![yx_1\cdots x_r = x_1\cdots x_r]\!]$;
- $\overline{\Omega}_A\mathbf{D} = A^+ \cup A^{-\mathbb{N}}$, ou seja, as pseudopalavras infinitas de $\overline{\Omega}_A\mathbf{D}$ são identificadas com palavras infinitas à esquerda de $A^{-\mathbb{N}}$ e o produto em $\overline{\Omega}_A\mathbf{D}$ é estendido do produto em A^+ definindo-se $uw = w$ se $w \in A^{-\mathbb{N}}$, o que significa que os elementos de $A^{-\mathbb{N}}$ são zeros à direita;
- em $\overline{\Omega}_A\mathbf{D}$ a palavra infinita à esquerda $u^{-\infty}v$, onde $v \in A^*$ e $u \in A^+$, é identificada com a pseudopalavra $u^\omega v$.

Consideremos $r \geq 1$ e $\pi \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ uma pseudopalavra infinita ou finita com comprimento pelo menos r. Nestas condições podemos falar do prefixo (resp. sufixo) de comprimento r de π como sendo a palavra u de comprimento r tal que $p_{\mathbf{K}_r}(\pi) = u$ (resp. $p_{\mathbf{D}_r}(\pi) = u$).

O próximo resultado apresenta uma propriedade bem conhecida relativa às pseudopalavras módulo $\mathbf{K}$.

Lema 3.6.3 *Sejam $\pi, \rho \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ pseudopalavras infinitas tais que $p_{\mathbf{K}}(\pi) = p_{\mathbf{K}}(\rho)$. Então existem factorizações $\pi = \pi_1\pi_2$ e $\rho = \pi_1\rho_2$ onde π_1, π_2, ρ_2 são infinitas. Em particular, se $p_{\mathbf{K}}(\pi) = vu^{+\infty}$ onde $v \in A^*$ e $u \in A^+$, então pode-se escolher $\pi_1 = vu^\omega$.*

Um resultado dual pode ser estabelecido para $\mathbf{D}$.

3.6.2 A pseudovariedade LI

Consideremos agora a pseudovariedade $\mathbf{LI} = [\![x^\omega y x^\omega = x^\omega]\!]$ dos semigrupos localmente triviais, dada também por

$$\mathbf{LI} = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} [\![x_1 \cdots x_r y z_1 \cdots z_r = x_1 \cdots x_r z_1 \cdots z_r]\!] \ .$$

Como $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{LI}$, deduz-se da Proposição 3.6.1 que $\Omega_A\mathbf{LI} = A^+$ é um espaço topológico discreto. Prova-se que uma sucessão $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A^+ converge em $\overline{\Omega}_A\mathbf{LI}$ se e só se é constante a partir de uma certa ordem, ou $|w_n| \to \infty$ e

$$\forall r \in \mathbb{N}\ \exists t_r \in \mathbb{N}, i, j \geq t_r \Rightarrow \begin{array}{c} w_i \text{ e } w_j \text{ têm o mesmo prefixo e} \\ \text{o mesmo sufixo de comprimento } r. \end{array}$$

Portanto, as pseudopalavras infinitas módulo $\mathbf{LI}$ podem ser identificadas com o conjunto $\{(w, w') : \ w \in A^{\mathbb{N}}, w' \in A^{-\mathbb{N}}\}$, ou seja, $\overline{\Omega}_A\mathbf{LI} = A^+ \cup (A^{\mathbb{N}} \times A^{-\mathbb{N}})$. O produto em $\overline{\Omega}_A\mathbf{LI}$ é dado, para todos os $u, v \in A^+$ e todos os $(w, z), (w', z') \in A^{\mathbb{N}} \times A^{-\mathbb{N}}$, por

- $u \cdot v = uv$;
- $u \cdot (w, z) = (uw, z)$ e $(w, z) \cdot u = (w, zu)$;
- $(w, z) \cdot (w', z') = (w, z')$.

A topologia sobre $A^{\mathbb{N}} \times A^{-\mathbb{N}}$ é a topologia produto da topologia discreta sobre A.

As linguagens $\mathbf{LI}$-reconhecíveis de A^+ constituem a álgebra de Boole gerada pelas linguagens da forma wA^* e A^*w com $w \in A^+$. Uma base de abertos-fechados para a topologia de $\overline{\Omega}_A\mathbf{LI}$ é a família formada pelas linguagens da forma $\{w\}$ e $wA^+w' \cup (wA^{\mathbb{N}} \times A^{-\mathbb{N}}w')$ com $w, w' \in A^+$.

3.7 Assinaturas implícitas

Uma *assinatura implícita* σ é um conjunto de pseudopalavras contendo a multiplicação. É *não-trivial* se contém pelo menos uma pseudopalavra que não é uma palavra. Um σ-*semigrupo* é uma álgebra sobre a assinatura σ. Por exemplo para $\omega = \{\cdot, {}^{\omega}\}$, a assinatura implícita consistindo da multiplicação e da ω-potência, um ω-semigrupo é uma ω-álgebra finita $(S, \cdot, {}^{\omega})$, onde $\cdot$ é uma operação associativa, pelo que $(S, \cdot)$ é um semigrupo finito, e a operação unária ${}^{\omega}$ tem a sua interpretação natural no semigrupo S. Qualquer semigrupo profinito tem uma estrutura natural de um σ-semigrupo, pela interpretação natural das operações implícitas como operações sobre semigrupos profinitos.

Para uma pseudovariedade $\mathbf{V}$ de semigrupos, denotaremos por $\mathbf{V}^{\sigma}$ a variedade de Birkhoff dos σ-semigrupos gerada por $\mathbf{V}$. Denotaremos por $\Omega_A^{\sigma}\mathbf{V}$ o σ-*semigrupo* livre gerado por A na variedade $\mathbf{V}^{\sigma}$, o qual é o σ-subsemigrupo de $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ gerado por A. Os elementos de $\Omega_A^{\sigma}\mathbf{V}$ serão designados por σ-*palavras módulo* $\mathbf{V}$ *sobre* A e os de $\Omega_A^{\sigma}\mathbf{S}$ por σ-palavras sobre A. Contudo, não havendo perigo de confusão, os elementos de $\Omega_A^{\sigma}\mathbf{V}$ serão simplesmente referidos como σ-*palavras*. Uma σ-*-identidade* é um par (u, v) de σ-palavras, e é habitualmente denotada por $u = v$.

A notação

$$p_{\mathbf{V}} : \Omega_A^{\sigma}\mathbf{S} \longrightarrow \Omega_A^{\sigma}\mathbf{V}$$

é agora usada para representar o homomorfismo de σ-semigrupos determinado pela escolha dos geradores. Refira-se que esta notação é consistente com aquela introduzida anteriormente uma vez que, como referido, $\Omega_A^{\sigma}\mathbf{S}$ pode ser visto como um subsemigrupo de $\overline{\Omega}_A\mathbf{S}$, donde este homomorfismo é a restrição de $p_{\mathbf{V}} : \overline{\Omega}_A\mathbf{S} \to \overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ a $\Omega_A^{\sigma}\mathbf{S}$.

Dado que nos próximos capítulos trabalharemos essencialmente com semigrupos, denotaremos por T_A^{σ} a σ-álgebra livre gerada por A na variedade definida pela equação $x(yz) = (xy)z$. Note-se que esta notação foi anteriormente introduzida, na Subsecção 1.1.3, num contexto mais abrangente. Os elementos de T_A^{σ} serão designados por σ-termos sobre A, ou simplesmente por σ-termos.

Denotamos por

$$\epsilon_{A,\mathbf{V}}^{\sigma} : T_A^{\sigma} \to \Omega_A^{\sigma}\mathbf{V}$$

o homomorfismo de σ-semigrupos que envia cada letra $a \in A$ nela própria. Dado $w \in T_A^{\sigma}$ referimo-nos a $\epsilon_{A,\mathbf{V}}^{\sigma}(w)$ como sendo o *valor* de w sobre $\mathbf{V}$. O *problema da* σ-*palavra para* $\mathbf{V}$ consiste em decidir, dados dois quaisquer σ-termos $x, y \in T_A^{\sigma}$, se x e y representam o mesmo elemento de $\Omega_A^{\sigma}\mathbf{V}$, ou seja, se $\epsilon_{A,\mathbf{V}}^{\sigma}(x) = \epsilon_{A,\mathbf{V}}^{\sigma}(y)$.

Por simplicidade de notação, por vezes não distinguiremos um σ-termo $x \in T_A^\sigma$ da correspondente σ-palavra $\epsilon_{A,\mathbf{S}}^\sigma(x) \in \Omega_A^\sigma\mathbf{S}$. Por exemplo, dados dois σ-termos $x, y \in T_A^\sigma$, quando escrevermos "$\mathbf{V} \models x = y$" deve ser entendido "$\mathbf{V} \models \epsilon_{A,\mathbf{S}}^\sigma(x) = \epsilon_{A,\mathbf{S}}^\sigma(y)$".

A assinatura que é mais comum ser encontrada na literatura é a assinatura $\kappa = \{\cdot, {}^{\omega-1}\}$, usualmente designada por *assinatura canónica*. Contudo, quando se trabalha com pseudovariedades aperiódicas, as quais satisfazem $x^\omega = x^{\omega-1}$, os resultados formulados com a assinatura κ podem também ser formulados com a assinatura $\omega = \{\cdot, {}^\omega\}$. Por uma questão de simplicidade e dado que na segunda parte desta dissertação trabalharemos apenas com pseudovariedades aperiódicas usaremos a assinatura ω. A terceira parte, dedicada à mansidão, contém o Capítulo 8 envolvendo pseudovariedades não aperiódicas. Assim, apesar do outro capítulo que a constitui não envolver pseudovariedades não aperódica usaremos, por uma questão de uniformização, nos dois capítulos da terceira parte a assinatura κ.

Parte II

Algumas propriedades algorítmicas de LSl

Capítulo 4

Operações implícitas sobre LSl

Dado que os três capítulos que constituem esta segunda parte são dedicados a estudos envolvendo apenas a pseudovariedade **LSl**, por uma questão de simplicidade, optamos por trabalhar com a assinatura ω.

Este capítulo reúne alguns resultados básicos acerca dos semigrupos pró-**LSl** livres. Descrevemos uma forma normal para ω-termos de rank 1, a qual é próxima da fornecida por McCammond [51] onde ficou provado que diferentes ω-termos em forma normal não podem representar a mesma pseudopalavra sobre **A**. Contrariamente ao caso de **A**, esta forma normal não é única para **LSl** em geral. Contudo, o que não é totalmente surpreendente tendo em consideração a definição de semigrupos e linguagens localmente testáveis, a igualdade sob $\epsilon^{\omega}_{A,\mathbf{LSl}}$ de dois tais termos depende apenas da igualdade dos seus prefixos e sufixos envolvendo uma única ω-potência e da igualdade dos seus factores envolvendo duas ω-potências (aos quais chamamos 2-factores).

Para cada ω-termo em forma normal $w \in T^{\omega}_{A}$, apresentamos uma construção de um autómato que fornece todos os ω-termos em forma normal que têm o mesmo valor que w sobre **LSl**. Estas construções são ainda utilizadas na identificação de ω-termos em forma normal cujo valor sobre **LSl** é um idempotente.

4.1 Propriedades básicas de LSl

Comecemos por recordar que a pseudovariedade **LSl** é associada através da correspondência de Eilenberg com a classe das linguagens localmente testáveis, conforme o Teorema 2.3.2. Denotemos por **LT** a classe de todos os semigrupos localmente testáveis e por $\mathbf{LT}_k$ a classe de todos os semigrupos k-testáveis. Por resultados de Zalcstein, sabemos que **LT** e $\mathbf{LT}_k$ são pseudovariedades e que **LT** é precisamente **LSl**. Portanto, $\mathbf{LT}_k$ é também denotada por $\mathbf{LSl}_k$.

Recordemos que a relação $\sim_k$, introduzida na Subsecção 1.5.3, é uma congruência de índice finito. Isto significa que o quociente $A^+/\sim_k$ é um semigrupo finito. Como uma consequência, temos a seguinte caracterização dos semigrupos pró-$\mathbf{LT}_k$ livres.

Proposição 4.1.1 *Para todo o* $k \geq 1$, $\overline{\Omega}_A\mathbf{LT}_k = \Omega_A\mathbf{LT}_k = A^+/\sim_k$.

Recordemos que **LSl** é uma subpseudovariedade de **A** e que **K**, **D** e **LI** são subpseudovariedades importantes de **LSl**. Recordemos ainda que **LI** é o supremo de **K** e **D**, o que significa que uma pseudoidentidade $\pi = \rho$ é satisfeita por **LI** se e só se é satisfeita por ambas **K** e **D**. Como $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{LSl}$, podemos identificar o subsemigrupo $\Omega_A\mathbf{LSl}$ de $\overline{\Omega}_A\mathbf{LSl}$ com o semigrupo livre A^+.

Seja n um inteiro positivo. Denotamos por $\equiv_n$ a congruência sobre $\overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ definida, para todos os $\pi, \rho \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$, por

$$\pi \equiv_n \rho \quad \text{sse} \quad \pi \text{ e } \rho \text{ têm o mesmo prefixo, sufixo e factores de comprimento } n.$$

A próxima proposição sintetiza algumas propriedades das pseudoidentidades satisfeitas por **LSl**. Este resultado é uma consequência imediata de [30, Teorema 3.3].

Proposição 4.1.2 *Sejam* $\pi, \rho \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$. *As condições seguintes são equivalentes:*

i) $p_{\mathbf{LSl}}(\pi) = p_{\mathbf{LSl}}(\rho)$;

ii) $\pi \equiv_n \rho$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$;

iii) $p_{\mathbf{LI}}(\pi) = p_{\mathbf{LI}}(\rho)$ *e* π *e* ρ *têm os mesmos factores finitos;*

iv) $p_{\mathbf{LI}}(\pi) = p_{\mathbf{LI}}(\rho)$ *e* π *e* ρ *têm os mesmos factores biinfinitos.*

Além disso, se π *e* ρ *são pseudopalavras infinitas, então uma palavra biinfinita* $\mathbf{w} \in A^{\mathbb{Z}}$ *é um factor de* $\pi\rho$ *se e só se* $\mathbf{w}$ *é um factor de* π *ou um factor de* ρ, *ou* $\mathbf{w} \in \mathcal{O}(\overleftrightarrow{\pi\rho})$ *onde* $\overleftrightarrow{\pi\rho}$ *é a palavra biinfinita* $p_{\mathbf{D}}(\pi) \cdot p_{\mathbf{K}}(\rho)$.

Como uma consequência imediata, temos as seguintes propriedades de cancelamento.

Corolário 4.1.3 *Sejam* $\pi_1, \pi_2, \rho \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ *tais que* **LSl** *verifica* $\rho\pi_1 = \rho\pi_2$ *ou* $\pi_1\rho = \pi_2\rho$. *Se* ρ *é uma palavra finita ou* $c(\rho)$ *é disjunto de ambos* $c(\pi_1)$ *e* $c(\pi_2)$, *então* $\mathbf{LSl} \models \pi_1 = \pi_2$.

Uma outra consequência da Proposição 4.1.2 é a seguinte propriedade de factorização.

Lema 4.1.4 *Sejam* $\pi_1, \ldots, \pi_r, \rho_1, \rho_2 \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ *pseudopalavras infinitas e suponhamos que* $\mathbf{LSl} \models \pi_1 \cdots \pi_r = \rho_1\rho_2$. *Então, ou* $\overleftrightarrow{\rho_1\rho_2} \sim \overleftrightarrow{\pi_i\pi_{i+1}}$ *para algum* $i \in \{1, \ldots, r-1\}$*, ou existe um* $j \in \{1, \ldots, r\}$ *e pseudopalavras infinitas* $\pi'_j, \pi''_j \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ *tais que* $\pi_j = \pi'_j\pi''_j$ *e* $\overleftrightarrow{\rho_1\rho_2} = \overleftrightarrow{\pi'_j\pi''_j}$.

Demonstração. Para cada inteiro positivo k sejam u_k e v_k, respectivamente, o sufixo e o prefixo de $p_{\mathbf{D}}(\rho_1)$ e $p_{\mathbf{K}}(\rho_2)$ de comprimento k. Como u_kv_k é um factor de $\rho_1\rho_2$ e **LSl** verifica $\pi_1 \cdots \pi_r = \rho_1\rho_2$, resulta da Proposição 4.1.2 que u_kv_k também é um factor de $\pi_1 \cdots \pi_r$. Suponhamos que $\overleftrightarrow{\rho_1\rho_2} \not\sim \overleftrightarrow{\pi_i\pi_{i+1}}$ para todo o $i \in \{1, \ldots, r-1\}$. Então, existe um $j \in \{1, \ldots, r\}$ tal que u_kv_k é um factor de π_j para todo o k. Logo, existe uma factorização $\pi_j = x_ku_kv_ky_k$ para todo o k e, como $\overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ é compacto, podemos assumir que ambas as sequências $(x_ku_k)_k$ e $(v_ky_k)_k$ convergem, digamos para π'_j e π''_j respectivamente. Portanto $\pi_j = \pi'_j\pi''_j$ e $\overleftrightarrow{\rho_1\rho_2} = p_{\mathbf{D}}(\rho_1) \cdot p_{\mathbf{K}}(\rho_2) = \overleftrightarrow{\pi'_j\pi''_j}$. ■

Uma demostração do seguinte resultado simples, mas que será essencial para o Capítulo 7, pode ser encontrada em [35].

Lema 4.1.5 *Seja* S *um semigrupo finito e seja* n *um inteiro positivo. Se* $\pi \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ *é uma pseudopalavra infinita, então existe uma palavra* $w \in A^+$ *tal que* $w \equiv_n \pi$ *e* S *satisfaz* $w = \pi$.

4.2 O problema da ω-palavra para LSl

Nesta secção recordamos brevemente a solução do problema da ω-palavra para **LSl** obtida por Costa [30]. No restante desta segunda parte, o homomorfismo de ω-semigrupos $\epsilon^{\omega}_{A,\mathbf{S}} : T^{\omega}_A \to \Omega^{\omega}_A\mathbf{S}$ será simplesmente denotado por ϵ. Para simplificar a notação, o homomorfismo ϵ será mesmo omitido por vezes: quando nos referimos a um ω-termo $x \in T^{\omega}_A$, queremos considerar nesses casos a correspondente ω-palavra $\epsilon(x) \in \Omega^{\omega}_A\mathbf{S}$.

Seja $w \in T^{\omega}_A$ um ω-termo. O *comprimento* de w, denotado por $|w|$, é definido indutivamente por $|a| = 1$ para $a \in A$, $|uv| = |u| + |v|$ e $|u^{\omega}| = |u| + 1$ para $u, v \in T^{\omega}_A$.

O *rank* de um ω-termo é o número máximo de potências ω encaixadas umas nas outras que nele ocorrem. Por exemplo, a expressão

$$ab\Big(b(a^2)^{\omega}b(ab)^{\omega}\Big)^{\omega}a^5\Big(a(b^{\omega}a)^{\omega}\Big)^{\omega}b$$

representa um ω-termo w de rank 3 sobre o alfabeto $\{a, b\}$. Deste modo, um ω-termo de rank 0 é simplesmente uma palavra de A^+. Um ω-termo de rank 1 é um elemento $w \in T_A^\omega$ da forma

$$w = u_0 x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_n^\omega u_n \tag{4.1}$$

com $n \geq 1$, $u_0, \ldots, u_n \in A^*$ e $x_1, \ldots, x_n \in A^+$. É claro que $\epsilon^\omega_{A,\mathbf{K}}(w)$ é a palavra infinita à direita $u_0 x_1^{+\infty}$, enquanto que $\epsilon^\omega_{A,\mathbf{D}}(w)$ é a palavra infinita à esquerda $x_n^{-\infty} u_n$. Para um inteiro $1 \leq \ell \leq n$, um *ℓ-factor* de w é qualquer subtermo de w do tipo

$$w(i, i+\ell-1) = x_i^\omega u_i x_{i+1}^\omega \cdots x_{i+\ell-1}^\omega$$

com $i + \ell - 1 \leq n$. Denotamos por $F_\ell^\omega(w)$ o conjunto dos ℓ-factores de w.

Definição 4.2.1 (ω-termo em forma normal) *Um ω-termo* em forma normal *é um ω-termo de rank 1 da forma* (4.1) *onde:*

(1) cada x_i é uma palavra de Lyndon;

(2) x_1 não é um sufixo de u_0;

(3) x_n não é um prefixo de u_n;

(4) se $x^\omega y x^\omega$ é um 2-factor de w, então $x^\omega y x^\omega$ tem exactamente uma ocorrência em w;

(5) cada 2-factor $x^\omega u y^\omega$ de w verifica as três condições seguintes:

(a) u não é um prefixo de x^j para qualquer inteiro j;

(b) u não é um sufixo de y^j para qualquer inteiro j;

(c) se $u = x^j u'$ ou $u = u' y^j$ para algum inteiro $j \geq 1$, então $x^\omega u' y^\omega$ falha pelo menos uma das condições (a) ou (b).

Notemos que esta forma normal para 2-factores foi definida por McCammond em [51]. A sua construção destas formas normais é usada, no próximo capítulo, no quinto passo da demonstração do Teorema 5.1.3.

Recordemos também a seguinte propriedade bem conhecida que permite reduzir o problema da ω-palavra para **LSl** a equações envolvendo apenas ω-termos de rank no máximo 1.

Lema 4.2.2 *Se $w \in T_A^\omega \setminus A^+$, então* $\mathbf{LSl} \models w^\omega = w^2$.

Observe-se por fim que, se uma pseudoidentidade $\pi = \rho$ é válida em **LSl**, então ou π e ρ são a mesma palavra finita ou ambas são pseudopalavras infinitas. Portanto, no problema da ω-palavra para **LSl** é suficiente considerar equações envolvendo ω-termos infinitos (i.e., ω-termos de rank pelo menos um). O seguinte critério de decisão para testar se dois ω-termos infinitos são iguais sobre **LSl** é uma simples reformulação de [30, Teorema 7.1].

Proposição 4.2.3 *Seja $w \in T_A^\omega$ um ω-termo infinito. Então, existe um ω-termo $w' = u_0x_1^\omega u_1x_2^\omega \cdots x_n^\omega u_n$ em forma normal tal que* **LSl** $\models w = w'$.

Por outro lado, se $z \in T_A^\omega$ é um outro ω-termo infinito e $z' = v_0y_1^\omega v_1y_2^\omega \cdots y_m^\omega v_m$ é um ω-termo em forma normal tal que **LSl** $\models z = z'$, *então* **LSl** $\models w = z$ *se e só se*

i) $u_0x_1^\omega = v_0y_1^\omega$;

ii) $x_n^\omega u_n = y_m^\omega v_m$;

iii) $F_2^\omega(w') = F_2^\omega(z')$ *(i.e., w' e z' têm os mesmos 2-factores).*

Além disso, pode-se decidir efectivamente se **LSl** *satisfaz $w = z$.*

Claramente (é uma consequência da proposição anterior), dado um ω-termo w de $T_A^\omega \setminus A^+$, podemos ter mais do que um ω-termo em forma normal com o mesmo valor que w sobre **LSl**. Contudo, ilustramos no próximo exemplo um procedimento (descrito mais à frente na demonstração do Teorema 5.1.3, noutro contexto) o qual, como se pode verificar, é convergente no sentido em que partindo de w produz um único ω-termo w' em forma normal tal que **LSl** $\models w = w'$.

Exemplo 4.2.4 *Considere o ω-termo*

$$w = b(babbab)^\omega ba\Big((a^5)^\omega b(ab)^\omega aba\Big)^\omega (ba)^\omega baa$$

e assuma que $a < b$. A pseudovariedade **LSl** *verifica as seguintes ω-identidades*

$$\begin{aligned}
w &= b\Big((bab)^2\Big)^\omega ba\Big((a^5)^\omega b(ab)^\omega aba\Big)^2 (ba)^\omega baa && \text{pelo Lema 4.2.2}\\
&= b(bab)^\omega baa^\omega b(ab)^\omega abaa^\omega b(ab)^\omega aba(ba)^\omega baa && \text{pois } \mathbf{LSl} \models (x^r)^\omega = x^\omega\\
&= bbab(bab)^\omega baa^\omega b(ab)^\omega abaa^\omega b(ab)^\omega aba(ba)^\omega baa && \text{pois } \mathbf{LSl} \models x^\omega = xx^\omega\\
&= bb(abb)^\omega abbaa^\omega b(ab)^\omega abaa^\omega b(ab)^\omega ab(ab)^\omega abaa && \text{pois } \mathbf{LSl} \models x(yx)^\omega = (xy)^\omega x\\
&= bb(abb)^\omega abbaa^\omega b(ab)^\omega abaa^\omega b(ab)^\omega ab(ab)^\omega aa && \text{pois } \mathbf{LSl} \models x^\omega = x^\omega x\\
&= bb(abb)^\omega abbaa^\omega b(ab)^\omega abaa^\omega b(ab)^\omega aa && \text{pois } \mathbf{LSl} \models x^\omega x = x^\omega = x^\omega x^\omega\\
&= bb(abb)^\omega abbaaa^\omega aab(ab)^\omega abaaa^\omega aab(ab)^\omega aa && \text{pois } \mathbf{LSl} \models x^\omega = x^\omega x = xx^\omega.
\end{aligned}$$

Então, $w' = bb(abb)^\omega abbaaa^\omega aab(ab)^\omega abaaa^\omega aab(ab)^\omega aa$ *pois este* ω*-termo já está em forma normal.*

4.3 Caracterização de ω-termos sobre LSl por autómatos

Nesta secção começamos por introduzir o conceito de ω-autómato. Refira-se que os ω-autómatos serão também usados no Capítulo 6, como uma ferramenta para o cálculo dos subconjuntos **LSl**-pontuais de um semigrupo finito.

Em seguida fornecemos uma caracterização, através de ω-autómatos, de ω--termos infinitos que representam uma mesma ω-palavra sobre **LSl**. Como referido acima, para cada $w \in T_A^\omega \setminus A^+$ existe pelo menos um ω-termo em forma normal, digamos w', tal que $\mathbf{LSl} \models w = w'$. Recordemos que é possível obter um tal ω-termo w' a partir de w usando o procedimento ilustrado no Exemplo 4.2.4. Assim, dado um ω-termo w em forma normal, a ideia consiste em construir um ω-autómato que forneça todos os ω-termos, em forma normal, com o mesmo valor que w sobre **LSl**.

A finalizar a secção apresentamos uma caracterização, com recurso aos referidos ω-autómatos, dos ω-termos em forma normal cujo valor sobre **LSl** é um idempotente.

4.3.1 ω-autómatos

Um ω*-autómato* é um sexteto

$$\mathcal{A} = (Q, A, \lambda, E, q_0, q_m),$$

onde:

- $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$ com $m \geq 2$ é chamado o *conjunto dos estados*;
- A é um alfabeto;
- $\lambda : Q \to (T_A^\omega)^\varepsilon$ é uma função;
- $E \subseteq Q \times A^* \times Q$ é chamado o *conjunto das transições*;
- $q_0 \in Q$ é dito o estado inicial;
- $q_m \in Q$ é dito o estado final.

Um ω-autómato verifica ainda as seguintes condições:

(a.1) $\lambda(q_0) = \lambda(q_m) = \varepsilon$ e além do mais q_0 e q_m são os únicos elementos de Q etiquetados por ε;

(a.2) q_0 é a origem de uma única transição, denominada *transição inicial*, e nenhuma transição acaba neste estado;

(a.3) q_m é o término de uma única transição, chamada *transição final*, e nenhuma transição tem origem neste estado.

O estado onde acaba a transição inicial (resp. começa a transição final) será designado o *segundo estado* (resp. *penúltimo estado*) e denotado por q_1 (resp. q_{m-1}). Se estes dois estados coincidem, o segundo e o penúltimo, então denotámo-lo por q_1. Denotamos por $T_r = \{u \in A^* : (q_i, u, q_j) \in E\}$ o *conjunto das etiquetas das transições* e por $S_t = \{\lambda(q) : q \in Q\}$ o *conjunto das etiquetas dos estados*.

4.3.2 ω-autómato associado a ω-termos em forma normal

Antes de introduzirmos o conceito de ω-autómato associado a um dado ω-termo em forma normal, refira-se que podemos ter também ω-autómatos associados a ω-termos noutras formas, como veremos mais à frente no Capítulo 6. Contudo as condições suplementares que têm que ser verificadas por um ω-autómato para que este seja considerado um ω-autómato associado a ω-termos em certa forma variam consoante a forma considerada para os ω-termos.

Fixemos um ω-termo $w = u_0 x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_n^\omega u_n$ em forma normal. Associemos a w a seguinte linguagem de A^*

$$L_w = \{u_0, u_1, \ldots, u_n\}.$$

O *ω-autómato associado a w* é o ω-autómato

$$\mathcal{A}_w = (Q, A, \lambda, E, q_0, q_m),$$

onde $S_t = F_1^\omega(w) \cup \{\varepsilon\}$, $T_r = L_w$ e:

(a.4) para todo o $q_i \in Q \backslash \{q_0, q_m\}$, $\lambda(q_i) = z_i$ com $z_i \in F_1^\omega(w)$. Se $q_i \neq q_j$ então $\lambda(q_i) \neq \lambda(q_j)$. Portanto $|Q| = |F_1^\omega(w)| + 2$.

(a.5) $\lambda(q_1) = x_1^\omega$ e $\lambda(q_{m-1}) = x_n^\omega$ (se $x_1^\omega = x_n^\omega$, então o segundo estado coincide com o penúltimo).

(a.6) as transições inicial e final são dadas por (q_0, u_0, q_1) e (q_{m-1}, u_n, q_m), respectivamente.

(a.7) para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ definimos uma transição com origem no estado etiquetado por x_i^ω e término no estado etiquetado por x_{i+1}^ω etiquetada por u_i. É uma consequência imediata da Definição 4.2.1 que u_i é uma palavra finita não vazia distinta de x_i e de x_{i+1}.

Dado que estados diferentes possuem etiquetas diferentes, à excepção dos estados inicial e final, por vezes identificamos o estado com a sua etiqueta.

Note-se que entre dois estados podemos ter mais do que uma transição. Por exemplo, suponhamos que $x^\omega u y^\omega$ e $x^\omega v y^\omega$, com $u, v \in A^+$ tais que $u \neq v$, são dois elementos de $F_2^\omega(w)$. Então (q_i, u, q_j) e (q_i, v, q_j), com $i, j \in \{1, \ldots, m-1\}$ tais que $\lambda(q_i) = x^\omega$ e $\lambda(q_j) = y^\omega$, são duas transições de $\mathcal{A}_w$.

A *etiqueta de um caminho* num ω-autómato associado a um dado ω-termo em forma normal é o produto das etiquetas dos estados e das etiquetas das transições pela ordem em que estas ocorrem no caminho. Por exemplo, consideremos $A = \{a, b, c\}$ e seja p um caminho dado por:

$$p: \; q_0 \xrightarrow{bb} q_1 \xrightarrow{c} q_2 \xrightarrow{aba} q_3,$$

em que $\lambda(q_0) = \varepsilon$, $\lambda(q_1) = a^\omega, \lambda(q_2) = b^\omega$ e $\lambda(q_3) = c^\omega$. Nestas condições, o ω-termo $w = bba^\omega cb^\omega abac^\omega$ é a etiqueta de p.

Seja $\mathcal{A}$ um ω-autómato associado a um dado ω-termo em forma normal. Um caminho p em $\mathcal{A}$ diz-se *bem sucedido* se é um caminho com origem no estado inicial e término no estado final que percorre todas as transições e cada lacete de $\mathcal{A}$ tem exactamente uma ocorrência em p. Um ω-termo z diz-se *reconhecido* por $\mathcal{A}$ se z é a etiqueta de um caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$. Denotaremos por $L(\mathcal{A})$ o conjunto de todos os ω-termos reconhecidos por $\mathcal{A}$.

O interesse destes conceitos é justificado pelo seguinte resultado, o qual fornece uma caracterização, através de ω-autómatos, de ω-termos infinitos com o mesmo valor sobre **LSl**.

Proposição 4.3.1 *Seja $w = u_0 x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_n^\omega u_n$ um ω-termo em forma normal e seja $z \in T_A^\omega \setminus A^+$. As seguintes condições são equivalentes:*

i) $z \in L(\mathcal{A}_w)$;

ii) *z está em forma normal e* $\mathbf{LSl} \models w = z$;

iii) $\mathcal{A}_w = \mathcal{A}_z$.

Demonstração. $i) \Rightarrow ii)$. Suponhamos que $z \in L(\mathcal{A}_w)$. Então, pela construção de $\mathcal{A}_w$ e pela definição de elemento reconhecido por $\mathcal{A}_w$ resulta, naturalmente, que z é um ω-termo em forma normal. Portanto, z é da forma $z = v_0 y_1^\omega v_1 y_2^\omega \cdots y_m^\omega v_m$. Na realidade, tem-se ainda que

$$u_0 x_1^\omega = v_0 y_1^\omega, \;\; x_n^\omega u_n = y_m^\omega v_m \;\text{ e }\; F_2^\omega(w) = F_2^\omega(z).$$

Portanto, pela Proposição 4.2.3, **LSl** $\models w = z$.

$ii) \Rightarrow iii)$. Suponhamos agora que $z = v_0 y_1^\omega v_1 y_2^\omega \cdots y_m^\omega v_m$ é um ω-termo em forma normal tal que **LSl** $\models w = z$. Então resulta da Proposição 4.2.3 que $u_0 x_1^\omega = v_0 y_1^\omega$, $x_n^\omega u_n = y_m^\omega v_m$ e w e z têm os mesmos 2-factores. Em particular, dado que w e z estão em forma normal, $u_0 = v_0$, $x_1 = y_1$, $x_n = y_m$ e $u_n = v_m$. Consequentemente, w e z possuem o mesmo ω-autómato associado, ou seja, $\mathcal{A}_w = \mathcal{A}_z$.

$iii) \Rightarrow i)$. É trivial. ■

Observação 4.3.2 *Seja w um ω-termo em forma normal. A Proposição 4.3.1 permite-nos observar que $\mathcal{A}_w$ é o único ω-autómato associado a ω-termos em forma normal tal que $w \in L(\mathcal{A}_w)$. Além disso, existe um único caminho em $\mathcal{A}_w$ com etiqueta w que claramente é bem sucedido em $\mathcal{A}_w$.*

Para ilustrar o que tem vindo a ser descrito nesta subsecção consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 4.3.3 *Considere $A = \{a, b, c, d\}$ e assuma $a < b < c < d$. Para*

$$w = c(ab)^\omega da(bc)^\omega ad(ab)^\omega ac(bc)^\omega da^\omega bca^\omega \varepsilon,$$

um ω-termo em forma normal, verifica-se:

- $F_1^\omega(w) = \{a^\omega, (ab)^\omega, (bc)^\omega\}$;

- $L_w = \{c, d, ac, ad, bc, da, \varepsilon\}$.

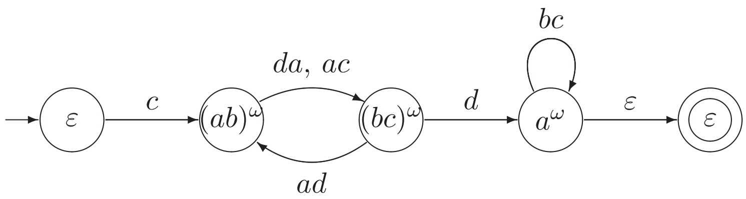
Pelo processo de construção acima descrito, tem-se que o ω-autómato associado a w, $\mathcal{A}_w = (Q, A, \lambda, E, q_0, q_m)$,, verifica as seguintes condições:

- $m = 4$;

- $S_t = \{\varepsilon, a^\omega, (ab)^\omega, (bc)^\omega\}$ *e* $T_r = \{\varepsilon, c, d, ac, ad, bc, da\}$;

- *as transições inicial e final são dadas por* (q_0, c, q_1) *e* (q_3, ε, q_4), *respectivamente, onde* $\lambda(q_0) = \varepsilon$, $\lambda(q_1) = (ab)^\omega$, $\lambda(q_3) = a^\omega$ *e* $\lambda(q_4) = \varepsilon$. *Finalmente,* $\lambda(q_2) = (bc)^\omega$ *e criamos as transições em falta de acordo com o processo descrito em* (a.7).

Consequentemente, $\mathcal{A}_w$ *é dado por:*



Consideremos $z_1 = c(ab)^\omega ac(bc)^\omega ad(ab)^\omega da(bc)^\omega ad(ab)^\omega ac(bc)^\omega da^\omega bca^\omega$. *Note-se que o* ω*-termo* z_1 *é a etiqueta do seguinte caminho de* $\mathcal{A}_w$

$$p:\ \varepsilon \xrightarrow{c} (ab)^\omega \xrightarrow{ac} (bc)^\omega \xrightarrow{ad} (ab)^\omega \xrightarrow{da} (bc)^\omega \xrightarrow{ad} (ab)^\omega \xrightarrow{ac} (bc)^\omega \xrightarrow{d} a^\omega \xrightarrow{bc} a^\omega \xrightarrow{\varepsilon} \varepsilon,$$

o qual é bem sucedido. Assim, tem-se que $z_1 \in L(\mathcal{A}_w)$. *Logo, pela Proposição 4.3.1, conclui-se que* z_1 *é um* ω*-termo em forma normal e que* **LSl** $\models w = z_1$.

Consideremos agora, o ω*-termo em forma normal*

$$z_2 = c(ab)^\omega da(bc)^\omega ad(ab)^\omega ac(bc)^\omega da^\omega.$$

Este ω*-termo não é reconhecido por* $\mathcal{A}_w$, *porque não é possível obter* z_2 *como a etiqueta de um caminho bem sucedido em* $\mathcal{A}_w$. *De facto, o* 2*-factor resultante da leitura do lacete de* $\mathcal{A}_w$ *não pertence a* $F_2^\omega(z_2)$. *Segue, pela Proposição 4.3.1, que* **LSl** *não satisfaz* $w = z_2$.

4.3.3 Caracterização de ω-termos idempotentes sobre LSl

Seja

$$w = u_0 x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_n^\omega u_n$$

um ω-termo em forma normal e seja $\mathcal{A}_w$ o ω-autómato associado a w. Pretendemos identificar as condições em que **LSl** $\models w^2 = w$. Neste caso o ω-termo w será dito *idempotente sobre* **LSl**. Note-se que, o 2-factor $\alpha = x_n^\omega u_n u_0 x_1^\omega$ de w^2 pode não verificar a condição *(5)* da Definição 4.2.1. Se for este o caso, então temos uma das seguintes situações:

(I) α é da forma $x^\omega x^j x^\omega$ com $j \in \{0, 1\}$, ou seja, $x_n = x_1$ e $u_n u_0 \in \{\varepsilon, x_1\}$. Neste caso, podemos aplicar as regras de reescrita $x^\omega x^\omega \to x^\omega$ e $x^\omega x \to x^\omega$, se necessário, para obtermos a partir de α o ω-termo x_1^ω. Observe-se que estas regras de reescrita não alteram o valor do ω-termo sobre **LSl**.

(II) α não é da forma considerada em (I). Neste caso, é suficiente aplicar as regras de reescrita $xx^\omega \rightleftarrows x^\omega$ e $x^\omega x \rightleftarrows x^\omega$, no sentido conveniente e o número de vezes necessário, de modo a obtermos o ω-termo $x_n^\omega u_m x_1^\omega$ que verifica a condição *(5)* da Definição 4.2.1. Também neste caso, as regras de reescrita usadas não alteram o valor do ω-termo sobre **LSl**. Portanto, **LSl** $\models \alpha = x_n^\omega u_m x_1^\omega$ e $x_n^\omega u_m x_1^\omega$ está em forma normal.

Caso contrário, α verifica à partida a condição *(5)* da Definição 4.2.1. Para o que segue inserimos este caso em (II) e consideramos $u_m = u_n u_0$.

Supondo que w verifica o caso (II), diremos que $\mathcal{A}_w$ é *especial* se possui uma transição etiquetada por u_m que começa no penúltimo estado e acaba no segundo estado, a qual será denominada *transição especial*. Observe-se que, se w verificar o caso (I) então o segundo e o penúltimo estados de $\mathcal{A}_w$ coincidem e $u_n u_0$ ou é a palavra vazia ou é a palavra x_1. Porém, pela condição (a.7), $\mathcal{A}_w$ não pode admitir $q_1 \xrightarrow{\varepsilon} q_1$ nem $q_1 \xrightarrow{x_1} q_1$ como transições. Portanto, neste caso, a definição de ω-autómato especial não pode ser aplicada a $\mathcal{A}_w$.

O próximo resultado fornece a caracterização anunciada de ω-termos idempotentes sobre **LSl**. A demonstração será omitida uma vez que é imediata.

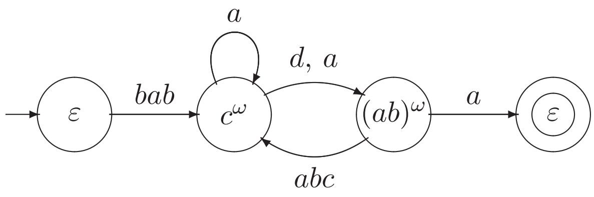
Proposição 4.3.4 *Seja $w = u_0 x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_n^\omega u_n$ um ω-termo em forma normal. Então, w é idempotente sobre* **LSl** *se e só se ou* **LSl** $\models x_n^\omega u_n u_0 x_1^\omega = x_1^\omega$ *ou o ω-autómato associado a w, $\mathcal{A}_w$, é especial.*

Terminamos com um exemplo ilustrativo desta caracterização.

Exemplo 4.3.5 *Considere $A = \{a, b, c, d\}$ e assuma $a < b < c < d$. Considere ainda o seguinte ω-termo em forma normal*

$$w = babc^\omega d(ab)^\omega abcc^\omega ac^\omega a(ab)^\omega a.$$

Note-se que w situa-se no caso (II) e $\alpha = (ab)^\omega ababc^\omega$ não satisfaz a condição (5) da Definição 4.2.1. Usando as regras de reescrita $xx^\omega \rightleftarrows x^\omega$ e $x^\omega x \rightleftarrows x^\omega$ pode-se obter a partir de α o ω-termo $(ab)^\omega abcc^\omega$, que verifica a condição acima referida. Portanto, $u_m = abc$. Como α e c^ω não têm o mesmo valor sobre **LSl**, *resulta da Proposição 4.3.4 que w é idempotente sobre* **LSl** *se e só se $\mathcal{A}_w$ é especial, isto é, possui uma transição com etiqueta abc que começa no penúltimo estado e acaba no segundo estado. Uma vez que $\mathcal{A}_w$ é dado por:*



concluímos que $\mathcal{A}_w$ *é especial e, portanto,* **LSl** $\models w = w^2$.

Capítulo 5

Bases de equações para a ω-variedade $\mathbf{LSl}^\omega$

Recordemos que para uma pseudovariedade de semigrupos $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}^\omega$ denota a ω--variedade gerada por $\mathbf{V}$, ou seja, a variedade de Birkhoff gerada por todos os ω-semigrupos $(S, \cdot, {}^\omega)$, onde $(S, \cdot)$ é um semigrupo finito de $\mathbf{V}$.

Pelo teorema de Birkhoff, a ω-variedade $\mathbf{V}^\omega$ é definida por um conjunto de ω-equações. O problema de encontrar uma base de ω-equações para $\mathbf{V}^\omega$ (e portanto para $\Omega_A^\omega \mathbf{V}$) recebeu alguma atenção nos últimos tempos, uma vez que está intimamente ligado com o problema da ω-palavra para $\mathbf{V}$. O caso da pseudovariedade $\mathbf{J}$, resolvido por Almeida em [3], constitui um exemplo importante. Um outro exemplo notável é dado pela pseudovariedade $\mathbf{A}$, o qual pode desempenhar um papel fundamental na resolução do problema da complexidade de Krohn-Rhodes de um semigrupo. Uma base para $\mathbf{A}^\omega$ foi descoberta por McCammond [51]. Mais recentemente, Almeida e Zeitoun [23] encontraram uma base para $\mathbf{R}^\omega$.

Neste capítulo exibimos uma base de ω-equações para $\mathbf{LSl}^\omega$. Embora esta base não seja usada para resolver o problema da ω-palavra para $\mathbf{LSl}$ o qual, como referido no capítulo anterior, foi descrito por Costa em [30], o trabalho aqui apresentado permite aprofundar o conhecimento existente acerca de $\Omega_A^\omega \mathbf{LSl}$.

Os resultados obtidos neste capítulo são essencialmente combinatórios e foram publicados no artigo [32]. Recordemos que no capítulo anterior foi descrita uma forma normal para ω-termos de rank 1 e que a igualdade sobre $\mathbf{LSl}$ de dois tais termos depende apenas da igualdade dos seus prefixos e sufixos envolvendo uma única ω-potência e da igualdade dos seus 2-factores. Assim, as técnicas envolvidas nas demonstrações inseridas neste capítulo são delineadas para lidar com a combinatória sobre estes 2-factores.

5.1 A ω-variedade gerada por LSl

Nesta secção, estudamos bases de ω-equações para a ω-variedade $\mathbf{LSl}^\omega$ gerada pela pseudovariedade **LSl**. Antes de introduzirmos uma tal base, aproveitamos a Subsecção 5.1.1 para fixar algumas notações e definições que serão úteis ao longo deste capítulo. Em seguida introduzimos uma base de ω-equações, Σ, para $\mathbf{LSl}^\omega$ e mostramos que esta ω-variedade não é finitamente baseada. A prova de que Σ é de facto uma base é completada nas Subsecções 5.1.3 e 5.1.4.

5.1.1 Preliminares

Estaremos particularmente interessados em ω-termos em forma normal do tipo

$$w = x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_n^\omega.$$

Um termo deste tipo será chamado um ω-termo *restrito* (ou *em forma restrita*), e o número n será chamado o ω-comprimento de w e denotado por $|w|_\omega$. Neste caso o ℓ-factor $w(1,\ell)$ (resp. $w(n-\ell+1,n)$) é designado o *ℓ-prefixo* (resp. o *ℓ-sufixo*) de w. Um ℓ-factor γ de w diz-se ocorrer na *posição i* quando $\gamma = w(i,i+\ell-1)$. É claro que um ℓ-factor pode ocorrer em diferentes posições. Por exemplo, o 2-factor $a^\omega aab(ab)^\omega$ do ω-termo restrito

$$w = (aab)^\omega aabb(ab)^\omega ba^\omega aab(ab)^\omega abaaa^\omega bba^\omega aab(ab)^\omega \tag{5.1}$$

tem duas ocorrências em w, nas posições 3 e 6. Em particular, é um 2-sufixo de w. O número de ocorrências de um ℓ-factor γ em w será denotado por $\mathbf{oc}(\gamma, w)$.

Um ω-termo em forma normal z diz-se uma 2-*permutação* de um ω-termo em forma normal w, quando w e z têm o mesmo valor sobre **LSl** e têm o mesmo número de ocorrências de cada 2-factor. Por exemplo,

$$z = (aab)^\omega aabb(ab)^\omega abaaa^\omega bba^\omega aab(ab)^\omega ba^\omega aab(ab)^\omega$$

é uma 2-permutação do ω-termo w em (5.1). Evidentemente, dois ω-termos em forma normal não precisam de ser 2-permutações um do outro para terem o mesmo valor sobre **LSl**. Um exemplo deste facto é dado por

$$a^\omega bc^\omega ab^\omega ac^\omega ba^\omega \quad \text{e} \quad a^\omega bc^\omega ba^\omega bc^\omega ab^\omega ac^\omega ba^\omega.$$

5.1.2 A base Σ

Seja Σ o seguinte conjunto de ω-equações (que, quando conveniente, também pode ser encarado como um conjunto de ω-identidades):

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} (x^r)^\omega = x^\omega, \qquad r \geq 2 & (5.2)\\ x^\omega x^\omega = x^\omega, & (5.3)\\ x^\omega = x^\omega x, & (5.4)\\ (xy)^\omega x = x(yx)^\omega, & (5.5)\\ (xy^\omega z)^\omega = (xy^\omega z)^2, & (5.6)\\ x^\omega y x^\omega = x^\omega y x^\omega y x^\omega, & (5.7)\\ x^\omega y x^\omega z x^\omega = x^\omega z x^\omega y x^\omega. & (5.8) \end{cases}$$

Observe-se que $x^\omega x = x x^\omega$ é dedutível a partir das equações (5.2) e (5.5). De facto, delas deduzimos $x^\omega x = (xx)^\omega x = x(xx)^\omega = xx^\omega$. Agora, tendo em conta a equação (5.4), é imediato concluir que

$$x^\omega = x x^\omega \tag{5.9}$$

é dedutível a partir de Σ.

Facto 5.1.1 *Por* (5.4) *e* (5.5), *temos que* $\Sigma \vdash (xy)^\omega = (xy)^\omega xy = x(yx)^\omega y$.

É importante referir ainda as seguintes três ω-equações que também são dedutíveis a partir de Σ.

Lema 5.1.2 *As seguintes ω-equações são dedutíveis a partir do conjunto Σ.*

$$\begin{cases} (x^\omega)^\omega = x^\omega, & (5.10)\\ x^\omega y x^\omega z x^\omega y x^\omega = x^\omega y x^\omega z x^\omega, & (5.11)\\ x^\omega z_1 y^\omega z_2 x^\omega z_3 y^\omega = x^\omega z_3 y^\omega z_2 x^\omega z_1 y^\omega. & (5.12) \end{cases}$$

Demonstração. A ω-equação (5.10) é dedutível a partir de (5.3) e (5.6). De facto, fazendo uso destas ω-equações podemos deduzir que

$$(x^\omega)^\omega = (x^\omega x^\omega x^\omega)^\omega = (x^\omega x^\omega x^\omega)^2 = x^\omega.$$

Agora, de (5.8) e (5.7) obtemos a ω-equação (5.11) como segue

$$x^\omega y x^\omega z x^\omega y x^\omega = x^\omega y x^\omega y x^\omega z x^\omega = x^\omega y x^\omega z x^\omega.$$

Finalmente, temos que (onde sublinhamos as ω-potências que são usadas para derivar o próximo termo)

$$\begin{aligned}
\Sigma \vdash x^\omega z_1 \underline{y}^\omega z_2 x^\omega z_3 \underline{y}^\omega &= \underline{x}^\omega z_1 y^\omega z_2 \underline{x}^\omega z_3 y^\omega z_2 \underline{x}^\omega z_3 y^\omega && \text{por (5.7)}\\
&= x^\omega z_3 \underline{y}^\omega z_2 x^\omega z_1 \underline{y}^\omega z_2 x^\omega z_3 \underline{y}^\omega && \text{por (5.8)}\\
&= \underline{x}^\omega z_3 y^\omega z_2 \underline{x}^\omega z_3 y^\omega z_2 \underline{x}^\omega z_1 y^\omega && \text{por (5.8)}\\
&= x^\omega z_3 y^\omega z_2 x^\omega z_1 y^\omega && \text{por (5.7)}
\end{aligned}$$

o que estabelece (5.12). ■

Apresentamos agora o resultado principal deste capítulo.

Teorema 5.1.3 *1) O conjunto Σ é uma base de ω-equações para* $\mathbf{LSl}^\omega$.

2) A ω-variedade $\mathbf{LSl}^\omega$ *não admite uma base finita de ω-equações.*

Demonstração. Para a demonstração de *2)* é suficiente seguir passo a passo a demonstração de [23, Teorema 6.1 *(b)*], onde Almeida e Zeitoun mostraram que $\mathbf{R}^\omega$ não é finitamente baseada. Vamos incluí-la aqui apenas por uma questão de completude. Pelo Corolário 2.1.4, e assumindo *1)*, é suficiente provar que nenhum subconjunto finito de Σ define a variedade $\mathbf{LSl}^\omega$. Para cada inteiro positivo p, seja S_p o semigrupo dado por

$$\begin{aligned}
S_p = \langle a, e, f : \ & a^p = 1,\ ea = ef = e^2 = e,\ fa = fe = f^2 = f,\\
& ae = e,\ af = f \rangle.
\end{aligned}$$

Este semigrupo tem $p+2$ elementos e é realizado, por exemplo, como o semigrupo de transformações do conjunto $\{1, \ldots, p, p+1, p+2\}$, onde a actua sobre $\{1, \ldots, p\}$ como o ciclo $(1, \ldots, p)$ e fixa os outros dois pontos, e e e f são aplicações constantes, respectivamente com valores $p+1$ e $p+2$. Seja τ a operação unária definida sobre S_p por

$$\tau(e) = e,\ \tau(f) = f,\ \tau(1) = e,\ \tau(a^k) = f\ (k \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}),$$

a qual determina um semigrupo unário $\mathcal{S}_p = (S_p, \cdot, \tau)$. Note-se que $\tau(a^p) = \tau(1) = e \neq f = \tau(a)$ e portanto $\mathcal{S}_p$ não satisfaz a equação $(x^p)^\omega = x^\omega$. Agora é simplesmente uma questão de rotina verificar que $\mathcal{S}_p$ satisfaz as equações (5.3)-(5.8) e (5.2) para r primo com p, o que completa a demonstração de *2)*.

Para *1)* temos de provar que, para todos os ω-termos $w, z \in T_A^\omega$,

$$\mathbf{LSl} \models w = z \quad \text{se e só se} \quad \Sigma \vdash w = z.$$

Suponhamos que $\Sigma \vdash w = z$. Para provar que **LSl** $\models w = z$ basta notar que **LSl** $\models \Sigma$. De facto, as ω-equações (5.2), (5.3) e (5.5) são verificadas por qualquer semigrupo finito. Por outro lado, **LSl** é aperiódica e é definida pelas pseudoidentidades $x^\omega y x^\omega = x^\omega y x^\omega y x^\omega$ e $x^\omega y x^\omega z x^\omega = x^\omega z x^\omega y x^\omega$. Portanto satisfaz (5.4), (5.7) e (5.8). Por fim, resulta imediatamente do Lema 4.2.2 que (5.6) é válida em **LSl**.

Mostramos agora que, dado um ω-termo $\alpha \in T_A^\omega \setminus A^+$, $\Sigma \vdash \alpha = \alpha'$ para algum ω-termo em forma normal $\alpha' \in T_A^\omega$. O procedimento que segue para calcular um tal termo α' consiste em seis passos (ver Exemplo 4.2.4 para uma ilustração deste algoritmo). O termo obtido após o j-ésimo passo será denotado por α_j, e $\alpha' = \alpha_6$. Em primeiro lugar, como na dedução de (5.10), usando as ω-equações (5.6) e (5.3) se necessário, derivamos a partir de α um ω-termo α_1 de rank 1. Depois, com a aplicação de (5.2) obtém-se um ω-termo de rank 1 α_2 cujos 1-factores x^ω são todos tais que x é uma palavra primitiva. Seguidamente, pelo Facto 5.1.1, deduzimos a partir de α_2 um ω-termo de rank 1 α_3 da forma

$$\alpha_3 = u_0 x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_n^\omega u_n$$

onde $x_1, \ldots, x_n$ são palavras de Lyndon. Este ω-termo satisfaz a condição *(1)* da definição de ω-termo em forma normal (Definição 4.2.1), e esta situação não será alterada pelos restantes passos de redução. No quarto passo usamos a ω--equação (5.9) para cancelar de u_0 a maior potência de x_1 que é um sufixo de u_0, e usamos (5.4) para cancelar de u_n a maior potência de x_n que é um prefixo de u_n. O ω-termo resultante α_4 satisfaz as condições *(2)* e *(3)* da Definição 4.2.1.

