

MODELO DE ANÁLISE DE ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS

J.A.O. Barros

Universidade do Minho

Braga, Portugal

J.A. Figueiras

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Porto, Portugal

RESUMO

O modelo desenvolvido baseia-se nas técnicas dos elementos finitos utilizando elementos planos isoparamétricos de 4, 8 e 9 nós com formulação geral de deformações e de esforços (membrana, flexão e corte). Pode ser aplicado à análise de estruturas bi e tridimensionais que sejam discretizáveis por elementos planos. O programa de cálculo desenvolvido com base neste modelo numérico tem incluído opções de geração automática de dados e opções gráficas para validação de dados e análise de resultados que desempenham um papel de relevo na análise e dimensionamento estrutural. O modelo é aplicado a um tabuleiro de ponte em viga caixão de forma a evidenciar as potencialidades do programa de cálculo. Os resultados são discutidos com o objectivo de clarificar o comportamento deste tipo de estruturas.

ABSTRACT

The model developed is based on finite element techniques using 4, 8 or 9 noded plane isoparametric elements with a general formulation for strains and stresses (membrane, bending and shear). Bi and three-dimensional analyses are possible whenever plane elements discretization is allowed. Based on this numerical model, a computer code was developed which includes automatic data generation and graphical options for data validation and results interpretation which play a decisive role in structural design. The model is applied to a box-girder bridge to demonstrate some of the potentialities of this software. From the discussion of the results a contribution is made for a better understanding of the behaviour of this kind of structures.

1. Introdução

A constante evolução do hardware, tem acelerado o desenvolvimento de software de forma a possibilitar a resolução de problemas mais complexos, com maior grau de precisão e em menor tempo. A tradução do método dos elementos finitos [1] para programas de cálculo automático [2,3,4,5] é exemplo deste facto. Porém, o considerável volume de dados e resultados que normalmente o projectista depara na resolução dos seus problemas, evidencia a necessidade de paralelamente aos programas de elementos finitos, se desenvolver programas auxiliares que permitam a geração de dados e possibilitem o tratamento gráfico dos dados e resultados. Este procedimento facilita a utilização generalizada do método dos elementos finitos, entre aqueles que necessitem de um modelo de cálculo rigoroso, de fácil e versátil utilização.

Neste trabalho apresenta-se um modelo e respectivo programa de cálculo automático, desenvolvidos para analisar estruturas tridimensionais que possam ser discretizadas por elementos finitos planos, isoparamétricos. O programa está estruturado em três módulos básicos: pré-processamento de dados, cálculo e pós-processamento de resultados, de forma a dotá-lo da funcionalidade requerida.

2. Modelo

A análise de estruturas tridimensionais irá ser realizada segundo a teoria de Mindlin [6]. A adopção da formulação de Mindlin em desfavor da teoria de Kirchhoff [7], resulta da primeira permitir ter em conta a deformação por corte, enquanto a segunda a despreza.

Os deslocamentos $\underline{U}_\ell = \{u, v, w\}_\ell^T$ no sistema local de eixos associado a um elemento genérico podem expressar-se em função dos deslocamentos da superfície média $\bar{\underline{U}}_\ell = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}_\ell^T$ e das rotações das normais à superfície média do elemento nos planos $y_\ell z_\ell$ (θ_{z_ℓ}) e $z_\ell x_\ell$ (θ_{y_ℓ}), através das seguintes expressões [8],

$$u_\ell(x_\ell, y_\ell) = \bar{u}_\ell(x_\ell, y_\ell) + z_\ell \theta_{y_\ell}(x_\ell, y_\ell) \quad (1)$$

$$v_\ell(x_\ell, y_\ell) = \bar{v}_\ell(x_\ell, y_\ell) - z_\ell \theta_{z_\ell}(x_\ell, y_\ell) \quad (2)$$

$$w_\ell(x_\ell, y_\ell) = \bar{w}_\ell(x_\ell, y_\ell) \quad (3)$$

Considerando a teoria dos pequenos deslocamentos e as hipóteses admitidas na teoria de Mindlin, o vector das formações,

$$\underline{\varepsilon}_\ell = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}_\ell^T \quad (4)$$

pode expressar-se no sistema local de eixos do elemento e em função dos deslocamentos da sua superfície média pela seguinte relação,

$$\bar{\underline{\varepsilon}}_\ell = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\underline{\varepsilon}}_\ell^m \\ \dots \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} z_\ell \cdot \bar{\underline{\varepsilon}}_\ell^f \\ \dots \\ \bar{\underline{\varepsilon}}_\ell^c \end{array} \right\} \quad (5)$$

em que $\bar{\underline{\epsilon}}_\ell$, $\underline{\bar{\epsilon}}_\ell$ e $\underline{\bar{\epsilon}}_\ell$ correspondem respectivamente às deformações de membrana, flexão e corte [8].

Ao vector das deformações (4) corresponde o vector das tensões de Piolla - Kirchhoff expresso pela relação,

$$\underline{\sigma}_\ell = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\}_\ell^T \quad (6)$$

Partindo do princípio de que se está a trabalhar no domínio dos pequenos deslocamentos e com acções conservativas, obtém-se pela aplicação do princípio dos trabalhos virtuais a seguinte equação de equilíbrio,

$$\int_{V_\ell} d\underline{\bar{\epsilon}}_\ell^T \underline{\sigma}_\ell dU_\ell = \int_{V_\ell} d\underline{U}_\ell^T \underline{g}_\ell dV_\ell + \int_{A_\ell} d\underline{U}_\ell^T \underline{b}_\ell dA_\ell + \int_L d\underline{U}_\ell^T \underline{p}_\ell dL + d\underline{U}_\ell^T \underline{P}_\ell - \int_{V_\ell} d\underline{\bar{\epsilon}}_\ell^T \underline{\sigma}_\ell^0 dV_\ell \quad (7)$$

em que $d\underline{U}_\ell$ é o vector dos deslocamentos virtuais; \underline{g}_ℓ é o vector das forças de volume por unidade de volume V_ℓ ; \underline{b}_ℓ é o vector das forças de superfície actuando por unidade de área da superfície média A_ℓ ; \underline{p}_ℓ é o vector das forças distribuidas linearmente; \underline{P}_ℓ é o vector das forças aplicadas em pontos e $\underline{\sigma}_\ell^0$ é o vector das tensões iniciais.

Convertendo os integrais de volume expressos em (7) em integrais de área e substituindo (5) em (7), obtém-se para trabalho virtual interno de deformação a seguinte expressão,

$$dWi = \int_{A_\ell} d\underline{\bar{\epsilon}}_\ell^T \underline{\bar{\sigma}}_\ell dA_\ell \quad (8)$$

em que

$$\underline{\bar{\sigma}}_\ell = \{\underline{\bar{\sigma}}^m, \underline{\bar{\sigma}}^f, \underline{\bar{\sigma}}^c\}_\ell^T \quad (9)$$

cujas componentes se expressam por,

$$\underline{\bar{\sigma}}_\ell^m = \{N_x, N_y, N_{xy}\}_\ell^T = \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})_\ell dz_\ell \right\}^T \quad (10)$$

$$\underline{\bar{\sigma}}_\ell^f = \{M_{xz}, M_{yz}, M_{xy}\}_\ell^T = \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})_\ell z_\ell dz_\ell \right\}^T \quad (11)$$

$$\underline{\bar{\sigma}}_\ell^c = \{Q_{xz}, Q_{yz}\}_\ell^T = \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz})_\ell dz_\ell \right\}^T \quad (12)$$

que correspondem respectivamente aos esforços de membrana, flexão e corte.

O vector das deformações (5) relaciona-se com o vector das tensões (9) pelas equações constitutivas,

$$\bar{\sigma}_\ell = [D]\bar{\epsilon}_\ell \quad (13)$$

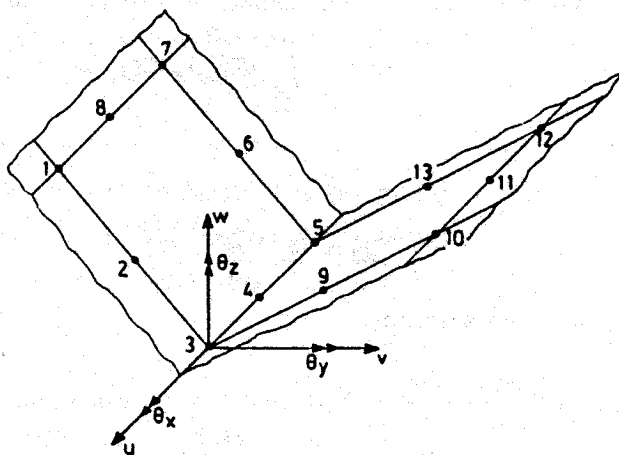
em que $[D]$ é a matriz de elasticidade do material constituinte do elemento [8].

