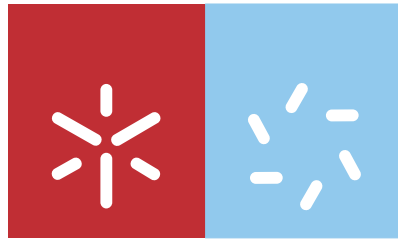


Universidade do Minho
Escola de Ciências

Cláudia Manuela Ferreira Maia

O plano Hiperbólico



Universidade do Minho
Escola de Ciências

Cláudia Manuela Ferreira Maia

O plano Hiperbólico

Dissertação de Mestrado em Matemática
Área de Especialização em Formação Contínua de Professores

Trabalho efectuado sob a orientação da
Doutora Lucile Vandembroucq

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO PARCIAL DESTA TESE APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE;

Universidade do Minho, ___/___/_____

Assinatura: _____

O Plano Hiperbólico

Agradecimentos

Na elaboração deste trabalho, devo agradecer a algumas pessoas que directa ou indirectamente contribuíram para a sua conclusão:

À minha orientadora Doutora Lucile Vandembroucq por ter acompanhado com grande dedicação em todos os momentos deste trabalho, pelos contributos valiosos, pela aprendizagem que me proporcionou, pela disponibilidade e compreensão sem as quais não teria finalizado esta etapa da minha vida.

Aos meus pais e irmã a quem devo tudo o que consegui até agora. Pelo carinho, pelo incentivo e pela companhia. Ao pequeno Diogo pela minha ausência e por me proporcionar momentos em que só penso nele.

Ao Zé pela minha ausência, pela paciência.

Aos meus queridos amigos pelo companheirismo, pelos momentos de ternura e de descontração.

Finalmente, aos meus queridos colegas e amigos: Angela, Daniela, Elisabete e João por estarem sempre disponíveis, pelo carinho, pelo incentivo, pela preocupação e pelos momentos felizes que me proporcionam.

Resumo

As tentativas de demonstração do quinto postulado de Euclides originaram a maior e mais temida descoberta para a geometria Euclidiana do século XIX. Iniciava-se o percurso de procura de outras geometrias não-euclidianas que apresentavam igual consistência, tais como a Geometria Hiperbólica. Nesta geometria não se verifica o quinto postulado de Euclides na medida em que, por um ponto exterior a uma recta, existem infinitas rectas paralelas à recta dada, mas todos os outros axiomas são válidos. Esta dissertação demonstra a consistência da Geometria Hiperbólica, utilizando o modelo do Disco de Poincaré, através do sistema axiomático modificado de Hilbert. O estudo das isometrias neste modelo, em analogia às isometrias existentes na geometria euclidiana, culminam com a apresentação de um método que permitirá pavimentar o Disco de Poincaré à semelhança do que fez M. C. Escher no seu Circle Limit III. Utilizando as novas tecnologias, foram construídas algumas ferramentas em ambiente de geometria dinâmica, Geogebra, que facilitaram a construção de vários objectos geométricos próprios da geometria Hiperbólica, transformações geométricas e pavimentações do Disco de Poincaré.

Abstract

The attempts to demonstrate the fifth postulate of Euclid originated the largest and most dreaded discovery for the Euclidean geometry of the 19th century. The journey to find other non-Euclidean geometries with equal consistency, such as hyperbolic geometry, was starting. In this geometry Euclides fifth postulate is not valid, there are endless straights parallels to the given line. All other postulates are valid to the line given. This thesis demonstrates the consistency of Hyperbolic Geometry using the Poincaré Disk model by modified Hilbert's axiomatic system. The study of isometries in this model, in analogy to isometries existing in Euclidean geometry, culminate with the presentation of a method that will pave the Poincaré Disk as did M.C. Escher in his Circle Limit III. Using new technologies, some tools were built in dynamic geometry environment, Geogebra, which facilitated the construction of several geometric objects themselves of hyperbolic geometry, geometric transformations and pavings of the Poincaré Disc.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Circunferências em Geometria Euclidiana	11
2.1	Potência relativamente a uma circunferência	11
2.2	Princípios de Continuidade	15
2.3	Circunferências Ortogonais	16
2.4	Inversão Circular	19
2.4.1	Construções Geométricas relacionadas com a inversão circular	24
2.4.2	Propriedades da Inversão	31
3	Disco de Poincaré	41
3.1	Descrição do modelo e notação	41
3.2	Definições	44
3.3	Movimento rígido no Disco de Poincaré	51
3.4	Consistência da Geometria Hiperbólica	59
3.4.1	Axiomas de Incidência	59
3.4.2	Axiomas de Ordem	62
3.4.3	Axiomas de Congruência	67
3.4.4	Axioma da Geometria Hiperbólica	73
3.4.5	Axioma de Continuidade	75
4	Resultados e construções na Geometria Hiperbólica	77
4.1	Circunferências e perpendiculares	77
4.2	Soma dos ângulos internos	87
4.3	Isometrias	93
4.4	Pavimentações	104

Capítulo 1

Introdução

A obra "Elementos" de Euclides é constituída por 13 livros escritos pelo matemático grego Euclides 300 a.C.. Esta obra, organizada através de uma sequência lógica e coerente e baseada num sistema axiomático, foi de extrema importância durante mais de 2000 anos por ser a primeira compilação de um conjunto de definições, postulados, proposições e respectivas provas matemáticas sobre a geometria euclidiana e teoria dos números. A obra tornou-se célebre e foi considerada o primeiro tratado científico que promoveu o desenvolvimento lógico da geometria e de outros ramos da matemática. Os livros iniciam-se com um conjunto de definições e pressupostos seguidos de todos os resultados relacionados com o tema de cada livro juntamente com as provas dos mesmos. As provas são baseadas num sistema axiomático previamente definido e seguem uma dedução lógica onde eram utilizados, unicamente, conhecimentos adquiridos anteriormente.

A apresentação dos Elementos tinha como ponto de partida as noções comuns e os postulados, cujo objectivo era serem simples e óbvios (veracidade incontestável), de forma a permitirem eliminar a necessidade da sua prova. Os mesmos foram cuidadosamente seleccionados, de forma a poderem deduzir todos os resultados relativos à geometria. Era, portanto, um conjunto de axiomas através dos quais se baseava a geometria. A distinção entre noções comuns e postulados não é unânime; alguns comentadores dizem que os postulados têm uma intencionalidade geométrica enquanto que as noções comuns são enunciados de uma natureza mais universal, outros chamam postulados aos enunciados que permitem construir algo e noções comuns às afirmações que atestam a veracidade inequívoca de algo ([17, pág. 29]). Euclides apresentou dez axiomas divididos em dois grupos: as noções comuns e os postulados, que passamos a enunciar:

Noções comuns:

1. Coisas iguais a uma mesma coisa, são iguais entre elas.
2. Se a coisas iguais acrescentam-se coisas iguais, os totais serão iguais.
3. Se de coisas iguais subtraem-se coisas iguais, as diferenças serão iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
5. O todo é maior do que qualquer uma das partes.

Postulados:

1. Pode-se traçar uma (única) recta ligando quaisquer dois pontos.
2. Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer recta finita continuamente em uma recta.
3. Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.
4. Todos os ângulos rectos são iguais.
5. Se uma linha recta cortar duas outras rectas de modo que a soma dos ângulos internos de um mesmo lado seja menor do que dois rectos, então essas duas rectas, quando suficientemente prolongadas, cruzam-se do mesmo lado em que estão esses dois ângulos.

Os quatro primeiros postulados de Euclides foram facilmente aceites pelos matemáticos pois derivavam de experiências práticas relacionadas com construções de régua e compasso e o uso de instrumentos de medição de ângulos. Mas o quinto postulado gerou uma enorme e longa controvérsia por não ser auto-evidente nem empiricamente verificável dado que, na prática, são representados apenas segmentos de recta e não rectas (não é possível a sua representação indefinidamente). O próprio Euclides somente utilizou este postulado na 29^a proposição do livro I. Este postulado era mais sofisticado do que outro axioma qualquer e muitos matemáticos, por exemplo Proclus (410 – 485), achavam que devia ser um teorema e não um axioma. Segundo Hartshorne Proclus referiu que:

”This ought to be struck from the postulates altogether. For it is a theorem - one that invites many questions, which Ptolemy proposed to resolve in one of his books - and requires for its demonstration a number of definitions as well as theorems”. ([17, pág. 297]).

A tentativa de provar este postulado à custa dos outros quatro, durou cerca

de 2000 anos, e originou a produção de um grande número de afirmações a ele equivalentes às quais chamamos de substitutos. ([2, pág. 9]). Por exemplo, tal como surge num livro de John Playfair, o conhecido postulado foi escrito da seguinte forma: Por um ponto exterior a uma recta é possível traçar uma única recta paralela à dada.

Algumas tentativas de demonstração do 5º postulado assentaram no pressuposto, definido por Ptolomeu, em que uma recta paralela é o "*lugar geométrico dos pontos equidistantes a outra recta*".¹ Ora, o postulado não faz qualquer referência à igual distância entre as duas rectas e sendo assim, na sua prova, não podemos assumir esta propriedade como válida além de também não podermos assumir o seu contrário. A prova só poderia usar os quatro postulados anteriores e nada mais. Todas as afirmações necessárias à prova, que não fizessem parte do enunciado dos quatro anteriores, tinham de ser provadas à parte. As tentativas de prova tornaram-se infrutíferas e foram protagonizadas por alguns matemáticos, tais como, Proclus, Nasiraddin, Wallis, Legendre, Wolfgang Bolyai, Girolamo Saccheri, Johann Heinrich Lambert, Janos Bolyai, Lobachevsky. Para esta breve contextualização, seleccionámos alguns destes matemáticos para uma pequena referência na sua tentativa demonstração do 5º postulado.

- **Girolamo Saccheri** (1667 – 1733) - A sua demonstração consistia na tentativa de redução ao absurdo, à custa dos ângulos internos dos quadriláteros que ficaram conhecidos por quadriláteros de Saccheri. Saccheri tentou provar a contradição da afirmação "os ângulos do topo de um quadrilátero se Saccheri são agudos". Foi uma tentativa frustrada e, sem saber, Saccheri havia descoberto a geometria não-euclidiana.
- **Gauss** (1777 – 1855) - Foi o primeiro matemático a chegar à conclusão que a negação do 5º postulado poderia resultar em algo diferente mas interessante sem contrariar os outros axiomas. Descobertas do trabalho de Gauss permitem concluir que, de facto, foi o primeiro a perceber a existência de uma geometria logicamente precisa e diferente da de Euclides. Com receio de que as suas ideias pudessem não ser bem aceites na comunidade matemática, ocultou a sua descoberta até outros textos serem publicados. Gauss sabia que durante muitos anos as pessoas não iriam acreditar na possibilidade da existência de outra geometria para além da Euclidiana. Gauss foi o primeiro a designar a nova geometria por geometria não-euclidiana.
- **Wolfgang Bolyai** (1775 – 1856), interessou-se pelo postulado das paralelas (5º postulado) enquanto estudante em Gottingen onde se tornou

¹in Rainha das Ciências. Página 132.

amigo de Gauss. As tentativas frustradas de demonstração deste postulado levaram Wolfgang a criar alguns substitutos para o mesmo e devido ao insucesso chegou a duvidar da possibilidade da sua demonstração. Os anos dedicados a este trabalho foi partilhado com a educação e crescimento do seu filho Janos Bolyai.

- **Janos Bolyai** (1802 – 1860), filho de Wolfgang Bolyai, foi fortemente desencorajado pelo pai a dedicar o seu tempo ao axioma das paralelas dizendo-lhe (citado por Gray, 2007):

I have traversed this bottomless night, which extinguished all right and joy of my life. I entread you, have the Science of parallels alone ... Learn from my example: I wanted to know about paralels, i remain ignorant, this has taken all the flowers of my life and all my time from me. ([16])

Apesar de este desabafo do pai, Janos estava convencido de que a negação do 5º postulado não era absurda, ao contrário dos anteriores matemáticos, e que estava perante um "strange new universe" ([15]). Em 1823 Janos Bolyai (citado por Coxeter, pág.10) escreveu a seu pai dizendo:

I have resolved to publish a work on the theory of parallels, as soon as I shall have put the material in order The goal is not yet reached, but I have made such wonderful discoveries that I have been almost overwhelmed by them I have created a new universe from nothing. ([7, pág. 10])

A prova da sua descoberta foi transmitida ao seu pai que teve intenção de a publicar em 1831, num apêndice da sua obra Tentamen. Contudo, antes de o fazer, revelou a descoberta a Gauss que acabou por evitar a sua publicação alegando ter já conhecimento desse assunto mas que optou por não revelar à comunidade matemática com receio de abalar a sua enorme reputação. ([12, pág. 30])

- **Lobachevsky** (1793–1856) - Este matemático juntamente com Bolyai e Gauss partilham a honra de terem sido os primeiros a desenvolver um verdadeiro estudo do que chamamos agora de geometria hiperbólica. Lobachevsky foi o primeiro a publicar um trabalho sobre a geometria em que por um ponto pode passar mais do que uma recta paralela a uma recta dada (1829), ou seja, a Geometria Hiperbólica. Este trabalho que não causou grande impacto fora do seu país porque foi escrito em russo.

Somente anos depois quando escreveu o texto em alemão (1840), é que causou alguma curiosidade. Faleceu sem ver o seu trabalho reconhecido.

Os trabalhos de Lobachevsky e Bolyai não tiveram o reconhecimento imediato na época em que foram publicados, tal como previa Gauss, pois implicavam uma mudança radical na forma como se conhecia a geometria na época. Só depois da morte de Gauss, com a publicação dos seus trabalhos, é que as ideias relacionadas com a geometria não-euclidiana foram tomadas a sério. Outros matemáticos tais como Klein, Poincaré, Beltrami e Riemann utilizaram estes resultados para desenvolver estudos nesta área e em outras áreas do conhecimento.

A descoberta das geometrias não-euclidianas ocorreu da mesma forma que no século XVIII se deu a descoberta do cálculo, isto é, não foi só da responsabilidade de um matemático. Assim, na descoberta das geometrias não-euclidianas, nomeadamente na geometria hiperbólica, surge a referência a três matemáticos Gauss, Bolyai e Lobachevsky que se distinguiram de outros, não só pelo facto de terem publicado imensos textos sobre este assunto mas, por terem acreditado neste sistema lógico e na sua aplicação ao mundo real tal como a geometria Euclidiana. ([12, pág. 30]). Mais tarde, também Riemann descobriu outra geometria não euclidiana que contradizia o postulado das paralelas de uma forma diferente da geometria hiperbólica, ou seja, a inexistência de rectas paralelas (geometria elíptica). Apesar de terem descoberto as geometrias não euclidianas, não conseguiram criar um modelo que sustentasse as suas descobertas. Os modelos para esta geometria foram construídos por Beltrami, Cayley, Klein e Poincaré sendo que o primeiro modelo foi o de Beltrami-Klein onde se provou a consistência da geometria hiperbólica. O modelo no qual iremos trabalhar é o modelo do disco de Poincaré, apresentado por este matemático em 1871, que possui uma diferente noção de comprimento mas a mesma noção de medida de amplitude dos ângulos utilizada na geometria euclidiana.

Actualmente, numa perspectiva mais rigorosa da Matemática moderna, apontam-se algumas imperfeições em vários pontos, na obra de Euclides, tais como:

- algumas definições não apresentavam um significado mais compreensível da noção que se pretendia definir. Por exemplo, na definição de ponto como sendo "aquilo que não tem partes" ([15]). Acreditava-se que Euclides, em vez de atribuir um significado preciso dos termos, apelava à nossa intuição, aludindo para alguns conceitos que já teríamos na mente do que seria um ponto ou uma recta ([17, pág. 27]). Esta

situação poderia ser facilmente aceite para uma sociedade onde era conhecida somente a geometria euclidiana;

- a linguagem utilizada, nomeadamente o uso de alguns termos considerados ambíguos do ponto de vista do rigor, por exemplo, o uso de "linha recta finita" como sendo um segmento de recta e o uso do termo "igual" ao que actualmente chamamos de congruente;
- a utilização de algumas verdades, por exemplo o uso do método da sobreposição que não é contemplado nem nas noções comuns nem nos postulados pelo que seria um axioma extra. Também a utilização da existência de pontos de intersecção entre, por exemplo, rectas e circunferências e entre circunferências, e o facto de Euclides nunca mencionar o conceito de "estar entre", mas ter assumido algumas verdades acerca destes. Por outras palavras, o sistema de postulados de Euclides apresenta alguns resultados como fruto de intuição no que diz respeito a definições e demonstrações.

Assim, para que as provas fossem suficientemente rigorosas seria necessário um sistema axiomático mais completo. Desta forma, para colmatar todas estas imperfeições, surgiram a partir do século XIX outras propostas de sistemas axiomáticos para a organização da geometria euclidiana de forma a torná-la rigorosa. Os mais conhecidos são os de Hilbert, Birkhoff e Tarski. Neste trabalho tomaremos como base o sistema axiomático modificado de David Hilbert dado que *his axioms are perhaps the most intuitive and are certainly the closest in spirit to Euclid's* ([15]). Este novo sistema modificado de Hilbert foi apresentado no *The Foundations of Geometry* (1899). Os axiomas de Hilbert são considerados suficientemente rigorosos de modo a sustentar a existência da geometria euclidiana. Deste modo, este novo método axiomático distingue-se do utilizado por Euclides, principalmente pela introdução do grupo de axiomas relacionados com a ordem, baseados no trabalho de Pasch (1880), e estão divididos em cinco grupos: Incidência, Ordem, Congruência, Continuidade e Paralelismo.

Enunciamos de seguida parte dos axiomas de Hilbert relevantes para este trabalho com algumas adaptações como surgem em Hartshorne: Os primeiros axiomas dizem respeito a um dado conjunto de pontos e rectas e às relações de "pertencer" e "estar-entre". Com essas noções preliminares podemos definir os conceitos de segmento de recta, semi-recta, ângulos e triângulos.

I. AXIOMAS DE INCIDÊNCIA

(1). Por dois pontos passa uma única linha recta.

- (2). Toda a recta contém, pelo menos, dois pontos.
 (3). Existem, pelo menos, três pontos distintos que não estão sobre a mesma recta.

II. AXIOMAS DE ORDEM

- (1). Se um ponto B está entre A e C , $A * B * C$, então A , B e C são três pontos distintos de uma recta e $C * B * A$.
 (2). Para quaisquer dois pontos distintos A e B , existe um ponto C tal que $A * B * C$.
 (3). Se A , B e C são três pontos distintos pertencentes à mesma recta, então um e apenas um deles está entre os outros dois.
 (4). (**Axioma de Pasch**) Sejam A , B e C pontos do plano, não colineares, l uma recta tal que A , B e C não pertencem a l . Se o segmento AB intersecta l então l intersecta o segmento AC ou l intersecta o segmento BC .

O 3º grupo de axiomas refere-se a uma relação entre segmentos e ângulos chamada de "congruência" e denotada por \cong .

III. AXIOMAS DE CONGRUÊNCIA

- (1). Dados um segmento AB e uma semi-recta r com origem num ponto A' , existe um único ponto B' em r tal que o segmento AB é congruente com o segmento $A'B'$.
 (2). Considerando segmentos AB , CD e EF , se $AB \cong CD$ e $AB \cong EF$ então $CD \cong EF$.
 (3). Considerando segmentos AB , $A'B'$, BC , $B'C'$, AC e $A'C'$, se $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ e $BC \cong B'C'$ então $AC \cong A'C'$.
 (4). Dado um ângulo qualquer $\angle BAC$ e dada uma semi-recta qualquer $A'B'$ com origem em A' existe uma única semi-recta $A'C'$ com origem em A' , num semi-plano dado em relação à recta $A'B'$, tal que os ângulos $\angle B'A'C'$ e $\angle BAC$ são congruentes.
 (5). Todo o ângulo é congruente a si mesmo.
 (6). (LAL) Se dois lados e o ângulo compreendido entre eles, de um triângulo, são congruentes respectivamente a dois lados e o ângulo compreendido entre eles, de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

No que diz respeito à "continuidade", optámos por enunciar o seguinte Axioma de Dedekind. Esta escolha tem, em particular, a consequência que o único modelo para a Geometria Euclidiana (isto é, a geometria que verifica todos os axiomas de Hilbert aqui apresentados) é o espaço euclidiano \mathbb{R}^2 (munido do produto escalar usual) com as noções usuais de pontos e de rectas e

com as relações usuais de pertença, estar-entre e congruência [17, pág. 191].

IV. AXIOMA DE CONTINUIDADE (Axioma de Dedekind)

Suponha que os pontos pertencentes à recta l estão divididos em dois subconjuntos não vazios S e T de tal modo que nenhum ponto de S está entre dois pontos de T e, nenhum ponto de T está entre dois pontos de S . Então, existe um único ponto P tal que, para qualquer $A \in S$ e qualquer $B \in T$, tem-se $A = P$ ou $B = P$ ou o ponto P está entre A e B .

Finalmente vem o axioma correspondente ao 5º axioma de Euclides.

V. AXIOMA DAS PARALELAS Para toda a recta l e todo o ponto P não pertencente a l , existe no máximo uma recta m , que contém P , tal que m é paralela a l .

Neste ponto convém fazer referência à geometria absoluta que contempla apenas os axiomas de incidência, ordem, congruência e continuidade. Outras geometrias surgem dependendo da verificação, ou não, do axioma das paralelas. Por exemplo, a Geometria Euclidiana verifica o axioma das paralelas e a geometria hiperbólica verifica a negação deste axioma. Em suma, a geometria hiperbólica assume todos os axiomas da geometria absoluta e a negação do axioma das paralelas de Hilbert no sentido que, por um ponto exterior a uma recta dada passam, pelo menos, duas rectas paralelas à recta dada. Este axioma tem o nome de axioma hiperbólico. Os teoremas da geometria euclidiana deduzidos e demonstrados através dos axiomas que não envolvam o axioma das paralelas também são válidos na geometria hiperbólica.

Neste trabalho vamos verificar que o Disco de Poincaré definido em ambiente euclidiano (isto é, em \mathbb{R}^2) é um modelo para a Geometria Hiperbólica. No plano euclidiano, usaremos sem demonstração alguns resultados da geometria euclidiana e as seguintes notações:

- AB ou r para recta que contém os pontos A e B ou, de outra forma, recta r ;
- $[AB]$ para segmento de recta com extremos A e B ;
- $\dot{A}B$ para semi-recta com origem no ponto A e que passa por B ;
- \overline{AB} para comprimento do segmento de recta $[AB]$.

De seguida vamos estudar as isometrias na Geometria Hiperbólica em analogia com as isometrias na Geometria Euclidiana, com o objectivo de construir uma pavimentação no modelo do Disco de Poincaré, modelo da Geometria Hiperbólica escolhido para este trabalho. A pavimentação do

Disco de Poincaré foi também um tema de interesse para o artista M. C. Escher que desenvolveu um conjunto de trabalhos com a pavimentação do Disco utilizando imagens.

As imagens apresentadas neste trabalho foram todas efectuadas no programa de geometria dinâmica Geogebra, utilizando muitas vezes ferramentas próprias para facilitar a representação de alguns elementos, tais como, circunferências, segmentos de recta e recta hiperbólicos.

Capítulo 2

Circunferências em Geometria Euclidiana

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados com a respectiva demonstração que serão fundamentais à compreensão de certas afirmações nos próximos capítulos. Em momentos oportunos colocaremos algumas construções importantes para a percepção de algumas opções em conclusões e demonstrações posteriores.

A circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos que estão a uma distância r de um ponto fixo, O , denominado o centro da circunferência.

$$C(O, r) = \{P | \overline{OP} = r\} \quad (2.1)$$

Nas próximas páginas, de forma a reduzir a extensão da escrita, denominaremos unicamente por C a circunferência de centro O e raio r , ou seja, $C = C(O, r)$.

O conjunto dos pontos interiores da circunferência é definido por:

$$int(C) = \{P | \overline{OP} < r\} \quad (2.2)$$

O conjunto dos pontos exteriores da circunferência é definido por:

$$ext(C) = \{P | \overline{OP} > r\} \quad (2.3)$$

2.1 Potência relativamente a uma circunferência

Definição 2.1.1 (Potência). *Dado um ponto P e uma circunferência $C(O, r)$, a potência de P relativamente a C é o número:*

$$Pot(P, C) = \overline{OP}^2 - r^2 \quad (2.4)$$

12CAPÍTULO 2. CIRCUNFERÊNCIAS EM GEOMETRIA EUCLIDIANA

A potência de um ponto P em relação a uma circunferência C permite concluir a posição relativa desse ponto relativamente a C .

As consequências imediatas da definição de potência de um ponto em relação a uma circunferência são as seguintes:

- $Pot(P, C) > 0 \Leftrightarrow P \in ext(C)$

$$Pot(P, C) > 0 \Leftrightarrow \overline{OP}^2 - r^2 > 0 \Leftrightarrow \overline{OP}^2 > r^2 \Leftrightarrow P \in ext(C)$$

- $Pot(P, C) < 0 \Leftrightarrow P \in int(C)$

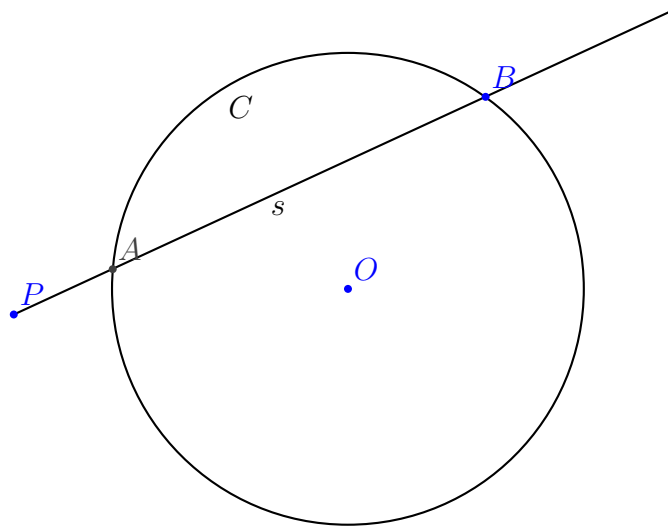
$$Pot(P, C) < 0 \Leftrightarrow \overline{OP}^2 - r^2 < 0 \Leftrightarrow \overline{OP}^2 < r^2 \Leftrightarrow P \in int(C)$$

- $Pot(P, C) = 0 \Leftrightarrow P \in C$

$$Pot(P, C) = 0 \Leftrightarrow \overline{OP}^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow \overline{OP}^2 = r^2 \Leftrightarrow P \in C$$

Proposição 2.1.2. *Seja P um ponto qualquer do plano não pertencente a $C = C(O, r)$, e s uma recta que passa por P e intersecta C em A e B . A potência de P relativamente a C é:*

$$Pot(P, C) = \begin{cases} \overline{PA} \cdot \overline{PB} & \text{se } P \in ext(C) \\ -\overline{PA} \cdot \overline{PB} & \text{se } P \in Int(C) \end{cases} \quad (2.5)$$



Demonstração. **1º caso**

A recta s passa por O . Temos dois subcasos:

1º subcaso:

Se P é exterior a C então

$$pot(P, C) = \overline{OP}^2 - \overline{r}^2 = (\overline{OP} - r)(\overline{OP} + r) = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

Se P é interior a C então

$$pot(P, C) = \overline{OP}^2 - \overline{r}^2 = (\overline{OP} - r)(\overline{OP} + r) = -\overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

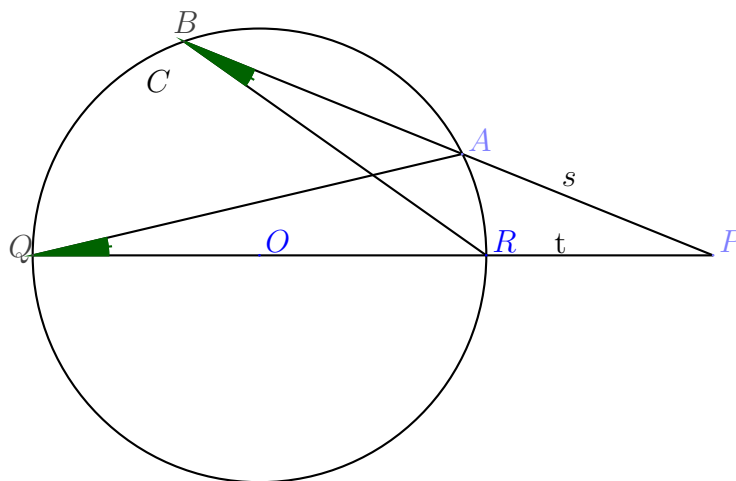
2º caso

A recta s não passa por O . Seja t a recta PO que intersecta C em R e Q .