Após o quinto passo, aplicado ao termo α_4, todos os 2-factores estarão em forma normal. Primeiro, usamos as ω-equações (5.4) e (5.3) para eliminar os 2-factores da forma $x^\omega x^j x^\omega$, onde $j \geq 0$. De seguida, seja $\beta = x^\omega u y^\omega$ um 2--factor do ω-termo resultante e sejam $j, k \geq 1$ os menores inteiros tais que $|x^j| \geq |x| + |y|$ e $|y^k| \geq |x| + |y|$. O ω-termo $\beta_1 = x^\omega x^j u y^k y^\omega$ é dedutível a partir das ω-equações (5.4) e (5.9). Além disso, visto que β não é da forma $x^\omega x^j x^\omega$, afirmamos que a Proposição 1.3.2 garante que β_1 satisfaz as condições *(a)* e *(b)* da Definição 4.2.1. De facto, suponhamos por exemplo que *(a)* não é verificada. Então $x^j u y^k$ é um prefixo de uma potência de x, donde $u y^k$ também é. Logo y^k é um factor de uma potência de x e, portanto, y^k é um prefixo de alguma potência z^p de alguma conjugada z de x. Assim, como

$$|z| = |x| \text{ e } |y^k| \geq |x| + |y|,$$

y^k e z^p têm um prefixo comum de comprimento pelo menos $|y| + |z| - mdc(|y|, |z|)$. Então, a Proposição 1.3.2 implica que y e z são potências de uma mesma palavra.

Como y e z são ambas primitivas, resulta que são a mesma palavra e portanto z é uma palavra de Lyndon. Uma vez que z é uma conjugada de x e ambas são palavras de Lyndon, deduzimos que $x = z$ e, consequentemente, que $x = y$. Portanto ux^k é um prefixo de uma potência de x. Agora, o facto de x ser uma palavra primitiva implica que $u = x^\ell$ seja uma potência de x pois, caso contrário, teríamos $x = rs = sr$ para alguns $r, s \in A^+$ e, como consequência,

$$r = t^p, \;\; s = t^q \;\text{ e }\; x = t^{p+q}$$

para algum $t \in A^+$ e $p, q \geq 1$. Concluímos que $\beta = x^\omega x^\ell x^\omega$, o que contradiz as nossas suposições e prova a afirmação.

Usamos agora (5.4) e (5.9) para cancelar de $x^j u y^k$ qualquer prefixo x^ℓ e qualquer sufixo y^m que preserve as propriedades *(a)* e *(b)*. O ω-termo resultante β_2 está em forma normal, isto é, satisfaz as condições *(a)*, *(b)* e *(c)*. O ω-termo α_5 é obtido através da substituição de cada um dos 2-factores β acima referidos por β_2. O termo α_5 verifica, claramente, as condições *(1)*-*(3)* e *(5)* da Definição 4.2.1.

Finalmente, usamos a ω-equação (5.11) para eliminar em α_5 todas as ocorrências, excepto uma (aquela mais à esquerda), de cada 2-factor da forma $x^\omega u x^\omega$. O ω-termo resultante α_6 está em forma normal e, tomando $\alpha' = \alpha_6$, temos que $\Sigma \vdash \alpha = \alpha'$.

Portanto, para completar a demonstração do teorema, é suficiente provar que para todos os ω-termos w e z em forma normal

$$\mathbf{LSl} \models w = z \quad \Rightarrow \quad \Sigma \vdash w = z. \tag{5.13}$$

Isto será feito no restante deste capítulo. ∎

Recordemos que, se $w = u_0 x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_n^\omega u_n$ e $z = v_0 y_1^\omega v_1 y_2^\omega \cdots y_m^\omega v_m$ são ω--termos em forma normal tais que $\mathbf{LSl}$ satisfaz $w = z$, então, pela Proposição 4.2.3, $u_0 x_1^\omega = v_0 y_1^\omega$, $x_n^\omega u_n = y_m^\omega v_m$ e w e z têm os mesmos 2-factores. Em particular $u_0 = v_0$, $x_1 = y_1$, $x_n = y_m$ e $u_n = v_m$, e $\mathbf{LSl}$ verifica $x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_n^\omega = y_1^\omega v_1 y_2^\omega \cdots y_m^\omega$. Assim, em (5.13) podemos supor, sem perda de generalidade, que w e z são ω--termos restritos

$$w = x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_n^\omega, \qquad z = y_1^\omega v_1 y_2^\omega \cdots y_m^\omega,$$

com $x_1 = y_1$ e $x_n = y_m$. Mais formalmente, para estabelecer o Teorema 5.1.3 resta provar o seguinte resultado.

Teorema 5.1.4 *Sejam w e z dois ω-termos restritos tais que* $\mathbf{LSl}$ *verifica a ω--identidade $w = z$. Então a ω-equação $w = z$ é dedutível a partir de Σ.*

5.1.3 Resultados intermédios

Mais à frente, na Subsecção 5.1.4, será mostrado que a igualdade sobre **LSl** de dois ω-termos w e z é caracterizada pela igualdade sobre **LSl** de certos subtermos (aos quais chamamos "blocos") de w e z. Portanto, a demonstração do Teorema 5.1.4 será reduzida para blocos. Na presente subsecção, provamos alguns resultados intermédios técnicos. Informalmente falando, a ideia geral do algoritmo é derivar (sob certas condições, que são verificadas por blocos) a partir de ω-termos dados w e z tais que $\mathbf{LSl} \models w = z$, novos ω-termos w' e z' com um prefixo igual α de ω-comprimento suficientemente grande e depois cancelar os sufixos. Desta forma, conseguimos passar de w para z ($w \to w' \to \alpha \to z' \to z$) usando as ω-equações de Σ, o que mostra que $\Sigma \vdash w = z$.

Começamos por mostrar que z pode ser reduzido a um novo ω-termo com um 2-prefixo igual ao de w.

Proposição 5.1.5 *Sejam $w = x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_n^\omega$ e $z = y_1^\omega v_1 y_2^\omega \cdots y_m^\omega$ dois ω-termos restritos tais que $\mathbf{LSl} \models w = z$.*

i) Se $n \leq 2$, então $w = z$.

ii) Se $n > 2$, então existe uma 2-permutação z_1 de z tal que $\Sigma \vdash z = z_1$ e $x_1^\omega u_1 x_2^\omega$ é o 2-prefixo (resp. $x_{n-1}^\omega u_{n-1} x_n^\omega$ é o 2-sufixo) de z_1.

Demonstração. Se $n = 1$, então $w = x_1^\omega$ e não tem 2-factores. Portanto, como $\mathbf{LSl} \models w = z$, z também não tem 2-factores, o que significa que $m = 1$, e por conseguinte $z = y_1^\omega = x_1^\omega = w$. Suponhamos agora que $n = 2$, donde $w = x_1^\omega u_1 x_2^\omega$. Se $x_1 \neq x_2$, é claro que z coincide com w pois ambos têm o único 2--factor $x_1^\omega u_1 x_2^\omega$. Se $x_1 = x_2$, então z também coincide com w já que, por definição de forma restrita, $x_1^\omega u_1 x_1^\omega$ tem apenas uma ocorrência em z. Isto prova *i)*.

Provamos a condição *ii)* no caso do prefixo. O caso do sufixo prova-se simetricamente. Seja $n > 2$, donde também $m > 2$. Como $x_1 = y_1$, se $v_1 = u_1$ e $y_2 = x_2$, então tomamos $z_1 = z$. Caso contrário, como $\mathbf{LSl} \models w = z$, o 2-factor $x_1^\omega u_1 x_2^\omega$ de w também é um 2-factor de z e o 2-factor $x_1^\omega v_1 y_2^\omega$ de z também é um 2-factor de w. Suponhamos que eles têm ocorrências na posição i em z e j em w, respectivamente. Então $i, j \neq 1$ e w e z são da forma (onde w' e z' são ω-termos, possivelmente vazios)

$$w = x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_{j-1}^\omega u_{j-1} x_1^\omega v_1 y_2^\omega w',$$

$$z = x_1^\omega v_1 y_2^\omega \cdots y_{i-1}^\omega v_{i-1} x_1^\omega u_1 x_2^\omega z'.$$

Se $j = 2$, então $x_2 = x_1$. Neste caso,

$$z = \underline{x_1^\omega} v_1 y_2^\omega \cdots y_{i-1}^\omega v_{i-1} \underline{x_1^\omega} u_1 \underline{x_1^\omega} z' \tag{5.14}$$

e tomamos $z_1 = x_1^\omega u_1 x_1^\omega v_1 y_2^\omega \cdots y_{i-1}^\omega v_{i-1} x_1^\omega z'$. Logo z_1 e w têm o mesmo 2-prefixo $x_1^\omega u_1 x_1^\omega$, e $\Sigma \vdash z = z_1$ por (5.8). Suponhamos agora que $j > 2$. Vamos definir um processo iterativo que irá produzir o ω-termo desejado z_1 num máximo de $j-2$ passos.

Passo 1. Uma vez que $x_2^\omega u_2 x_3^\omega$ é um 2-factor de w tem-se que ele ocorre em z, digamos na posição k_1. Se $k_1 = 1$, então $x_1 = x_2$ e este caso foi tratado acima (z é da forma (5.14)). Se $1 < k_1 < i$, como x_2^ω ocorre na posição k_1, então z pode ser factorizado como (onde α_1 e α_2 são ω-termos)

$$z = \underline{x_1^\omega} \alpha_1 \underline{x_2^\omega} \alpha_2 \underline{x_1^\omega} u_1 \underline{x_2^\omega} z'.$$

Tomamos então $z_1 = x_1^\omega u_1 x_2^\omega \alpha_2 x_1^\omega \alpha_1 x_2^\omega z'$, que é dedutível a partir de (5.12) e portanto de Σ.

Reparemos que k_1 não pode ser igual a i. De facto, $k_1 = i$ implicaria que $x_1^\omega u_1 x_2^\omega = x_2^\omega u_2 x_3^\omega$, donde $x_1 = x_2 = x_3$ e $u_1 = u_2$ o que não é possível uma vez que w é um ω-termo em forma restrita.

Suponhamos agora que $k_1 > i$. Então x_3^ω ocorre em z numa posição maior do que $i+1$.

Passo ℓ (com $1 < \ell \leq j-2$). No passo ℓ consideramos o 2-factor $x_{\ell+1}^\omega u_{\ell+1} x_{\ell+2}^\omega$ de w e supomos que ele ocorre em z na posição k_ℓ. Para cada $p < \ell$, assumimos que $k_p > i$, o que significa que x_{p+2}^ω tem uma ocorrência em z numa posição maior do que $i+1$.

Se $k_\ell = 1$ ou $k_\ell = i$, então $x_1 = x_{\ell+1}$. Como estamos a assumir, devido ao passo $p = \ell - 1$, que $x_{\ell+1}^\omega$ tem uma ocorrência em z numa posição maior do que $i+1$, então z é da forma (onde α_3 pode ser vazio)

$$z = \underline{x_1^\omega} \alpha_1 \underline{x_1^\omega} u_1 x_2^\omega \alpha_2 \underline{x_1^\omega} \alpha_3. \tag{5.15}$$

Neste caso consideramos $z_1 = x_1^\omega u_1 x_2^\omega \alpha_2 x_1^\omega \alpha_1 x_1^\omega \alpha_3$, que claramente satisfaz as propriedades do enunciado.

Suponhamos agora que $1 < k_\ell < i$. Então

$$z = \underline{x_1^\omega} \alpha_1 \underline{x_{\ell+1}^\omega} \alpha_2 \underline{x_1^\omega} u_1 x_2^\omega \alpha_3 \underline{x_{\ell+1}^\omega} \alpha_4.$$

De seguida tomamos $z_1 = x_1^\omega u_1 x_2^\omega \alpha_3 x_{\ell+1}^\omega \alpha_2 x_1^\omega \alpha_1 x_{\ell+1}^\omega \alpha_4$, que como anteriormente possui a forma desejada.

Finalmente suponhamos que $k_\ell > i$. Assumimos neste ponto que alcançamos o último passo, ou seja, assumimos que $\ell = j-2$. Então $\ell+2 = j$ e $x_{\ell+1}^\omega u_{\ell+1} x_{\ell+2}^\omega = x_{j-1}^\omega u_{j-1} x_j^\omega$, que é igual a $x_{j-1}^\omega u_{j-1} x_1^\omega$ e ocorre em z numa posição $> i$. Em particular, x_1^ω ocorre depois da posição $i+1$ e portanto z é da forma (5.15) e z_1 é definido como nesse caso.

Note-se que, como as únicas ω-equações usadas no processo acima para derivar z_1 a partir de z foram a (5.8) e a (5.12), as quais não transformam os 2-factores e não alteram o seu número de ocorrências, z_1 é uma 2-permutação de z. Isto conclui a demonstração da proposição. ∎

Sob certas condições, é possível aplicar repetidamente a Proposição 5.1.5 para obter prefixos iguais com um ω-comprimento grande.

Proposição 5.1.6 *Sejam $w = x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_n^\omega$ e $z = y_1^\omega v_1 y_2^\omega \cdots y_m^\omega$ ω-termos restritos tais que* **LSl** $\models w = z$. *Para cada $1 \le r \le n$, denotamos por $\alpha_r = x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_r^\omega$ o r-prefixo de w. Para um $1 < \ell \le n$ fixo, suponhamos que a seguinte condição*

$$(C_\ell) \qquad \forall \gamma \in F_2^\omega(\alpha_{\ell-1}),\ \text{ou } \mathbf{oc}(\gamma, w) = \mathbf{oc}(\gamma, z),$$
$$\text{ou } \mathbf{oc}(\gamma, w), \mathbf{oc}(\gamma, z) > \mathbf{oc}(\gamma, \alpha_{\ell-1})$$

é verificada. Então existe uma 2-permutação $z_{\ell-1}$ de z da forma $z_{\ell-1} = \alpha_\ell z'_\ell$ tal que $\Sigma \vdash z = z_{\ell-1}$.

Demonstração. Provamos o resultado por indução sobre ℓ. O caso $\ell = 2$ é uma consequência imediata da Proposição 5.1.5. Consideremos agora $2 < \ell \le n$ e suponhamos que (C_ℓ) é verificada. Então é claro que $(C_{\ell-1})$ também é verificada. Suponhamos, por hipótese de indução, que o resultado é válido para $\ell-1$, donde existe uma 2-permutação $z_{\ell-2} = \alpha_{\ell-1} z'_{\ell-1}$ de z tal que

$$\Sigma \vdash z = z_{\ell-2}. \tag{5.16}$$

Então **LSl** $\models z_{\ell-2} = z = w$ e portanto, pela Proposição 4.2.3, w, z e $z_{\ell-2}$ têm os mesmos 2-factores. Como $z_{\ell-2}$ é uma 2-permutação de z, z e $z_{\ell-2}$ têm o mesmo número de ocorrências de cada 2-factor (donde, em particular, $|z_{\ell-2}|_\omega = |z|_\omega = m$). Portanto, resulta das hipóteses que, para cada 2-factor γ de $\alpha_{\ell-1}$, ou $\mathbf{oc}(\gamma, w) = \mathbf{oc}(\gamma, z_{\ell-2})$, ou $\mathbf{oc}(\gamma, w), \mathbf{oc}(\gamma, z_{\ell-2}) > \mathbf{oc}(\gamma, \alpha_{\ell-1})$. Em ambos os casos, deduzimos que

$$\mathbf{LSl} \models w(\ell-1, n) = x_{\ell-1}^\omega u_{\ell-1} x_\ell^\omega \cdots x_n^\omega = x_{\ell-1}^\omega z'_{\ell-1}.$$

De facto, $\sigma = w(\ell - 1, n) = x_{\ell-1}^\omega u_{\ell-1} x_\ell^\omega \cdots x_n^\omega$ e $\tau = x_{\ell-1}^\omega z'_{\ell-1}$ têm o mesmo 1--prefixo, o mesmo 1-sufixo e os mesmos 2-factores (que são precisamente os 2-factores de w e z, excepto aqueles γ para os quais $\mathbf{oc}(\gamma, w) = \mathbf{oc}(\gamma, z) = \mathbf{oc}(\gamma, \alpha_{\ell-1})$).

Portanto, aplicando a Proposição 5.1.5 aos ω-termos σ e τ, obtemos uma 2-permutação $\tau_1 = x_{\ell-1}^\omega u_{\ell-1} x_\ell^\omega \tau'$ de τ tal que

$$\Sigma \vdash \tau = \tau_1. \tag{5.17}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\Sigma \vdash z &= z_{\ell-2} && \text{por (5.16)}\\
&= \alpha_{\ell-1} z'_{\ell-1} && \text{pela definição de } z_{\ell-2}\\
&= x_1^\omega \cdots x_{\ell-2}^\omega u_{\ell-2} x_{\ell-1}^\omega z'_{\ell-1} && \text{pela definição de } \alpha_{\ell-1}\\
&= x_1^\omega \cdots x_{\ell-2}^\omega u_{\ell-2} \tau && \text{pela definição de } \tau\\
&= x_1^\omega \cdots x_{\ell-2}^\omega u_{\ell-2} \tau_1 && \text{por (5.17)}\\
&= x_1^\omega \cdots x_{\ell-2}^\omega u_{\ell-2} x_{\ell-1}^\omega u_{\ell-1} x_\ell^\omega \tau' && \text{pela definição de } \tau_1\\
&= \alpha_\ell\, \tau' && \text{pela definição de } \alpha_\ell.
\end{aligned}$$

De seguida tomamos $z_{\ell-1} = \alpha_\ell\, \tau'$, o que conclui a demonstração. ■

O próximo resultado é um corolário simples do dual da Proposição 5.1.6 para sufixos, e apresenta uma espécie de lei de absorção.

Corolário 5.1.7 *Seja w um ω-termo restrito da forma $w = \alpha_1 x^\omega \alpha_2 x^\omega$. Se cada 2-factor de $x^\omega \alpha_2 x^\omega$ tem pelo menos duas ocorrências em $\alpha_1 x^\omega$, então $\Sigma \vdash w = \alpha_1 x^\omega$.*

Demonstração. Um ω-termo restrito z diz-se 2-*linear* se cada 2-factor tem exactamente uma ocorrência em z. Primeiro provamos o resultado para o caso em que $\beta = x^\omega \alpha_2 x^\omega$ é um ω-termo 2-linear. Neste caso, para cada 2-factor γ de β, $\mathbf{oc}(\gamma, \beta) = 1 < \mathbf{oc}(\gamma, \alpha_1 x^\omega)$. Logo, como $\mathbf{LSl} \models w = \alpha_1 x^\omega$ pelas hipóteses, deduzimos a partir do dual da Proposição 5.1.6 que existe um ω-termo da forma $\alpha_3 x^\omega \alpha_2 x^\omega$ tal que $\Sigma \vdash \alpha_1 x^\omega = \alpha_3 x^\omega \alpha_2 x^\omega$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\Sigma \vdash w &= \alpha_1 x^\omega \alpha_2 x^\omega && \text{pela definição de } w\\
&= \alpha_3 x^\omega \alpha_2 x^\omega \alpha_2 x^\omega && \text{pois } \Sigma \vdash \alpha_1 x^\omega = \alpha_3 x^\omega \alpha_2 x^\omega\\
&= \alpha_3 x^\omega \alpha_2 x^\omega && \text{pela } \omega\text{-equação (5.7)}\\
&= \alpha_1 x^\omega && \text{pois } \Sigma \vdash \alpha_1 x^\omega = \alpha_3 x^\omega \alpha_2 x^\omega,
\end{aligned}$$

o que prova o resultado quando $x^\omega \alpha_2 x^\omega$ é 2-linear.

Provamos agora o caso geral. Para mostrar que

$$\Sigma \vdash w = \alpha_1 x^\omega, \tag{5.18}$$

basta iterar o seguinte procedimento. Se $x^\omega \alpha_2 x^\omega$ é 2-linear, então (5.18) já está provado. Caso contrário escolhemos qualquer subtermo 2-linear de $x^\omega \alpha_2 x^\omega$ da forma $y^\omega \sigma y^\omega$, deste modo $w = \alpha_3 y^\omega \sigma y^\omega \alpha_4$ para alguns ω-termos α_3 e α_4 com α_4 possivelmente vazio. Como cada 2-factor de $y^\omega \sigma y^\omega$ possui pelo menos duas ocorrências em $\alpha_3 y^\omega$, podemos aplicar o caso 2-linear para eliminar o subtermo σy^ω. Obtemos um ω-termo restrito w_1, Σ-equivalente a w, da forma $w_1 = \alpha_1 x^\omega \alpha_2' x^\omega$, onde $|\alpha_2'|_\omega < |\alpha_2|_\omega$. Aplicando o mesmo procedimento a w_1, e iterando-o se necessário, obtemos enfim, após um número finito de passos, o ω-termo $\alpha_1 x^\omega$, o que prova (5.18) e completa a demonstração do corolário. ■

5.1.4 Factorização em blocos de um ω-termo em forma normal

O objectivo desta subsecção é reduzir o Teorema 5.1.4 ao caso em que w e z são *blocos* (a definir abaixo). Neste caso, a Proposição 5.1.6 pode ser aplicada para obtermos dois ω-termos w' e z' verificando as seguintes condições: $w = w'$ e $z = z'$ são dedutíveis a partir de Σ; w' e z' têm o mesmo prefixo α "suficientemente grande"; o prefixo α contém todos os 2-factores de w (e de z). Em seguida usamos o Corolário 5.1.7 para concluir que $w' = \alpha = z'$ é dedutível a partir de Σ e, consequentemente, para estabelecer o Teorema 5.1.4.

Um ω-termo restrito $w = x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_n^\omega$ $(n > 1)$ diz-se um *bloco* se ou $n = 2$ e $x_1 = x_2$, ou $n > 2$ e

$$\forall i \in \{2, \ldots, n-1\}\ \exists \ell, r \in \{1, \ldots, n\},\ \ell < i < r,\ x_\ell = x_r.$$

Ou seja, w é um bloco se pode ser "coberto" por subtermos da forma $x^\omega \alpha x^\omega$. Note-se que, em particular, x_1^ω e x_n^ω têm que ter mais do que uma ocorrência em w.

A seguinte propriedade de blocos será útil para mostrar que o Teorema 5.1.4 é válido para blocos.

Lema 5.1.8 *Seja $w = x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_n^\omega$ um bloco. Existe um bloco w', Σ-equivalente a w, e uma factorização $w' = x_1^\omega \alpha_1 x_1^\omega \alpha_2$ tal que todo o 2-factor de w (e de w') tem pelo menos uma ocorrência em $x_1^\omega \alpha_1 x_1^\omega$.*

Demonstração. Seja i a maior posição de w contendo uma ocorrência de x_1^ω. Pela definição de um bloco, $i > 1$ e portanto

$$w = x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_{i-1}^\omega u_{i-1} x_1^\omega u_i x_{i+1}^\omega \cdots x_n^\omega.$$

Seja $f(w)$ o número de 2-factores de w que não ocorrem no i-prefixo $w(i) = x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_{i-1}^\omega u_{i-1} x_1^\omega$ de w. Ou seja, $f(w)$ é o número de 2-factores que não têm a propriedade pretendida para w'. A demonstração prossegue por indução sobre $k = f(w)$. Se $k = 0$, não há nada a provar. Basta tomar $w' = w$ neste caso.

Suponhamos agora que $k \geq 1$ e assumamos, por hipótese de indução, que o resultado é válido para todo o bloco z com $f(z) < k$. Seja p a menor posição de w onde ocorre um 2-factor que não ocorre em $w(i)$. Então $x_p^\omega u_p x_{p+1}^\omega$ é o 2-factor referido e, obviamente, $i \leq p < n$.

Consideremos primeiro que $p = i$. Neste caso $x_p^\omega u_p x_{p+1}^\omega = x_1^\omega u_i x_{i+1}^\omega$ e, pela definição de bloco, existem $\ell, r \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $x_\ell = x_r$, onde ou (1) $\ell < i + 1 < r$ ou (2) $\ell < i + 1 = n = r$. Note-se que, como $r > i$, $x_r \neq x_1$ pela definição de i, donde $\ell < i$. Portanto w é da forma

$$w = \begin{cases} x_1^\omega \beta_1 \underline{x_r^\omega} \beta_2 x_1^\omega u_i x_{i+1}^\omega \beta_3 \underline{x_r^\omega} \beta_4 & \text{no caso (1)} \\ x_1^\omega \beta_1 \underline{x_{i+1}^\omega} \beta_2 x_1^\omega u_i \underline{x_{i+1}^\omega} & \text{no caso (2).} \end{cases}$$

No primeiro caso, definimos

$$w_1 = x_1^\omega \beta_1 x_r^\omega \beta_2 x_1^\omega u_i x_{i+1}^\omega \beta_3 x_r^\omega \beta_2 x_1^\omega u_i x_{i+1}^\omega \beta_3 x_r^\omega \beta_4.$$

A ω-equação $w = w_1$ é dedutível a partir de Σ, pois w_1 é obtido a partir de w usando a ω-equação (5.7). Contudo w_1 é possivelmente não restrito, uma vez que em $x_r^\omega \beta_2 x_1^\omega$ ou em $x_{i+1}^\omega \beta_3 x_r^\omega$ podem ocorrer 2-factores da forma $y^\omega v y^\omega$ e, portanto, eles aparecem duas vezes em w_1. É suficiente, nessa situação, usar a equação (5.11) para eliminar a ocorrência mais à direita de cada um desses 2-factores. Obtemos um ω-termo restrito (um bloco para sermos mais precisos)

$$w_2 = x_1^\omega \beta_1 x_r^\omega \beta_2 x_1^\omega u_i x_{i+1}^\omega \beta_3 x_r^\omega \beta_2' x_1^\omega u_i x_{i+1}^\omega \beta_3' x_r^\omega \beta_4,$$

que tem uma ocorrência de x_1^ω à direita de uma ocorrência de $x_1^\omega u_i x_{i+1}^\omega$ (e de todos os 2-factores de $w(i)$). Portanto $f(w_2) < k$. O caso (2) pode ser tratado analogamente e, assim, o resultado para blocos w tais que $f(w) = k$ segue por indução.

Consideremos agora o caso em que $p > i$. Pela definição de p, o 2-factor $x_{p-1}^\omega u_{p-1} x_p^\omega$ ocorre em w numa posição $q < i$. Para sermos mais precisos $q < i - 1$, pois $x_p \neq x_1$. Portanto, x_p^ω ocorre na posição $q+1 < i$ e w admite uma factorização da forma

$$w = x_1^\omega \beta_1 x_p^\omega \beta_2 x_1^\omega \beta_3 x_p^\omega u_p x_{p+1}^\omega \beta_4. \tag{5.19}$$

Como w é um bloco, existem $\ell, r \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $x_\ell = x_r$, onde ou $\ell < p+1 < r$ ou $\ell < p+1 = n = r$. Se $x_r = x_p$, prosseguimos como no caso $p = i$ acima, usando as ocorrências de x_p nas posições $q+1 < i$ e $r \geq p+1$ para obter um bloco w_2 tal que $f(w_2) < k$. O resultado para $f(w) = k$ segue depois por hipótese de indução. O caso em que $\ell < i$ pode ser tratado analogamente, usando as ocorrências de x_r nas posições $\ell < i$ e $r \geq p+1$. Logo, podemos assumir que $x_r \neq x_p$, donde $\ell < p$, e que $\ell > i$. Portanto, a factorização (5.19) de w pode ser refinada como segue (sendo o caso $r = p+1$ similar, assumimos que $r > p+1$)

$$w = x_1^\omega \beta_1 \underline{x_p^\omega} \beta_2 x_1^\omega \beta_3' \underline{x_r^\omega} \beta_3'' \underline{x_p^\omega} u_p x_{p+1}^\omega \beta_4' \underline{x_r^\omega} \beta_4''.$$

Usando a equação (5.12), obtemos um bloco

$$w_2 = x_1^\omega \beta_1 x_p^\omega u_p x_{p+1}^\omega \beta_4' x_r^\omega \beta_3'' x_p^\omega \beta_2 x_1^\omega \beta_3' x_r^\omega \beta_4''$$

tal que $f(w_2) < k$. Então, a hipótese de indução implica a validade do resultado no caso $f(w) = k$.

O lema segue por indução. ∎

Estamos agora em condições de mostrar que o Teorema 5.1.4 é verificado quando w e z são blocos.

Proposição 5.1.9 *Se w e z são dois blocos tais que* **LSl** $\models w = z$, *então* $\Sigma \vdash w = z$.

Demonstração. Suponhamos primeiro que w possui um único 1-factor x^ω. Como **LSl** $\models w = z$, resulta que x^ω também é o único 1-factor de z. Neste caso é imediato que $\Sigma \vdash w = z$, pois $w = z$ é dedutível a partir da ω-equação (5.8).

Assumimos agora que w (e também z) tem pelo menos dois 1-factores diferentes, digamos x^ω e y^ω onde x^ω é o 1-prefixo de w (e de z). Seja v^ω o 1-sufixo de w (e de z). Pelo Lema 5.1.8, existe um bloco $w_1 = x^\omega \alpha_1 x^\omega \alpha_2 v^\omega$ tal que $\Sigma \vdash w = w_1$ e $x^\omega \alpha_1 x^\omega$ contém todos os 2-factores de w. Em particular, y^ω e v^ω são factores de α_1. Aplicamos a ω-equação (5.7) três vezes para derivar a partir de w_1 um ω-termo (possivelmente não restrito)

$$w_2 = (x^\omega \alpha_1)^4 x^\omega \alpha_2 v^\omega.$$

A necessidade de quatro cópias de $x^\omega\alpha_1$ deve ser clara pela definição do ω--termo w_3 (apresentado abaixo) obtido a partir de w_2. Contudo adiantamos que: o prefixo $x^\omega\alpha_1x^\omega\alpha_1x^\omega$ contém pelo menos duas ocorrências de cada 2-factor, o que permitirá aplicar o Corolário 5.1.7 a w_3; a terceira cópia de $x^\omega\alpha_1$ contém uma ocorrência de v^ω, a qual aparecerá como a primeira ocorrência diferenciada em (5.20); a quarta cópia permite obter uma ocorrência extra de cada 2-factor, o que garantirá que o número total de ocorrências de cada 2-factor (que não é da forma $u^\omega u'u^\omega$) em w_3 será maior do que o seu número de ocorrências no prefixo $x^\omega\alpha_3v^\omega$ de w_3 e que permitirá aplicar a Proposição 5.1.6.

Agora, usando a ω-equação (5.11) em w_2 para apagar todas excepto a ocorrência mais à esquerda de cada 2-factor da forma $u^\omega u'u^\omega$, obtemos um ω-termo restrito w_3 tal que $\Sigma \vdash w = w_3$ e

$$w_3 = x^\omega\alpha_3v^\omega\alpha_4v^\omega \tag{5.20}$$

onde:

i) **LSl** verifica a ω-identidade $w_3 = x^\omega\alpha_3v^\omega$ (o que é equivalente a dizer que cada 2-factor de w_3 ocorre em $x^\omega\alpha_3v^\omega$);

ii) cada 2-factor de w_3 ocorre em $v^\omega\alpha_4v^\omega$ excepto os da forma $u^\omega u'u^\omega$;

iii) para cada 2-factor γ de $v^\omega\alpha_4v^\omega$, $\mathbf{oc}(\gamma, x^\omega\alpha_3v^\omega) \geq 2$.

Reparemos que estas condições são de facto verificadas, pois a existência do 1--factor y^ω garante a existência de 2-factores que não são da forma $u^\omega u'u^\omega$.

Por outro lado, $\mathbf{LSl} \models w = z$ por hipótese. Assim, como acima e aplicando, se necessário, as ω-equações (5.7) e (5.11) um número de vezes suficientemente grande, podemos encontrar um ω-termo restrito z_1 tal que $\Sigma \vdash z = z_1$ e, para cada 2-factor γ de z_1, $\mathbf{oc}(\gamma, z_1) \geq \mathbf{oc}(\gamma, w_3)$. Em particular, para cada 2-factor γ da forma $u^\omega u'u^\omega$, $\mathbf{oc}(\gamma, z_1) = \mathbf{oc}(\gamma, w_3) = 1$. Portanto, como $\mathbf{LSl} \models w_3 = z_1$, podemos deduzir a partir da Proposição 5.1.6 uma 2-permutação z_2 de z_1, da forma

$$z_2 = x^\omega\alpha_3v^\omega\alpha_5v^\omega,$$

tal que $\Sigma \vdash z_2 = z_1$.

Agora, pelo Corolário 5.1.7, $\Sigma \vdash w_3 = x^\omega\alpha_3v^\omega = z_2$. Como a sequência de ω-equações $w = w_3 = z_2 = z_1 = z$ é dedutível a partir de Σ, a demonstração da proposição está completa. ∎

Introduzimos agora a factorização em blocos de um ω-termo em forma normal, que permitirá reduzir o Teorema 5.1.4 a blocos. Como acabamos de resolver esse caso na Proposição 5.1.9, o caso geral será então obtido. Assim, consideremos um ω-termo em forma normal

$$w = u_0 x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_m^\omega u_m.$$

Se cada 1-factor x_k^ω tem exactamente uma ocorrência em w, então definimos $\alpha_0 = w$. Caso contrário, denotamos por i_1 o menor $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que x_k^ω possui pelo menos duas ocorrências em w, e definimos $\alpha_0 = u_0 x_1^\omega u_1 \cdots x_{i_1-1}^\omega u_{i_1-1}$. Denotamos agora por j_1 o maior $k \in \{i_1+1, \ldots, m\}$ tal que $x_{i_1}^\omega u_{i_1} x_{i_1+1}^\omega \cdots u_{k-1} x_k^\omega$ é um bloco, e definimos $w_1 = x_{i_1}^\omega u_{i_1} x_{i_1+1}^\omega \cdots u_{j_1-1} x_{j_1}^\omega$. Agora, aplicando o mesmo procedimento ao subtermo $z_1 = u_{j_1} x_{j_1+1}^\omega \cdots x_m^\omega u_m$ de w, obtemos subtermos $\alpha_1 = u_{j_1} x_{j_1+1}^\omega u_{j_1+1} \cdots x_{i_2-1}^\omega u_{i_2-1}$ e $w_2 = x_{i_2}^\omega u_{i_2} x_{i_2+1}^\omega \cdots u_{j_2-1} x_{j_2}^\omega$. Iteramos este processo até obtermos $\alpha_n = z_n$ em algum passo $n+1$, onde $n \geq 0$ e $z_0 = w$. Então w admite a seguinte factorização

$$w = \alpha_0 w_1 \alpha_1 w_2 \cdots w_n \alpha_n \tag{5.21}$$

chamada a *factorização em blocos* de w. Note-se que a factorização em blocos possui as seguintes propriedades:

- para cada $1 \leq i \leq n$, o factor w_i é um bloco;
- para cada $1 \leq i < n$, α_i é não vazio. De facto w_i termina com uma ω-potência e w_{i+1} começa com uma outra ω-potência e, pela definição de ω-termo em forma normal, w não tem duas ω-potências como factores consecutivos;
- se um 1-factor x^ω possui pelo menos duas ocorrências em w, então todas as ocorrências de x^ω estão contidas num único bloco w_i;
- se um 1-factor de w ocorre em algum α_i, então tem exactamente uma ocorrência em w.

Porém, o recíproco desta última propriedade não é verdadeiro. Se um 1-factor de w possui exactamente uma ocorrência, então esta ocorrência não acontece necessariamente em algum α_i. De facto, pode ocorrer em algum w_i desde que um outro 1-factor tenha uma ocorrência antes da sua e uma outra ocorrência depois da sua, ambas em w_i.

O próximo resultado estabelece que para **LSl**, o problema da ω-palavra para ω-termos arbitrários pode ser reduzido ao problema da ω-palavra para blocos.

Proposição 5.1.10 *Sejam* $w = \alpha_0 w_1 \alpha_1 \cdots w_n \alpha_n$ *e* $z = \beta_0 z_1 \beta_1 \cdots z_m \beta_m$ *as factorizações em blocos de dois* ω*-termos em forma normal* w *e* z*. Então,* $\mathbf{LSl} \models w = z$ *se e só se*

i) $n = m$;

ii) $\alpha_i = \beta_i$, *para todo o* $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$;

iii) $\mathbf{LSl} \models w_j = z_j$, *para todo o* $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Demonstração. A condição suficiente é trivial. Reciprocamente, assumimos sem perda de generalidade que $n \leq m$ e que w e z são restritos. A demonstração é feita por indução sobre n.

Suponhamos primeiro que $n = 0$. Então $w = \alpha_0$ e α_0 é não vazio, digamos

$$\alpha_0 = x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_k^\omega.$$

Se $k \leq 2$, então o resultado segue imediatamente da Proposição 5.1.5 *i)*. Assim, assumimos que $k > 2$. Pela definição de factorização em blocos, x_1^ω possui uma única ocorrência em w. Logo, como $\mathbf{LSl} \models w = z$ por hipótese, x_1^ω é o 1-prefixo de z e tem uma única ocorrência em z, pois caso contrário z (e também w) teria um 2-factor da forma $y^\omega v x_1^\omega$. Portanto β_0 é não vazio, digamos

$$\beta_0 = y_1^\omega v_1 y_2^\omega \cdots y_\ell^\omega$$

com $y_1 = x_1$. Agora, como x_1^ω possui apenas uma ocorrência em z e $x_1^\omega u_1 x_2^\omega$ é um 2-factor de z, $x_1^\omega u_1 x_2^\omega$ tem uma única ocorrência em z, na posição 1 para sermos mais precisos. Além disso, x_2^ω possui uma única ocorrência em w, o que implica que também possui uma única ocorrência em z, pois caso contrário z (e também w) teria um 2-factor da forma $y^\omega v x_2^\omega$ distinto de $x_1^\omega u_1 x_2^\omega$. Isto implica que $\ell \geq 2$ e que $u_1 = v_1$ e $x_2 = y_2$. Iterando o processo anterior, deduzimos que $\ell \geq k$ e que $u_{i-1} = v_{i-1}$ e $x_i = y_i$ para todo o $i \leq k$. Agora, uma vez que x_k^ω tem precisamente uma ocorrência em w, concluímos, como acima, que necessariamente $z = \beta_0$ (donde $m = 0$) e $\alpha_0 = \beta_0$.

Suponhamos agora que $n \geq 1$ (donde também $m \geq 1$) e assumamos, por hipótese de indução, que o resultado é válido para $n - 1$. Seja

$$w_1 = e_1^\omega f_1 e_2^\omega \cdots e_r^\omega \quad \text{e} \quad z_1 = g_1^\omega h_1 g_2^\omega \cdots g_s^\omega.$$

Como anteriormente pode-se mostrar que α_0 é não vazio se e só se β_0 é não vazio. Neste caso, se $\alpha_0 = x_1^\omega u_1 x_2^\omega \cdots x_k^\omega u_k$ e $\beta_0 = y_1^\omega v_1 y_2^\omega \cdots y_\ell^\omega v_\ell$, pode-se mostrar que

$k = \ell$, $u_{i-1} = v_{i-1}$ e $x_i = y_i$ para todo o $1 \leq i \leq k$. Além disso, $x_k^\omega u_k e_1^\omega$ ocorre em z na posição k, pois $x_k = y_k$ e y_k^ω possui uma única ocorrência em z. Portanto $u_k = v_k$ e $e_1 = g_1$. Isto prova que $\alpha_0 = \beta_0$ e que w_1 e z_1 têm o mesmo 1-prefixo. Para provar que $\mathbf{LSl} \models w_1 = z_1$, mostramos agora que os blocos w_1 e z_1 têm os mesmos 2-factores.

Suponhamos que existe algum 2-factor $e_i^\omega f_i e_{i+1}^\omega$ de w_1 que não ocorre em z_1 e vamos assumir que $1 \leq i < r$ é minimal com esta propriedade. Como e_i^ω ocorre em z_1 (e em z não ocorre fora de z_1), $e_i^\omega f_i e_{i+1}^\omega$ ocorre em z na última posição de z_1, donde e_{i+1}^ω é a primeira ω-potência à direita de z_1. Consideremos agora os 2-factores

$$e_{i+1}^\omega f_{i+1} e_{i+2}^\omega, \ldots, e_{r-1}^\omega f_{r-1} e_r^\omega$$

de w_1 (e de z). Como nenhum dos 1-factores $e_{i+1}^\omega, e_{i+2}^\omega, \ldots, e_r^\omega$ pode ocorrer em z simultaneamente dentro e fora de z_1, deduzimos que todos estes 2-factores ocorrem à direita de z_1. Mas w_1 é um bloco, donde existem $p, q \in \{1, \ldots, r\}$, com $p < i < q$ ou $1 = p = i < q$, tais que $e_p = e_q$, o que é absurdo pois e_p^ω ocorre em z_1 pela minimalidade de i. Portanto, todos os 2-factores de w_1 ocorrem em z_1. Por simetria, deduzimos que w_1 e z_1 têm os mesmos 2-factores. Para estabelecer que $\mathbf{LSl} \models w_1 = z_1$, resta provar que $e_r = g_s$.

Suponhamos que o sufixo

$$w' = \alpha_1 w_2 \cdots w_n \alpha_n$$

de w é não vazio e seja ux^ω o único prefixo de w' com $u, x \in A^+$. Então $e_r^\omega u x^\omega$ é um 2-factor de w com uma única ocorrência, pois caso contrário x^ω não poderia ocorrer fora de w_1. Logo $e_r^\omega u x^\omega$ também é um 2-factor de z e, como anteriormente, pode-se mostrar que tem uma única ocorrência em z, na última posição de z_1 para sermos mais precisos. Portanto $e_r = g_s$ e o sufixo

$$z' = \beta_1 z_2 \cdots z_m \beta_m$$

de z é não vazio. Concluímos em particular que $\mathbf{LSl} \models w_1 = z_1$. Além disso, se vy^ω é o único prefixo de z' com $v, y \in A^+$, então $u = v$ e $x = y$. Reparemos que, pelos argumentos acima referidos, é agora claro que w' é vazio se e só se z' é vazio. Neste caso e_r^ω e g_s^ω são, respectivamente, os 1-sufixos de w e de z. Portanto eles coincidem, pois **LSl** verifica $w = z$ por hipótese, e o resultado está provado. Assim, podemos assumir que w' e z' são ambos não vazios. Denotamos por w'' e z'' os ω-termos restritos obtidos a partir de w' e z', respectivamente, por eliminação do prefixo u. Então

$$\mathbf{LSl} \models w'' = z''$$

pois w'' e z'' têm o mesmo 1-prefixo x^ω, o mesmo 1-sufixo (que é o de w e de z) e os mesmos 2-factores (que são os de w e z excepto aqueles que ocorrem em $\alpha_0 w_1 u x^\omega$). Além disso, as factorizações em bloco de w'' e z'' são precisamente $w'' = \alpha'_1 w_2 \cdots w_n \alpha_n$ e $z'' = \beta'_1 z_2 \cdots z_m \beta_m$ onde α'_1 e β'_1 são os ω-termos obtidos a partir de α_1 e β_1, respectivamente, por eliminação do prefixo u. O resultado é agora uma consequência imediata da hipótese de indução. ■

Estamos finalmente em condições de completar a demonstração de que Σ é uma base de ω-equações para $\mathbf{LSl}^\omega$.

Demonstração do Teorema 5.1.4. Sejam

$$w = \alpha_0 w_1 \cdots w_n \alpha_n \quad \text{e} \quad z = \beta_0 z_1 \cdots z_m \beta_m$$

as factorizações em blocos de w e z. Então, pela Proposição 5.1.10,

i) $n = m$;

ii) $\alpha_i = \beta_i$, para todo o $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$;

iii) $\mathbf{LSl} \models w_j = z_j$, para todo o $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Logo, da condição iii) e da Proposição 5.1.9, deduzimos que $\Sigma \vdash w_j = z_j$, para todo o $j \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto, resulta imediatamente das condições i) e ii) que $\Sigma \vdash w = z$. Isto prova o Teorema 5.1.4 e, consequentemente, completa a demonstração do Teorema 5.1.3. ■

Capítulo 6

Subconjuntos LSl-pontuais de um semigrupo finito

Recordemos que, um subconjunto X de um semigrupo S diz-se *pontual* com respeito a uma pseudovariedade $\mathbf{V}$, ou $\mathbf{V}$-*pontual*, se para cada morfismo relacional de S num semigrupo V de $\mathbf{V}$, existe $v \in V$ tal que todos os elementos de X estão em relação com v. Note-se que, se na definição de conjunto $\mathbf{V}$-pontual substituirmos "existe $v \in V$" por "existe um idempotente $v \in V$" obtemos a definição de conjunto *pontual idempotente com respeito a* $\mathbf{V}$, ou $\mathbf{V}$-*pontual idempotente*.

Os conjuntos pontuais têm vindo a ser estudados por vários autores, entre os quais Almeida, Costa, Henckell, Rhodes, Steinberg, Zeitoun [13, 42, 43, 59, 62, 64]. Diz-se que uma pseudovariedade $\mathbf{V}$ tem pontuais decidíveis se, dados um semigrupo finito S e um subconjunto X de S, podemos decidir se X é $\mathbf{V}$-pontual.

Os conjuntos pontuais idempotentes podem ser usados para provar a decidibilidade de produtos de Mal'cev. O produto de Mal'cev $\mathbf{W} \textcircled{m} \mathbf{V}$ foi descrito, por Pin e Weil [56], por uma base de pseudoidentidades obtida substituindo numa base de $\mathbf{W}$ as variáveis $\{x_1, \cdots, x_n\}$ por pseudopalavras $\{\pi_1, \cdots, \pi_n\}$ tais que $\mathbf{V}$ satisfaz $\pi_1^2 = \pi_1 = \cdots = \pi_n$. A projecção de um tal conjunto $\{\pi_1, \cdots, \pi_n\}$ num semigrupo finito por um homomorfismo contínuo sobrejectivo é $\mathbf{V}$-*pontual idempotente*. Assim, conforme [43, Proposição 4.3], se $\mathbf{W}$ é decidível e $\mathbf{V}$ tem pontuais idempotentes decidíveis, então $\mathbf{W} \textcircled{m} \mathbf{V}$ é decidível.

No que diz respeito ao cálculo de conjuntos pontuais, existem relativamente poucos resultados na literatura. Refiram-se alguns desses resultados. Henckell apresentou algoritmos para o cálculo dos conjuntos $\mathbf{A}$-pontuais [42] e dos conjuntos $\mathbf{A}$-pontuais idempotentes [43]. Como uma consequência, o produto de Mal'cev

$\mathbf{V} \textcircled{m} \mathbf{A}$ é decidível para qualquer pseudovariedade $\mathbf{V}$ decidível. Foi provado por Steinberg, em [64], que os subconjuntos pontuais de um semigrupo finito são decidíveis com respeito a $\mathbf{LSl}$. Uma outra prova é fornecida pela ω-mansidão de $\mathbf{LSl}$ [35]. Em [13] foram apresentados algoritmos para o cálculo dos conjuntos $\mathbf{R}$- e $\mathbf{J}$-pontuais e pontuais idempotentes, o que forneceu uma nova demonstração da decidibilidade de $\mathbf{V} \textcircled{m} \mathbf{R}$ e $\mathbf{V} \textcircled{m} \mathbf{J}$ quando $\mathbf{V}$ é decidível.

Neste capítulo apresentamos um algoritmo para calcular os subconjuntos $\mathbf{LSl}$--pontuais e pontuais idempotentes de um semigrupo finito dado. Em particular, o cálculo dos subconjuntos $\mathbf{LSl}$-pontuais idempotentes implica a decidibilidade do produto de Mal'cev $\mathbf{V} \textcircled{m} \mathbf{LSl}$, para toda a pseudovariedade $\mathbf{V}$ decidível.

Este capítulo está organizado em três secções. Introduzimos definições e fixamos notações, referentes aos conjuntos pontuais, na Secção 6.1. Em seguida, introduzimos o conceito de ω-termo reduzido para um semigrupo finito e apresentamos uma caracterização destes ω-termos sobre $\mathbf{LSl}$, usando ω-autómatos. Na Secção 6.3, apresentamos um algoritmo que permite calcular os subconjuntos pontuais de um semigrupo finito com respeito à pseudovariedade $\mathbf{LSl}$. Finalmente, na Secção 6.4, mostramos que o algoritmo descrito na secção anterior também pode ser usado para calcular os subconjuntos $\mathbf{LSl}$-pontuais idempotentes de um semigrupo finito.

6.1 Conjuntos pontuais

O conceito de morfismo relacional já foi introduzido na Subsecção 2.2.2. A definição apresentada para um morfismo relacional $\mu : S \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} T$, entre dois semigrupos S e T, equivale a dizer que o conjunto

$$R = \{(s,t) \in S \times T \mid t \in \mu(s)\}$$

é um subsemigrupo de $S \times T$ cuja projecção em S é o próprio S. Assim, atendendo a que um morfismo relacional $\mu : S \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} T$ pode ser visto como uma relação em $S \times T$, podemos compor morfismos relacionais por meio da usual composição de relações. Homomorfismos de semigrupos, vistos como relações, são exemplos de morfismos relacionais.

Dado um morfismo relacional μ, diz-se que um subconjunto X de um semigrupo S é μ-pontual se existe $t \in T$ tal que $X \subseteq \mu^{-1}(t)$, ou seja, $\bigcap_{x \in X} \mu(x) \neq \emptyset$. Dizemos que X é $\mathbf{V}$-pontual se X é μ-pontual para todo o morfismo relacional μ entre S e um semigrupo de $\mathbf{V}$. Denotamos por $P_{\mathbf{V}}(S)$ o conjunto constituído por todos os subconjuntos $\mathbf{V}$-pontuais de S. Recordemos algumas propriedades de $P_{\mathbf{V}}(S)$.

- $P_{\mathbf{V}}(S)$ consiste precisamente dos subconjuntos singulares se e só se $S \in \mathbf{V}$.
- Se $Y \subseteq X$ e $X \in P_{\mathbf{V}}(S)$, então $Y \in P_{\mathbf{V}}(S)$.
- $P_{\mathbf{V}}(S)$ é um subsemigrupo de $\mathcal{P}(S)$.

Dados um semigrupo finito A-gerado S e um homomorfismo contínuo respeitando a escolha dos geradores $\psi : \overline{\Omega}_A\mathbf{S} \to S$, denotamos por $\mu_{\mathbf{V}}$ o morfismo relacional entre S e $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ dado por $\mu_{\mathbf{V}} = p_{\mathbf{V}} \circ \psi^{-1}$. O morfismo $\mu_{\mathbf{V}}$ pode ser chamado de *morfismo universal*, no sentido em que é suficiente para testar se um subconjunto de um semigrupo finito A-gerado é $\mathbf{V}$-pontual [6, 7, 13].

Proposição 6.1.1 *Seja $\psi : \overline{\Omega}_A\mathbf{S} \to S$ um homomorfismo contínuo respeitando a escolha dos geradores, com S um semigrupo finito A-gerado, e seja $\mu_{\mathbf{V}} = p_{\mathbf{V}} \circ \psi^{-1}$. Então, um dado subconjunto de S é $\mathbf{V}$-pontual se e só se é $\mu_{\mathbf{V}}$-pontual.*

Assim, dito de outra forma, os subconjuntos $\mathbf{V}$-pontuais de um semigrupo finito A-gerado S são obtidos pela projecção sobre S de pseudopalavras de $\overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ as quais coincidem quando projectadas em $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$ por $p_{\mathbf{V}}$.

É sabido que $\mathbf{LSl}$ é ω-mansa [35]. Como uma consequência, no cálculo dos subconjuntos $\mathbf{LSl}$-pontuais podemos substituir as pseudopalavras por ω--palavras. Deste modo, um subconjunto $\{s_1, \ldots, s_n\}$ de um semigrupo finito A--gerado S é $\mathbf{LSl}$-pontual se existem ω-termos $w_1, \ldots, w_n$ tais que $\epsilon(w_1), \ldots, \epsilon(w_n)$ são projectadas através de $\psi : \overline{\Omega}_A\mathbf{S} \to S$, um homomorfismo contínuo respeitando a escolha dos geradores, respectivamente em $s_1, \ldots, s_n$, e $\mathbf{LSl}$ satisfaz $\epsilon(w_1) = \epsilon(w_2) = \cdots = \epsilon(w_n)$. Pretende-se, agora, obter uma forma reduzida para os ω-termos $w_1, \ldots, w_n$ mas é necessário que a redução não altere o seu valor sobre $\mathbf{LSl}$ nem da projecção de $\epsilon(w_1), \ldots, \epsilon(w_n)$ em S. A próxima secção é dedicada a este problema.

6.2 Resultados intermédios

Nesta secção introduzimos algumas definições e resultados que serão úteis para as secções que seguem. Destaque-se o conceito de *ω-termo em forma reduzida para um semigrupo finito*, que abreviamos para *ω-termo f.r.s.f.*.

6.2.1 ω-termos em forma reduzida para um semigrupo finito

Sejam S um semigrupo finito e $w \in T_A^\omega \setminus A^+$ um ω-termo. Pela Proposição 4.2.3 existe um ω-termo em forma normal w' tal que **LSl** satisfaz $w = w'$. No entanto, a ω-equação $w = w'$ não é necessariamente satisfeita por S. Este facto sugere-nos a introdução de um novo conceito, o de *ω-termo f.r.s.f.*, que passamos a definir.

Fixemos um semigrupo finito A-gerado S e seja n_S o expoente de S. Consideremos um ω-termo de rank 1 da forma:

$$w = u_0 x_1^\omega x_1^{j_1} u_1 x_2^\omega x_2^{j_2} \cdots x_n^\omega x_n^{j_n} u_n \tag{6.1}$$

com $n \geq 1$; $j_1, \ldots, j_n \in \{0, \ldots, n_S - 1\}$, $u_0, \ldots, u_n \in A^*$ e $x_1, \ldots, x_n \in A^+$.

Definição 6.2.1 (ω-termo em forma reduzida para S) *Seja S um semigrupo finito. Um ω-termo em* forma reduzida para S *é um ω-termo de rank* 1 *da forma* (6.1) *onde:*

(1) cada x_i é uma palavra de Lyndon;

(2) x_i não é um prefixo de u_i;

(3) x_i não é um sufixo de $x_{i-1}^k u_{i-1}$, para todo o $k \in \mathbb{N}_0$.

No restante desta subsecção mostramos que dado $w \in T_A^\omega \setminus A^+$, é possível obter a partir de w um ω-termo w' *em forma reduzida para* S tal que a ω-equação $w = w'$ é satisfeita quer por S quer por **LSl**.

Seja Σ_S o seguinte conjunto de ω-equações:

$$(\Sigma_S) \quad \begin{cases} (x^r)^\omega = x^\omega, \qquad r \geq 2 & (6.2) \\ x^\omega x^\omega = x^\omega, & (6.3) \\ x^\omega = x^\omega x^{n_S}, & (6.4) \\ (xy)^\omega x = x(yx)^\omega, & (6.5) \\ (xy^\omega z)^\omega = (xy^\omega z)^{p_S}, & (6.6) \end{cases}$$

onde $p_S = max\{2, n_S\}$.