O vector das deformações, $\bar{\epsilon}_\ell$, pode ser obtido em qualquer ponto do elemento, em função dos deslocamentos nodais, através da seguinte relação,

$$\bar{\epsilon}_\ell = \sum_{i=1}^n [B]_i \bar{U}_{i\ell} \quad (14)$$

sendo $[B]$ a matriz de deformação [8] e n o número de nós constituintes do elemento.

No desenvolvimento do modelo que se expõe há necessidade de distinguir dois tipos de nós: os denominados coplanares e os não coplanares. Quando os elementos vizinhos não se inscrevem num mesmo plano, os nós comuns a estes elementos definem-se como nós não coplanares. Aos restantes nós atribui-se a designação de nós coplanares. Os nós não coplanares possuem seis graus de liberdade referenciados ao sistema global, enquanto cinco graus de liberdade caracterizam os nós coplanares, conforme se representa na figura 1.



a) Nós não coplanares (3, 4 e 5)
 $\underline{U} = \{u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}^T$

b) Nós coplanares (restantes nós)
 $\underline{U} = \{u, v, w, \theta_x, \theta_y\}^T$

Fig. 1 - Nós coplanares e não coplanares

A matriz de rigidez de cada elemento é determinada no sistema local associado ao elemento e transformada em seguida para o referencial global. A obtenção da matriz de rigidez é realizada em três fases de forma a permitir a sua determinação recorrendo-se optativamente à integração reduzida, selectiva ou completa [9,10,11]. Uma fase corresponde à rigidez de membrana, outra à rigidez de flexão e finalmente as componentes de rigidez por

corde. A conversão da matriz de rigidez do sistema local para o sistema global é realizada através da utilização de matrizes de transformação $[T]$. A constituição destas matrizes está associada ao tipo de nó em análise. Assim, se o nó é coplanar, a matriz de transformação possui a seguinte configuração,

$$[T] = \begin{bmatrix} [CD] & 0 \\ 0 & 1.0 \\ & 1.0 \\ & & 1.0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

em que $[CD]$ é a matriz dos cossenos directores dos eixos locais do elemento relativamente ao sistema global. Porém, se o nó é não coplanar, a matriz $[T]$ expressa-se por,

$$[T] = \begin{bmatrix} [CD] & 0 \\ 0 & [CD] \end{bmatrix} \quad (16)$$

Considere-se agora o caso de o nó se encontrar em condições especiais de ligação ao exterior conforme se apresenta na figura 2. Dir-se-á que um nó está nestas condições quando o sistema de eixos associado a este nó, e que define as direcções dos seus possíveis graus de liberdade, não coincide com o sistema de eixos associado ao elemento a que aquele nó pertence.

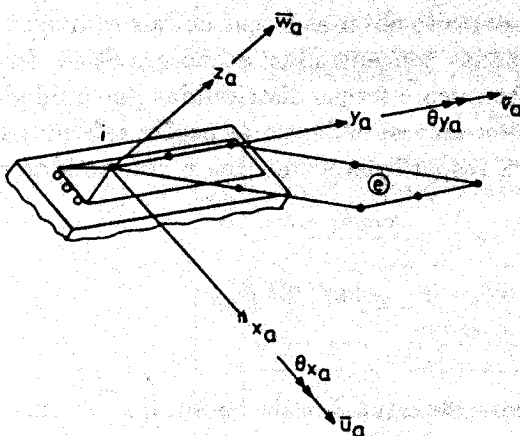


Fig. 2 - Condições especiais de ligação ao exterior

Neste caso, a matriz de transformação define-se pela seguinte relação,

$$[T] = \begin{bmatrix} [CD][LC]^T & 0 \\ 0 & [CD][LC]^T \end{bmatrix} \quad (17)$$

em que $[LC]$ engloba os cossenos directores que o sistema de eixos associado ao nó em condições especiais de ligação ao exterior (x_a, y_a, z_a) , realiza com o sistema global.

Substituindo as expressões (9), (13) e (14) em (8) obtém-se para submatrizes de rigidez associadas à deformação de membrana, de flexão e de corte respectivamente as seguintes expressões,

$$\begin{aligned} [k^m]_g &= [T^m]^T [B^m]^T [D^m] [B^m] [T^m] \\ &= [T^m]^T [k^m]_l [T^m] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} [k^f]_g &= [T^f]^T [B^f]^T [D^f] [B^f] [T^f] \\ &= [T^f]^T [k^f]_l [T^f] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} [k^c]^T &= [T^c]^T [B^c]^T [D^c] [B^c] [T^c] \\ &= [T^c]^T [k^c]_l [T^c] \end{aligned} \quad (20)$$

em que $[T^m]$, $[T^f]$ e $[T^c]$ são as matrizes de transformação que permitem converter, respectivamente, os graus de liberdade associados a membrana, flexão (ou corte) do sistema global para o sistema local dos elementos ou dos nós em condições especiais de ligação ao exterior; $[B^m]$, $[B^f]$ e $[B^c]$ são as matrizes de deformação de membrana, flexão e corte respectivamente; $[D^m]$, $[D^f]$ e $[D^c]$ são as matrizes de elasticidade correspondentes à deformação de membrana, flexão e corte.

O programa desenvolvido permite obter as forças nodais equivalentes aos seguintes tipos de acções [8]: forças generalizadas concentradas; acção gravítica; forças generalizadas distribuídas linearmente; acção térmica e forças distribuídas por unidade de área.

As forças nodais equivalentes correspondentes às acções referidas são obtidas no sistema de eixos locais associados aos respectivos elementos e convertidas para o sistema global através de,

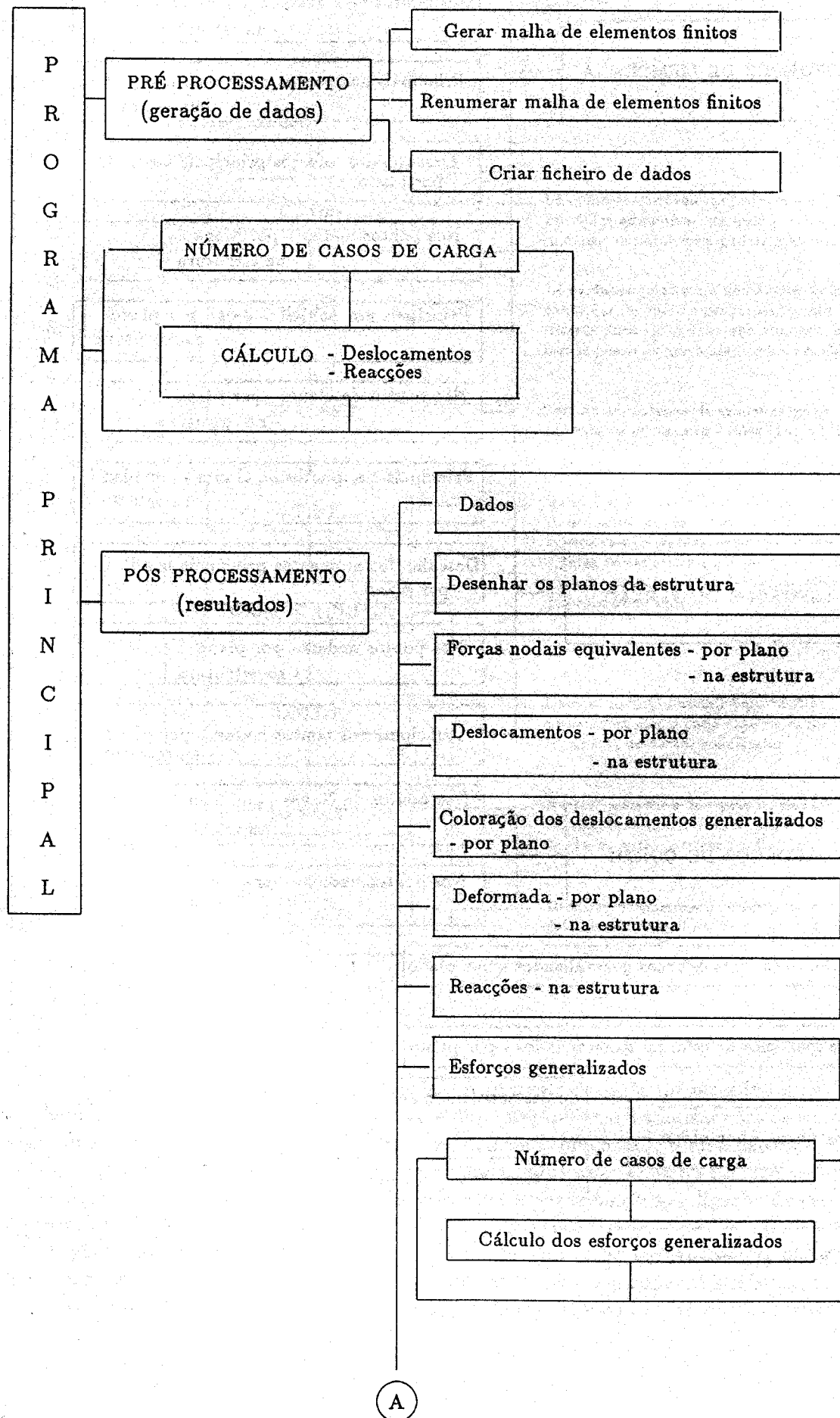
$$\bar{F}_g = [T]^T \bar{F}_l \quad (21)$$