1º Subcaso:

P é exterior a C .

Sem perda de generalidade podemos assumir que B e Q pertencem ao mesmo arco definido por A e R .



Relativamente aos triângulos $\Delta[BPR]$ e $\Delta[QPA]$ tem-se que:

- $\angle AQP = \angle BPR$ porque são ângulos inscritos no mesmo arco correspondente \widehat{AR} .
- $\angle BPR = \angle APQ$ porque é um ângulo comum aos dois triângulos.

14CAPÍTULO 2. CIRCUNFERÊNCIAS EM GEOMETRIA EUCLIDIANA

Assim, $\triangle[QPA]$ é semelhante ao $\triangle[BPR]$ pelo critério AAA.
Deste modo,

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{PA}}$$

Denotando por r o raio de C , temos

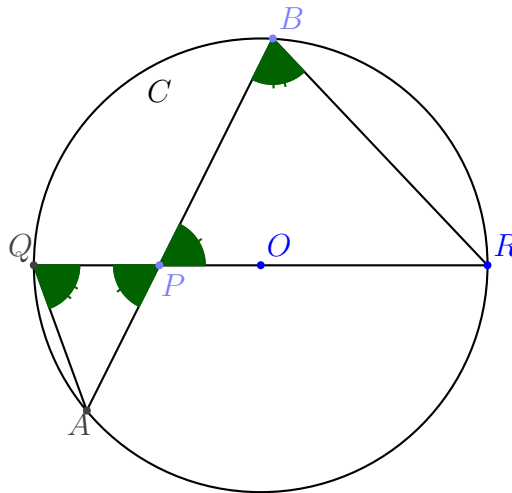
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PQ} \cdot \overline{PR} = (\overline{PO} + r)(\overline{PO} - r) = \overline{PO}^2 - r^2 = Pot(P, C)$$

Portanto, se $P \in ext(C)$ então $Pot(P, C) = \overline{PB} \cdot \overline{PA}$

2º Subcaso:

P é interior a C

Analogamente ao caso anterior, sem perda de generalidade podemos assumir que B e Q pertencem ao mesmo arco definido por A e R .



Relativamente aos triângulos $\triangle[AQP]$ e $\triangle[RBP]$ temos que:

- $\angle BPR = \angle QPA$ porque são ângulos verticalmente opostos.
- $\angle PQA = \angle RBP$ porque são ângulos inscritos no mesmo arco correspondente \widehat{AR} .

Pelo que, pelo critério AAA, o $\triangle[AQP]$ é semelhante ao $\triangle[RBP]$, logo

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{PA}}$$

Consequentemente

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PQ} \cdot \overline{PR} = (r - \overline{PO})(r + \overline{PO}) = r^2 - \overline{PO}^2 = -Pot(P, C)$$

Por isso, se $P \in Int(C)$ então $Pot(P, C) = -\overline{PB} \cdot \overline{PA}$

□

2.2 Princípios de Continuidade

Proposição 2.2.1. *Princípio da continuidade elementar*

Se um segmento de recta l possui um extremo como ponto interior a uma circunferência C e o outro exterior a essa circunferência, então l intersecta C .

Demonstração. Seja l um segmento de recta com extremidades A e B tal que $A \in ext(C)$, $B \in int(C)$. Consideremos a função f definida do seguinte modo:

$$\begin{array}{ccc} f : [0, 1] & \xrightarrow{\varphi} & [A, B] \\ t & \longmapsto & A(1-t) + tB \end{array} \quad \xrightarrow{Pot_C} \quad \mathbb{R}$$

Esta função é contínua e $f(0) > 0$ e $f(1) < 0$, logo, pelo Teorema de Bolzano, existe um c pertencente ao intervalo $]0, 1[$ tal que $f(c) = 0$. Assim $\varphi(c)$ é um ponto de $[AB]$ cuja potência em relação à circunferência C é 0. Logo $\varphi(c) \in [AB] \cap C$.

□

Proposição 2.2.2. *Princípio da Continuidade Circular*

Dados duas circunferências ψ e σ , se σ contém pelo menos um ponto A interior a ψ e pelo menos um ponto B exterior a ψ , então ψ e σ intersectam-se em dois pontos sendo exactamente um em cada um dos arcos definidos por A e B .

Demonstração. Sejam ψ e σ duas circunferências tais que $A, B \in \sigma$ sendo $A \in int(\psi)$, $B \in ext(\psi)$ e $\alpha = \angle(\dot{O}A, \dot{O}B)$ (α definido no sentido positivo) em que O é o centro da circunferência σ . Chamamos $arco_1$ ao arco AB com ângulo ao centro α e $arco_2$ ao arco "complementar" do ângulo ao centro $2\pi - \alpha$.

Sem perda de generalidade podemos supor que O é o ponto $(0, 0)$ de \mathbb{R}^2 e que A é o ponto $(r, 0)$.

Considere-se também a função f_1 tal que:

$$f_1 : [0, \alpha] \xrightarrow{\varphi} arco_1 \xrightarrow{Pot_\psi} \mathbb{R}$$

16CAPÍTULO 2. CIRCUNFERÊNCIAS EM GEOMETRIA EUCLIDIANA

com $\varphi(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$. Ora, f_1 é uma função contínua. Como $\varphi(0) = A$ e $\varphi(\alpha) = B$, temos

$$f_1(0) < 0 \quad \text{e} \quad f_1(\alpha) > 0.$$

Podemos então concluir que, pelo Teorema de Bolzano, existe um t_0 pertencente ao intervalo $]0, \alpha[$ tal que $f_1(t_0) = 0$.

Logo, $Q = \varphi(t_0) \in arco_1$ e $Q \in \sigma$ porque $Pot(Q, \sigma) = 0$.

Analogamente temos uma função f_2 tem-se:

$$f_2 : [\alpha, 2\pi] \xrightarrow{\varphi} arco_2 \xrightarrow{Pot_\psi} \mathbb{R}$$

com $\varphi(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$ e também f_2 é contínua.

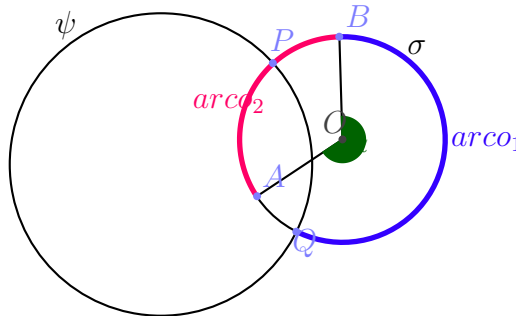
Ora, como $\varphi(\alpha) = B$ e $\varphi(2\pi) = A$, temos

$$f_2(\alpha) > 0 \quad f_2(2\pi) < 0$$

e, usando mais uma vez o Teorema de Bolzano, podemos afirmar que $\exists t_1 \in]\alpha, 2\pi[: f_2(t_1) = 0$.

Logo, seja $P = \varphi(t_1) \in arco_2$ e $P \in \psi$ porque $Pot(P, \psi) = 0$. Portanto pertence à intersecção das circunferências.

Conclusão, ψ e σ intersectam-se em dois pontos P e Q , sendo $P \in arco_1$ e $Q \in arco_2$.



□

2.3 Circunferências Ortogonais

Definição 2.3.1 (Circunferência Ortogonais). *Duas circunferências σ e φ , que se intersectam em dois pontos, são ortogonais se as rectas tangentes a estas curvas, nos pontos de intersecção, forem ortogonais.*

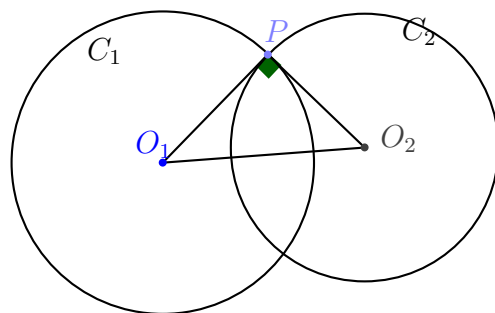
Proposição 2.3.2. *Sejam $C_1(O_1, r_1)$ e $C_2(O_2, r_2)$ circunferências de centros O_1 e O_2 e raios r_1 e r_2 , respectivamente.*

As três condições seguintes sobre $C_1(O_1, r_1)$ e $C_2(O_2, r_2)$ são equivalentes:

1. C_1 e C_2 são ortogonais.
2. $Pot(O_1, C_2) = r_1^2$
3. $Pot(O_2, C_1) = r_2^2$

Em particular se $C_1 \perp C_2$ o centro de C_1 é exterior a C_2 e o centro de C_2 é exterior a C_1 .

Demonstração. Repare que, se C_1 e C_2 se intersectam em dois pontos P e Q e são circunferências ortogonais tem-se $[O_1P] \perp [O_2P]$ pois as rectas tangentes às circunferências em P e Q são perpendiculares aos raios, o que é equivalente a dizer que o triângulo $\Delta[O_1PO_2]$ é rectângulo.



Vamos então provar as equivalências da Proposição.

- $C_1 \perp C_2 \Leftrightarrow Pot(O_1, C_2) = r_1^2$

18CAPÍTULO 2. CIRCUNFERÊNCIAS EM GEOMETRIA EUCLIDIANA

Demonstração. (\Rightarrow)

Ora $Pot(O_1, C_2) \stackrel{Def}{=} \overline{O_1O_2}^2 - r_2^2 \stackrel{T. Pitágoras}{=} r_1^2$

(\Leftarrow)

$$Pot(O_1, C_2) = r_1^2 \Leftrightarrow \overline{O_1O_2}^2 - r_2^2 = r_1^2 \Leftrightarrow \overline{O_1O_2}^2 = r_2^2 + r_1^2$$

Vamos agora justificar a existência do ponto P .

Ora $Pot(O_1, C_2) > 0$ implica que O_1 é exterior a C_2 . Como O_2 é interior a C_2 temos que $[O_1O_2]$ intersecta C_2 num ponto A (Princípio de Continuidade Elementar).



$$\overline{O_1A} = \overline{O_1O_2} - r_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} - r_2 < r_1$$

Assim, $A \in C_2$ e A é interior a C_1 .

Seja M o simétrico de A em relação a O_2 .



$M \in C_2$ e $\overline{O_1M} > \overline{O_1O_2} > r_1$, M é exterior a C_1 . Pelo Princípio da Continuidade circular C_1 intersecta C_2 em dois pontos P e Q .

Assim, tem-se $\overline{O_1O_2}^2 = \overline{O_1P}^2 + \overline{O_2P}^2$

Por verificar o teorema de Pitágoras, podemos afirmar que o triângulo $\Delta[O_1PO_2]$ é rectângulo em P .

□

- $C_1 \perp C_2 \Leftrightarrow Pot(O_2, C_1) = r_2^2$

Demonstração. A demonstração é análoga à anterior.

□

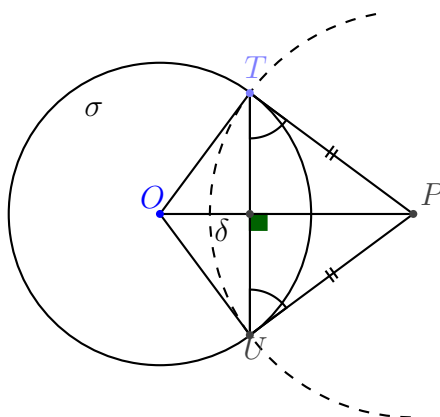
□

Definição 2.3.3. *Seja C uma circunferência e T e U dois pontos de C não diametralmente opostos. O pólo de TU é o ponto de intersecção das tangentes a C em T e U .*

Teorema 2.3.4. *Seja σ uma circunferência de centro O e sejam T e U pontos pertencentes a σ não diametralmente opostos e P o pólo de TU . Então OP é a mediatriz de $[TU]$, as rectas TP e PU são simétricas relativamente a OP , a circunferência δ com centro P e raio PT é ortogonal a σ e $\angle PTU \cong \angle PUT$.*

Demonstração. Os triângulos $\Delta[OPT]$ e $\Delta[OPU]$ são rectângulos em T e U , pelo que

$$\begin{aligned}\overline{OP}^2 &= r^2 + \overline{PT}^2 \\ &= r^2 + \overline{PU}^2\end{aligned}$$



Logo, podemos concluir que $\overline{PU} = \overline{PT}$ e, sendo assim, a circunferência σ é ortogonal à circunferência δ de centro P e raios $\overline{PU} = \overline{PT}$.

Dado que $\overline{OT} = \overline{OU}$ então PO é a mediatriz de $[TU]$, logo T e U são simétricos em relação a PO . Como P é comum às duas rectas referidas, temos que PT e PU são simétricos relativamente a PO .

Sendo isósceles o triângulo $\Delta[TPU]$ podemos afirmar que $\angle PTU \cong \angle PUT$.

□

2.4 Inversão Circular

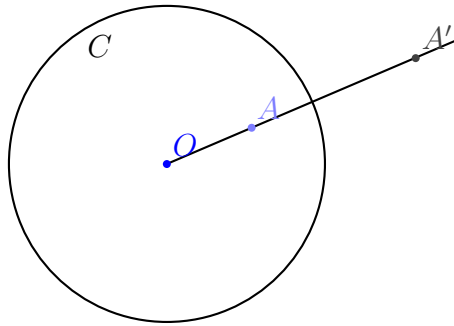
A inversão na circunferência é uma transformação no plano que deixa fixos os pontos numa dada circunferência e envia pontos interiores à circunferência

20CAPÍTULO 2. CIRCUNFERÊNCIAS EM GEOMETRIA EUCLIDIANA

em pontos exteriores à mesma e vice-versa.

Definição 2.4.1 (Inversão na circunferência). *Considere-se uma circunferência C de centro O e raio r . Seja A um ponto distinto de O ($A \neq O$), chamamos inverso de A relativamente a C ao ponto $A' \in \dot{O}A$ que verifica:*

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2 \quad (2.6)$$



Assim, A' é obtido a partir de A pela inversão de A relativamente à circunferência C .

A recíproca da condição é verdadeira. Ou seja, A' é o inverso de A se e só se A é o inverso de A' .

Consequências¹ da definição de Inverso em relação a uma circunferência:

- Se $A \in C$ então $A' \equiv A$
- Se $A \in \text{int}(C)$ então $A' \in \text{ext}(C)$
- Se $A \in \text{ext}(C)$ então $A' \in \text{int}(C)$
- À medida que A se aproxima de O , A' afasta-se do mesmo.

Teorema 2.4.2. *Seja σ uma circunferência e P e P' inversos um do outro relativamente a σ tem-se que:*

1. $P \equiv P'$ se e somente se P pertence à circunferência de inversão σ .

Demonstração. (\Rightarrow) Se $P \equiv P'$, pela definição de inversão

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2 \text{ mas } \overline{OP} = \overline{OP'}$$

¹Estas consequências serão provadas mais adiante.

Logo, $\overline{OP'}^2 = r^2$ pelo que $\overline{OP}^2 = r^2$ e, conseqüentemente, $\overline{OP} = r$

Ou seja, $P \in \sigma$.

(\Leftarrow)

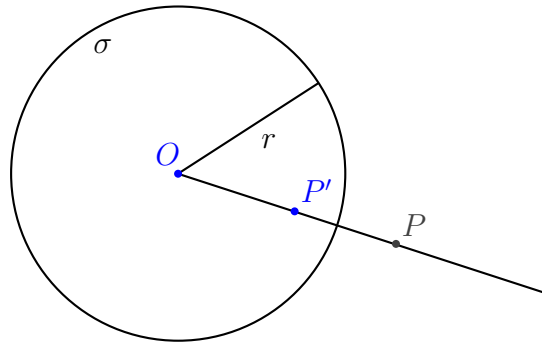
Se P pertence à circunferência de inversão σ , $\overline{OP} = r$ logo $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r \cdot \overline{OP'}$ mas pela definição de inversão $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$

Logo, $r \cdot \overline{OP'} = r^2$ pelo que $\overline{OP'} = r$ e assim $P' \in \sigma$.

Como $P' \in \dot{OP}$, $P \equiv P'$.

□

2. Se P pertence ao interior de σ então P' pertence ao exterior de σ . Se P pertence ao exterior de σ então P' pertence ao interior de σ (figura seguinte).



Demonstração. Se P pertence ao interior de σ então $\overline{OP} < r$

Temos, pela definição de inverso,

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$$

logo

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} < r \cdot \overline{OP'}$$

Assim, $r \cdot \overline{OP'} > r^2$ pelo que $\overline{OP'} > r$ pelo que concluímos que P' é exterior a σ .

Analogamente, se $\overline{OP} > r$ (P é exterior a σ)

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2 \text{ (Definição de inversão)}$$

e

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} > r \cdot \overline{OP'}$$

Logo, $\overline{OP'} < r$, P' é interior a σ .

□

3. Se P' é o inverso de P e $(P')'$ o inverso de P' então $(P')' = P$.

Demonstração. Como P' é o inverso de P tem-se que: $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$
(Definição de inversão)

Da mesma forma, como $(P')'$ é o inverso de P' também se tem que:
 $\overline{O(P')'} \cdot \overline{OP'} = r^2$

Então,

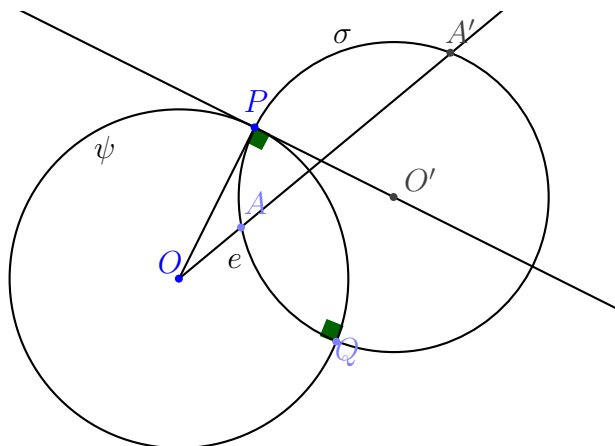
$$\begin{aligned} \overline{OP} \cdot \overline{OP'} &= \overline{OP'} \cdot \overline{O(P')'} \\ \Rightarrow \overline{OP} &= \overline{O(P')'} \\ \Rightarrow P &\equiv (P')' \end{aligned}$$

A última implicação resulta do facto de os pontos O, P, P' e $(P')'$ serem colineares e pertencerem à semi-recta \hat{OP} .

□

Proposição 2.4.3. *Se uma circunferência σ é perpendicular a ψ (nos seus pontos de intersecção), então σ é transformada em si própria pela inversão circular em ψ . Reciprocamente, se uma circunferência σ contém um par A e A' , pontos inversos por inversão circular em ψ , então σ é perpendicular a ψ .*

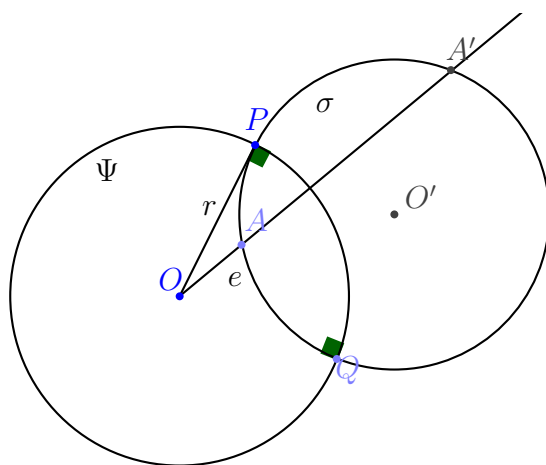
Demonstração. Denotamos por r o raio de ψ . Seja σ uma circunferência perpendicular a ψ e P e Q os pontos de intersecção de σ com ψ . Como $P, Q \in \psi$, P, Q são transformados em si próprios pela inversão em ψ .



Seja A um ponto de σ (distinto de P e Q). A semi-recta $\dot{O}A$ intersecta σ em outro ponto A' pois O é exterior de σ e A é distinto de P e Q . Pela Proposição 2.1.2 tem-se que $Pot(O, \sigma) = \overline{OA} \cdot \overline{OA'}$. Assim, sendo r o raio de ψ , pela Proposição 2.3.2, $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2$ pois ψ e σ são, por hipótese, ortogonais. Então, pela definição de inverso em relação a uma circunferência, A e A' são inversos em relação a ψ .

Esta prova sustenta-se para qualquer $A \in \sigma$ logo σ é transformada em si própria.

(\Leftarrow) Supondo agora, reciprocamente, que σ é uma circunferência que contém os pontos A e A' , inversos um do outro relativamente a ψ . Pelo Princípio da Continuidade Circular 2.2.2, σ e ψ intersectam-se dado que σ contém um ponto A interior e um ponto A' exterior a ψ . Sejam P e Q os pontos de intersecção de σ e ψ . Observe também que O é exterior a σ pois $O \in AA' \setminus [AA']$.



Como, $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2$ (definição de inversão)

temos

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OP}^2 \text{ pois } P \in \psi$$

Pela Proposição 2.1.2 e dado que $O \in ext(\sigma)$

$$Pot(O, \sigma) = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OP}^2 = r^2$$

Logo, pela Proposição 2.3.2, σ e ψ são ortogonais.

□

2.4.1 Construções Geométricas relacionadas com a inversão circular

Esta secção apresenta diversas construções com o objectivo de representar pontos inversos relativamente a uma dada circunferência ou outras construções recorrendo à inversão. Cada uma das construções contém a fundamentação das opções tomadas consoante os dados conhecidos e os objectivos a que se propõem.

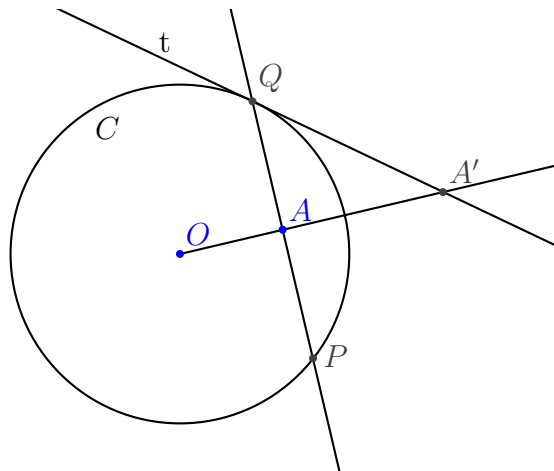
1º CONSTRUÇÃO

Dados: Circunferência $C(O, r)$ e ponto $A \in int(C)$.

Objectivo: Representar A' , ponto inverso de A em relação a C .

Para representar geometricamente o ponto A' , devemos seguir as seguintes etapas:

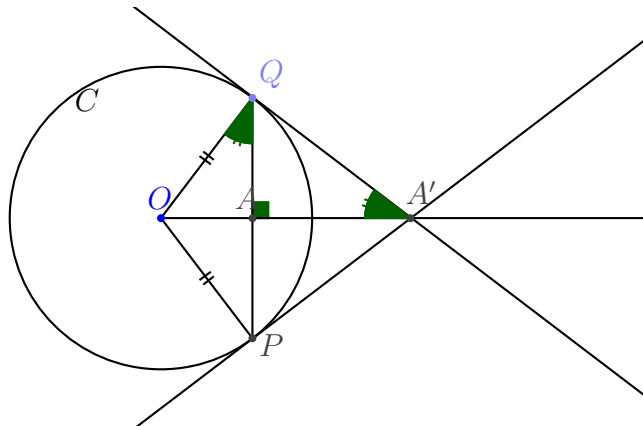
- Traçar uma perpendicular à semi-recta \dot{OA} que contém o ponto A . Designamos por P e Q os pontos de intersecção dessa perpendicular com a circunferência C .
- Pelo ponto Q (ou, analogamente, pelo ponto P) traçar a recta t tangente à circunferência C .
- Seja A' o ponto de intersecção da recta t com a semi-recta \dot{OA} .



Ora, A e A' são pontos inversos um do outro relativamente à circunferência C , ou seja,

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2$$

Demonstração. Para iniciar a demonstração da afirmação anterior, consideremos a seguinte imagem.



As rectas tangentes a C nos pontos P e Q intersectam a semi-recta $\dot{O}A$ no mesmo ponto A' , por simetria de reflexão relativamente à recta OA pois $[PQ] \perp [OA]$ e $\overline{PA} = \overline{AQ}$. Os triângulos $\Delta[OPA']$ e $\Delta[OAP]$ são semelhantes pois têm dois ângulos iguais:

- $\angle POA \cong \angle A'OP$ (ângulo comum aos dois triângulos)
- $\widehat{OPA'} = \widehat{OAP} = 90^\circ$

Então,

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA'}} \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OP}^2 \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2$$

Podemos concluir então que A e A' são inversos em C .