Claramente, o semigrupo S verifica todas as equações de Σ_S. Note-se que as ω-equações (6.4) e (6.6) dependem do semigrupo finito considerado. Reparemos ainda que a pseudovariedade **LSl** satisfaz todas as ω-equações de Σ_S, independentemente da escolha do semigrupo finito S.

Pode-se verificar que para cada $j \geq 2$ a ω-equação

$$x^\omega x^j = x^j x^\omega \tag{6.7}$$

é dedutível a partir de (6.2) e (6.5).

Facto 6.2.2 *Por* (6.4) *e* (6.5), *tem-se que*

$$\Sigma_S \vdash (xy)^\omega = (xy)^\omega (xy)^{n_S} = x(yx)^\omega (yx)^{n_S - 1} y.$$

De modo análogo ao descrito na demonstração do Lema 5.1.2, pode-se provar que a ω-equação $(x^\omega)^\omega = x^\omega$ é dedutível a partir de Σ_S (de (6.3) e (6.6) para sermos mais precisos).

Estamos agora em condições de estabelecer o próximo resultado, o qual é essencial para o nosso propósito.

Proposição 6.2.3 *Sejam S um semigrupo finito e $w \in T_A^\omega \setminus A^+$ um ω-termo. Então, existe um ω-termo em forma reduzida para S*

$$w' = u_0 x_1^\omega x_1^{j_1} u_1 x_2^\omega x_2^{j_2} \cdots x_n^\omega x_n^{j_n} u_n$$

tal que quer S quer **LSl** *satisfazem $w = w'$.*

Demonstração. Uma vez que S satisfaz todas as ω-equações de Σ_S, para mostrar que S satisfaz $w = w'$ basta provar que $w = w'$ é dedutível a partir das ω-equações de Σ_S. Para calcular um tal ω-termo w' usa-se um algoritmo que segue o raciocínio apresentado na Secção 5.1.2 para a partir de $\alpha \in T_A^\omega \setminus A^+$ obtermos α', um ω-termo em forma normal, tal que **LSl** $\models \alpha = \alpha'$, pelo que omitiremos a sua descrição.

Para completar a demonstração da proposição é suficiente notar que como **LSl** $\models \Sigma_S$, também é verdade que **LSl** satisfaz $w = w'$. ■

Dado um ω-termo infinito w, a aplicação do algoritmo que permite obter um ω-termo w', nas condições referidas na Proposição 6.2.3, produz de facto um único ω-termo w' em forma reduzida para S. O próximo exemplo ilustra o algoritmo e a sua convergência.

Exemplo 6.2.4 *Considere um semigrupo finito S tal que $n_S = 3$. Considere ainda o ω-termo*

$$w = aa\Big((ba)^4\Big)^\omega c(abb)^\omega c(bc)^\omega bb^\omega (bb^\omega a)^\omega$$

e assuma que $a < b < c$. O semigrupo S (e também a pseudovariedade **LSl***) verifica as seguintes ω-equações*

$$\begin{aligned}
w &= aa((ba)^4)^\omega c(abb)^\omega c(bc)^\omega bb^\omega(bb^\omega a)^3 && \textit{pois } S \textit{ satisfaz } (6.6)\\
&= aa(ba)^\omega c(abb)^\omega c(bc)^\omega bb^\omega(bb^\omega a)^3 && \textit{pois } S \models (x^r)^\omega = x^\omega\\
&= aab(ab)^\omega(ab)^2ac(abb)^\omega c(bc)^\omega bb^\omega(bb^\omega a)^3 && \textit{pelo Facto 6.2.2}\\
&= a(ab)^\omega(ab)^3ac(abb)^\omega c(bc)^\omega b^\omega b(b^\omega ba)^3 && \textit{pois } S \models x^jx^\omega = x^\omega x^j\\
&= a(ab)^\omega(ab)^3ac(abb)^\omega(abb)^3c(bc)^\omega b^\omega bb^\omega bab^\omega bab^\omega ba && \textit{pois } S \models x^\omega = x^\omega x^{ns}\\
&= a(ab)^\omega(ab)^3ac(abb)^\omega(abb)^2ab(bc)^\omega bcb^\omega b^\omega b^2ab^\omega bab^\omega ba && \textit{pois } S \models x^jx^\omega = x^\omega x^j\\
&= a(ab)^\omega(ab)^3ac(abb)^\omega(abb)^2ab(bc)^\omega bcb^\omega b^2ab^\omega bab^\omega ba && \textit{pois } S \models x^\omega x^\omega = x^\omega\\
&= a(ab)^\omega ac(abb)^\omega(abb)^2ab(bc)^\omega bc\varepsilon b^\omega b^2ab^\omega bab^\omega ba && \textit{pois } S \models x^\omega x^{ns} = x^\omega.
\end{aligned}$$

Então, $w' = a(ab)^\omega ac(abb)^\omega(abb)^2ab(bc)^\omega bc\varepsilon b^\omega b^2ab^\omega bab^\omega ba$ pois este ω-termo já está em forma reduzida para S.

Tendo em consideração os comentários efectuados logo após a Proposição 6.1.1, resulta da Proposição 6.2.3 a seguinte afirmação.

Observação 6.2.5 *Um subconjunto $X = \{s_1, \ldots, s_n\}$ de um semigrupo finito A--gerado S é* **LSl***-pontual se existem ω-termos em forma reduzida para S, $w_1, \ldots, w_n$, tais que $\psi(w_i) = s_i$ para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$, onde $\psi : \overline{\Omega}_A\mathbf{S} \to S$ é um homomorfismo contínuo respeitando a escolha dos geradores, e* **LSl** *$\models w_1 = w_2 = \cdots = w_n$.*

6.2.2 Reformulação da caracterização de ω-termos sobre LSl

Nesta subsecção apresentamos uma reformulação simples da caracterização de ω--termos infinitos que representam uma mesma ω-palavra sobre **LSl**, fornecida na Secção 4.3. Esta reformulação tem por base a substituição de ω-termos em forma normal por ω-termos f.r.s.f.. Assim, começamos por notar que, tendo em conta a Proposição 6.2.3, o critério de decisão para testar se dois ω-termos infinitos têm o mesmo valor sobre **LSl**, fornecido pela Proposição 4.2.3, pode ser adaptado por forma a usar ω-termos f.r.s.f. em vez de ω-termos em forma normal.

Proposição 6.2.6 *Sejam S um semigrupo finito e $w \in T_A^\omega \setminus A^+$ um ω-termo. Então, existe um ω-termo $w_1 = u_0x_1^\omega x_1^{j_1}u_1x_2^\omega x_2^{j_2}\cdots x_n^\omega x_n^{j_n}u_n$ em forma reduzida para S tal que quer* **LSl** *quer S satisfazem $w = w_1$.*

Depois, se z é outro ω-termo de $T_A^\omega \setminus A^+$ e $z_1 = v_0 y_1^\omega y_1^{i_1} v_1 y_2^\omega y_2^{i_2} \cdots y_m^\omega y_m^{i_m} v_m$ é um ω-termo em forma reduzida para S tal que quer **LSl** *quer S satisfazem $z = z_1$, então* **LSl** *satisfaz $w = z$ se e só se*

i) $u_0 x_1^\omega = v_0 y_1^\omega$;

ii) $x_n^\omega u_n = y_m^\omega v_m$;

iii) $\{x_1^\omega u_1 x_2^\omega, \cdots, x_{n-1}^\omega u_{n-1} x_n^\omega\} = \{y_1^\omega v_1 y_2^\omega, \cdots, y_{m-1}^\omega v_{m-1} y_m^\omega\}$.

Ademais, é efectivamente decidível se **LSl** *satisfaz $w = z$.*

Prosseguimos com a definição de ω-autómato associado a ω-termos f.r.s.f.. Fixemos um semigrupo finito S e um ω-termo

$$w = u_0 x_1^\omega x_1^{j_1} u_1 x_2^\omega x_2^{j_2} \cdots x_n^\omega x_n^{j_n} u_n$$

em forma reduzida para S. A palavra de Lyndon x_i diz-se a *base* do 1-factor x_i^ω de w, com $i \in \{1, \ldots, n\}$. Denotamos por C_w o conjunto constituído pelas bases de todos os 1-factores de w. Mantemos a notação L_w para representar o conjunto das palavras $\{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$. O ω-autómato associado a w será denotado por $\mathcal{B}_w = (Q, A, \lambda, E, q_0, q_m)$. Para $\mathcal{B}_w$ os conjuntos S_t e T_r são dados, respectivamente, por $F_1^\omega(w) \cup \{\varepsilon\}$ e $L_w \cup C_w$. A construção de $\mathcal{B}_w$ verifica todas as condições impostas, na Secção 4.3.2, para a construção de ω-autómatos associados a ω-termos em forma normal, ou seja, (a.1)-(a.7). Além disso, verifica ainda a seguinte condição:

(a.8) cada estado, excepto o inicial e o final, possui um lacete etiquetado pela base do 1-factor que é etiqueta desse estado. Estas transições são chamadas *transições na base.*

Um caminho num ω-autómato associado a ω-termos f.r.s.f. diz-se *bem sucedido* se tem origem no estado inicial, término no estado final e percorre obrigatoriamente todas as transições com excepção das transições na base, as quais podem ou não ser percorridas. Além disso, uma transição na base não pode ser percorrida mais do que $n_S - 1$ vezes consecutivas.

Diz-se que um ω-termo z é *reconhecido* por um ω-autómato $\mathcal{B}$, associado a ω-termos f.r.s.f., se z é a etiqueta de um caminho em $\mathcal{B}$ bem sucedido. Mantemos a notação $L(\mathcal{B}_w)$ para representar o conjunto

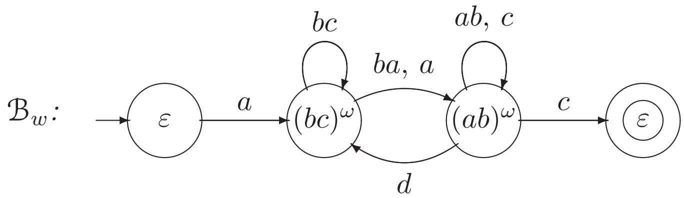
$$L(\mathcal{B}_w) = \{z \in T_A^\omega \setminus A^+ \mid z \text{ é reconhecido por } \mathcal{B}_w\}.$$

A *etiqueta* de um caminho num ω-autómato associado a ω-termos f.r.s.f. que não percorre qualquer transição na base, é o produto das etiquetas dos estados e das etiquetas das transições pela ordem em que estas aparecem no caminho. Se um caminho p contém transições na base então, eliminando todos os estados que são o término de transições na base, obtemos a partir de p um *"caminho" simplificado* p'. Neste caso, a etiqueta de p é definida como sendo a etiqueta de p', ou seja, é o produto das etiquetas dos estados e das etiquetas das transições pela ordem em que estas aparecem em p'.

Exemplo 6.2.7 *Considere um semigrupo finito S, com $n_S \geq 3$, e assuma que $a < b < c < d$. Para o ω-termo em forma reduzida para S*

$$w = a(bc)^\omega (bc)^2 ba(ab)^\omega c(ab)^\omega d(bc)^\omega a(ab)^\omega c$$

tem-se que, o ω-autómato associado a w é dado por



Note-se que $F_1^\omega(w) = \{(ab)^\omega, (bc)^\omega\}$. Portanto, e como se pode constatar, $\mathcal{B}_w$ possui quatro estados, q_0 e q_3 denotam, respectivamente, o estado inicial e o estado final.

O ω-termo w é a etiqueta do seguinte caminho em $\mathcal{B}_w$,

$$p: \ q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{bc} q_1 \xrightarrow{bc} q_1 \xrightarrow{ba} q_2 \xrightarrow{c} q_2 \xrightarrow{d} q_1 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{c} q_3.$$

De facto, como p percorre uma transição na base, (q_1, bc, q_1), duas vezes consecutivas, o "caminho" simplificado p' que se obtém a partir de p é o seguinte:

$$p': \ q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{bc}\xrightarrow{bc}\xrightarrow{ba} q_2 \xrightarrow{c} q_2 \xrightarrow{d} q_1 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{c} q_3.$$

A etiqueta de p é, por definição, o produto das etiquetas dos estados e das etiquetas das arestas pela ordem em que estas aparecem em p'. Ou seja, é dada por $\lambda(q_0) \cdot a \cdot \lambda(q_1) \cdot bc \cdot bc \cdot ba \cdot \lambda(q_2) \cdot c \cdot \lambda(q_2) \cdot d \cdot \lambda(q_1) \cdot a \cdot \lambda(q_2) \cdot c \cdot \lambda(q_3) = a(bc)^\omega bcbcba(ab)^\omega c(ab)^\omega d(bc)^\omega a(ab)^\omega c = w$.

Como uma consequência das definições acima introduzidas temos o seguinte resultado, que consiste na adaptação da Proposição 4.3.1 de modo a usar ω-termos f.r.s.f. em vez de ω-termos em forma normal.

Proposição 6.2.8 *Sejam S um semigrupo finito, $w = u_0 x_1^\omega x_1^{j_1} u_1 x_2^\omega x_2^{j_2} \cdots x_n^\omega x_n^{j_n} u_n$ um ω-termo em forma reduzida para S e $z \in T_A^\omega \setminus A^+$. As seguintes condições são equivalentes:*

i) $z \in L(\mathcal{B}_w)$;

ii) z *está em forma reduzida para* S *e* $\mathbf{LSl} \models w = z$;

iii) $\mathcal{B}_w = \mathcal{B}_z$.

Demonstração. A demonstração é imediata tendo em conta a Proposição 6.2.6, a Definição 6.2.1 e as definições de ω-autómato associado a ω-termos em forma reduzida para S e de elemento reconhecido por um tal ω-autómato. ∎

6.3 Cálculo dos subconjuntos LSl-pontuais de um semigrupo finito

Nesta secção começamos por descrever um algoritmo para o cálculo dos subconjuntos pontuais "maximais" de um dado semigrupo finito com respeito à pseudovariedade **LSl**, o qual será designado por $ACPM$. Posteriormente, obtemos o resultado principal desta secção, a Proposição 6.3.4, que fornece os subconjuntos **LSl**-pontuais de um dado semigrupo finito.

Fixemos um semigrupo finito A-gerado S e consideremos uma representação à custa dos geradores de S para cada elemento $s \in S$. Para cada $X \in \mathcal{P}(E(S))\backslash\emptyset$ consideremos todos os pares da forma (X, Y) com $Y \in \mathcal{P}(S^\varepsilon)\backslash\emptyset$. O algoritmo $ACPM$ consiste na construção, para cada par (X, Y) fixo, de todos os autómatos possíveis da forma
$$\mathcal{A} = (Q, A, \lambda, E, q_0, q_m),$$
onde a definição de cada um dos parâmetros é a introduzida na Subsecção 4.3.1 à excepção da função λ, aqui tem-se $\lambda : Q \to S^\varepsilon$, $S_t = X \cup \{\varepsilon\}$ e $T_r = Y$, que verifiquem as condições (a.1)-(a.3) e as seguintes condições:

(p.1) para todo o $q_i \in Q\backslash\{q_0, q_m\}$, $\lambda(q_i) = e_i$ com $e_i \in X$. Além disso, se $q_i \neq q_j$ então $\lambda(q_i) \neq \lambda(q_j)$. Portanto, $|Q| = |X| + 2$.

(p.2) possui pelo menos um caminho com origem no estado inicial e término no estado final que percorre todas as transições.

Reparemos que, dado um semigrupo finito qualquer S, existe apenas um número finito de elementos de $\mathcal{P}(E(S))\backslash\emptyset$ e de $\mathcal{P}(S^\varepsilon)\backslash\emptyset$. Agora, é importante referir que para cada par (X, Y) fixo, com $X \in \mathcal{P}(E(S))\backslash\emptyset$ e $Y \in \mathcal{P}(S^\varepsilon)\backslash\emptyset$, obtemos um número finito de autómatos nas condições acima descritas. Portanto, a aplicação do algoritmo $ACPM$ a um semigrupo finito S dá origem a um número finito de autómatos.

Seja $\mathcal{A}$ um autómato obtido pela aplicação do algoritmo $ACPM$ ao semigrupo S. Um caminho p em $\mathcal{A}$ diz-se *bem sucedido* se tem origem no estado inicial, término no estado final e percorre todas as transições. A etiqueta de um caminho em $\mathcal{A}$ é o produto das etiquetas dos estados e das etiquetas das transições pela ordem em que estas aparecem no caminho. Um elemento $s \in S$ diz-se *reconhecido* por $\mathcal{A}$ se s é a etiqueta de pelo menos um caminho bem sucedido em $\mathcal{A}$. O subconjunto de S consistindo de todos os elementos de S reconhecidos por $\mathcal{A}$ será denotado por $L(\mathcal{A})$, isto é,

$$L(\mathcal{A}) = \{s \in S : \ s \text{ é reconhecido por } \mathcal{A}\}.$$

Dizemos que um subconjunto X de S é reconhecido por $\mathcal{A}$ quando todo o elemento $s \in X$ é reconhecido por $\mathcal{A}$, ou seja, quando $X \subseteq L(\mathcal{A})$.

Denotaremos por $MP_{\mathbf{LSl}}(S)$ o conjunto constituído por todos os subconjuntos de S da forma $L(\mathcal{A})$, onde $\mathcal{A}$ é um autómato obtido através da aplicação do algoritmo $ACPM$ ao semigrupo S. Pretendemos provar o seguinte resultado.

Lema 6.3.1 *Seja S um semigrupo finito A-gerado e seja $\mathcal{A}$ um autómato obtido através da aplicação do algoritmo $ACPM$ a S. Então $L(\mathcal{A}) = \{s_1, \ldots, s_n\}$ é um subconjunto* **LSl***-pontual de S.*

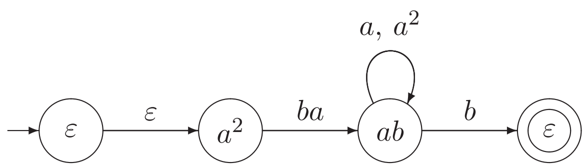
Comecemos por recordar que estamos a admitir uma representação à custa dos geradores de S para cada elemento $s \in S$. Com o propósito de provar o Lema 6.3.1, associamos ao autómato $\mathcal{A}$ o ω-autómato, denotado por $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, que coincide com $\mathcal{A}$ em tudo excepto na etiquetagem dos estados $q_i \in Q\backslash\{q_0, q_m\}$, ou seja, $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ é obtido a partir de $\mathcal{A}$ pela simples reetiquetagem de todos os estados $q_i \in Q\backslash\{q_0, q_m\}$ de $\mathcal{A}$ que indicamos a seguir. Recordemos que cada estado $q_i \in Q\backslash\{q_0, q_m\}$ de $\mathcal{A}$ é etiquetado por um idempotente de S, mais precisamente é utilizada uma representação do idempotente à custa dos geradores de S. A etiqueta de cada estado $q_i \in Q\backslash\{q_0, q_m\}$ de $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ será então a ω-potência da representação do idempotente que é etiqueta de q_i enquanto estado de $\mathcal{A}$. As transições mantêm as mesmas etiquetas. No entanto, e uma vez que todos os elementos de S estão representados por expressões envolvendo apenas os elementos de A, em $\mathcal{A}$ as etiquetas das transições são interpretadas como elementos de S^{ε} enquanto em $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ são interpretadas como palavras de A^*.

Exemplo 6.3.2 *Considere o semigrupo* $\{a, b\}$*-gerado*

$$S = \{a, b, a^2, ab, a^2b, ba, ba^2, ba^2b\}$$

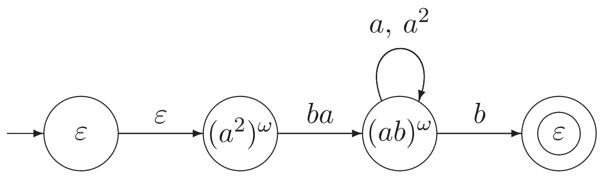
definido pelas relações $a^3 = a$*;* $b^2 = b$*;* $aba = a$ *e* $bab = b$*. Tem-se* $E(S) = \{b, a^2, ab, ba\}$*. Para* $X = \{a^2, ab\}$ *e* $Y = \{a, b, a^2, ba, \varepsilon\}$*, apresentamos o autómato abaixo, denotado por* $\mathcal{A}$*, como exemplo de um dos autómatos obtidos pela aplicação do algoritmo* $ACPM$ *a* S*.*

$\mathcal{A}$:



De acordo com o descrito, o ω*-autómato associado a* $\mathcal{A}$ *é o seguinte.*

$\mathcal{D}_\mathcal{A}$:



Note-se que,

$$L(\mathcal{D}_\mathcal{A}) = \{w \in T_A^\omega \setminus A^+ : \ w \text{ é reconhecido por } \mathcal{D}_\mathcal{A}\}.$$

Diz-se que w é *reconhecido* por $\mathcal{D}_\mathcal{A}$ se w é a etiqueta de um caminho *bem sucedido* em $\mathcal{D}_\mathcal{A}$, ou seja, de um caminho em $\mathcal{D}_\mathcal{A}$ com origem no estado inicial e término no estado final que percorre todas as transições. Note-se que, se w é reconhecido por $\mathcal{D}_\mathcal{A}$ então w é um ω-termo de rank 1.

Estamos agora em condições de provar o lema anterior.

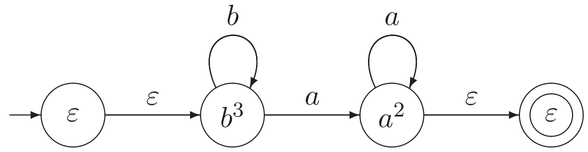
Demonstração do Lema 6.3.1. A cada $s_i \in L(\mathcal{A})$ associamos um caminho em $\mathcal{A}$ com etiqueta s_i. Depois, percorrendo o mesmo caminho no ω-autómato $\mathcal{D}_\mathcal{A}$ (o qual é obtido como descrito acima) obtemos um ω-termo de rank 1

$$w_{s_i} = u_{i,0}x_{i,1}^\omega u_{i,1} \cdots x_{i,n_i}^\omega u_{i,n_i}$$

onde $n_i \geq 1$, $u_{i,0}, u_{i,1}, \ldots, u_{i,n_i} \in A^*$ e $x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i} \in A^+$. Pelo acima descrito, é imediato que $w_{s_i} \in L(\mathcal{D}_\mathcal{A})$ e que $\psi(w_{s_i}) = s_i$, onde $\psi : (\overline{\Omega}_A\mathbf{S})^\varepsilon \to S^\varepsilon$ é um homomorfismo contínuo respeitando a escolha dos geradores. Agora, como os ω-termos de rank 1 $w_{s_1}, \ldots, w_{s_n}$ pertencem a $L(\mathcal{D}_\mathcal{A})$ tem-se $u_{i,0}x_{i,1}^\omega = u_{j,0}x_{j,1}^\omega$, $x_{i,n_i}^\omega u_{i,n_i} = x_{j,n_j}^\omega u_{j,n_j}$ e $F_2^\omega(w_{s_i}) = F_2^\omega(w_{s_j})$, para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto, resulta da Proposição 4.1.2 que $\mathbf{LSl} \models w_{s_1} = \cdots = w_{s_n}$. Finalmente, como $\psi(w_{s_i}) = s_i$ para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $\mathbf{LSl} \models w_{s_1} = \cdots = w_{s_n}$, concluímos pela Proposição 6.1.1 que $L(\mathcal{A})$ é $\mathbf{LSl}$-pontual. ∎

Exemplo 6.3.3 *Considere o semigrupo $\{a, b\}$-gerado S do Exemplo 1.2.11. Tem-se $E(S) = \{a^2, b^3, ab\}$. Para $X = \{a^2, b^3\}$ e $Y = \{a, b, \varepsilon\}$, o autómato abaixo, denotado por $\mathcal{A}$, é um dos autómatos obtidos pela aplicação do algoritmo $ACPM$ a S.*

$\mathcal{A}$:



Pode-se mostrar que $L(\mathcal{A}) = \{ba, ba^2, b^2a, b^2a^2, b^3a, b^3a^2\}$. Portanto, estamos em condições de concluir que o conjunto $\{ba, ba^2, b^2a, b^2a^2, b^3a, b^3a^2\}$ é um subconjunto **LSl***-pontual de S. Refira-se que para este exemplo não tinha interesse considerar os subconjuntos $X \subseteq E(S)$ contendo o elemento ab, pois ab é o elemento zero de S.*

Relativamente ao Exemplo 6.3.2, acima apresentado, $L(\mathcal{A})$ coincide com o conjunto $\{ab, a^2b\}$, pelo que este é um subconjunto **LSl***-pontual de S.*

Apresentamos agora o resultado principal desta secção.

Proposição 6.3.4 *Seja S um semigrupo finito A-gerado. Então,*

$$P_{\mathbf{LSl}}(S) = \Big\{\{s\} : s \in S\Big\} \bigcup \downarrow MP_{\mathbf{LSl}}(S).$$

Demonstração. Comecemos por recordar que

$$MP_{\mathbf{LSl}}(S) = \{L(\mathcal{A}) \subseteq S : \ \mathcal{A} \text{ é obtido pela aplicação de } ACMP \text{ a } S\}.$$

Portanto, tem-se

$$\downarrow MP_{\mathbf{LSl}}(S) = \bigcup_{L(\mathcal{A}) \in MP_{\mathbf{LSl}}(S)} \mathcal{P}(L(\mathcal{A})).$$

Que $\{\{s\} : s \in S\} \cup \downarrow MP_{\mathbf{LSl}}(S) \subseteq P_{\mathbf{LSl}}(S)$ é imediato, bastando para isso notar que pelo Lema 6.3.1 todo o subconjunto de S da forma $L(\mathcal{A}) \in MP_{\mathbf{LSl}}(S)$ é **LSl**-pontual e que os pontuais são fechados para a inclusão.

Para provar a inclusão no outro sentido, basta mostrar que o algoritmo $ACPM$ fornece todos os subconjuntos pontuais "maximais" de S com respeito à pseudovariedade **LSl**. Por outras palavras, resta provar que se X é um subconjunto não singular **LSl**-pontual de S, então existe pelo menos um autómato, digamos $\mathcal{A}$, obtido pela aplicação do algoritmo $ACPM$ a S, tal que $X \subseteq L(\mathcal{A})$.

Suponhamos então que $X = \{s_1, \ldots, s_n\}$, com $n \geq 2$, é um subconjunto **LSl**-pontual de S. Pela Observação 6.2.5 existem ω-termos em forma reduzida para

S, $w_1, \ldots, w_n$, tais que $\psi(w_i) = s_i$, com $\psi : (\overline{\Omega}_A\mathbf{S})^\varepsilon \to S^\varepsilon$ um homomorfismo contínuo que preserva a escolha dos geradores, e $\mathbf{LSl} \models w_1 = \cdots = w_n$. Então, pela Proposição 6.2.8, existe um ω-autómato associado a ω-termos em forma reduzida para S, digamos $\mathcal{B} = (Q, A, \lambda, E, q_0, q_m)$ com $S_t = F_1^\omega(w) \cup \{\varepsilon\}$ e $T_r = L_w \cup C_w$ para w um qualquer ω-termo em forma reduzida para S que verifique $\mathbf{LSl} \models w = w_i$ para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$, tal que $w_1, \ldots, w_n \in L(\mathcal{B})$.

Pretendemos agora construir, a partir do ω-autómato $\mathcal{B}$, um autómato

$$\mathcal{B}_\psi = (Q', A, \lambda', E', q'_0, q'_{m'}),$$

que possa ser obtido através da aplicação do algoritmo $ACPM$ ao semigrupo S, ou seja, para $\mathcal{B}_\psi$ devemos ter: $S_t = X' \cup \{\varepsilon\}$ com $X' \in \mathcal{P}(E(S))\backslash\emptyset$; $T_r = Y'$ com $Y' \in \mathcal{P}(S^\varepsilon)\backslash\emptyset$ e, além disso, $\mathcal{B}_\psi$ deve verificar as condições (a.1)-(a.3) (ver Secção 4.3.1) e (p.1)-(p.2). Procedemos então do seguinte modo: os estados inicial e final de $\mathcal{B}$ dão origem, respectivamente, aos estados inicial e final de $\mathcal{B}_\psi$ e definimos $\lambda'(q'_0) = \varepsilon$ e $\lambda'(q'_{m'}) = \varepsilon$; a transição inicial $q_0 \xrightarrow{u} q_1$ com $u \in A^*$ dá origem à transição inicial de $\mathcal{B}_\psi$, sendo esta da forma $q'_0 \xrightarrow{\psi(u)} q'_1$, o estado q_1 dá origem ao estado q'_1 e definimos $\lambda'(q'_1) = \psi(\lambda(q_1))$. Iteramos este procedimento para as restantes transições e estados. Refira-se que a transição final $q_{m-1} \xrightarrow{v} q_m$ com $v \in A^*$ dá origem à transição final de $\mathcal{B}_\psi$ $q'_{m'-1} \xrightarrow{\psi(v)} q'_{m'}$ onde $\lambda'(q'_{m'-1}) = \psi(\lambda(q_{m-1}))$.

Reparemos que podemos ter diferentes estados de $\mathcal{B}$, pertencentes a $Q\backslash\{q_0, q_m\}$, a darem origem a um mesmo estado em $\mathcal{B}_\psi$. Pela definição de ω-autómato, $q_i \neq q_j$ se e só se $\lambda(q_i) \neq \lambda(q_j)$, mas podemos ter $\lambda(q_i) \neq \lambda(q_j)$ e

$$\psi(\lambda(q_i)) = \psi(\lambda(q_j)).$$

Neste caso, os estados q_i e q_j dão origem em $\mathcal{B}_\psi$ a um mesmo estado $q' \in Q'\backslash\{q'_0, q'_{m'}\}$. Em relação às transições, também podemos ter diferentes transições em $\mathcal{B}$ a darem origem a uma única transição em $\mathcal{B}_\psi$. É este o caso, por exemplo, quando $q_i \xrightarrow{u} q_j$ e $q_i \xrightarrow{v} q_j$, com $u, v \in A^*$ tais que $u \neq v$, são transições de $\mathcal{B}$ e $\psi(u) = \psi(v)$. No caso de q_i e q_j serem identificados em $\mathcal{B}_\psi$ com um mesmo estado q', as transições acima referidas dariam origem em $\mathcal{B}_\psi$ ao lacete $q' \xrightarrow{\psi(u)} q'$.

Recordemos que os estados $q_j \in Q\backslash\{q_0, q_m\}$ de $\mathcal{B}$ são etiquetados por ω-termos da forma x_i^ω com $x_i \in A^+$ uma palavra de Lyndon, donde cada ω-palavra $\epsilon(x_i^\omega)$ é enviada por ψ num idempotente de S, obtendo-se assim o conjunto

$$X' = \{\psi(\lambda(q_j)) \in E(S) \mid q_j \in Q\backslash\{q_0, q_m\}\}. \tag{6.8}$$

Ou seja, os estados $q'_j \in Q' \backslash \{q'_0, q'_{m'}\}$ de $\mathcal{B}_\psi$ são etiquetados sob λ' pelos elementos de $X' \in \mathcal{P}(E(S)) \backslash \emptyset$.

Pode-se facilmente verificar que o autómato $\mathcal{B}_\psi$ satisfaz as condições (a.1)-(a.3) e (p.1)-(p.2), ou seja, $\mathcal{B}_\psi$ pode ser visto como um dos autómatos resultantes da aplicação de $ACPM$ a S quando considerado o par (X', Y') com X' definido em (6.8) e

$$Y' = \{\psi(u) \in S^\varepsilon \mid \exists q_i, q_j \in Q: \ (q_i, u, q_j) \in E, \ u \in A^*\} \in \mathcal{P}(S^\varepsilon) \backslash \emptyset.$$

Para concluir a prova resta verificar que os elementos

$$\psi(w_1), \ldots, \psi(w_n),$$

que coincidem respectivamente com $s_1, \ldots, s_n$, pertencem a $L(\mathcal{B}_\psi)$. Começamos por recordar que $\psi(w_i)$ é reconhecido por $\mathcal{B}_\psi$ se e só se $\psi(w_i)$ é a etiqueta de pelo menos um caminho bem sucedido em $\mathcal{B}_\psi$, ou seja, um caminho com origem no estado inicial e término no estado final que percorre todas as transições.

Uma vez que w_i é um ω-termo em forma reduzida para S que pertence a $L(\mathcal{B})$, w_i é a etiqueta de um caminho bem sucedido p_i em $\mathcal{B}$, ou seja, p_i tem origem no estado inicial, término no estado final e percorre todas as transições (não necessariamente as transições nas bases). Agora, pela construção de $\mathcal{B}_\psi$ e tendo em conta que S satisfaz as ω-equações (6.3), (6.4) e (6.7), podemos deduzir a existência de um caminho bem sucedido p'_i em $\mathcal{B}_\psi$ com etiqueta $\psi(w_i)$. De facto, como w_i é a etiqueta de um caminho bem sucedido p_i em $\mathcal{B}$, para obtermos $\psi(w_i)$ basta percorrer em $\mathcal{B}_\psi$ o caminho p'_i ao qual p_i "dá origem" em $\mathcal{B}_\psi$, mas tendo em atenção a particularidade que passamos a descrever.

- Para obtermos caminhos bem sucedidos em $\mathcal{B}$ não é necessário percorrer as transições nas bases. No entanto, estas transições dão origem a transições (lacetes) em $\mathcal{B}_\psi$ que têm de ser percorridas para obtermos caminhos bem sucedidos em $\mathcal{B}_\psi$. Assim, se uma transição na base em $\mathcal{B}$ não ocorre em p_i, para obtermos p'_i, percorremos o caminho ao qual p_i "dá origem" e quando passamos pelo estado com o lacete no qual a tal transição na base foi enviada percorremos esse lacete em $\mathcal{B}_\psi$ n_S vezes consecutivas.

Recordemos que a etiqueta de um caminho p em $\mathcal{B}$ que possui transições na base é a etiqueta do "caminho" simplificado que se obtém de p pela eliminação dos estados que são o término de transições na base (veja-se os comentários acima do Exemplo 6.2.7 na Subsecção 6.2.2). Reparemos, no entanto, que uma transição na base em $\mathcal{B}$ dá origem a um lacete em $\mathcal{B}_\psi$ e que a etiqueta de um caminho em $\mathcal{B}_\psi$ é obtida da forma usual.

Estas duas últimas situações, que surgem do facto de as transições nas bases terem um tratamento diferenciado, não são problemáticas no sentido em que não alteram o valor da etiqueta de p'_i sobre S. Isto é verdade porque a ω-equação $x^\omega(xx^\omega)^{n_S} = x^\omega$ é dedutível a partir das ω-equações (6.3), (6.7) e (6.4); e a ω-equação $x^\omega(xx^\omega)^j = x^\omega x^j$ com $j \geq 0$ é dedutível a partir das ω-equações (6.3) e (6.7).

Concluímos assim que os elementos $s_1, \ldots, s_n$ pertencem a $L(\mathcal{B}_\psi)$. Logo, tomando $\mathcal{A} = \mathcal{B}_\psi$, tem-se $X \subseteq L(\mathcal{A})$ como pretendido. ■

O próximo exemplo ilustra o processo de construção do autómato $\mathcal{B}_\psi$ a partir do ω-autómato $\mathcal{B}$ e ajuda a compreender como é que dado um caminho bem sucedido p_i em $\mathcal{B}$, com etiqueta w_i, é possível obter um caminho bem sucedido p'_i em $\mathcal{B}_\psi$ tendo como etiqueta um elemento que em S é igual a $\psi(w_i)$.

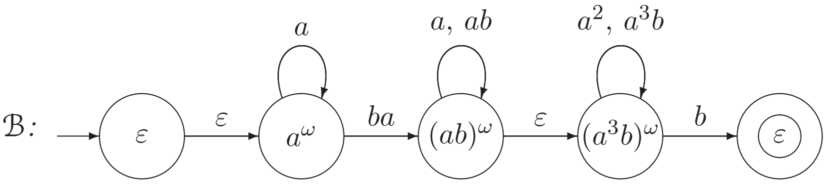
Exemplo 6.3.5 *Sejam S o semigrupo do Exemplo 6.3.2 e $\psi : (\overline{\Omega}_A\mathbf{S})^\varepsilon \to S^\varepsilon$ um homomorfismo contínuo respeitando a escolha dos geradores. Considere ainda o subconjunto $X = \{a^2b, ab\}$ de S que, como referido anteriormente, é* **LSl**-*-pontual. Denotemos $s_1 = a^2b$ e $s_2 = ab$. Fixemos*

$$w_1 = a^\omega ba(ab)^\omega a(ab)^\omega \varepsilon(a^3b)^\omega a^2(a^3b)^\omega b$$

e

$$w_2 = a^\omega ba(ab)^\omega a(ab)^\omega a(ab)^\omega \varepsilon(a^3b)^\omega a^2(a^3b)^\omega b.$$

Reparemos que $n_S = 6$ e que os ω-termos w_1 e w_2, que estão em forma reduzida para S, são tais que $\psi(w_i) = s_i$ para $i \in \{1, 2\}$. Além do mais, **LSl** *satisfaz $w_1 = w_2$. Segue o ω-autómato associado a ω-termos em forma reduzida para S que reconhece w_1 e w_2.*

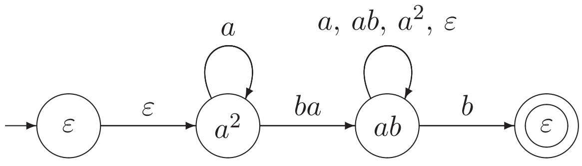


O ω-termo w_1 é a etiqueta do seguinte caminho em $\mathcal{B}$

$$p_1 :\ \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon} a^\omega \xrightarrow{ba} (ab)^\omega \xrightarrow{a} (ab)^\omega \xrightarrow{\varepsilon} (a^3b)^\omega \xrightarrow{a^2} (a^3b)^\omega \xrightarrow{b} \varepsilon$$

o qual é bem sucedido.

Agora, como $\psi : (\overline{\Omega}_A\mathbf{S})^\varepsilon \to S^\varepsilon$ *é um homomorfismo que preserva a escolha dos geradores, tem-se* $\psi(\varepsilon) = \varepsilon$; $\psi(a) = a$; $\psi(b) = b$; $\psi(a^2) = a^2$; $\psi(a^\omega) = a^\omega = a^2$; $\psi(ba) = ba$; $\psi(ab) = ab$; $\psi((ab)^\omega) = (ab)^\omega = ab$; $\psi(a^3b) = a^3b = ab$ *e* $\psi((a^3b)^\omega) = ab$. *Assim, uma vez que* $\psi((a^3b)^\omega) = \psi((ab)^\omega) = ab$, *os estados* q_2 *e* q_3 *de* $\mathcal{B}$, *etiquetados respectivamente por* $(ab)^\omega$ *e* $(a^3b)^\omega$, *dão origem em* $\mathcal{B}_\psi$ *a um mesmo estado com etiqueta* ab. *O autómato* $\mathcal{B}_\psi$, *que se obtém a partir de* $\mathcal{B}$ *pelo processo descrito na demonstração da Proposição 6.3.4, é o seguinte:*



Notemos que, uma vez que q_2 *e* q_3 *deram origem em* $\mathcal{B}_\psi$ *ao estado* q_2' *etiquetado por* ab *e como* $\psi(a^3b) = \psi(ab)$, *tem-se que as transições* $q_2 \xrightarrow{ab} q_2$ *e* $q_3 \xrightarrow{a^3b} q_3$ *deram origem em* $\mathcal{B}_\psi$ *à transição* $q_2' \xrightarrow{ab} q_2'$.

Agora, das ω*-equações (6.3), (6.4) e (6.7), resulta que, em* S, $\psi(w_1) = s_1 = s'$ *para*

$$s' = a^2[a \cdot a^2]^6 ba \cdot ab \cdot a \cdot ab[ab \cdot ab]^6 \varepsilon \cdot ab \cdot a^2 \cdot ab \cdot b.$$

Reparemos que s' *é a etiqueta do seguinte caminho em* $\mathcal{B}_\psi$

$$p_1' : \; q_0' \xrightarrow{\varepsilon} q_1' [\xrightarrow{a} q_1']^6 \xrightarrow{ba} q_2' \xrightarrow{a} q_2' [\xrightarrow{ab} q_2']^6 \xrightarrow{\varepsilon} q_2' \xrightarrow{a^2} q_2' \xrightarrow{b} q_3'.$$

De acordo com o descrito na demonstração da Proposição 6.3.4, p_1' *é o caminho ao qual* p_1 *"dá origem" em* $\mathcal{B}_\psi$. *Note-se que* p_1' *é um caminho bem sucedido em* $\mathcal{B}_\psi$. *Concluímos assim que* s_1 *pertence a* $L(\mathcal{B}_\psi)$. *Pode-se proceder de modo análogo para* s_2 *e concluir que* $X \subseteq L(\mathcal{B}_\psi)$. *Finalmente, notemos que* $\mathcal{B}_\psi$ *pode ser obtido pela aplicação do algoritmo* $ACPM$ *a* S *considerando o par* (X, Y) *com* $X = \{a^2, ab\}$ *e* $Y = \{a, b, a^2, ab, ba, \varepsilon\}$.

6.4 Conjuntos pontuais idempotentes

Seja S um semigrupo finito. Recordemos que um elemento X de $P_{\mathbf{V}}(S)$ é chamado $\mathbf{V}$-pontual idempotente se, para todo o morfismo relacional $\mu : S \multimap T$ com $T \in \mathbf{V}$, existe um idempotente $e \in T$ tal que $X \subseteq \mu^{-1}(e)$. É fácil verificar que se $X \in P_{\mathbf{V}}(S)$ e $X = X^2$, então X é $\mathbf{V}$-pontual idempotente.

Uma vez que a Proposição 6.1.1 também é válida para conjuntos pontuais idempotentes, dados um semigrupo finito A-gerado S e um homomorfismo contínuo $\psi : \overline{\Omega}_A\mathbf{S} \to S$ respeitando a escolha dos geradores, $X = \{s_1, \ldots, s_m\} \subseteq S$ é $\mathbf{V}$-pontual idempotente se existem ω-termos $w_1, \ldots, w_m$ tais que $\psi(w_i) = s_i$, para todo o $i \in \{1, \ldots, m\}$, e $\mathbf{V}$ satisfaz $w_1^2 = w_1 = \cdots = w_m$. A colecção de todos os subconjuntos $\mathbf{V}$-pontuais idempotentes de S será denotada por $EP_{\mathbf{V}}(S)$.

6.4.1 Caracterização dos ω-termos f.r.s.f. idempotentes sobre LSl

Seja

$$w = u_0 x_1^\omega x_1^{j_1} u_1 x_2^\omega x_2^{j_2} \cdots x_n^\omega x_n^{j_n} u_n$$

um ω-termo em forma reduzida para S. Pretendemos identificar as condições em que $\mathbf{LSl} \models w^2 = w$. Denotemos $\alpha_w = x_n^\omega x_n^{j_n} u_n u_0 x_1^\omega x_1^{j_1}$. Se α_w não verificar as condições da Definição 6.2.1, de ω-termo em forma reduzida para S, então: no caso de α_w ser da forma $x^\omega x^i x^\omega x^j$, usando as ω-equações (6.7), (6.3) e (6.4), se necessário, pode-se obter a partir de α_w um ω-termo da forma $x_1^\omega x_1^t$ com $0 \leq t < n_S$; no caso contrário, usando as ω-equações (6.4) e (6.7), pode-se deduzir a partir de α_w um ω-termo da forma $x_n^\omega x_n^p u_r x_1^\omega x_1^q$, onde $u_r \in A^*$, $p, q \in \{0, \ldots, n_S\}$, que verifique as condições: x_1 não é um sufixo de $x_n^k u_r$ para todo o $k \in \mathbb{N}_0$ e x_n não é um prefixo de u_r. No caso de α_w satisfazer as condições da Definição 6.2.1 denotamos $u_r = u_n u_0$.

Dado um ω-termo w em forma reduzida para S tal que α_w não é da forma $x^\omega x^i x^\omega x^j$, dizemos que o ω-autómato associado a w é *especial* se possui uma *transição especial*, isto é, uma transição com origem no penúltimo estado e término no segundo estado com etiqueta u_r. Note-se que, no caso de α_w ser da forma $x^\omega x^i x^\omega x^j$ a definição de ω-autómato especial não faz sentido para o ω-autómato associado a w.

No próximo resultado é apresentada uma caracterização dos ω-termos f.r.s.f. idempotentes sobre **LSl**. Este resultado e a sua demonstração constituem uma adaptação simples da Proposição 4.3.4.

Proposição 6.4.1 *Sejam S um semigrupo finito e $w = u_0 x_1^\omega x_1^{j_1} u_1 x_2^\omega \cdots x_n^\omega x_n^{j_n} u_n$ um ω-termo de $T_A^\omega \setminus A^+$ em forma reduzida para S. Então, w é idempotente sobre* **LSl** *se e só se ou* **LSl** *satisfaz $x_n^\omega x_n^{j_n} u_n u_0 x_1^\omega = x_1^\omega$ ou o ω-autómato associado a w é especial.*

6.4.2 Cálculo dos subconjuntos LSl-pontuais idempotentes de um semigrupo finito

Mostramos agora como usar o algoritmo $ACPM$, descrito na Secção 6.3, para calcular os subconjuntos **LSl**-pontuais idempotentes "maximais" de S. Recordemos que o cálculo dos subconjuntos **LSl**-pontuais idempotentes implica a decidibilidade do produto de Mal'cev $\mathbf{V} \circledcirc \mathbf{LSl}$, para toda a pseudovariedade $\mathbf{V}$ decidível [43, 56].

Pelo exposto no início da Secção 6.4, a próxima observação resulta como consequência da ω-mansidão de **LSl** e da Proposição 6.2.3.

Observação 6.4.2 *Sejam S um semigrupo finito A-gerado e $\psi : \overline{\Omega}_A\mathbf{S} \to S$ um homomorfismo contínuo respeitando a escolha dos geradores. Um subconjunto de S, digamos $X = \{s_1, \ldots, s_m\}$, é* **LSl***-pontual idempotente se existem ω-termos em forma reduzida para S, $w_1, \ldots, w_m$, tais que $\psi(w_i) = s_i$, para todo o $i \in \{1, \ldots, m\}$, e $\mathbf{LSl} \models w_1^2 = w_1 = \cdots = w_m$.*

Seja S um semigrupo finito A-gerado. Consideremos um dos autómatos $\mathcal{A}$ obtidos pela aplicação do algoritmo $ACPM$ ao semigrupo S. Dizemos que $\mathcal{A}$ é um *autómato característico* se verifica uma das seguintes condições:

- $\mathcal{A}$ possui uma transição, com origem no penúltimo estado e término no segundo estado, etiquetada pelo produto das etiquetas da transição final e da transição inicial, respectivamente;

- as transições inicial e final têm ambas como etiqueta a palavra vazia e o segundo estado de $\mathcal{A}$ coincide com o penúltimo.

Os subconjuntos **LSl**-pontuais idempotentes "maximais" de S podem ser obtidos através da aplicação do algoritmo $ACPM$ a S. Basta considerar apenas os autómatos característicos por ele produzidos. O conjunto constituído por todos os subconjuntos de S da forma $L(\mathcal{A})$, com $\mathcal{A}$ um autómato característico obtido pela aplicação do algoritmo $ACPM$ a S, será denotado por $MEP_{\mathbf{LSl}}(S)$.

Estamos agora em condições de estabelecer o resultado que fornece os subconjuntos **LSl**-pontuais idempotentes de um dado semigrupo finito.

Proposição 6.4.3 *Seja S um semigrupo finito A-gerado. Então,*

$$EP_{\mathbf{LSl}}(S) = \downarrow MEP_{\mathbf{LSl}}(S).$$

Demonstração. A prova deste resultado envolve os autómatos denotados por $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{B}_{\psi}$ cujas construções foram apresentadas na Secção 6.3, respectivamente, para a prova do Lema 6.3.1 e da Proposição 6.3.4. No que segue referimo-nos a estes autómatos omitindo a sua construção.

Consideremos um dos autómatos característicos $\mathcal{A}$ obtidos pela aplicação do algoritmo $ACPM$ a S e seja $L(\mathcal{A}) = \{s_1, \ldots, s_m\}$. Começamos por mostrar que $L(\mathcal{A})$ é um subconjunto **LSl**-pontual idempotente de S. Podemos ter dois casos. Consideremos primeiro que as transições inicial e final de $\mathcal{A}$ são ambas etiquetadas pela palavra vazia e que o segundo e o penúltimo estados coincidem. Neste caso, o ω-autómato obtido a partir de $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, também verifica as condições referidas para $\mathcal{A}$ e, consequentemente, qualquer ω-termo w_i reconhecido por $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ é da forma $w_i = x^{\omega}\alpha_i x^{\omega}$ com $x \in A^+$ e α_i um ω-termo de rank 0 ou 1. Conclui-se assim que os ω-termos,

$$w_{s_1}, \ldots, w_{s_m}$$

reconhecidos por $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ (que se obtêm como descrito na Secção 6.3 e que possuem todos o mesmo valor sobre **LSl**), têm neste caso como valor sobre **LSl** um idempotente.

Tratemos agora o outro caso. Suponhamos que $\mathcal{A}$ possui uma transição com origem no penúltimo estado e término no segundo estado etiquetada pelo produto das etiquetas da transição final e da transição inicial, respectivamente. Neste caso, $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ é um ω-autómato com uma transição com origem no penúltimo estado e término no segundo estado etiquetada pelo produto das etiquetas da transição final e da transição inicial, respectivamente. Portanto, também neste caso, os ω-termos de rank 1, $w_{s_1}, \ldots, w_{s_m}$, reconhecidos por $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, têm como valor sobre **LSl** um idempotente.

De acordo com o descrito na Secção 6.3, tem-se $\psi(w_{s_i}) = s_i$ para todo o $i \in \{1, \ldots, m\}$. Portanto, pela Observação 6.4.2, concluímos, em ambos os casos, que $L(\mathcal{A})$ é um subconjunto **LSl**-pontual idempotente de S. Recordemos ainda que, por definição, os pontuais idempotentes são fechados para a inclusão.

Para completar a demonstração resta verificar que se X é um subconjunto **LSl**-pontual idempotente de S, então existe um autómato característico, digamos $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$, obtido pela aplicação do algoritmo $ACPM$ a S tal que $X \subseteq L(\mathcal{A}_{\mathcal{C}})$.

Suponhamos que $X = \{s_1, \ldots, s_m\}$ é um subconjunto **LSl**-pontual idempotente de S. Então, pela Observação 6.4.2, existem ω-termos em forma reduzida para S, $w_1, \ldots, w_m$, tais que $\psi(w_i) = s_i$ e **LSl** satisfaz $w_1^2 = w_1 = \cdots = w_m$. Como

$$\mathbf{LSl} \models w_1^2 = w_1 = \cdots = w_m,$$

em particular, existem palavras u, v, x e y tais que cada ω-termo w_i é da forma

$$w_i = ux^\omega x^{k_i} \beta_i y^\omega y^{j_i} v \tag{6.9}$$

onde β_i é um ω-termo (possivelmente vazio) e $k_i, j_i \in \{0, \ldots, n_S - 1\}$. Além disso, pela Proposição 6.4.1, ou **LSl** satisfaz $y^\omega y^{j_i} vux^\omega = x^\omega$ ou existe um ω--autómato especial $\mathcal{B}$ associado a ω-termos em forma reduzida para S tal que $w_1, \ldots, w_m \in L(\mathcal{B})$.

Suponhamos primeiro que **LSl** satisfaz $y^\omega y^{j_i} vux^\omega = x^\omega$. Como **LSl** verifica $w_1 = \cdots = w_m$, pela Proposição 6.2.8 existe um ω-autómato associado a ω--termos em forma reduzida para S, digamos $\mathcal{B}'$, tal que $w_1, \ldots, w_m \in L(\mathcal{B}')$. De acordo com a hipótese assumida, o segundo e o penúltimo estados de $\mathcal{B}'$ coincidem e ou (1) $vu = x$ ou (2) $vu = \varepsilon$.

- No primeiro caso, como o segundo e o penúltimo estados de $\mathcal{B}'_\psi$ são o mesmo, o qual possui um lacete etiquetado por $\psi(x)$, concluímos que $\mathcal{B}'_\psi$ é um autómato característico. De facto, $\mathcal{B}'_\psi$ possui uma transição com origem no penúltimo estado e término no segundo estado etiquetada por $\psi(v)\psi(u)$.

- O caso (2) é imediato.

Recordemos que pelo descrito na Secção 6.3, o autómato $\mathcal{B}'_\psi$ pode ser encarado como um autómato obtido pela aplicação de $ACPM$ a S. Tomando $\mathcal{A}_\mathcal{C} = \mathcal{B}'_\psi$, concluímos a prova para o caso em que **LSl** satisfaz $y^\omega y^{j_i} vux^\omega = x^\omega$.

Finalmente, suponhamos que existe um ω-autómato especial $\mathcal{B}$ associado a ω-termos em forma reduzida para S tal que $w_1, \ldots, w_m \in L(\mathcal{B})$. Como os ω--termos $w_1, \ldots, w_m$ são da forma (6.9), tem-se que u_r, a etiqueta da transição especial, é um factor de $y^{kn_S} y^{j_i} vu$ com $k \in \mathbb{N}$ tal que $|y^{kn_S}| \geq |x|$. De facto, $y^{kn_S} y^{j_i} vu$ pode ser escrito na forma $y^{p_i} u_r x^q$ com $p_i, q \geq 0$.

Para o que segue denotamos por $\mathcal{B}_{\underline{\psi}}$ o autómato que difere de $\mathcal{B}_\psi$ apenas na etiqueta da transição à qual a transição especial de $\mathcal{B}$ dá origem. O autómato $\mathcal{B}$ possui uma transição especial etiquetada por u_r que dá origem a uma transição em $\mathcal{B}_{\underline{\psi}}$ etiquetada não por $\psi(u_r)$ como aconteceria em $\mathcal{B}_\psi$, mas sim por $\psi(v)\psi(u)$. Portanto $\mathcal{B}_{\underline{\psi}}$ é um autómato característico. Agora, pela definição de $\mathcal{B}_{\underline{\psi}}$ e tendo em conta que ψ é um homomorfismo e S satisfaz as ω-equações (6.3), (6.4) e (6.7), pode-se deduzir que os elementos $\psi(w_1), \ldots, \psi(w_m)$ pertencem a $L(\mathcal{B}_{\underline{\psi}})$. Tomando $\mathcal{A}_\mathcal{C} = \mathcal{B}_{\underline{\psi}}$ completamos a demonstração da proposição. ■

É importante referir que, se $\mathcal{A}$ é um dos autómatos obtidos pela aplicação do algoritmo $ACPM$ a um semigrupo finito A-gerado S, então $L(\mathcal{A})$ é calculável. Isto significa que basta percorrer um número finito de caminhos em $\mathcal{A}$ para obtermos todos os elementos de S que pertencem a $L(\mathcal{A})$. Vejamos que é suficiente percorrer os caminhos de comprimento menor ou igual a $r = |S| \cdot |E(S)| + 1$.