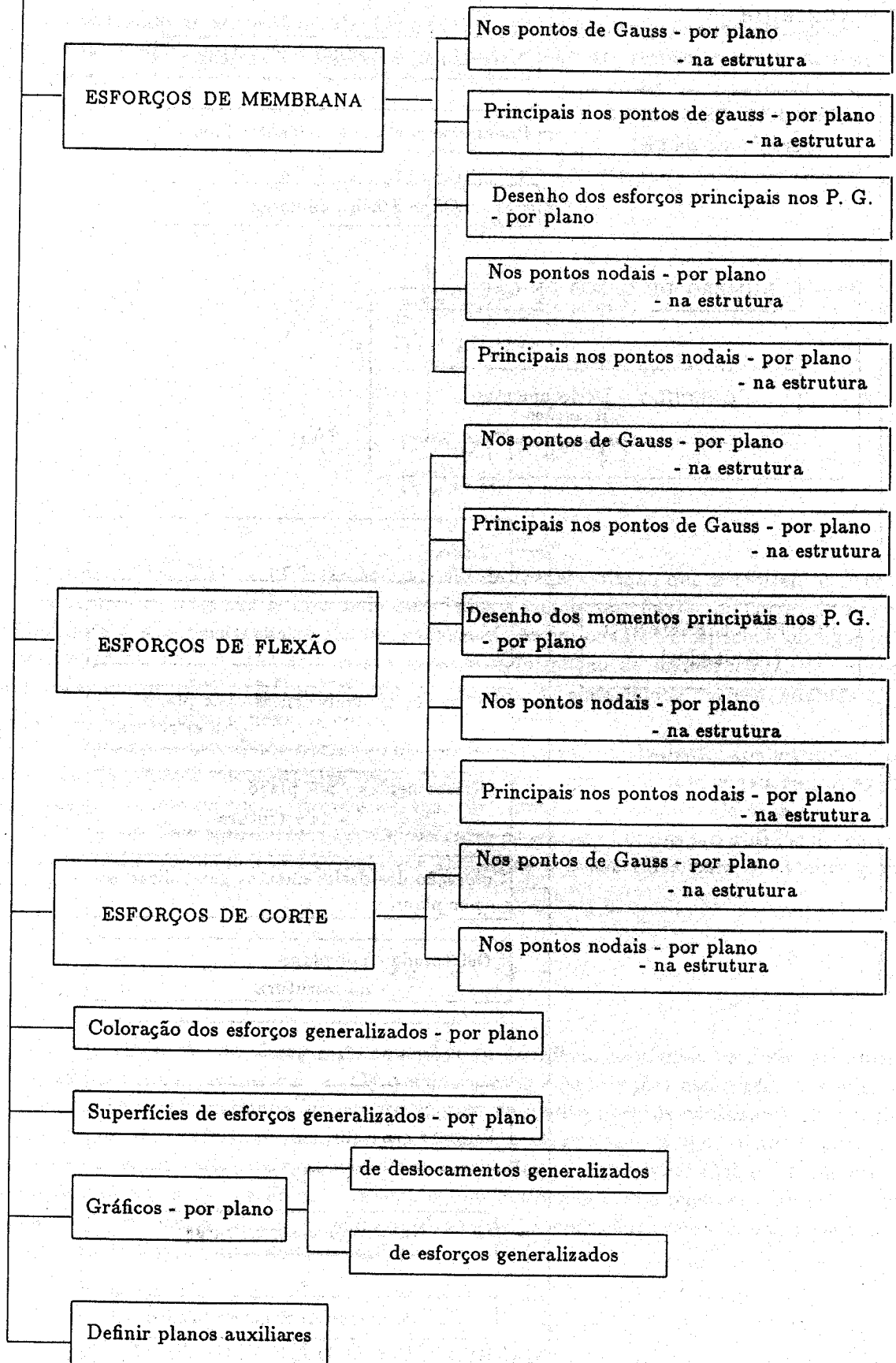
Após a resolução do sistema de equações de equilíbrio, obtém-se os deslocamentos e reacções para cada caso de carga. Os deslocamentos e as reacções associados aos nós não coplanares vêm referenciados ao sistema global, enquanto nos nós coplanares as rotações e momentos vêm referidos ao sistema local do elemento a que o nó pertence, expressando-se os restantes deslocamentos e reacções no referencial global. Num nó em condições especiais de ligação ao exterior, os seus deslocamentos e reacções vêm referenciados ao sistema local associado àquele nó. Todo este procedimento tem como objectivo uma análise mais compreensiva dos resultados.

3. Programa de cálculo automático

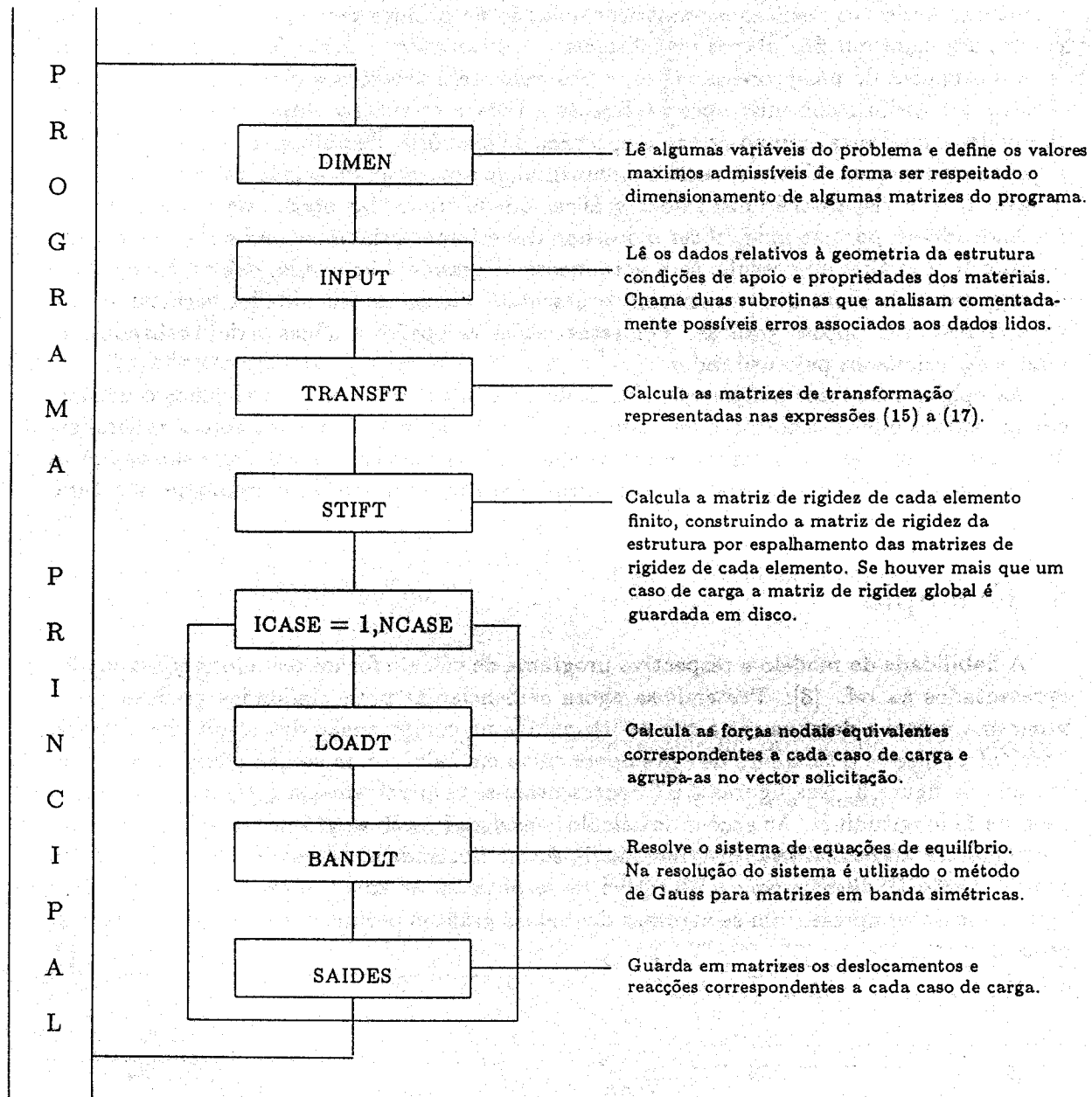
Apresenta-se em seguida o fluxograma do programa de cálculo automático desenvolvido.