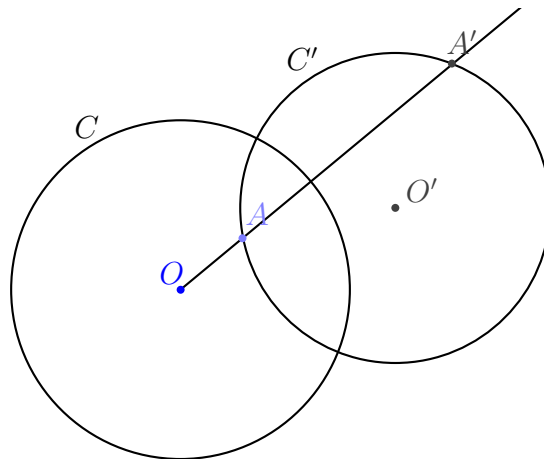
□

2º CONSTRUÇÃO

Dados: Duas circunferências C e C' ortogonais, ponto $A \in \text{int}(C)$ e $A \in C'$.

Objectivo: Representar o ponto inverso A' , de A , em relação a C .

O inverso de A em relação a C é o segundo ponto de intersecção da semi-recta $\dot{O}A$ com C' (um dos pontos de intersecção será A e o outro será A').



A demonstração da validade desta construção é apresentada na Proposição da página 22.

3º CONSTRUÇÃO

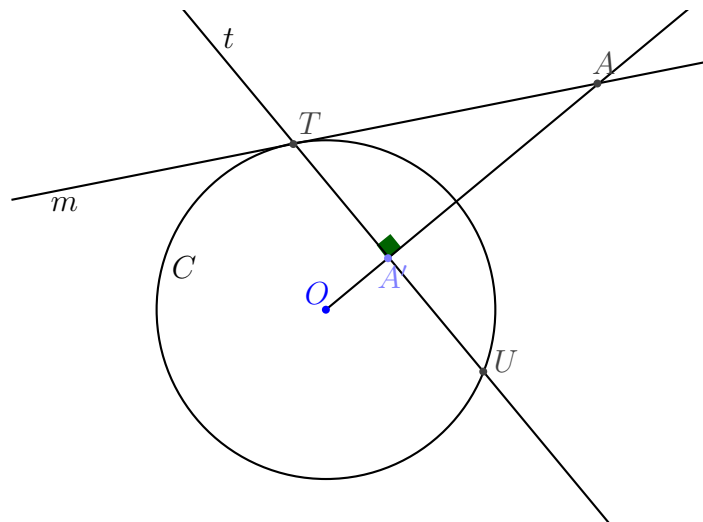
Dados: Circunferência $C(O, r)$ e um ponto $A \in \text{ext}(C)$.

Objectivo: Representar o ponto inverso A' , de A , em relação a C .

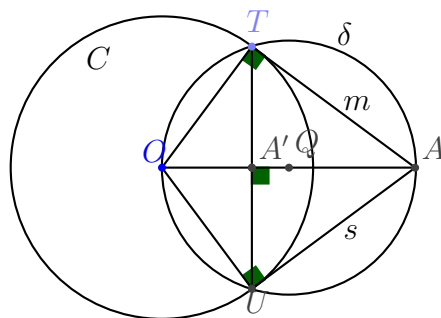
Para representar geometricamente o ponto A' , devemos seguir as seguintes etapas:

- Traçar a semi-recta $\dot{O}A$.
- Traçar uma das tangentes à circunferência C que passa por A e designá-la por m . Considerar T o ponto de intersecção de m com C .

- Traçar a recta perpendicular a $\dot{O}A$ que passe por T , e designá-la por t
- A' é o ponto de intersecção da recta t com a semi-recta $\dot{O}A$ e verifica as condições de ser o inverso do ponto A em relação a C .



Demonstração. Seja $A \in \text{ext}(C)$ e Q o ponto médio de $[OA]$. Para esta demonstração tomaremos as rectas m e s , tangentes a C e que passam por A . Sejam T e U , respectivamente, os pontos de intersecção de m e s com C . Seja δ a circunferência de centro Q e que contém o ponto O .



Como $\dot{A}T$ e $\dot{A}U$ são tangentes a C , os triângulos $\Delta[ATO]$ e $\Delta[AUO]$ são rectângulos em T e U , respectivamente. Logo T e U pertencem à circunferência δ de diâmetro $[OA]$. Por simetria em relação a OA , a recta TU corta-a ortogonalmente num ponto $A' \in [OA] \subset \dot{O}A$.

Assim, analogamente ao efectuado na 1ª construção, se prova que os triângulos $\Delta[OTA]$ e $\Delta[OA'T]$ são semelhantes, logo A e A' são pontos inversos um do outro relativamente à circunferência C .

□

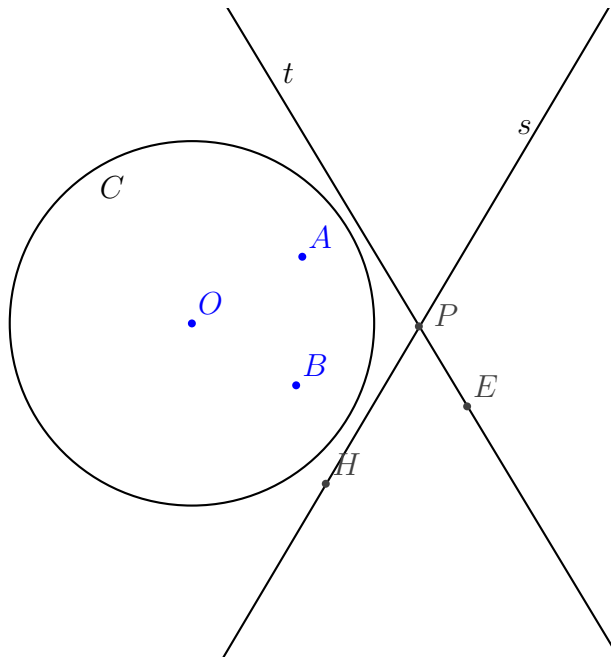
4ª CONSTRUÇÃO

Dados: Circunferência $C(O, r)$, pontos A e B interiores a C e não colineares a O .

Objectivo: Representar a circunferência ortogonal a C que contém A e B .

Para a construção da circunferência ortogonal a C deveremos seguir os seguintes passos:

- Construir o lugar geométrico dos centros das circunferências ortogonais a C e que passam por A . Este lugar geométrico representa uma recta que designaremos por t .
- Analogamente para o ponto B . Designe a recta por s .
- Seja $\{P\} = t \cap s$. A circunferência de centro em P e raio $\overline{PA} = \overline{PB}$ é ortogonal a C .



Demonstração. Seja A' o inverso de A relativamente a C e seja t a mediatriz de $[AA']$. A recta t é o lugar geométrico dos centros das circunferências ortogonais a C que passam por A . Com efeito, seja $\Omega \in t$. A circunferência de centro Ω que passa por A passa também por A' ($\overline{\Omega A} = \overline{\Omega A'}$). Logo, pela Proposição 2.4.3, esta circunferência é ortogonal a C . Por outro lado, se Ω é o centro de uma circunferência ortogonal que passa por A tem-se $\overline{\Omega A} = \overline{\Omega A'}$ pois esta circunferência também passa por A' (Proposição 2.4.3). Logo Ω pertence à mediatriz de $[AA']$, ou seja, $\Omega \in t$.

Da mesma forma, consideremos a recta s , mediatriz de $[BB']$ onde B' é o inverso de B relativamente a C . Como A, B e O não são colineares, as rectas r e s não são paralelas.

Como a recta t define todos os centros das circunferências ortogonais a C que passam por A e a recta s todos os centros das circunferências ortogonais a C que passam por B . Tem-se que o ponto de intersecção, P , das duas rectas é o centro da circunferência ortogonal a C que passa simultaneamente por A e B .

□

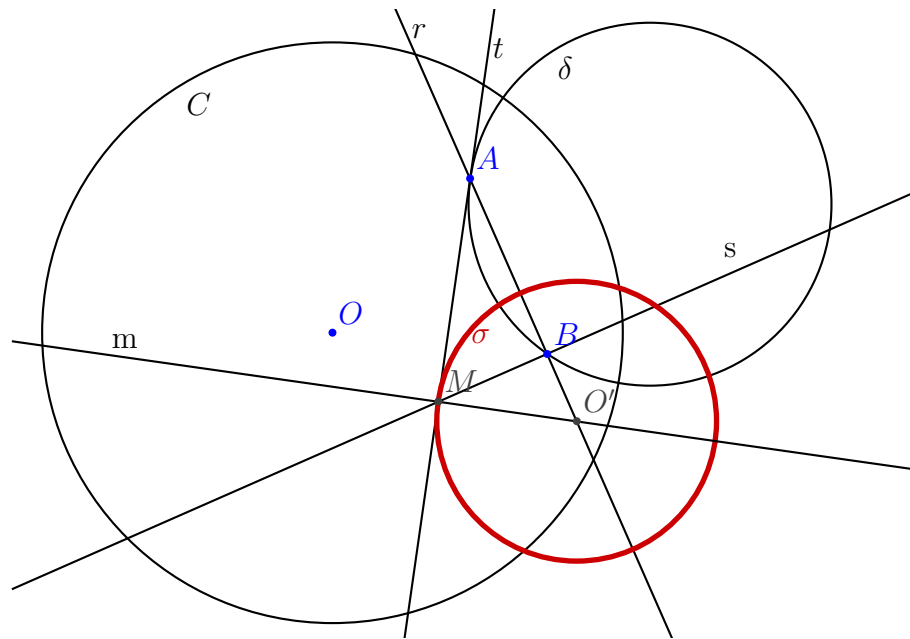
5ª CONSTRUÇÃO

Dados: Circunferência C de centro O e dois pontos A e B não colineares e interiores a C .

Objectivo: Representar uma circunferência σ que, através da inversão circular em σ , transforma o ponto A no ponto B .

Para cumprir o objectivo proposto vamos percorrer as seguintes etapas:

- construir a circunferência $\delta \perp C$ e que contém os pontos A e B ;
- representar a recta r que contém os pontos A e B ;
- representar a recta $s \perp r$ e que passa por B ;
- traçar a recta t , tangente a δ no ponto A ;
- denotar por $\{M\} = s \cap t$;
- construir a recta $m \perp t$ que contém o ponto M ;
- denotar por $\{O'\} = m \cap r$;
- construir a circunferência σ de centro O' e raio $\overline{O'M}$.



Aplicando a inversão relativamente à circunferência σ temos que A é o inverso de B .

Esta construção apresenta o processo inverso da construção 1 pelo que a fundamentação para a validade desta construção é a mesma.

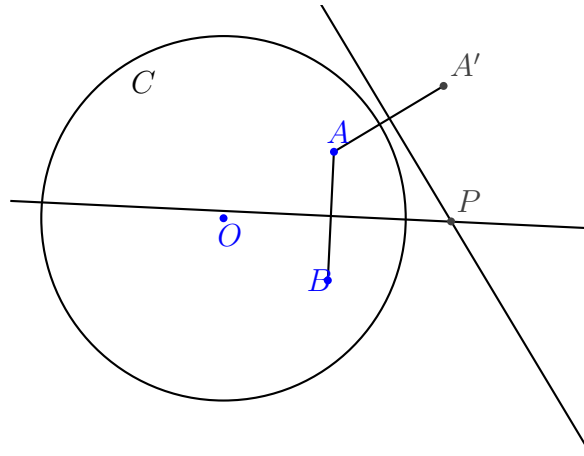
6ª CONSTRUÇÃO

Dados: Circunferência $C(O, r)$ e os pontos A e B interiores a C .

Objectivo: Representar a circunferência ortogonal a C , que contém os pontos A e B .

Esta construção tem o mesmo objectivo que a 4ª construção, contudo é bastante mais simples. Considerem-se então os passos seguintes:

- Representar o ponto A' inverso de A em relação a C .
- Traçar os segmentos de recta $[AB]$ e $[AA']$ e as suas mediatrizes.
- Representar por P o ponto de intersecção dessas mediatrizes.
- P é o centro da circunferência ortogonal a C e que passa por A e B .



Demonstração. Ver demonstração na Proposição 2.4.3.

□

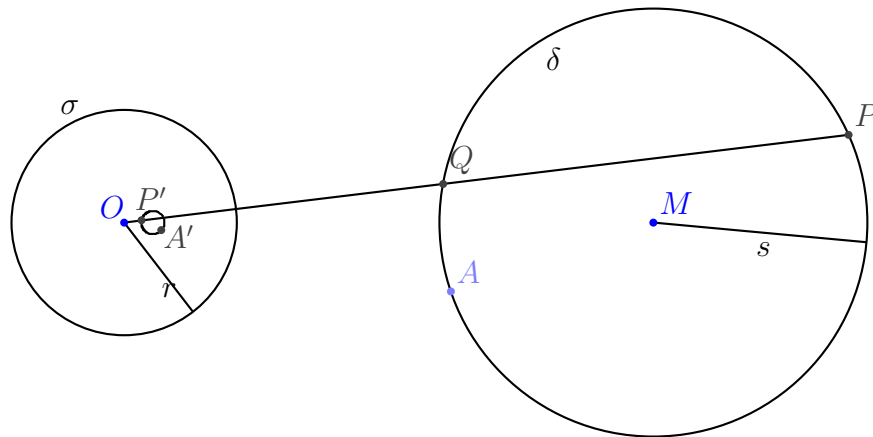
2.4.2 Propriedades da Inversão

Teorema 2.4.4. *Seja σ uma circunferência de raio r e centro O e δ uma circunferência de raio s e centro M . Supõe-se que $O \notin \delta$ e seja p a sua potência em relação a δ . Seja ainda \overline{M} e k definidos do seguinte modo:*

$$\overline{M} = \begin{cases} M & \text{se } O \in \text{ext}(\delta) \\ \text{simétrico de } M \text{ em relação a } O & \text{se } O \in \text{int}(\delta) \end{cases} \quad (2.7)$$

$$k = \begin{cases} \frac{r^2}{p} & \text{se } O \in \text{ext}(\delta) \\ -\frac{r^2}{p} & \text{se } O \in \text{int}(\delta) \end{cases} \quad (2.8)$$

Então a imagem δ' de δ pela inversão em σ é a circunferência de raio ks , cujo centro é a imagem M' de \overline{M} pela homotetia de centro O e razão k .



Demonstração. Primeiramente vamos considerar o caso em que O é exterior a δ e $p = Pot(O, \delta) = \overline{OM}^2 - s^2$.

Considerando um ponto $P \in \delta$ então:

- \dot{OP} intersecta δ em dois pontos (P e Q)
ou
- \dot{OP} é tangente a δ no ponto $P \equiv Q$

Em qualquer um dos casos, tomando P' o inverso de P relativamente a σ , temos:

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} \cdot \frac{\overline{OP}}{\overline{OP}} = \frac{r^2}{p}$$

(definição de inversão em σ e propriedades da potência por P ser exterior a σ)

Sendo

$$\frac{r^2}{p} = k$$

então

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} = k \Leftrightarrow \overline{OP'} = k \cdot \overline{OQ}$$

Pela definição de homotetia, como $P' \in \dot{OP} = \dot{OQ}$, P' é a imagem de Q pela homotetia de centro O e razão k . Seja M' a imagem de M por esta homotetia. Logo a circunferência δ' de centro M' e raio ks é a imagem de δ

pela homotetia de centro O e de razão k .

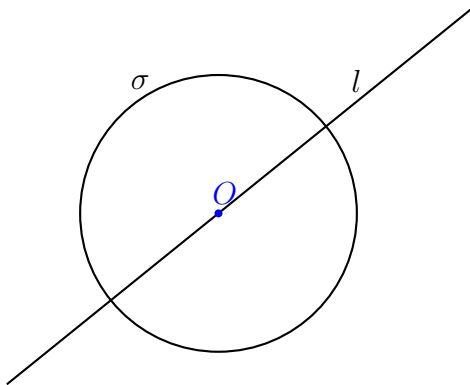
No caso de O ser interior a δ , usaremos o mesmo raciocínio mas considerando primeiramente a imagem de δ por simetria relativamente a O .

□

Teorema 2.4.5. *Considere-se a circunferência σ de centro O e raio r . Relativamente à inversão circular em σ , podemos afirmar que:*

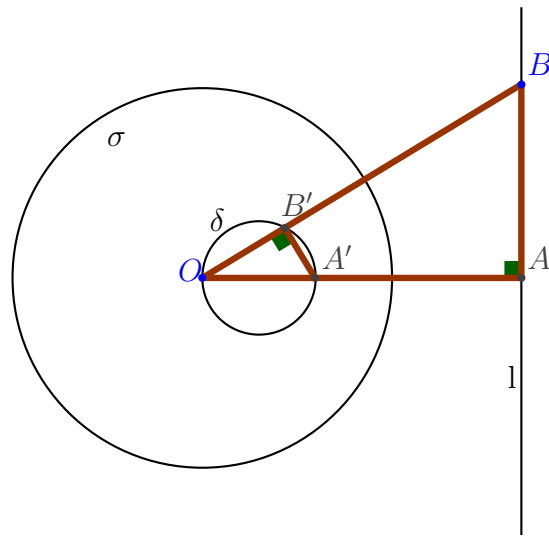
1. *Uma recta que passa por O é transformada em si própria por inversão em σ .*
2. *Uma recta l que não passa por O é transformada, por inversão em σ , numa circunferência que passa por O e vice-versa.*
3. *Se δ é uma circunferência que não contém o ponto O então δ é transformada em outra circunferência δ' por inversão em σ .*

Demonstração. 1. Este resultado segue imediatamente da definição de inverso, página 20, relativamente a uma circunferência pois para todo $P \in l$, $P' \in \dot{O}P$, ora $\dot{O}P \subset l$ logo $P' \in l$.



2. Seja l uma recta que não passa pelo centro O da circunferência σ .

Considere-se a recta $OA \perp l$, sendo $A \in l$ e o ponto A' inverso de A em relação a σ . Seja δ a circunferência de diâmetro OA' e B um ponto pertencente a l . Considere-se também o segmento de recta $[OB]$ e $\{B'\} = OB \cap \delta$.



Os triângulos $\Delta[OAB]$ e $\Delta[OB'A']$ são semelhantes porque têm o ângulo de vértice O em comum e um ângulo recto ($\angle OB'A'^2 = \angle OAB$), pelo que:

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}}$$

logo

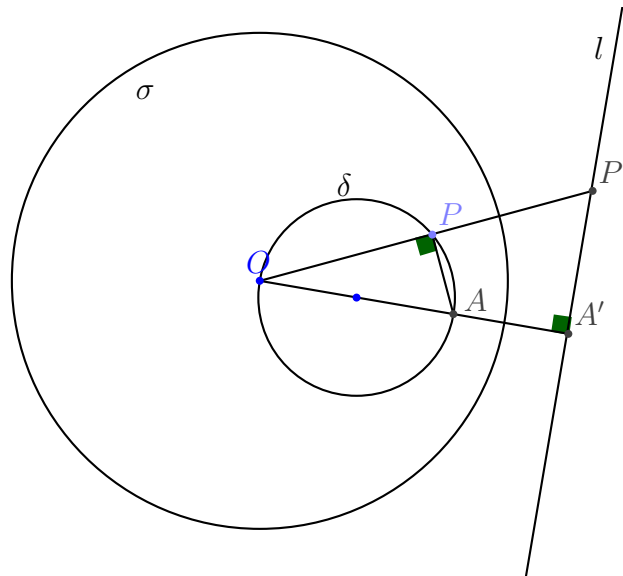
$$\overline{OA'} \cdot \overline{OA} = \overline{OB'} \cdot \overline{OB} \Leftrightarrow r^2 = \overline{OB'} \cdot \overline{OB}$$

Consequentemente, pela definição de inverso, página 20, B' é inverso de B em relação a σ .

O recíproco deste teorema também é verdadeiro, ou seja, a inversão da circunferência δ que passa por O (centro de inversão) é uma recta que não contém O e é, simultaneamente, perpendicular a um diâmetro de δ que contém O e paralela à tangente a δ em O .

Para apoiar a demonstração da afirmação anterior, vamos considerar a figura seguinte:

²Este ângulo é recto porque está inscrito num semi-circunferência.



Considerem-se os seguintes elementos:

- ponto A pertencente à circunferência δ e diametralmente oposto a O ;
- P um ponto qualquer da circunferência δ , distinto de A ;
- Relativamente à circunferência σ , A' e P' os pontos inversos de A e P , respectivamente.

Pela definição de inversão tem-se que,

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2 \quad \text{e} \quad \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2$$

Logo,

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'}$$

Ou seja,

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}$$

Pelo que se conclui que os triângulos $\Delta[OP'A']$ e $\Delta[OAP]$ são semelhantes e, conseqüentemente, $\angle OA'P' = \angle OPA = 90^\circ$ logo P' pertence à recta ortogonal a OA que contém A' , adiante designada por l .

Reciprocamente, sejam P' um ponto distinto de A' tal que $P' \in l$ e P o ponto da recta OP' que intersecta δ . Tal como na demonstração

da primeira afirmação deste teorema, como os triângulos $\Delta[OP'A']$ e $\Delta[OAP]$ são semelhantes, conclui-se que $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$, que vem justificar que os pontos P e P' são inversos relativamente à circunferência σ .

3. No caso de a circunferência δ ser ortogonal a σ , a inversão transforma δ nela própria pelo Teorema 2.4.3.

No caso de a circunferência δ não ser ortogonal a σ , a inversão transforma δ em outra circunferência como referido e provado no primeiro ponto do Teorema 2.4.4.

□

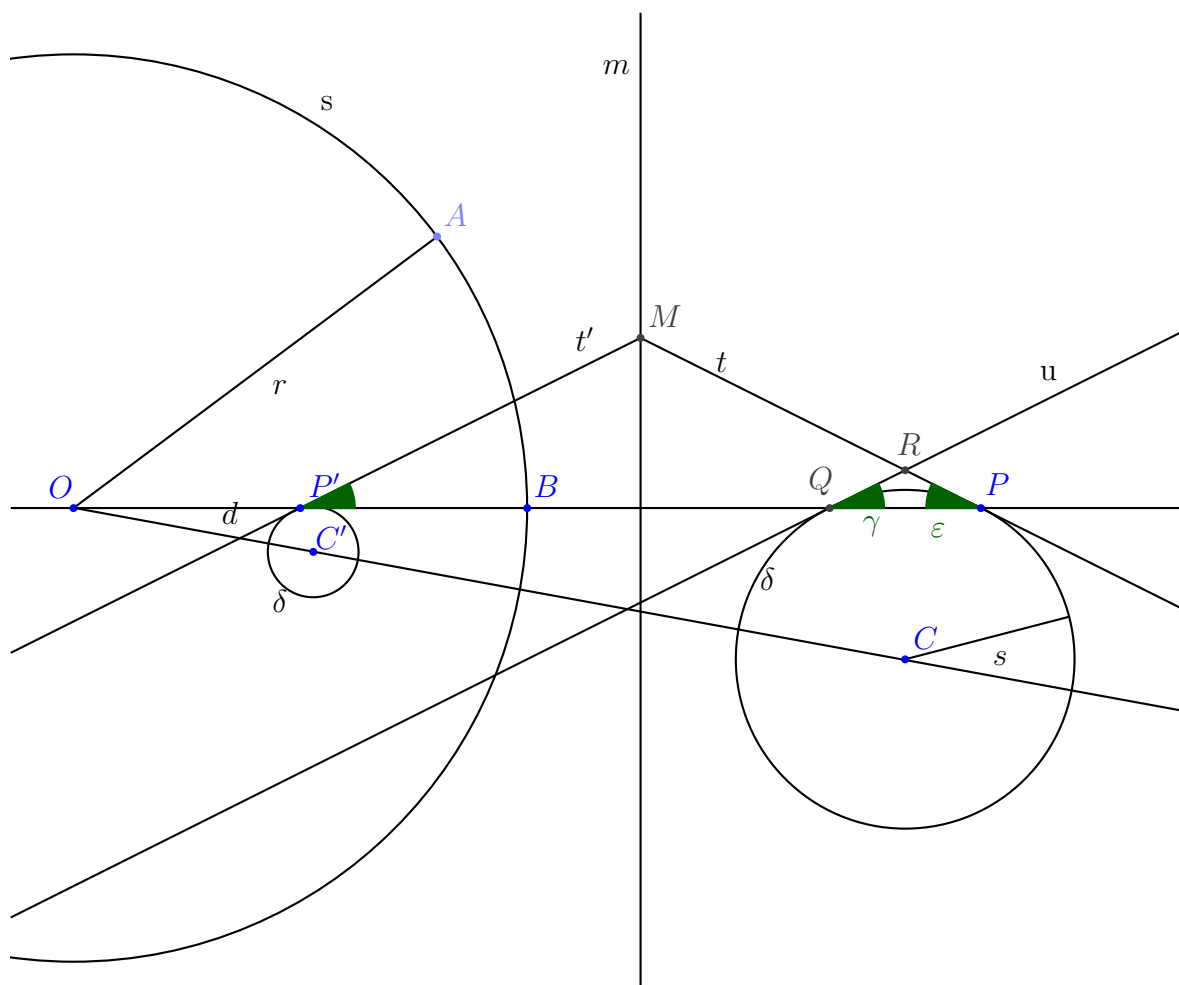
Teorema 2.4.6. *Seja σ uma circunferência de raio r e centro O , δ uma circunferência de raio s e centro C e δ' a imagem de δ por inversão em σ . Suponhamos que $O \notin \delta$. Se P é um ponto qualquer em δ e P' é o seu inverso relativamente a σ , então a tangente t' a δ' em P' é a reflexão, através da mediatriz de $[PP']$, da tangente t a δ em P .*

No caso limite de δ ser uma circunferência que passa por O , então δ' é uma recta que não contém O e é, para qualquer $P \in \delta$ de inverso P' , a reflexão da tangente t a δ em P , pela mediatriz de $[PP']$.

Demonstração. Só vamos tratar o caso $O \notin \delta$, $O \in \text{ext}(\delta)$ e P, O e C não são colineares.

Vamos considerar a imagem seguinte onde temos os seguintes elementos:

- circunferência δ' , circunferência inversa da circunferência δ ;
- ponto $P' \in \delta'$ inverso de $P \in \delta$;
- recta t' tangente a δ' em P' ;
- recta t tangente a δ em P ;
- ponto Q , segundo ponto de intersecção de δ com OP ;
- recta u tangente a δ em Q ;
- ponto R , pólo de PQ .



No teorema 2.4.4 provámos que $\overline{OP'} = k \cdot \overline{OQ}$ e $\overline{P'C'} = k \cdot \overline{QC}$ pelo que o triângulo $\Delta[OP'C']$ é semelhante ao $\Delta[OQC]$, logo, considerando a recta $t' \perp P'C'$ e $u \perp QC$, dado que $P'C' \parallel QC$ então $t' \parallel u$.