Recordemos que se s é um elemento de S que pertence a $L(\mathcal{A})$, então s é a etiqueta de um caminho bem sucedido p em $\mathcal{A}$. Suponhamos que $s \in L(\mathcal{A})$ é a etiqueta de um caminho bem sucedido p' em $\mathcal{A}$ com comprimento maior do que r

$$p' : \; q_0 \xrightarrow{u_1} q_1 \xrightarrow{u_2} q_2 \ldots \xrightarrow{u_r} q_r \xrightarrow{u_{r+1}} q_{r+1} \ldots q_{t-1} \xrightarrow{u_t} q_t,$$

onde $t > r$ e $u_1, \ldots, u_t \in S^\varepsilon$. De acordo com o estabelecido, o estado inicial q_0 e o estado final q_t são etiquetados pela palavra vazia e os outros estados são etiquetados por elementos de $E(S)$. Para cada $1 \leq i < t$, seja y_i o produto de u_i pela etiqueta de q_i (que denotamos por e_i). Observe-se que $y_i = u_i e_i$ pertence a S. Consideremos agora os pares (y_1, e_1), $(y_1 y_2, e_2)$, $\ldots$, $(y_1 y_2 \cdots y_r, e_r)$. Estes pares pertencem ao conjunto $S \times E(S)$ e $|S \times E(S)| = |S| \cdot |E(S)|$. Portanto, como $r > |S \times E(S)|$, existem i e j com $1 \leq i < j \leq r$ tais que

$$(y_1 y_2 \cdots y_i, e_i) = (y_1 y_2 \cdots y_j, e_j).$$

Em particular, $y_1 \cdots y_i = y_1 \cdots y_i \cdots y_j$ e $e_i = e_j$. Isto significa que, se percorrermos o caminho de comprimento i e etiqueta $y_1 \cdots y_i$ ou o caminho de comprimento j e etiqueta $y_1 \cdots y_j$ obtemos o mesmo elemento de S. Além disso, os caminhos terminam no mesmo estado. Portanto basta percorrer o caminho com menor comprimento. Depois, avançamos para a transição seguinte e quando o caminho atingir novamente comprimento r aplicamos o mesmo raciocínio. Se iterarmos este procedimento podemos concluir que é suficiente percorrer caminhos com comprimento no máximo r.

Reparemos que, dado um semigrupo finito A-gerado S, para testar se um subconjunto X de S é **LSl**-pontual, o algoritmo apresentado vai gerando subconjuntos pontuais até que ou X é encontrado, ou todos os subconjuntos pontuais foram gerados.

Para **LSl**, considerando o facto de um subconjunto ser **LSl**-pontual, podemos limitar os comprimentos dos ω-termos. O próximo resultado fornece esse limite.

Proposição 6.4.4 *Sejam S um semigrupo finito A-gerado e $\psi : \overline{\Omega}_A\mathbf{S} \to S$ um homomorfismo contínuo respeitando a escolha dos geradores. Se $X = \{s_1, \ldots, s_n\}$ é um subconjunto* **LSl***-pontual de S, então existe um conjunto de n ω-termos, $Y = \{w_1, \ldots, w_n\}$, de comprimento máximo $2|S|^3 + |S|^2 + |S|$, que verifica $\psi(w_i) = s_i$ para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$ e todos os ω-termos de Y possuem o mesmo valor sobre* **LSl**.

Demonstração. O caso em que X é singular é trivial. Assim, assumimos que X é não singular. Como X é **LSl**-pontual, existe um autómato $\mathcal{A}$ obtido pela aplicação do algoritmo $ACPM$ a S tal que

$$X \subseteq L(\mathcal{A}).$$

Como referido anteriormente $\mathcal{A}$ obedece a certas condições. Em particular, as transições possuem como etiquetas elementos de S^ε e os vértices possuem como etiquetas idempotentes de S. Recordemos ainda que são utilizadas representações dos elementos de S à custa dos geradores. Usando um raciocínio análogo ao apresentado acima, na prova de que é suficiente percorrer caminhos de comprimento máximo r, pode-se considerar que cada uma destas representações possui comprimento menor ou igual a $|S|$.

Recordemos que $L(\mathcal{A})$ é calculável e que para obtermos $L(\mathcal{A})$ basta percorrer, em $\mathcal{A}$, caminhos de comprimento menor ou igual a r. Como $X \subseteq L(\mathcal{A})$, para cada $s_i \in X$ é possível seleccionar, em $\mathcal{A}$, um caminho p_i de comprimento menor ou igual a r cuja etiqueta é s_i.

Partindo de $\mathcal{A}$ podemos construir o autómato $\mathcal{D}_\mathcal{A}$, como descrito na Secção 6.3. Agora, se percorrermos em $\mathcal{D}_\mathcal{A}$ os n caminhos de comprimento no máximo r, associados aos n caminhos em $\mathcal{A}$ p_i com $i \in \{1, \ldots, n\}$ acima referidos, obtemos n ω-termos $w_{s_1}, \ldots, w_{s_n}$ que como verificado na Secção 6.3 são tais que $\psi(w_{s_i}) = s_i$ para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$ e **LSl** $\models w_{s_1} = \cdots = w_{s_n}$.

Finalmente, reparemos que w_{s_i} é a etiqueta de um caminho, em $\mathcal{D}_\mathcal{A}$, de comprimento no máximo r com origem e término em vértices etiquetados pela palavra vazia. Portanto, o caminho do qual w_{s_i} é a etiqueta possui no máximo r transições etiquetadas por palavras de comprimento no máximo $|S|$ e $r-1$ vértices etiquetados por ω-termos da forma x_i^ω cujas bases x_i são também palavras de comprimento no máximo $|S|$. Conclui-se assim que $|w_{s_i}| \leq r|S| + (r-1)(|S|+1) \leq 2|S|^3 + |S|^2 + |S|$. ∎

Dado um subconjunto X de um semigrupo finito A-gerado S, para testar se X é **LSl**-pontual podemos portanto adivinhar um conjunto Y com $|X|$ elementos de T_A^ω, cada um dos elementos de comprimento $O(|S|^3)$, e depois verificar que as ω-palavras correspondentes aos elementos de Y são projectadas sobre X através do homomorfismo contínuo natural $\psi : \overline{\Omega}_A\mathbf{S} \to S$, e que todos os elementos de Y têm o mesmo valor sobre **LSl**. Ambas as verificações podem ser concluídas em tempo polinomial com respeito ao comprimento dos termos. Conclui-se assim que para $|X|$ fixo, testar se um subconjunto X de S é **LSl**-pontual é um problema que pertence à classe NP.

Parte III

Mansidão (completa)

Capítulo 7

Mansidão completa de LSl

Existem vários exemplos de resultados de redutibilidade na literatura mas relativamente poucos resultados de redutibilidade completa. Recordemos alguns desses resultados. É bem sabido, por exemplo, que a pseudovariedade **G** é κ-mansa [24, 5, 16] mas não é completamente κ-mansa [36]. Se **G** é completamente σ-mansa para alguma outra assinatura σ permanece uma questão em aberto. A pseudovariedade $\mathbf{G}_p$ de todos os p-grupos finitos, com p primo, não é κ-mansa [16] mas Almeida exibiu uma assinatura implícita infinita com respeito à qual $\mathbf{G}_p$ é mansa [8]. A pseudovariedade **Ab** de todos os grupos abelianos finitos é completamente κ-mansa [15]. A κ-mansidão da pseudovariedade **OCR**, dos semigrupos completamente regulares ortodoxos, foi provada em [18] e a κ-mansidão de **CR** foi estabelecida em [19] (uma propriedade da qual este resultado depende foi observada mais tarde por K. Auinger). A κ-mansidão completa destas duas pseudovariedades permanece ainda um problema em aberto. Para exemplos aperiódicos, escolhemos mencionar as pseudovariedades **J** e **R**. A κ-mansidão completa de **J** foi provada explicitamente em [7], mas está também implícita nas demonstrações de [63]. A demonstração da κ-mansidão completa de **R** foi obtida recentemente [11, 12], enquanto a sua κ-mansidão já tinha sido estabelecida pelos mesmos autores em [10].

Foi provado por J. Costa e L. Teixeira que a pseudovariedade **LSl** é κ-mansa [35]. Neste capítulo estendemos esse trabalho provando a κ-mansidão completa de **LSl**, resultados estes que foram publicados em [33]. Este trabalho está organizado como passamos a descrever. Apresentamos as noções de σ-redutibilidade (completa) e σ-mansidão (completa) na Secção 7.1. Em seguida introduzimos o conceito de σ-plenitude. Como veremos a κ-plenitude de **LSl** é obtida como uma consequência da demonstração da sua κ-redutibilidade completa. A Secção 7.3 é dedicada à solução do problema da κ-palavra para **LSl**, a qual é necessária para provar o resultado principal deste capítulo. Apresentamos, em seguida, alguns resultados técnicos sobre combinatória de palavras que são essenciais para os nossos propósitos. Finalmente, a Secção 7.5 fornece a demonstração da κ-redutibilidade completa de **LSl**.

É de salientar que as secções 7.1, 7.3 e 7.4, aqui apresentadas, são igualmente necessárias para o Capítulo 8. Assim, o uso da assinatura κ, neste capítulo, tem como objectivo uma certa uniformização da terceira parte desta tese.

7.1 Redutibilidade (completa)

Recordamos nesta secção as noções principais de redutibilidade e mansidão. Para mais detalhes o leitor é remetido para [7, 12]. Começamos com uma apresentação formal do problema da redutibilidade (completa) de um sistema de equações para uma pseudovariedade de semigrupos **V** genérica.

Seja σ uma assinatura implícita e sejam X e P conjuntos finitos disjuntos. Os elementos de X são designados por *variáveis* e os elementos de P são designados por *parâmetros*. Seja S um semigrupo finito A-gerado.

Suponhamos que nos são dadas as seguintes funções, ilustradas no diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & \overline{\Omega}_A\mathbf{S} \arrow[dlll, "\psi"'] & & & \\
S & & X \arrow[ll, "\gamma"'] \arrow[ur, "\delta"] \arrow[rr, hook] & & \Omega^\sigma_{X\cup P}\mathbf{S} \arrow[ul, "\zeta"'] & & P \arrow[ll, hook'] \arrow[ulll, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Solução δ e funções envolvidas

onde:

- $\psi : \overline{\Omega}_A\mathbf{S} \to S$ é um homomorfismo contínuo que respeita a escolha dos geradores;
- $\gamma : X \to S$ fornece uma restrição em S para cada variável;
- $\varphi : P \to \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ é uma avaliação dos parâmetros tal que $\varphi(P) \subseteq \Omega^\sigma_A\mathbf{S}$;
- $\delta : X \to \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ é uma avaliação das variáveis por pseudopalavras;
- $\zeta : \Omega^\sigma_{X\cup P}\mathbf{S} \to \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ é o σ-homomorfismo definido por $\zeta_{|X} = \delta$ e $\zeta_{|P} = \varphi$.

Seja $\mathcal{S}$ um sistema finito de σ-equações

$$u_i = v_i \quad (i = 1, \ldots, h), \tag{7.1}$$

onde cada um dos σ-termos u_i e v_i pertence ao semigrupo $T^{\sigma}_{X\cup P}$. Dizemos que δ é uma *solução do sistema* $\mathcal{S}$ *módulo* $\mathbf{V}$ *com respeito a* (φ,γ,ψ) se

$$\begin{cases} \forall i \in \{1,\ldots,h\} \quad \mathbf{V} \models \zeta(u_i) = \zeta(v_i) \\ \psi \circ \delta = \gamma. \end{cases}$$

Ademais, se $\delta(X) \subseteq \Omega^{\sigma}_{A}\mathbf{S}$, então δ é denominada uma *σ-solução* de $\mathcal{S}$ módulo $\mathbf{V}$ com respeito a (φ,γ,ψ). O triplo (φ,γ,ψ) estará, por vezes, subentendido. Se $P=\emptyset$, então falamos de soluções com respeito apenas a (γ,ψ). Neste caso, usaremos a notação δ para representar tanto a avaliação das variáveis como também a sua extensão a um σ-homomorfismo $\Omega^{\sigma}_{X}\mathbf{S} \to \overline{\Omega}_{A}\mathbf{S}$.

Uma pseudovariedade $\mathbf{V}$ diz-se *σ-redutível* para um sistema $\mathcal{S}$ se a existência de uma solução δ de $\mathcal{S}$ módulo $\mathbf{V}$ com respeito a um triplo (φ,γ,ψ) implica a existência de uma σ-solução δ' de $\mathcal{S}$ módulo $\mathbf{V}$ com respeito a (φ,γ,ψ). Dizemos que $\mathbf{V}$ é *completamente σ-redutível* se é σ-redutível para todo o sistema da forma (7.1).

Consideremos agora o caso particular em que $\mathcal{S}$ é um sistema de equações associado a um grafo finito Γ, usualmente denotado por Σ_Γ, formado por todas as equações da forma $\alpha(\mathsf{e})\mathsf{e} = \omega(\mathsf{e})$ com $\mathsf{e} \in \mathcal{E}(\Gamma)$, onde o conjunto das variáveis é $X=\Gamma$ e $P=\emptyset$. Por simplificação de notação, o par (γ,ψ) será por vezes omitido e, por abuso de linguagem, referimo-nos por vezes à "solução de Γ"em vez da "solução de Σ_Γ". Se $\mathbf{V}$ é σ-redutível para Σ_Γ para todo o grafo finito Γ, então dizemos que $\mathbf{V}$ é *σ-redutível*.

Na linguagem de [60, Capítulo 3], onde um conceito análogo é desenvolvido, γ diz-se uma substituição $\mathbf{V}$-inevitável com respeito ao sistema $\mathcal{S}$ se existe uma solução δ.

Uma pseudovariedade $\mathbf{V}$ diz-se (*completamente*) *σ-mansa* se é recursivamente enumerável, (completamente) σ-redutível e o problema da σ-palavra para $\mathbf{V}$ é decidível. Finalmente, dizemos que uma pseudovariedade é (*completamente*) *mansa* se é (completamente) σ-mansa com respeito a uma assinatura implícita recursivamente enumerável σ consistindo de operações implícitas computáveis.

7.2 Plenitude

Esta secção é dedicada a uma breve introdução de uma outra propriedade de pseudovariedades, envolvendo assinaturas implícitas, que será considerada na Subsecção 7.5.5. Para a obtenção de mais pormenores o leitor é remetido para [16, 17, 14].

Seja $\mathbf{V}$ uma pseudovariedade de semigrupos e seja σ uma assinatura implícita. Recordemos que, para um semigrupo finito A-gerado S e um homomorfismo contínuo respeitando a escolha dos geradores $\psi : \overline{\Omega}_A\mathbf{S} \to S$, $\mu_\mathbf{V}$ denota o morfismo relacional $p_\mathbf{V} \circ \psi^{-1}$ entre S e $\overline{\Omega}_A\mathbf{V}$. Denotaremos por $\mu^\sigma_\mathbf{V}$ o morfismo relacional entre S e $\Omega^\sigma_A\mathbf{V}$ dado por $\mu^\sigma_\mathbf{V} = p_\mathbf{V} \circ (\psi|_{\Omega^\sigma_A\mathbf{S}})^{-1}$, e por $\bar{\mu}^\sigma_\mathbf{V}$ o morfismo relacional dado por $\bar{\mu}^\sigma_\mathbf{V} = \mu_\mathbf{V} \cap (S \times \Omega^\sigma_A\mathbf{V})$. Por [16, 17], dizemos que $\mathbf{V}$ é *σ-plena* se $\mu^\sigma_\mathbf{V} = \bar{\mu}^\sigma_\mathbf{V}$ para todos os tais homomorfismos $\psi : \overline{\Omega}_A\mathbf{S} \to S$ num semigrupo finito S. Note-se que a inclusão $\mu^\sigma_\mathbf{V} \subseteq \bar{\mu}^\sigma_\mathbf{V}$ é sempre válida.

As pseudovariedades $\mathbf{G}$ [24], $\mathbf{Ab}$ [38], $\mathbf{J}$ [17] e $\mathbf{R}$ [14] são alguns exemplos de pseudovariedades κ-plenas. Pelo contrário, a pseudovariedade $\mathbf{G}_p$ [61] não é κ-plena. Porém, não é sabido se toda a pseudovariedade σ-redutível é σ-plena.

7.3 O problema da κ-palavra para LSl

Nesta secção apresentamos uma simples reformulação do problema da κ-palavra para **LSl** [30], envolvendo κ-termos em forma reduzida (que introduzimos abaixo) em vez de ω-termos em forma normal (veja-se Secção 4.2). Por abuso de notação, de agora em diante vamos denotar simplesmente por ϵ o homomorfismo de κ--semigrupos $\epsilon^\kappa_{A,\mathbf{S}} : T^\kappa_A \to \Omega^\kappa_A\mathbf{S}$. Em conformidade com o estabelecido para os capítulos anteriores, o homomorfismo ϵ será por vezes omitido: quando nos referimos a um κ-termo $x \in T^\kappa_A$, queremos considerar nesses casos a correspondente κ-palavra $\epsilon(x) \in \Omega^\kappa_A\mathbf{S}$.

Seja $x \in \Omega^\kappa_A\mathbf{S}$ uma κ-palavra. Note-se que $x^{\omega-1}x = x^\omega$ pois, para cada elemento s de um semigrupo finito, $s^{\omega-1}s = s^{\omega-1}s^\omega s = s^{\omega-1}s^{\omega+1} = s^\omega$ pela definição de s^ω e de $s^{\omega-1}$. Para cada inteiro i, definimos

$$x^{\omega+i} = \begin{cases} (x^{\omega-1})^{-i} & \text{se } i < 0 \\ x^\omega & \text{se } i = 0 \\ x^\omega x^i & \text{se } i > 0. \end{cases}$$

As seguintes κ-identidades, onde $x, y \in \Omega^\kappa_A\mathbf{S}$ e $i, j \in \mathbb{Z}$, são facilmente demostradas

$$(x^{\omega+i})^{\omega+j} = x^{\omega+ij}, \tag{7.2}$$

$$(x^i)^{\omega+j} = x^{\omega+ij}, \quad (i > 0) \tag{7.3}$$

$$x^{\omega+i}x^{\omega+j} = x^{\omega+i+j}, \tag{7.4}$$

$$x^i x^{\omega+j} = x^{\omega+j}x^i = x^{\omega+i+j}, \quad (i > 0) \tag{7.5}$$

$$(xy)^{\omega+i} = x(yx)^{\omega+i-1}y. \tag{7.6}$$

Adoptamos a notação $x^{\omega+i}$ também para κ-termos e denotamos $\{\omega{+}i \mid i \in \mathbb{Z}\}$, chamado o *conjunto dos expoentes infinitos*, por $\omega + \mathbb{Z}$. O *rank* de um κ-termo é o número máximo de potências infinitas encaixadas umas nas outras que nele ocorrem. Por exemplo, a expressão

$$a\Big(a(ba)^{\omega-2}b\Big)^{\omega+3}b^4\Big(b(a^3)^{\omega-1}a(a^2)^{\omega}\Big)^{\omega+1}a \tag{7.7}$$

representa um κ-termo w de rank 2 sobre o alfabeto $\{a,b\}$. Recordemos que um κ-termo de rank 0 é uma palavra de A^+. Um κ-termo de rank 1 é um elemento $w \in T_A^\kappa$ da forma

$$w = u_0' u_1^{\alpha_1} u_1' u_2^{\alpha_2} \cdots u_m^{\alpha_m} u_m'$$

com $m \geq 1$, $u_0', \ldots, u_m' \in A^*$, $u_1, \ldots, u_m \in A^+$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \omega + \mathbb{Z}$. Note-se que se $\alpha_i = \omega$ para todo o i então w é um ω-termo de rank 1. Recordemos que $\epsilon^\kappa_{A,\mathbf{K}}(w)$ é a palavra infinita à direita $u_0' u_1^{+\infty}$, enquanto que $\epsilon^\kappa_{A,\mathbf{D}}(w)$ é a palavra infinita à esquerda $u_m^{-\infty} u_m'$. O κ-termo w diz-se em *forma reduzida* quando $u_1, \ldots, u_m$ são palavras de Lyndon e $u_j^{-\infty} u_j' u_{j+1}^{+\infty}$ é uma palavra biinfinita não periódica para $j = 1, \ldots, m-1$.

Para um κ-termo w, denotamos por B_w o conjunto dos factores biinfinitos não periódicos da κ-palavra $\epsilon(w)$. Se $w = u_0' u_1^{\alpha_1} u_1' u_2^{\alpha_2} \cdots u_m^{\alpha_m} u_m'$ é um κ-termo de rank 1 escrito em forma reduzida, então é imediato que B_w é o seguinte conjunto de palavras biinfinitas

$$B_w = \{u_j^{-\infty} u_j' u_{j+1}^{+\infty} \mid j = 1, \ldots, m-1\}. \tag{7.8}$$

Note-se que como **LSl** é uma pseudovariedade aperiódica, verifica a pseudoidentidade $x^{\omega+i} = x^\omega$ para todo o inteiro i. Assim, o Lema 4.2.2 pode ser reescrito da seguinte forma.

Lema 7.3.1 *Se $w \in T_A^\kappa \setminus A^+$, então* **LSl** $\models w^{\omega+i} = w^2$ *para todo o inteiro i.*

Tal como a Proposição 4.2.3, também o seguinte critério de decisão para testar se dois κ-termos infinitos (i.e., κ-termos de rank pelo menos 1) são iguais sobre **LSl** consiste numa simples reformulação de [30, Teorema 7.1].

Proposição 7.3.2 *Seja $w \in T_A^\kappa$ um κ-termo infinito. Então, existe um κ-termo de rank 1 $w_1 = u_0' u_1^\omega u_1' u_2^\omega \cdots u_m^\omega u_m'$ em forma reduzida tal que* **LSl** $\models w = w_1$.

Por outro lado, se $z \in T_A^\kappa$ é um outro κ-termo infinito e $z_1 = v_0' v_1^\omega v_1' v_2^\omega \cdots v_n^\omega v_n'$ é um κ-termo de rank 1 em forma reduzida tal que **LSl** $\models z = z_1$, *então* **LSl** $\models$ $w = z$ *se e só se $u_0' u_1^{+\infty} = v_0' v_1^{+\infty}$, $u_m^{-\infty} u_m' = v_n^{-\infty} v_n'$ e $B_{w_1} = B_{z_1}$. Além disso, é efectivamente decidível se* **LSl** $\models w = z$.

Seja $\pi \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ uma pseudopalavra infinita tal que $\mathbf{LSl} \models \pi = w$ para algum κ-termo w. Como uma consequência da Proposição 4.1.2, podemos definir B_π como sendo o conjunto B_{w_1}, onde w_1 é um qualquer κ-termo de rank 1 em forma reduzida tal que $\mathbf{LSl} \models \pi = w_1$. Em particular, dado um κ-termo infinito $w \in T_A^\kappa$ tem-se $B_w = B_{w_1}$, onde w_1 é um qualquer κ-termo de rank 1 em forma reduzida tal que $\mathbf{LSl} \models w = w_1$. Por exemplo, suponhamos que

$$w = a\Big(a(ba)^{\omega-2}b\Big)^{\omega+3}b^4\Big(b(a^3)^{\omega-1}a(a^2)^\omega\Big)^{\omega+1}a$$

é o κ-termo em (7.7) e assumamos que $a < b$. A pseudovariedade $\mathbf{LSl}$ verifica as seguintes κ-identidades

$$\begin{aligned}
w &= a\Big(ab(ab)^{\omega-3}ab\Big)^{\omega+3}b^4\Big(ba^{\omega-3}aa^\omega\Big)^{\omega+1}a && \text{por (7.3) e (7.6)}\\
&= a\Big((ab)^{\omega-1}\Big)^{\omega+3}b^4\Big(ba^{\omega-2}\Big)^{\omega+1}a && \text{por (7.4) e (7.5)}\\
&= a(ab)^{\omega-3}b^4ba^{\omega-2}ba^{\omega-2}a && \text{por (7.2) e pelo Lema 7.3.1}\\
&= a(ab)^\omega b^5a^\omega ba^\omega && \text{por (7.5) e já que } \mathbf{LSl} \models x^{\omega+i} = x^\omega.
\end{aligned}$$

Agora, como este último κ-termo está em forma reduzida, deduzimos que $B_w = \{(ab)^{-\infty}b^5a^{+\infty}, a^{-\infty}ba^{+\infty}\}$.

7.4 Alguns resultados de combinatória

Nesta secção, recordamos brevemente algumas definições sobre palavras e alguns resultados de [35, Secção 4] que serão usados mais tarde neste capítulo e também no Capítulo 8.

7.4.1 Factores marcados

No que segue recordamos algumas noções, e as suas propriedades básicas, introduzidas em [35]. Fixaremos também vários inteiros já usados nesse artigo. Comecemos por recordar alguns deles.

Definição 7.4.1 (constantes k, k' e k'') *Consideremos que:*

- *k representa o número $|S|+2$ de elementos de um semigrupo finito A-gerado S mais 2. Assumimos para o restante desta terceira parte que S e k estão fixos.*

- *$k' = 6k|A|^{3k}$, e note-se que esta constante é grande o suficiente para garantir que, se $u_1, \ldots, u_r$ são todos os factores de uma palavra $w \in A^+$ com $2k \leq |u_i| < 3k$ e se $doc(u_i, w) > k'-2$ para todo o $1 \leq i \leq r$, então é possível escolher uma* *ocorrência de cada factor* u_i *de modo que estas ocorrências sejam disjuntas duas a duas. Estaremos interessados nestes factores* u_i *porque eles podem ser factorizados na forma* $u_i = u_{i,1}u_{i,2}u_{i,3}$ *com* $|u_{i,1}| = |u_{i,3}| = k$ *e* $|u_{i,2}| < k$.

- $k'' = [2k'(3k-1)]^{|A|^{3k-1}+1}$, *e observe-se que a definição de* k'' *é motivada pelo Lema 7.4.3 abaixo.*

Uma palavra finita v diz-se k'-*abundante* se $\mathrm{doc}(y, v) \geq k'$ para todos os factores y de v com comprimento $3k-1$. Seja $w = a_1a_2\cdots a_n$ $(a_i \in A)$ uma palavra finita, com $n \geq 3k-1$. Uma k''-*vizinhança* de uma ocorrência $u = w[i, j]$ de um factor u em w é uma ocorrência $v = w[i', j']$ estendendo $w[i, j]$ (i.e., tal que $i' \leq i$ e $j' \geq j$) e tal que $|v| \leq k''$. Uma ocorrência $u = w[i, j]$, com $|u| = 3k-1$, diz-se *livre* se existe uma k''-vizinhança v de $w[i, j]$ tal que v é k'-abundante. Portanto, neste caso, toda a ocorrência de um factor y de comprimento $3k-1$ em v é livre. A ocorrência $w[i, j]$ (e as letras $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$) diz-se *marcada* se não é livre.

O próximo lema segue facilmente das definições anteriores.

Lema 7.4.2 *Existe uma única factorização*

$$w = w_0v_1w_1v_2\cdots v_qw_q$$

tal que $q \geq 0$ *e*

- $w_0, w_q \in A^*$, $w_1, \ldots, w_{q-1}, v_1, \ldots, v_q \in A^+$;
- *para cada* $1 \leq i \leq q$, *as letras de* v_i *são marcadas;*
- *para cada* $0 \leq j \leq q$, *as letras de* w_j *não são marcadas.*

Esta factorização é denominada a factorização marcada de w (para k). *Os factores* $v_1, \ldots, v_q$ *e* $w_0, \ldots, w_q$ *dizem-se, respectivamente, os* factores marcados *e os* factores livres *de* w *(para* k*).*

O processo acima, de marcar letras de uma dada palavra $w \in A^+$, é uma forma de identificar os factores de um determinado comprimento $3k-1$ que (localmente) têm "poucas" ocorrências: a definição do que significa "poucas" é dada de modo que os factores marcados tenham comprimentos limitados, como é mostrado pelo próximo lema. Pelo contrário, os factores livres são "grandes" e não têm limites para os seus comprimentos.

Lema 7.4.3 *Seja* $w = w_0v_1w_1v_2\cdots v_qw_q$ *a factorização marcada de uma palavra* $w \in A^+$ *de comprimento pelo menos* $3k-1$. *Se* $q \geq 1$, *então* $3k-1 \leq |v_i| < k''$ *para todo o* $1 \leq i \leq q$.

7.4.2 Transformar palavras em κ-termos de rank 1

Em [35] é definida uma função que associa a determinadas palavras finitas u certos κ-termos $\overline{u}$ de rank 1. Aqui, fazemos um pequeno ajuste nessa definição e note-se que, no que respeita à pseudovariedade **LSl**, a modificação é inofensiva (no sentido em que a nova versão podia substituir a antiga que os resultados em [35] permaneceriam válidos).

Através de uma simples reformulação do Lema 1.2.8, tem-se que, para cada palavra $u = a_1 \cdots a_k \in A^+$ de comprimento $k = |S| + 2$, existem inteiros $1 < i \leq j < k$ tais que

$$S \models u = a_1 \cdots a_{i-1}(a_i \cdots a_j)^{\omega+1} a_{j+1} \cdots a_k. \tag{7.9}$$

Suponhamos que a palavra $a_i \cdots a_j$ não é primitiva. Então $a_i \cdots a_j = (a_i \cdots a_\ell)^n$ para alguns $i \leq \ell < j$ e $n > 1$ tais que $a_i \cdots a_\ell$ é uma palavra primitiva. Logo, S verifica

$$\begin{aligned} u &= a_1 \cdots a_{i-1}((a_i \cdots a_\ell)^n)^\omega a_i \cdots a_j a_{j+1} \cdots a_k \\ &= a_1 \cdots a_{i-1}(a_i \cdots a_\ell)^\omega a_i \cdots a_j a_{j+1} \cdots a_k \\ &= a_1 \cdots a_{i-1}(a_i \cdots a_\ell)^{\omega+1} a_{\ell+1} \cdots a_j a_{j+1} \cdots a_k. \end{aligned}$$

Portanto, podemos assumir sem perda de generalidade que, em (7.9), a palavra $a_i \cdots a_j$ é primitiva. Agora, existe um inteiro $i \leq i' \leq j$ tal que $a_{i'} \cdots a_j a_i \cdots a_{i'-1}$ é uma palavra de Lyndon. Definimos $\overline{u}$ como sendo o seguinte κ-termo

$$\overline{u} = a_1 \cdots a_{i-1} a_i \cdots a_{i'-1}(a_{i'} \cdots a_j a_i \cdots a_{i'-1})^\omega a_{i'} \cdots a_j a_{j+1} \cdots a_k \tag{7.10}$$

e note-se que $S \models u = \overline{u}$ por (7.6). Recordemos que existe um inteiro positivo n_S, chamado o expoente de S, tal que $s^{n_S} = s^\omega$ para todo o $s \in S$. Seja $m_S = pn_S + 1$ para algum p tal que $pn_S + 1 > k$, e note-se que $s^{m_S} = s^{\omega+1}$ para todo o $s \in S$. Portanto, em particular, se $v \in A^+$ é uma qualquer palavra de Lyndon, então o semigrupo S satisfaz $v^{m_S} = v^{\omega+1}$ e podemos definir

$$u = v^{m_S} \quad \text{e} \quad \overline{u} = u^{\omega+1} = v^{\omega+m_S}, \tag{7.11}$$

sem conflito com o caso anterior, pois $|u| = m_S|v| > k$. Note-se que também neste caso $S \models u = \overline{u}$. De facto, S satisfaz $u^{\omega+1} = (v^{m_S})^\omega v^{m_S} = v^\omega v^{\omega+1} = v^{\omega+1} = v^{m_S} = u$. Note-se ainda que em ambos os casos, se $\mathbf{V}$ é uma pseudovariedade que verifica a pseudoidentidade $xy^{\omega+1}z = xyz$, então $\mathbf{V}$ também verifica $u = \overline{u}$. Com efeito, no caso em que $\overline{u}$ é dado por (7.10), basta notar que $\mathbf{V}$ satisfaz a pseudoidentidade (7.6). Quando $\overline{u}$ é dado por (7.11), $\mathbf{V}$ verifica $u = vv^{m_S-2}v = v(v^{m_S-2})^{\omega+1}v = vv^{\omega+m_S-2}v = v^{\omega+m_S} = \overline{u}$.

7.4.3 Centros de palavras biinfinitas

Seja $w \in A^+$ e seja $u = w[\ell, r]$ uma ocorrência de um factor u em w. Uma ocorrência $v = w[\ell, r']$, com $r \leq r'$, de um factor v em w diz-se uma *extensão à direita* da ocorrência $w[\ell, r]$. Neste caso, a própria palavra v é referida como sendo uma *extensão à direita (em w)* da ocorrência $w[\ell, r]$. Extensões à esquerda são definidas simetricamente.

Definição 7.4.4 (ocorrência permitida) *Seja $u \in A^+$ e seja $\overrightarrow{u}$ uma extensão à direita de u. Dizemos que uma ocorrência $u = w[\ell, r]$ numa palavra $w \in A^+$ é* permitida *em w em relação a $\overrightarrow{u}$, se $\overrightarrow{u}$ é uma extensão à direita em w da ocorrência $w[\ell, r]$. (Ocorrências permitidas em relação a extensões à esquerda $\overleftarrow{u}$ são definidas de forma análoga.)*

Por exemplo, seja $u = aba$ e consideremos $\overrightarrow{u} = abaabc$. Então

$$w = cab\mathbf{aba}abcaaba\mathbf{aba}abc$$

tem duas ocorrências de u permitidas em relação a $\overrightarrow{u}$: $w[4, 6]$ e $w[14, 16]$; e duas ocorrências de u não permitidas: $w[2, 4]$ e $w[11, 13]$. Se $\overrightarrow{u} = ababb$ então u não tem ocorrências permitidas em w.

Definição 7.4.5 (centros de uma palavra biinfinita) *Seja $\mathbf{w} \in A^{\mathbb{Z}}$ uma palavra biinfinita. Para todo o par de inteiros $p, q \in \mathbb{N}_0$, o factor $\mathbf{w}[-p, q]$ diz-se um* centro *de $\mathbf{w}$.*

O dual (para extensões à esquerda) do seguinte resultado foi provado em [35, Lema 4.2].

Lema 7.4.6 *Seja $B = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ um conjunto finito de palavras biinfinitas não periódicas tais que $\mathbf{w}_i \not\sim \mathbf{w}_j$ para todos os $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ com $i \neq j$. Para cada $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ consideremos também $c_\ell = \mathbf{w}_\ell[-p_\ell, q_\ell]$ um centro de $\mathbf{w}_\ell$ com $p_\ell \geq Q$ para um Q fixo (dependendo de B) escolhido suficientemente grande.*

Então, para cada ℓ existe um centro $\overrightarrow{c_\ell} = \mathbf{w}_\ell[-p_\ell, q'_\ell]$ de $\mathbf{w}_\ell$ com $q_\ell \leq q'_\ell$ (donde $\overrightarrow{c_\ell}$ é uma extensão à direita de c_ℓ) tal que a seguinte propriedade é verificada, para todos os $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ (onde i e j podem ser o mesmo):

> *quaisquer duas ocorrências distintas de c_i e c_j numa palavra finita $w \in A^+$, que são permitidas em relação a $\overrightarrow{c_i}$ e $\overrightarrow{c_j}$ respectivamente, são disjuntas.* (7.12)

Esta propriedade (7.12), de ocorrências permitidas de determinados centros de palavras biinfinitas serem necessariamente disjuntas, é essencial para os nossos propósitos. De facto, na Secção 7.5 (e também na Secção 8.3 do Capítulo 8), será necessário transformar ocorrências de certos factores (os quais são centros de palavras biinfinitas) numa palavra e, portanto, precisamos que estas ocorrências sejam disjuntas. A definição de ocorrências permitidas numa palavra foi introduzida com este propósito. Vamos transformar apenas ocorrências permitidas destes centros.

7.5 κ-redutibilidade completa de LSl

Nesta secção, provamos o resultado principal deste capítulo.

Teorema 7.5.1 *A pseudovariedade* **LSl** *é completamente κ-redutível.*

A demonstração estende-se pelas subsecções 7.5.1 a 7.5.6. Como o problema da κ-palavra para **LSl** é decidível pela Proposição 7.3.2, a mansidão completa de **LSl** resulta imediatamente do Teorema 7.5.1.

Corolário 7.5.2 *A pseudovariedade* **LSl** *é completamente κ-mansa.*

Uma consequência da decidibilidade da mansidão completa de **LSl** é apresentada no próximo teorema, um resultado que segue de [60, Capítulo 3]. O leitor é remetido a este livro para detalhes e definições em falta. Para uma pseudovariedade R de morfismos relacionais e uma pseudovariedade $\mathbf{V}$ de semigrupos, denotemos por $\mathsf{Rq}(\mathbf{V})$ a seguinte pseudovariedade de semigrupos,

$$\mathsf{Rq}(\mathbf{V}) = \{S \in \mathbf{S} : \text{ existe } \theta \in \mathsf{R} \text{ e } T \in \mathbf{V} \text{ com } \theta : S \multimap\!\!\!\rightarrow T\}.$$

Teorema 7.5.3 *A pseudovariedade $\mathsf{Rq}(\mathbf{LSl})$ é decidível sempre que R é uma pseudovariedade de morfismos relacionais com uma base finita de pseudoidentidades da forma $(A, u = v, \mathcal{S})$ com $\mathcal{S}$ um sistema finito de κ-identidades.*

7.5.1 Considerações iniciais

Suponhamos que nos são dados um sistema finito $\mathcal{S}$ de κ-equações e uma solução δ de $\mathcal{S}$ módulo **LSl** com respeito a um triplo (φ, γ, ψ). Para provar a κ-redutibilidade completa de **LSl**, é necessário construir uma κ-solução δ' de $\mathcal{S}$ módulo **LSl** com respeito a (φ, γ, ψ). Como observamos de seguida, a liberdade para escolher a etiqueta δ' de algumas variáveis é muito restrita.

Obs. 1. Suponhamos que $x \in X$ é uma variável tal que $\delta(x) = u$ com $u \in A^+$. Pela definição de κ-redutibilidade completa, tem-se $\psi \circ \delta = \gamma = \psi \circ \delta'$. Assim, em particular, $\psi(\delta'(x)) = \psi(u)$. Uma vez que nos é dado um homomorfismo $\psi : \overline{\Omega}_A\mathbf{S} \to S$, com S um semigrupo finito fixo (mas arbitrário), é possível que a igualdade $\psi(\delta'(x)) = \psi(u)$ seja verificada apenas quando $\delta'(x) = u$. É este o caso, por exemplo, quando $u = a$ e $S = \{a, 0\}$ é o semigrupo monogénico gerado por a, definido pela relação $a^2 = 0$. Portanto, nesse caso não teríamos qualquer escolha; seríamos obrigados a definir $\delta'(x) = u$. Contudo, como queremos definir um algoritmo para construir δ' que funcione com qualquer sistema e solução dados, é assim "necessário" definir $\delta'(x) = u = \delta(x)$ em geral.

Obs. 2. Suponhamos agora que $x \in X$ é tal que $\mathbf{LSl} \models \delta(x) = u^\omega$ com $u \in A^+$. Como $\mathcal{S}$ é um sistema arbitrário de κ-termos, pode incluir, por exemplo, a equação $x = y^\omega$ com y uma variável tal que $\delta(y) = u$, porque nesse caso $\mathbf{LSl} \models \delta(x) = \delta(y)^\omega$. Dado que $\mathbf{LSl} \models \delta'(x) = \delta'(y)^\omega$, e "temos de ter" $\delta'(y) = u$ pela Obs. 1, é assim "necessário" escolher para $\delta'(x)$ uma κ-palavra tal que $\mathbf{LSl} \models \delta'(x) = u^\omega = \delta(x)$.

Mais geralmente, suponhamos que $\delta(x)$, quando projectada em $\overline{\Omega}_A\mathbf{LSl}$, é dada por uma κ-palavra infinita (ver Exemplo 7.5.17 para um caso em que $\delta(x)$ não é ela própria uma κ-palavra). Pela Proposição 7.3.2 e como $\mathbf{LSl} \models x^{\omega+i} = x^\omega$ para todo o inteiro i, isto é equivalente à existência de um κ-termo de rank 1 $w = v_0u_1^\omega v_1u_2^\omega \cdots u_n^\omega v_n$ em forma reduzida tal que $\mathbf{LSl} \models \delta(x) = w$. Portanto, por similaridade com a situação anterior, não é difícil deduzir que devemos ter $\mathbf{LSl} \models \delta'(x) = w = \delta(x)$.

Obs. 3. Finalmente suponhamos que $x \in X$ é tal que $\mathbf{K} \models \delta(x) = vu^\omega$ com $v \in A^*$ e $u \in A^+$. Então $\delta(x) = v\pi$ para alguma pseudopalavra π tal que $\mathbf{K} \models \pi = u^\omega$. Portanto, pela Proposição 4.1.2, é claro que $\mathbf{LSl} \models \pi = u\pi$, e podemos assumir que $x = yz$ e $z = tz$ são equações de $\mathcal{S}$ com $\delta(y) = v$, $\delta(z) = \pi$ e $\delta(t) = u$. Logo $\mathbf{LSl}$ tem de verificar $\delta'(x) = \delta'(y)\delta'(z)$ e $\delta'(z) = \delta'(t)\delta'(z) = u\delta'(z)$, o que implica que $\mathbf{K}$ verifique $\delta'(z) = u^\omega$ e também $\delta'(x) = \delta'(y)\delta'(z) = vu^\omega = \delta(x)$.

Dualmente, se $x \in X$ é tal que $\mathbf{D} \models \delta(x) = u^\omega v$ com $v \in A^*$ e $u \in A^+$, então devemos ter $\mathbf{D} \models \delta'(x) = u^\omega v = \delta(x)$.

As observações 1 e 2 acima sugerem que, para uma variável x etiquetada sob δ por uma κ-palavra quando projectada em $\overline{\Omega}_A\mathbf{LSl}$, temos de escolher para $\delta'(x)$ uma κ-palavra que verifique $\mathbf{LSl} \models \delta'(x) = \delta(x)$. Por outro lado, a observação 3 sugere que se x é uma variável tal que a projecção de $\delta(x)$ em

$\overline{\Omega}_A\mathbf{K}$ (resp. em $\overline{\Omega}_A\mathbf{D}$) é uma palavra ultimamente periódica $vu^{+\infty}$ (resp. $u^{-\infty}v$), então temos de escolher para $\delta'(x)$ uma κ-palavra cuja projecção em $\overline{\Omega}_A\mathbf{K}$ (resp. em $\overline{\Omega}_A\mathbf{D}$) também seja $vu^{+\infty}$ (resp. $u^{-\infty}v$). A κ-solução δ', definida posteriormente na Subsecção 7.5.5, vai respeitar estas restrições.

7.5.2 Simplificações no sistema de equações

Prosseguimos com a introdução de algumas simplificações no sistema de equações, as quais são o objectivo desta subsecção. Pelo próximo resultado, provado em [12, Proposição 3.1], podemos restringir o problema a considerar apenas sistemas sem parâmetros.

Proposição 7.5.4 *Seja* $\mathbf{V}$ *uma pseudovariedade arbitrária e seja* σ *uma qualquer assinatura implícita. Se* $\mathbf{V}$ *é* σ*-redutível para sistemas de equações de* σ*-termos sem parâmetros, então* $\mathbf{V}$ *é completamente* σ*-redutível.*

No restante do capítulo, vamos trabalhar apenas com a pseudovariedade **LSl** e todas as soluções que consideramos são módulo **LSl**. Assim, pela Proposição 7.5.4, é suficiente considerar um sistema finito $\mathcal{S}$ de κ-equações

$$u_i = v_i \quad (i = 1, \ldots, h), \tag{7.13}$$

com $u_i, v_i \in T_X^\kappa$. Consideremos também uma solução δ de $\mathcal{S}$ módulo **LSl** com respeito a um par (γ, ψ).

Antes de descrevermos novas simplificações no sistema e na solução ilustramo--las com um exemplo.

Exemplo 7.5.5 *Suponhamos que* $X = \{x, y, z, w, t\}$ *é o conjunto das variáveis e que* $\mathcal{S}$ *tem a única equação de* κ*-termos de rank* ≤ 2

$$(x^\omega y)^\omega z = (wt)^\omega z.$$

Uma vez que δ *é uma solução módulo* **LSl**, *tem-se que* **LSl** *verifica*

$$\delta\Big((x^\omega y)^\omega z\Big) = \delta\Big((wt)^\omega z\Big).$$

Como δ *é um* κ*-homomorfismo e portanto, em particular, comuta com* ω*-potências, deduzimos que* **LSl** *satisfaz*

$$\Big(\delta(x)^\omega \delta(y)\Big)^\omega \delta(z) = \Big(\delta(w)\delta(t)\Big)^\omega \delta(z).$$

Aplicando agora o Lema 7.3.1, obtemos

$$\mathbf{LSl} \models \delta(x)^\omega \delta(y)\delta(x)^\omega \delta(y)\delta(z) = \Big(\delta(w)\delta(t)\Big)^\omega \delta(z).$$

Então, δ é uma solução módulo **LSl** *com respeito a (γ, ψ) do sistema $\mathcal{S}_0$ com a única equação de κ-termos de rank ≤ 1*

$$x^\omega y x^\omega y z = (wt)^\omega z.$$

Suponhamos ainda que $\delta(w)$ e $\delta(t)$ são pseudopalavras finitas e que $\delta(x)$ é uma pseudopalavra infinita. Consideramos uma nova variável v e uma nova equação $v = wt$ e definimos funções δ_1 e γ_1 estendendo δ e γ a $X_1 = X \cup \{v\}$ tomando $\delta_1(v) = \delta(w)\delta(t)$ e $\gamma_1(v) = \psi \circ \delta_1(v)$. Portanto, de novo pelo Lema 7.3.1, **LSl** *verifica*

$$\delta_1(x)\delta_1(x)\delta_1(y)\delta_1(x)\delta_1(x)\delta_1(y)\delta_1(z) = \delta_1(v)^\omega \delta_1(z).$$

Então, δ_1 é uma solução módulo **LSl** *com respeito a (γ_1, ψ) do seguinte sistema $\mathcal{S}_1$*

$$\begin{cases} xxyxxyz = v^\omega z \\ v = wt. \end{cases}$$

Suponhamos que $\mathcal{S}_1$ admite uma κ-solução δ_1' módulo **LSl** *com respeito a (γ_1, ψ) tal que $\delta_1'(x)$ é infinita. [Vamos provar, na Subsecção 7.5.5, que existe uma tal κ-solução para tal tipo de equações.] Então $\delta' = \delta_1'|_X$ é uma κ-solução de $\mathcal{S}$ módulo* **LSl** *com respeito a (γ, ψ).*

Motivados por este exemplo, vamos considerar sistemas finitos de κ-equações

$$u_{i,1} \cdots u_{i,p_i} = u_{i,p_i+1} \cdots u_{i,q_i} \quad (i = 1, \ldots, h), \tag{7.14}$$

com soluções δ módulo **LSl** com respeito a um par (γ, ψ) onde, para cada $j \in \{1, \ldots, q_i\}$, $u_{i,j}$ é uma variável ou $u_{i,j} = x_{i,j}^\omega$ com $x_{i,j}$ uma variável tal que $\delta(x_{i,j}) \in A^+$.

O Exemplo 7.5.5 (nomeadamente a propriedade requerida pela κ-solução δ_1') também motiva a seguinte definição.

Definição 7.5.6 (κ-redutibilidade PT) *Dizemos que* **LSl** *é PT ("primeiro tipo") κ-redutível se, para cada sistema $\mathcal{S}$ e solução δ da forma* (7.14) *existe uma κ-solução δ' módulo* **LSl** *tal que, para cada $x \in X$, $\delta'(x)$ é infinita quando $\delta(x)$ é infinita.*

Mostramos agora que a κ-redutibilidade completa de **LSl** é uma consequência da sua κ-redutibilidade PT.

Proposição 7.5.7 *Se* **LSl** *é PT κ-redutível, então* **LSl** *é completamente κ--redutível.*

Demonstração. Pela Proposição 7.5.4, basta considerar um sistema finito $\mathcal{S}$ do tipo (7.13). Note-se que podemos considerar que as equações de $\mathcal{S}$ são ω--equações, ou seja, podemos considerar $u_i, v_i \in T_X^\omega$, pois **LSl** $\models x^{\omega+i} = x^\omega$ para todo o inteiro i. Seja δ uma solução de $\mathcal{S}$ módulo **LSl** com respeito a um par (γ, ψ), e apliquemos o processo ilustrado no Exemplo 7.5.5.

Escolhemos qualquer subtermo da forma u^ω, com u um κ-termo infinito, e substituímos u^ω por u^2. Repetimos o mesmo passo no novo sistema assim obtido, e iteramos este processo enquanto possível. Uma vez que o rank dos subtermos substituídos decresce, este processo pára necesariamente com um sistema $\mathcal{S}_0$ de equações de κ-termos de rank ≤ 1. Note-se que $\mathcal{S}_0$ é único, ou seja, $\mathcal{S}_0$ não depende da ordem das substituições. Além disso, δ é uma solução de $\mathcal{S}_0$ módulo **LSl** com respeito a (γ, ψ).

Consideremos agora cada subtermo, das equações de $\mathcal{S}_0$, da forma u^ω (com $u \in X^+$ claro). Se $\delta(u)$ é uma pseudopalavra infinita, então substituímos u^ω por u^2. Caso contrário $\delta(u)$ é uma palavra finita. Neste caso adicionamos uma nova variável v_u ao conjunto das variáveis, adicionamos uma nova equação $v_u = u$ ao sistema de equações, e estendemos δ e γ a novas funções δ_1 e γ_1 tomando $\delta_1(v_u) = \delta(u)$ e $\gamma_1(v_u) = \psi \circ \delta_1(v_u)$. Obtemos assim um sistema finito $\mathcal{S}_1$ da forma (7.14) tendo δ_1 como uma solução módulo **LSl** com respeito a (γ_1, ψ). Por hipótese existe uma κ-solução δ_1' de $\mathcal{S}_1$ módulo **LSl** com respeito a (γ_1, ψ) tal que $\delta_1'(x)$ é infinita quando $\delta_1(x)$ é infinita. Portanto $\delta' = \delta_1'|_X$ é uma κ-solução de $\mathcal{S}$ módulo **LSl** com respeito a (γ, ψ). ∎

Prosseguimos com a nossa próxima redução no problema. Consideremos um sistema de equações de palavras, ou seja, um sistema $\mathcal{S}$ de equações da forma

$$x_{i,1} \cdots x_{i,p_i} = x_{i,p_i+1} \cdots x_{i,q_i} \quad (i = 1, \ldots, h) \tag{7.15}$$

onde $x_{i,j}$ é uma variável para todo o $j \in \{1, \ldots, q_i\}$, e seja δ uma solução de $\mathcal{S}$ módulo **LSl** com respeito a um par (γ, ψ), etiquetando cada variável por uma pseudopalavra infinita.

Definição 7.5.8 (κ-redutibilidade ST) *Dizemos que* **LSl** *é ST ("segundo tipo") κ-redutível se, para todo o sistema $\mathcal{S}$ e solução δ da forma* (7.15) *e todo o inteiro $M \geq 1$, existe uma κ-solução $\delta' = \delta'(\mathcal{S}, \delta, M)$ módulo* **LSl** *com respeito a (γ, ψ) tal que para cada variável $x \in X$,*

(ST.1) $\delta'(x)$ *é infinita;*

(ST.2) *se* $\mathbf{LSl} \models \delta(x) = vu^\omega$, *onde* $u \neq 1$ *e* v *são palavras finitas, então* $\mathbf{LSl} \models \delta'(x) = \delta(x)$;

(ST.3) *se* $\delta(x) = u\pi$, *onde* $u \in A^*$ *com* $|u| \leq M$ *e* $\pi \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$, *então* $\delta'(x) = u\pi'$ *onde* $\pi' \in \Omega_A^\kappa\mathbf{S}$ *é tal que* $\psi(\pi) = \psi(\pi')$.

Além disso, se y *é uma outra variável,* $v \in A^*$ *com* $|v| \leq M$ *e* $\rho \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ *são tais que* $\delta(y) = v\rho$ *e* $\mathbf{LSl} \models \pi = \rho$, *então* $\delta'(y) = v\rho'$ *onde* $\rho' \in \Omega_A^\kappa\mathbf{S}$ *é tal que* $\psi(\rho) = \psi(\rho')$ *e* $\mathbf{LSl} \models \pi' = \rho'$. *Em particular, se* $\mathbf{LSl} \models \delta(x) = \delta(y)$, *então* $\mathbf{LSl} \models \delta'(x) = \delta'(y)$.

Como se percebe pela definição, para permitir a simplificação do sistema e da solução, é necessário requerer que propriedades mais complexas sejam preservadas. Por outro lado, apesar de **LSl** ser uma pseudovariedade autodual, as condições (ST.2)-(ST.3) supracitadas não são simétricas. Isto acontece porque (cf. a demonstração da Proposição 7.5.9 abaixo) para reduzir o problema a um sistema $\mathcal{S}$ e solução δ da forma (7.15), quando nos são dados um sistema geral e solução "absorvemos" as variáveis etiquetadas por pseudopalavras finitas nas variáveis à sua direita.

Proposição 7.5.9 *Se* **LSl** *é ST* κ*-redutível, então* **LSl** *é completamente* κ*-redutível.*

Demonstração. Pela Proposição 7.5.7, basta mostrar que a κ-redutibilidade *ST* implica a κ-redutibilidade *PT* de **LSl**. Assim, seja $\mathcal{S}$ um sistema finito e seja δ uma solução de $\mathcal{S}$ módulo **LSl** com respeito a um par (γ, ψ), do tipo (7.14). Ou seja, $\mathcal{S}$ é um sistema de equações

$$u_{i,1} \cdots u_{i,p_i} = u_{i,p_i+1} \cdots u_{i,q_i} \quad (i = 1, \ldots, h)$$

onde $u_{i,j}$ é uma variável ou $u_{i,j} = x_{i,j}^\omega$ com $x_{i,j}$ uma variável tal que $\delta(x_{i,j}) \in A^+$.