3.1. Fluxograma





3.1.1. Fluxograma associado à parte de cálculo



O pré-processamento engloba três tarefas. A primeira consiste na geração duma malha de elementos finitos de forma a modelar a estrutura do problema a analisar com os elementos estritamente necessários [12]. A segunda tarefa tem como função a renumeração da malha de elementos finitos de forma a minimizar a semibanda. A última tarefa do pré-processamento cria o ficheiro de dados, que deverá ser completado com as condições de ligação da estrutura ao exterior, assim como as acções que solicitam a estrutura.

A parte do programa correspondente ao cálculo tem como função básica, a obtenção dos deslocamentos e reacções para cada caso de carga. Tal tem como objectivo, uma minimização do tempo de cálculo e a não criação de ficheiros de resultados, com correspondente

ocupação de memória, que por vezes não tem interesse para a análise de determinado problema.

No pós-processamento existe uma subrotina que detecta os planos que constituem a estrutura. Assim, os resultados numéricos poderão ser obtidos tanto para toda a estrutura, como para cada um dos planos que discretizam a estrutura. Desta forma, ao seleccionar uma das opções do pós-processamento, o utilizador terá acesso aos planos que discretizam a estrutura assim como uma opção referente a toda a estrutura. Com este procedimento pretende-se minimizar tempo de cálculo, espaço de memória, flexibilizar e economizar a utilização do programa. Outro aspecto fundamental da separação da estrutura por planos tem a haver com a visualização das saídas gráficas que algumas das opções permitem. Assim, pretendendo-se, por exemplo, obter o desenho dos esforços principais numa estrutura tridimensional, a análise do desenho será geralmente de grande dificuldade, devido à densidade de segmentos de recta que constituem o desenho. Idênticas dificuldades verificar-se-iam para as restantes opções gráficas. Por estas razões as opções gráficas serão realizadas em planos seleccionados pelo utilizador.

As opções referentes à coloração dos deslocamentos e esforços generalizados consistem em subrotinas que transformam um campo escalar de deslocamentos e esforços generalizados, num campo de cores em correspondência com a grandeza e sinal dos valores que os deslocamentos e esforços generalizados, respectivamente, assumem no domínio da estrutura.

4. Exemplo

A fiabilidade do modelo e respectivo programa de cálculo foram testados com exemplos apresentados na ref. [8]. Pretende-se agora evidenciar as potencialidades gráficas que o programa possui e demonstrar a sua oportunidade na compreensão dos resultados obtidos. Para tal analisa-se o tabuleiro de uma ponte curva em caixão com secção transversal representada na figura 3. Nas figuras 4 e 5 representam-se respectivamente o traçado em planta e em perfil longitudinal. As acções de cálculo consideradas são as prescritas no regulamento português de acções (RSA), distribuídas da forma ilustrada na figura 6 e combinadas de acordo com o Quadro 1, com o objectivo de se obterem as envolventes dos esforços. Nas figuras seguintes apresentam-se algumas das saídas gráficas permitidas pelas opções de pós-processamento.

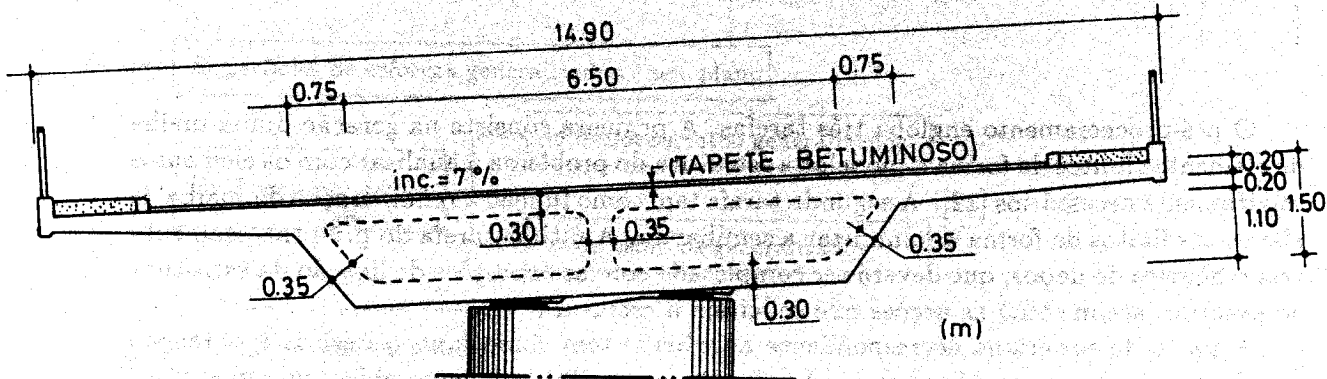


Fig. 3 - Secção do tabuleiro

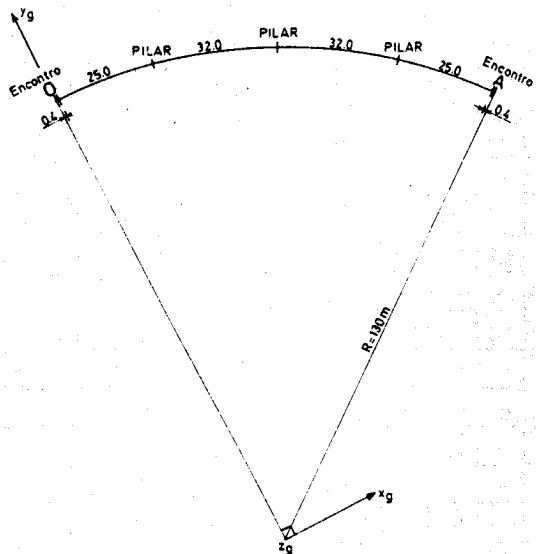


Fig. 4 - Traçado em planta

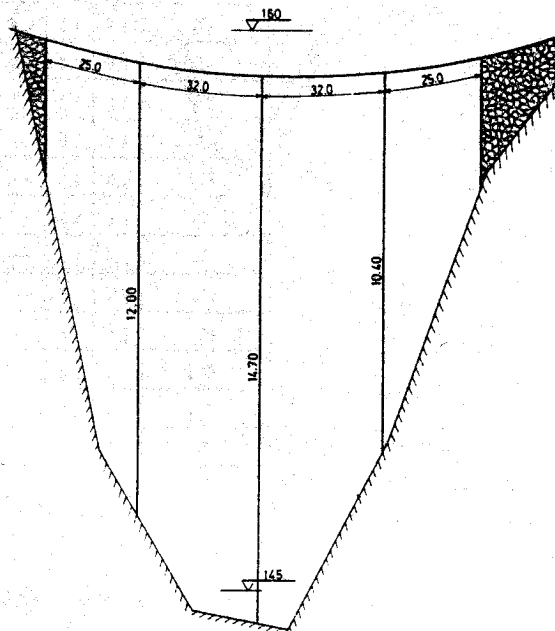


Fig. 5 - Perfil longitudinal

A. Acções

a.1 Peso próprio do tabuleiro (p.p)

a.2 Revestimentos (rev.):

2 kN/m² ... na faixa de rodagem
4 kN/m² ... nos passeios

a.3 Sobrecarga uniformemente distribuída (sq)

4 kN/m² ... na faixa de rodagem
1.8 kN/m² ... nos passeios

a.4 Sobrecarga transversal de cutelo (sQ)