Podemos então afirmar que t' é a imagem da recta u pela translação associado ao vector $\vec{QP'}$. Esta recta u é a reflexão de t em relação à mediatriz de $[PQ]$ pelo Teorema 2.3.4 e, conseqüentemente, t e t' intersectar-se-ão num ponto M e, usando novamente o Teorema 2.3.4 temos que $\angle RPQ = \angle MP'Q$. Assim sendo, o triângulo $\Delta[P'MP]$ é isósceles, pelo que $\overline{P'M} = \overline{PM}$, logo M pertence à mediatriz de $[PP']$ e podemos concluir que t' é a imagem de t pela reflexão em relação à mediatriz de $[PP']$. □

Definição 2.4.7 (Razão Cruzada³). *Sejam A, B, P e Q quatro pontos dis-*

³Também conhecida por Razão Dupla.

38CAPÍTULO 2. CIRCUNFERÊNCIAS EM GEOMETRIA EUCLIDIANA

tintos e colineares do plano cartesiano. A razão cruzada é definida por:

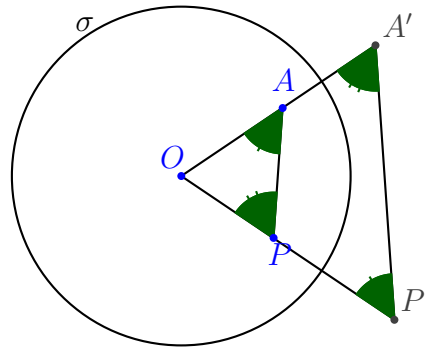
$$[A, B; P, Q] = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} : \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BQ}}{\overline{AQ} \cdot \overline{BP}} \quad (2.9)$$

A razão cruzada depende da posição relativa dos pontos na dada recta.

Teorema 2.4.8 (A Inversão preserva a razão cruzada). *Se A, B, P, Q são quatro pontos distintos, O o centro de uma dada circunferência σ e A', B', P', Q' pontos inversos de A, B, P, Q em σ , respectivamente, então:*

$$[A, B; P, Q] = [A', B'; P', Q']$$

Demonstração. Sejam dois pontos A e P e os seus inversos A' e P' , respectivamente, e relativamente a σ .



Os triângulos $\Delta[OAP]$ e $\Delta[OP'A']$ são semelhantes porque têm o ângulo de vértice O em comum e, pela definição de inverso temos que:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OP} \cdot \overline{OP'} \Leftrightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OA'}} \quad (\text{Lados proporcionais})$$

Assim, também

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'P'}}{\overline{OP'}}$$

Do mesmo modo, por um ponto Q colinear com A e P , temos: $\frac{\overline{AQ}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'Q'}}{\overline{OQ'}}$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} &= \frac{\overline{A'P'}}{\overline{OP'}} \\ \frac{\overline{AQ}}{\overline{OA}} &= \frac{\overline{A'Q'}}{\overline{OQ'}} \\ \Leftrightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} \cdot \frac{\overline{OQ'}}{\overline{AQ}} &= \frac{\overline{A'P'}}{\overline{OP'}} \cdot \frac{\overline{OQ'}}{\overline{A'Q'}} \\ \Rightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} &= \frac{\overline{A'P'}}{\overline{OP'}} \cdot \frac{\overline{OQ'}}{\overline{A'Q'}} \end{aligned}$$

Analogamente para um ponto B , colinear com A e P , se tem,

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{B'P'}}{\overline{OP'}}$$

e

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{B'Q'}}{\overline{OQ'}}$$

Logo,

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{OQ'}}{\overline{B'Q'}} = \frac{\overline{B'P'}}{\overline{OP'}} \cdot \frac{\overline{OQ'}}{\overline{B'Q'}}$$

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{B'P'}}{\overline{OP'}} \cdot \frac{\overline{OQ'}}{\overline{B'Q'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{B'P'}} \cdot \frac{\overline{B'Q'}}{\overline{OQ'}}$$

E assim,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{A'P'} \cdot \overline{O'Q'}}{\overline{OP'} \cdot \overline{A'Q'}} \cdot \frac{\overline{OP'} \cdot \overline{B'Q'}}{\overline{B'P'} \cdot \overline{OQ'}}$$

pelo que

$$[A, B; P, Q] = \frac{\overline{A'P'}}{\overline{A'Q'}} \cdot \frac{\overline{B'Q'}}{\overline{B'P'}} = [A', B'; P', Q']$$

Os inversos mantêm a razão cruzada.

□

Capítulo 3

Disco de Poincaré

Neste capítulo demonstraremos que existe um modelo (Disco de Poincaré), da Geometria Hiperbólica, onde se vão verificar todos os axiomas com as definições apresentadas na primeira secção deste capítulo, cumprindo assim o objectivo principal deste trabalho. Para tal, iniciaremos com a descrição do modelo do Disco de Poincaré, seguido da demonstração da inversão como movimento rígido neste modelo e, finalmente, com a prova da consistência desta geometria não-euclidiana, ou seja, a verificação dos axiomas apresentados no 1º capítulo.

3.1 Descrição do modelo e notação

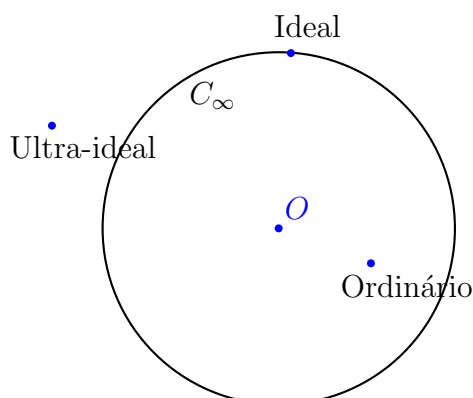
O modelo do disco de Poincaré é o conjunto de pontos interiores a um disco Euclidiano C de raio r e centro O . Denotamos por \mathbb{D} o conjunto de pontos referidos anteriormente, ou seja,

$$\mathbb{D} = \{P \mid \overline{OP} < r\}$$

Neste modelo usaremos a notação C_∞ para denotar a circunferência C anteriormente descrita (página 11).

Assim, em \mathbb{D} temos:

Pontos: Os pontos hiperbólicos são os pontos interiores a C_∞ , também conhecidos por pontos ordinários e denotam-se por letras maiúsculas. Os pontos pertencentes à circunferência C_∞ chamam-se pontos ideais e os pontos pertencentes ao exterior de C_∞ chamam-se pontos ultra-ideais.



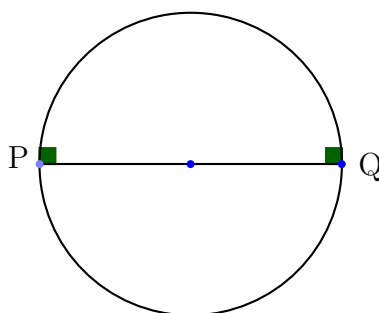
Usualmente, falaremos unicamente de pontos quando estes forem pontos ordinários.

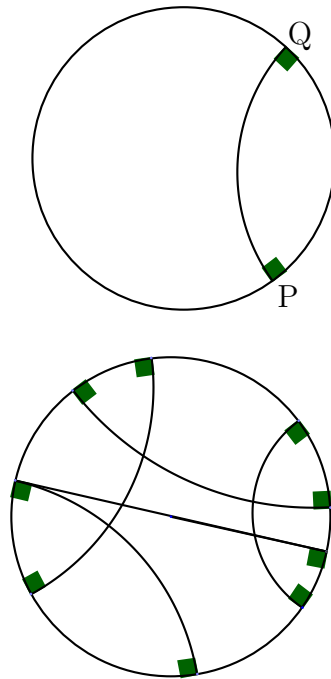
Rectas: As rectas hiperbólicas são as intersecções de \mathbb{D} com:

- as rectas euclidianas que passam por O
- as circunferências ortogonais a C_∞

Estas rectas que passam por O e as circunferências ortogonais serão chamadas "suportes" das rectas hiperbólicas que definem. Como veremos mais adiante, as rectas contêm, pelo menos, dois pontos e por dois pontos passa uma única recta. Assim, dados P e Q em \mathbb{D} , denotamos por $P)(Q$ a recta hiperbólica que passa por P e Q . Também, quando P e Q pertencem a C_∞ , usaremos a mesma notação para indicar a recta hiperbólica cujo suporte intersecta C_∞ em P e Q .

Nas imagens seguintes estão representadas rectas hiperbólicas em \mathbb{D} .



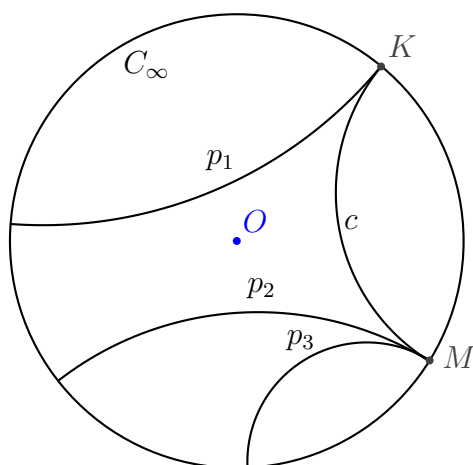


Plano: O plano hiperbólico é o conjunto de pontos de \mathbb{D} .

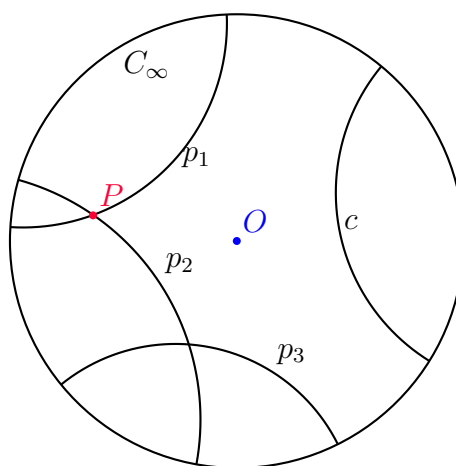
Qualquer alusão a objectos ou propriedades da Geometria Hiperbólica é antecedida de P (Poincaré). Por exemplo: P-pontos; P-rectas; P-segmentos de recta; P-relação.

Posição relativa de duas P-rectas não concorrentes: Duas P-rectas que não se intersectem em \mathbb{D} são chamadas de P-paralelas e podem ser de dois tipos:

- **Paralelas Assimptoticamente** se se intersectarem em pontos pertencentes a C_∞ , ou seja, em pontos ideais. Na imagem seguinte, as P-rectas p_1 , p_2 e p_3 são paralelas assimptoticamente a c .



- **Ultra-paralelas** se não tiverem qualquer ponto em comum, considerando a circunferência C_∞ . Na imagem seguinte, as P-rectas p_1 , p_2 e p_3 são ultra-paralelas a c .



Observe que, pelo ponto P , passam duas P-rectas paralelas a c .

3.2 Definições

Definição 3.2.1 (P-Noção de Pertença). *A noção de um ponto pertencer a uma recta, no sentido Hiperbólico, coincide com a noção de "pertencer a", no sentido Euclidiano.*

A relação P-estar-entre será definida a partir da relação estar-entre da Geometria Euclidiana e da forma seguinte:

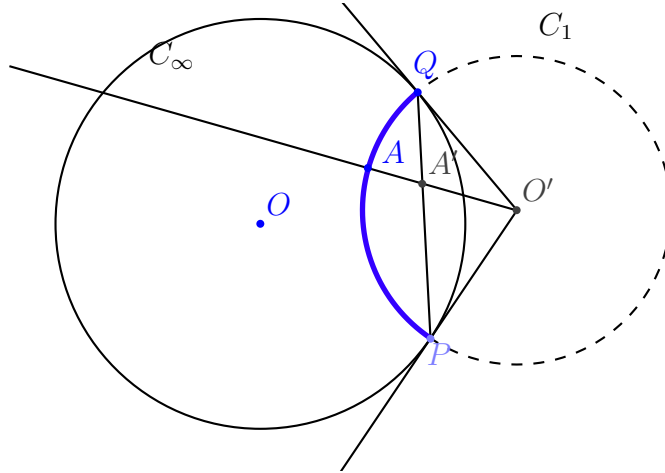
Seja $P)(Q$, onde $P, Q \in C_\infty$, uma P-recta. Vamos definir uma bijecção

$$\pi : P)(Q \rightarrow [PQ] \setminus \{P, Q\}$$

Se o suporte de $P)(Q$ é uma recta que passa por O , $P)(Q = [PQ] \setminus \{P, Q\}$ e π será a identidade.

Suponhamos agora que o suporte de $P)(Q$ é uma circunferência C_1 de centro O' ortogonal a C_∞ .

Como $P)(Q$ coincide com o interior do $\angle PO'Q \cap C_1$, para qualquer ponto $A \in P)(Q$ a semi-recta $O'A$ intersecta o segmento $[PQ]$ num único ponto A' distinto de P e Q e pomos $\pi(A) = A'$.



Como para qualquer $M \in [PQ] \setminus \{P, Q\}$ a semi-recta $O'M$ intersecta o arco menor C_1 de extremidade P, Q num único ponto, a aplicação π é bem uma bijecção.

Nos dois casos (quer seja um arco de circunferência ou um diâmetro) podemos estender esta bijecção a :

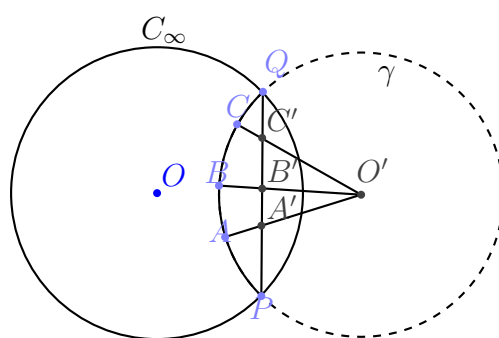
$$\tilde{\pi} : P)(Q \cup \{P, Q\} \rightarrow [PQ]$$

colocando $\tilde{\pi}(P) = P$ e $\tilde{\pi}(Q) = Q$.

Também, para qualquer ponto $U, V \in P)(Q$, π proporciona uma bijecção entre o arco menor de extremidades U, V ou o segmento $[UV]$ (no caso de o suporte ser um diâmetro) e o segmento $[\pi(U)\pi(V)]$.

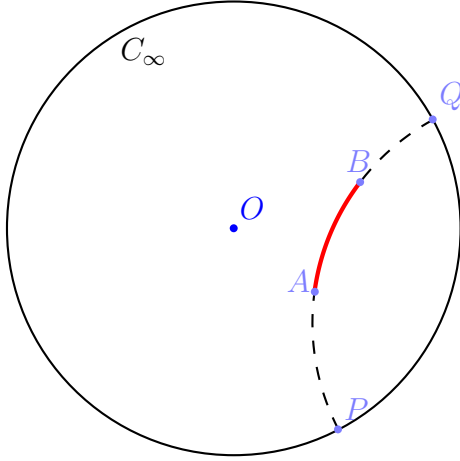
Podemos então agora definir a relação P-estar-entre no disco de Poincaré.

Definição 3.2.2 (P-Estar-entre). *Se A , B e C forem P -pontos pertencentes a uma P -recta $\gamma = P)(Q$ com $P, Q \in C_\infty$, dizemos que B P -está-entre A e C , $(A * B * C)$, se $\pi(A) * \pi(B) * \pi(C)$ na recta euclidiana PQ . Através da bijecção $\tilde{\pi}$ podemos estender a relação P -estar-entre ao caso em que A ou C pertencem à fronteira.*



Nas próximas páginas, quando nos referirmos ao disco de Poincaré utilizaremos unicamente a palavra ordem como sinónimo da relação P -estar-entre.

Definição 3.2.3 (P-Segmento de recta). *Seja $P)(Q$ uma recta hiperbólica com P e Q os pontos ideais de \mathbb{D} (extremos dessa P -recta). Dados A e B pertencentes a $P)(Q$, o P -Segmento de recta $A][B$ é o conjunto dos pontos da P -recta $P)(Q$, constituído pelos pontos A e B e todos os pontos que estão P -entre A e B .*



Assim, quando o suporte de $P)(Q$ é uma circunferência ortogonal a C_∞ , o segmento de recta hiperbólico $A][B$ coincide com o arco menor de extremidades A e B .

Definição 3.2.4 (P-semi-recta). *Seja $P)(Q$ uma recta hiperbólica com P e Q os pontos ideais de \mathbb{D} (extremos dessa P-recta). Dados A e B pertencentes a $P)(Q$, a P-semi-recta com origem em A e que passa por B , denotada por $\dot{A})(B$ é o conjunto de pontos:*

$$A][B \cup \{C \in P)(Q : A * B * C\}$$

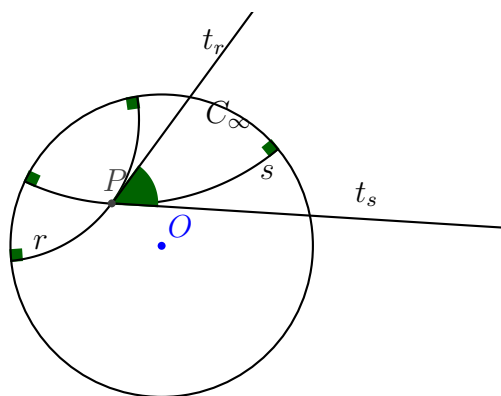
Definição 3.2.5 (Semi-Tangente). *Sejam A e B em \mathbb{D} .*

Se o suporte de $A)(B$ é uma recta que passa por O , a semi-recta tangente à semi-recta $\dot{A})(B$ em A é definida como sendo a P-semi-recta euclidiana $\dot{A}B$.

Se o suporte de $\dot{A})(B$ é uma circunferência σ de centro O' ortogonal a C_∞ , a P-semi-recta tangente à P-semi-recta $\dot{A})(B$ em A é definida como sendo a intersecção da recta tangente a σ em A com o semi-plano fechado delimitado pela recta $O'A$ e que contém B .

Definição 3.2.6 (Ângulo Hiperbólico). *Definimos ângulo Hiperbólico (P-ângulo) entre duas p-semi-rectas com a mesma origem como sendo a reunião destas duas P-semi-rectas. A amplitude deste ângulo é definida como sendo a do ângulo Euclidiano formado pelas semi-rectas tangentes a estas duas semi-rectas hiperbólicas.*

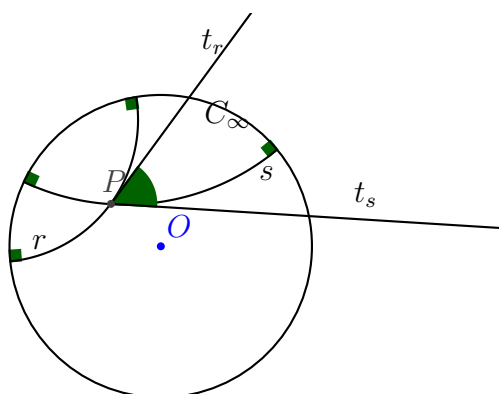
Na figura seguinte, t_r e t_s são, respectivamente, as semi-tangentes a r e a s no ponto P .

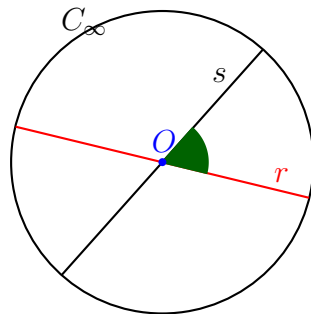
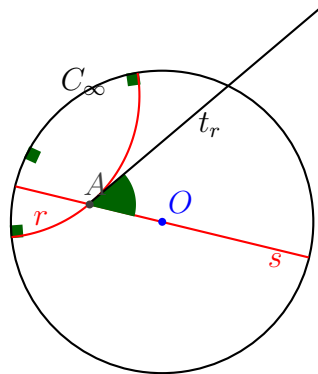


Definição 3.2.7 (P-Congruente). Definimos congruência no modelo do disco de Poincaré da seguinte forma:

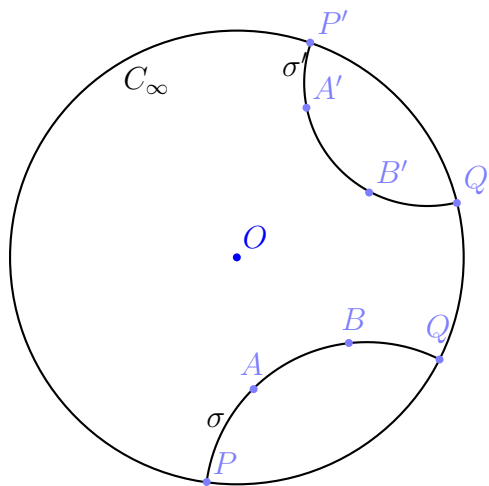
- Dois P -ângulos são P -congruentes, se têm a mesma amplitude, ou seja, se os ângulos Euclidianos por eles definidos forem congruentes no sentido usual do termo.

Nas figuras seguintes, t_r e t_s são, respectivamente, as semi-tangentes a r e a s no ponto P .





- *Sejam A e B dois pontos em \mathbb{D} . Seja $P)(Q$ a P -recta que contém A e B sendo P e Q pontos ideais de \mathbb{D} , tais que $P * A * B$ e $A * B * Q$. Sejam A' e B' dois pontos pertencentes a uma P -recta $P')(Q'$ com P' e Q' pontos ideais de \mathbb{D} e em que $P' * A' * B'$ e $A' * B' * Q'$. Assim, o P -segmento de recta $A][B$ é P -congruente com o segmento $A')[B'$ se a razão cruzada $[A, B; P, Q]$ for igual à razão cruzada $[A', B'; P', Q']$*



Observe que

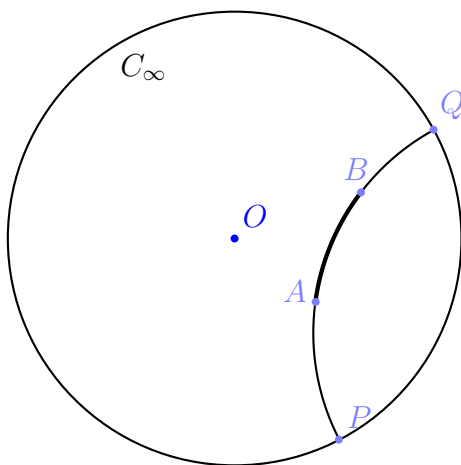
$$[B, A; P, Q] = \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} : \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} = \frac{1}{[A, B; P, Q]}$$

logo a quantidade $|\log[A, B; P, Q]|$ não dependerá da ordem de A e B . Assim definimos:

Definição 3.2.8. Sejam A e B pontos de \mathbb{D} , P e Q os pontos ideais extremos da P -recta que passa por A e B . Definimos a distância no disco de Poincaré através da fórmula:

$$d_h(AB) = |\log[A, B; P, Q]| \quad (3.1)$$

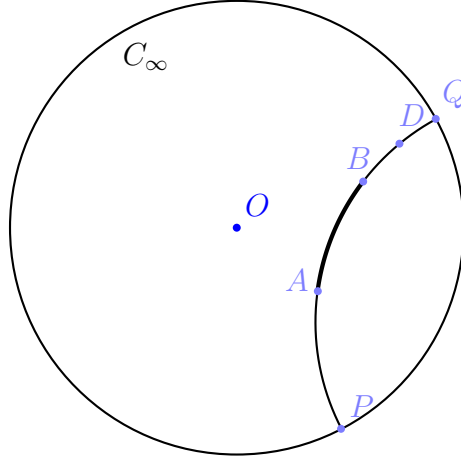
A distância é sempre positiva e não depende da ordem de A e B , ou seja, $d_h(AB) = d_h(BA)$.



Assim, podemos dizer que os P -segmentos $A][B$ e $A'][B'$ são congruentes se e só se $d_h(AB) = d_h(A'B')$.

Ainda observamos que, se $A, B \in P)(Q$ com $P, Q \in C_\infty$ verificam $P * A * B$ e $A * B * Q$ tem-se $\overline{AP} < \overline{BP}$ e $\overline{BQ} < \overline{AQ}$. Logo, nestas condições, $\frac{\overline{AP} \cdot \overline{BQ}}{\overline{BP} \cdot \overline{AQ}} < 1$ e $d_h(AB) = -\log[A, B; P, Q]$

Proposição 3.2.9. Se A, B e D são três pontos colineares na mesma P -recta e $A * B * D$ então $d_h(AD) = d_h(AB) + d_h(BD)$.



Demonstração. Sejam A , B e D pontos de \mathbb{D} e P e Q os pontos ideais extremos da P -recta que passa por A e B tais que $P * A * B$ e $B * D * Q$.

A igualdade seguinte é verdadeira,

$$\frac{\overline{AP} \cdot \overline{DQ}}{\overline{AQ} \cdot \overline{DP}} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BQ}}{\overline{AQ} \cdot \overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BP} \cdot \overline{DQ}}{\overline{BQ} \cdot \overline{DP}} \Leftrightarrow [A, D; P, Q] = [A, B; P, Q] \cdot [B, D; P, Q]$$

Aplicando logaritmos a ambos os membros temos,

$$\begin{aligned} \log([A, B; P, Q] \cdot [B, D; P, Q]) &= \log([A, D; P, Q]) \\ \Leftrightarrow \log([A, B; P, Q]) + \log([B, D; P, Q]) &= \log([A, D; P, Q]) \end{aligned}$$

Assim,

$$-\log([A, B; P, Q]) - \log([B, D; P, Q]) = -\log([A, D; P, Q])$$

Pela ordenação dos pontos, isto significa exactamente (ver observação anterior) que $d_h(AB) + d_h(BD) = d_h(AD)$

□

3.3 Movimento rígido no Disco de Poincaré

Segundo Hartshorne ([17]), definimos Movimento Rígido no disco de Poincaré do seguinte modo:

Definição 3.3.1. *Um Movimento Rígido no disco de Poincaré é uma aplicação*

$$\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

tal que:

1. φ envia P -rectas em P -rectas.
2. φ preserva a ordem¹ de pontos colineares.
3. Para quaisquer dois pontos A e B tem-se que o P -segmento de recta de extremidades A e B é congruente ao P -segmento de recta de extremidades $\varphi(A)$ e $\varphi(B)$.
4. A imagem de um P -ângulo por φ é um P -ângulo com a mesma medida de amplitude.

Repare que a composição de dois movimentos rígidos é ainda um movimento rígido.

Um primeiro exemplo de um movimento rígido é a reflexão relativamente a uma recta que passa pelo centro de \mathbb{D} . Não vamos provar esta afirmação mas vamos provar um caso mais complexo.

Teorema 3.3.2. *Seja δ uma circunferência ortogonal à circunferência C_∞ . Então a inversão em δ , φ_δ , é um movimento rígido do disco de Poincaré que fixa os pontos de δ e troca os "semi-planos" definidos por δ , isto é, as duas regiões² de \mathbb{D} definidas por δ ($\mathbb{D} \cap \text{int}(\delta)$ e $\mathbb{D} \cap \text{ext}(\delta)$).*

Demonstração. Considerem-se as circunferências δ e C_∞ ortogonais sendo C o centro de δ e s o seu raio.