Reduzimos primeiro ao caso em que os últimos factores u_{i,p_i} e u_{i,q_i} de cada equação i são etiquetados sob δ por pseudopalavras infinitas. Ou seja, supomos que para tais sistemas e soluções existe uma κ-solução nas condições da Definição 7.5.6, e provamos que um sistema $\mathcal{S}$ e solução δ sem esta condição extra também admite uma κ-solução nas condições da Definição 7.5.6. Consideremos um alfabeto alargado $B = A \uplus \{b\}$, um conjunto de variáveis estendido $Y = X \uplus \{\#\}$ e um novo sistema $\mathcal{S}_1$ com equações

$$u_{i,1} \cdots u_{i,p_i} \# = u_{i,p_i+1} \cdots u_{i,q_i} \# \quad (i = 1, \ldots, h)$$

obtidas a partir das equações de $\mathcal{S}$ simplesmente pela multiplicação de ambos os membros da equação por $\#$. Como referido na Secção 3.3, $\overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ pode ser visto como um subsemigrupo de $\overline{\Omega}_B\mathbf{S}$. Assim, definimos δ_1 como sendo a extensão de δ a Y tal que $\delta_1(\#) = b^\omega$. Consideremos agora o semigrupo finito $S_1 = S^1 \times \mathcal{P}'(B)$, onde $\mathcal{P}'(B) = \overline{\Omega}_B\mathbf{Sl}$. Seja $\psi_1 : \overline{\Omega}_B\mathbf{S} \to S_1$ o único homomorfismo contínuo tal que $\psi_1(b) = (1, \{b\})$ e $\psi_1(a) = (\psi(a), \{a\})$ para cada $a \in A$, e seja $\gamma_1 : Y \to S_1$ definida por $\gamma_1 = \psi_1 \circ \delta_1$. Uma vez que δ é uma solução de $\mathcal{S}$ módulo **LSl** com respeito a (γ, ψ), é claro que δ_1 é uma solução de $\mathcal{S}_1$ módulo **LSl** com respeito a (γ_1, ψ_1). Por suposição, existe uma κ-solução δ_1' de $\mathcal{S}_1$ módulo **LSl** com respeito a (γ_1, ψ_1) tal que, para cada $y \in Y$, $\delta_1'(y)$ é infinita quando $\delta_1(y)$ é infinita. Portanto,

$$\forall i \in \{1, \ldots, h\} \quad \mathbf{LSl} \models \delta_1'(u_{i,1} \cdots u_{i,p_i}\#) = \delta_1'(u_{i,p_i+1} \cdots u_{i,q_i}\#), \tag{7.16}$$

$$\psi_1 \circ \delta_1' = \gamma_1 = \psi_1 \circ \delta_1. \tag{7.17}$$

Pela definição de ψ_1, segue de (7.17) que

$$\psi \circ \delta' = \psi \circ \delta = \gamma \tag{7.18}$$

$$c \circ \delta_1' = c \circ \delta_1, \tag{7.19}$$

onde $\delta' : X \to \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ é a restrição de δ_1' a X. Note-se que δ' está bem definida pois, por (7.19), $c(\delta_1'(x)) \subseteq A$ para todo o $x \in X$. Além disso, $c(\delta_1'(\#)) = c(\delta_1(\#)) = \{b\}$, donde, por (7.16) e pelo Corolário 4.1.3,

$$\forall i \in \{1, \ldots, h\} \quad \mathbf{LSl} \models \delta'(u_{i,1} \cdots u_{i,p_i}) = \delta'(u_{i,p_i+1} \cdots u_{i,q_i}).$$

Como $\psi \circ \delta' = \gamma$ por (7.18), deduzimos que δ' é uma κ-solução de $\mathcal{S}$ módulo **LSl** com respeito a (γ, ψ). Além disso, para cada $x \in X$, $\delta'(x)$ é infinita quando $\delta(x)$ é infinita, o que conclui a primeira redução.

Assim, assumimos que o sistema $\mathcal{S}$ e a solução δ acima referidos são tais que $\delta(u_{i,p_i})$ e $\delta(u_{i,q_i})$ são pseudopalavras infinitas, e mostramos como transformar estes dados num sistema finito $\mathcal{S}_1$ e numa solução δ_1 de $\mathcal{S}_1$ módulo **LSl** com respeito a um par (γ_1, ψ) da forma especial (7.15). O novo conjunto das variáveis, denotado por X_1, será uma extensão de X, e δ_1 e γ_1 serão extensões de δ e γ a X_1.

Suponhamos que algum $u_{i,j}$ é etiquetado sob δ por uma pseudopalavra infinita e que $\ell < j$ é minimal tal que $u_{i,\ell}, \ldots, u_{i,j-1}$ são variáveis etiquetadas sob δ por pseudopalavras finitas. Neste caso, considerando $y_{i,j}$ uma nova variável, substituímos o subtermo

$$u_{i,\ell} \cdots u_{i,j-1} u_{i,j} \tag{7.20}$$

por $y_{i,j}$ na i-ésima equação de $\mathcal{S}$, e definimos $\delta_1(y_{i,j}) = \delta(u_{i,\ell}) \cdots \delta(u_{i,j-1})\delta(u_{i,j})$ e

$$\gamma_1(y_{i,j}) = \begin{cases} \gamma(u_{i,\ell}) \cdots \gamma(u_{i,j-1})\gamma(u_{i,j}) \text{ se } u_{i,j} \text{ é uma variável} \\ \gamma(u_{i,\ell}) \cdots \gamma(u_{i,j-1})\gamma(x_{i,j})^\omega \text{ se } u_{i,j} = x_{i,j}^\omega. \end{cases}$$

Deste modo, todas as variáveis da forma $u_{i,m}$ etiquetadas sob δ por pseudopalavras finitas são substituídas. Suponhamos agora que algum subtermo da forma $u_{i,j} = x_{i,j}^\omega$ ainda permanece no novo sistema. Neste caso, $\delta(x_{i,j})$ é finita e substituímos $u_{i,j}$ por uma nova variável $z_{i,j}$ e definimos $\delta_1(z_{i,j}) = \delta(x_{i,j})^\omega$ e $\gamma_1(z_{i,j}) = \gamma(x_{i,j})^\omega$. Depois de todas estas substituições serem feitas, o processo de construção de $\mathcal{S}_1$ fica concluído. Além disso, δ_1 é claramente uma solução de $\mathcal{S}_1$ módulo **LSl** com respeito a (γ_1, ψ).

Fixemos um inteiro

$$M > \prod_{\substack{1 \leq i \leq h, 1 \leq m \leq q_i \\ \delta(u_{i,m}) \in A^+}} |\delta(u_{i,m})|. \tag{7.21}$$

Por hipótese **LSl** é ST κ-redutível. Portanto, existe uma κ-solução $\delta_1' = \delta_1'(\mathcal{S}_1, \delta_1, M)$ de $\mathcal{S}_1$ módulo **LSl** com respeito a (γ_1, ψ) satisfazendo as condições (ST.1) a (ST.3). Usamos δ_1' para construir uma κ-solução δ', do sistema original $\mathcal{S}$, módulo **LSl** com respeito a (γ, ψ) como segue. Seja $x \in X$.

- Se $\delta(x)$ é finita, então definimos $\delta'(x) = \delta(x)$.

- Se $\delta(x)$ é infinita e x não ocorre em qualquer equação do sistema original $\mathcal{S}$, então definimos $\delta'(x) = \delta_1'(x)$.

- Suponhamos que $\delta(x)$ é infinita e que x ocorre em (alguma equação de) $\mathcal{S}$. Note-se que x pode ter várias ocorrências em $\mathcal{S}$. Veremos que cada uma dessas ocorrências determina um candidato para $\delta'(x)$ e vamos provar que todos os candidatos são iguais quando projectados em $\overline{\Omega}_A$**LSl**, donde qualquer um dos candidatos pode ser escolhido para ser o valor de $\delta'(x)$.

  Seja $u_{i,j}$ uma ocorrência de x. Se o subtermo $u_{i,j}$ não foi substituído nas substituições que deram origem ao sistema $\mathcal{S}_1$, então tomamos $\pi_{i,j}' = \delta_1'(x)$ como um candidato para $\delta'(x)$. Caso contrário $u_{i,j}$ (o subtermo (7.20) para sermos mais precisos) foi substituído pela nova variável $y_{i,j}$. Neste caso $\delta_1(y_{i,j}) = u\pi_{i,j}$, onde $u = \delta(u_{i,\ell}) \cdots \delta(u_{i,j-1}) \in A^+$ e $\pi_{i,j} = \delta(u_{i,j})$. Por (7.21), $M > |u|$. Portanto, pela condição (ST.3), $\delta_1'(y_{i,j}) = u\pi_{i,j}'$ onde $\pi_{i,j}' \in \Omega_A^\kappa \mathbf{S}$ é tal que $\psi(\pi_{i,j}) = \psi(\pi_{i,j}')$, e tomamos $\pi_{i,j}'$ como um candidato para $\delta'(x)$.

  Suponhamos agora que π_{i_1,j_1}' e π_{i_2,j_2}' são dois candidatos para $\delta'(x)$. Segue imediatamente da definição dos candidatos e da segunda parte da condição (ST.3) que **LSl** $\models \pi'_{i_1,j_1} = \pi'_{i_2,j_2}$. Portanto, escolhemos para $\delta'(x)$ qualquer um dos seus candidatos.

Por construção δ' é uma κ-solução de $\mathcal{S}$ módulo **LSl** com respeito a (γ,ψ). De facto, a igualdade $\psi\circ\delta'=\gamma$ é uma simples consequência de $\psi\circ\delta=\gamma$. Além disso, pelo acima exposto, deve ser claro que para mostrar que

$$\forall i\in\{1,\dots,h\}\quad \mathbf{LSl}\models \delta'(u_{i,1}\cdots u_{i,p_i})=\delta'(u_{i,p_i+1}\cdots u_{i,q_i})$$

basta verificar que:

(a) **LSl** $\models \delta'_1(y_{i,j}) = \delta'(u_{i,\ell}\cdots u_{i,j})$ para toda a substituição da forma $u_{i,\ell}\cdots u_{i,j}\mapsto y_{i,j}$;

(b) **LSl** $\models \delta'_1(z_{i,j})=\delta'(u_{i,j})$ para toda a substituição da forma $u_{i,j}\mapsto z_{i,j}$.

Reparemos que para (a) temos dois casos a considerar (podemos ter $u_{i,j}$ uma variável ou $u_{i,j}$ um subtermo da forma $x^{\omega}_{i,j}$), enquanto para (b) o único caso a considerar é quando $u_{i,j}$ é um subtermo da forma $x^{\omega}_{i,j}$. Sendo o outro caso análogo, apenas provamos este resultado quando $u_{i,j}$ é um subtermo da forma $x^{\omega}_{i,j}$, donde $x_{i,j}\in X$ é uma variável tal que $\delta(x_{i,j})$ é uma pseudopalavra finita.

Para (a), temos $\delta_1(y_{i,j})=u\delta(x_{i,j})^{\omega}$, onde $u=\delta(u_{i,\ell})\cdots\delta(u_{i,j-1})\in A^+$. Logo, pela condição (ST.2), **LSl** satisfaz $\delta'_1(y_{i,j})=\delta_1(y_{i,j})$ e portanto também satisfaz $\delta'_1(y_{i,j})=\delta'(u_{i,\ell}\cdots u_{i,j})$ pois, pela definição de δ', $\delta'(x_{i,j})=\delta(x_{i,j})$ e $\delta'(u_{i,m})=\delta(u_{i,m})$ para todo o $m\in\{\ell,\dots,j-1\}$.

Para (b), temos $\delta_1(z_{i,j})=\delta(x_{i,j})^{\omega}$ e, usando de novo (ST.2), deduzimos sucessivamente que

$$\mathbf{LSl}\models \delta'_1(z_{i,j})=\delta_1(z_{i,j})=\delta(x_{i,j})^{\omega}=\delta'(x_{i,j})^{\omega}=\delta'(u_{i,j}).$$

Portanto δ' é uma κ-solução de $\mathcal{S}$ módulo **LSl** com respeito a (γ,ψ). Para concluir a demonstração da proposição note-se que para cada variável $x\in X$, $\delta'(x)$ é infinita quando $\delta(x)$ é infinita. ∎

Para realizar a nossa última redução no problema é necessário introduzir alguma notação. Apesar de irmos reduzir a um sistema mais complicado, isso vai simplificar a descrição da solução do problema. Assumimos que são dados um sistema e uma solução da forma (7.15). Note-se primeiro que também podemos assumir que, se **LSl** é ST κ-redutível, então cada variável $x\in X$ tem uma e apenas uma ocorrência em $\mathcal{S}$. De facto, se uma variável não ocorre em $\mathcal{S}$ podemos removê-la do conjunto X. Por outro lado, se uma variável x possui mais do que uma ocorrência em $\mathcal{S}$, então podemos substituir cada ocorrência extra de x por uma nova variável etiquetada por $\delta(x)$. Se y é uma dessas novas variáveis e δ'_1 é uma κ-solução do novo sistema, então $\mathbf{LSl} \models \delta'_1(x) = \delta'_1(y)$ pela condição (ST.3). Logo, para cada variável $x \in X$, podemos escolher $\delta'(x) = \delta'_1(x)$ para obter uma solução do sistema original $\mathcal{S}$.

No restante do capítulo vamos introduzir vários parâmetros associados aos elementos de X. Para um tal parâmetro f e uma variável $x \in X$, o valor de x por f será denotado por f_x. Quando estamos interessados em identificar a (única) posição onde x ocorre em $\mathcal{S}$, digamos quando $x = x_{i,j}$, denotaremos f_x também por $f_{i,j}$ (e adoptaremos livremente esta dupla notação).

Definição 7.5.10 (palavras $\mathbf{k}_x$, $\mathbf{d}_x$, $\mathbf{w}_{(i,j)}$ e conjuntos $K_\mathcal{S}$, $D_\mathcal{S}$, $W_\mathcal{S}$) *Para cada variável x, denotamos por $\mathbf{k}_x \in A^\mathbb{N}$ e $\mathbf{d}_x \in A^{-\mathbb{N}}$ as projecções de $\delta(x)$ em $\overline{\Omega}_A\mathbf{K}$ e $\overline{\Omega}_A\mathbf{D}$, respectivamente, e definimos*

$$K_\mathcal{S} = \{\mathbf{k}_x \mid x \in X\} \quad e \quad D_\mathcal{S} = \{\mathbf{d}_x \mid x \in X\}.$$

Para cada par de inteiros (i,j) com $i \in \{1,\ldots,h\}$ e $j \in \{2,\ldots,p_i,p_i+2,\ldots,q_i\}$, denotamos por $\mathbf{w}_{(i,j)}$ a palavra biinfinita

$$\mathbf{w}_{(i,j)} = \mathbf{d}_{i,j-1} \cdot \mathbf{k}_{i,j}$$

que é determinada pelo factor $x_{i,j-1}x_{i,j}$ da i-ésima equação de $\mathcal{S}$ (i.e., $\mathbf{w}_{(i,j)} = \overleftrightarrow{\delta(x_{i,j-1})\delta(x_{i,j})}$), e representamos por $W_\mathcal{S}$ o conjunto de todas estas palavras $\mathbf{w}_{(i,j)}$.

Para cada $i \in \{1,\ldots,h\}$ definimos ainda

$$\begin{aligned} K_i(0) &= \{\mathbf{k}_{i,j} \mid j = 1,\ldots,p_i\}, & K_i(1) &= \{\mathbf{k}_{i,j} \mid j = p_i+1,\ldots,q_i\},\\ D_i(0) &= \{\mathbf{d}_{i,j} \mid j = 1,\ldots,p_i\}, & D_i(1) &= \{\mathbf{d}_{i,j} \mid j = p_i+1,\ldots,q_i\},\\ W_i(0) &= \{\mathbf{w}_{(i,j)} \mid j = 2,\ldots,p_i\}, & W_i(1) &= \{\mathbf{w}_{(i,j)} \mid j = p_i+2,\ldots,q_i\}. \end{aligned}$$

Note-se que $W_\mathcal{S}$ pode ser vazio (quando cada equação é do tipo $x_{i,1} = x_{i,2}$). Este caso é mais simples e poderia ser tratado separadamente. No entanto, para evitar considerar dois casos, podemos assumir que este conjunto é não vazio uma vez que podíamos, por exemplo, proceder como na demonstração da Proposição 7.5.9 e multiplicar ambos os membros de pelo menos uma equação de $\mathcal{S}$ por uma nova variável $\#$.

Dizemos que duas palavras infinitas à direita $w_1, w_2 \in A^\mathbb{N}$ são *ultimamente iguais* se têm um sufixo $v \in A^\mathbb{N}$ comum, ou seja, se $w_1 = u_1v$ e $w_2 = u_2v$ para algumas palavras $u_1, u_2 \in A^*$. Como se pode facilmente verificar, a relação θ_1 definida, para cada $\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y \in K_{\mathcal{S}}$, por

$$\mathbf{k}_x \theta_1 \mathbf{k}_y \quad \text{se e só se} \quad \mathbf{k}_x \text{ e } \mathbf{k}_y \text{ são ultimamente iguais}$$

é uma equivalência sobre $K_{\mathcal{S}}$. O conceito de palavras infinitas à esquerda *ultimamente iguais* pode ser introduzido simetricamente. Uma equivalência θ_0 sobre $D_{\mathcal{S}}$ também pode ser definida por simetria.

Note-se que, como δ é uma solução de $\mathcal{S}$ módulo $\mathbf{K}$ e também módulo $\mathbf{D}$, temos as igualdades

$$\mathbf{k}_{i,1} = \mathbf{k}_{i,p_i+1} \text{ e } \mathbf{d}_{i,p_i} = \mathbf{d}_{i,q_i} \text{ para todo o } i \in \{1, \ldots, h\}. \tag{7.22}$$

Definição 7.5.11 (sistema sincronizado) *Dizemos que o par* $(\mathcal{S}, \delta)$ *está* sincronizado *se as seguintes condições são verificadas:*

(Si.1) *se* $\mathbf{d}_x$ *e* $\mathbf{d}_y$ *são duas palavras ultimamente iguais de* $D_{\mathcal{S}}$*, então* $\mathbf{d}_x = \mathbf{d}_y$*. Além disso, se* $\mathbf{d}_x$ *é ultimamente periódica, então* $\mathbf{d}_x = u^{-\infty}$ *onde* u *é uma palavra de Lyndon;*

(Si.2) *se* $\mathbf{w}_{(i,j)}, \mathbf{w}_{(\ell,m)} \in W_{\mathcal{S}}$ *são tais que* $\mathbf{w}_{(i,j)} \sim \mathbf{w}_{(\ell,m)}$*, então* $\mathbf{w}_{(i,j)} = \mathbf{w}_{(\ell,m)}$*;*

(Si.3) $W_i(0) = W_i(1)$ *para todo o* i*. Portanto, por* (7.22)*, também* $K_i(0) = K_i(1)$ *e* $D_i(0) = D_i(1)$*;*

(Si.4) $W_i(0)$ *contém o conjunto* $B_{\delta(x_{i,j})}$ *dos factores biinfinitos não periódicos de* $\delta(x_{i,j})$*, para toda a variável* $x_{i,j}$ *tal que* $\delta(x_{i,j})$ *é uma* κ*-palavra quando projectada em* $\overline{\Omega}_A\mathbf{LSl}$*;*

(Si.5) $W_{\mathcal{S}}$ *não contém palavras periódicas.*

Quando a solução está subentendida, dizemos simplesmente que o sistema $\mathcal{S}$ *está* sincronizado.

Definição 7.5.12 (κ-redutibilidade TT) *Dizemos que* **LSl** *é TT ("terceiro tipo")* κ*-redutível se, para todo o par sincronizado* $(\mathcal{S}, \delta)$ *e todo o inteiro* $M \geq 1$*, existe uma* κ*-solução* $\delta' = \delta'(\mathcal{S}, \delta, M)$ *módulo* **LSl** *com respeito a* (γ, ψ) *tal que para cada variável* $x \in X$*,*

(TT.1) $\delta'(x)$ *é infinita;*

(TT.2) *se* $\mathbf{K} \models \delta(x) = vu^{\omega}$*, onde* $u \neq 1$ *e* v *são palavras finitas, então* $\mathbf{K} \models \delta'(x) = \delta(x)$*;*

(TT.3) *se* $\mathbf{D} \models \delta(x) = u^\omega$, *onde* $u \neq 1$ *é uma palavra finita, então* $\mathbf{D} \models \delta'(x) = \delta(x)$;

(TT.4) *se* $\mathbf{LSl} \models \delta(x) = w$ *para alguma* κ*-palavra* w, *então* $\mathbf{LSl} \models \delta'(x) = \delta(x)$;

(TT.5) *se* $\delta(x) = u\pi$, *onde* $u \in A^*$ *com* $|u| \leq M$ *e* $\pi \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$, *então* $\delta'(x) = u\pi'$ *onde* $\pi' \in \Omega_A^\kappa\mathbf{S}$ *é tal que* $\psi(\pi) = \psi(\pi')$.

Além disso, se y *é uma outra variável,* $v \in A^*$ *com* $|v| \leq M$ *e* $\rho \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ *são tais que* $\delta(y) = v\rho$ *e* $\mathbf{LSl} \models \pi = \rho$, *então* $\delta'(y) = v\rho'$ *onde* $\rho' \in \Omega_A^\kappa\mathbf{S}$ *é tal que* $\psi(\rho) = \psi(\rho')$ *e* $\mathbf{LSl} \models \pi' = \rho'$. *Em particular, se* $\mathbf{LSl} \models \delta(x) = \delta(y)$, *então* $\mathbf{LSl} \models \delta'(x) = \delta'(y)$.

Vamos provar nas restantes subsecções que **LSl** é TT κ-redutível. Por agora mostramos que de facto a κ-redutibilidade TT de **LSl** implica a κ-redutibilidade completa de **LSl**.

Proposição 7.5.13 *Se* **LSl** *é TT* κ*-redutível, então* **LSl** *é completamente* κ*-redutível.*

Demonstração. Pela Proposição 7.5.9, basta mostrar que a κ-redutibilidade *TT* implica a κ-redutibilidade *ST* de **LSl**. Assim, seja $\mathcal{S}$ um sistema finito, seja δ uma solução de $\mathcal{S}$ módulo **LSl** com respeito a um par (γ, ψ) do tipo (7.15), e seja $M \geq 1$ um inteiro. Mostramos primeiro que podemos reduzir ao caso em que o sistema e a solução verificam as condições (Si.1)-(Si.4).

De facto, para (Si.1), seja Θ uma θ_0-classe arbitrária. Então existe uma palavra $s_\Theta \in A^{-\mathbb{N}}$ e existem palavras $u_x \in A^*$, para cada variável x com $\mathbf{d}_x \in \Theta$, tais que

$$\mathbf{d}_x = s_\Theta u_x.$$

Note-se que, se $\mathbf{d}_x$ é ultimamente periódica, então podemos escolher s_Θ da forma $u^{-\infty}$ onde $u \in A^+$ é o único período de $\mathbf{d}_x$ que é uma palavra de Lyndon. Logo existe uma pseudopalavra ρ_Θ (cuja projecção em $\overline{\Omega}_A\mathbf{D}$ é s_Θ) e, para cada variável x com $\mathbf{d}_x \in \Theta$, existem pseudopalavras π_x tais que $\delta(x) = \pi_x\rho_\Theta u_x$. Procedendo novamente como na demonstração da Proposição 7.5.9 se necessário, podemos assumir que para cada tal variável x existe uma variável x' tal que xx' ocorre em $\mathcal{S}$. Substituímos as variáveis x e x' pelas variáveis x_1 e x'_1, respectivamente, e definimos $\delta_1(x_1) = \pi_x\rho_\Theta$ e $\delta_1(x'_1) = u_x\delta(x')$. Isto define uma solução δ_1 de um novo sistema $\mathcal{S}_1$ satisfazendo a condição (Si.1). Seja $M_1 > M + |u_x|$. Se

$\delta_1' = \delta_1'(\mathcal{S}_1, \delta_1, M_1)$ é uma κ-solução deste novo sistema e verifica as condições (ST.1)-(ST.3), então por (ST.3) $\delta_1'(x_1')$ é da forma

$$\delta_1'(x_1') = u_x\pi_{x'}'$$

para alguma pseudopalavra $\pi_{x'}'$, donde podemos obter uma κ-solução $\delta' = \delta'(\mathcal{S}, \delta, M)$ de $\mathcal{S}$ satisfazendo as condições (ST.1)-(ST.3) tomando $\delta'(x) = \delta_1'(x_1)u_x$ e $\delta'(x') = \pi_{x'}'$. Portanto podemos assumir que $\mathcal{S}$ verifica a condição (Si.1). Note-se que o dual da condição (Si.1) para palavras ultimamente iguais de $K_{\mathcal{S}}$ não pode ser assumido, pois não pode ser garantido em simultâneo com (Si.1).

A condição (Si.2) é uma consequência de (Si.1) no caso em que $\mathbf{w}_{(i,j)}, \mathbf{w}_{(\ell,m)} \in W_{\mathcal{S}}$ são palavras tais que $\mathbf{w}_{(i,j)} \sim \mathbf{w}_{(\ell,m)}$ e $\mathbf{w}_{(i,j)}$ não é ultimamente periódica à esquerda (nem $\mathbf{w}_{(\ell,m)}$). Se $\mathbf{w}_{(i,j)} = \mathbf{d}_{i,j-1} \cdot \mathbf{k}_{i,j}$ é ultimamente periódica à esquerda, então $\mathbf{w}_{(\ell,m)} = \mathbf{d}_{\ell,m-1} \cdot \mathbf{k}_{\ell,m}$ também é ultimamente periódica à esquerda e, por (Si.1),

$$\mathbf{d}_{i,j-1} = \mathbf{d}_{\ell,m-1} = u^{-\infty}$$

onde u é uma palavra de Lyndon. Uma vez que $\mathbf{w}_{(i,j)} \sim \mathbf{w}_{(\ell,m)}$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\mathbf{k}_{\ell,m} = u^p\mathbf{k}_{i,j}$ para algum inteiro $p \geq 0$. Assim, como no caso da condição (Si.1), podemos transferir o sufixo u^p de $\delta(x_{i,j-1})$ para $\delta(x_{i,j})$. Isto não altera o valor de $\mathbf{d}_{i,j-1}$ e torna $\mathbf{k}_{\ell,m} = \mathbf{k}_{i,j}$, donde $\mathbf{w}_{(i,j)} = \mathbf{w}_{(\ell,m)}$ no novo sistema. Podemos portanto assumir que (Si.1) e (Si.2) são verificadas por $\mathcal{S}$.

Note-se agora que, pelo Lema 4.1.4, podemos assumir que uma palavra $\mathbf{w}_{(i,j)}$ pertence a $W_i(0)$ se e só se existe uma palavra $\mathbf{w}_{(i,m)}$ em $W_i(1)$ tal que $\mathbf{w}_{(i,j)} \sim \mathbf{w}_{(i,m)}$. Assim, a igualdade $W_i(0) = W_i(1)$ é uma consequência da condição (Si.2), o que mostra que a condição (Si.3) também pode ser assumida.

Seja $x = x_{i,j}$ uma variável tal que $\delta(x)$ é uma κ-palavra quando projectada em $\overline{\Omega}_A\mathbf{LSl}$. O conjunto $B_{\delta(x)}$ dos factores biinfinitos não periódicos de $\delta(x)$ é finito. Portanto, como cada elemento de $B_{\delta(x)}$ é um factor de $\delta(x_{i,1} \cdots x_{i,p_i})$, podemos assumir, novamente pelo Lema 4.1.4, que $B_{\delta(x)} \subseteq W_i(0)$. Logo podemos assumir que $\mathcal{S}$ verifica as condições (Si.1)-(Si.4), o que conclui a redução.

Suponhamos agora que $W_{\mathcal{S}}$ contém uma palavra periódica $\mathbf{w}_{(i,j)} = u^{\infty}$. Então $\mathbf{d}_{i,j-1} = u^{-\infty}$ e $\mathbf{k}_{i,j} = u^{+\infty}$. Consideramos uma nova letra b_u e modificamos o sistema de equações introduzindo uma nova variável $y_{\ell,m}$, etiquetada por b_u^{ω}, entre todos os pares de variáveis $x_{\ell,m-1}$ e $x_{\ell,m}$ (e assim, em particular, entre $x_{i,j-1}$ e $x_{i,j}$) tais que $\mathbf{w}_{(\ell,m)} = u^{\infty}$. Iterando este procedimento, e visto que por (Si.3) $W_i(0) = W_i(1)$ para todo o i, obtemos um novo sistema $\mathcal{S}_1$ e uma nova solução δ_1 módulo **LSl** satisfazendo as condições (Si.1)-(Si.5). Por hipótese **LSl** é *TT* κ-redutível. Portanto, existe uma κ-solução $\delta_1' = \delta_1'(\mathcal{S}_1, \delta_1, M)$ deste novo sistema que verifica as condições (TT.1)-(TT.5). Então por (TT.2) e (TT.3) $\mathbf{D} \models \delta_1'(x_{\ell,m-1}) = \delta_1(x_{\ell,m-1}) = u^\omega$ e $\mathbf{K} \models \delta_1'(x_{\ell,m}) = \delta_1(x_{\ell,m}) = u^\omega$, e por (TT.4) $\mathbf{LSl} \models \delta_1'(y_{\ell,m}) = \delta_1(y_{\ell,m}) = b_u^\omega$. Portanto, a restrição de δ_1' a X define claramente uma κ-solução módulo **LSl** do sistema original $\mathcal{S}$ satisfazendo as condições (ST.1)-(ST.3), o que conclui a demonstração da proposição. ∎

O objectivo do resto do capítulo é provar a κ-redutibilidade TT de **LSl**. Assumimos, portanto, que $\mathcal{S}$ é um sistema finito e fixo de equações de palavras da forma

$$x_{i,1} \cdots x_{i,p_i} = x_{i,p_i+1} \cdots x_{i,q_i} \quad (i = 1, \ldots, h) \tag{7.23}$$

onde cada $x_{i,j}$ é uma variável, e δ é uma solução de $\mathcal{S}$ módulo **LSl** com respeito a um par (γ, ψ), etiquetando cada variável por uma pseudopalavra infinita. Assumimos ainda que este sistema e solução estão sincronizados e que cada variável ocorre exactamente uma vez em $\mathcal{S}$. Supomos também que um inteiro positivo M está fixo (cf. Definição 7.5.12). O objectivo é, portanto, construir uma κ-solução $\delta' = \delta'(\mathcal{S}, \delta, M)$ de $\mathcal{S}$ módulo **LSl** com respeito a (γ, ψ) satisfazendo as condições (TT.1) a (TT.5).

7.5.3 Regra de redução

O algoritmo para a construção da κ-solução δ' será próximo, em algumas partes, do utilizado por J. Costa e L. Teixeira em [35] para provar a κ-redutibilidade de **LSl**.

Começamos por dar uma descrição geral do algoritmo. Seja n um inteiro suficientemente grande (especificado mais à frente). Para cada variável $x \in X$ fixamos uma palavra $w_x \in A^+$, dada pelo Lema 4.1.5, tal que $w_x \equiv_n \delta(x)$ e $\psi(w_x) = \psi(\delta(x))$. Quando estamos interessados em identificar a (única) posição onde x ocorre em $\mathcal{S}$, digamos quando $x = x_{i,j}$, denotaremos $w_{x_{i,j}}$ também por $w_{i,j}$. Cada uma destas palavras w_x será transformada, de acordo com um processo descrito na Subseção 7.5.5, num κ-termo de rank 1 $\widehat{w_x}$ tal que $\epsilon(\widehat{w_x})$ será seleccionada para ser $\delta'(x)$. Este processo de transformação consiste de uma única regra de redução, a qual substitui certos factores u de w_x por certos κ-termos de rank 1 $\overline{u}$. Assim, $\widehat{w_x}$ será um κ-termo de rank 1 da forma $\widehat{w_x} = u_0'\overline{u_1}u_1' \cdots \overline{u_m}u_m'$ com $w_x = u_0'u_1u_1' \cdots u_mu_m'$. Prosseguimos com a descrição da regra de redução.

Seja $\bar{A}$ o alfabeto

$$\bar{A} = A \uplus \{\overline{u} \mid u \in A^+ \text{ e } \overline{u} \text{ está definido por (7.10) ou por (7.11)}\}.$$

Seja $w \in \bar{A}^+ \setminus A^+$. Note-se que se $w \in \bar{A}^+ \setminus A^+$ então w é um κ-termo de rank 1 de T_A^κ. Dizemos que um factor w' de w é *essencial* se w' é da forma $\overline{u_1} z \overline{u_2}$, com $\overline{u_1}, \overline{u_2} \in \bar{A} \setminus A$ e $z \in A^*$, e w' não é da forma $\overline{u} u^\ell \overline{u}$, com $\overline{u} = v^{\omega + m_S}$ dado por (7.11) (i.e., w' não é igual a $\overline{u}$ sobre **LSl**). O único prefixo de w da forma $z\overline{u}$, onde $\overline{u} \in \bar{A} \setminus A$ e $z \in A^*$, é denominado o *prefixo essencial* de w. A definição do *sufixo essencial* de w é dual.

Definição 7.5.14 (regra de redução) *A regra de redução (aplicada a termos no alfabeto $\bar{A}$) é a seguinte:*

(R) $t_1 u\, t_2 \to t_1 \overline{u}\, t_2$, *onde* $t_1, t_2 \in \bar{A}^*, u \in A^+$ *e* $\overline{u}$ *está definido.*

Note-se que esta regra define um sistema Nœteriano, pois reduz o comprimento de termos no alfabeto $\bar{A}$. Além disso, $\psi(t_1 u\, t_2) = \psi(t_1 \overline{u}\, t_2)$. Como, pelo Lema 4.1.5, S satisfaz $\delta(x) = w_x$, esta igualdade assegurará $\psi \circ \delta' = \gamma$. Portanto, para obtermos uma κ-solução δ' de $\mathcal{S}$ módulo **LSl**, basta-nos garantir que a pseudoidentidade $\delta'(x_{i,1} \cdots x_{i,p_i}) = \delta'(x_{i,p_i+1} \cdots x_{i,q_i})$, ou seja, a pseudoidentidade

$$\widehat{w_{i,1}} \cdots \widehat{w_{i,p_i}} = \widehat{w_{i,p_i+1}} \cdots \widehat{w_{i,q_i}}, \tag{7.24}$$

é verificada por **LSl** para todo o $i \in \{1, \ldots, h\}$. Note-se que cada $\widehat{w_{i,j}}$ pode ser encarado como uma palavra sobre $\bar{A}$. Para provar que **LI** satisfaz (7.24) basta assegurar que os prefixos essenciais de $\widehat{w_{i,1}}$ e $\widehat{w_{i,p_i+1}}$ são os mesmos, e que os sufixos essenciais de $\widehat{w_{i,p_i}}$ e $\widehat{w_{i,q_i}}$ também coincidem. Portanto, para garantir que **LSl** verifica (7.24) é suficiente, pela Proposição 7.3.2, assegurar que as palavras $\widehat{w_{i,1}} \cdots \widehat{w_{i,p_i}}$ e $\widehat{w_{i,p_i+1}} \cdots \widehat{w_{i,q_i}}$ têm os mesmos factores essenciais.

7.5.4 Centros de $\mathcal{S}$

Como mencionado na subsecção anterior, a κ-solução δ' será definida, para cada variável x, como $\delta'(x) = \epsilon(\widehat{w_x})$. Além disso, pela definição da regra de redução, $\widehat{w_x}$ será um κ-termo de rank 1 da forma $\widehat{w_x} = u_0' \overline{u_1} u_1' \cdots \overline{u_m} u_m'$ onde $w_x = u_0' u_1 u_1' \cdots u_m u_m'$.

O objectivo principal desta subsecção é determinar o prefixo $l_x = u_0' u_1$ e o sufixo $r_x = u_m u_m'$ da palavra w_x, ou seja, é identificar a primeira e a última ocorrências de factores de w_x sobre os quais a regra (R) vai ser aplicada. Estas utilizações da regra vão determinar o prefixo essencial e o sufixo essencial de $\widehat{w_x}$.

Note-se que w_x e $\delta(x)$ têm o mesmo prefixo e o mesmo sufixo de comprimento n. Assim sendo, vamos escolher um n suficientemente grande de modo a que as palavras l_x e r_x também sejam um prefixo e um sufixo de $\delta(x)$ (o que é equivalente a dizer que elas são um prefixo e um sufixo das projecções $\mathbf{k}_x \in A^{\mathbb{N}}$ e $\mathbf{d}_x \in A^{-\mathbb{N}}$ de $\delta(x)$ em $\overline{\Omega}_A\mathbf{K}$ e em $\overline{\Omega}_A\mathbf{D}$, respectivamente). Além disso, como pela condição (TT.5) queremos preservar prefixos de comprimento M, vamos impor $|u_0'| \geq M$.

Note-se que, se a variável acima referida x é tal que $x = x_{i,j}$ com $j \in \{2, \ldots, p_i, p_i+2, \ldots, q_i\}$ e $\widehat{w_{i,j-1}} = v_0'\overline{v_1}v_1' \cdots \overline{v_\ell}v_\ell'$, então

$$\overline{v_\ell}v_\ell'u_0'\overline{u_1}$$

(que é o produto entre o sufixo essencial de $\widehat{w_{i,j-1}}$ e o prefixo essencial de $\widehat{w_{i,j}}$) é um factor essencial de $\widehat{w_{i,j-1}}\widehat{w_{i,j}}$ e portanto, como mencionado no final da subsecção anterior, queremos fazer com que $\overline{v_\ell}v_\ell'u_0'\overline{u_1}$ ocorra, na igualdade (7.24), no lado oposto ao da variável x. A palavra finita $v_\ell v_\ell' u_0' u_1$, que é $r_{i,j-1}l_{i,j}$, será denominada um centro do sistema.

Seja Θ uma θ_1-classe. Então existe uma palavra $p_\Theta \in A^{\mathbb{N}}$ e existem palavras $p_x \in A^*$, para cada variável x com $\mathbf{k}_x \in \Theta$, tais que

$$\mathbf{k}_x = p_x p_\Theta. \tag{7.25}$$

Fixamos uma factorização como em (7.25) satisfazendo determinadas condições. Primeiro, assumimos que o comprimento de cada palavra p_x é pelo menos M. Em seguida, se y é uma variável tal que $\mathbf{k}_x = \mathbf{k}_y$, então definimos $p_x = p_y$. Além disso, se $\mathbf{k}_x$ é ultimamente periódica, então assumimos que $p_\Theta = u^{+\infty}$ onde $u \in A^+$ é o único período de $\mathbf{k}_x$ que é uma palavra de Lyndon. Outras condições que (7.25) tem de satisfazer serão impostas abaixo.

Por outro lado, e uma vez que a condição (Si.1) é válida, para cada θ_0-classe Θ e cada variável x tal que $\mathbf{d}_x \in \Theta$, existe uma factorização

$$\mathbf{d}_x = s_\Theta, \tag{7.26}$$

com $s_\Theta \in A^{-\mathbb{N}}$ tal que, se $\mathbf{d}_x$ é ultimamente periódica, então $s_\Theta = v^{-\infty}$ onde $v \in A^+$ é o único período de $\mathbf{d}_x$ que é uma palavra de Lyndon.

Definição 7.5.15 (palavras l_x, $\widehat{l_x}$, r_x, $\widehat{r_x}$, $c_{(i,j)}$, $\widehat{c_{(i,j)}}$ e conjunto $C_{\mathcal{S}}$) *Seja x uma variável. Fixamos um prefixo l_x de $\mathbf{k}_x$, e um κ-termo de rank 1 $\widehat{l_x}$, como segue*

$$l_x = p_x u_\Theta \quad e \quad \widehat{l_x} = p_x\overline{u_\Theta} \tag{7.27}$$

onde:

- *Θ é a θ_1-classe de x;*
- *se p_Θ não é ultimamente periódica, então u_Θ é o prefixo de p_Θ de comprimento k e $\overline{u_\Theta}$ é dado por* (7.10)*;*
- *se $p_\Theta = u^{+\infty}$ é ultimamente periódica, então $u_\Theta = u^{ms}$ e $\overline{u_\Theta} = u_\Theta^{\omega+1} = u^{\omega+ms}$ é dado por* (7.11)*. Neste caso, dizemos que l_x é* ultimamente periódica *e a palavra u é denominada o* período *de l_x.*

Note-se que, em particular, as palavras l_x podem ser escolhidas de modo que

$$\mathbf{k}_x = \mathbf{k}_y \iff l_x = l_y \text{ e } \widehat{l_x} = \widehat{l_y}. \tag{7.28}$$

Também fixamos um sufixo r_x de $\mathbf{d}_x$, e um κ-termo de rank 1 $\widehat{r_x}$, como segue

$$r_x = v_\Theta \quad \text{e} \quad \widehat{r_x} = \overline{v'_\Theta} v''_\Theta \tag{7.29}$$

onde:

- *Θ é a θ_0-classe de x;*
- *se s_Θ não é ultimamente periódica, então $v_\Theta = v'_\Theta v''_\Theta$ é um sufixo de s_Θ, onde $|v'_\Theta| = k$, e $\overline{v'_\Theta}$ é determinado por* (7.10)*;*
- *se $s_\Theta = v^{-\infty}$ é ultimamente periódica, então $v_\Theta = v^{ms}$ e $\overline{v_\Theta} = v_\Theta^{\omega+1} = v^{\omega+ms}$ é determinado por* (7.11)*. Neste caso, dizemos que r_x é* (ultimamente) periódica *e a palavra v é denominada o* período *de r_x.*

Note-se que, em particular, as palavras r_x podem ser escolhidas de modo que

$$\mathbf{d}_x = \mathbf{d}_y \iff r_x = r_y \text{ e } \widehat{r_x} = \widehat{r_y}. \tag{7.30}$$

Finalmente, para um par de inteiros (i, j) com $i \in \{1, \ldots, h\}$ e $j \in \{2, \ldots, p_i, p_i + 2, \ldots, q_i\}$, definimos

$$c_{(i,j)} = r_{i,j-1} l_{i,j} \quad \text{e} \quad \widehat{c_{(i,j)}} = \widehat{r_{i,j-1}} \widehat{l_{i,j}} \tag{7.31}$$

e denotamos por $C_\mathcal{S}$ o conjunto de todas estas palavras $c_{(i,j)}$.

Note-se que a palavra $c_{(i,j)}$ é um centro de $\mathbf{w}_{(i,j)}$. Para além disso,

$$\mathbf{w}_{(i,j)} = \mathbf{w}_{(\ell,m)} \iff c_{(i,j)} = c_{(\ell,m)} \iff \widehat{c_{(i,j)}} = \widehat{c_{(\ell,m)}}. \tag{7.32}$$

O conjunto $C_\mathcal{S}$ será referido como sendo o conjunto dos *centros* de $\mathcal{S}$. Um centro $c_{(i,j)}$ será chamado *ultimamente periódico* quando a palavra $\mathbf{w}_{(i,j)}$ é ultimamente periódica (ou equivalentemente $r_{i,j-1}$ e $l_{i,j}$ são ultimamente periódicas). Em tal caso $c_{(i,j)}$ é da forma $v^{ms}p_{i,j}u^{ms}$. Note-se que, por (Si.5), nenhuma das palavras $\mathbf{w}_{(i,j)}$ é uma palavra periódica. Por esta razão, diremos que os centros ultimamente periódicos $c_{(i,j)} = v^{ms}p_{i,j}u^{ms}$ de $C_{\mathcal{S}}$ são *não periódicos*, significando que $v \neq u$ ou, $v = u$ e $p_{i,j}$ não é uma potência de v.

As palavras $c_{(i,j)}$ e r_x também têm de satisfazer as três condições seguintes:

(Ce.1) se $c_{(\ell,m)}$ e $\mathbf{w}_{(i,j)}$ são ultimamente periódicas e $\mathbf{w}_{(\ell,m)} \neq \mathbf{w}_{(i,j)}$, então $c_{(\ell,m)}$ não é um factor de $\mathbf{w}_{(i,j)}$;

(Ce.2) para todo o $\mathbf{w}_{(i,j)} \in W_{\mathcal{S}}$ e toda a variável x, se $\mathbf{w}_{(i,j)}$ não é um factor biinfinito de $\delta(x)$, então $c_{(i,j)}$ não é um factor de $\delta(x)$;

(Ce.3) $|r_x| \geq Q$ para toda a variável x, onde Q é um inteiro positivo nas condições do Lema 7.4.6 para $B = W_{\mathcal{S}}$.

Uma vez que a palavra $c_{(i,j)}$ é um centro do elemento $\mathbf{w}_{(i,j)}$ de $B = W_{\mathcal{S}}$, e como $|r_{i,j}| \geq Q$ pela última condição acima, o Lema 7.4.6 garante a existência de uma extensão à direita $\overrightarrow{c_{(i,j)}}$ de $c_{(i,j)}$ tal que, para todos os $\mathbf{w}_{(i,j)}, \mathbf{w}_{(\ell,m)} \in W_{\mathcal{S}}$, e para toda a palavra $w \in A^+$,

se duas ocorrências distintas de $c_{(i,j)}$ e $c_{(\ell,m)}$ são permitidas em w em relação a $\overrightarrow{c_{(i,j)}}$ e $\overrightarrow{c_{(\ell,m)}}$ respectivamente, então essas ocorrências de $c_{(i,j)}$ e $c_{(\ell,m)}$ são disjuntas. (7.33)

A extensão à direita $\overrightarrow{c_{(i,j)}}$ de $c_{(i,j)}$ será designada por *centro estendido* de $\mathbf{w}_{(i,j)}$. Finalmente, fixamos o inteiro n, mencionado no início da Subsecção 7.5.3.

Definição 7.5.16 (constantes L e n e palavras w_x) *Seja L um inteiro maior do que os comprimentos de todas as palavras l_x, r_x, $c_{(i,j)}$ e $\overrightarrow{c_{(i,j)}}$. Então fixamos um inteiro $n > 3L + k''$ e, para cada variável x, fixamos uma palavra $w_x \in A^+$ tal que $w_x \equiv_n \delta(x)$ e $\psi(w_x) = \psi(\delta(x))$.*

7.5.5 Transformações nas palavras w_x

Nesta subsecção descrevemos o algoritmo que permite transformar cada palavra w_x num κ-termo de rank 1 $\widehat{w_x}$, sendo depois $\delta'(x)$ definido como $\epsilon(\widehat{w_x})$. Recordemos que l_x é um prefixo e r_x é um sufixo de w_x, donde podemos escrever

$$w_x = l_x w'_x r_x = p_x u_\Theta w'_x v_\Theta \tag{7.34}$$

para algum $w'_x \in A^+$.

Uma variável y tal que $\delta(y)$ é uma κ-palavra quando projectada em $\overline{\Omega}_A$**LSl** será denominada, a partir de agora, uma κ-variável. Apesar do nosso procedimento para obter $\widehat{w_x}$ ser genérico, preferimos apresentar primeiro o caso sugestivo em que x é uma κ-variável. Começamos por ilustrar este caso com um exemplo.

Exemplo 7.5.17 *Suponhamos que x é uma variável tal que*

$$\mathbf{LSl} \models \delta(x) = d^\omega a d^\omega b d^\omega \tag{7.35}$$

com $a, b, d \in A$, donde $B_{\delta(x)} = \{d^{-\infty}ad^{+\infty}, d^{-\infty}bd^{+\infty}\} \subseteq W_{\mathcal{S}}$ por (Si.4). *Logo, pela Definição 7.5.15, $d^{ms}d^\ell a d^{ms}, d^{ms}d^\ell b d^{ms} \in C_{\mathcal{S}}$ para algum inteiro ℓ.*

Note-se que (7.35) *não significa que $\delta(x)$ é uma κ-palavra. Isto é ilustrado pelo seguinte exemplo (que emergiu numa colaboração de J. Costa com J. Almeida e M. Zeitoun): $\delta(x)$ é um ponto de acumulação em $\overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ da sequência $(\pi_i)_i$ definida por $\pi_i = d^\omega a_1 d^\omega a_2 d^\omega \cdots a_i d^\omega$, onde $a_1a_2a_3 \cdots = abaababaabaababaababa \cdots \in \{a,b\}^{\mathbb{N}}$ é a palavra de Fibonacci.*

Pela definição, w_x verifica $\delta(x) \equiv_n w_x$. Logo, existem inteiros positivos $p, i_1, \ldots, i_p$ tais que $w_x = d^{i_1}b_1d^{i_2}\cdots b_pd^{i_p}$ com $\{b_1, \ldots, b_p\} = \{a, b\}$. Pela escolha de n segue-se que $l_x = r_x = d^{ms}$ e $w_x = l_x d^{i'_1} c_1 d^{i'_2} \cdots c_p d^{i'_p} r_x$ com $c_i = d^{ms}d^\ell b_i d^{ms}$. Definimos então

$$\begin{aligned}\widehat{w_x} &= \widehat{l_x} d^{i'_1} \widehat{c_1} d^{i'_2} \cdots \widehat{c_p} d^{i'_p} \widehat{r_x} \\ &= d^{\omega+ms} d^{i'_1} d^{\omega+ms} d^\ell b_1 d^{\omega+ms} d^{i'_2} \cdots d^{\omega+ms} d^\ell b_p d^{\omega+ms} d^{i'_p} d^{\omega+ms},\end{aligned}$$

que é claramente igual a $\delta(x)$ sobre **LSl**. *Assim $\delta'(x) = \epsilon(\widehat{w_x})$ verifica* (TT.4).

Primeiro Caso: x é uma κ-variável. Note-se que isto é equivalente a dizer que **LSl** $\models \delta(x) = \epsilon(t)$ para algum κ-termo $t = u'_0 u_1^\omega u'_1 u_2^\omega \cdots u_p^\omega u'_p$ em forma reduzida. Logo, cada u_i é uma palavra de Lyndon e $B_{\delta(x)} = \{\mathbf{w}_i \mid i = 1, \ldots, p-1\}$, onde $\mathbf{w}_i = u_i^{-\infty} u'_i u_{i+1}^{+\infty}$. Portanto, pela Definição 7.5.15 e como o sistema $\mathcal{S}$ está sincronizado, podemos assumir que u'_p é a palavra vazia e que, para cada $i \in \{1, \ldots, p-1\}$, existe algum centro $c_i \in C_{\mathcal{S}}$ da forma $c_i = u_i^{ms} u_i^{\ell_i} u'_i u_{i+1}^{ms}$ para algum inteiro ℓ_i. Além disso, por (7.32), $c_i = c_j$ se e só se $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_j$.

Lema 7.5.18 *Toda a ocorrência de um centro c_i em w_x é uma ocorrência permitida disjunta de l_x e de r_x.*

Demonstração. Fixemos uma ocorrência $c_i = w_x[m, m']$ de um centro $c_i = u_i^{ms} u_i^{\ell_i} u'_i u_{i+1}^{ms}$ em w_x. O facto de que $\delta(x) \equiv_n w_x$ e **LSl** $\models \delta(x) = \epsilon(t)$ implica que

w_x e $u_0'u_1^{+\infty}$ têm o mesmo prefixo de comprimento n. Agora, podemos assumir que m_S é maior do que $|u_0'|$, pois m_S pode ser escolhido tão grande quanto se queira. Por outro lado c_i é não periódico, por (Si.5), e $n > 3\max\{|l_x|, |c_i|\}$. Portanto, a ocorrência de c_i é necessariamente disjunta de l_x. Simetricamente, toda a ocorrência de c_i é disjunta de r_x. Para além disso como $n > 3|\overrightarrow{c_i}|$, para o centro estendido $\overrightarrow{c_i}$ de c_i, e $|\overrightarrow{c_i}| > |c_i|$, c_i não ocorre no sufixo de w_x de comprimento $2|\overrightarrow{c_i}|$, donde a ocorrência fixa de c_i admite uma extensão à direita $c_i' = w_x[m, m'']$ tal que $|c_i'| = |\overrightarrow{c_i}|$. Note-se que

$$c_i' = c_i v = u_i^{m_S} u_i^{\ell_i} u_i' u_{i+1}^{m_S} v$$

para alguma palavra $v \in A^+$, e que c_i' é um factor de $\epsilon(t)$ pois $\delta(x) \equiv_n w_x$. Portanto c_i' é um factor de algum factor biinfinito $\mathbf{w}_j = u_j^{-\infty} u_j' u_{j+1}^{+\infty}$ de t. Como $\mathbf{w}_i$ é não periódica, existe um inteiro $s > 0$ tal que $u_i^s u_i' u_{i+1}^s$ não é um factor de $u_j^{-\infty}$ nem de $u_{j+1}^{+\infty}$. Portanto, como m_S é arbitrariamente grande, podemos concluir que o prefixo u' de c_i (e de $u_i^{m_S}$) de comprimento $|u_i| + |u_j|$ ocorre em $u_j^{-\infty}$. Assim, u' é um prefixo comum de uma potência de u_i e de uma potência de uma conjugada $\bar{u}_j$ de u_j. Logo, pelo Teorema de Fine e Wilf, u_i e $\bar{u}_j$ são potências de uma mesma palavra. Como u_i e $\bar{u}_j$ são ambas palavras primitivas resulta que $u_i = \bar{u}_j$ e, consequentemente, $\bar{u}_j$ é uma palavra de Lyndon. Mas $\bar{u}_j$ é uma conjugada da palavra de Lyndon u_j, donde $\bar{u}_j = u_j$. Concluímos portanto que $u_i = u_j$. Por simetria, também deduzimos que um sufixo suficientemente grande de c_i ocorre em $u_{j+1}^{+\infty}$, o que como acima permite concluir que $u_{i+1} = u_{j+1}$. Além disso isto também permite deduzir, juntamente com o facto de que $c_i' = c_i v$ é uma extensão à direita de c_i, que o sufixo v de c_i' é da forma $v = u_{i+1}^{m_{i+1}} \bar{u}$ para algum inteiro $m_{i+1} > 0$ e algum prefixo $\bar{u}$ de u_{i+1}. Portanto $c_i' = \overrightarrow{c_i}$, o que prova que a ocorrência fixa $c_i = w_x[m, m']$ é uma ocorrência permitida e conclui a demonstração. ■

Uma consequência deste lema é que as ocorrências de centros c_i em w_x são disjuntas duas a duas. Além disso, com argumentos similares aos da prova do lema, pode-se mostrar que a palavra w_x pode ser escrita nas duas seguintes formas

$$w_x = v_0' v_1^{i_1} v_1' v_2^{i_2} \cdots v_q^{i_q} = l_x v_1^{i_1'} c_{f_1} v_2^{i_2'} \cdots c_{f_q} v_q^{i_q'} r_x \tag{7.36}$$

onde:

- $q \geq 1$, $v_0' = u_0'$, $v_1 = u_1$, $v_q = u_p$;
- $\{v_i^{-\infty} v_i' v_{i+1}^{+\infty} \mid i = 1, \ldots, q-1\} = B_{\delta(x)}$;

- $l_x = p_x u_\Theta$ com $p_x = v_0' v_1^{\ell_1}$ para algum inteiro $\ell_1 \geq 0$ e $u_\Theta = v_1^{m_S}$, $r_x = v_\Theta = v_q^{m_S}$;

- $c_{f_i} = v_i^{m_S} v_i^{j_i} v_i' v_{i+1}^{m_S}$.

Definimos

$$\begin{aligned}\widehat{w_x} &= \widehat{l_x} v_1^{i_1'} \widehat{c_{f_1}} v_2^{i_2'} \cdots \widehat{c_{f_q}} v_q^{i_q'} \widehat{r_x} \qquad (7.37)\\ &= p_x \overline{u_\Theta} v_1^{i_1'} \overline{v_1^{m_S}} v_1^{j_1} v_1' \overline{v_2^{m_S}} v_2^{i_2'} \cdots \overline{v_{q-1}^{m_S}} v_{q-1}^{j_{q-1}} v_{q-1}' \overline{v_q^{m_S}} v_q^{i_q'} \overline{v_\Theta}\\ &= v_0' v_1^{\ell_1} v_1^{\omega+m_S} v_1^{i_1'} v_1^{\omega+m_S} v_1^{j_1} v_1' v_2^{\omega+m_S} v_2^{i_2'} \cdots v_{q-1}^{\omega+m_S} v_{q-1}^{j_{q-1}} v_{q-1}' v_q^{\omega+m_S} v_q^{i_q'} v_q^{\omega+m_S},\end{aligned}$$

donde segue imediatamente que $\mathbf{LSl} \models \widehat{w_x} = v_0' v_1^\omega v_1' v_2^\omega \cdots v_{q-1}^\omega v_{q-1}' v_q^\omega$. Agora, a Proposição 7.3.2 juntamente com as igualdades acima, mostram que a pseudoidentidade $\epsilon(\widehat{w_x}) = \delta(x)$ é satisfeita por **LSl**. Portanto, definindo $\delta'(x) = \epsilon(\widehat{w_x})$, as condições (TT.1) a (TT.4) são válidas para esta variável x.