50 kN/m ... na faixa de rodagem

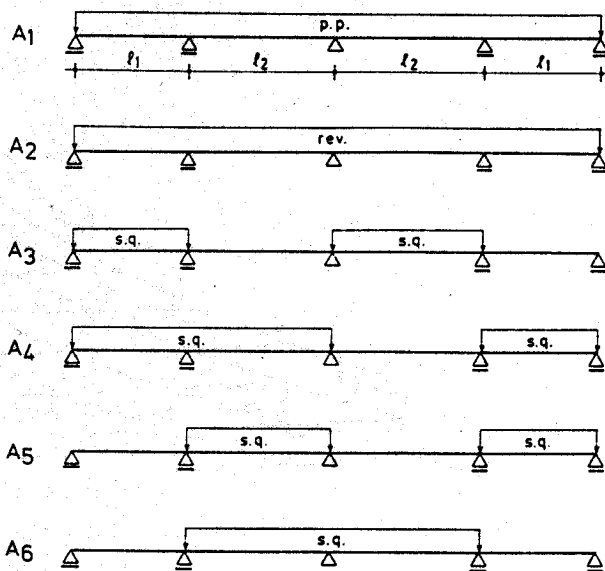
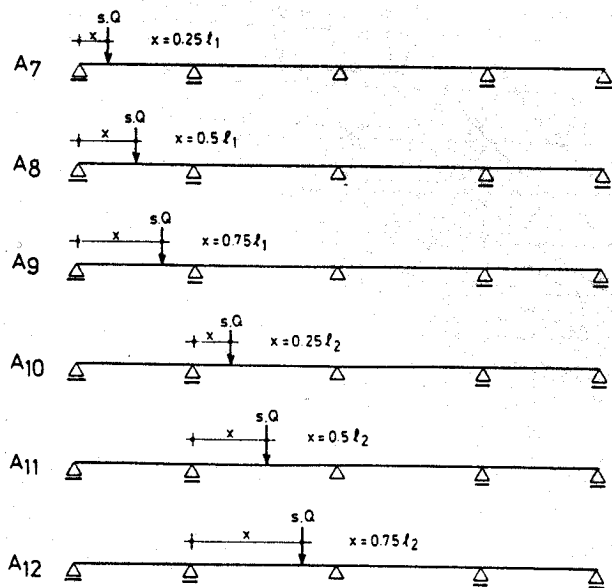


Fig. 6 - Distribuição das acções

Combinação	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈	A ₉	A ₁₀	A ₁₁	A ₁₂
C ₁	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
C ₂	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
C ₃	1.5	1.5	1.5	—	—	—	1.5	—	—	—	—	—
C ₄	1.5	1.5	1.5	—	—	—	—	1.5	—	—	—	—
C ₅	1.5	1.5	1.5	—	—	—	—	—	1.5	—	—	—
C ₆	1.5	1.5	—	1.5	—	—	—	1.5	—	—	—	—
C ₇	1.5	1.5	—	1.5	—	—	—	—	1.5	—	—	—
C ₈	1.5	1.5	—	1.5	—	—	—	—	—	1.5	—	—
C ₉	1.5	1.5	—	1.5	—	—	—	—	—	—	1.5	—
C ₁₀	1.5	1.5	—	—	1.5	—	—	—	—	1.5	—	—
C ₁₁	1.5	1.5	—	—	1.5	—	—	—	—	—	1.5	—
C ₁₂	1.5	1.5	—	—	1.5	—	—	—	—	—	—	1.5
C ₁₃	1.5	1.5	—	—	—	1.5	—	—	—	—	1.5	—
C ₁₄	1.5	1.5	—	—	—	1.5	—	—	—	—	—	1.5

Quadro 1 - Combinações das acções

PONTE SOBRE O RIO VIZELA (SOLUCAO B)

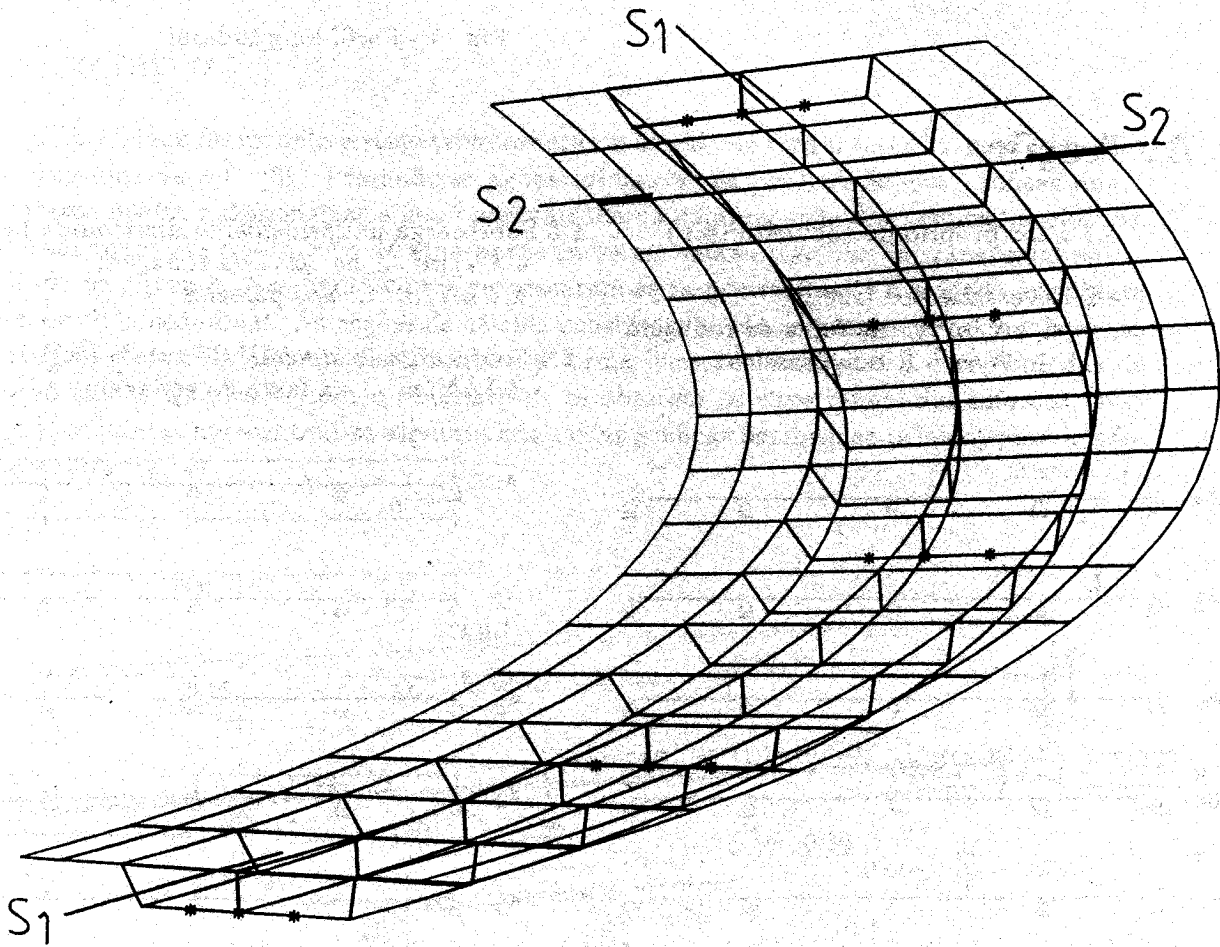
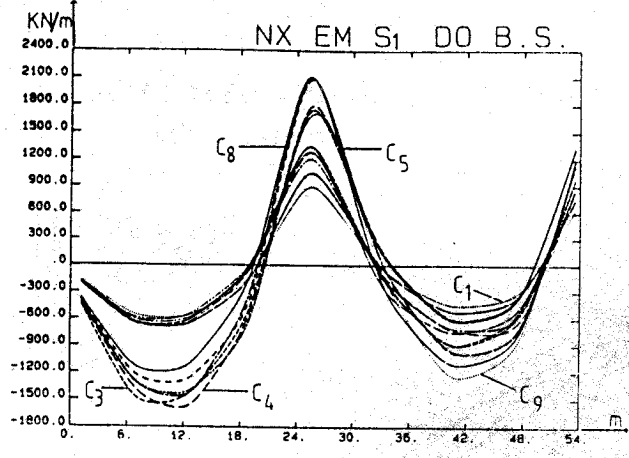
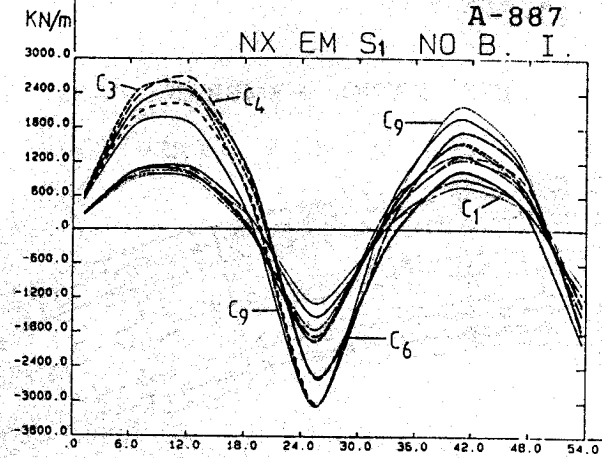