Começamos por verificar que $\varphi_\delta(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$.

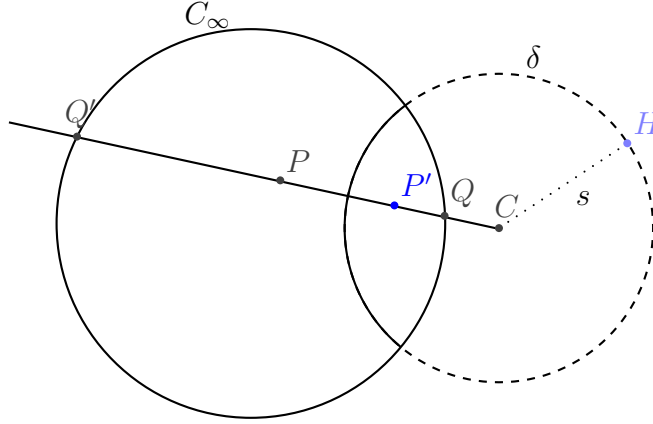
Pelo Teorema 2.4.3 tem-se que C_∞ é transformada em C_∞ por inversão em δ , dado que δ e C_∞ são ortogonais.

Seja P um ponto tal que $P \in \text{int}(C_\infty)$ e $P \in \text{ext}(\delta)$, assim, pela Proposição 2.2.1, $\hat{C}P$ intersecta C_∞ em dois pontos Q e Q' . Estes pontos Q e Q' são inversos um do outro relativamente a δ .

Considere-se agora o ponto P' inverso de P por φ_δ .

¹Ou seja, preserva a relação P -estar-entre.

²De seguida estas regiões serão chamadas de P -semi-planos.



Pelas condições acima referidas temos que:

$$\overline{CQ} \cdot \overline{CQ'} = s^2 = \overline{CP} \cdot \overline{CP'} \quad (3.2)$$

Como $Q * P * Q'$ e $C \in ext(C_\infty)$ temos

$$\overline{CQ} < \overline{CP} < \overline{CQ'} \quad \text{ou} \quad \overline{CQ} > \overline{CP} > \overline{CQ'}$$

Vamos supor que $\overline{CQ} < \overline{CP} < \overline{CQ'}$ temos então

$$\frac{s^2}{\overline{CQ}} > \frac{s^2}{\overline{CP}} > \frac{s^2}{\overline{CQ'}}$$

Utilizando a igualdade 3.2 sabemos que:

$$\frac{s^2}{\overline{CP}} = \overline{CP'} \quad ; \quad \frac{s^2}{\overline{CQ}} = \overline{CQ'} \quad ; \quad \frac{s^2}{\overline{CQ'}} = \overline{CQ}$$

Logo $\overline{CQ'} > \overline{CP'} > \overline{CQ}$ permitindo-nos concluir que $Q' * P' * Q$, ou seja, $P' \in int(C_\infty)$.

O raciocínio é análogo para o caso de $\overline{CQ} > \overline{CP} > \overline{CQ'}$ concluindo-se com o facto de $P' \in int(C_\infty)$.

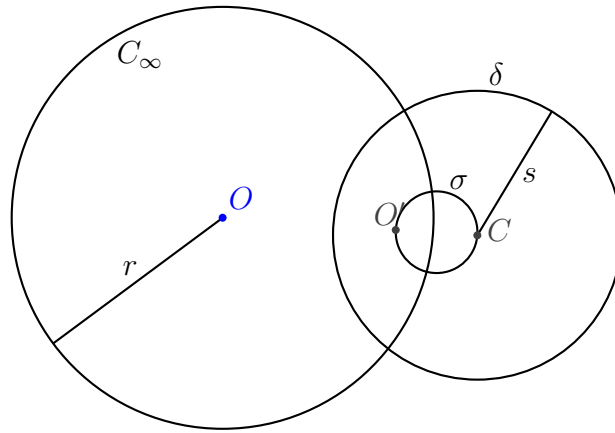
Assim, $\varphi_\delta(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, ou seja, o interior de C_∞ é transformado no interior de C_∞ por φ_δ . Como φ_δ fixa os pontos de δ e troca o interior com o exterior de δ , fica já provado que φ_δ troca os semi-planos definidos por δ .

Queremos agora provar que P-rectas são transformadas em P-rectas. Para tal, consideremos as P-rectas da seguinte forma:

- Diâmetro que passa por C . Neste caso, pelo Teorema 2.4.5, esta P-recta é transformada em si própria.

- Diâmetro que não passa por C . Neste caso, também pelo Teorema 2.4.5 esta P-recta é transformada numa circunferência c' que passa por C . Ora, dado que a inversão preserva C_∞ e a medida de amplitude dos ângulos (Teorema 2.4.4), a circunferência c' é ortogonal a C_∞ , logo é uma P-recta.
- Arco ortogonal que não passa por C . Fazendo referência novamente ao Teorema 2.4.5, podemos afirmar que as circunferências suporte destes arcos ortogonais que não contêm o ponto C são enviadas em outras circunferências. Mais uma vez, dado que a inversão preserva C_∞ e a medida de amplitude dos ângulos (Teorema 2.4.4), as circunferências ortogonais a C_∞ são enviadas em circunferências ortogonais a C_∞ , logo são P-rectas.
- Arco ortogonal que passa por C . Pelo Teorema 2.4.5 as circunferências suportes destes arcos, pela inversão em δ , são enviadas em rectas que não passam por C . Vamos provar que esta recta é um diâmetro de C_∞ .

Considere-se então o ponto O' inverso de O relativamente a δ , pelo que $\overline{CO'} \cdot \overline{CO} = s^2$.



Vamos provar que O' é o inverso de C pela inversão em C_∞ , ou seja, $\overline{OO'} \cdot \overline{CO} = r^2$, em que r é o raio da circunferência C_∞ .

Pelo facto de C_∞ e δ serem ortogonais tem-se que $s^2 + r^2 = \overline{OC}^2$. Também, por $O \in \text{ext}(\delta)$ e $O' \in \text{int}(\delta)$ e, $O * O' * C$ (dado que OC é uma recta euclidiana)

$$\overline{CO} = \overline{CO'} + \overline{OO'} \Leftrightarrow \overline{OO'} = \overline{CO} - \overline{CO'}$$

Assim,

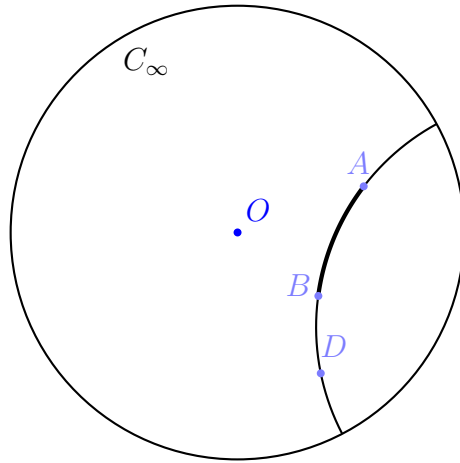
$$\overline{OO'}. \overline{OC} = (\overline{CO} - \overline{CO'}) . \overline{OC} = \overline{OC}^2 - \overline{CO'} . \overline{OC} = \overline{OC}^2 - s^2 = r^2$$

Da igualdade anterior concluímos que O' é o inverso de C pela inversão em C_∞ . Assim, qualquer circunferência ortogonal a C_∞ que passa por C também passa por O' .

Podemos então concluir que, se tivermos uma P-recta cujo suporte é uma circunferência ortogonal a C_∞ e que passa por C , a imagem do suporte será uma recta que passa por O e, por preservar \mathbb{D} e C_∞ , a imagem da P-recta considerada será um diâmetro, ou seja, uma P-recta.

Como a inversão em δ preserva as P-rectas e a ordem, a imagem de um P-segmento é um P-segmento e, pelo Teorema 2.4.8 verifica-se que estes P-segmentos são congruentes. Por preservar as P-rectas e a ordem, a imagem por δ de uma P-semi-recta também é uma P-semi-recta pelo que a imagem de por δ de um ângulo é um ângulo.

Resta-nos verificar agora que a ordem é preservada. Consideremos então os pontos A , B e D colineares (numa P-recta) e interiores a C_∞ tais que $A * B * D$.



Sendo $A' = \varphi_\delta(A)$, $B' = \varphi_\delta(B)$ e $D' = \varphi_\delta(D)$, estes pontos são colineares (P-rectas são transformadas em P-rectas) pelo que teremos três casos possíveis:

1. $A' * D' * B'$
2. $B' * A' * D'$

3. $A' * B' * D'$

Pela Proposição 3.2.9, como $A * B * D$ temos

$$d_h(AD) = d_h(AB) + d_h(BD)$$

e, pelo Teorema 2.4.8 sabemos que

$$d_h(A'D') = d_h(A'B') + d_h(B'D')$$

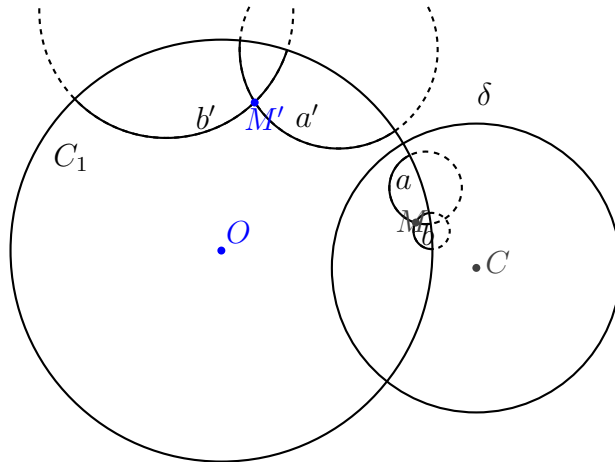
Assim, se $A' * D' * B'$

$$\begin{aligned} d_h(A'B') &= d_h(A'D') + d_h(D'B') \\ &= d_h(A'B') + d_h(B'D') + d_h(B'D') \\ &= d_h(A'B') + 2d_h(B'D') \\ &\Rightarrow d_h(B'D') = 0 \end{aligned}$$

o que é impossível.

Analogamente se prova que $B' * A' * D'$ não é possível e por isso podemos afirmar que $A' * B' * D'$.

Relativamente à amplitude dos ângulos vamos considerar como suporte de a e b duas P-semi-rectas de origem em M cujo ângulo tem amplitude α . Assim, $\{M\} = a \cap b$ e seja a' , b' e M' as imagens de a , b e M pela inversão em δ . Os arcos de circunferência que não contêm o ponto O (P-rectas) são transformadas em arcos de circunferência ortogonais a C_∞ como foi referido anteriormente e, pelo Teorema 2.4.4, as tangentes a a' e b' em M' são a reflexão, relativamente à mediatriz de $[MM']$, das tangentes a a e b em M . A imagem do ângulo considerado terá amplitude α ou $\pi - \alpha$. De facto, é possível demonstrar que é exactamente α .



Se os arcos de circunferência contêm o ponto C então são transformadas em diâmetros que não passam pelo ponto C que é um caso particular referido no ponto dois do Teorema 2.4.5. Assim estes diâmetros são imagem pela reflexão relativamente à mediatriz de $[MM']$ das tangentes aos arcos de circunferência no ponto M . No caso de ser um diâmetro que passa por C , este diâmetro é transformado em si próprio (Teorema 2.4.5). Em todos estes casos, a imagem do ângulo α é π ou $\pi - \alpha$. Mais uma vez, é possível demonstrar que é exactamente α .

Depois de tudo isto, podemos então concluir que a inversão é um movimento rígido do Disco de Poincaré que fixa δ e troca os semi-planos definidos por δ .

□

Proposição 3.3.3. *Existem movimentos rígidos no modelo de Poincaré tais que:*

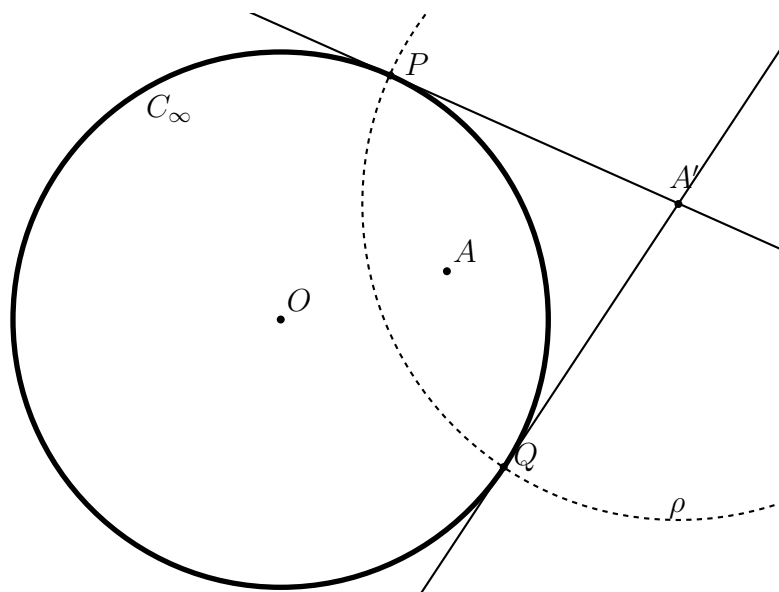
1. *Para quaisquer dois pontos A e B , existe um P -movimento rígido que envia A em B .*
2. *Dados P -pontos A , B e B' , existe um P -movimento rígido que fixa A e envia a semi-recta $\dot{A}B$ na semi-recta $\dot{A}B'$.*
3. *Para qualquer P -recta l existe um P -movimento rígido que fixa todos os pontos de l e troca os semi-planos opostos definidos por l .*

Demonstração. Ponto 3

A verificação deste ponto foi demonstrada na proposição anterior.

Ponto 1

Vamos primeiramente ver que existe uma inversão que transforma o ponto A no centro O do disco de Poincaré. Com efeito, considerando o inverso A' de A relativamente à circunferência C_∞ e as tangentes a C_∞ passando por A' , a circunferência ρ de centro A' que passa pelos pontos de tangência (P e Q) é uma circunferência ortogonal a C_∞ .



Assim temos

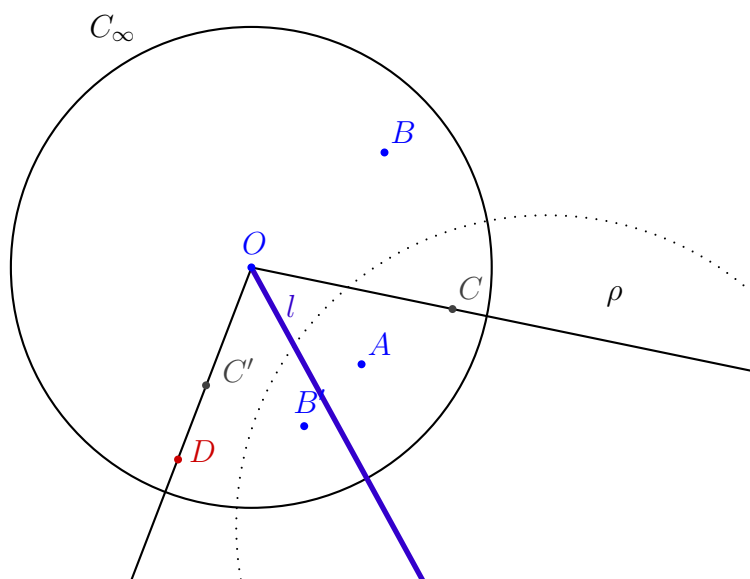
$$\overline{AA'} \cdot \overline{OA'} = (\overline{OA'} - \overline{OA}) \cdot \overline{OA'} = \overline{OA'}^2 - \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OA'}^2 - \overline{OQ}^2 = \overline{A'Q}^2$$

Isto mostra que O é a imagem de A pela inversão em ρ . Do mesmo modo existe uma inversão que envia O em B . Como inversões são movimentos rígidos e a composição de dois movimentos rígidos é um movimento rígido, a composição destas duas inversões resulta num movimento rígido que envia o ponto A no ponto B .

Ponto 2

Dados os pontos ordinários A , B e B' , pelo ponto 1, podemos considerar um P-movimento rígido φ_ρ (inversão em relação à circunferência ρ) que envia A em O e tal que $C = \varphi_\rho(B)$ e $C' = \varphi_\rho(B')$.

As P-semi-rectas de origem O que passam por C e C' coincidem com as semi-rectas euclidianas \dot{OC} e \dot{OC}' . Seja l a bissetriz (interior) de \dot{OC} e \dot{OC}' e θ a reflexão em relação a l . A imagem $D = \theta(C)$ pertence à semi-recta \dot{OC}' .



Consideremos agora o P-movimento rígido $(\rho^{-1} \circ \theta \circ \rho)$ aplicado a cada um dos pontos:

$$(\rho^{-1} \circ \theta \circ \rho)(A) = \rho^{-1}(\theta(\rho(A))) = \rho^{-1}(\theta(O)) = \rho^{-1}(O) = A \quad (A \text{ é fixo})$$

$$(\rho^{-1} \circ \theta \circ \rho)(B) = \rho^{-1}(\theta(\rho(B))) = \rho^{-1}(\theta(C)) = \rho^{-1}(D)$$

Como os movimentos rígidos preservam a ordem e as P-rectas e como $D \in \dot{O}C' = \dot{O}(C', \rho^{-1}(C')) = B'$ podemos concluir que $(\rho^{-1} \circ \theta \circ \rho)(B) \in \dot{A}(B')$.

Logo, a P-semi-recta $\dot{A}(B)$ é enviada na P-semi-recta $\dot{A}(B')$, deixando portanto o ponto A fixo.

□

3.4 Consistência da Geometria Hiperbólica

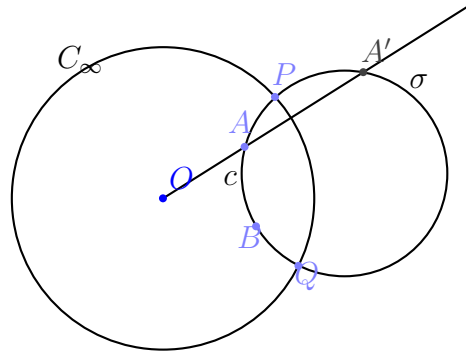
Usando os axiomas de Hilbert e alguns teoremas da Geometria Euclidiana, provaremos com as definições anteriores, de seguida, no modelo do Disco de Poincaré, todos os axiomas da Geometria Hiperbólica são verificados.

3.4.1 Axiomas de Incidência

I_1 - Por dois pontos passa uma **única** linha recta.

Demonstração. Sejam A e B dois pontos de \mathbb{D} . Se A e B forem colineares com O , então a P-recta será o diâmetro aberto de C_∞ . Esta recta é única pela verificação do axioma I_1 na Geometria Euclidiana.

Se A , B e O forem não colineares, a P-recta será um arco de uma circunferência ortogonal à circunferência C_∞ . Sejam A' o inverso de A relativamente a C_∞ e σ a circunferência (única) que contém os pontos A , B e A' .

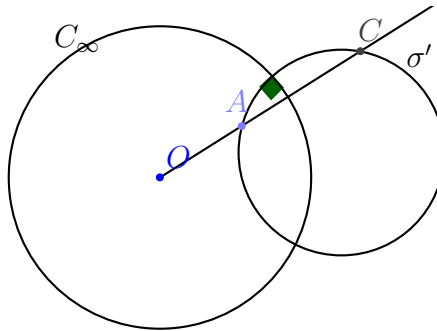


Logo, pela Proposição 2.4.3, C_∞ e σ são ortogonais.

Assim, $P)(Q$, onde P e Q são os pontos de intersecção de C_∞ e σ , é uma P-recta que contém A e B .

Vejamos agora que esta P-recta é única por redução ao absurdo.

Seja σ' outra circunferência nas mesmas condições.



Como $A \in \mathbb{D}$, seja C a segunda intersecção da semi-recta $\dot{O}A$ com a circunferência σ' (a semi-recta $\dot{O}A$ não pode ser tangente a σ' ³ logo intersecta σ' em dois pontos). Dado que σ' e C_∞ são ortogonais, pelas Proposições 2.1.2 e 2.3.2, tem-se que:

$$r^2 = Pot(O, \sigma') = \overline{OA} \cdot \overline{OC}.$$

Pela definição de inverso, C é o inverso de A relativamente a C_∞ . Como o inverso é único então $A' \equiv C$.

Logo, $\sigma \equiv \sigma'$, ou seja, há uma única P-recta que contém dois pontos de \mathbb{D} não colineares com O .

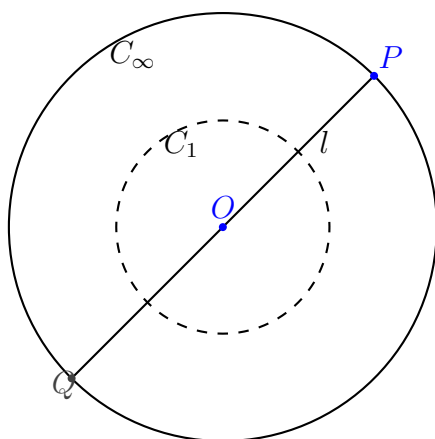
□

³Se fosse tangente então $\overline{OA} = r$ mas como A é interior a \mathbb{D} tem-se que $\overline{OA} < r$.

I_2 - Toda a recta contém, pelo menos, dois pontos.

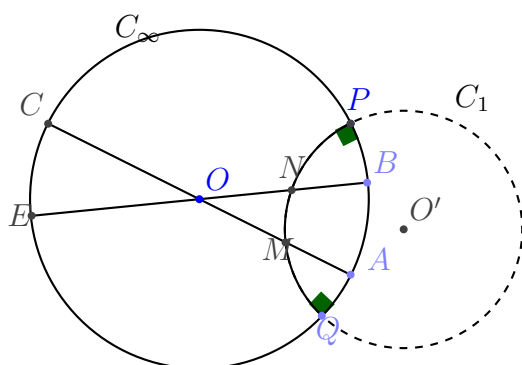
Demonstração. Seja $l = P)(Q$ uma P-recta onde P e Q designam os pontos de intersecção do suporte da P-recta com a circunferência C_∞ .

- Se $P)(Q$ é um diâmetro então contém o centro O da circunferência.



Sendo \mathbb{D} o disco de Poincaré, de centro O e raio r , se considerarmos a circunferência Euclidiana $C_1(O, \frac{r}{2})$ teremos o ponto $P \in ext(C_1)$ e o ponto $O \in int(C_1)$. Logo, pela Proposição 2.2.2, a recta intersecta C_1 em dois pontos e como $C_1 \subset \mathbb{D}$, esses dois pontos pertencem a \mathbb{D} .

- Suponhamos agora que o suporte de $P)(Q$ é uma circunferência C_1 ortogonal a C_∞ .



Recorde a bijecção π construída na página 45:

$$\pi : P)(Q \rightarrow [PQ] \setminus \{P, Q\}$$

Escolhendo dois pontos existem, pelo menos, dois pontos distintos em $[PQ] \setminus \{P, Q\}$ (por exemplo L ponto médio de $[PQ]$ e K ponto médio de $[LP]$). Logo, $\pi^{-1}(L)$ e $\pi^{-1}(K)$ são dois pontos distintos da recta $P)(Q$.

□

I_3 - Existem, pelo menos, três pontos que não estão sobre a mesma recta. O axioma I_3 é uma conjugação de duas afirmações:

- Existem 3 pontos distintos P, Q, M .
- $P \notin Q)(M, Q \notin P)(M \text{ e } M \notin P)(Q$.

Ou seja, há 3 pontos não colineares.

Demonstração. Considerem-se A e B dois pontos pertencentes a C_∞ .

No modelo de Poincaré, a recta $A)(B$ pode ser um diâmetro ou um arco de circunferência ortogonal a C_∞ .

Considere-se um ponto C pertencente a C_∞ , distinto de A e de B , tal que $A)(C$ ou $A)(B$ seja um diâmetro de C_∞ .

Se B é diametralmente oposto a A então C é qualquer ponto de C_∞ distinto de A e de B . Se B não é diametralmente oposto a A então C é o ponto diametralmente oposto a A .

Suponhamos que $A)(B$ é um diâmetro de C_∞ e $A)(C$ é um arco de circunferência ortogonal a C_∞ .

Pelo axioma I_2 , em $A)(B$ existem dois pontos distintos P e Q . Se P e Q pertencessem à recta $A)(C$, por I_1 , $A)(C$ e $A)(B$ representariam a mesma recta, logo $B \equiv C$ o que contradiz a construção de C ser distinto de A e B .

Analogamente, por I_2 , a recta $A)(C$ tem pelo menos dois pontos e seja M um desses pontos. M não pode pertencer à recta $A)(B$ caso contrário P, Q e M seriam colineares e C seria igual a B , o que contraria a hipótese.

Assim, há três pontos não colineares. □

3.4.2 Axiomas de Ordem

Recorde novamente que, dado P e Q em C_∞ , é dada a bijecção π da página 45, em que se baseia a definição de ordem, mais precisamente, sendo A, B e C em $P)(Q$, para qualquer ponto $C \in P)(Q$, temos $A*B*C$ se $\pi(A)*\pi(B)*\pi(c)$ onde

$$\pi : P)(Q \rightarrow [PQ] \setminus \{P, Q\}$$

Vamos, nesta secção, utilizar esta bijecção sem mais referência.

O_1 - Se um ponto B está entre um ponto A e um ponto C , $A * B * C$, então A , B e C são três pontos distintos de uma recta e $C * B * A$.

Demonstração. Sejam A, B, C tais que $A * B * C$. Temos de mostrar as três seguintes condições:

1. A, B, C são pontos distintos
2. A, B, C pertencem à mesma recta
3. $C * B * A$

Dado que $A * B * C$, consideremos a bijecção π definida na página 45 onde, na Geometria Euclidiana tem-se $\pi(A) * \pi(B) * \pi(C)$ e as três condições atrás indicadas estão verificadas. Pela bijecção π podemos assumir as mesmas conclusões na Geometria Hiperbólica. □

O_2 - Para quaisquer dois pontos distintos A e B , existe um ponto C tal que $A * B * C$.

Demonstração. Sejam A e B , pontos distintos, pertencentes a uma P -recta $P)(Q$, com $P, Q \in C_\infty$. Existe um par de bijecções inversas uma da outra (ψ e ψ^{-1}) entre o segmento euclidiano "aberto" $[PQ] \setminus \{P, Q\}$ e a recta real \mathbb{R} que preservam a relação estar-entre.

$$\psi : [PQ] \setminus \{P, Q\} \xleftrightarrow{\quad} \mathbb{R} : \psi^{-1}$$

Compondo com a bijecção π , tem-se que $\psi(\pi(A))$ e $\psi(\pi(B))$ pertencem à recta real \mathbb{R} . Assim, podemos afirmar que existe um ponto $\hat{C} \in \mathbb{R}$ tal que $\psi\pi(A) * \psi\pi(B) * \hat{C}$.