Para verificar que (TT.5) também é válida para esta variável x, suponhamos que $\delta(x) = w_1\pi$, onde $w_1 \in A^*$ e $\pi \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ com $|w_1| \leq M$. Como $|p_x| \geq M$ por definição (ver as condições assumidas no parágrafo abaixo de (7.25)), existe uma factorização $p_x = w_1 w_1'$, e podemos assumir seguramente que w_x foi escolhido de tal forma que $\psi(\pi) = \psi(w_1' u_\Theta v_1^{i_1'} c_{f_1} v_2^{i_2'} \cdots c_{f_q} v_q^{i_q'} r_x)$. Logo $\delta'(x) = w_1\pi'$, onde $\pi' = w_1' \overline{u_\Theta} v_1^{i_1'} \widehat{c_{f_1}} v_2^{i_2'} \cdots \widehat{c_{f_q}} v_q^{i_q'} \widehat{r_x} \in \Omega_A^\kappa\mathbf{S}$, donde

$$\psi(\pi) = \psi(w_1' u_\Theta v_1^{i_1'} c_{f_1} v_2^{i_2'} \cdots c_{f_q} v_q^{i_q'} r_x) = \psi(\pi').$$

Suponhamos agora que y é uma outra variável e que $\delta(y) = w_2\rho$, onde $w_2 \in A^*$ e $\rho \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ são tais que $|w_2| \leq M$ e $\mathbf{LSl} \models \pi = \rho$. Como $\delta(x) = w_1\pi$, $\delta'(x) = w_1\pi'$ e $\mathbf{LSl} \models \delta(x) = \delta'(x)$, segue do Corolário 4.1.3 que $\mathbf{LSl} \models \pi = \pi'$, donde $\mathbf{LSl} \models \delta(y) = w_2\rho = w_2\pi = w_2\pi'$. Portanto, $\delta(y)$ é uma κ-palavra quando projectada em $\overline{\Omega}_A\mathbf{LSl}$ e, como anteriormente para x, deduzimos que $\mathbf{LSl} \models \delta'(y) = \delta(y)$. Logo, $\delta'(y) = w_2\rho'$ para algum $\rho' \in \Omega_A^\kappa\mathbf{S}$, e $\mathbf{LSl} \models \rho' = \rho = \pi = \pi'$, o que prova que (TT.5) é verificada por x.

Reparemos que no Primeiro Caso ficou provado, em particular, que se x é uma κ-variável então $\mathbf{LSl} \models \delta'(x) = \delta(x)$. Assim, tendo em conta o exposto na Secção 7.2, o seguinte resultado segue como uma consequência do Primeiro Caso.

Corolário 7.5.19 *A pseudovariedade* **LSl** *é κ-plena.*

Segundo Caso: x não é uma κ-variável. Neste caso aplicamos o seguinte algoritmo:

Passo 1. Começamos por localizar em w_x todas as ocorrências permitidas dos centros $c_{(\ell,m)}$ de $\mathcal{S}$ (em relação às suas extensões à direita $\overrightarrow{c_{(\ell,m)}}$). Como observado anteriormente, as ocorrências permitidas de centros são disjuntas. Além disso, uma vez que podemos escolher as extensões à direita $\overrightarrow{c_{(\ell,m)}}$ tão grandes quanto queremos, podemos assumir que qualquer ocorrência permitida em w_x de um centro é disjunta do sufixo r_x de w_x. Por outro lado, afirmamos que qualquer ocorrência permitida em w_x de um centro é disjunta do prefixo l_x de w_x. De facto, suponhamos que $x = x_{i,j}$. Podemos assumir que $j \notin \{1, p_i + 1\}$ pois, caso contrário, poderíamos reduzir a um novo sistema multiplicando (à esquerda) a i-ésima equação de $\mathcal{S}$ por uma nova variável # etiquetada por b^ω com b uma nova letra. Portanto $c_{(i,j)} = r_{i,j-1}l_x$. Se existisse uma ocorrência permitida em w_x de um centro $c_{(\ell,m)}$, não disjunta do prefixo l_x, então seria uma ocorrência permitida em $r_{i,j-1}w_x$ de $c_{(\ell,m)}$, não disjunta do prefixo $c_{(i,j)} = r_{i,j-1}l_x$ de $r_{i,j-1}w_x$. Isto não é possível, o que prova a afirmação. Note-se que podemos assumir não apenas que as ocorrências de centros permitidos são disjuntas, mas que são, para além disso, separadas por factores de comprimento pelo menos $3k - 1$ (para isso bastaria considerar centros estendidos grandes).

Este procedimento determina uma única factorização

$$w_x = l_x w_{x,0} c_{x,1} w_{x,1} c_{x,2} \cdots c_{x,i_x} w_{x,i_x} r_x \tag{7.38}$$

de w_x tal que $i_x \geq 0$ e

- $c_{x,1}, \ldots, c_{x,i_x}$ são centros de $\mathcal{S}$, chamados os *centros permitidos de* w_x;
- $w_{x,0}, w_{x,1}, \ldots, w_{x,i_x} \in A^*$ com $|w_{x,j}| \geq 3k - 1$;
- a factorização contém todas as ocorrências permitidas dos centros de $\mathcal{S}$ em w_x.

Em seguida, usamos esta factorização de w_x para transformar w_x no seguinte κ-termo

$$w_x(1) = \widehat{l_x} w_{x,0} \widehat{c_{x,1}} w_{x,1} \widehat{c_{x,2}} \cdots \widehat{c_{x,i_x}} w_{x,i_x} \widehat{r_x}. \tag{7.39}$$

Isto conclui o primeiro passo do algoritmo.

Note-se que no Primeiro Caso (ver equação (7.37) acima), o algoritmo terminou neste ponto. Isso aconteceu porque $\epsilon(\widehat{w_x})$ tinha os mesmos factores biinfinitos (todos eles ultimamente periódicos) e a mesma projecção em **LI** que $\delta(x)$, e esse foi o objectivo. Neste caso é preciso ir mais além e transformar também (algumas das) palavras $w_{x,j}$.

Note-se também que a necessidade de localizar todas as ocorrências permitidas de centros $c_{(\ell,m)}$ em cada w_x, que é ilustrada em (7.36) para κ-variáveis, é para garantir que ambos os membros da pseudoidentidade (7.24) terão os mesmos factores essenciais, i.e., factores da forma $\overline{u}z\overline{v}$. De facto, cada ocorrência permitida de $c_{(\ell,m)}$ será transformada em $\widehat{c_{(\ell,m)}}$ que é deste tipo $\overline{u}z\overline{v}$. Por outro lado $c_{(\ell,m)}$ tem uma ocorrência permitida na palavra $w_{i,1}\cdots w_{i,p_i}$ se e só se tem uma ocorrência permitida em $w_{i,p_i+1}\cdots w_{i,q_i}$, o que garante que $\widehat{c_{(\ell,m)}}$ é um factor de $\widehat{w_{i,1}}\cdots\widehat{w_{i,p_i}}$ se e só se é um factor de $\widehat{w_{i,p_i+1}}\cdots\widehat{w_{i,q_i}}$. Contudo, o número de ocorrências permitidas de $c_{(\ell,m)}$ em $w_{i,1}\cdots w_{i,p_i}$ e $w_{i,p_i+1}\cdots w_{i,q_i}$ pode ser muito diferente. Por exemplo, $w_{i,1}\cdots w_{i,p_i}$ pode ter exactamente uma ocorrência ao passo que $w_{i,p_i+1}\cdots w_{i,q_i}$ pode ter muitas; portanto, neste caso, se não substituíssemos cada ocorrência permitida de $c_{(\ell,m)}$ em $w_{i,p_i+1}\cdots w_{i,q_i}$ por $\widehat{c_{(\ell,m)}}$, correríamos o risco de criar, noutros passos do algoritmo, novos factores essenciais em $\widehat{w_{i,p_i+1}}\cdots\widehat{w_{i,q_i}}$ que poderiam não ser obtidos em $\widehat{w_{i,1}}\cdots\widehat{w_{i,p_i}}$.

Passo 2. Neste passo transformamos as palavras $w_{x,j}$ $(j \in \{0,\ldots,i_x\})$ na factorização (7.39) de $w_x(1)$. Na realidade, nem todas essas palavras serão transformadas. Para cada $q \in \{1,\ldots,i_x\}$, $c_{x,q}$ é algum centro $c_{(\ell,m)}$ e $c_{(\ell,m)} = r_{\ell,m-1}l_{\ell,m}$. Em seguida, denotamos $r_{x,q} = r_{\ell,m-1}$ e $l_{x,q} = l_{\ell,m}$ donde $c_{x,q} = r_{x,q}l_{x,q}$, e denotamos ainda $r_{x,i_x+1} = r_x$ e $l_{x,0} = l_x$. Seguindo o procedimento do Primeiro Caso, não vamos transformar as palavras $w_{x,j}$ para as quais $l_{x,j}$ e $r_{x,j+1}$ são ultimamente periódicas com o mesmo período, digamos u, e $w_{x,j}$ é uma potência de u. Note-se que neste caso

$$\mathbf{LSl} \models \widehat{l_{x,j}}w_{x,j}\widehat{r_{x,j+1}} = \widehat{l_{x,j}}.$$

Assim, consideramos uma palavra $w_{x,j}$ $(j \in \{0,\ldots,i_x\})$ que não é desta forma e mostramos como transformá-la num κ-termo de rank 1 $\widehat{w_{x,j}}$. Isto será feito em quatro subpassos, que reproduzem [35, Subsecção 6.5].

Passo 2.1. Consideremos a factorização marcada, descrita na Subsecção 7.4.1,

$$w_{x,j} = w_0v_1w_1v_2\cdots v_qw_q$$

de $w_{x,j}$. Pela definição de factores marcados, se $q \geq 1$, então $|v_i| \geq 2k$ para todo o $i \in \{1,\ldots,q\}$, donde podemos escrever $v_i = v_{i,1}v_{i,2}v_{i,3}$ para algumas palavras $v_{i,1}$, $v_{i,2}$ e $v_{i,3}$ com $|v_{i,1}| = |v_{i,3}| = k$. Definimos $\widehat{v_i} = \overline{v_{i,1}}\,v_{i,2}\,\overline{v_{i,3}}$, e consideramos $w_{x,j}(1)$ o seguinte κ-termo de rank 1

$$w_{x,j}(1) = w_0\widehat{v_1}w_1\widehat{v_2}w_2\cdots w_{q-1}\widehat{v_q}w_q.$$

Passo 2.2. É claro, a partir da definição de factores livres, que cada w_i ou é a palavra vazia (isto pode acontecer apenas para $i = 0$ ou $i = q$), ou tem comprimento maior do que k (na realidade é muito maior do que k). Assim, se w_0 não é a palavra vazia, definimos

$$\widehat{w_0} = \overline{w_{0,1}} w_{0,2}$$

onde $w_{0,1}$ é o prefixo de comprimento k de w_0 e $w_0 = w_{0,1}w_{0,2}$. Simetricamente, se $w_q \neq 1$, definimos

$$\widehat{w_q} = w_{q,1}\overline{w_{q,2}}$$

onde $w_{q,2}$ é o sufixo de comprimento k de w_q e $w_q = w_{q,1}w_{q,2}$. Agora, seja

$$w_{x,j}\,(2) = \widehat{w_0}\widehat{v_1}w_1\widehat{v_2}w_2 \cdots w_{q-1}\widehat{v_q}\widehat{w_q}.$$

Passo 2.3. Seja $y \in A^+$ um factor de $w_{x,j}$ tal que $2k \leq |y| < 3k$. Podem ocorrer dois casos.

(*Caso I*) Toda a extensão de comprimento $3k-1$ em $w_{x,j}$, de uma ocorrência de y, é uma ocorrência marcada (ver Subsecção 7.4.1). Neste caso toda a ocorrência de y em $w_{x,j}$ está contida nos factores marcados.

(*Caso II*) Existe uma ocorrência livre em $w_{x,j}$ de uma extensão $\tilde{y}$, de comprimento $3k-1$, de uma ocorrência de y. Neste caso, pela definição de ocorrência livre (cf. Subsecção 7.4.1), existe uma k''-vizinhança v de $\tilde{y}$ tal que v é k'-abundante. Em particular, $\mathrm{doc}(\tilde{y}, v) \geq k'$. Para além disso, toda a ocorrência de um factor z de comprimento $3k-1$ na k''-vizinhança v é livre. Isto significa que pelo menos $k'-2$ das ocorrências disjuntas de $\tilde{y}$ em v ocorrem disjuntas dos factores marcados. Mais precisamente, existe um inteiro $0 \leq i \leq q$ tal que $\mathrm{doc}(\tilde{y}, w_i) \geq k'-2$. Logo, como y é um factor de $\tilde{y}$, $\mathrm{doc}(y, w_i) \geq k'-2$. Neste caso, dizemos que y tem uma ocorrência livre em $w_{x,j}$.

Consideremos o conjunto F de todos os factores y de $w_{x,j}$ tais que $2k \leq |y| < 3k$ e y tem uma ocorrência livre em $w_{x,j}$. Pelo segundo caso acima, para cada $y \in F$ existe um inteiro $0 \leq i \leq q$ tal que $\mathrm{doc}(y, w_i) \geq k'-2$. Portanto, a escolha de k' permite-nos seleccionar uma ocorrência para cada $y \in F$ de tal forma que estas ocorrências são disjuntas duas a duas. Estas ocorrências são seleccionadas nos factores w_i e, se $i = 0$ ou $i = q$, então podemos seleccioná-las, respectivamente, em $w_{0,2}$ e em $w_{q,1}$. Como $2k \leq |y| < 3k$, podemos escrever

$$y = y_1y_2y_3$$

para algumas palavras y_1, y_2 e y_3 com $|y_1| = |y_3| = k$. Substituímos em $w_{x,j}\,(2)$ a ocorrência seleccionada de y por $\widehat{y} = \overline{y_1}\, y_2\, \overline{y_3}$. Obtemos assim um termo $w_{x,j}\,(3)$.

Passo 2.4. Neste passo, admitimos a substituição de qualquer ocorrência, nos factores de $w_{x,j}\,(3)$ que foram obtidos a partir das transformações nas palavras w_i, de um factor $y \in A^+$ de comprimento k por $\overline{y}$. Dizemos que um termo obtido a partir de $w_{x,j}\,(3)$ usando estas substituições é *irredutível* quando não é possível fazer mais substituições (ou seja, quando não existem mais ocorrências de factores $y \in A^+$ de comprimento k nos factores que resultaram das substituições nas palavras w_i). Escolhemos um termo irredutível e denotámo-lo por $w_{x,j}\,(4)$. Isto conclui o processo de transformação da palavra $w_{x,j}$.

Definimos $\widehat{w_{x,j}} = w_{x,j}\,(4)$. Isto conclui o processo de transformação dos factores de w_x na factorização (7.38). Definimos agora

$$\widehat{w_x} = \widehat{l_x}\widehat{w_{x,0}}\widehat{c_{x,1}} \cdots \widehat{c_{x,i_x}}\widehat{w_{x,i_x}}\widehat{r_x}. \tag{7.40}$$

Definição 7.5.20 (etiquetagem δ') *A etiquetagem δ' de X por κ-palavras de $\Omega_A^\kappa \mathbf{S}$ é definida por $\delta'(x) = \epsilon(\widehat{w_x})$ para qualquer $x \in X$.*

Que as condições (TT.1) a (TT.3) também são verificadas pelas não κ-variáveis é imediato. Portanto, para estabelecer a κ-redutibilidade TT de **LSl**, resta mostrar que δ' é uma κ-solução de $\mathcal{S}$ módulo **LSl** com respeito a (γ, ψ) e que a condição (TT.5) é verificada por todas as variáveis x que não são κ-variáveis. Isto será feito na próxima subsecção.

7.5.6 Prova da κ-redutibilidade TT

Como mencionado na Subsecção 7.5.3, a etiquetagem δ' verifica $\psi \circ \delta' = \gamma$ e, por isso, para provar que δ' é uma κ-solução de $\mathcal{S}$ módulo **LSl** com respeito a (γ, ψ), basta mostrar que **LSl** satisfaz a pseudoidentidade

$$\delta'(x_{i,1}) \cdots \delta'(x_{i,p_i}) = \delta'(x_{i,p_i+1}) \cdots \delta'(x_{i,q_i}) \tag{7.41}$$

para todo o $i \in \{1, \ldots, h\}$. Isto é imediato se todas as variáveis $x_{i,j}$ são κ-variáveis. De facto, neste caso temos $\mathbf{LSl} \models \delta'(x_{i,j}) = \delta(x_{i,j})$, pela condição (TT.4), que é válida conforme mostrado no Primeiro Caso. Portanto, como δ é uma solução de $\mathcal{S}$ módulo **LSl**, donde **LSl** verifica $\delta(x_{i,1}) \cdots \delta(x_{i,p_i}) = \delta(x_{i,p_i+1}) \cdots \delta(x_{i,q_i})$, é claro que (7.41) é verificada por **LSl**.

Assim, assumimos que pelo menos uma variável $x_{i,j}$ não é uma κ-variável (o que significa que pelo menos duas varáveis x_{i,j_1} e x_{i,j_2}, com $j_1 \le p_i$ e $j_2 > p_i$, não são κ-variáveis). Note-se primeiro que, por (7.22), (7.28) e (7.30) ambos os lados da pseudoidentidade (7.41) têm o mesmo prefixo essencial (i.e., $\widehat{l_{i,1}} = \widehat{l_{i,p_i+1}}$) e o mesmo sufixo essencial (i.e., $\widehat{r_{i,p_i}} = \widehat{r_{i,q_i}}$), o que significa que **LI** verifica (7.41). Portanto, pela Proposição 7.3.2, resta provar que as κ-palavras

$$z_0' = \delta'(x_{i,1}) \cdots \delta'(x_{i,p_i}) = \widehat{w_{i,1}} \cdots \widehat{w_{i,p_i}}$$

e

$$z_1' = \delta'(x_{i,p_i+1}) \cdots \delta'(x_{i,q_i}) = \widehat{w_{i,p_i+1}} \cdots \widehat{w_{i,q_i}}$$

têm os mesmos factores biinfinitos não periódicos, para o que é suficiente verificar que os κ-termos têm os mesmos factores essenciais, como já mencionado na Subsecção 7.5.3.

Começamos por observar que, como δ é uma solução módulo **LSl** e $\equiv_n$ é uma congruência sobre $\overline{\Omega}_A\mathbf{S}$, deduzimos a partir do Lema 4.1.5 que $z_0 \equiv_n z_1$, onde $z_0 = w_{i,1} \cdots w_{i,p_i}$ e $z_1 = w_{i,p_i+1} \cdots w_{i,q_i}$. As observações no Lema 7.5.21 abaixo são simples consequências deste facto (ver [35, Lema 6.9] para uma demonstração de um resultado similar). Dizemos que uma ocorrência de um factor de comprimento $3k-1$ é *relativamente livre* em z_0 (resp. z_1) se ocorre em algum $w_{i,j}$, com $1 \leq j \leq p_i$ (resp. $p_i + 1 \leq j \leq q_i$), e é livre em $w_{i,j}$. Analogamente, dizemos que um factor de z_0 (resp. z_1) é *relativamente marcado* se é um factor marcado em algum $w_{i,j}$, com $1 \leq j \leq p_i$ (resp. $p_i + 1 \leq j \leq q_i$).

Lema 7.5.21 *As seguintes condições são verdadeiras.*

a) z_0 *e* z_1 *têm os mesmos factores de comprimento* $3k-1$ *com ocorrências relativamente livres.*

b) z_0 *e* z_1 *têm os mesmos factores relativamente marcados.*

Para provar que z_0' e z_1' têm os mesmos factores essenciais, mostramos que cada factor essencial $\overline{u}\,z\,\overline{v}$ de z_0' também é um factor de z_1' (o recíproco segue por simetria). Podem ocorrer os seguintes casos:

Caso 1. $\overline{u}\,z\,\overline{v}$ sobrepõe dois factores consecutivos $\widehat{w_{i,j-1}}$ e $\widehat{w_{i,j}}$ de z_0', com $j \in \{2, \ldots, p_i\}$. Então $\overline{u}\,z\,\overline{v} = \widehat{c_{(i,j)}}$ para o centro $c_{(i,j)}$ do sistema. Por (Si.3) e (7.32), é claro que $\overline{u}\,z\,\overline{v}$ também é um factor essencial de z_1'.

Caso 2. $\overline{u}\,z\,\overline{v}$ ocorre dentro de algum $\widehat{w_{i,\ell}}$ com $\ell \in \{1, \ldots, p_i\}$. Denotamos por x a variável $x_{i,\ell}$ e note-se que $\widehat{w_x} = \widehat{l_x}\widehat{w_{x,0}}\widehat{c_{x,1}} \cdots \widehat{c_{x,i_x}}\widehat{w_{x,i_x}}\widehat{r_x}$ foi definida em (7.40). Podem ocorrer os seguintes subcasos:

Caso 2.1. $\overline{u}\,z\,\overline{v} = \widehat{c_{x,j}}$ para algum $j \in \{1, \ldots, i_x\}$. Como $c_{x,j}$ é um centro do sistema, a conclusão segue como no Caso 1.

Caso 2.2. $\overline{u}\,z\,\overline{v}$ sobrepõe $\widehat{l_x}$ e $\widehat{w_{x,0}}$. Seja $w_{x,0} = w_0 v_1 w_1 v_2 \cdots v_q w_q$ a factorização marcada de $w_{x,0}$.

Se w_0 é a palavra vazia, então $q \geq 1$ e resulta do Passo 2.1 que $\overline{u}\,z\,\overline{v} = \widehat{l_x}\overline{v_{1,1}}$, onde $v_{1,1}$ é o prefixo de comprimento k do factor marcado v_1 de $w_{x,0}$. Pelo Lema 7.4.3, $|v_1| \leq k''$. Observe-se agora que $l_x v_1$ é um prefixo de w_x de comprimento no máximo $|l_x| + k''$, que é menor do que n pela definição de n. Por (Si.3), existe alguma variável $y = x_{i,m}$, com $m \in \{p_i + 1, \ldots, q_i\}$, tal que $\mathbf{k}_x = \mathbf{k}_y$. Portanto, pela definição de w_x e w_y, $\delta(x)$, $\delta(y)$, w_x e w_y têm todos o mesmo prefixo de comprimento n. Como n é suficientemente grande, conclui-se que v_1 não é apenas um prefixo de $w_{y,0}$ mas também um factor marcado de $w_{y,0}$. Além disso, por (7.28), $l_x = l_y$. Portanto $\overline{u}\,z\,\overline{v} = \widehat{l_y}\overline{v_{1,1}}$ também ocorre em z'_1.

Se w_0 não é a palavra vazia, então $\overline{u}\,z\,\overline{v} = \widehat{l_x}\overline{w_{0,1}}$ pelo Passo 2.2, onde $w_{0,1}$ é o prefixo de comprimento k de w_0. Este caso pode ser tratado como o anterior.

Caso 2.3. $\overline{u}\,z\,\overline{v}$ sobrepõe $\widehat{w_{x,i_x}}$ e $\widehat{r_x}$. Este caso é simétrico ao Caso 2.2.

Caso 2.4. $\overline{u}\,z\,\overline{v}$ sobrepõe $\widehat{w_{x,j-1}}$ e $\widehat{c_{x,j}}$, ou sobrepõe $\widehat{c_{x,j}}$ e $\widehat{w_{x,j}}$, para algum $j \in \{1, \ldots, i_x\}$. Estes casos são similares aos Casos 2.2 e 2.3, e podem ser tratados de forma análoga usando o facto de que $\delta(x)$ e w_x (resp. z_0 e z_1) têm os mesmos factores de comprimento n.

Caso 2.5. $\overline{u}\,z\,\overline{v}$ ocorre dentro de algum $\widehat{w_{x,j}}$ com $j \in \{0, \ldots, i_x\}$. Consideremos a factorização marcada $w_{x,j} = w_0 v_1 w_1 v_2 \cdots v_q w_q$. Pela definição de $\widehat{w_{x,j}}$ no Passo 2, ou $\overline{u}\,z\,\overline{v} = \widehat{v_m}$ e $uzv = v_m$ para algum factor marcado v_m de $w_{x,j}$ (e $\overline{u}\,z\,\overline{v}$ foi criado no Passo 2.1), ou a ocorrência correspondente de uzv em $w_{x,j}$ está contida numa ocorrência livre (e $\overline{u}\,z\,\overline{v}$ foi criado no Passo 2.3 ou no Passo 2.4). Pelo Lema 7.5.21, uzv é um factor relativamente marcado de z_1 no primeiro caso e está contido numa ocorrência relativamente livre em z_1 no segundo caso. Em ambos os casos, resulta do Passo 2 do algoritmo que $\overline{u}\,z\,\overline{v}$ também é um factor essencial de z_1.

O descrito acima mostra que z'_0 e z'_1 têm os mesmos factores essenciais, e conclui a prova de que δ' é uma κ-solução de $\mathcal{S}$ módulo **LSl** com respeito a (γ, ψ).

Para deduzir a κ-redutibilidade TT de **LSl**, mostramos finalmente que a condição (TT.5) é verificada por cada variável x tal que x não é uma κ-variável. A primeira parte desta condição estabelece que todo o prefixo $u \in A^*$ de $\delta(x)$ com comprimento no máximo M, é um prefixo de $\delta'(x)$ quando $\delta'(x)$ é encarado como uma palavra sobre o alfabeto $\bar{A}$. Mas, isto é uma consequência do facto de que, por (7.40), $\delta'(x)$ tem $\widehat{l_x}$ como um prefixo e, por (7.27), $\widehat{l_x} = p_x\overline{u_\Theta}$ com $p_x \in A^+$ assumido (imediatamente após (7.25)) como sendo uma palavra de comprimento pelo menos M.

Para provar a segunda parte da condição (TT.5), suponhamos que $\delta(x) = u\pi$ e $\delta(y) = v\rho$, onde y é uma outra variável e $u, v \in A^*$ e $\pi, \rho \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ são tais que $|u|, |v| \leq M$ e $\mathbf{LSl} \models \pi = \rho$. Sabemos pela primeira parte que $\delta'(x) = u\pi'$ e $\delta'(y) = v\rho'$. Temos que mostrar que $\mathbf{LSl} \models \pi' = \rho'$. Pelo Lema 4.1.5, como $\mathbf{LSl} \models \pi = \rho$, podemos assumir que $w_x = uw_\pi$ e $w_y = vw_\rho$ com $w_\pi \equiv_n w_\rho$. Por outro lado, $\mathbf{K} \models \pi = \rho$ donde, como

$$\mathbf{k}_x = u\, p_{\mathbf{K}}(\pi) \quad \text{e} \quad \mathbf{k}_y = v\, p_{\mathbf{K}}(\rho),$$

deduzimos que $\mathbf{k}_x$ e $\mathbf{k}_y$ são ultimamente iguais, i.e., que $\mathbf{k}_x\ \theta_1\ \mathbf{k}_y$. Mas, por (7.25), $\mathbf{k}_x = p_x p_\Theta$ e $\mathbf{k}_y = p_y p_\Theta$ onde Θ é a θ_1-classe de x e de y. Logo, $p_x = uz$ e $p_y = vz$ para alguma palavra $z \in A^*$. Por (7.27), $\widehat{l_x} = p_x\overline{u_\Theta}$ e $\widehat{l_y} = p_y\overline{u_\Theta}$, donde $z\overline{u_\Theta}$ é o prefixo essencial de ambos π' e ρ'. Que π' e ρ' também têm o mesmo sufixo essencial é uma consequência de (7.30) e do facto de $\mathbf{D} \models \delta(x) = \delta(y)$. Finalmente, como $w_\pi \equiv_n w_\rho$, pode-se mostrar que as palavras w_π e w_ρ têm os mesmos centros permitidos, os mesmos factores de comprimento $3k-1$ com ocorrências relativamente livres e os mesmos factores relativamente marcados. Por isso, a prova de que π' e ρ' têm os mesmos factores essenciais é análoga à apresentada acima para z'_0 e z'_1. Portanto $\mathbf{LSl} \models \pi' = \rho'$, e a condição (TT.5) é verificada por x.

Isto estabelece a κ-redutibilidade TT de **LSl**. A κ-redutibilidade completa de **LSl**, ou seja o Teorema 7.5.1, é depois obtida como uma aplicação directa da Proposição 7.5.13.

Capítulo 8

Mansidão de supremos envolvendo LSl

Recordemos que o supremo $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ de duas pseudovariedades $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ é a menor pseudovariedade contendo ambas $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$. Há vários exemplos de pseudovariedades κ-mansas da forma $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ na literatura. Este é o caso, por exemplo, de $\mathbf{K} \vee \mathbf{V}$ [31] e $\mathbf{J} \vee \mathbf{V}$ [10] para qualquer pseudovariedade $\mathbf{V}$ κ-mansa ($\mathbf{J} \vee \mathbf{V}$ já tinha sido provado ser κ-mansa para $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{CR}$ [63]), e de $\mathbf{R} \vee \mathbf{V}$ [10] para qualquer pseudovariedade κ-mansa que safisfaça a pseudoidentidade $x_1 \cdots x_r y^{\omega+1} z t^{\omega} = x_1 \cdots x_r y z t^{\omega}$.

Neste capítulo estabelecemos a κ-mansidão de supremos da forma $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$, onde $\mathbf{V}$ é uma qualquer pseudovariedade κ-mansa que satisfaça a pseudoidentidade $xy^{\omega+1}z = xyz$. Em particular, conclui-se que as pseudovariedades $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{Ab}$, $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{G}$, $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{OCR}$ e $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{CR}$ são κ-mansas e, portanto, decidíveis. Os resultados deste capítulo consistem do artigo [34].

Este trabalho está organizado em três secções. A maior parte dos conceitos e resultados introdutórios são comuns aos do capítulo anterior e foram aí apresentados. Assim, a Secção 8.1 funciona como um complemento a esses preliminares. As restantes secções, Secção 8.2 e Secção 8.3, são dedicadas à prova da κ-redutibilidade de algumas pseudovariedades supremo da forma $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$.

8.1 Preliminares

Comecemos por recordar que as secções 7.1, 7.3 e 7.4, do capítulo anterior, integram os preliminares do trabalho apresentado neste capítulo. Recordemos ainda que, de acordo com a Secção 7.4, S denota um semigrupo finito A-gerado fixo e $k = |S| + 2$.

O lema seguinte, que é de grande utilidade para a próxima secção, está provado em [31]. Para sermos mais precisos, a condição (a) do lema foi provada apenas para arestas mas a sua extensão a vértices pode ser provada de forma similar.

Lema 8.1.1 *Seja* $\mathbf{V}$ *uma pseudovariedade* σ*-redutível para uma assinatura implícita não trivial* σ *e seja* $\delta : \Gamma \to \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ *uma solução de um grafo finito* Γ *módulo* $\mathbf{V}$ *com respeito a* (γ, ψ)*. Existe uma* σ*-solução* δ' *de* Γ *módulo* $\mathbf{V}$ *com respeito a* (γ, ψ) *que verifica as condições, para todo o* $\mathsf{g} \in \Gamma$*:*

(a) *se* $\delta(\mathsf{g})$ *é uma pseudopalavra infinita, então* $\delta'(\mathsf{g})$ *é uma* σ*-palavra infinita;*

(b) *se* $\delta(\mathsf{g})$ *é uma palavra finita, então* $\delta'(\mathsf{g}) = \delta(\mathsf{g})$.

Ver [10, Proposição 3.3] para uma extensão deste lema. Em particular, como observado nesse artigo, tem-se a seguinte observação.

Observação 8.1.2 *Assuma as condições do Lema 8.1.1. Podemos restringir os valores sob* δ' *de cada* $g \in \Gamma$ *com respeito a propriedades que, como a de (b), possam ser testadas num semigrupo finito.*

Consultar também [10, Secção 3.2] para uma explicação detalhada de como o Lema 8.1.1 (ou as suas extensões) e a Observação 8.1.2 podem ser usados para provar a redutibilidade de supremos. Seguiremos essa técnica, na próxima secção, para obter uma redução no problema da κ-redutibilidade de $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$.

Daqui por diante, quando nos referimos a uma solução de um certo grafo Γ módulo uma determinada pseudovariedade com respeito a um par (γ, ψ), assumimos que $\gamma : \Gamma \to S$ e $\psi : \overline{\Omega}_A\mathbf{S} \to S$ são aplicações no semigrupo fixo S.

8.2 κ-redutiblidade de supremos envolvendo LSl

O restante do capítulo será dedicado à prova do seu resultado principal.

Teorema 8.2.1 *Se* $\mathbf{V} \subseteq [\![xy^{\omega+1}z = xyz]\!]$ *é* κ*-redutível, então também o é* $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$.

Uma vez que o problema da κ-palavra é decidível para $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ se é decidível para ambas $\mathbf{LSl}$ e $\mathbf{V}$, o seguinte resultado é uma consequência imediata da Proposição 7.3.2 e do Teorema 8.2.1.

Corolário 8.2.2 *Se* $\mathbf{V} \subseteq [\![xy^{\omega+1}z = xyz]\!]$ *é* κ*-mansa, então também o é* $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$.

Em particular, segue dos resultados de mansidão já mencionados na introdução do Capítulo 7 que $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{Ab}$, $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{G}$, $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{OCR}$ e $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{CR}$ são κ-mansas.

8.2.1 κ-redutibilidade do primeiro tipo

De agora em diante $\mathbf{V}$ denota uma pseudovariedade κ-redutível que verifique a pseudoidentidade $xy^{\omega+1}z = xyz$. Começamos por reduzir o problema ao caso em que todos os vértices são etiquetados por pseudopalavras infinitas.

Definição 8.2.3 (κ-redutibilidade PT) *Dizemos que* $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ *é PT ("primeiro tipo") κ-redutível se, para todo o inteiro $M \geq 1$ e toda a solução δ_* de um grafo finito Γ_* módulo $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ tal que $\delta_*(\mathsf{v})$ é infinita para cada vértice $\mathsf{v} \in \Gamma_*$, existe uma κ-solução $\delta'_* = \delta'_*(\Gamma_*, \delta_*, M)$ de Γ_* módulo $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ satisfazendo a seguinte condição, para cada vértice $\mathsf{v} \in \Gamma_*$,*

(PT) *se $\delta_*(\mathsf{v}) = u\pi$ onde $u \in A^+$ é uma palavra de comprimento M e $\pi \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$, então $\delta'_*(\mathsf{v}) = u\pi'$ onde $\pi' \in \Omega^\kappa_A\mathbf{S}$ é tal que $\psi(\pi) = \psi(\pi')$.*

Mostramos que a κ-redutibilidade de $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ é uma consequência da sua κ-redutibilidade PT.

Proposição 8.2.4 *Se $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ é PT κ-redutível, então é κ-redutível.*

Demonstração. Seja δ uma solução de um grafo finito Γ módulo $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ com respeito a um par (γ, ψ). Construímos um novo grafo Γ_* e uma nova solução δ_* na qual todos os vértices são etiquetados por pseudopalavras infinitas como segue. Eliminamos todos os vértices v tais que $\delta(\mathsf{v})$ é uma palavra finita e eliminamos todas as arestas com origem em v. Seja $\mathcal{E}_\omega$ o conjunto de todas as arestas $\mathsf{e} \in \Gamma$ tais que $\delta(\alpha(\mathsf{e}))$ é uma palavra finita e $\delta(\mathsf{e})$ é uma pseudopalavra infinita. Para cada $\mathsf{e} \in \mathcal{E}_\omega$, introduzimos um novo vértice v_e e uma nova aresta $\mathsf{v}_\mathsf{e} \xrightarrow{\mathsf{f}_\mathsf{e}} \omega(\mathsf{e})$. Como $\delta(\mathsf{e})$ é infinita, podemos escrever

$$\delta(\mathsf{e}) = x_\mathsf{e} y_\mathsf{e}$$

para algumas pseudopalavras infinitas x_e e y_e. Denotamos por Γ_* o novo grafo assim obtido e definimos $\delta_* : \Gamma_* \to \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ como sendo a etiquetagem que coincide com δ em $\Gamma_* \cap \Gamma$ e que, para cada $\mathsf{e} \in \mathcal{E}_\omega$, é tal que $\delta_*(\mathsf{v}_\mathsf{e}) = \delta(\alpha(\mathsf{e})) \cdot x_\mathsf{e}$ e $\delta_*(\mathsf{f}_\mathsf{e}) = y_\mathsf{e}$. Consideremos também $\gamma_* : \Gamma_* \to S$ a etiquetagem de Γ_* definida por $\gamma_* = \psi \circ \delta_*$. Como δ é uma solução de Γ módulo $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ com respeito a (γ, ψ), é claro que δ_* é uma solução de Γ_* módulo $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ com respeito a (γ_*, ψ). Fixemos um inteiro M tal que $M \geq |\delta(\mathsf{v})|$ para cada vértice $\mathsf{v} \in \Gamma$ com $\delta(\mathsf{v})$ finita.

Por hipótese $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ é PT κ-redutível. Portanto, existe uma κ-solução $\delta'_* = \delta'_*(\Gamma_*, \delta_*, M)$ de Γ_* módulo $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ com respeito a (γ_*, ψ) satisfazendo a condição (PT) acima. Logo, para cada $\mathsf{e} \in \mathcal{E}_\omega$, $\delta'_*(\mathsf{v}_\mathsf{e}) = \delta(\alpha(\mathsf{e})) \cdot x'_\mathsf{e}$ para algum

$x'_{\mathsf{e}} \in \Omega_A^\kappa \mathbf{S}$ tal que $\psi(x_{\mathsf{e}}) = \psi(x'_{\mathsf{e}})$. Então, definimos δ' coincidente com δ'_* em $\Gamma_* \cap \Gamma$ e tal que $\delta'(\mathsf{e}) = x'_{\mathsf{e}} \cdot \delta'_*(\mathsf{f}_{\mathsf{e}})$ para cada $\mathsf{e} \in \mathcal{E}_\omega$. Os restantes elementos g de Γ, ou seja $\mathsf{g} \in \Gamma \setminus (\Gamma_* \cup \mathcal{E}_\omega)$, são etiquetados sob δ por palavras finitas, e definimos $\delta'(\mathsf{g}) = \delta(\mathsf{g})$. Portanto δ' é claramente uma κ-solução de Γ módulo $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ com respeito a (γ, ψ). ∎

Com o objectivo de provar a κ-redutibilidade PT de $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$, assumimos que M é um inteiro positivo e que δ_* é uma solução de um grafo finito Γ_* módulo $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ com respeito a um par (γ_*, ψ), etiquetando cada vértice de Γ_* por uma pseudopalavra infinita. Precisamos de construir uma κ-solução $\delta'_* = \delta'_*(\Gamma_*, \delta_*, M)$ de Γ_* módulo $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ satisfazendo a condição (PT).

8.2.2 Alguma notação para o grafo e a solução

Seja $\mathcal{E}_0(\Gamma_*)$ o conjunto de todas as arestas de Γ_* etiquetadas sob δ_* por uma palavra finita e tomemos $\Gamma = \Gamma_* \setminus \mathcal{E}_0(\Gamma_*)$. Sejam também δ e γ respectivamente as restrições de δ_* e γ_* a Γ, e note-se que δ é uma solução de Γ módulo $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ com respeito a (γ, ψ). No resto do capítulo, vamos usar vários parâmetros associados aos elementos de Γ. Para um tal parâmetro f e $\mathsf{g} \in \Gamma$, o valor de g sob f será usualmente denotado por f_{g}. Começamos por recordar alguns destes parâmetros, que foram introduzidos em [35, Secção 6.3] e estão relacionados com a solução δ.

Para cada elemento $\mathsf{g} \in \Gamma$ e cada aresta $\mathsf{e} \in \Gamma$, denotamos

$$\mathbf{k}_{\mathsf{g}} = p_{\mathbf{K}}(\delta(\mathsf{g})), \quad \mathbf{d}_{\mathsf{g}} = p_{\mathbf{D}}(\delta(\mathsf{g})), \quad \mathbf{w}_{\mathsf{e}} = \mathbf{d}_{\alpha(\mathsf{e})} \cdot \mathbf{k}_{\mathsf{e}}, \tag{8.1}$$

e note-se que $\mathbf{k}_{\mathsf{g}} \in A^{\mathbb{N}}$, $\mathbf{d}_{\mathsf{g}} \in A^{-\mathbb{N}}$ e $\mathbf{w}_{\mathsf{e}} \in A^{\mathbb{Z}}$. Além disso, como δ é uma solução de Γ módulo $\mathbf{K}$ e módulo $\mathbf{D}$, temos as igualdades $\mathbf{k}_{\mathsf{v}} = \mathbf{k}_{\mathsf{w}}$ e $\mathbf{d}_{\mathsf{e}} = \mathbf{d}_{\omega(\mathsf{e})}$ para todos os vértices v e w na mesma componente conexa de Γ e todas as arestas e.

Para cada vértice v e cada aresta e, definimos

$$l_{\mathsf{v}} = \mathbf{k}_{\mathsf{v}}[1, M+k], \qquad r_{\mathsf{v}} = \mathbf{d}_{\mathsf{v}}[-i_{\mathsf{v}}, -1], \tag{8.2}$$

$$l_{\mathsf{e}} = \mathbf{k}_{\mathsf{e}}[1, i_{\mathsf{e}}], \qquad r_{\mathsf{e}} = r_{\omega(\mathsf{e})}, \qquad c_{\mathsf{e}} = r_{\alpha(\mathsf{e})} l_{\mathsf{e}}, \tag{8.3}$$

onde $i_{\mathsf{v}}, i_{\mathsf{e}} \geq M + k$ são inteiros fixados na Definição 8.2.5 abaixo. Note-se que $l_{\mathsf{g}}, r_{\mathsf{g}}, c_{\mathsf{e}} \in A^+$ e que a palavra $c_{\mathsf{e}} = \mathbf{w}_{\mathsf{e}}[-i_{\alpha(\mathsf{e})}, i_{\mathsf{e}}[$ é um centro da palavra biinfinita $\mathbf{w}_{\mathsf{e}}$. Seja F_Γ um conjunto de arestas de Γ,

$$W_{\mathcal{E}} = \{\mathbf{w}_{\mathsf{e}} : \mathsf{e} \in \mathcal{E}(\Gamma)\}, \qquad C_{\mathcal{E}} = \{c_{\mathsf{e}} : \mathsf{e} \in \mathcal{E}(\Gamma)\}, \tag{8.4}$$

$$W_F = \{\mathbf{w}_{\mathsf{f}} : \mathsf{f} \in F_\Gamma\}, \qquad C_F = \{c_{\mathsf{f}} : \mathsf{f} \in F_\Gamma\}, \tag{8.5}$$

com F_Γ escolhido de modo que W_F contém exactamente um representante de cada órbita $\mathcal{O}(\mathbf{w}_{\mathsf{e}})$ com $\mathsf{e} \in \mathcal{E}(\Gamma)$. O conjunto $C_{\mathcal{E}}$ será denominado o *conjunto dos centros* de $\mathcal{E}(\Gamma)$, enquanto C_F será chamado o *conjunto dos centros* de F_Γ. Um centro c_{e} diz-se *periódico* quando a palavra biinfinita $\mathbf{w}_{\mathsf{e}}$ é periódica.

Seja $\mathsf{g} \in \Gamma$. Factorizamos l_{g} e r_{g}, e definimos κ-termos de rank 1 $\widehat{l_{\mathsf{g}}}$ e $\widehat{r_{\mathsf{g}}}$, como segue

$$l_{\mathsf{g}} = l_{\mathsf{g},1} l_{\mathsf{g},2}, \qquad r_{\mathsf{g}} = r_{\mathsf{g},2}\, r_{\mathsf{g},1}, \tag{8.6}$$

$$\widehat{l_{\mathsf{g}}} = l_{\mathsf{g},1} \overline{l_{\mathsf{g},2}}, \qquad \widehat{r_{\mathsf{g}}} = \overline{r_{\mathsf{g},2}}\, r_{\mathsf{g},1}, \tag{8.7}$$

onde:

h.1) se g é um vértice ou $\mathbf{k}_{\mathsf{g}}$ não é ultimamente periódica, então $l_{\mathsf{g},2}$ é o sufixo de l_{g} de comprimento k e $\overline{l_{\mathsf{g},2}}$ é dado por (7.10);

h.2) se g é uma aresta e e $\mathbf{k}_{\mathsf{e}}$ é ultimamente periódica, então $\mathbf{k}_{\mathsf{e}} = l_{\mathsf{e},1} v_{\mathsf{e}}^{+\infty}$, com $|l_{\mathsf{e},1}| \geq M$, e $l_{\mathsf{e},2} = v_{\mathsf{e}}^{m_S}$ para alguma palavra de Lyndon v_{e} e $\overline{l_{\mathsf{e},2}} = l_{\mathsf{e},2}^{\omega+1} = v_{\mathsf{e}}^{\omega+m_S}$ é dado por (7.11);

h.3) se g é uma aresta e, então $r_{\mathsf{e}} = r_{\omega(\mathsf{e})}$ por (8.3), e definimos $\widehat{r_{\mathsf{e}}} = \widehat{r_{\omega(\mathsf{e})}}$;

h.4) se g é um vértice v e $\mathbf{d}_{\mathsf{v}}$ não é ultimamente periódica, então $r_{\mathsf{v},2}$ é o prefixo de r_{v} de comprimento k e $\overline{r_{\mathsf{v},2}}$ é dado por (7.10);

h.5) se g é um vértice v e $\mathbf{d}_{\mathsf{v}}$ é ultimamente periódica, então $\mathbf{d}_{\mathsf{v}} = v_{\mathsf{v}}^{-\infty} r_{\mathsf{v},1}$ e $r_{\mathsf{v},2} = v_{\mathsf{v}}^{m_S}$ para alguma palavra de Lyndon v_{v} e $\overline{r_{\mathsf{v},2}} = r_{\mathsf{v},2}^{\omega+1} = v_{\mathsf{v}}^{\omega+m_S}$ é dado por (7.11).

Finalmente, para cada aresta $\mathsf{e} \in \Gamma$, recordemos que $c_{\mathsf{e}} = r_{\alpha(\mathsf{e})} l_{\mathsf{e}}$ por (8.3). Logo, definimos

$$\widehat{c_{\mathsf{e}}} = \widehat{r_{\alpha(\mathsf{e})}} \cdot \widehat{l_{\mathsf{e}}}. \tag{8.8}$$

Note-se que $\widehat{c_{\mathsf{e}}}$ é um κ-termo de rank 1 da forma $\overline{x}y\overline{z} = x_1 x_2^{\alpha} x_3 y z_1 z_2^{\beta} z_3$, onde $\alpha, \beta \in \{\omega, \omega + m_S\}$, $x_1, x_3, y, z_1, z_3 \in A^*$ e $x_2, z_2 \in A^+$ são palavras de Lyndon. Além disso, se a palavra biinfinita $\mathbf{w}_{\mathsf{e}}$ é ultimamente periódica, então $x_2^{-\infty} x_3 y z_1 z_2^{+\infty} = \mathcal{O}(\mathbf{w}_{\mathsf{e}})$.

Definição 8.2.5 (inteiros i_{v} e i_{e}) *Os inteiros i_{v} e i_{e}, em* (8.2) *e* (8.3)*, são escolhidos suficientemente grandes de modo a que h.*1)*–h.*5) *são válidas e, para cada $\mathsf{g} \in \Gamma$, $\mathsf{e} \in \mathcal{E}(\Gamma)$, $\mathsf{f} \in F_\Gamma$ e $\mathsf{v}, \mathsf{w} \in \mathcal{V}(\Gamma)$:*

i.1) *se $\mathbf{w}_{\mathsf{e}} \sim \mathbf{w}_{\mathsf{f}}$, então* **LSl** $\models \widehat{c_{\mathsf{e}}} = \widehat{c_{\mathsf{f}}}$*;*

i.2) *se* $\mathbf{d}_{\mathsf{v}} = \mathbf{d}_{\mathsf{w}}$*, então* $r_{\mathsf{v}} = r_{\mathsf{w}}$ *(donde* $\widehat{r_{\mathsf{v}}} = \widehat{r_{\mathsf{w}}}$ *por h.*4) *e h.*5)*). Note-se que se* $\mathbf{k}_{\mathsf{v}} = \mathbf{k}_{\mathsf{w}}$*, então* $l_{\mathsf{v}} = l_{\mathsf{w}}$ *pela definição* (8.2)*;*

i.3) *se* $\mathbf{w}_{\mathsf{f}}$ *não é um factor biinfinito de* $\delta(\mathsf{g})$*, então* c_{f} *não é um factor de* $\delta(\mathsf{g})$*;*

i.4) $i_{\mathsf{f}} \geq Q$*, onde* Q *é um inteiro positivo nas condições do Lema 7.4.6 com* B *o conjunto dos elementos não periódicos de* W_F*.*

Note-se que os inteiros i_{v} e i_{e} podem efectivamente ser escolhidos satisfazendo estas condições. De facto, as condições i.3) e i.4) são trivialmente verificadas pois, pela definição, podemos tomar i_{v} e i_{e} arbitrariamente grandes. Para garantir a condição i.2) basta definir $i_{\mathsf{v}} = i_{\mathsf{w}}$. Agora, para i.1), sejam $\mathsf{e} \in \mathcal{E}(\Gamma)$ e $\mathsf{f} \in F_\Gamma$ tais que $\mathbf{w}_{\mathsf{e}} \sim \mathbf{w}_{\mathsf{f}}$. Em particular, $\mathbf{d}_{\alpha(\mathsf{e})}$ (resp. $\mathbf{k}_{\mathsf{e}}$) é ultimamente periódica com período u se e só se $\mathbf{d}_{\alpha(\mathsf{f})}$ (resp. $\mathbf{k}_{\mathsf{f}}$) é ultimamente periódica com período u. Assim, se podemos escolher $c_{\mathsf{e}} = c_{\mathsf{f}}$, então claramente $\widehat{c_{\mathsf{e}}} = \widehat{c_{\mathsf{f}}}$, donde **LSl** $\models \widehat{c_{\mathsf{e}}} = \widehat{c_{\mathsf{f}}}$ trivialmente. Assumimos portanto que $c_{\mathsf{e}} = c_{\mathsf{f}}$ não é possível. Então, como se pode facilmente verificar, já que l_{e} e l_{f} são escolhidas quase livremente (no sentido em que a sua única restrição é o seu comprimento, que tem de ser suficientemente grande), $\mathbf{d}_{\alpha(\mathsf{e})}$ e $\mathbf{d}_{\alpha(\mathsf{f})}$ têm de ser ultimamente periódicas, com período $v = v_{\alpha(\mathsf{e})} = v_{\alpha(\mathsf{f})}$. Além disso, podemos tomar $c_{\mathsf{e}} = v^{ms}u$ e $c_{\mathsf{f}} = v^{ms}u'$ para algumas palavras u e u' tais que $u = v^p u'$ ou $u' = v^p u$. Consideremos apenas o primeiro caso, pois o outro é simétrico. Então,

$$\widehat{c_{\mathsf{e}}} = v^{\omega+ms}v^p x \quad \text{e} \quad \widehat{c_{\mathsf{f}}} = v^{\omega+ms}x,$$

para algum κ-termo de rank 1 x, donde **LSl** $\models \widehat{c_{\mathsf{e}}} = v^\omega x = \widehat{c_{\mathsf{f}}}$. Isto conclui a prova de que a condição i.1) também é satisfazível, mostrando assim que os inteiros i_{v} e i_{e}, fixados na Definição 8.2.5, estão bem definidos. Devemos também notar que i.1) substitui a condição (a) em [35, Definição 6.4], a análoga da Definição 8.2.5. Desta forma corrigimos um erro em [35] uma vez que essa condição (a), que estabelece que "se e e e' são duas arestas tais que $\mathbf{w}_{\mathsf{e}} \sim \mathbf{w}_{\mathsf{e}'}$, então $c_{\mathsf{e}} = c_{\mathsf{e}'}$", não é satisfazível. De facto, suponhamos que e e e' são arestas tais que $\alpha(\mathsf{e}) = \alpha(\mathsf{e}') = \mathsf{v}$, $\mathbf{d}_{\mathsf{v}} = a^{-\infty}$, $\mathbf{k}_{\mathsf{e}} = ba^{+\infty}$ e $\mathbf{k}_{\mathsf{e}'} = aba^{+\infty}$. Então $\mathbf{w}_{\mathsf{e}} \sim \mathbf{w}_{\mathsf{e}'}$, $r_{\mathsf{v}} = a^{i_{\mathsf{v}}}$, $l_{\mathsf{e}} = ba^{i_{\mathsf{e}}-1}$ e $l_{\mathsf{e}'} = aba^{i_{\mathsf{e}'}-2}$, donde $c_{\mathsf{e}} = a^{i_{\mathsf{v}}}ba^{i_{\mathsf{e}}-1} \neq a^{i_{\mathsf{v}}}aba^{i_{\mathsf{e}'}-2} = c_{\mathsf{e}'}$.

Terminamos esta subsecção fixando os inteiros N e n que serão muito importantes no resto do capítulo. Note-se que, para cada aresta $\mathsf{f} \in F_\Gamma$ tal que $\mathbf{w}_{\mathsf{f}}$ é não periódica, como a palavra c_{f} é um centro de $\mathbf{w}_{\mathsf{f}}$ e $i_{\mathsf{f}} \geq Q$ pela condição i.4) acima, o dual do Lema 7.4.6 garante a existência de uma extensão à esquerda $\overleftarrow{c_{\mathsf{f}}}$ de c_{f} tal que: para todos os $\mathbf{w}_{\mathsf{f}}, \mathbf{w}_{\mathsf{f}'} \in B$ e toda a palavra $w \in A^+$, se duas ocorrências distintas de c_{f} e $c_{\mathsf{f}'}$ são permitidas em w em relação a $\overleftarrow{c_{\mathsf{f}}}$ e $\overleftarrow{c_{\mathsf{f}'}}$ respectivamente, então essas ocorrências de c_{f} e $c_{\mathsf{f}'}$ são disjuntas.

Definição 8.2.6 (constantes L, n e N) *Seja L um inteiro maior do que os comprimentos de todas as palavras l_{g}, r_{g}, c_{e} e $\overleftarrow{c_{\mathsf{e}}}$, e seja $n > 3L + k''$. Então fixamos um inteiro $N > (2n + k + 1)|A|^{2n+k} + 6n$.*

Note-se que L e n já foram usados em [35]. Note-se ainda que $|A|^{2n+k}$ é o número de palavras diferentes de comprimento $2n + k$ sobre o alfabeto A. Assim, para toda a palavra $w \in A^+$ de comprimento $(2n + k + 1)|A|^{2n+k}$ existe uma palavra de comprimento $2n + k$ que possui pelo menos duas ocorrências disjuntas em w.