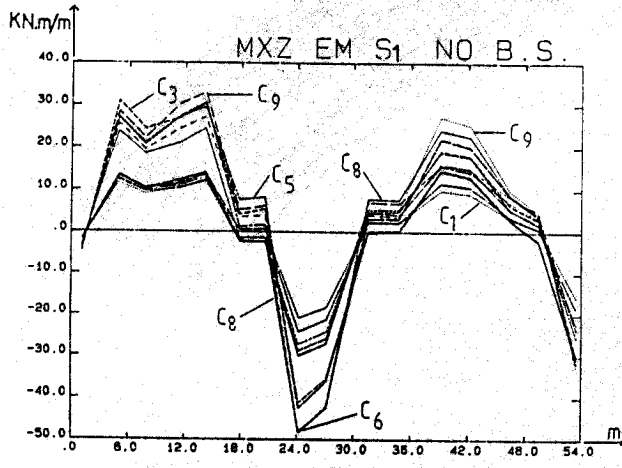
Fig. 7 - Malha de elementos finitos



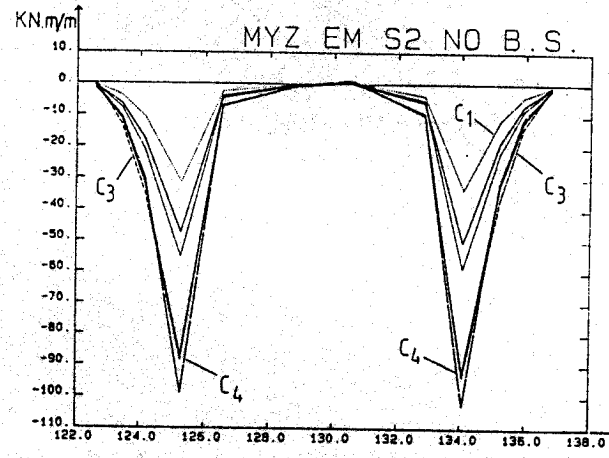
a)



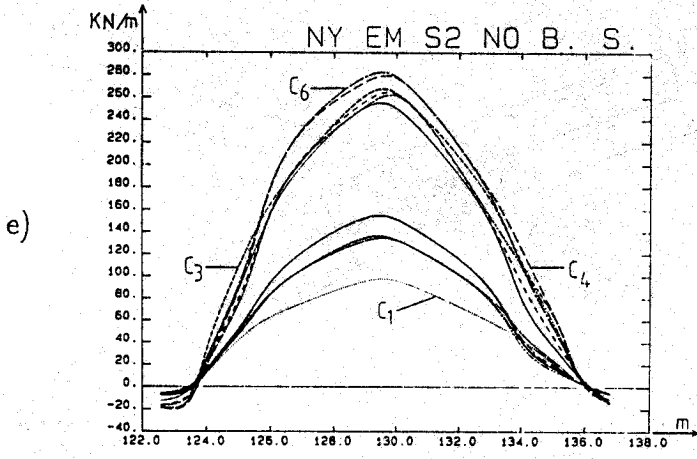
b)



c)



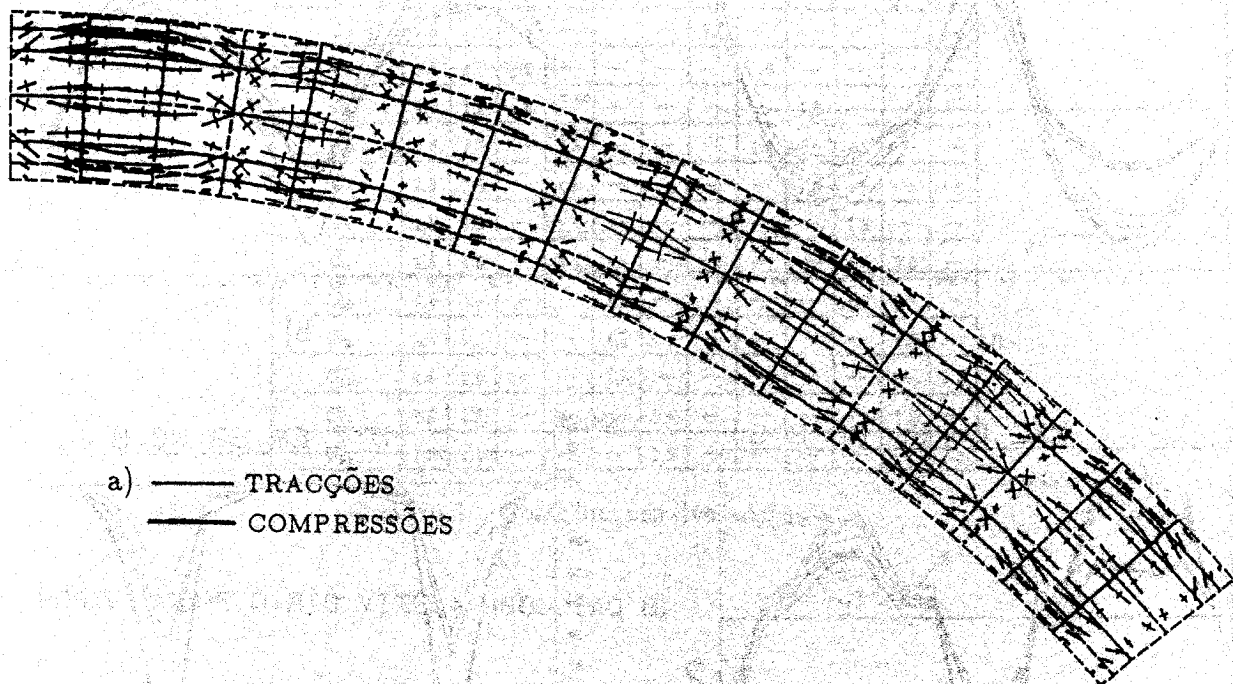
d)



e)

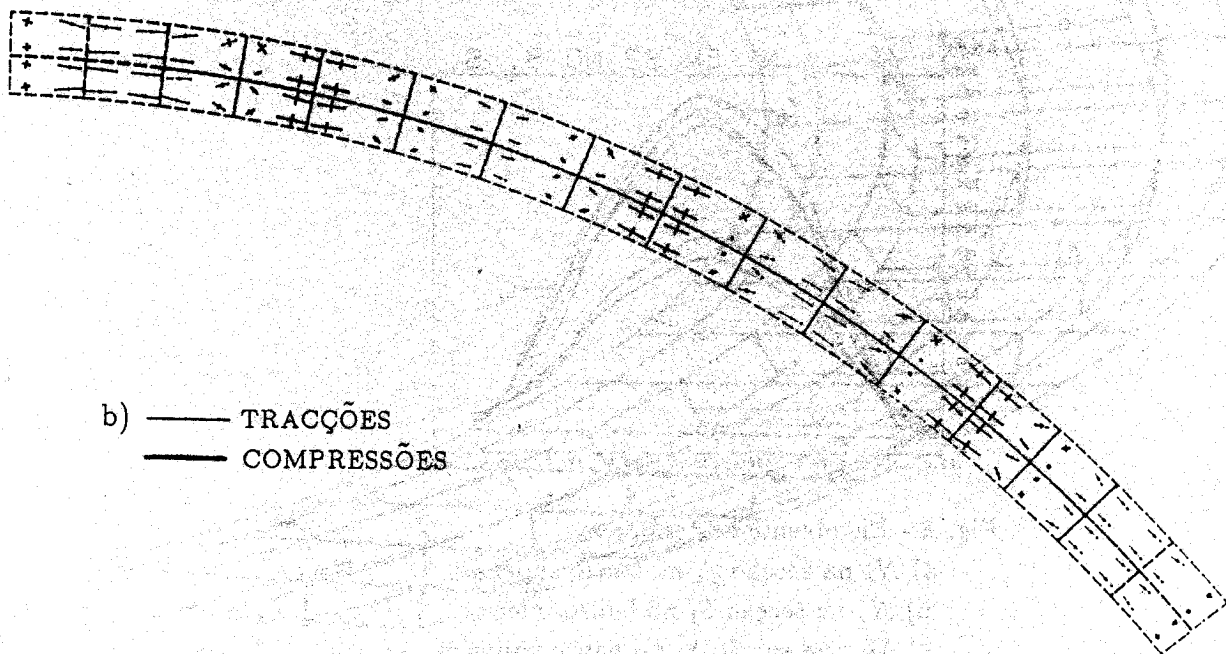
Fig. 8 - Envolvente dos esforços:
 a) N_x na secção S_1 no banço superior
 b) N_x na secção S_1 no banço inferior
 c) M_{xz} na secção S_1 no banço superior
 d) M_{yz} na secção S_2 no banço superior
 e) N_y na secção S_2 no banço superior