Logo, $\psi^{-1}(\hat{C}) \in [PQ] \setminus \{P, Q\}$ verifica a relação $\pi(A) * \pi(B) * \psi^{-1}(\hat{C})$ o que significa que o ponto $\pi^{-1}\psi^{-1}(\hat{C})$ é um ponto de $P)(Q$ que verifica $A * B * \pi^{-1}\psi^{-1}(\hat{C})$. □

O_3 - Se A, B e C são três pontos distintos pertencentes à mesma recta então um e apenas um deles está entre os outros dois.

Demonstração. Se $A * B * C$ com A, B e C pertencem a um diâmetro de C_∞ , pertencem também a uma recta usual do plano euclidiano, ou seja, verificam o axioma de ordem O_3 .

Se A, B e C pertencerem a um arco de circunferência ortogonal a C_∞ com $A * B * C$ tem-se $\pi(A) * \pi(B) * \pi(C)$ logo, pela bijecção definida na página 45 o mesmo se verifica na Geometria Hiperbólica. □

O_4 (Axioma de Pasch) - Sejam A, B e C pontos ordinários de \mathbb{D} e l uma P-recta tal que A, B, C são não colineares e não pertencem a l . Então:

Se o P-segmento de recta $A][B$ intersecta l então l intersecta $A][C$ ou $B][C$.

Demonstração. Se o ponto de intersecção de $A][B$ com l for um dos pontos A ou B então obviamente que a P-recta l intersecta um dos P-segmentos de recta $A][C$ ou $B][C$.

No caso contrário seguiremos a demonstração do seguinte modo:

Hipótese:

$A][B$ intersecta l num ponto $E \neq A, B$. Isto implica, em particular, que $A * E * B$.

1º Caso

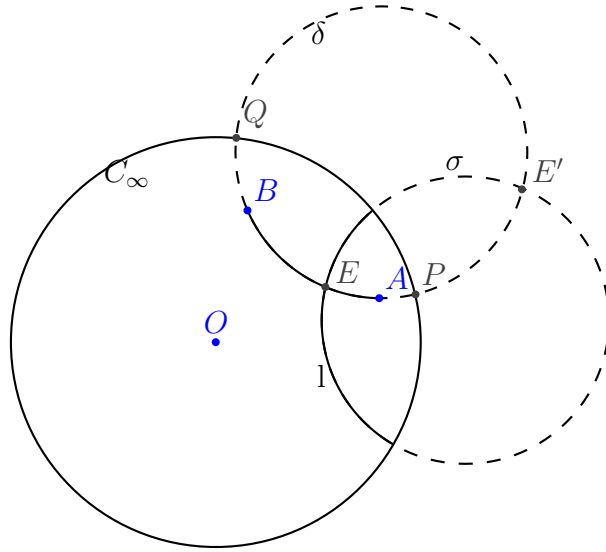
O suporte de l é uma circunferência σ ortogonal a C_∞ .

Vamos provar que há só quatro possibilidades:

- (i) $A][B$ é um arco de circunferência, A é interior a σ e B é exterior a σ
- (ii) $A][B$ é um arco de circunferência, A é exterior a σ e B é interior a σ
- (iii) $A][B$ é um diâmetro, A é interior a σ e B é exterior a σ
- (iv) $A][B$ é um diâmetro, A é exterior a σ e B é interior a σ

Em qualquer um dos casos, A e B estão em "lados opostos" relativamente a σ e, como $C \notin \sigma$, $C \in \text{int}(\sigma)$ ou $C \in \text{ext}(\sigma)$. Nestas condições podemos mostrar que a P-recta l vai intersectar $A][C$ ou $B][C$. Com efeito suponhamos que A é interior a σ e B é exterior a σ . Se $C \in \text{ext}(\sigma)$ então $A][C$ intersecta l dado que $A \in \text{int}(\sigma)$. Este facto é sustentado pelos Princípios de Continuidade (página 15) quer $A][C$ seja um arco de circunferência ou um diâmetro. Da mesma forma, se $C \in \text{int}(\sigma)$ então $B][C$ intersecta l dado que $B \in \text{ext}(\sigma)$.

Basta então provar que as possibilidades descritas em (i) e (iv) são as únicas. Suponhamos primeiramente que $A][B$ é um arco da circunferência δ ortogonal a C_∞ .



Sejam P e Q os pontos de intersecção de δ com C_∞ tais que $P * A * B$ e $A * B * Q$. Como δ intersecta l num ponto $E \in \mathbb{D}$ também intersecta l no ponto E' inverso de E em relação a C_∞ . Por consequência σ e C_∞ intersectam-se em dois pontos que são distintos de P e Q . Portanto P deve ser exterior ou interior a σ . Suponhamos que $P \in \text{int}(\sigma)$. Logo $\forall M \in P][E, M \in \text{int}(\gamma)$ pois, caso contrário, existiria um segundo ponto de intersecção entre δ e σ no interior de \mathbb{D} , o que é excluído.

Como σ e δ intersectam-se, δ possui um ponto F exterior a σ . Sabemos que $F \in Q][E$. Suponhamos que Q é interior a σ . Se $F \in Q][E$ obtemos um segundo ponto de intersecção de δ e σ em \mathbb{D} , o que é impossível.

Se $F \notin \mathbb{D}$, como P e Q são interiores a σ , vamos obter dois pontos de intersecção de δ e σ no exterior de \mathbb{D} , o que também é impossível. Logo Q deve ser exterior a σ e todos os pontos pertencentes a $Q][E$ também são exteriores a σ (caso contrário obtém dois pontos de intersecção em \mathbb{D}).

Como $A * E * B$ e $P * A * B$, considerando a bijecção

$$\tilde{\pi} : P)(Q \cup \{P, Q\} \longrightarrow [PQ]$$

descrita em 3.2, temos na recta euclidiana PQ , $\pi(A) * \pi(E) * \pi(B)$ e $P * \pi(A) * \pi(B)$. Por conseguinte, podemos dizer ⁴ que $P * \pi(A) * \pi(E)$ o que implica que $P * A * E$, logo $A \in \text{int}(\sigma)$. Do mesmo modo se $A * B * Q$ e $A * E * B$ deduzimos que $E * B * Q$, ou seja, $B \in \text{ext}(\sigma)$.

⁴A prova desta implicação, na Geometria Euclidiana, pode ser consultada em ([17, pág. 77])

De forma análoga, supondo que $P \in ext(\sigma)$ se prova que $Q \in int(\sigma)$ e segue-se que A é exterior a σ e B é interior a σ . Portanto, no caso de o suporte de $A][B$ ser uma circunferência só há duas possibilidades (i) e (ii).

No caso de $A][B$ estar contido num diâmetro, o raciocínio é análogo, utilizando o facto que se $P \in int(\sigma)$ e $Q \in ext(\sigma)$ então $[PQ]$ "corta" a circunferência num ponto. Podemos concluir que (iii) e (iv) são as únicas possibilidades.

2º Caso

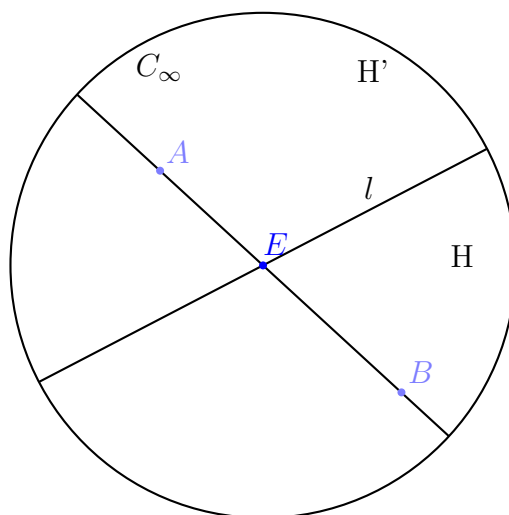
Se l é um diâmetro,

$$A][B \cap l = \{E\}$$

logo A e B pertencem a semi-planos opostos H' e H definidos por l .

Neste caso temos as seguintes possibilidades:

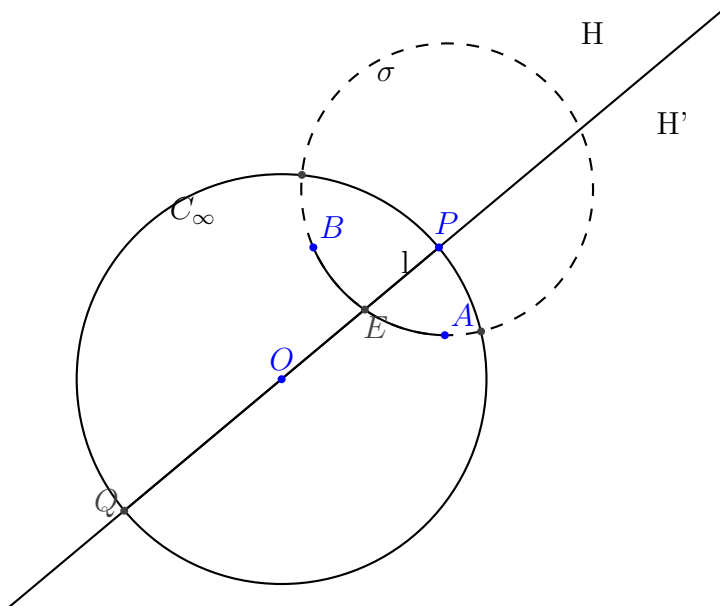
(i) $A][B$ é um diâmetro e sendo assim E é o centro da circunferência C_∞ .



Se $C \in H$ então l intersecta $A][C$.

Se $C \in H'$ então l intersecta $B][C$.

(ii) $A][B$ é um arco de circunferência.



Se $C \in H$ então l intersecta $A][C$.
 Se $C \in H'$ então l intersecta $B][C$.

□

Os argumentos usados na demonstração anterior permitem, em particular, afirmar que se uma P-recta l (de suporte σ) intersecta uma P-recta $A)(B$ num ponto E que verifica $A * E * B$. Então a P-semi-recta $\dot{E})(A$ privada da origem E está inteiramente contida em um lado de σ (isto é, no interior ou no exterior) e a P-semi-recta $\dot{E})(B \setminus \{E\}$ está no outro lado. Em outras palavras a P-semi-recta $\dot{E})(A \setminus \{E\}$ está num P-semi-plano definido por l e $\dot{E})(B \setminus \{E\}$ está no outro.

3.4.3 Axiomas de Congruência

C₁ - Dados um P-segmento de recta $A][B$ e uma P-semi-recta com origem em A' , existe um único P-ponto B' nesta P-semi-recta tal que $A][B \cong A'][B'$.

Demonstração. Seja r uma P-semi-recta de origem A' .

Pela Proposição 3.3.3, existe um movimento rígido φ que leva A em A' e um movimento rígido ψ que leva o segmento $\varphi(A][B)$ na P-semi-recta r deixando fixo A' . Assim, $B' = \psi(\varphi(B))$, B' é um ponto na P-semi-recta r tal que $A][B \cong A'][B'$ pois os movimentos rígidos preservam congruência. Logo C_1 fica provado.

□

C₂ - Se $A][B \cong C][D$ e $A][B \cong E][F$ então $C][D \cong E][F$.

Demonstração. Sejam P, Q, P', Q' e P'', Q'' os pontos ideais de \mathbb{D} e de intersecção de C_∞ com as P-rectas $A)(B, C)(D$ e $E)(F$, respectivamente. Pela definição de P-congruência, como

$$A][B \cong C][D \text{ então } \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BQ}}{\overline{AQ} \cdot \overline{BP}} = \frac{\overline{CP'} \cdot \overline{DQ'}}{\overline{CQ'} \cdot \overline{DP'}}$$

e

$$A][B \cong E][F \text{ então } \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BQ}}{\overline{AQ} \cdot \overline{BP}} = \frac{\overline{EP''} \cdot \overline{FQ''}}{\overline{EQ''} \cdot \overline{FP''}}$$

Ora,

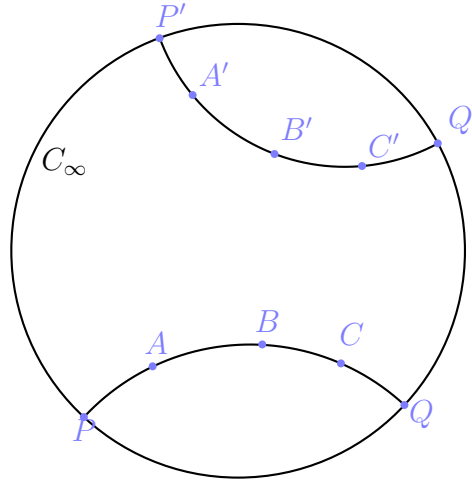
$$\frac{\overline{CP'} \cdot \overline{DQ'}}{\overline{CQ'} \cdot \overline{DP'}} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BQ}}{\overline{AQ} \cdot \overline{BP}} = \frac{\overline{EP''} \cdot \overline{FQ''}}{\overline{EQ''} \cdot \overline{FP''}}$$

então,

$$C][D \cong E][F$$

□

C₃ - Se $A * B * C$ e $A' * B' * C'$, $A][B \cong A'][B'$ e $B][C \cong B'][C'$ então $A][C \cong A'][C'$.



Demonstração.

Sejam P, Q e P', Q' os pontos ideais de \mathbb{D} e de intersecção de C_∞ com as P-rectas $A)(B$ e $A')(B'$, respectivamente, e tais que $P * A * B$, $B * C * Q$, $P' * A' * B'$, $B' * C' * Q'$.

Como

$$A][B \cong A'][B'$$

então

$$\frac{\overline{AP} \cdot \overline{BQ}}{\overline{AQ} \cdot \overline{BP}} = \frac{\overline{A'P'} \cdot \overline{B'Q'}}{\overline{A'Q'} \cdot \overline{B'P'}}$$

e como

$$B][C \cong B']][C'$$

então

$$\frac{\overline{BP} \cdot \overline{CQ}}{\overline{BQ} \cdot \overline{CP}} = \frac{\overline{B'P'} \cdot \overline{C'Q'}}{\overline{B'Q'} \cdot \overline{C'P'}}$$

Ora,

$$\frac{\overline{AP} \cdot \overline{CQ}}{\overline{AQ} \cdot \overline{CP}} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{CQ}}{\overline{AQ} \cdot \overline{CP}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{BQ}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BQ}}{\overline{AQ} \cdot \overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BP} \cdot \overline{CQ}}{\overline{CP} \cdot \overline{BQ}} = \frac{\overline{A'P'} \cdot \overline{B'Q'}}{\overline{A'Q'} \cdot \overline{B'P'}} \cdot \frac{\overline{B'P'} \cdot \overline{C'Q'}}{\overline{C'P'} \cdot \overline{B'Q'}} = \frac{\overline{A'P'} \cdot \overline{C'Q'}}{\overline{A'Q'} \cdot \overline{C'P'}}$$

então,

$$A][C \cong A']][C'$$

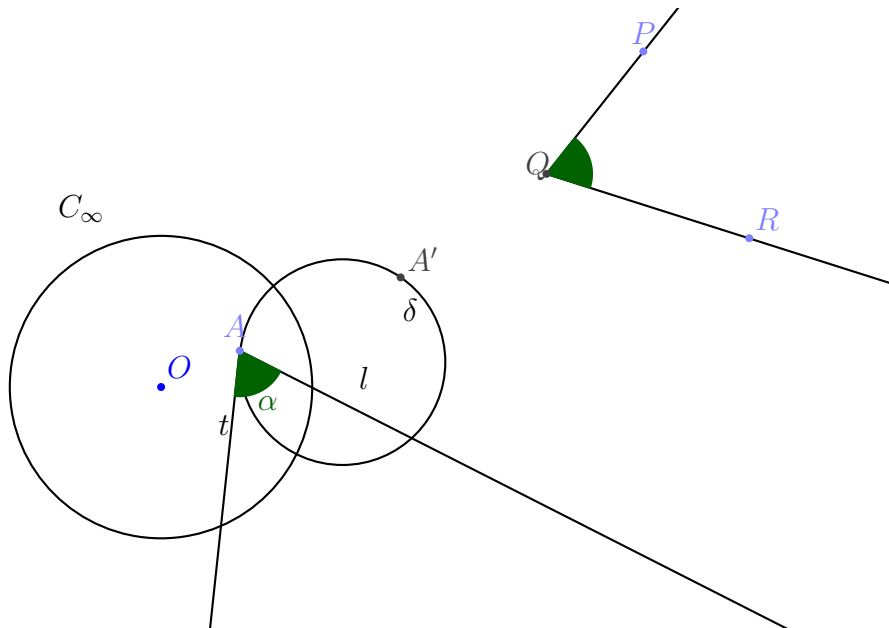
□

C₄ - Dados um ângulo $\angle PQR = \alpha$ com P, Q, R não colineares e uma P-semi-recta $\dot{A}(B$ então existe uma única P-semi-recta $\dot{A}(C$ num P-semiplano dado em relação a $A)(B$ tal que $\angle BAC \cong \angle PQR$.

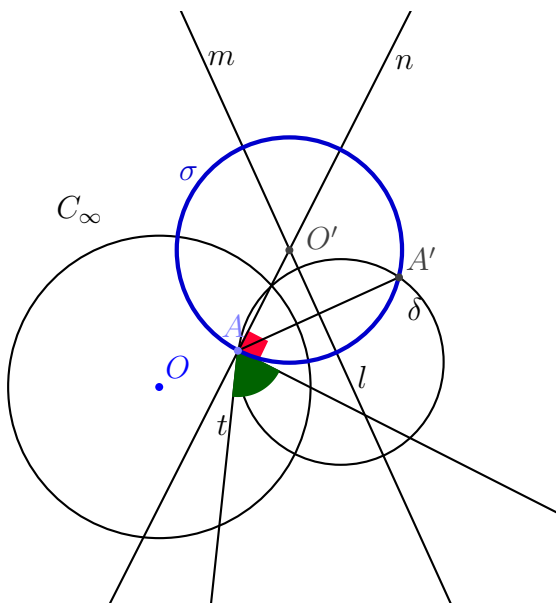
Demonstração. Considere-se α o ângulo dado, $A \in \mathbb{D}$, $A \neq O$, e o seu inverso A' , relativamente a C_∞ . Seja δ uma circunferência ortogonal a C_∞ que passa por A e A' .

Como só um dos semi-planos definidos por t contém pontos interiores a δ , toda a recta secante a t em A é dividida em duas semi-rectas euclidianas de origem A com uma contendo pontos interiores a δ e a outra não.

Seja l uma semi-recta euclidiana que faz com t o ângulo α . Sem perda de generalidade vamos supor que l contém pontos interiores a δ .

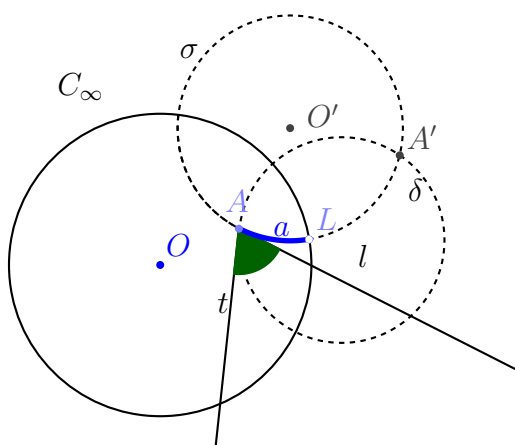


Neste momento, resta construir a única semi-recta hiperbólica tangente a l . Vamos construir a circunferência ortogonal a C_∞ que contém os pontos A e A' e é tangente a l . Para tal, considere-se m a mediatriz de $[AA']$, n a perpendicular a l que passa por A e O' o ponto de intersecção de m e n . Este ponto O' é o centro da circunferência σ perpendicular a l que passa por A .

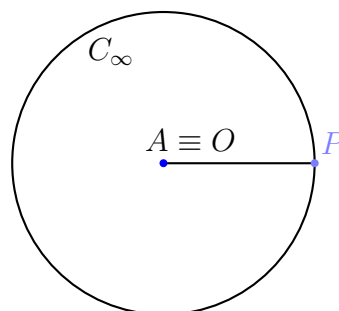


A circunferência σ é perpendicular a C_∞ porque contém os dois pontos A, A' inversos um do outro em relação a C_∞ (Proposição 2.4.3). Por construção, esta circunferência é única.

Logo $a = (\sigma \cap \text{int}(\delta)) \cup \{A\}$ é a única P-semi-recta que passa por A e que faz com t um ângulo α .



No caso particular de $A \equiv O$, onde O é o centro de C_∞ , considere-se o ponto P ideal.



Pela verificação do axioma de congruência C_4 da geometria euclidiana existe uma semi-recta \overrightarrow{AB} tal que $\widehat{POB} = \alpha$ (dado) que é válido também na geometria hiperbólica.

□

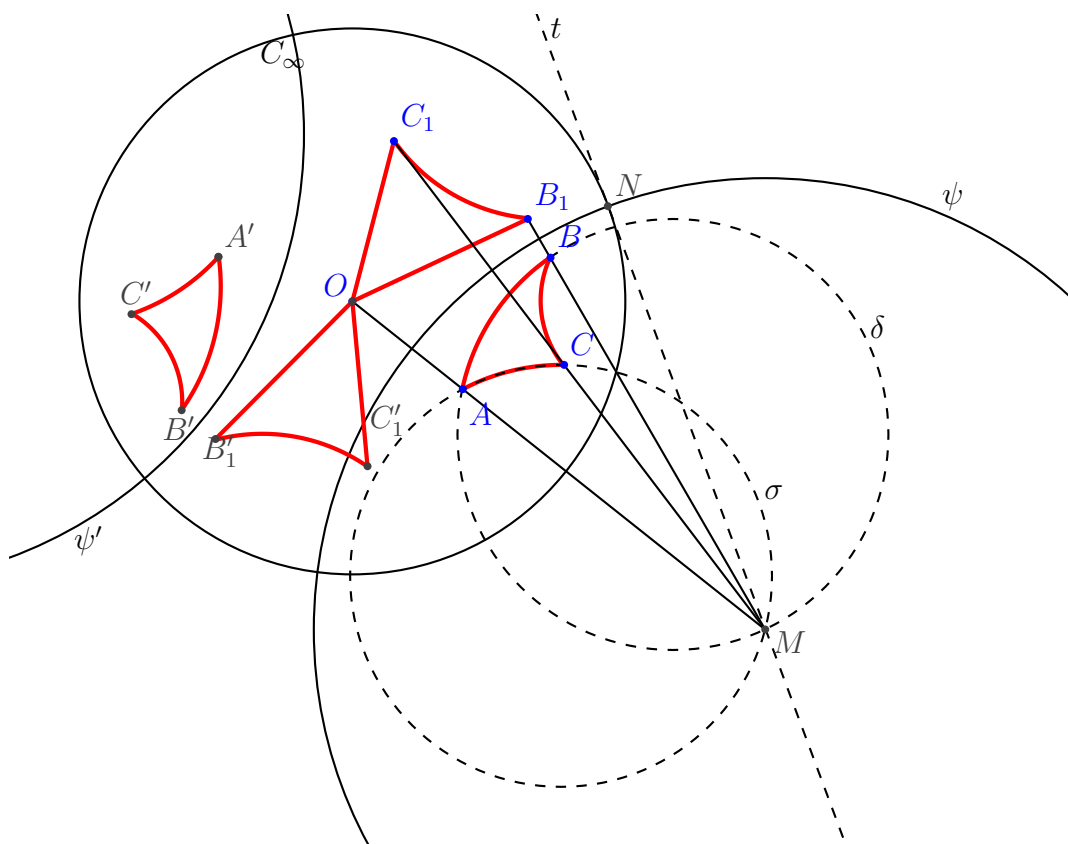
C₅ - Se $\angle A \cong \angle B$ e $\angle A \cong \angle C$ então $\angle B \cong \angle C$.

Demonstração. A medição da amplitude dos ângulos é reduzida ao caso euclidiano, logo como este axioma é válido na geometria euclidiana também é válido na geometria hiperbólica.

□

C₆ - Se dois lados de um triângulo e o ângulo compreendido entre eles são respectivamente congruentes a dois lados e o ângulo compreendido entre eles, de outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

Demonstração. Dados $A][B \cong A']][B'; A][C \cong A']][C'$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.



Queremos provar que os triângulos $\Delta[ABC]$ e $\Delta[A'B'C']$ são congruentes.

Considerem-se as circunferências σ e δ ortogonais a C_∞ e que passam por A e C e, B e A , respectivamente. Estas circunferências são únicas pelo axioma I_1 . Dado que as circunferências σ e δ contêm o ponto A , pela Proposição 2.2.2, estas circunferências possuem o ponto M (ponto inverso de A relativamente a C_∞).

Considere-se a recta t uma das rectas tangentes a C_∞ que passa por M e seja $\{N\} = t \cap C_\infty$. Ora $t \perp ON$. Seja ψ a circunferência de centro M e raio \overline{MN} .

O ponto O é o inverso de A em relação a ψ pelas construções em 29.

Seja então C_1 e B_1 os inversos de C e B , respectivamente e relativamente a ψ .

Considere-se o triângulo $\Delta[OC_1B_1]$.

Dado que a inversão preserva a amplitude dos ângulos e as razões cruzadas (distâncias) então:

$$\Delta[ABC] \cong \Delta[OB_1C_1]$$

Fazendo a mesma construção para o triângulo $\Delta[A'B'C']$ obtemos um triângulo $\Delta[OB'_1C'_1]$ tal que

$$\Delta[A'B'C'] \cong \Delta[OB'_1C'_1]$$

Ora como a inversão preserva as distâncias e a amplitude dos ângulos,

$$O[B_1] \cong O[B'_1]$$

$$O[C'_1] \cong O[C_1]$$

$$\angle B_1OC_1 \cong \angle B'_1OC'_1$$

Pelo que, os triângulos Euclidianos $\Delta[OC_1B_1] \cong \Delta[OB'_1C'_1]$ são congruentes.

Estes triângulos podem ser obtidos um a partir do outro através de uma rotação de centro O e de amplitude α . Por esta transformação, o segmento hiperbólico $B_1][C_1$ é enviado no segmento hiperbólico $B'_1][C'_1$ pelo que os P-triângulos $\Delta[OC_1B_1] \cong \Delta[OB'_1C'_1]$ são congruentes.