8.2.3 Aplicação da κ-redutiblidade de V

Vamos iniciar a construção da κ-solução δ'_* de Γ_* módulo $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ aplicando a κ--redutiblidade de $\mathbf{V}$. No entanto, como precisamos que δ'_* satisfaça a condição (PT), não vamos aplicar a κ-redutiblidade de $\mathbf{V}$ directamente à solução δ_*. Primeiro estendemos o grafo Γ_* e a solução δ_* a um grafo $\Gamma_\bullet$ e uma solução $\delta_\bullet$ de uma forma adequada, e só depois aplicamos a κ-redutiblidade de $\mathbf{V}$ (à solução $\delta_\bullet$). Obteremos assim uma κ-solução δ''_* de Γ_* módulo $\mathbf{V}$. É claro que, esta κ-solução δ''_* não é necessariamente uma solução módulo $\mathbf{LSl}$. No entanto, vamos mostrar que é possível obrigar δ''_* a ser uma solução módulo $\mathbf{LSl}_P$ para algum P grande, e em seguida transformar δ''_* numa κ-solução δ'_* módulo $\mathbf{LSl}$ sem perder a propriedade de ser uma solução módulo $\mathbf{V}$. Para isso, é necessário observar primeiro alguns factos relativos a δ_* (ver [22, 35] para mais detalhes).

Recordemos que $\mathcal{E}_0(\Gamma_*)$ é o conjunto das arestas $\mathsf{e} \in \Gamma_*$ tais que $\delta_*(\mathsf{e})$ é uma palavra finita. Para simplificar a notação, denotamos simplesmente $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0(\Gamma_*)$ e definimos $\mathcal{E}_\omega = \mathcal{E}(\Gamma_*) \setminus \mathcal{E}_0$. Seja ϕ a relação de equivalência sobre $\mathcal{V}(\Gamma_*)$ gerada pela relação

$$\{(\mathsf{v}, \mathsf{w}) \in \mathcal{V}(\Gamma_*) \times \mathcal{V}(\Gamma_*) : \text{ existe uma aresta } \mathsf{v} \xrightarrow{\mathsf{e}} \mathsf{w} \text{ com } \mathsf{e} \in \mathcal{E}_0\}.$$

Para cada vértice v, seja $\phi(\mathsf{v})$ a ϕ-classe de v e definamos

- $\mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v})} = \{\mathsf{e} \in \mathcal{E}_0 : \omega(\mathsf{e}) \in \phi(\mathsf{v})\} = \{\mathsf{e} \in \mathcal{E}_0 : \alpha(\mathsf{e}) \in \phi(\mathsf{v})\}$,
- $\mathcal{E}_\mathsf{v} = \{\mathsf{e} \in \mathcal{E}(\Gamma_*) : \omega(\mathsf{e}) = \mathsf{v}\}$,
- $\mathcal{E}_{\mathsf{v},0} = \mathcal{E}_\mathsf{v} \cap \mathcal{E}_0$ e $\mathcal{E}_{\mathsf{v},\omega} = \mathcal{E}_\mathsf{v} \cap \mathcal{E}_\omega$.

Seleccionamos um vértice v_0, chamado o *representante* da classe $\phi(\mathsf{v}_0)$, tal que $\mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v}_0)}$ é não vazio. Seja $m_{\phi(\mathsf{v}_0)}$ o comprimento máximo das etiquetas dos caminhos não orientados, sem arestas repetidas, consistindo de arestas de $\mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v}_0)}$. Como $\delta_*(\mathsf{v}_0)$ é uma pseudopalavra infinita, existe uma factorização

$$p_{\mathbf{D}} \circ \delta_*(\mathsf{v}_0) = z_{\phi(\mathsf{v}_0)} s_{\mathsf{v}_0} \tag{8.9}$$

onde s_{v_0} é uma palavra de comprimento $m_{\phi(\mathsf{v}_0)}$ e $z_{\phi(\mathsf{v}_0)} \in \overline{\Omega}_A\mathbf{D}$ é uma pseudopalavra infinita. Seja $\mathsf{v} \in \phi(\mathsf{v}_0)$. Seleccionamos um caminho não orientado de v_0 para v consistindo de arestas de $\mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v}_0)}$ com comprimento mínimo das etiquetas. Note-se que podemos assumir, sem perda de generalidade, que $M \geq 2\max\{m_{\phi(\mathsf{v})} : \mathsf{v} \in \mathcal{V}(\Gamma_*), \mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v})} \neq \emptyset\}$. Seja h a etiqueta deste caminho e tomemos $s_{\mathsf{v}} = s_{\mathsf{v}_0} h$. Como o comprimento de h é no máximo $m_{\phi(\mathsf{v}_0)}$, e uma vez que a acção h sobre s_{v_0} está definida, s_{v} pertence a A^*. Como δ_* é uma solução de Γ_* módulo $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$, também é uma solução de Γ_* módulo $\mathbf{D}$, donde

$$p_{\mathbf{D}} \circ \delta_*(\mathsf{v}) = z_{\phi(\mathsf{v}_0)} s_{\mathsf{v}}.$$

Além disso, para toda a aresta $\mathsf{e} \in \mathcal{E}_{\mathsf{v},\omega}$,

$$p_{\mathbf{D}} \circ \delta_*(\mathsf{e}) = p_{\mathbf{D}} \circ \delta_*(\mathsf{v}) = z_{\phi(\mathsf{v}_0)} s_{\mathsf{v}}. \tag{8.10}$$

Como consequência, deduzimos que, para todos os $\mathsf{v} \in \phi(\mathsf{v}_0)$ e $\mathsf{e} \in \mathcal{E}_{\mathsf{v},\omega}$,

$$\delta_*(\mathsf{v}) = \rho_{\mathsf{v}} \cdot \pi_{\phi(\mathsf{v}_0)} \cdot s_{\mathsf{v}} \tag{8.11}$$

$$\delta_*(\mathsf{e}) = \rho_{\mathsf{e}} \cdot \pi_{\phi(\mathsf{v}_0)} \cdot s_{\mathsf{v}} \tag{8.12}$$

para algumas pseudopalavras infinitas $\pi_{\phi(\mathsf{v}_0)}$, ρ_{v} e ρ_{e}. Para além disso, se a restrição de δ_* a $\mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v}_0)}$ não é uma etiquetagem comutativa, então $z_{\phi(\mathsf{v}_0)} = v^{-\infty}u$ para algumas palavras finitas u e $v \neq 1$, e pode-se escolher $\pi_{\phi(\mathsf{v}_0)} = v^{\omega}u$ pelo dual do Lema 3.6.3.

Agora, seja $P = N + M$ onde N é o inteiro fixado na Definição 8.2.6. Note-se que, pela Proposição 4.1.1, $\overline{\Omega}_A\mathbf{LSl}_P$ é isomorfo ao semigrupo finito $A^+/{\sim_P}$. Para cada vértice $\mathsf{v} \in \Gamma_*$, consideremos uma factorização

$$\delta_*(\mathsf{v}) = u_{\mathsf{v}} \pi_{\mathsf{v}} \tag{8.13}$$

onde u_{v} é uma palavra finita de comprimento M (donde π_{v} é uma pseudopalavra infinita). Estendemos o grafo Γ_* a um grafo $\Gamma_\bullet$ e estendemos a solução δ_* de Γ_* a uma solução $\delta_\bullet$ de $\Gamma_\bullet$ módulo $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ com respeito a um par $(\gamma_\bullet, \psi)$ como segue. Para cada vértice $\mathsf{v} \in \Gamma$, inserimos um novo vértice z_{v} e uma nova aresta $\mathsf{z}_{\mathsf{v}} \xrightarrow{\mathsf{e}_{\mathsf{v}}} \mathsf{v}$

em $\Gamma_\bullet$, e definimos $\delta_\bullet(\mathsf{z_v}) = u_\mathsf{v}$ e $\delta_\bullet(\mathsf{e_v}) = \pi_\mathsf{v}$. Consideremos também $\gamma_\bullet : \Gamma_\bullet \to S$ a etiquetagem de $\Gamma_\bullet$ definida por $\gamma_\bullet = \psi \circ \delta_\bullet$. Claramente, $\delta_\bullet$ é de facto uma solução de $\Gamma_\bullet$ módulo $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ com respeito a $(\gamma_\bullet, \psi)$.

Como $\delta_\bullet$ é uma solução de $\Gamma_\bullet$ módulo $\mathbf{V}$, podemos aplicar o Lema 8.1.1 à pseudovariedade κ-redutível $\mathbf{V}$ com a finalidade de obtermos uma κ-solução $\delta'_\bullet$ módulo $\mathbf{V}$. Além disso, tendo em conta a Observação 8.1.2, podemos assegurar que os prefixos e os sufixos de comprimento $\ell < P$ e os factores de comprimento $\ell \leq P$ de $\delta_\bullet(\mathsf{g})$ são preservados para cada $\mathsf{g} \in \Gamma_\bullet$, porque estes parâmetros de $\delta_\bullet(\mathsf{g})$ podem ser testados no semigrupo finito $\overline{\Omega}_A\mathbf{LSl}_P$. Ou seja, $\mathbf{LSl}_P \models \delta'_\bullet(\mathsf{g}) = \delta_\bullet(\mathsf{g})$ para todo o $\mathsf{g} \in \Gamma_\bullet$. Como $\delta_\bullet$ é uma solução módulo $\mathbf{LSl}_P$, resulta que $\delta'_\bullet$ também é uma solução módulo $\mathbf{LSl}_P$. Concluímos que $\delta'_\bullet$ é uma κ-solução de $\Gamma_\bullet$ módulo $\mathbf{LSl}_P \vee \mathbf{V}$ com respeito a $(\gamma_\bullet, \psi)$ tal que,

$$\forall \mathsf{g} \in \Gamma_\bullet,\ \mathbf{LSl}_P \models \delta'_\bullet(\mathsf{g}) = \delta_\bullet(\mathsf{g}). \tag{8.14}$$

Uma vez que $\delta'_\bullet$ verifica as condições (a) e (b) do Lema 8.1.1, deduzimos ainda que, para todo o $\mathsf{g} \in \Gamma_\bullet$: $\delta_\bullet(\mathsf{g})$ é uma pseudopalavra infinita se e só se $\delta'_\bullet(\mathsf{g})$ é uma κ-palavra infinita; se $\delta_\bullet(\mathsf{g})$ é uma palavra finita, então $\delta'_\bullet(\mathsf{g}) = \delta_\bullet(\mathsf{g})$. Definimos uma nova etiquetagem $\delta''_* : \Gamma_* \to \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$ de Γ_* como segue. Para cada vértice $\mathsf{v} \in \mathcal{V}(\Gamma_*)$ e cada aresta $\mathsf{e} \in \mathcal{E}(\Gamma_*)$, definimos

$$\delta''_*(\mathsf{v}) = \delta'_\bullet(\mathsf{z_v})\delta'_\bullet(\mathsf{e_v}) = u_\mathsf{v}\delta'_\bullet(\mathsf{e_v}) \quad \text{e} \quad \delta''_*(\mathsf{e}) = \delta'_\bullet(\mathsf{e}). \tag{8.15}$$

Então $\mathbf{LSl}_P \vee \mathbf{V} \models \delta''_*(\mathsf{v}) = \delta'_\bullet(\mathsf{v})$, pois $\delta'_\bullet$ é uma solução de $\Gamma_\bullet$ módulo $\mathbf{LSl}_P \vee \mathbf{V}$ e $\mathsf{z_v} \xrightarrow{\mathsf{e_v}} \mathsf{v}$ é uma aresta de $\Gamma_\bullet$. Portanto, tem-se o seguinte lema.

Lema 8.2.7 *A etiquetagem δ''_* é uma κ-solução de Γ_* módulo $\mathbf{LSl}_P \vee \mathbf{V}$ com respeito a (γ_*, ψ) tal que, para cada $\mathsf{g} \in \Gamma_*$ e cada vértice $\mathsf{v} \in \Gamma_*$:*

(a) *$\delta_*(\mathsf{g})$ é uma pseudopalavra infinita se e só se $\delta''_*(\mathsf{g})$ é uma κ-palavra infinita. Em particular, $\delta''_*(\mathsf{v})$ é infinita. Além disso, para cada aresta $\mathsf{e} \in \mathcal{E}_0(\Gamma_*)$, $\delta''_*(\mathsf{e}) = \delta_*(\mathsf{e})$;*

(b) *se $\delta_*(\mathsf{v}) = u\pi$ onde $u \in A^+$ é uma palavra de comprimento M e $\pi \in \overline{\Omega}_A\mathbf{S}$, então $\delta''_*(\mathsf{v}) = u\pi''$ onde $\pi'' \in \Omega_A^\kappa\mathbf{S}$ é tal que $\psi(\pi) = \psi(\pi'')$;*

(c) *$\mathbf{LSl}_P \models \delta''_*(\mathsf{g}) = \delta_*(\mathsf{g})$.*

Note-se que a condição (b) acima resulta imediatamente de (8.15) e mostra que δ''_* verifica a condição (PT). Como referimos acima, δ''_* não é necessariamente uma solução módulo **LSl**. Vamos usar o facto de δ''_* coincidir com δ_* módulo $\mathbf{LSl}_P$, para transformar δ''_* numa κ-solução δ'_* módulo **LSl** sem perder a propriedade de ser uma solução módulo **V** que satisfaz (PT).

8.2.4 κ-redutibilidade do segundo tipo

O nosso próximo objectivo é reduzir ao caso em que as etiquetas são infinitas também nas arestas e não apenas nos vértices. Seguimos a técnica da redução análoga apresentada em [35, Proposição 6.1] para o caso da pseudovariedade **LSl**. Informalmente falando, a ideia é eliminar as arestas e etiquetadas por palavras finitas e transferir o sufixo $s_{\omega(\mathsf{e})}$ da etiqueta de $\omega(\mathsf{e})$ para a etiqueta de todas as arestas com origem em $\omega(\mathsf{e})$. Depois, se somos capazes de determinar uma solução do grafo reduzido que verifica a condição (PT) estendida às arestas, então podemos voltar atrás e reverter as modificações acima, obtendo-se assim a κ-solução pretendida de Γ_*.

Consideremos de novo o subgrafo $\Gamma = \Gamma_* \setminus \mathcal{E}_0(\Gamma_*)$ de Γ_* introduzido na Secção 8.2.2. Sejam $\mathsf{v} \in \mathcal{V}(\Gamma)$ e $\mathsf{e} \in \mathcal{E}_{\mathsf{v},\omega}$. Por (8.11), (8.12) e pelo Lema 8.2.7(c), como $P > M \geq |s_\mathsf{v}|$, deduzimos que existem κ-palavras infinitas τ_v e τ_e tais que

$$\delta''_*(\mathsf{v}) = \tau_\mathsf{v} \cdot s_\mathsf{v}, \tag{8.16}$$

$$\delta''_*(\mathsf{e}) = \tau_\mathsf{e} \cdot s_\mathsf{v}. \tag{8.17}$$

Definimos uma nova etiquetagem $\delta'_0 : \Gamma \to \Omega^\kappa_A \mathbf{S}$ de Γ como segue. Para cada vértice $\mathsf{v} \in \Gamma$ e cada aresta $\mathsf{e} \in \mathcal{E}_{\mathsf{v},\omega}$, definimos

$$\delta'_0(\mathsf{v}) = \begin{cases} \tau_\mathsf{v} & \text{se } \mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v})} \neq \emptyset \\ \tau_\mathsf{v} \cdot s_\mathsf{v} & \text{se } \mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v})} = \emptyset \end{cases}$$

e

$$\delta'_0(\mathsf{e}) = \begin{cases} \tau_\mathsf{e} & \text{se } \mathcal{E}_{\phi(\alpha(\mathsf{e}))} = \emptyset \text{ e } \mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v})} \neq \emptyset \\ s_{\alpha(\mathsf{e})} \cdot \tau_\mathsf{e} & \text{se } \mathcal{E}_{\phi(\alpha(\mathsf{e}))} \neq \emptyset \text{ e } \mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v})} \neq \emptyset \\ \tau_\mathsf{e} \cdot s_\mathsf{v} & \text{se } \mathcal{E}_{\phi(\alpha(\mathsf{e}))} = \emptyset \text{ e } \mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v})} = \emptyset \\ s_{\alpha(\mathsf{e})} \cdot \tau_\mathsf{e} \cdot s_\mathsf{v} & \text{se } \mathcal{E}_{\phi(\alpha(\mathsf{e}))} \neq \emptyset \text{ e } \mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v})} = \emptyset. \end{cases}$$

Consideremos também $\gamma_0 : \Gamma \to S$ a etiquetagem de Γ definida por $\gamma_0 = \psi \circ \delta'_0$. Como cada palavra s_v tem comprimento menor do que M e $N = P - M$, é simples verificar o seguinte.

Lema 8.2.8 *A etiquetagem δ_0' é uma κ-solução de Γ módulo* $\mathbf{LSl}_N$ *com respeito a (γ_0, ψ) tal que $\delta_0'(\mathsf{g})$ é uma κ-palavra infinita para cada $\mathsf{g} \in \Gamma$. Além disso, se $\mathcal{E}_0(\Gamma_*) = \emptyset$, então $\Gamma = \Gamma_*$, $\delta = \delta_*$ e $\delta_0' = \delta_*''$.*

Suponhamos que construímos uma κ-solução δ' de Γ módulo **LSl** com respeito a (γ_0, ψ) de tal forma que, para cada $\mathsf{g} \in \Gamma$ e $\mathsf{v}, \mathsf{w} \in \mathcal{V}(\Gamma)$,

(ST.1) se $\delta_0'(\mathsf{g}) = u\pi_0'$ onde $u \in A^+$ é uma palavra de comprimento M e $\pi_0' \in \Omega_A^\kappa \mathbf{S}$, então $\delta'(\mathsf{g}) = u\pi'$ onde $\pi' \in \Omega_A^\kappa \mathbf{S}$ é tal que $\psi(\pi_0') = \psi(\pi')$;

(ST.2) se $\mathbf{D} \models \delta(\mathsf{g}) = \delta_*''(\mathsf{g}) = x^{-\infty}y$, onde $x \neq 1$ e y são palavras finitas, então $\mathbf{D} \models \delta'(\mathsf{g}) = \delta_0'(\mathsf{g})$;

(ST.3) se $\mathbf{LSl}_N \models \delta_0'(\mathsf{v}) = \delta_0'(\mathsf{w})$, então $\mathbf{LSl} \models \delta'(\mathsf{v}) = \delta'(\mathsf{w})$;

(ST.4) $\mathbf{V} \models \delta'(\mathsf{g}) = \delta_0'(\mathsf{g})$.

Se uma tal κ-solução δ' existe, então dizemos que $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ é ST ("segundo tipo") κ-redutível. Devemos notar que:

(1) por (ST.1), se e é uma aresta tal que $\mathcal{E}_{\phi(\alpha(\mathsf{e}))} \neq \emptyset$, então $\delta'(\mathsf{e}) = s_{\alpha(\mathsf{e})} \cdot \pi_{\mathsf{e}}'$ para algum $\pi_{\mathsf{e}}' \in \Omega_A^\kappa \mathbf{S}$;

(2) as condições h.3) e h.5) na Secção 8.2.2 serão fundamentais para garantir a validade de (ST.2). Esta condição (ST.2) é necessária para tratar o caso não comutativo. Por exemplo, se temos uma aresta $\mathsf{e} \in \Gamma_*$ que é um lacete num vértice v e $\delta_*(\mathsf{e})$ é uma palavra finita z, então $\mathcal{E}(\phi(\mathsf{v})) \neq \emptyset$ e $\delta(\mathsf{v}) = \delta_*(\mathsf{v})$ pode ser escrita na forma $\rho_{\mathsf{v}} v^\omega u s_{\mathsf{v}}$, como vimos em (8.11) e no parágrafo abaixo dele. Note-se que $\mathbf{D} \models \delta_*(\mathsf{v}) = \delta_*(\mathsf{v})z$, donde $\mathbf{D} \models \delta_*(\mathsf{v}) = v^\omega u s_{\mathsf{v}} = z^\omega$. Além disso, como $\delta_*''(\mathsf{e}) = \delta_*(\mathsf{e}) = z$, deduzimos como acima que $\mathbf{D} \models \delta_*''(\mathsf{v}) = z^\omega$. Logo $\mathbf{D} \models \delta_*(\mathsf{v}) = \delta_*''(\mathsf{v}) = z^\omega = v^\omega u s_{\mathsf{v}}$ e $\mathbf{D} \models \delta_0'(\mathsf{v}) = v^\omega u$. Vamos definir $\delta_*'(\mathsf{e})$ como sendo z e $\delta_*'(\mathsf{v})$ como sendo $\delta'(\mathsf{v})s_{\mathsf{v}}$. Por outro lado, como δ_*' vai ser em particular uma solução módulo $\mathbf{D}$, teremos que $\mathbf{D} \models \delta_*'(\mathsf{v}) = \delta_*'(\mathsf{v})z$, donde $\mathbf{D} \models \delta_*'(\mathsf{v}) = z^\omega$. Portanto, temos de ter $\mathbf{D} \models \delta'(\mathsf{v})s_{\mathsf{v}} = z^\omega = v^\omega u s_{\mathsf{v}}$ e, consequentemente, $\mathbf{D} \models \delta'(\mathsf{v}) = v^\omega u = \delta_0'(\mathsf{v})$;

(3) suponhamos que v é um vértice tal que $\mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v})} \neq \emptyset$ e v_0 é o representante da classe $\phi(\mathsf{v})$. Recordemos que $s_{\mathsf{v}} = s_{\mathsf{v}_0}h$ onde h é a etiqueta de um caminho não orientado de v_0 para v consistindo de arestas de $\mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v}_0)}$. Então $\mathbf{LSl} \models \delta_*(\mathsf{v}) = \delta_*(\mathsf{v}_0)h$, donde $\mathbf{LSl}_P \models \delta_*''(\mathsf{v}) = \delta_*''(\mathsf{v}_0)h$ pelo Lema 8.2.7(c). Uma vez que $|s_{\mathsf{v}}| \leq M$ e $P = N + M$, resulta da definição de δ_0' que $\mathbf{LSl}_N \models \delta_0'(\mathsf{v}) = \delta_0'(\mathsf{v}_0)$. Portanto, por (ST.3), $\mathbf{LSl} \models \delta'(\mathsf{v}) = \delta'(\mathsf{v}_0)$;

(4) no caso em que $\mathcal{E}_0 \neq \emptyset$, a propriedade de ser uma solução módulo $\mathbf{V}$ pode ter-se perdido na passagem da etiquetagem δ''_* para δ'_0. Contudo, como uma consequência da condição (ST.4), vamos recuperar essa propriedade na passagem de δ' para δ'_* pois nessa passagem vamos reverter as transformações feitas de δ''_* para δ'_0.

Definimos δ'_* como sendo a etiquetagem de Γ_* tal que:

- para cada vértice $\mathsf{v} \in \Gamma_*$,

$$\delta'_*(\mathsf{v}) = \begin{cases} \delta'(\mathsf{v}) \cdot s_{\mathsf{v}} & \text{se } \mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v})} \neq \emptyset \\ \delta'(\mathsf{v}) & \text{se } \mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v})} = \emptyset; \end{cases}$$

- para cada aresta $\mathsf{e} \in \mathcal{E}_0$, $\delta'_*(\mathsf{e}) = \delta_*(\mathsf{e})$;

- para cada aresta $\mathsf{e} \in \mathcal{E}_{\mathsf{v},\omega}$,

$$\delta'_*(\mathsf{e}) = \begin{cases} \delta'(\mathsf{e}) \cdot s_{\mathsf{v}} & \text{se } \mathcal{E}_{\phi(\alpha(\mathsf{e}))} = \emptyset \text{ e } \mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v})} \neq \emptyset \\ \pi'_{\mathsf{e}} \cdot s_{\mathsf{v}} & \text{se } \mathcal{E}_{\phi(\alpha(\mathsf{e}))} \neq \emptyset \text{ e } \mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v})} \neq \emptyset \\ \delta'(\mathsf{e}) & \text{se } \mathcal{E}_{\phi(\alpha(\mathsf{e}))} = \emptyset \text{ e } \mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v})} = \emptyset \\ \pi'_{\mathsf{e}} & \text{se } \mathcal{E}_{\phi(\alpha(\mathsf{e}))} \neq \emptyset \text{ e } \mathcal{E}_{\phi(\mathsf{v})} = \emptyset. \end{cases}$$

Então, como se pode facilmente verificar, δ'_* é de facto uma κ-solução de Γ_* módulo $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ com respeito a (γ_*, ψ) que satisfaz a condição (PT). Isto prova o seguinte resultado.

Proposição 8.2.9 *Se $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ é ST κ-redutível, então é κ-redutível.*

O objectivo do resto do capítulo é provar a κ-redutibilidade ST de $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$. Assumimos portanto que M e N são inteiros positivos (com N dado pela Definição 8.2.6) e que δ'_0 é uma κ-solução de um grafo finito Γ módulo $\mathbf{LSl}_N$ com respeito a um par (γ_0, ψ), etiquetando cada elemento de Γ por uma κ-palavra infinita. Precisamos de construir uma κ-solução δ' de Γ módulo $\mathbf{LSl}$ com respeito a (γ_0, ψ) satisfazendo as condições (ST.1)–(ST.4).

Apenas para nos permitir usar as notações relativas a δ já introduzidas na Secção 8.2.2, vamos supor ainda que $\mathcal{E}_0(\Gamma_*) = \emptyset$ donde $\Gamma = \Gamma_*$, $\delta = \delta_*$ e $\delta'_0 = \delta''_*$ e $\gamma = \gamma_* = \gamma_0$. Note-se que, pelo Lema 8.2.7(c), $\mathbf{LSl}_P \models \delta''_*(\mathsf{g}) = \delta_*(\mathsf{g})$ para todo o $\mathsf{g} \in \Gamma_*$. Portanto, essa suposição é inofensiva pois serve apenas para evitarmos ter de reorganizar a notação a fim de lidar com a transferência do sufixo $s_{\omega(\mathsf{e})}$ da etiqueta de alguns vértices $\omega(\mathsf{e})$ para a etiqueta de todas as arestas com origem em $\omega(\mathsf{e})$. Assim, com esta nova notação e para futura referência, temos que

$$\forall \mathsf{g} \in \Gamma,\ \mathbf{LSl}_N \models \delta'_0(\mathsf{g}) = \delta(\mathsf{g}). \tag{8.18}$$

8.3 Algoritmo de transformação

Iniciamos a descrição do algoritmo de transformação de δ'_0 na κ-solução δ' explicando alguns detalhes do processo. Para cada $\mathtt{g} \in \Gamma$, fixamos um κ-termo $w_{\mathtt{g},0} \in T^\kappa_A$ tal que $\epsilon(w_{\mathtt{g},0}) = \delta'_0(\mathtt{g})$. Vamos aplicar a cada um destes κ-termos $w_{\mathtt{g},0}$ um processo de transformação, consistindo de 5 passos, descrito nas subsecções que se seguem. O κ-termo que surge após o j-ésimo passo será denotado por $w_{\mathtt{g},j}$ e definimos $\delta'_j(\mathtt{g}) = \epsilon(w_{\mathtt{g},j})$. Assim, para cada $j \in \{0, \ldots, 5\}$,

$$\begin{array}{rcl} \delta'_j : \Gamma & \longrightarrow & \Omega^\kappa_A \mathbf{S} \\ \mathtt{g} & \longmapsto & \epsilon(w_{\mathtt{g},j}) \end{array} \tag{8.19}$$

define uma etiquetagem de Γ por κ-palavras. A κ-solução δ' módulo **LSl** será então definida como $\delta' = \delta'_5$. Assim, a etiquetagem de partida δ'_0, que é uma solução módulo $\mathbf{LSl}_N$, pode ser encarada como uma espécie de "aproximação inicial" da solução δ' e o objectivo do nosso algoritmo é determinar as etiquetagens $\delta'_1, \ldots, \delta'_5$ "convergindo" para essa solução. O último passo do processo de transformação vai reproduzir algumas partes do algoritmo descrito por Costa e Teixeira em [35] para provar a κ-redutibilidade de **LSl**, o que vai tornar o nosso trabalho mais simples. Além de ter de preservar o valor módulo **V** (condição (ST.4)), o que é fácil, existe no entanto uma grande diferença que torna o nosso algoritmo mais complexo: os κ-termos de partida $w_{\mathtt{g},0}$ são infinitos, ao passo que em [35] são finitos. Assim, enquanto que para **LSl** foi usada apenas uma regra de transformação, para o processo de transformação no caso de $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ será necessário usar várias regras de reescrita para κ-termos, as quais passamos a descrever.

8.3.1 Regras de reescrita

Usaremos o seguinte conjunto Σ de *regras de reescrita* para κ-termos (onde $x, y \in T^\kappa_A$ e $i, j \in \mathbb{Z}$)

(R.1) $(x^{\omega+i})^{\omega+j} \to x^{\omega+ij}$,

(R.2) $(x^i)^{\omega+j} \rightleftarrows x^{\omega+ij}$, $\quad (i > 0)$

(R.3) $x^{\omega+i}x^{\omega+j} \rightleftarrows x^{\omega+i+j}$,

(R.4) $x^i x^{\omega+j} \rightleftarrows x^{\omega+i+j}, x^{\omega+j}x^i \rightleftarrows x^{\omega+i+j}$, $\quad (i > 0)$

(R.5) $(xy)^{\omega+i} \to x(yx)^{\omega+i-1}y$,

(R.6) $u \to \overline{u}$, $\quad (u \in A^+$ com $\overline{u}$ definido em (7.10) e (7.11)).

Como se pode observar, as regras (R.1)–(R.5) provêm das identidades (7.2)–(7.6) acima, as quais são válidas em **S**. Pelo contrário, a regra (R.6) não preserva o valor do κ-termo sobre **S**, mas preserva o valor sobre **V** como referido na Subsecção 7.4.2. Observemos também que, como nas regras (R.2)–(R.4), poderiamos permitir também nas regras (R.1), (R.5) e (R.6) as transformações dos termos da direita nos da esquerda. Como não precisamos de usar essas transformações, não as incluímos nas regras. Se começarmos com um κ-termo que contém um subtermo escrito na forma do κ-termo do lado esquerdo da regra (R.m) e reescrevermos este subtermo na forma do que se encontra do lado direito, então esta aplicação da regra (R.m) será chamada uma *transformação da esquerda para a direita do tipo m*. A transformação no sentido oposto será denominada uma *transformação da direita para a esquerda do tipo m*. Para as transformações do tipo 4, distinguiremos ainda entre 4_E e 4_D dependendo se é usada $x^i x^{\omega+j} \rightleftarrows x^{\omega+i+j}$ ou $x^{\omega+j}x^i \rightleftarrows x^{\omega+i+j}$.

Como mencionado anteriormente, partindo de cada $w_{\mathtt{g},0}$, usaremos Σ para derivar sucessivamente os κ-termos $w_{\mathtt{g},1}, \ldots, w_{\mathtt{g},5}$ e definimos $\delta'_j(\mathtt{g}) = \epsilon(w_{\mathtt{g},j})$, para $j \in \{1, \ldots, 5\}$, e $\delta' = \delta'_5$. Uma vez que cada regra de Σ preserva o valor sobre o semigrupo fixo S, teremos $\psi(w_{\mathtt{g},0}) = \psi(w_{\mathtt{g},j})$. Assim, como $\psi \circ \delta'_0 = \gamma_0$, esta igualdade garante que $\psi \circ \delta'_j = \gamma_0$ e, em particular,

$$\psi \circ \delta' = \gamma_0.$$

Note-se que pretendemos que δ'_5 seja uma κ-solução módulo **LSl**. Como δ'_0 é uma solução módulo $\mathbf{LSl}_N$ e, portanto, não é necessariamente uma solução módulo **LSl** (nesse caso não teríamos nada a fazer), é a regra (R.6) que nos vai permitir converter δ'_0 numa solução δ'_5 módulo **LSl**. De facto, esta regra é a única que altera o valor dos κ-termos sobre **S** (e sobre **LSl**). A escolha de um N suficientemente grande foi para tornar essa conversão possível. Além disso, como cada regra de Σ preserva o valor sobre **V**, a condição (ST.4) será trivialmente verificada.

8.3.2 Passos iniciais

Começamos por notar que o κ-termo $w_{\mathtt{g},0}$ pode ser escolhido à partida na forma $w_{\mathtt{g},0} = l_{\mathtt{g}} w'_{\mathtt{g},0} r_{\mathtt{g}}$, onde $l_{\mathtt{g}}$ e $r_{\mathtt{g}}$ são as palavras finitas definidas em (8.2)–(8.3). De facto, $l_{\mathtt{g}}$ e $r_{\mathtt{g}}$ têm comprimento no máximo L e, assim, menor do que N pela Definição 8.2.6. Portanto, por (8.18), $l_{\mathtt{g}}$ e $r_{\mathtt{g}}$ são, respectivamente, um prefixo e um sufixo da κ-palavra $\delta'_0(\mathtt{g})$. Assim, dado um qualquer κ-termo w tal que $\epsilon(w) = \delta'_0(\mathtt{g})$, para fazer aparecer $l_{\mathtt{g}}$ e $r_{\mathtt{g}}$ seria suficiente, se necessário, aplicar transformações da direita para a esquerda dos tipos 4_E e 4_D, para obter o κ-

-termo $w_{\mathsf{g},0}$ da forma pretendida. O objectivo principal desta escolha de $w_{\mathsf{g},0}$ é explicado na seguinte observação.

Observação 8.3.1 *Os próximos passos não vão alterar o prefixo l_{g} nem o sufixo r_{g} de $w_{\mathsf{g},0}$, até ao passo 5 onde estes serão substituídos respectivamente por $\widehat{l_{\mathsf{g}}} = l_{\mathsf{g},1}\overline{l_{\mathsf{g},2}}$ e $\widehat{r_{\mathsf{g}}} = \overline{r_{\mathsf{g},2}}\,r_{\mathsf{g},1}$, os κ-termos de rank 1 definidos em* (8.7).

Como consequência, podemos concluir antecipadamente que a etiquetagem $\delta' = \delta'_5$ será uma κ-solução módulo **LI**. *Para justificar esta afirmação vamos mostrar que a etiquetagem δ'_5 verifica cada pseudoidentidade*

$$\delta'_5(\alpha(\mathsf{e})) \cdot \delta'_5(\mathsf{e}) = \delta'_5(\omega(\mathsf{e}))$$

módulo **LI**. *Pela condição h.*3) *na Secção 8.2.2, $\widehat{r_{\mathsf{e}}} = \widehat{r_{\omega(\mathsf{e})}}$, donde a pseudoidentidade será verificada módulo* **D**. *Por outro lado, por* (8.1), $\mathbf{k}_{\alpha(\mathsf{e})} = \mathbf{k}_{\omega(\mathsf{e})}$ *pois δ é uma solução de Γ módulo* **K**. *Portanto $l_{\alpha(\mathsf{e})} = l_{\omega(\mathsf{e})}$ por* (8.2), *e $\widehat{l_{\alpha(\mathsf{e})}} = \widehat{l_{\omega(\mathsf{e})}}$ por h.*1), *donde a pseudoidentidade será válida módulo* **K**.

Para além disso, como $\widehat{l_{\mathsf{g}}} = l_{\mathsf{g},1}\overline{l_{\mathsf{g},2}}$ e $l_{\mathsf{g},1}$ é por definição uma palavra de comprimento pelo menos M, a condição (ST.1) *será verificada. Por outro lado, como $\widehat{r_{\mathsf{g}}} = \overline{r_{\mathsf{g},2}}r_{\mathsf{g},1}$,* (ST.2) *é uma consequência das condições h.3) e h.5). Portanto, uma vez que a condição* (ST.4) *também está garantida antecipadamente, basta assegurar que δ'_5 verificará* (ST.3).

Dizemos que uma palavra $u \in A^+$ é uma *base* de um κ-termo w se w tem um subtermo da forma u^α onde $\alpha \in \omega + \mathbb{Z}$. Por exemplo, as bases do κ-termo em (7.7) são ba, a^3 e a^2.

Passo 1. Descrevemos o primeiro passo do algoritmo que vai transformar cada κ-termo $w_{\mathsf{g},0}$ num κ-termo $w_{\mathsf{g},1}$, com as seguintes propriedades:

p1.1) todas as bases de $w_{\mathsf{g},1}$ são palavras de Lyndon com comprimento no máximo k;

p1.2) todo o factor de comprimento N da κ-palavra $\epsilon(w_{\mathsf{g},0})$ é também um factor da κ-palavra $\epsilon(w_{\mathsf{g},1})$;

p1.3) $w_{\mathsf{g},1}$ é da forma $w_{\mathsf{g},1} = l_{\mathsf{g}} w'_{\mathsf{g},1} r_{\mathsf{g}}$.

Apesar de não ser necessário, podemos assumir que $w_{\mathsf{g},0}$ não tem subtermos da forma $(x^{\omega+i})^{\omega+j}$ pois, caso contrário, poderíamos aplicar-lhes todas as transformações possíveis do tipo 1 para obter um κ-termo com essa propriedade. Consideremos cada ocorrência em $w_{\mathsf{g},0}$ de um subtermo da forma $u^{\omega+p}$ com $u \in A^+$ e

$p \in \mathbb{Z}$. Seja ℓ_u um inteiro positivo tal que u^{ℓ_u} possui todos os factores de comprimento N da palavra biinfinita u^∞. Consideremos também p' um inteiro tal que $\ell_u p' + p \geq \ell_u$ e fixemos uma factorização $u^{\ell_u} = u_1 u_2 u_3$ com $|u_1| \geq N$, $|u_2| = k$ e $|u_3| \geq N$. Transformamos a ocorrência $u^{\omega+p}$ como apresentado abaixo, aplicando sucessivamente transformações dos tipos 4_D, 2 e 6,

$$u^{\omega+p} \to u^{\omega-\ell_u p'} u^{\ell_u p'+p} \to (u^{\ell_u})^{\omega-p'} u^{\ell_u p'+p} \to (u_1 \overline{u_2} u_3)^{\omega-p'} u^{\ell_u p'+p}. \tag{8.20}$$

Denotamos por $w_{\mathrm{g},1}$ o κ-termo obtido após todas estas transformações. Recordemos que, por (7.10), $\overline{u_2}$ é da forma $\overline{u_2} = a_1 \cdots a_{i'-1}(a_{i'} \cdots a_j a_i \cdots a_{i'-1})^\omega a_{i'} \cdots a_k$. Deste modo, com as modificações acima, cada base u de $w_{\mathrm{g},0}$ foi transformada numa base $a_{i'} \cdots a_j a_i \cdots a_{i'-1}$ de $w_{\mathrm{g},1}$ de comprimento no máximo k. Como $a_{i'} \cdots a_j a_i \cdots a_{i'-1}$ é uma palavra de Lyndon, isto mostra a propriedade p1.1). Além disso, $u^{\ell_u p'+p}$ possui todos os factores de comprimento N de u^∞ porque u^{ℓ_u} tem essa propriedade e $\ell_u p' + p \geq \ell_u$. Portanto, como $|u_1|, |u_3| \geq N$, a propriedade p1.2) também se verifica. Note-se que o recíproco de p1.2) pode não se verificar porque a utilização da regra (R.6) pode ter introduzido novos factores de comprimento N na κ-palavra $\epsilon(w_{\mathrm{g},1})$. Logo, contrariamente ao que acontece com δ'_0, a etiquetagem δ'_1 pode não ser uma solução módulo $\mathbf{LSl}_N$. Finalmente, a propriedade p1.3) verifica-se porque $w_{\mathrm{g},0} = l_\mathrm{g} w'_{\mathrm{g},0} r_\mathrm{g}$ e as transformações acima não alteraram o prefixo l_g nem o sufixo r_g.

Note-se que para o propósito deste passo, a factorização $u^{\ell_u} = u_1 u_2 u_3$ que determina a ocorrência de u_2 onde a regra (R.6) é aplicada poderia ser escolhida arbitrariamente. Porém, no Passo 3 abaixo será necessário que a factorização verifique algumas condições que passamos a descrever. Primeiro, fazemos uma lista $z_1, z_2, \ldots, z_r$ enumerando as potências u^{ℓ_u} para todas as bases u de todos os κ-termos $w_{\mathrm{g},0}$. Para cada $q \in \{1, \ldots, r\}$, escolhemos um factor $z'_q = u_{q,1} u_{q,2} u_{q,3}$ de z_q, com $|u_{q,1}| = |u_{q,3}| = n$ e $|u_{q,2}| = k$, onde n é o inteiro positivo fixado na Definição 8.2.6. Além disso, para $q \in \{2, \ldots, r\}$,

$$\text{se } q \text{ é tal que } z'_m \text{ é um factor de } z_q \text{ para algum } m < q, \text{ então definimos } z'_q = z'_m. \tag{8.21}$$

Fixamos uma ocorrência de $z'_q = u_{q,1} u_{q,2} u_{q,3}$ em z_q e a ocorrência do meio $u_{q,2}$ é onde a regra (R.6) é aplicada.

Antes de prosseguirmos com o próximo passo, introduzimos alguma terminologia. Seja w um κ-termo e suponhamos que w pode ser factorizado como $w = w_1 w' w_2$. Se $w' = u_1^{\alpha_1} u' u_2^{\alpha_2}$ é um κ-termo de rank 1 em forma reduzida, então w' é chamado um *factor crucial* de w. Se $w_1 = 1$ e $w' = u' u^\alpha$ é um κ-termo de rank 1 em forma reduzida, então w' é denominado um *prefixo crucial* de w. Note-se que w possui no máximo um prefixo crucial. A definição de um *sufixo crucial* de w é dual. Por exemplo, o κ-termo $w = a(ab)^{\omega-3}b^4\Big(ba^{\omega-2}\Big)^{\omega+1}a$ possui o prefixo crucial $a(ab)^{\omega-3}$, não tem factores cruciais nem sufixo crucial. Agora, usando as regras de reescrita, poderíamos transformar w em

$$w_1 = a(ab)^{\omega-3}b^5a^{\omega-2}ba^{\omega-2}\Big(ba^{\omega-2}\Big)^{\omega-3}ba^{\omega-2}ba^{\omega-2}a.$$

O κ-termo w_1 possui o prefixo crucial $a(ab)^{\omega-3}$, o sufixo crucial $a^{\omega-2}a$ e os factores cruciais $(ab)^{\omega-3}b^5a^{\omega-2}$ e $a^{\omega-2}ba^{\omega-2}$. Note-se que $\epsilon^{\kappa}_{A,\mathbf{K}}(w) = a(ab)^{+\infty}$, $\epsilon^{\kappa}_{A,\mathbf{D}}(w) = a^{-\infty}$ e $B_w = \{(ab)^{-\infty}b^5a^{+\infty}, a^{-\infty}ba^{+\infty}\}$.

Passo 2. Consideremos o κ-termo $w_{\mathrm{g},1}$. Mostramos que é possível aplicar apenas transformações da direita para a esquerda do tipo 4 a $w_{\mathrm{g},1}$ para derivar um κ--termo $w_{\mathrm{g},2}$ tal que:

p2.1) se $\epsilon^{\kappa}_{A,\mathbf{K}}(w_{\mathrm{g},1}) = u'u^{+\infty}$, então $w_{\mathrm{g},2}$ tem um prefixo crucial da forma $u'u^{\alpha}$;

p2.2) se $\epsilon^{\kappa}_{A,\mathbf{D}}(w_{\mathrm{g},1}) = u^{-\infty}u'$, então $w_{\mathrm{g},2}$ tem um sufixo crucial da forma $u^{\alpha}u'$;

p2.3) $w_{\mathrm{g},2}$ tem um factor crucial da forma $u_1^{\alpha_1}u'u_2^{\alpha_2}$ se e só se $u_1{}^{-\infty}u'u_2{}^{+\infty} \in B_{w_{\mathrm{g},1}}$;

p2.4) $w_{\mathrm{g},2}$ é da forma $w_{\mathrm{g},2} = l_{\mathrm{g}}w'_{\mathrm{g},2}r_{\mathrm{g}}$;

p2.5) o κ-termo $w_{\mathrm{g},2}$ e as κ-palavras $\epsilon(w_{\mathrm{g},1})$ e $\epsilon(w_{\mathrm{g},2})$ têm os mesmos factores finitos de comprimento N.

Para transformar o κ-termo $w_{\mathrm{g},1}$ num κ-termo de rank 1 z_1 tal que $\mathbf{LSl} \models w_{\mathrm{g},1} = z_1$, seria suficiente, pelo Lema 7.3.1, aplicar todas as transformações possíveis $x^{\omega+i} \to x^2$ com x um κ-termo infinito. Como as bases de $w_{\mathrm{g},1}$ (e também as de z_1) já são palavras de Lyndon, para transformar z_1 num κ-termo z_2 em forma reduzida bastaria então aplicar transformações da esquerda para a direita dos tipos 4 e 3 para substituir todos os subtermos possíveis da forma $u^{\omega+i}u^{\ell}u^{\omega+j}$ por $u^{\omega+i+\ell+j}$. Por outro lado, $B_{w_{\mathrm{g},1}} = B_{z_2}$ pela Proposição 4.1.2. Assim, como se pode verificar facilmente, é possível obter a partir de $w_{\mathrm{g},1}$ um κ-termo $w_{\mathrm{g},1}(1)$, usando transformações da direita para a esquerda do tipo 4 da forma $x^{\omega+i} \to x^{\omega+i-2}x^2$ e $x^{\omega+i} \to x^2x^{\omega+i-2}$ com x infinito, tal que $w_{\mathrm{g},1}(1)$ verifica p2.1)–p2.3). Note-se que não estávamos interessados em definir uma forma única para representar uma palavra biinfinita $u_1{}^{-\infty}u'u_2{}^{+\infty}$, por isso esta palavra também pode ser representada, por exemplo, por $u_1{}^{-\infty}u_1^iu'u_2^ju_2{}^{+\infty}$ para todos os inteiros não negativos i e j. Assim, para um dado factor biinfinito não periódico $\mathbf{w}'$ de $w_{\mathsf{g},1}$, o que p2.3) expressa é que $w_{\mathsf{g},2}$ contém um factor crucial da forma $u_1^{\alpha_1} u' u_2^{\alpha_2}$ para alguma representação $u_1{}^{-\infty} u' u_2{}^{+\infty}$ de $\mathbf{w}'$. Que $w_{\mathsf{g},1}(1)$ verifica p2.4) resulta de p1.3) e do facto de as transformações acima não modificarem o prefixo l_{g} nem o sufixo r_{g} de $w_{\mathsf{g},1}$.

Note-se que, como $w_{\mathsf{g},1}(1)$ verifica as propriedades p2.1)–p2.3), $\epsilon^{\kappa}_{A,\mathbf{K}}(w_{\mathsf{g},1}(1)) = \epsilon^{\kappa}_{A,\mathbf{K}}(w_{\mathsf{g},1})$, $\epsilon^{\kappa}_{A,\mathbf{D}}(w_{\mathsf{g},1}(1)) = \epsilon^{\kappa}_{A,\mathbf{D}}(w_{\mathsf{g},1})$ e $B_{w_{\mathsf{g},1}(1)} = B_{w_{\mathsf{g},1}}$. Seja $v \in A^+$ uma palavra de comprimento N. Se v é um factor do κ-termo $w_{\mathsf{g},1}(1)$ (i.e., se $w_{\mathsf{g},1}(1)$ pode ser factorizado como $w_{\mathsf{g},1}(1) = w_1 v w_2$), então v é trivialmente um factor da κ-palavra $\epsilon(w_{\mathsf{g},1}(1))$. Reciprocamente, suponhamos que v é um factor da κ--palavra $\epsilon(w_{\mathsf{g},1}(1))$. Então v ou é:

1) um factor de $\epsilon^{\kappa}_{A,\mathbf{K}}(w_{\mathsf{g},1}(1))$; ou

2) um factor de $\epsilon^{\kappa}_{A,\mathbf{D}}(w_{\mathsf{g},1}(1))$; ou

3) um factor de um factor biinfinito $u_1{}^{-\infty} u' u_2{}^{+\infty} \in B_{w_{\mathsf{g},1}(1)}$.

No caso 3), $w_{\mathsf{g},1}(1)$ possui um factor crucial da forma $u_1^{\alpha_1} u' u_2^{\alpha_2}$ por p2.3). Então, aplicando transformações da direita para a esquerda do tipo 4 se necessário, poderíamos substituir o factor $u_1^{\alpha_1} u' u_2^{\alpha_2}$ por $u_1^{\alpha_1 - i} u_1^i u' u_2^i u_2^{\alpha_2 - i}$ para um inteiro positivo suficientemente grande i tal que v é um factor de $u_1^i u' u_2^i$, donde v seria um factor do κ-termo assim obtido a partir de $w_{\mathsf{g},1}(1)$. Os casos 1) e 2) são tratados de forma análoga. Procedendo deste modo para todas as palavras v de comprimento N, obtemos um κ-termo $w_{\mathsf{g},2}$ com os mesmos factores finitos de comprimento N da κ-palavra $\epsilon(w_{\mathsf{g},2})$. Por outro lado, como a regra (R.6) não foi aplicada neste passo, as κ-palavras $\epsilon(w_{\mathsf{g},1})$ e $\epsilon(w_{\mathsf{g},2})$ têm os mesmos factores finitos de comprimento N. Portanto, $w_{\mathsf{g},2}$ verifica p2.1)–p2.5).

8.3.3 Construção das mesmas bases

Recordemos que queremos construir $\delta' = \delta'_5$ uma κ-solução módulo **LSl**. Pela Observação 8.3.1, se preservarmos alguns parâmetros simples, obteremos uma solução módulo **LI**. Assim, tendo em conta a Proposição 7.3.2, basta para além disso construir os κ-termos $w_{\mathsf{g},5}$ de modo a que, para cada aresta $\mathsf{e} \in \Gamma$, os κ--termos $w_{\alpha(\mathsf{e}),5} w_{\mathsf{e},5}$ e $w_{\omega(\mathsf{e}),5}$ tenham os mesmos factores biinfinitos não periódicos, ou seja, $B_{w_{\alpha(\mathsf{e}),5} w_{\mathsf{e},5}} = B_{w_{\omega(\mathsf{e}),5}}$. Como se pode facilmente verificar, uma condição necessária para que isso aconteça é que, para cada aresta $\mathsf{e} \in \Gamma$, os κ-termos $w_{\alpha(\mathsf{e}),5} w_{\mathsf{e},5}$ e $w_{\omega(\mathsf{e}),5}$ tenham as mesmas bases. Além disso, como precisamos que a condição (ST.3) seja válida, também é necessário que, se $\mathsf{v}, \mathsf{w} \in \mathcal{V}(\Gamma)$ são vértices tais que $\mathbf{LSl}_N \models w_{\mathsf{v},0} = w_{\mathsf{w},0}$, então os κ-termos $w_{\mathsf{v},5}$ e $w_{\mathsf{w},5}$ têm as mesmas bases.

Com a finalidade de assegurar estas propriedades, vamos transformar as bases de cada κ-termo $w_{\mathsf{g},2}$. Uma vez que os κ-termos $w_{\alpha(\mathsf{e}),5}w_{\mathsf{e},5}$ e $w_{\omega(\mathsf{e}),5}$ envolvem três elementos de Γ (nomeadamente e, $\alpha(\mathsf{e})$ e $\omega(\mathsf{e})$), não podemos efectuar as transformações em cada $\mathsf{g} \in \Gamma$ de forma independente dos outros elementos g' de Γ; cada elemento de Γ interfere com todos os elementos da sua componente conexa (esta é, naturalmente, a razão da dificuldade em provar a redutibilidade de pseudovariedades em geral).

Passo 3. Neste passo construímos κ-termos $w_{\mathsf{g},3}$ verificando as condições:

p3.1) todas as bases de $w_{\mathsf{g},3}$ são palavras de Lyndon de comprimento no máximo k;

p3.2) para cada aresta $\mathsf{e} \in \Gamma$, os κ-termos $w_{\alpha(\mathsf{e}),3}w_{\mathsf{e},3}$ e $w_{\omega(\mathsf{e}),3}$ têm as mesmas bases;

p3.3) para cada aresta $\mathsf{e} \in \Gamma$, $\mathbf{LSl}_n \models w_{\alpha(\mathsf{e}),3}w_{\mathsf{e},3} = w_{\omega(\mathsf{e}),3}$. Ou seja, δ_3' é uma κ-solução módulo $\mathbf{LSl}_n$;

p3.4) para todos os vértices $\mathsf{v}, \mathsf{w} \in \Gamma$ tais que $\mathbf{LSl}_N \models w_{\mathsf{v},0} = w_{\mathsf{w},0}$, os κ-termos $w_{\mathsf{v},3}$ e $w_{\mathsf{w},3}$ têm as mesmas bases;

p3.5) para todos os vértices $\mathsf{v}, \mathsf{w} \in \Gamma$ tais que $\mathbf{LSl}_N \models w_{\mathsf{v},0} = w_{\mathsf{w},0}$, $\mathbf{LSl}_n \models w_{\mathsf{v},3} = w_{\mathsf{w},3}$;

p3.6) todo o factor de comprimento n de $\epsilon(w_{\mathsf{g},2})$ é também um factor de $\epsilon(w_{\mathsf{g},3})$;

p3.7) $w_{\mathsf{g},3}$ é da forma $w_{\mathsf{g},3} = l_{\mathsf{g}}w'_{\mathsf{g},3}r_{\mathsf{g}}$.

No processo, as bases de $w_{\mathsf{g},2}$ não são perdidas e $w_{\mathsf{g},3}$ adquire as bases v que estavam em falta. Podem ocorrer os seguintes casos.