ESF. PRINC. MEMBRANA BANZO SUP. ; COMB. C3 ; $N_{max.} = 1844 \text{ kN/m}$



a) ——— TRACÇÕES
————— COMPRESSÕES

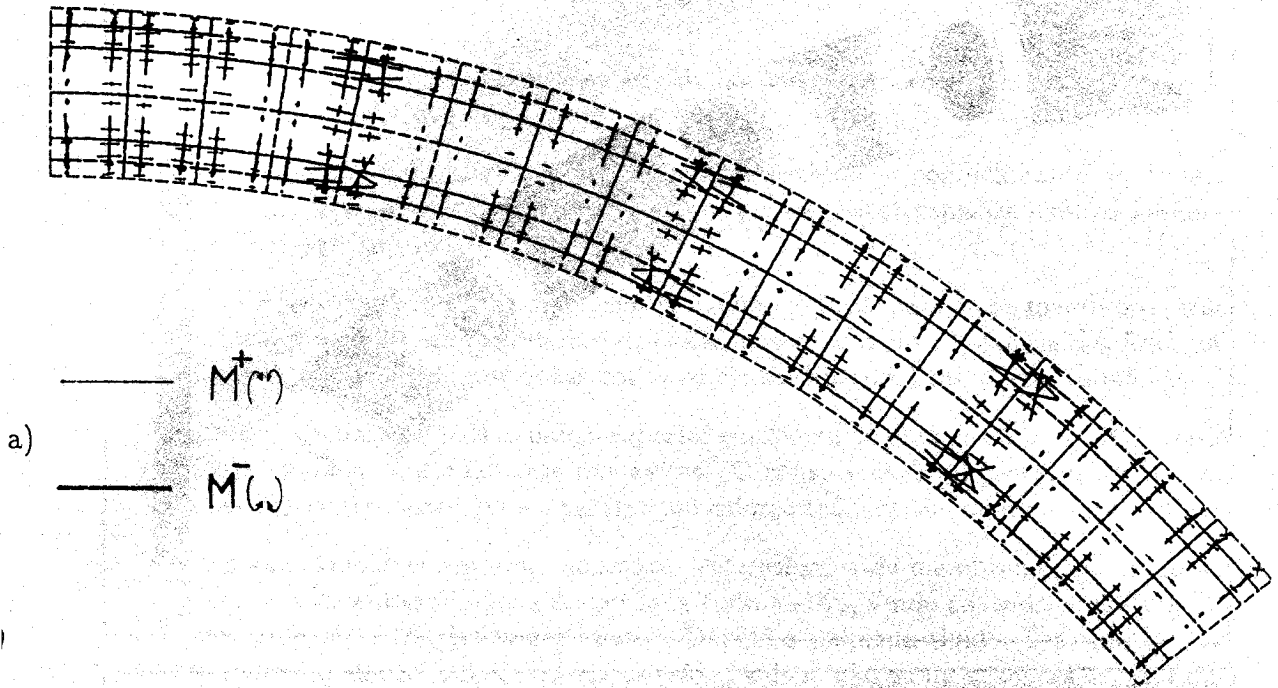
ESF. PRINC. MEMBRANA BANZO INF. ; COMB. C3 ; $N_{max.} = 2901 \text{ kN/m}$



b) ——— TRACÇÕES
————— COMPRESSÕES

Fig. 9 - Esforços principais de membrana para a combinação C_3
a) Banzo superior; b) Banzo inferior

MOME. PRINCIPAIS BANZO SUP. ; COMB. C3 ; $M_{max.} = 102 \text{ kN.m/m}$



MOME. PRINCIPAIS BANZO INF. ; COMB. C3 ; $M_{max.} = 45 \text{ kN.m/m}$

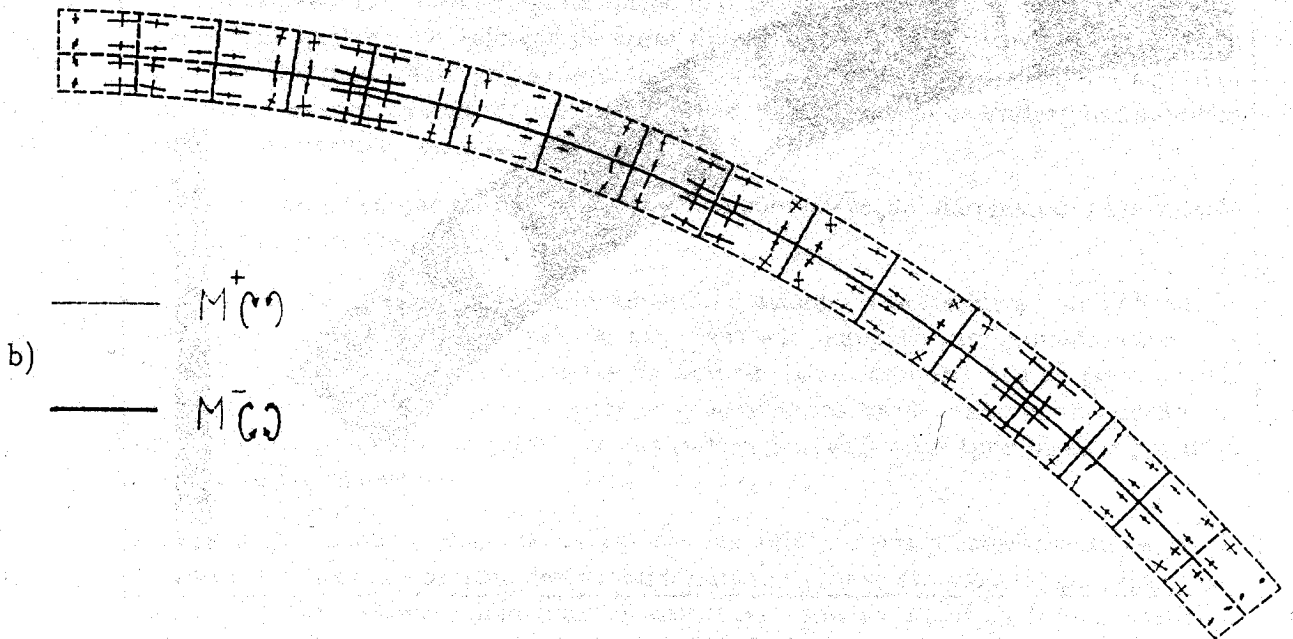
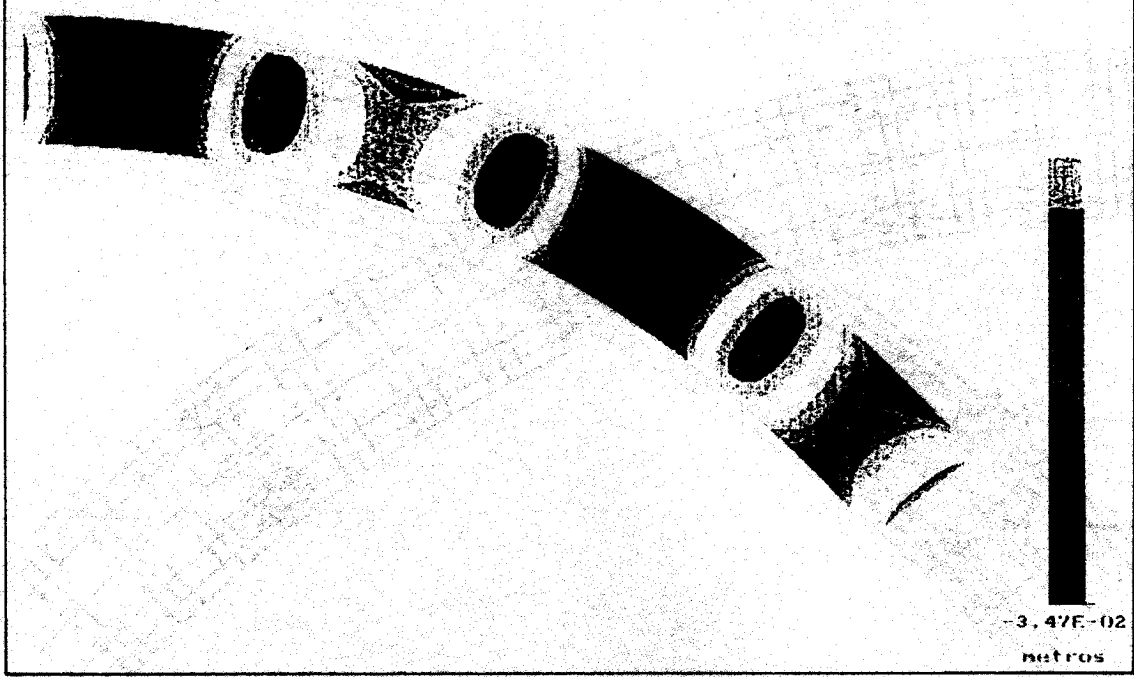