E sendo assim se tem,

$$\Delta[ABC] \cong \Delta[A'B'C']$$

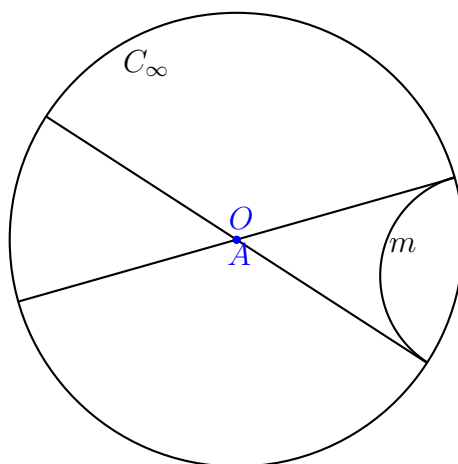
□

3.4.4 Axioma da Geometria Hiperbólica

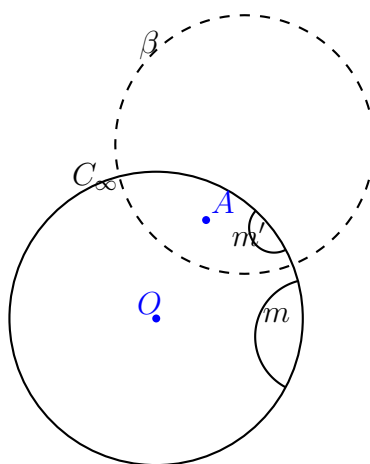
Dada uma P-recta m e um ponto ordinário $A \notin m$, existem sempre, pelo menos, duas P-rectas que passam por A e que não intersectam m .

Demonstração. 1º Caso

Se a P-recta m for um arco de circunferência e o ponto A coincidir com o centro O do disco de Poincaré então existem dois diâmetros que contêm os pontos ideais resultantes da intersecção de m com C_∞ , respectivamente. Estes dois diâmetros são distintos, logo podemos afirmar a existência de, pelo menos, duas rectas paralelas a m e que passam por A .

**2º Caso**

Se a P-recta m for um arco de circunferência e o ponto $A \notin m$ for distinto do centro O do disco de Poincaré então considere-se um movimento rígido θ que transforme o ponto A no ponto O logo teremos $\theta(A) = O$ e $\theta(m) = m'$.

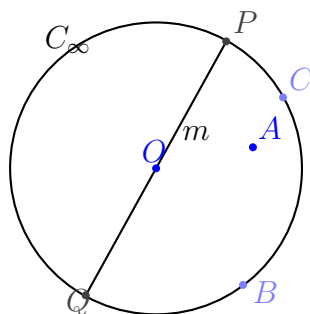


Ora $A \notin m$ logo $O \notin m'$. Assim, pelo 1º caso temos duas P-rectas (diâmetros) a e b paralelas a m' , que passam por O e não intersectam m .

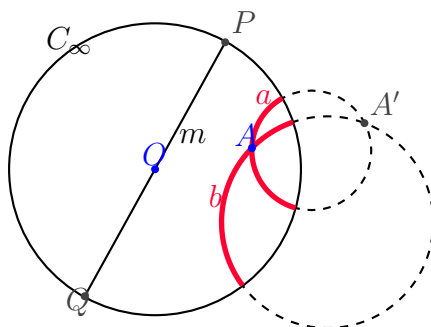
Seja agora $a' = \theta^{-1}(a)$ e $b' = \theta^{-1}(b)$. Sabe-se que a' e b' são P-rectas (a inversão é um movimento rígido). Estas P-rectas não intersectam m e passam por A .

3º Caso

Se a recta m for um diâmetro cujos extremos são os pontos ideais P e Q e A um ponto exterior a m .



Considerem-se pontos B e C pertencentes ao arco da circunferência C_∞ e que está no semi-plano Euclidiano definido pela recta PQ que contém A . Seja A' o inverso de A em relação a C_∞ . Assim, as circunferências que contêm os pontos A, A', B e A, A', C são ortogonais a C_∞ pela Proposição 2.4.3. Logo, também neste caso, existem, pelo menos duas P-rectas paralelas a m e que contêm o ponto A .



□

3.4.5 Axioma de Continuidade

Suponha que os pontos pertencentes à recta l estão divididos em dois subconjuntos não vazios S e T de tal modo que nenhum ponto de S está entre dois pontos de T e, nenhum ponto de T está entre dois pontos de S . Então, existe um único ponto P tal que, para qualquer $A \in S$ e qualquer $B \in T$, tem-se $A = P$ ou $B = P$ ou o ponto P está entre A e B .

Demonstração. Se a recta hiperbólica l for um diâmetro então o axioma é válido considerando a bijecção $\psi : [PQ] \setminus \{P, Q\} \rightarrow \mathbb{R}$, referida na secção 3.4.2, pois é válido na geometria euclidiana.

Se a recta hiperbólica l for um arco da circunferência suporte σ , consideremos as aplicações definidas em 2.2 por

$$\pi : l = P)(Q \rightarrow [PQ] \setminus \{P, Q\}$$

e

$$\psi : [PQ] \setminus \{P, Q\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ambas são bijecções que preservam a relação "estar-entre" logo a composição também é uma bijecção que preserva a relação "estar-entre". Assim, como o axioma é verdadeiro em \mathbb{R} também é verdadeiro em $l = P)(Q$.

□

Capítulo 4

Resultados e construções na Geometria Hiperbólica

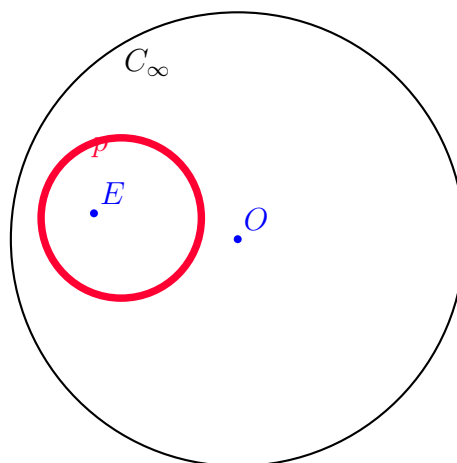
O capítulo que se segue tem como objectivo principal o estudo das isometrias e das pavimentações regulares no modelo do Disco de Poincaré. Para tal, iniciaremos com a demonstração de alguns resultados geométricos, neste modelo, que serão fundamentais para a descrição das várias isometrias. O capítulo finaliza com uma proposta de construção de uma pavimentação regular no Disco de Poincaré com as devidas justificações matemáticas. Todos os temas aqui tratados iniciam-se com uma analogia com a Geometria Euclidiana por nos ser tão familiar e com resultados facilmente reconhecidos.

4.1 Circunferências e perpendiculares

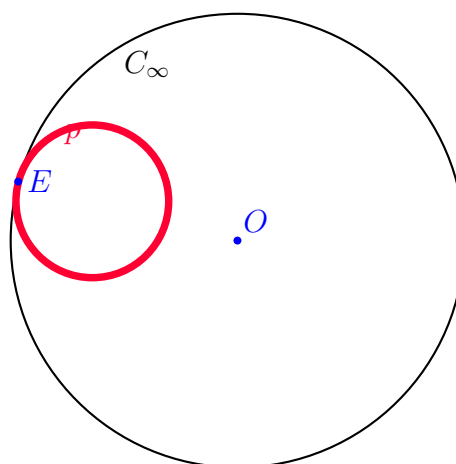
Definição 4.1.1. *Uma circunferência hiperbólica (P -circunferência) é o lugar geométrico dos pontos do disco de Poincaré que estão à mesma distância hiperbólica de um ponto (centro da P -circunferência).*

Em \mathbb{D} uma circunferência euclidiana pode ser:

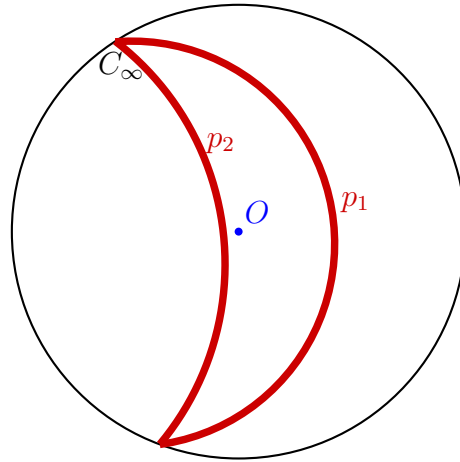
- **circunferência hiperbólica** se estiver contida em \mathbb{D} . Na imagem seguinte p é uma circunferência hiperbólica de centro E .



- **horocírculo** está contido em \mathbb{D} excepto num ponto que pertence a C_∞ . Na imagem seguinte p é um horocírculo de centro E com $E \in C_\infty$.



- **hipercírculo** se intersecta C_∞ em dois pontos. Na imagem seguinte p_2 e p_1 são hipercírculos. Observe que, no caso do hipercírculo intersectar ortogonalmente C_∞ podemos dizer que é uma P-recta.



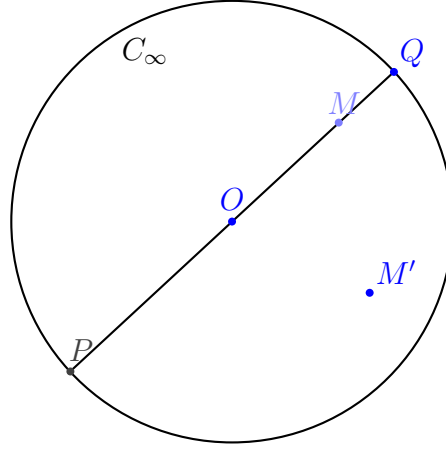
Lema 4.1.2. *Se M e M' são dois pontos ordinários de \mathbb{D} , distintos do centro O de C_∞ , então o P -segmento $O][M$, que coincide com o segmento euclidiano $[OM]^1$, é P -congruente com o P -segmento de recta $O][M'$ se e só se $[OM]$ é congruente com $[OM']$ em ambiente euclidiano.*

Em particular, uma circunferência hiperbólica de centro O é uma circunferência euclidiana de centro O .

Demonstração. Considere-se o diâmetro que contém os pontos O e M e considere-se os pontos ideais P e Q extremos desse diâmetro tais que $P*O*M$ e $O*M*Q$. Logo temos

$$[O, M; P, Q] = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} \cdot \frac{\overline{MQ}}{\overline{MP}}$$

¹Dado que um P -segmento de recta que contenha o centro do disco coincide com o segmento de recta euclidiano $[OM]$.



Considerando r o raio do disco de Poincaré temos

$$[O, M; P, Q] = \frac{r}{r} \cdot \frac{r - \overline{OM}}{r + \overline{OM}} = \frac{r - \overline{OM}}{r + \overline{OM}}$$

Se M' for outro ponto ordinário de \mathbb{D} temos, analogamente,

$$[O, M'; P', Q'] = \frac{r - \overline{OM'}}{r + \overline{OM'}}$$

onde P' e Q' são os extremos do diâmetro que contém M' que verificam $P' * O * M'$ e $O * M' * Q'$.

Assim, $O[M]$ é P-congruente com $O[M']$ se e só se

$$\begin{aligned} \frac{r - \overline{OM}}{r + \overline{OM}} &= \frac{r - \overline{OM'}}{r + \overline{OM'}} \\ \Leftrightarrow r^2 - r \cdot \overline{OM} + r \cdot \overline{OM'} - \overline{OM} \cdot \overline{OM'} &= r^2 + r \cdot \overline{OM} - r \cdot \overline{OM'} - \overline{OM} \cdot \overline{OM'} \\ \Leftrightarrow 2r \overline{OM} &= 2r \overline{OM'} \end{aligned}$$

Dado que $r \neq 0$ a última condição é equivalente a dizer que $[OM]$ é congruente com $[OM']$ no sentido euclidiano. □

Proposição 4.1.3. *Qualquer circunferência hiperbólica é uma circunferência euclidiana que está contida em \mathbb{D} e, reciprocamente, qualquer circunferência euclidiana contida em \mathbb{D} é uma circunferência hiperbólica.*

Contudo estas circunferências não têm o mesmo centro.

Demonstração. 1ª Implicação

Seja c uma P-circunferência de centro O' ($c = \{M \in \mathbb{D}, d_h(O'M) \text{ é constante}\}$).

Se $O' = O$, c é, pelo lema anterior, uma circunferência euclidiana de centro O e contida em \mathbb{D} .

Se $O' \neq O$ vimos na Proposição 3.3.3 que existe uma inversão circular θ_k relativamente a uma P-recta k que envia O' em O e que esta inversão circular é um movimento rígido pelo que c é enviada numa P-circunferência c' (obviamente contida em \mathbb{D}).

Pelo lema anterior, c' é simultaneamente uma circunferência hiperbólica e euclidiana de centro O .

Considerando agora θ_k^{-1} temos que a circunferência euclidiana c' é enviada numa outra circunferência euclidiana pelo Teorema 2.4.5 e que esta circunferência euclidiana está contida em \mathbb{D} pelo Teorema 3.3.2. Logo, como $\theta_k^{-1}(c') = c$ se conclui que c é uma circunferência euclidiana contida em \mathbb{D} .

2ª Implicação

Considere-se uma circunferência euclidiana $c \subset \mathbb{D}$, de centro O' .

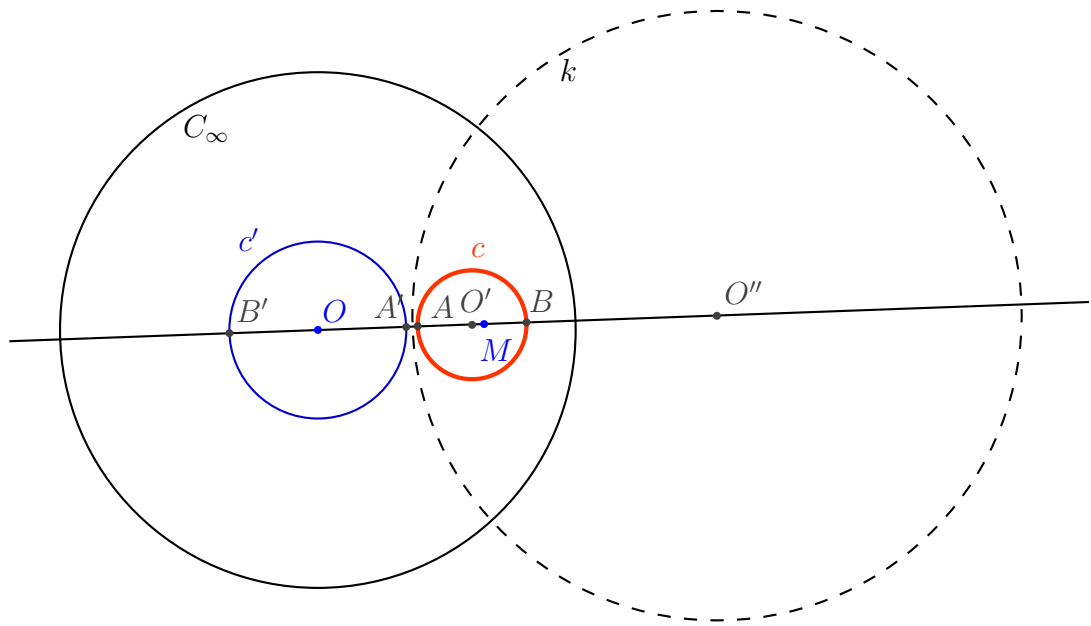
No caso de $O = O'$, pelo Lema anterior, temos que a circunferência é uma circunferência hiperbólica.

Suponhamos agora que $O \neq O'$ e sejam A e B os pontos de intersecção da recta OO' com a circunferência c .

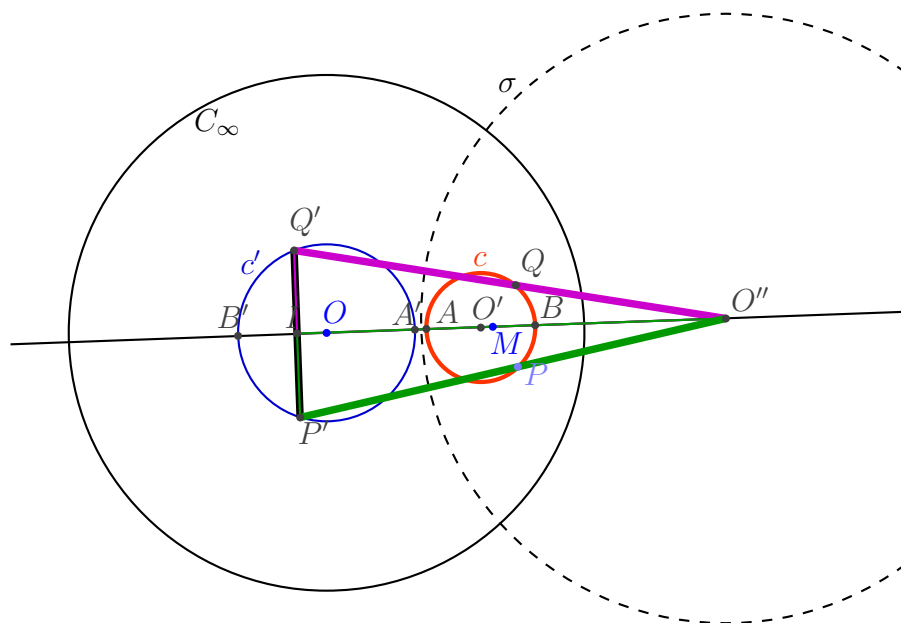
Seja $M \in OO'$ o ponto médio hiperbólico do segmento de recta $A[B$ pelo que $d_h(M, A) = d_h(M, B)$. Repare que c é simétrica em relação à recta $AB = OO'$. Seja θ_k uma inversão circular relativamente a uma P-recta k tal que $\theta_k(M) = O$ e sejam $A' = \theta_k(A)$ e $B' = \theta_k(B)$. Como a inversão circular preserva a distância hiperbólica (Teorema 3.3.2) e como $d_h(MA) = d_h(MB)$ temos $d_h(OA') = d_h(OB')$. Logo, pelo lema anterior, temos $\overline{OA'} = \overline{OB'}$.

Seja $c' = \theta_k(c)$. Sabemos, pelo Teorema 2.4.5, que c' é uma circunferência euclidiana. Vamos ver que $[A'B']$ é um diâmetro desta circunferência pelo que O é o seu centro.

Seja O'' o centro do suporte da P-recta k . Note que $O'', A', B' \in OO'$.



Consideremos agora dois pontos P e Q em c , simétricos relativamente a OO' e os seus inversos, P' e Q' , por θ_k . Seja também $\{I\} = OO' \cap P'Q'$.



Observando os triângulos $\Delta[P'IO'']$ e $\Delta[Q'IO'']$, dado que $\overline{O''Q} = \overline{O''P}$, $\overline{O''Q} \cdot \overline{O''Q'} = r^2$ e $\overline{O''P} \cdot \overline{O''P'} = r^2$ temos $\overline{O''Q'} = \overline{O''P'}$. Assim, pelo critério LAL, podemos concluir que os triângulos são congruentes. Daqui segue que P' e Q' são simétricos em relação OO'' pelo que c' é simétrica relativamente a esta recta. Assim, $[A'B']$ é um diâmetro de c' .

Assim, $\theta_k(c) = c'$ é uma circunferência de centro O que, pelo lema anterior, também é uma P-circunferência. Aplicando θ_k^{-1} , a circunferência original é uma P-circunferência com centro M .

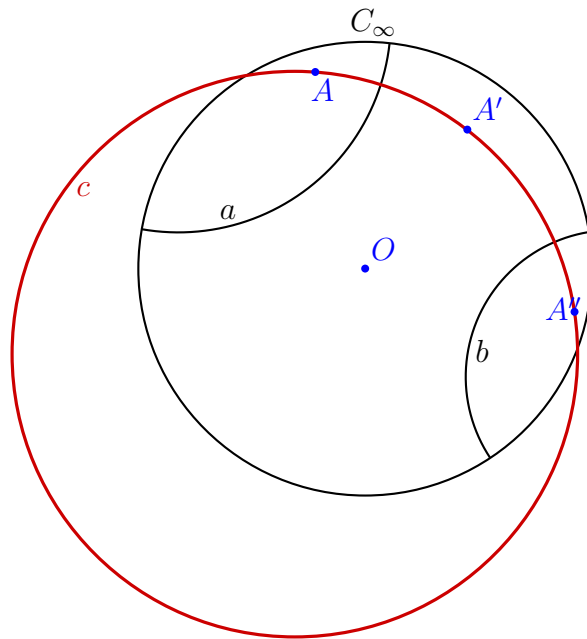
□

Proposição 4.1.4. *Sejam a e b duas P-rectas paralelas e seja A um ponto de \mathbb{D} exterior a estas P-rectas, existe uma única circunferência euclidiana ortogonal às P-rectas a e b e que passa pelo ponto A .*

Contudo esta circunferência não é, em geral, ortogonal a C_∞ .

Demonstração. Para esta prova vamos considerar apenas o caso de a e b serem ultra-paralelas. Na imagem seguinte considere-se ainda os seguintes elementos:

- A um ponto ordinário qualquer;
- a e b P-rectas ultra-paralelas que não passam por A ;
- A' o inverso de A em relação a a ;
- A'' o inverso de A' em relação a b .



Considere-se a circunferência que contém os três pontos A , A' e A'' . Como contém os pares de pontos A , A' e A , A'' esta circunferência, pelo Teorema 2.4.3, é ortogonal a a e a b . Por outro lado, qualquer circunferência ortogonal às rectas a e b que contém A também contém A' e A'' pelo que deve coincidir com a circunferência considerada. Assim, também se justifica a unicidade. \square

Este resultado também é válido para o caso de as rectas a e b serem P-paralelas no sentido geral.

Proposição 4.1.5. *Sejam a e b duas P-rectas ultra-paralelas. Existe uma única P-recta ortogonal a a e a b .*

Demonstração. Sejam a e b duas P-rectas ultra-paralelas tais que $a = A)(B$ e $b = C)(D$ com A, B, C, D pontos ideais.

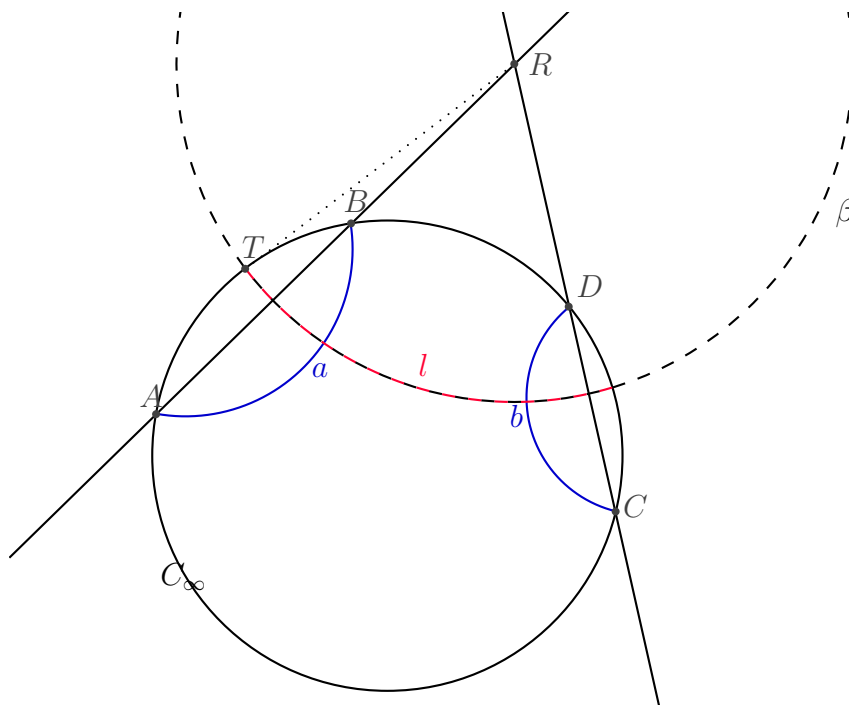
Considerando as rectas euclidianas AB e CD , temos a considerar dois casos:

1. AB e CD são concorrentes
2. AB e CD são paralelas

1º Caso

Seja $AB \cap CD = \{R\}$ sendo, obviamente, $R \in \text{ext}(\mathbb{D})$ (caso contrário, as P-rectas a e b intersectar-se-iam). Considera-se um ponto $T \in C_\infty$ de tal

forma que RT seja uma tangente a C_∞ que contém o ponto R . Considere β a circunferência de centro R e que contém T .

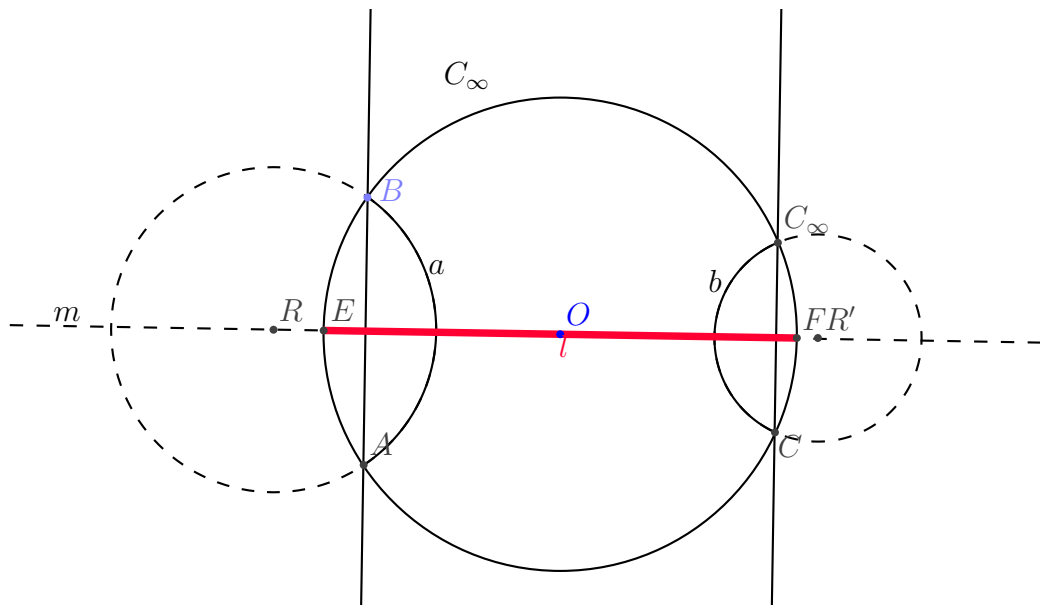


Como RT é uma tangente tem-se que β intersecta ortogonalmente C_∞ , pelo que $\mathbb{D} \cap \beta = l$ é uma P-recta.

Repare-se agora que, relativamente à inversão em β , A e B são pontos inversos um do outro, assim como C e D , pois pertencem a C_∞ e às semi-rectas $\dot{R}B$ e $\dot{R}D$, respectivamente. Portanto, as P-rectas a e b também são ortogonais a l .