Caso 1. v é uma base de $w_{\alpha(\mathsf{e}),2}w_{\mathsf{e},2}$ e não é uma base de $w_{\omega(\mathsf{e}),2}$, para alguma aresta $\mathsf{e} \in \Gamma$. Então v é uma base de $w_{\alpha(\mathsf{e}),2}$ ou de $w_{\mathsf{e},2}$, e precisamos de criar a base v em $w_{\omega(\mathsf{e}),3}$. A base v foi criada pelas transformações (8.20) no Passo 1, onde uma certa ocorrência de um subtermo $u^{\omega+p}$ em $w_{\alpha(\mathsf{e}),0}$ ou em $w_{\mathsf{e},0}$ foi substituída por $(u_1\overline{u_2}u_3)^{\omega-p'}u^{\ell_u p'+p}$ com $|u_2| = k$. Note-se que $\overline{u_2}$ é da forma $\overline{u_2} = a_1 \cdots a_{i'-1}(a_{i'} \cdots a_j a_i \cdots a_{i'-1})^{\omega} a_{i'} \cdots a_k$, donde $v = a_{i'} \cdots a_j a_i \cdots a_{i'-1}$. Suponhamos que $u^{\ell_u} = z_q$ para algum z_q definido no Passo 1. Recordemos que $z_q' = u_{q,1}u_{q,2}u_{q,3}$ é um factor de z_q, com $|u_{q,1}| = |u_{q,3}| = n$ e $u_{q,2} = u_2$, donde $|z_q'| = 2n + k$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que z_q' pode ser estendido a um factor $z_q'' = u_{q,0}z_q'u_{q,4}$ de z_q, com $|z_q''| = N$ e

$|u_{q,0}|, |u_{q,4}| \geq 3n$. Portanto z''_q é um factor de $\epsilon(w_{\alpha(\mathsf{e}),0}w_{\mathsf{e},0})$ de comprimento N, donde z''_q também é um factor de $\epsilon(w_{\omega(\mathsf{e}),0})$, pois δ'_0 é uma κ-solução módulo $\mathbf{LSl}_N$ pelo Lema 8.2.8. Assim, z''_q é um factor do κ-termo $w_{\omega(\mathsf{e}),2}$ por p1.2) e p2.5). Portanto, podemos escolher uma ocorrência do factor z''_q em $w_{\omega(\mathsf{e}),2}$ e substituí-la por $u_{q,0}u_{q,1}\overline{u_{q,2}}u_{q,3}u_{q,4}$, criando assim a base v em $w_{\omega(\mathsf{e}),3}$. Note-se que isto também faz aparecer em $w_{\omega(\mathsf{e}),3}$ todos os eventuais novos factores de comprimento n que foram criados em $w_{\alpha(\mathsf{e}),1}w_{\mathsf{e},1}$ quando o subtermo $u^{\omega+p}$ em $w_{\alpha(\mathsf{e}),0}w_{\mathsf{e},0}$ foi substituído por $(u_1\overline{u_2}u_3)^{\omega-p'}u^{\ell_u p'+p}$. É necessário fazer aparecer estes novos factores para obtermos a condição p3.3). Note-se por outro lado que a transformação

$$u_{q,1}u_{q,2}u_{q,3} \rightarrow u_{q,1}\overline{u_{q,2}}u_{q,3}$$

pode, eventualmente, fazer com que algum factor u' de comprimento n de $u_{q,1}u_{q,2}u_{q,3}$ se perca. Como $n \leq N$, a condição p1.2) estabelece que essa transformação em $w_{\alpha(\mathsf{e}),0}w_{\mathsf{e},0}$ não causa a perda de u' (porque u' tem outras ocorrências em $w_{\alpha(\mathsf{e}),0}w_{\mathsf{e},0}$). No entanto, essa transformação em $w_{\omega(\mathsf{e}),2}$ poderia fazer desaparecer o factor u'. Para evitar que isso aconteça note-se que, pela observação que se segue à Definição 8.2.6, podemos assumir que $z'_q = u_{q,1}u_{q,2}u_{q,3}$ possui pelo menos duas ocorrências disjuntas em z''_q. Como transformamos apenas uma das ocorrências de z'_q, tem-se que u' também não é perdido no caso de $w_{\omega(\mathsf{e}),2}$.

Também devemos observar que o procedimento acima pode ser aplicado para todas as bases possíveis v nas condições acima, sem conflito umas com as outras (ou com os casos 2 e 3 abaixo). De facto, suponhamos que v_1 e v_2 são duas bases distintas que foram originadas, respectivamente, pelas transformações $u_{m,1}u_{m,2}u_{m,3} \rightarrow u_{m,1}\overline{u_{m,2}}u_{m,3}$ e $u_{q,1}u_{q,2}u_{q,3} \rightarrow u_{q,1}\overline{u_{q,2}}u_{q,3}$ com $m < q$. As ocorrências de $z'_m = u_{m,1}u_{m,2}u_{m,3}$ e $z'_q = u_{q,1}u_{q,2}u_{q,3}$ onde essas transformações devem ser feitas em $w_{\omega(\mathsf{e}),2}$ são necessariamente disjuntas pela condição (8.21). De facto, como $v_1 \neq v_2$, $z'_q \neq z'_m$ e consequentemente z'_m não é um factor de z_q. Portanto z'_m não é um factor do factor $z''_q = u_{q,0}z'_qu_{q,4}$ de z_q. Como ambos $u_{q,0}$ e $u_{q,4}$ têm comprimento pelo menos $3n$, tem-se que as ocorrências de z'_m e z'_q, onde se devem fazer as transformações em $w_{\omega(\mathsf{e}),2}$, são disjuntas. Para além disso, essas ocorrências de z'_m e z'_q também são disjuntas das segundas ocorrências de z'_q e z'_m em z''_q e z''_m, respectivamente, onde as transformações não são aplicadas.

Caso 2. v é uma base de $w_{\omega(\mathsf{e}),2}$ e não é uma base de $w_{\alpha(\mathsf{e}),2}w_{\mathsf{e},2}$, para alguma aresta $\mathsf{e} \in \Gamma$. Este caso pode ser tratado como o anterior. A única diferença é que encontramos uma ocorrência da extensão $z_q'' = u_{q,0}z_q'u_{q,4}$ em: 1) exactamente um dos $w_{\alpha(\mathsf{e}),2}$ e $w_{\mathsf{e},2}$; 2) ambos $w_{\alpha(\mathsf{e}),2}$ e $w_{\mathsf{e},2}$; 3) nenhum dos $w_{\alpha(\mathsf{e}),2}$ e $w_{\mathsf{e},2}$. No primeiro caso substituímos a ocorrência de z_q'' por $u_{q,0}u_{q,1}\overline{u_{q,2}}u_{q,3}u_{q,4}$, criando assim a base v em $w_{\alpha(\mathsf{e}),2}w_{\mathsf{e},2}$. No segundo caso também substituímos z_q'' por $u_{q,0}u_{q,1}\overline{u_{q,2}}u_{q,3}u_{q,4}$, mas basta fazê-lo apenas em $w_{\mathsf{e},2}$. No terceiro caso, z_q'' tem uma ocorrência em $w_{\alpha(\mathsf{e}),2}w_{\mathsf{e},2}$ com sobreposição em ambos $w_{\alpha(\mathsf{e}),2}$ e $w_{\mathsf{e},2}$. Como z_q' possui duas ocorrências disjuntas em z_q'', pela observação que se segue à Definição 8.2.6, e pelo menos uma delas não está em sobreposição com o factor c_{e} de $w_{\alpha(\mathsf{e}),2}w_{\mathsf{e},2}$, onde $c_{\mathsf{e}} = r_{\alpha(\mathsf{e})}l_{\mathsf{e}}$ é o centro da aresta e, podemos substituir essa ocorrência de z_q' por $u_{q,1}\overline{u_{q,2}}u_{q,3}$.

Caso 3. v é uma base de $w_{\mathsf{v},2}$ e não é uma base de $w_{\mathsf{w},2}$, onde $\mathsf{v},\mathsf{w} \in \mathcal{V}(\Gamma)$ são tais que $\mathbf{LSl}_N \models w_{\mathsf{v},0} = w_{\mathsf{w},0}$. Como nos casos anteriores, poderíamos encontrar uma ocorrência de alguma extensão z_q'' de z_q' em $w_{\mathsf{w},2}$ e substituí-la por $u_{q,0}u_{q,1}\overline{u_{q,2}}u_{q,3}u_{q,4}$. Isto também faria aparecer em $w_{\mathsf{w},3}$ todos os eventuais novos factores de $w_{\mathsf{v},2}$ de comprimento n, e garantiria a validade da condição p3.5).

Para cada $\mathsf{g} \in \Gamma$, denotamos por $w_{\mathsf{g},2}(1)$ o κ-termo que surge de $w_{\mathsf{g},2}$ após todas as transformações acima. Como $w_{\mathsf{g},2}(1)$ pode ter algumas bases que não estavam presentes em $w_{\mathsf{g},2}$, o procedimento acima tem de ser iterado até os casos 1.–3. deixarem de ocorrer. Note-se que a iteração tem de terminar de facto, pois as bases v têm comprimento no máximo k e existe apenas um número finito dessas bases. Denotamos por $w_{\mathsf{g},3}$ o κ-termo assim obtido. Que $w_{\mathsf{g},3}$ verifica as condições p3.1), p3.2), p3.4), p3.6) e p3.7) deve ser claro tendo em conta as observações feitas durante a construção acima. Para mostrar p3.3), consideremos e uma aresta de Γ. Afirmamos que as κ-palavras

$$\epsilon(w_{\alpha(\mathsf{e}),3}w_{\mathsf{e},3}) \quad \text{e} \quad \epsilon(w_{\omega(\mathsf{e}),3})$$

têm os mesmos factores de comprimento n. Para provar a afirmação, começamos por notar que, por p1.2), p2.5) e p3.6), cada factor de comprimento n de $\epsilon(w_{\mathsf{g},0})$ é também um factor de $\epsilon(w_{\mathsf{g},3})$ para todo o $\mathsf{g} \in \Gamma$. Seja u' um factor de $\epsilon(w_{\alpha(\mathsf{e}),3}w_{\mathsf{e},3})$ de comprimento n. Suponhamos primeiro que u' é um factor de $\epsilon(w_{\alpha(\mathsf{e}),0}w_{\mathsf{e},0})$. Neste caso, como δ_0' é uma solução módulo $\mathbf{LSl}_n$ tem-se que u' é um factor de $\epsilon(w_{\omega(\mathsf{e}),0})$, donde u' também é um factor de $\epsilon(w_{\omega(\mathsf{e}),3})$. Suponhamos agora que u' não é um factor de $\epsilon(w_{\alpha(\mathsf{e}),0}w_{\mathsf{e},0})$. Então u' é um factor de $\epsilon(w_{\alpha(\mathsf{e}),3}w_{\mathsf{e},3})$ porque foi criado, no Passo 1 ou no princípio do Passo 3, como uma consequência da aplicação de alguma transformação $u_{q,1}u_{q,2}u_{q,3} \to u_{q,1}\overline{u_{q,2}}u_{q,3}$. Mas, como vimos acima, a mesma transformação teve de ser aplicada a $w_{\omega(\mathsf{e}),0}$ ou a $w_{\omega(\mathsf{e}),2}$, criando assim o factor u' em $\epsilon(w_{\omega(\mathsf{e}),3})$. A prova de que todo o factor de comprimento n de $\epsilon(w_{\omega(\mathsf{e}),3})$ também é um factor de $\epsilon(w_{\alpha(\mathsf{e}),3}w_{\mathsf{e},3})$ é análoga e, por isso, deduzimos a afirmação. Para concluir p3.3) basta notar que $\epsilon(w_{\omega(\mathsf{e}),3})$ e $\epsilon(w_{\alpha(\mathsf{e}),3}w_{\mathsf{e},3})$ têm o mesmo prefixo e o mesmo sufixo de comprimento $n-1$ uma vez que δ'_0 é uma solução módulo $\mathbf{LSl}_N$, $n \leq N$ e os Passos 1 a 3 não alteram o prefixo nem o sufixo de comprimento n de qualquer $\epsilon(w_{\mathsf{g},0})$. Finalmente, a condição p3.5) pode ser provada de forma análoga.

8.3.4 Passos finais

Esta subsecção vai ser dedicada à apresentação dos dois passos finais do algoritmo de construção da κ-solução δ' módulo **LSl**.

Passo 4. Afirmamos que é possível derivar a partir de $w_{\mathsf{g},3}$ um κ-termo $w_{\mathsf{g},4}$ com as seguintes propriedades:

p4.1) $w_{\mathsf{g},4}$ verifica as condições p3.1)–p3.7), ou seja, as condições p3.1)–p3.7) são válidas com o 4 no lugar do 3;

p4.2) se π^α é um subtermo de $w_{\mathsf{g},4}$, com π um κ-termo infinito e $\alpha \in \omega+\mathbb{Z}$, então $\pi = u^\beta \rho u^\omega$ para alguns $u \in A^+$, $\rho \in T_A^\kappa$ e $\beta \in \omega + \mathbb{Z}$. Além disso, toda a ocorrência de $\pi^\alpha = (u^\beta \rho u^\omega)^\alpha$ em $w_{\mathsf{g},4}$ ocorre num subtermo da forma $u^\omega(u^\beta \rho u^\omega)^\alpha u^\beta$.

Consideremos as ocorrências de subtermos de $w_{\mathsf{g},3}$ da forma π^α, com π e α infinitos, e seja $m = f(w_{\mathsf{g},3})$ o número de tais ocorrências que não verificam a condição p4.2). Prosseguimos por indução sobre m. O caso $m = 0$ é trivial: basta tomar $w_{\mathsf{g},4} = w_{\mathsf{g},3}$. Portanto assumimos que $m \geq 1$ e, por hipótese de indução, que o resultado é válido para todos os κ-termos w tais que $f(w) < m$ e w verifica as condições p3.1)–p3.7). Seja $\pi_1^{\alpha_1}$, com π_1 e α_1 infinitos, uma ocorrência em $w_{\mathsf{g},3}$ que não verifica a condição p4.2). Como π_1 é infinito, é da forma $\pi_1 = y_1\pi_2^{\alpha_2}y_2$ para alguns $y_1, \pi_2, y_2 \in T_A^\kappa$ e $\alpha_2 \in \omega + \mathbb{Z}$, com y_1 e y_2 possivelmente vazios mas não em simultâneo. Prosseguimos por indução sobre o rank r de $\pi_1^{\alpha_1}$. Assumimos primeiro que $r = 2$, donde $\pi_2 = u \in A^+$ e $\pi_1^{\alpha_1} = (y_1 u^{\alpha_2} y_2)^{\alpha_1}$. Aplicamos uma transformação da direita para a esquerda do tipo 3 e uma transformação do tipo 5, para alterar a ocorrência $\pi_1^{\alpha_1}$ em $w_{\mathsf{g},3}$ do seguinte modo

$$\pi_1^{\alpha_1} = (y_1 u^{\alpha_2} y_2)^{\alpha_1} \to (y_1 u^\omega u^{\alpha_2} y_2)^{\alpha_1} \to y_1 u^\omega (u^{\alpha_2} y_2 y_1 u^\omega)^{\alpha_1 - 1} u^{\alpha_2} y_2,$$

e denotamos por $w_{\mathsf{g},3}(1)$ o κ-termo assim produzido. Note-se que $f(w_{\mathsf{g},3}(1)) = m-1$ e $w_{\mathsf{g},3}(1)$ verifica as condições p3.1)–p3.7). Portanto, o resultado segue da hipótese de indução sobre m. Suponhamos agora que $r > 2$ e, por hipótese de indução, que a condição p4.2) é válida para todos os subtermos da forma π^α de rank menor do que r. Logo, como $\pi_2^{\alpha_2}$ é um subtermo de π_1, $\pi_2^{\alpha_2}$ é um κ-termo de rank menor do que r. Assim, pela hipótese de indução sobre r, deduzimos que $y_1 = y_1' u^\omega$, $\pi_2 = u^\beta \rho u^\omega$ e $y_2 = u^\beta y_2'$ para alguns $u \in A^+$, $\rho, y_1', y_2' \in T_A^\kappa$ e $\beta \in \omega + \mathbb{Z}$. Neste caso, como acima, podemos transformar a ocorrência $\pi_1^{\alpha_1} = (y_1' u^\omega \pi_2^{\alpha_2} u^\beta y_2')^{\alpha_1}$ em $w_{\mathsf{g},3}$ do seguinte modo

$$(y_1' u^\omega \pi_2^{\alpha_2} u^\beta y_2')^{\alpha_1} \to (y_1' u^\omega u^\omega \pi_2^{\alpha_2} u^\beta y_2')^{\alpha_1} \to y_1' u^\omega (u^\omega \pi_2^{\alpha_2} u^\beta y_2' y_1' u^\omega)^{\alpha_1 - 1} u^\omega \pi_2^{\alpha_2} u^\beta y_2',$$

e denotar por $w_{\mathsf{g},3}(1)$ o κ-termo assim produzido. Também neste caso, temos que $f(w_{\mathsf{g},3}(1)) = m-1$ e $w_{\mathsf{g},3}(1)$ verifica as condições p3.1)–p3.7), donde o resultado segue da hipótese de indução sobre m. Isto completa a prova do resultado. Note-se que a prova é construtiva, donde o κ-termo $w_{\mathsf{g},4}$ é efectivamente calculável.

Passo 5. Este é o último passo do algoritmo. O nosso primeiro objectivo é reduzir o problema a considerar apenas κ-termos de rank 1. Para cada $\mathsf{g} \in \Gamma$, seja $w_{\mathsf{g},\Diamond}$ o κ-termo de rank 1 obtido a partir de $w_{\mathsf{g},4}$ pela eliminação de todos os expoentes infinitos de potências em que a base é um κ-termo infinito. Ou seja, $w_{\mathsf{g},\Diamond}$ é o κ-termo produzido quando aplicamos todas as transformações possíveis $x^{\omega+i} \to x$ com x um κ-termo infinito. Note-se que esta transformação não é derivável a partir das regras de reescrita, donde $w_{\mathsf{g},\Diamond}$ não é uma derivação de $w_{\mathsf{g},4}$. Portanto, a pseudovariedade $\mathbf{V}$ e o semigrupo finito S podem não verificar $w_{\mathsf{g},4} = w_{\mathsf{g},\Diamond}$. No entanto, no procedimento que se segue vamos reverter a transformação acima (ou seja, vamos colocar cada expoente na exacta posição onde estava antes) recuperando assim o valor de $w_{\mathsf{g},4}$ sobre ambos $\mathbf{V}$ e S. Como l_g e r_g são respectivamente um prefixo e um sufixo de $w_{\mathsf{g},4}$, por p4.1) e p3.7), $w_{\mathsf{g},\Diamond}$ pode ser escrito como

$$w_{\mathsf{g},\Diamond} = l_\mathsf{g} u'_{\mathsf{g},0} u_{\mathsf{g},1}^{\alpha_{\mathsf{g},1}} u'_{\mathsf{g},1} u_{\mathsf{g},2}^{\alpha_{\mathsf{g},2}} \cdots u'_{\mathsf{g},m_\mathsf{g}-1} u_{\mathsf{g},m_\mathsf{g}}^{\alpha_{\mathsf{g},m_\mathsf{g}}} u'_{\mathsf{g},m_\mathsf{g}} r_\mathsf{g} \tag{8.22}$$

com $m_\mathsf{g} \geq 1$, $u'_{\mathsf{g},0}, \ldots, u'_{\mathsf{g},m_\mathsf{g}} \in A^*$, $u_{\mathsf{g},1}, \ldots, u_{\mathsf{g},m_\mathsf{g}} \in A^+$ e $\alpha_{\mathsf{g},1}, \ldots, \alpha_{\mathsf{g},m_\mathsf{g}} \in \omega + \mathbb{Z}$. Seja $\delta_\Diamond : \Gamma \to \Omega_A^\kappa \mathbf{S}$ a etiquetagem de Γ definida por $\delta_\Diamond(\mathsf{g}) = \epsilon(w_{\mathsf{g},\Diamond})$ para qualquer $\mathsf{g} \in \Gamma$ e seja $\gamma_\Diamond = \psi \circ \delta_\Diamond$. Tendo em conta a forma dos κ-termos $w_{\mathsf{g},4}$ determinada pela condição p4.2), é claro que $\mathbf{LSl}_n \models w_{\mathsf{g},\Diamond} = w_{\mathsf{g},4}$. Como δ_4' é uma solução de Γ módulo $\mathbf{LSl}_n$ com respeito a (γ_0, ψ), deduzimos que $\delta_\Diamond$ é uma solução de Γ módulo $\mathbf{LSl}_n$ com respeito a $(\gamma_\Diamond, \psi)$.

Facto 8.3.2 *É possível derivar a partir de* $w_{\mathsf{g},\Diamond}$ *um* κ*-termo (de rank 1)* $\widehat{w_{\mathsf{g},\Diamond}}$ *da forma*

$$\widehat{w_{\mathsf{g},\Diamond}} = \widehat{l_{\mathsf{g}}} u''_{\mathsf{g},0} u_{\mathsf{g},1}^{\alpha_{\mathsf{g},1}} u''_{\mathsf{g},1} u_{\mathsf{g},2}^{\alpha_{\mathsf{g},2}} \cdots u''_{\mathsf{g},m_{\mathsf{g}}-1} u_{\mathsf{g},m_{\mathsf{g}}}^{\alpha_{\mathsf{g},m_{\mathsf{g}}}} u''_{\mathsf{g},m_{\mathsf{g}}} \widehat{r_{\mathsf{g}}}, \tag{8.23}$$

tal que a etiquetagem $\delta'_\Diamond : \Gamma \to \Omega^\kappa_A \mathbf{S}$ *definida por* $\delta'_\Diamond(\mathsf{g}) = \epsilon(\widehat{w_{\mathsf{g},\Diamond}})$*, para qualquer* $\mathsf{g} \in \Gamma$*, é uma* κ*-solução de* Γ *módulo* **LSl** *com respeito a* $(\gamma_\Diamond, \psi)$ *que verifica a condição* (ST.3).

Esta afirmação será provada mais abaixo. Por agora assumimos que a afirmação é verdadeira e note-se que, exceptuando as substituições de l_{g} e r_{g} por $\widehat{l_{\mathsf{g}}}$ e $\widehat{r_{\mathsf{g}}}$, respectivamente, todas as transformações ocorrem nos factores $u'_{\mathsf{g},j}$. Assim, pela condição p4.2), para recuperar os expoentes que foram eliminados na formação de $w_{\mathsf{g},\Diamond}$, basta procurar em $\widehat{w_{\mathsf{g},\Diamond}}$ as potências infinitas $u_{\mathsf{g},j}^{\alpha_{\mathsf{g},j}}$ que marcam as posições onde os expoentes estavam em $w_{\mathsf{g},4}$ e adicioná-los em $\widehat{w_{\mathsf{g},\Diamond}}$ nas mesmas posições. Denotamos por $w_{\mathsf{g},5}$ o κ-termo assim produzido. Isto termina a construção de δ' que, como se recorda, é definida do seguinte modo.

Definição 8.3.3 (etiquetagem δ') *A etiquetagem* δ' *de* Γ *por* κ*-palavras de* $\Omega^\kappa_A \mathbf{S}$ *é definida por* $\delta'(\mathsf{g}) = \epsilon(w_{\mathsf{g},5})$ *para qualquer* $\mathsf{g} \in \Gamma$.

Devido à forma especial dos κ-termos $w_{\mathsf{g},4}$ fornecida por p4.2), é claro que $\widehat{w_{\mathsf{g},\Diamond}}$ e $w_{\mathsf{g},5}$ são iguais sobre **LSl** uma vez que têm o mesmo prefixo $\widehat{l_{\mathsf{g}}}$, o mesmo sufixo $\widehat{r_{\mathsf{g}}}$ e os mesmos factores biinfinitos não periódicos. Para além disso, $w_{\mathsf{g},5}$ recuperou o valor de $w_{\mathsf{g},4}$ sobre $\mathbf{V}$ e sobre S. Logo, δ' é uma κ-solução de Γ módulo **LSl** com respeito a (γ_0, ψ) que verifica as condições (ST.3) e (ST.4). Tem-se ainda que, como referido na Observação 8.3.1, δ' também satisfaz as condições (ST.1) e (ST.2). Portanto, para estabelecer a κ-redutibilidade ST de $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$ e deduzir a κ-redutibilidade de $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$, resta provar o facto acima.

Demonstração do Facto 8.3.2. O κ-termo $w_{\mathsf{g},\Diamond}$, dado por (8.22), não está certamente em forma reduzida uma vez que, por p4.2), contém factores da forma $u^\omega u^\beta$. No entanto, para o reduzir, basta aplicar transformações da esquerda para a direita dos tipos 4 e 3 para substituir todos os subtermos possíveis da forma $u^{\omega+i} u^\ell u^{\omega+j}$ por $u^{\omega+i+\ell+j}$. Portanto, vamos assumir que a factorização p4.2) está em forma reduzida. Uma vez que as potências $u^{\omega+i+\ell+j}$ vão ser preservadas, podemos depois substituí-las por $u^{\omega+i} u^\ell u^{\omega+j}$ usando as transformações duais da direita para a esquerda dos tipos 4 e 3. Note-se que também podemos assumir, sem perda de generalidade, que, para cada $j \in \{1, \ldots, m_{\mathsf{g}}\}$, $u_{\mathsf{g},j}^{2n}$ é um sufixo de $u'_{\mathsf{g},j-1}$ e um prefixo de $u'_{\mathsf{g},j}$.

Aplicamos a técnica introduzida em [35, Secção 6.5], que também foi usada na Secção 7.5.5 do capítulo anterior. Como o procedimento utilizado só se aplica a palavras finitas, começamos por associar a $w_{\mathsf{g},\Diamond}$ a palavra finita $w_{\mathsf{g},\triangledown}$ obtida a partir de $w_{\mathsf{g},\Diamond}$ pela eliminação de todos os expoentes $\alpha_{\mathsf{g},j}$,

$$w_{\mathsf{g},\triangledown} = l_{\mathsf{g}} u'_{\mathsf{g},0} u_{\mathsf{g},1} u'_{\mathsf{g},1} u_{\mathsf{g},2} \cdots u'_{\mathsf{g},m_{\mathsf{g}}-1} u_{\mathsf{g},m_{\mathsf{g}}} u'_{\mathsf{g},m_{\mathsf{g}}} r_{\mathsf{g}}. \tag{8.24}$$

Note-se que esta transformação não é derivável a partir das regras de reescrita. Em particular, a pseudovariedade $\mathbf{V}$ e o semigrupo finito S podem não verificar $w_{\mathsf{g},\Diamond} = w_{\mathsf{g},\triangledown}$. No entanto, uma vez mais, vamos reverter a transformação acima (ou seja, vamos colocar cada expoente $\alpha_{\mathsf{g},j}$ na exacta posição onde estava antes) recuperando assim o valor de $w_{\mathsf{g},\Diamond}$ sobre $\mathbf{V}$ e S. Seja $\delta_\triangledown : \Gamma \to \Omega_A^\kappa \mathbf{S}$ a etiquetagem de Γ definida por $\delta_\triangledown(\mathsf{g}) = w_{\mathsf{g},\triangledown}$ para qualquer $\mathsf{g} \in \Gamma$ e seja $\gamma_\triangledown = \psi \circ \delta_\triangledown$. É claro que $\mathbf{LSl}_n \models w_{\mathsf{g},\triangledown} = w_{\mathsf{g},\Diamond}$. Como $\delta'_\Diamond$ é uma solução de Γ módulo $\mathbf{LSl}_n$ com respeito a $(\gamma_\Diamond, \psi)$, deduzimos que $\delta_\triangledown$ é uma solução de Γ módulo $\mathbf{LSl}_n$ com respeito a $(\gamma_\triangledown, \psi)$. Estamos agora em condições de aplicar o procedimento de [35, Secção 6.5] a cada palavra $w_{\mathsf{g},\triangledown}$. Reparemos que a única regra que esse procedimento usa é a (R.6).

Conforme mostrado em [35], existe uma factorização

$$w_{\mathsf{g},\triangledown} = l_{\mathsf{g}} z_{\mathsf{g},0} c_{\mathsf{g},1} z_{\mathsf{g},1} c_{\mathsf{g},2} \cdots c_{\mathsf{g},j_{\mathsf{g}}} z_{\mathsf{g},j_{\mathsf{g}}} r_{\mathsf{g}} \tag{8.25}$$

de $w_{\mathsf{g},\triangledown}$ tal que $j_{\mathsf{g}} \geq 0$ e

- $c_{\mathsf{g},1}, \ldots, c_{\mathsf{g},j_{\mathsf{g}}} \in C_F$ são centros de F_Γ;
- $z_{\mathsf{g},0}, z_{\mathsf{g},1}, \ldots, z_{\mathsf{g},j_{\mathsf{g}}} \in A^+$ com $|z_{\mathsf{g},i}| \geq 3k-1$;
- a factorização contém todas as ocorrências permitidas dos centros não periódicos de F_Γ em $w_{\mathsf{g},\triangledown}$;
- se c_{f} é um centro periódico de F_Γ que ocorre em $w_{\mathsf{g},\triangledown}$, então a factorização contém exactamente uma ocorrência de c_{f}.

Usamos a factorização (8.25) para transformar $w_{\mathsf{g},\triangledown}$ no seguinte κ-termo

$$w_{\mathsf{g},\triangledown}(1) = \widehat{l_{\mathsf{g}}} z_{\mathsf{g},0} \widehat{c_{\mathsf{g},1}} z_{\mathsf{g},1} \widehat{c_{\mathsf{g},2}} \cdots \widehat{c_{\mathsf{g},j_{\mathsf{g}}}} z_{\mathsf{g},j_{\mathsf{g}}} \widehat{r_{\mathsf{g}}}, \tag{8.26}$$

onde cada $\widehat{c_{\mathsf{g},\ell}}$ é um κ-termo de rank 1 definido em (8.8).

Prosseguimos com a transformação de cada palavra $z_{\mathsf{g},\ell}$ ($\ell \in \{0, \ldots, j_{\mathsf{g}}\}$) na factorização (8.26), num κ-termo de rank 1 $\widehat{z_{\mathsf{g},\ell}}$. Isto será feito em quatro subpassos.

Passo 5.1. Consideremos a factorização marcada, descrita na Subsecção 7.4.1,

$$z_{\mathsf{g},\ell} = z_0 v_1 z_1 v_2 \cdots v_q z_q \tag{8.27}$$

de $z_{\mathsf{g},\ell}$. Pela definição de factores marcados, se $q \geq 1$, então $|v_i| \geq 2k$ para todo o $i \in \{1, \ldots, q\}$, donde podemos escrever $v_i = v_{i,1} v_{i,2} v_{i,3}$ para algumas palavras $v_{i,1}$, $v_{i,2}$ e $v_{i,3}$ com $|v_{i,1}| = |v_{i,3}| = k$. Definimos $\widehat{v_i} = \overline{v_{i,1}}\, v_{i,2}\, \overline{v_{i,3}}$, e tomamos como $z_{\mathsf{g},\ell}(1)$ o seguinte κ-termo de rank 1

$$z_{\mathsf{g},\ell}(1) = z_0 \widehat{v_1} z_1 \widehat{v_2} z_2 \cdots \widehat{v_q} z_q.$$

Passo 5.2. Pela definição de factores livres, se z_0 não é a palavra vazia, então tem comprimento maior do que k. Neste caso, definimos $\widehat{z_0} = \overline{z_{0,1}} z_{0,2}$ onde $z_{0,1}$ é o prefixo de comprimento k de z_0 e $z_0 = z_{0,1} z_{0,2}$. Simetricamente, se z_q não é a palavra vazia, definimos $\widehat{z_q} = z_{q,1} \overline{z_{q,2}}$ onde $z_{q,2}$ é o sufixo de comprimento k de z_q e $z_q = z_{q,1} z_{q,2}$. Consideremos agora

$$z_{\mathsf{g},\ell}(2) = \widehat{z_0} \widehat{v_1} z_1 \widehat{v_2} z_2 \cdots \widehat{v_q} \widehat{z_q}.$$

Passo 5.3. Seja $y \in A^+$ um factor de $z_{\mathsf{g},\ell}$ tal que $2k \leq |y| < 3k$. Podem ocorrer dois casos.

(*Caso I*) Toda a extensão de comprimento $3k-1$ em $z_{\mathsf{g},\ell}$, de uma ocorrência de y, é uma ocorrência marcada (ver Subsecção 7.4.1). Neste caso toda a ocorrência de y em $z_{\mathsf{g},\ell}$ está contida nos factores marcados v_i.

(*Caso II*) Existe uma ocorrência livre em $z_{\mathsf{g},\ell}$ de uma extensão $\tilde{y}$, de comprimento $3k-1$, de uma ocorrência de y. Neste caso, pela definição de ocorrência livre (cf. Subsecção 7.4.1), existe uma k''-vizinhança v de $\tilde{y}$ tal que v é k'-abundante. Em particular, $\mathrm{doc}(\tilde{y}, v) \geq k'$. Além do mais, toda a ocorrência de um factor de comprimento $3k-1$ na k''-vizinhança v é livre. Isto significa que pelo menos $k'-2$ das ocorrências disjuntas de $\tilde{y}$ em v ocorrem disjuntas dos factores marcados. Mais precisamente, existe um inteiro $0 \leq i \leq q$ tal que $\mathrm{doc}(\tilde{y}, z_i) \geq k'-2$. Logo, como y é um factor de $\tilde{y}$, $\mathrm{doc}(y, z_i) \geq k'-2$. Neste caso, dizemos que y *tem uma ocorrência livre em* $z_{\mathsf{g},\ell}$.

Consideremos o conjunto F de todos os factores y de $z_{\mathsf{g},\ell}$ tais que $2k \leq |y| < 3k$ e y tem uma ocorrência livre em $z_{\mathsf{g},\ell}$. Pelo segundo caso acima, para cada $y \in F$ existe um inteiro $0 \leq i \leq q$ tal que $\mathrm{doc}(y, z_i) \geq k'-2$. Portanto, a escolha de k' permite-nos seleccionar uma ocorrência para cada $y \in F$ de modo a que estas ocorrências sejam disjuntas duas a duas. Estas ocorrências são seleccionadas nos factores z_i e, se $i = 0$ ou $i = q$, então podemos seleccioná-las, respectivamente, em $z_{0,2}$ e em $z_{q,1}$. Como $2k \leq |y| < 3k$, podemos escrever $y = y_1 y_2 y_3$ para algumas palavras y_1, y_2 e y_3 com $|y_1| = |y_3| = k$. Substituímos em $z_{\mathrm{g},\ell}(2)$ a ocorrência seleccionada de y por $\widehat{y} = \overline{y_1}\, y_2\, \overline{y_3}$. Obtemos então um termo $z_{\mathrm{g},\ell}(3)$.

Passo de Ajustamento Até aqui, temos seguido passo a passo o algoritmo de transformação de $w_{\mathrm{g},\triangledown}$ dado em [35]. Agora, como anunciado acima, temos que fazer um pequeno ajuste no procedimento para reverter a transformação que apagou os expoentes $\alpha_{\mathrm{g},j}$ em $w_{\mathrm{g},\Diamond}$. Recordemos que assumimos acima que $u_{\mathrm{g},j}^{2n}$ é um sufixo de $u'_{\mathrm{g},j-1}$ e um prefixo de $u'_{\mathrm{g},j}$, para todo o $j \in \{1, \ldots, m_{\mathrm{g}}\}$, donde a ocorrência $u_{\mathrm{g},j}$ na factorização (8.24) pode ser estendida a uma ocorrência $u_{\mathrm{g},j}^{4n+1}$ na qual a ocorrência $u_{\mathrm{g},j}$ de (8.24) é o factor central. Por outro lado, nenhum centro não periódico $c_{\mathrm{g},\ell}$ ocorre em $u_{\mathrm{g},j}^{4n+1}$. De facto, como $c_{\mathrm{g},\ell}$ é tão grande quanto quisermos, se $c_{\mathrm{g},\ell}$ fosse um factor de $u_{\mathrm{g},j}^{4n+1}$, então as palavras biinfinitas $\mathbf{w}_{\mathrm{g}}$ e $u_{\mathrm{g},j}^{\infty}$ estariam na mesma órbita, o que é impossível uma vez que a segunda é periódica e a primeira não é. Além disso, se $c_{\mathrm{g},\ell}$ é um centro periódico e ocorre em $u_{\mathrm{g},j}^{4n+1}$, podemos assumir sem perda de generalidade que ocorre no sufixo $u_{\mathrm{g},j}^{2n}$. Como consequência, (podemos assumir que) $u_{\mathrm{g},j}^{2n+1}$ ocorre em algum factor $z_{\mathrm{g},\ell}$ na factorização (8.26). Para além disso, (podemos assumir que) $u_{\mathrm{g},j}^{2n+1}$ ocorre em algum factor livre z_i na factorização (8.27) de $z_{\mathrm{g},\ell}$.

Assim, antes de aplicarmos as transformações previstas para o Passo 5.3, localizamos em z_i a ocorrência fixa de $u_{\mathrm{g},j}$ que provém de (8.24). Depois substituímos essa ocorrência de $u_{\mathrm{g},j}$ por $u_{\mathrm{g},j}^{\alpha_{\mathrm{g},j}}$. Como queremos controlar os factores biinfinitos que são criados, consideramos o sufixo $s_{\mathrm{g},j-1}$ de $u'_{\mathrm{g},j-1}$ de comprimento k e o prefixo $p_{\mathrm{g},j}$ de $u'_{\mathrm{g},j}$ de comprimento k. Então $s_{\mathrm{g},j-1}$ e $p_{\mathrm{g},j}$ ocorrem adjacentes à ocorrência fixa de $u_{\mathrm{g},j}$, e substituímos essas ocorrências, respectivamente, por $\overline{s_{\mathrm{g},j-1}}$ e $\overline{p_{\mathrm{g},j}}$. Após estas três substituições, o Passo 5.3 pode ser realizado como descrito acima, e reparamos que as substituições não têm impacto sobre o Passo 5.3 uma vez que foram feitas num factor livre e, portanto, todos os elementos de F continuam a ter bastantes ocorrências em $z_{\mathrm{g},\ell}$. Isto significa que todos os factores biinfinitos que seriam obtidos sem aquelas três substituições são ainda obtidos com elas. A única diferença é que foi introduzido o factor $\overline{s_{\mathrm{g},j-1}}\, u_{\mathrm{g},j}^{\alpha_{\mathrm{g},j}}\, \overline{p_{\mathrm{g},j}}$ que pode ter criado (no máximo dois) factores biinfinitos novos.

Passo 5.4. Neste passo, admitimos a substituição de qualquer ocorrência, nos factores de $z_{\mathsf{g},\ell}(3)$ que foram obtidos a partir das transformações nas palavras z_i, de um factor $y \in A^+$ de comprimento k por $\overline{y}$. Dizemos que um termo obtido a partir de $z_{\mathsf{g},\ell}(3)$ usando estas substituições é *irredutível* quando não é possível fazer mais substituições (ou seja, quando não existem mais ocorrências de factores $y \in A^+$ de comprimento k nos factores que resultaram das substituições nas palavras z_i). Escolhemos um termo irredutível e denotámo-lo por $\widehat{z_{\mathsf{g},\ell}}$. Isto conclui o processo de transformação da palavra $z_{\mathsf{g},\ell}$.

Com isto, estamos em condições de completar a construção do κ-termo $\widehat{w_{\mathsf{g},\Diamond}}$, cuja existência foi referida no Facto 8.3.2. Para isso basta considerar a factorização (8.26) de $w_{\mathsf{g},\triangledown}(1)$ e definir

$$\widehat{w_{\mathsf{g},\Diamond}} = \widehat{l_{\mathsf{g}}}\,\widehat{z_{\mathsf{g},0}}\,\widehat{c_{\mathsf{g},1}}\,\widehat{z_{\mathsf{g},1}}\,\widehat{c_{\mathsf{g},2}}\cdots\widehat{c_{\mathsf{g},j_{\mathsf{g}}}}\,\widehat{z_{\mathsf{g},j_{\mathsf{g}}}}\,\widehat{r_{\mathsf{g}}} \tag{8.28}$$

que é um κ-termo de rank 1 que, pelo Passo de Ajustamento acima, pode ser escrito na forma (8.23). Note-se que a substituição de $u_{\mathsf{g},j}$ por $u_{\mathsf{g},j}^{\alpha_{\mathsf{g},j}}$ no Passo de Ajustamento recuperou o valor de $w_{\mathsf{g},\Diamond}$ sobre $\mathbf{V}$ e sobre S.

Para concluir a demonstração do Facto 8.3.2, notamos que $\delta'_{\Diamond}$ é uma κ-solução de Γ módulo **LSl** que satisfaz a condição (ST.3). Não apresentamos aqui uma prova directa desta afirmação, pois seria uma (longa) repetição dos argumentos da prova análoga apresentada em [35, Secção 6.6] para o caso da pseudovariedade **LSl**. Na realidade, o algoritmo de construção da κ-solução δ' módulo **LSl**, em [35], consiste em associar a cada $\mathsf{g} \in \Gamma$ uma palavra finita $u_{\mathsf{g}\delta}$ tal que

$$u_{\mathsf{g}\delta} \equiv_n \delta(\mathsf{g})$$

e depois aplicar a $u_{\mathsf{g}\delta}$ o procedimento descrito acima (para transformar a palavra $w_{\mathsf{g},\triangledown}$, sem o Passo de Ajustamento) de tal forma que δ' verifica as condições (c1)–(c4) de [35, Proposição 6.1]. Estas condições (c1)–(c4) são essencialmente as que impusemos aqui ao nosso δ', na definição de segundo tipo de κ-redutibilidade de $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$. Existem apenas duas diferenças. Em primeiro lugar, para o caso de $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$, foi necessária uma condição extra, (ST.4), para lidar com a pseudovariedade $\mathbf{V}$. Em segundo lugar, as condições (ST.1)–(ST.4) referem-se a uma solução δ'_0 módulo $\mathbf{LSl}_N$, enquanto que (c2)–(c4) se referem a uma solução δ módulo **LSl**. Esta diferença é, no entanto, meramente aparente visto que neste trabalho tivemos de aplicar a κ-redutibilidade de $\mathbf{V}$ (perdendo assim a propriedade de ser uma solução módulo **LSl**, mas mantendo a propriedade de ser uma solução módulo $\mathbf{LSl}_N$) antes de fazer o segundo tipo de redução (ou seja, a redução ao caso em que as etiquetas de todos os elementos de Γ são infinitas), enquanto que em [35] primeiro foi feita a redução (Proposição 6.1) e só depois foi considerada uma "aproximação $\mathbf{LSl}_n$" fornecida pelas palavras $u_{\mathsf{g}\delta}$. Observamos também que a necessidade, neste trabalho, de começar a construção de δ' com uma solução δ'_0 módulo $\mathbf{LSl}_N$, para um inteiro N maior do que n, foi porque os κ-termos de partida $w_{\mathsf{g},0}$ tinham ranks arbitrários e as transformações que eles sofreram ao longo dos passos 1 a 3 fizeram a solução "decrescer" para $\mathbf{LSl}_n$. Assim, basicamente, o que fizemos neste trabalho foi procurar palavras $w_{\mathsf{g},\triangledown}$ que, no que respeita à pseudovariedade $\mathbf{LSl}$, estavam nas mesmas condições das palavras $u_{\mathsf{g}\delta}$ em [35], para que pudéssemos aplicar-lhes o mesmo algoritmo (com as adaptações necessárias, nomeadamente o Passo de Ajustamento) de construção de uma solução módulo $\mathbf{LSl}$ que, em particular, verifica a condição (ST.3).

Observe-se que a introdução do Passo de Ajustamento torna possível ter $\psi \circ \delta'_\Diamond = \gamma_\Diamond$, uma condição necessária para $\delta'_\Diamond$ ser uma solução com respeito a $(\gamma_\Diamond, \psi)$. Por outro lado, como referido no Passo de Ajustamento, a única diferença é que criou o factor $\overline{s_{\mathsf{g},j-1}}u_{\mathsf{g},j}^{\alpha_{\mathsf{g},j}}\overline{p_{\mathsf{g},j}}$ em $\widehat{w_{\mathsf{g},\Diamond}}$. Mas isto não é um problema uma vez que por p4.1), p3.2) e p3.4): para cada $\mathsf{e} \in \mathcal{E}(\Gamma)$, os κ-termos $w_{\alpha(\mathsf{e}),4}w_{\mathsf{e},4}$ e $w_{\omega(\mathsf{e}),4}$ têm as mesmas bases; para todos os vértices $\mathsf{v}, \mathsf{w} \in \Gamma$ tais que

$$\mathbf{LSl}_N \models w_{\mathsf{v},0} = w_{\mathsf{w},0},$$

os κ-termos $w_{\mathsf{v},4}$ e $w_{\mathsf{w},4}$ têm as mesmas bases. Portanto, por exemplo, se $\mathsf{v}, \mathsf{w} \in \mathcal{V}(\Gamma)$ são tais que $\mathbf{LSl}_N \models w_{\mathsf{v},0} = w_{\mathsf{w},0}$ e foi criado um factor $\overline{s_{\mathsf{v},j-1}}u_{\mathsf{v},j}^{\alpha_{\mathsf{v},j}}\overline{p_{\mathsf{v},j}}$ em $\widehat{w_{\mathsf{v},\Diamond}}$, então $u_{\mathsf{v},j} = u_{\mathsf{w},j'}$, $s_{\mathsf{v},j-1} = s_{\mathsf{w},j'-1}$ e $p_{\mathsf{v},j} = p_{\mathsf{w},j'}$ para algum j'. Por conseguinte, foi criado um factor $\overline{s_{\mathsf{w},j'-1}}u_{\mathsf{w},j'}^{\alpha_{\mathsf{w},j'}}\overline{p_{\mathsf{w},j'}} = \overline{s_{\mathsf{v},j-1}}u_{\mathsf{v},j}^{\alpha_{\mathsf{w},j'}}\overline{p_{\mathsf{v},j}}$ em $\widehat{w_{\mathsf{w},\Diamond}}$ introduzindo assim em $\widehat{w_{\mathsf{w},\Diamond}}$ os mesmos (possíveis) novos factores biinfinitos que $\overline{s_{\mathsf{v},j-1}}u_{\mathsf{v},j}^{\alpha_{\mathsf{v},j}}\overline{p_{\mathsf{v},j}}$ introduziu em $\widehat{w_{\mathsf{v},\Diamond}}$. Portanto $\widehat{w_{\mathsf{v},\Diamond}}$ e $\widehat{w_{\mathsf{w},\Diamond}}$ têm os mesmos factores biinfinitos não periódicos e, como consequência, $\delta'_\Diamond$ verifica a condição (ST.3). De forma análoga, pode-se mostrar que $\delta'_\Diamond$ é uma solução módulo $\mathbf{LSl}$ e concluir que o Facto 8.3.2 é válido. ■

Isto estabelece a κ-redutibilidade ST de $\mathbf{LSl} \vee \mathbf{V}$, completando assim a demonstração do Teorema 8.2.1.

Bibliografia

[1] D. Albert, R. Baldinger, e J. Rhodes, The identity problem for finite semigroups (the undecidability of), *J. Symbolic Logic* **57** (1992), 179–192.

[2] J. Almeida, The algebra of implicit operations, *Algebra Universalis* **26** (1989), 16–72.

[3] J. Almeida, Implicit operations on finite $\mathcal{J}$–trivial semigroups and a conjecture of I. Simon, *J. Pure Appl. Algebra* **69** (1990), 205–218.

[4] J. Almeida, *Finite semigroups and universal algebra*, World Scientific, Singapore, 1995, tradução inglesa.

[5] J. Almeida, Hyperdecidable pseudovarieties and the calculation of semidirect products, *Int. J. Algebra and Computation* **9** (1999), 241–261.

[6] J. Almeida, Some algorithmic problems for pseudovarieties, *Publ. Math. Debrecen* **54** (1999), 531–552, Automata and formal languages, VIII (Salgótarján, 1996).

[7] J. Almeida, Finite semigroups: an introduction to a unified theory of pseudovarieties, *Semigroups, Algorithms, Automata and Languages* (Singapore) (G. M. S. Gomes, J.-E. Pin, e P. V. Silva, eds.), World Scientific, 2002, pp. 3–64.

[8] J. Almeida, Dynamics of implicit operations and tameness of pseudovarieties of groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **354** (2002), 387–411.

[9] J. Almeida, Profinite semigroups and applications, *Structural Theory of Automata, Semigroups and Universal Algebra* (New York)(V. B. Kudryavtsev e I. G. Rosenberg, eds.), Springer, 2005, pp. 1–45.

[10] J. Almeida, J. C. Costa, e M. Zeitoun, Tameness of pseudovariety joins involving **R**, *Monatsh. Math.* **146** (2005), 89–111.

[11] J. Almeida, J. C. Costa, e M. Zeitoun, Complete reducibility of pseudovarieties, in *Proceedings of the International Conference Semigroups and Formal Languages* (J. André, M. Branco, V. Fernandes, J. Fountain, G. Gomes, e J. Meakin eds.), World Scientific, 2007, pp. 9–25.

[12] J. Almeida, J. C. Costa, e M. Zeitoun, Complete reducibility of systems of equations with respect to **R**, *Portugal. Math.* **64** (2007), 445–508.

[13] J. Almeida, J. C. Costa, e M. Zeitoun, *Pointlike sets with respect to* **R** *and* **J**, *J. Pure Appl. Algebra* **212** (2008), 486–499.

[14] J. Almeida, J. C. Costa, e M. Zeitoun, *Some structural properties of the free profinite aperiodic semigroup*, CMUP 2009-14, Univ. Porto, 2009.

[15] J. Almeida e M. Delgado, Tameness of the pseudovariety of abelian groups, *Int. J. Algebra and Computation* **15** (2005), 327–338.

[16] J. Almeida e B. Steinberg, On the decidability of iterated semidirect products and applications to complexity, *Proc. London Math. Soc.* **80** (2000), 50–74.

[17] J. Almeida e B. Steinberg, Syntactic and global semigroup theory: a synthesis approach, *Algorithmic problems in groups and semigroups* (Lincoln, NE, 1998), Trends Math. (Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000), pp. 1–23.

[18] J. Almeida e P. G. Trotter, Hyperdecidability of pseudovarieties of orthogroups, *Bull. Glasgow Math. J.* **43** (2001), 67–83.

[19] J. Almeida e P. G. Trotter, The pseudoidentity problem and reducibility for completely regular semigroups, *Bull. Austral. Math. Soc.* **63** (2001), 407–433.

[20] J. Almeida e P. Weil, Relatively free profinite monoids : an introduction and examples, *Semigroups, formal languages and groups* (J. Fountain eds.), Kluwer (1995), 73–117.

[21] J. Almeida e P. Weil, Free profinite semigroups over semidirect products, *Izvestiya VUZ Matem.* **39** (1995), 3-31. Versão inglesa *Russian Matem. (Iz. VUZ)* **39** (1995), 1–28.

[22] J. Almeida e M. Zeitoun, Tameness of some locally trivial pseudovarieties, *Comm. Algebra* **31** (2003), 61–77.

[23] J. Almeida e M. Zeitoun, An automata-theoretical approach to the word problem for ω-terms over **R**, *Theoret. Comput. Sci.* **370** (2007), 131–169.

[24] C. Ash, Inevitable graphs: a proof of the type II conjecture and some related decision procedures, *Int. J. Algebra and Computation* **1** (1991), 127–146.

[25] K. Auinger e B. Steinberg, On the extension problem for partial permutations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), 2693–2703.

[26] D. Beauquier e J.-E. Pin, Languages and scaners, *Theoret. Comput. Sci.* **84** (1991), 3–21.

[27] G. Birkhoff, On the structure of abstract algebras, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **31** (1935), 433–454.

[28] J. Brzozowski e I. Simon, Characterization of locally testable events, *Discrete Mathematics* **4** (1973), 243–271.

[29] J. H. Carruth, J. A. Hildebrandt, e R. J. Koch, *The theory of topological semigroups*, Marcel Dekker, New York, 1983.

[30] J. C. Costa, Free profinite locally idempotent and locally commutative semigroups, *J. Pure Appl. Algebra* **163** (2001), 19–47.

[31] J. C. Costa, Reducibility of joins involving some locally trivial pseudovarieties, *Comm. Algebra* **32** (2004), 3517–3535.

[32] J. C. Costa e C. Nogueira, On bases of identities for the ω-variety generated by locally testable semigroups, *Theoret. Comput. Sci.* **401** (2008), 206–216.

[33] J. C. Costa e C. Nogueira, Complete reducibility of the pseudovariety **LSl**, *Int. J. Algebra and Computation* **19** (2009), 247-282.

[34] J. C. Costa e C. Nogueira, Tameness of joins involving the pseudovariety of local semilattices, submetido.

[35] J. C. Costa e M. L. Teixeira, Tameness of the pseudovariety **LSl**, *Int. J. Algebra and Computation* **14** (2004), 627–654.

[36] T. Coulbois e A. Khélif, Equations in free groups are not finitely approximable, *Proc. Amer. Math. Soc.* **127** (1999), 963–965.

[37] R. Croisot, Equivalences principales bilatères dans les demi-group, *J. Math. Pures Appl. (9)* **36** (1957), 373–417.

[38] M. Delgado, On the hyperdecidability of pseudovarieties of groups, *Tech. Rep. CMUP* 1997-3, Univ. Porto, 1997.

[39] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*,Vol. B, Academic Press, New York, 1976.

[40] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, no. 6, Heldermann Verlag Berlin, 1989, Revised and completed edition.

[41] T. Evans, Some connections between residual finiteness, finite embeddability and word problem, *J. London Math. Soc. (2)* **1** (1969), 399–403.

[42] K. Henckell, Pointlike sets: the finest aperiodic cover of a finite semigroup, *J. Pure Appl. Algebra* **55** (1988), 85–126.

[43] K. Henckell, Idempotent pointlike sets, *Int. J. Algebra and Computation* **14** (2004), 703–717.

[44] K. Henckell, S. Margolis, J.-E. Pin, e J. Rhodes, Ash's type II theorem, profinite topology and Mal'cev products. Part I, *Int. J. Algebra and Computation* **1** (1991), 411–436.

[45] J. Howie, *Fundamentals of Semigroups Theory*, Oxford University Press, New York, 1995.

[46] S. C. Klenne, Representations of events in nerve nets and finite automata, *Automata Studies* (Princeton, N. J.) (C. E. Shannon, ed.), vol. 3–41, Princeton University Press, 1956, reprinted in [Moo64].

[47] K. Krohn e J. Rhodes, Algebraic theory of machines I - Prime decomposition theorem for finite semigroups and machines, *Trans. Amer. Math. Soc.* **116** (1965), 450–464.

[48] G. Lallement, *Semigroups and Combinatorial Applications*, Wiley, New York, 1979.

[49] M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words*, Cambridge University Press, 2002.

[50] S. Margolis, M. Sapir, e P. Weil, Irreducibility of certain pseudovarieties, *Comm. Algebra* **26** (1998), 779–792.

[51] J. McCammond, Normal forms for free aperiodic semigroups, *Int. J. Algebra and Computation* **11** (2001), 581–625.

[52] R. McNaughton, Algebraic decision procedures for local testability, *Math. Systems and Theory* **8** (1974), 60–76.

[53] J. Myhill, *Finite automata and the representation of events*, Tech. Rep. 57624, Wright Air Development Command, 1957.

[54] K. Numakura, Theorems on compact totally disconnetced semigroups and lattices, *Proc. Amer. Math. Soc.* **8** (1957), 623–626.

[55] J.-E. Pin, *Variétés de langages formels*, Masson, Paris, 1984.

[56] J.-E. Pin e P. Weil, Profinite semigroups, Mal'cev products and identities, *J. Algebra* **182** (1996), 604–626.

[57] J. Reiterman, The Birkhoff theorem for finite algebras, *Algebra Universalis* **14** (1982), 1–10.

[58] J. Rhodes, Undecidability, automata and pseudovarieties of semigroups, *Int. J. Algebra and Computation* **9** (1999), 455–473.

[59] J. Rhodes e B. Steinberg, Pointlike sets, hyperdecidability and the identity problem for finite semigroups, *Int. J. Algebra and Computation* **9** (1999), 475–481.

[60] J. Rhodes e B. Steinberg, *The q-Theory of Finite Semigroups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2008.

[61] L. Ribes e P. A. Zalesskiĭ, The pro-p topology of a free group and algorithmic problems in semigroups, *Int. J. Algebra and Computation* **4** (1994), 359–374.

[62] B. Steinberg, On pointlike sets and joins of pseudovarieties, *Int. J. Algebra and Computation* **8** (1998), 203–234.

[63] B. Steinberg, On algorithmic problems for joins of pseudovarieties, *Semigroup Forum* **62** (2001), 1–40.

[64] B. Steinberg, A delay theorem for pointlikes, *Semigroup Forum* **63** (2001), 281–304.

[65] S. Willard, *General Topology*, Addisson-Wesley, Reading, Mass., 1970.

[66] Y. Zalcstein, Locally testable languages, *J. Comput. Syst. Sci.* **6** (1972), 151–167.

[67] Y. Zalcstein, Locally testable semigroups, *Semigroup Forum* **5** (1973), 216–227.

Índice Alfabético

Índice de Notações