Fig. 10 - Momentos principais para a combinação C_3

a) Banzo superior; b) Banzo inferior

DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO BANZO SUPERIOR (COMB. C3)

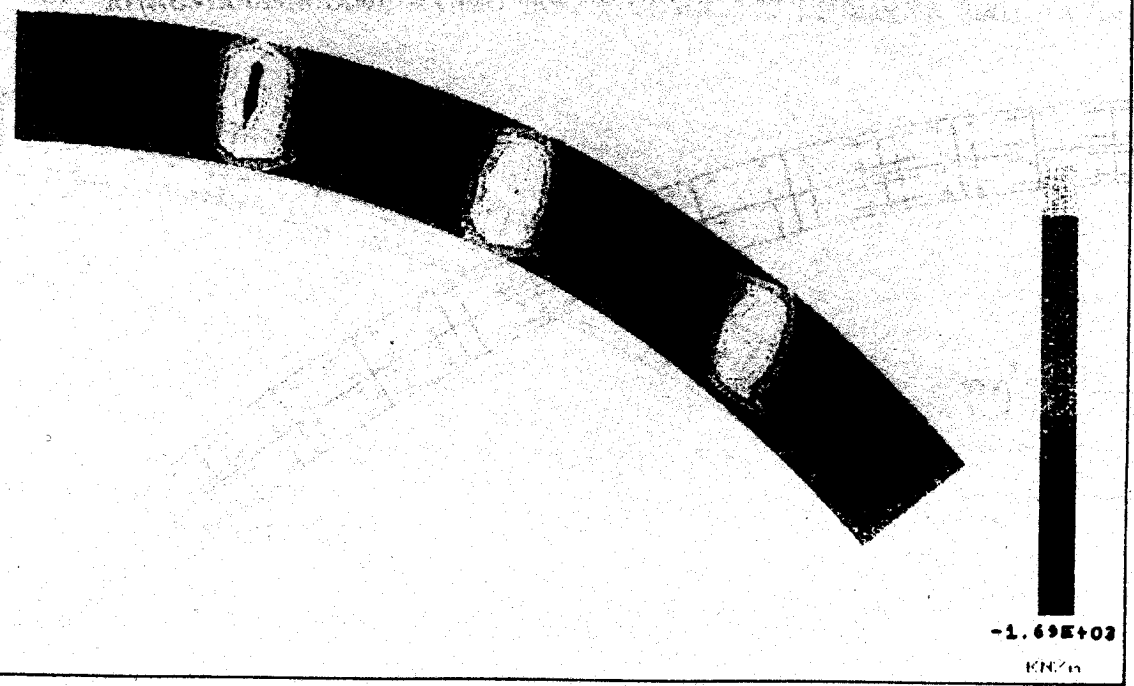
1.77E-04



-3.47E-02 metros

ESFORÇOS NX NO BANZO SUPERIOR (COMB. C3)

2.07E+03



-1.69E+03 KN/m

Fig. 11 - Coloração do campo de deslocamentos e dos esforços de membrana relativos à combinação C₃

5 - Conclusões

Da análise dos resultados e das figuras associadas ao pós-processamento, algumas considerações podem ser referidas.

- A sobrecarga de cutelo mais a uniformemente distribuída é condicionante no dimensionamento, pois produz esforços de maior valor comparativamente com os gerados pela sobrecarga do veículo tipo.
- Num tabuleiro em viga caixão, os esforços fundamentais são os de membrana, não sendo porém de desprezar os esforços de flexão e corte, devido à baixa rigidez flexional e espessura, apresentada por quase todos os elementos constituintes do tabuleiro.
- De acordo com a figura 9 d), o banzo superior comporta-se para os esforços M_{yz} , como uma laje apoiada continuamente nas almas. O considerável valor destes momentos junto às almas exteriores, pode requerer pré-esforço transversal além do longitudinal.
- Nas almas desenvolvem-se preponderantemente esforços de membrana. Os máximos valores são apresentados pelos esforços longitudinais N_x , sendo contudo consideráveis os valores de N_y e N_{xy} junto aos apoios. Devido à pequena rigidez flexional que as almas possuem, dever-se-á considerar os esforços de flexão a que aquelas são submetidas. Junto aos apoios, as almas são ainda submetidas a esforços de corte que não são de desprezar.
- A existência de diafragmas aos meios vãos e sobre os apoios, permitem diminuir os momentos flectores nos banzos e aumentar a rigidez torcional do tabuleiro, necessária para resistir às acções excêntricas, por virtude do seu traçado curvo em planta. Porém, a presença dos diafragmas quase não altera o traçado dos esforços de membrana nos banzos. Os esforços de corte desenvolvidos no tabuleiro são absorvidos basicamente pelos diafragmas dispostos sobre os apoios. Estes diafragmas possuem também elevados esforços de membrana, apresentando ainda os diafragmas sobre os encontros consideráveis esforços de flexão
- A inclinação da secção do tabuleiro, devido à sobrelevação, não introduz consideráveis assimetrias nos esforços.
- Da análise da coloração dos deslocamentos e esforços associados à combinação C_3 verifica-se que os máximos valores absolutos são atingidos aproximadamente nos tramos mais solicitados, como seria de esperar. Considerando que se pode colorir tanto os deslocamentos como os esforços generalizados, verifica-se que esta opção auxilia na interpretação quantitativa e qualitativa dos resultados apresentados por uma estrutura tridimensional.
- Poder-se-á concluir que as opções gráficas incluídas no pós processamento de resultados existente no programa desenvolvido, manifestam-se de importância primordial na concepção e dimensionamento de estruturas, pois auxiliam de forma versátil e rápida a análise dos resultados. A possibilidade de se realizar o pós-processamento nos planos constituintes da estrutura garante a clareza e facilidade de interpretação sempre requerida no dimensionamento.

Referências

- [1] O. C. Zienkiewicz, *"The Finite Element Method"*, Third Edition, McGraw-Hill
- [2] E. Hinton, D.R.J. Owen, *"An Introduction to Finite Element Computation"* Pineridge Press, Swansea, U.K., 1979.
- [3] D.R.J. Owen, E. Hinton, *"Finite Elements in Plasticity: theory and practice"*, Pineridge Press Limited, 1980.
- [4] E. Hinton, D.R.J. Owen, *"Finite Element Software for Plates and Shells"*, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., 1984.
- [5] J. A. Figueiras, *"Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells"*, Ph. D. thesis, C/PH/72/83, Department of Civil Engineering, University Colege of Swansea, U. K., Sept., 1983.
- [6] R.D. Mindlin, *"Influence of rotary inertia and shear or flexural motions of isotropic, elastic plates"*, Journal of Appl. Mech., Vol. 18, n^o. 1, Trans. ASME, Vol. 73, 1951, p.p. 31-38.
- [7] Chuen - Yuan Chia, *"Numerical analysis of Plates"*, McGraw-Hill.
- [8] J. A. O. Barros, *"Modelos de análise de estruturas laminares e de laminados compósitos"*, Tese de mestrado, Universidade do Porto, 1989.
- [9] E. D. L. Pugh, *"A Study of quadrilateral plate bending elements with "reduced" integration"*, Int. Journal of Num. Meth. in Eng., Vol. 12, 1978, pp. 1059-1079.
- [10] T. J. R. Hughes and M. Cohen, *"The 'heterosis' finite element for plate bending"*, Computers & Structures, Vol. 9, pp. 445-450.
- [11] H. Parish, *"Critical Survey of the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin application and reduced integration"*, Computer Methods in applied Mechanics and Engineering 20 (1979) pp. 323-350.
- [12] J. A. O. Barros e J. A. Figueiras, *"Análise de estruturas laminares utilizando elementos de casca planos com pré e pós-processamento gráfico"*, Relatório do Gabinete de Estruturas, F.E.U.P., Dezembro de 1988.