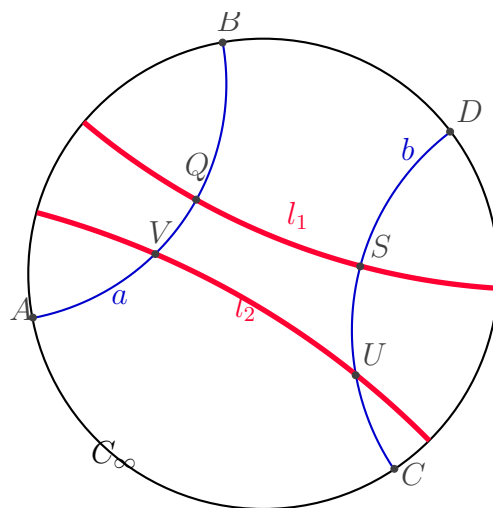
2º Caso

Se AB e CD forem paralelas tem-se que a mediatriz m de $[AB]$ e $[CD]$ contém o centro O e, simultaneamente, os pontos R (centro da recta suporte de $A)(B)$ e R' (centro da recta suporte de $C)(D)$. Logo $\mathbb{D} \cap m = l$ é uma P-recta, pois é um diâmetro, e é ortogonal a a e a b .



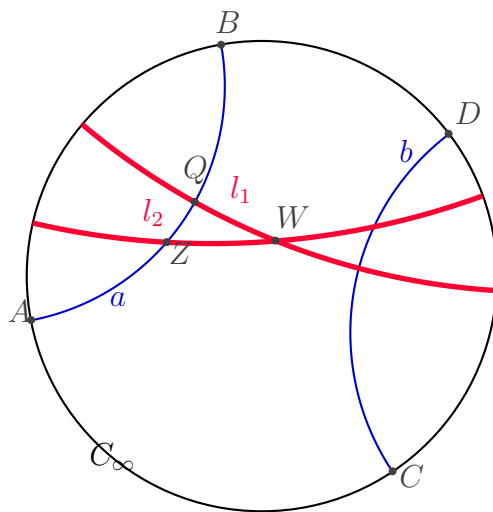
Por último basta provar que essa P-recta l é única. Partindo do pressuposto da existência de duas P-rectas, l_1 e l_2 , ortogonais a a e a b , teríamos uma das seguintes situações descritas nas imagens:

1º Situação



O quadrilátero hiperbólico $[VUSQ]$ teria os ângulos internos todos rectos pelo que a sua soma seria igual a 2π o que não é possível pelo Teorema 4.2.2 apresentado no próximo subcapítulo.

2ª Situação



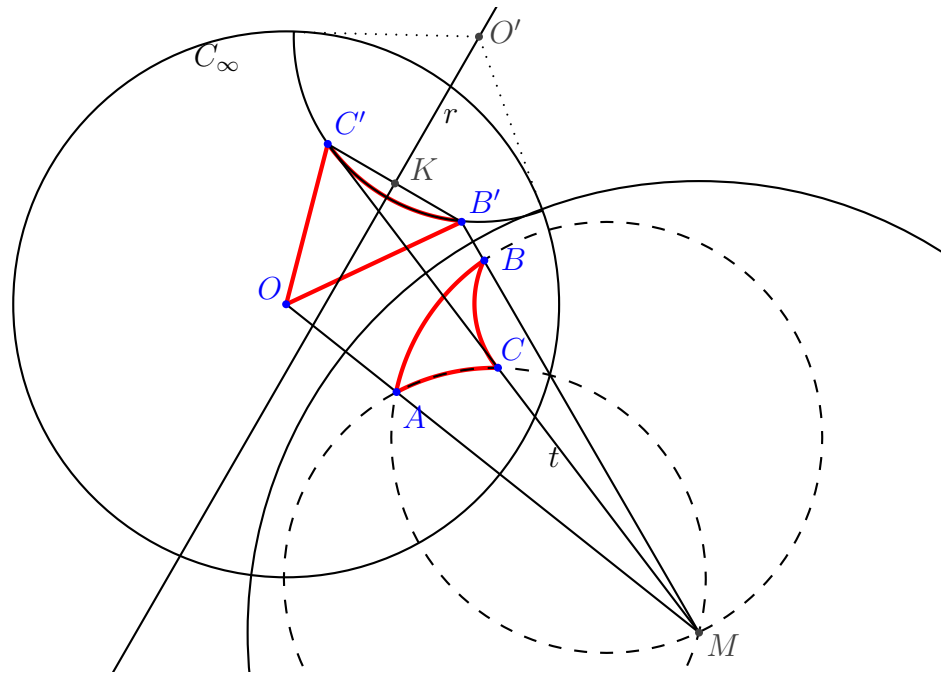
O triângulo hiperbólico $[ZQW]$ teria dois ângulos internos rectos pelo que a sua soma seria superior a π o que também não é possível pelo teorema 4.2.1 apresentado no próximo subcapítulo.

□

4.2 Soma dos ângulos internos

Teorema 4.2.1. *A soma dos ângulos internos de um P-triângulo é menor do que π .*

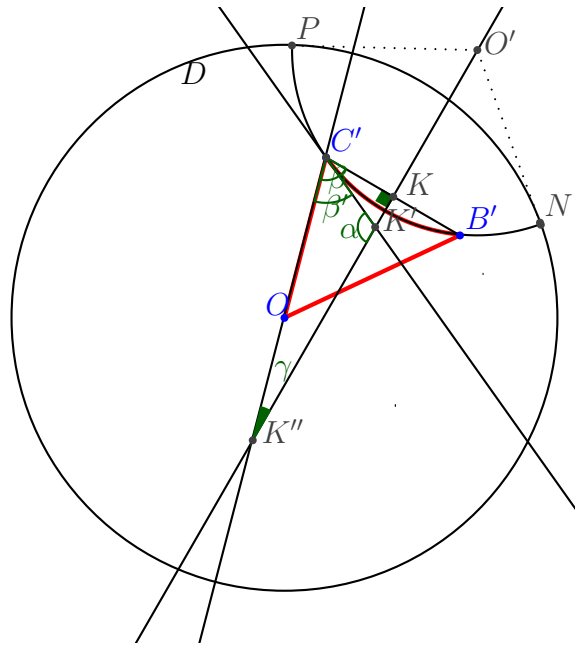
Demonstração. Considere-se o P-triângulo $\Delta[ABC]$ e um movimento rígido φ que transforma o $\Delta[ABC]$ num triângulo congruente a este tais que $\varphi(A) = O$. Denotemos este novo P-triângulo por $\Delta[OB'C']$.



Ora, considerando o triângulo Euclidiano $\Delta[OB'C']$ temos que a soma dos ângulos internos deste triângulo é igual a π . Considerando o P-triângulo $\Delta[OB'C']$ tem-se que o P-ângulo $\angle OC'B'$ tem amplitude igual ao ângulo formado pela semi-tangente, t , ao arco $C'B'$ e pela semi-recta $C'O$. Analogamente para o P-ângulo $\angle OB'C'$.

Vamos agora provar que o ângulo euclidiano $\angle OC'B'$ tem amplitude superior ao ângulo hiperbólico $\angle OC'B'$. Para tal, observe de forma ampliada uma parte da imagem anterior onde denotámos por β e β' , os ângulos euclidiano e hiperbólico, $\angle OC'B'$, respectivamente e ainda:

- ε a circunferência suporte de B' (C' e O' o seu centro);
- t a recta tangente à circunferência ε no ponto C' ;
- r a mediatriz de $[B'C']$;
- $\{K\} = [B'C'] \cap r$ (K é o ponto médio de $[B'C']$);
- $\{K'\} = t \cap r$;
- $\{K''\} = C'O \cap r$;
- $\alpha = \angle C'K'K''$



Relativamente aos triângulos $\Delta[C'K'K'']$ e $\Delta[C'K'K']$, sendo $\gamma = \angle C'K''K'$.

$$\beta + \frac{\pi}{2} + \gamma = \pi$$

e

$$\beta' + \alpha + \gamma = \pi$$

logo

$$\beta' + \alpha = \beta + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta' - \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

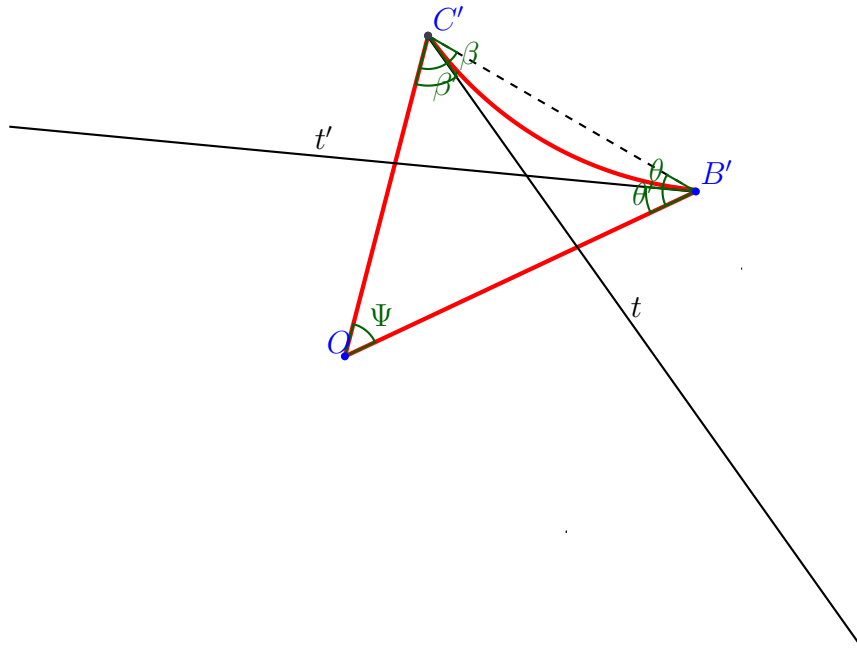
Considerando o triângulo rectângulo $\Delta[KC'K']$ temos

$$\pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Logo $\alpha > \frac{\pi}{2}$ e temos

$$-\alpha < -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha < 0 \Rightarrow \beta' - \beta < 0 \Leftrightarrow \beta' < \beta$$

De forma análoga se prova que, sendo θ o ângulo euclidiano $\angle C'B'O$ e θ' o ângulo hiperbólico $\angle C'B'O$, $\theta' < \theta$.

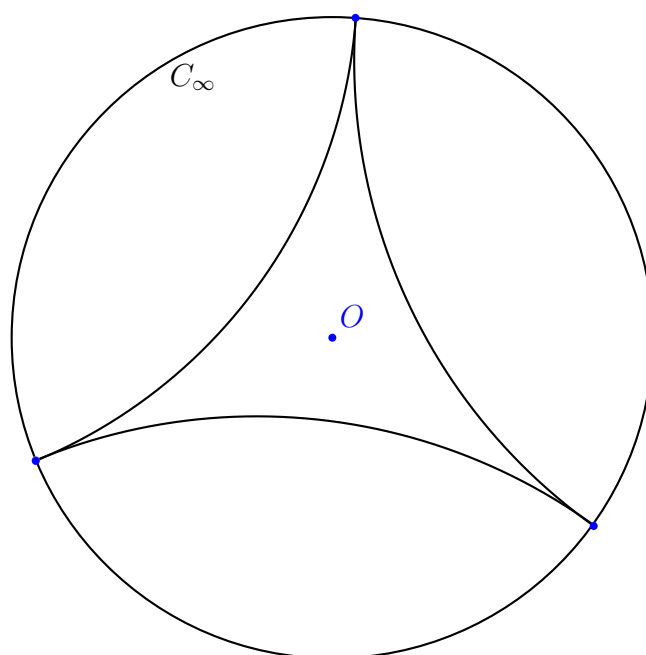
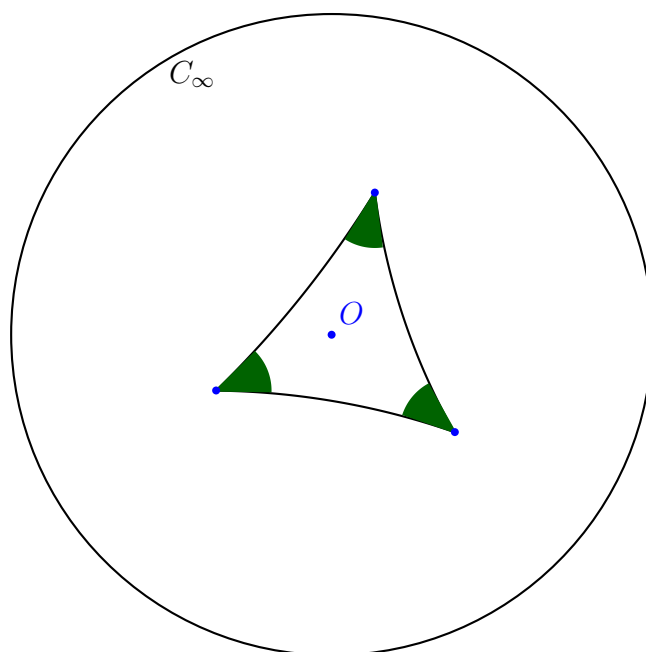


Assim,

$$\psi + \beta + \theta > \psi + \beta' + \theta' \Leftrightarrow \psi + \beta' + \theta' < \pi$$

□

Para exemplificar o teorema anterior, apresentaremos de seguida dois triângulos equiláteros cuja soma das amplitudes dos ângulos internos é inferior a π . Assim, na 1ª figura podemos observar que a soma dos ângulos internos do triângulo $\triangle[ABC]$ é igual a $\frac{3\pi}{4}$ enquanto que na 2ª figura aproxima-se de zero pelo facto de os vértices do P-triângulo estarem mais próximos da fronteira do Disco de Poincaré.

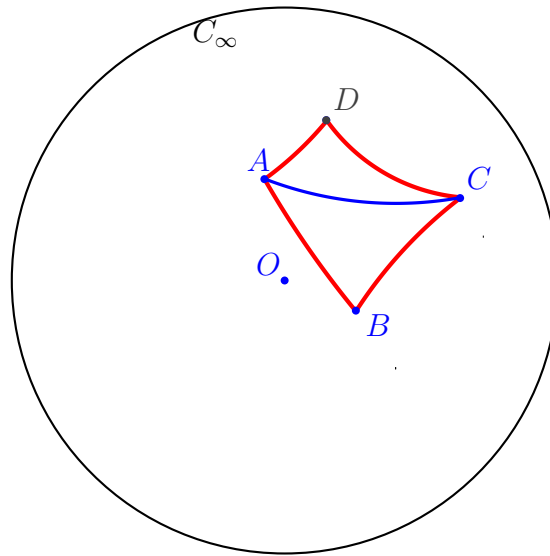


Deste teorema concluímos que, se os ângulos internos de um triângulo forem $\frac{\pi}{l}$, $\frac{\pi}{m}$ e $\frac{\pi}{n}$ tem-se que

$$\frac{\pi}{l} + \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} < \pi \Leftrightarrow \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1 \quad (4.1)$$

Teorema 4.2.2. *A soma dos ângulos internos de um P-quadrilátero é menor do que 360° .*

Demonstração. Vamos admitir que um P-quadrilátero pode ser dividido em dois P-triângulos. Assim, na figura seguinte temos o P-quadrilátero $[ABCD]$ e, conseqüentemente, os P-triângulos obtidos $\Delta[ABC]$ e $\Delta[ADC]$.



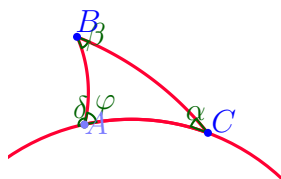
Pelo teorema anterior tem-se que a soma dos ângulos internos de cada um dos P-triângulos mencionados é menor do que π , assim

$$\begin{aligned} & \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB \\ &= \angle ABC + (\angle BCA + \angle ACD) + \angle CDA + (\angle DAC + \angle CAB) \\ &= (\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB) + (\angle CDA + \angle ACD + \angle DAC) \\ &< \pi + \pi = 2\pi \end{aligned}$$

□

Teorema 4.2.3. *Num P-triângulo, a amplitude de qualquer ângulo externo é maior do que a soma das amplitudes dos dois ângulos opostos internos.*

Demonstração. Considere-se a seguinte imagem onde o P-triângulo $\Delta[ABC]$ tem como ângulos internos α , β e φ com δ o ângulo externo do P-triângulo em A. Queremos mostrar que $\delta > \beta + \alpha$



Deste modo, como o ângulo entre duas P-rectas é o ângulo formado pelas suas semi-tangentes, temos que

$$\delta + \varphi = \pi$$

Assim, como a soma dos ângulos internos de um P-triângulo é menor do que π , temos que:

$$\alpha + \beta + \varphi < \pi \Leftrightarrow \alpha + \beta + \varphi < \delta + \varphi \Leftrightarrow \beta + \alpha < \delta$$

□

4.3 Isometrias

As isometrias são transformações geométricas que conservam as distâncias e as medidas de amplitude dos ângulos.

Na Geometria Euclidiana há quatro tipos de isometrias:

- Reflexões axiais
- Rotações
- Translações
- Reflexões deslizantes

Estas isometrias podem ser obtidas unicamente através de reflexões, como é referida no seguinte teorema:

Teorema 4.3.1. *Teorema Fundamental das Transformações Geométricas*
Qualquer isometria do plano é uma composição de, no máximo, três reflexões.

Também na geometria hiperbólica, qualquer isometria no disco de Poincaré é uma composição de, no máximo, três reflexões.

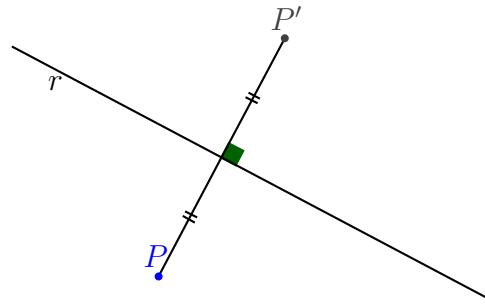
De facto a prova ² não utiliza o axioma das paralelas e sendo assim o Teorema 4.3.1 é verdadeiro na geometria hiperbólica. ([24, pág. 29]).

Das isometrias euclidianas faremos de seguida um breve resumo para posteriormente fazer uma analogia com a geometria hiperbólica no Disco de Poincaré.

²Poderá ser consultada em ([7, pág. 41])

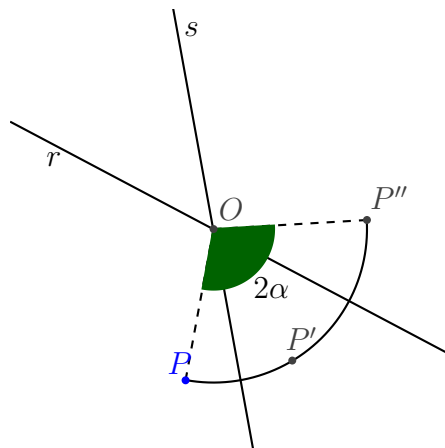
- Reflexões axiais

Tendo em conta o teorema anterior, a reflexão é a isometria mais simples. Na geometria euclidiana, P' é a imagem de P através de uma reflexão de eixo r se r for a mediatriz de $[PP']$. Denominamos a reflexão euclidiana de eixo r por S_r .



- Rotações

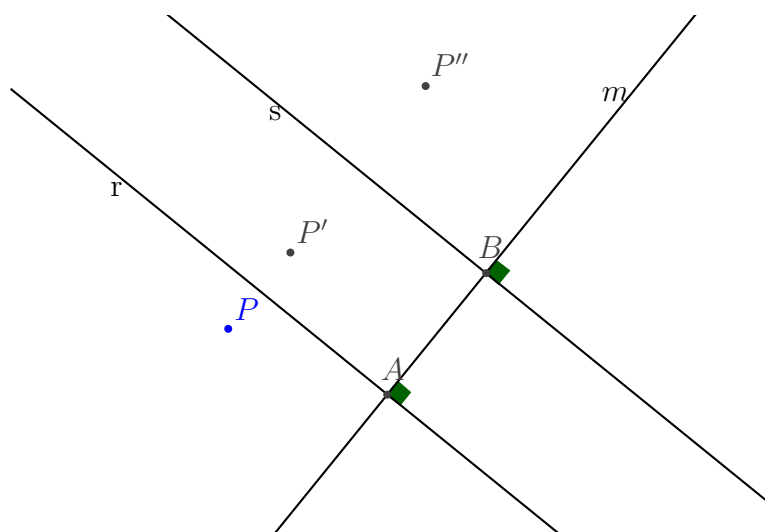
Uma rotação corresponde à composição de duas reflexões cujos eixos de reflexão r e s são concorrentes num ponto O . Considere-se $S_s(P) = P'$ e $S_r(P') = P''$ e α é o ângulo orientado entre s e r . Os três pontos pertencem à mesma circunferência de centro O e ângulo orientado $\angle(\dot{O}P, \dot{O}P'')$ tem medida 2α . O ponto P'' é a imagem do ponto P pela rotação de centro O e amplitude 2α .



No caso particular de as rectas r e s serem perpendiculares, o ângulo de rotação é de 180 graus, e por este facto esta isometria é muitas vezes conhecida por *meia-volta*.

- Translações

Uma translação é a composição de duas reflexões cujos eixos de reflexão são paralelos. A direcção perpendicular a estes eixos é chamada de direcção da translação. Assim, se $S_r(P) = P'$ e $S_s(P') = P''$ então $(S_s \circ S_r)(P) = P''$, a direcção da recta PP'' é aquela da translação e $\overline{PP''} = 2\overline{AB}$, sendo \overline{AB} a distância entre as rectas r e s .



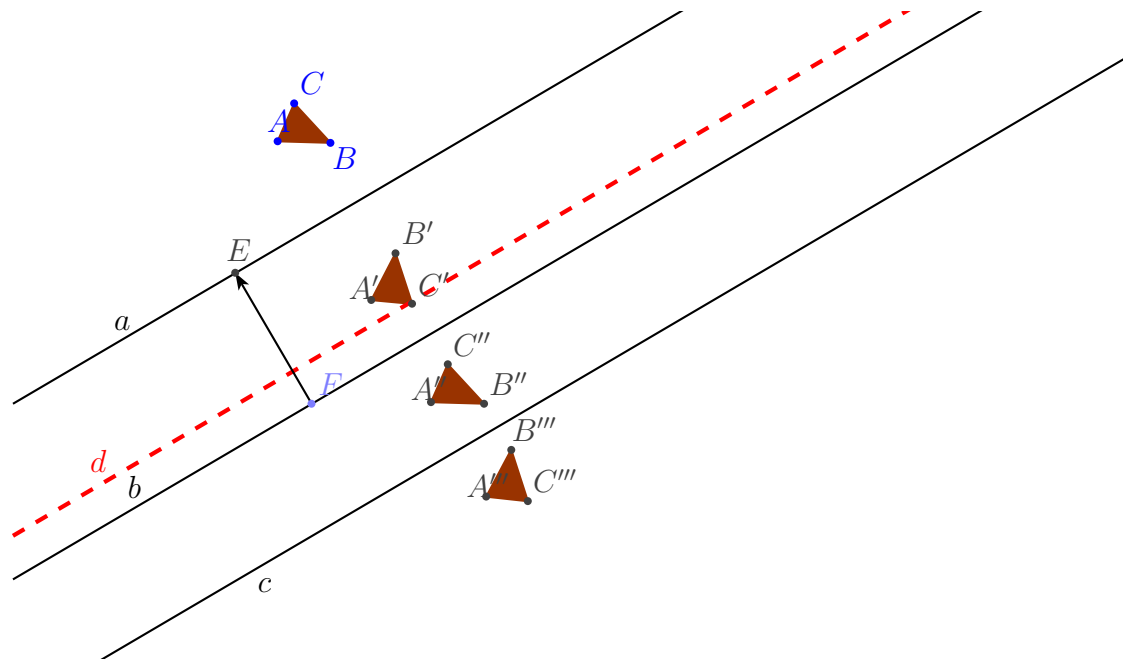
- Reflexões deslizantes

Nas figuras das próximas páginas tomaremos triângulos em vez de pontos para tornar mais evidente as transformações.

A composição de três reflexões pode ser descrita através de três situações:

- Os três eixos de reflexão são paralelos.

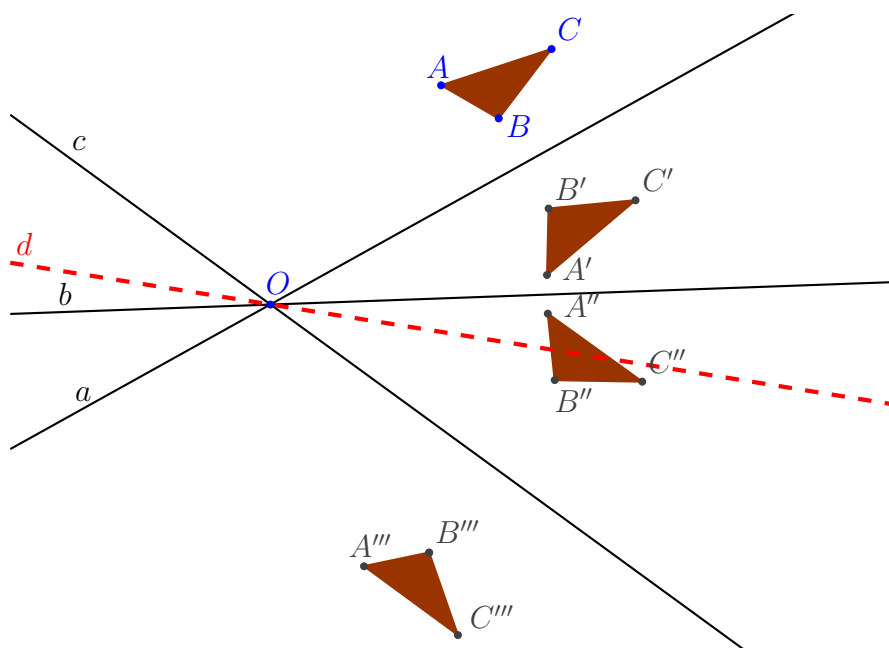
A composição de três reflexões cujos eixos de reflexão são paralelos é uma reflexão de eixo paralelo aos eixos anteriores. Na figura seguinte podemos observar que: $S_a([ABC]) = [A'B'C']$, $S_b([A'B'C']) = [A''B''C'']$ e $S_c([A''B''C'']) = [A'''B'''C''']$ então $(S_c \circ S_b \circ S_a)([ABC]) = S_d[ABC] = [A'''B'''C''']$ em que d é a mediatriz dos segmentos $[AA''']$, $[BB''']$ e $[CC''']$. Repare que d é a imagem de c pela translação associada ao vector \vec{FE} .



– Os três eixos de reflexão são concorrentes num único ponto.

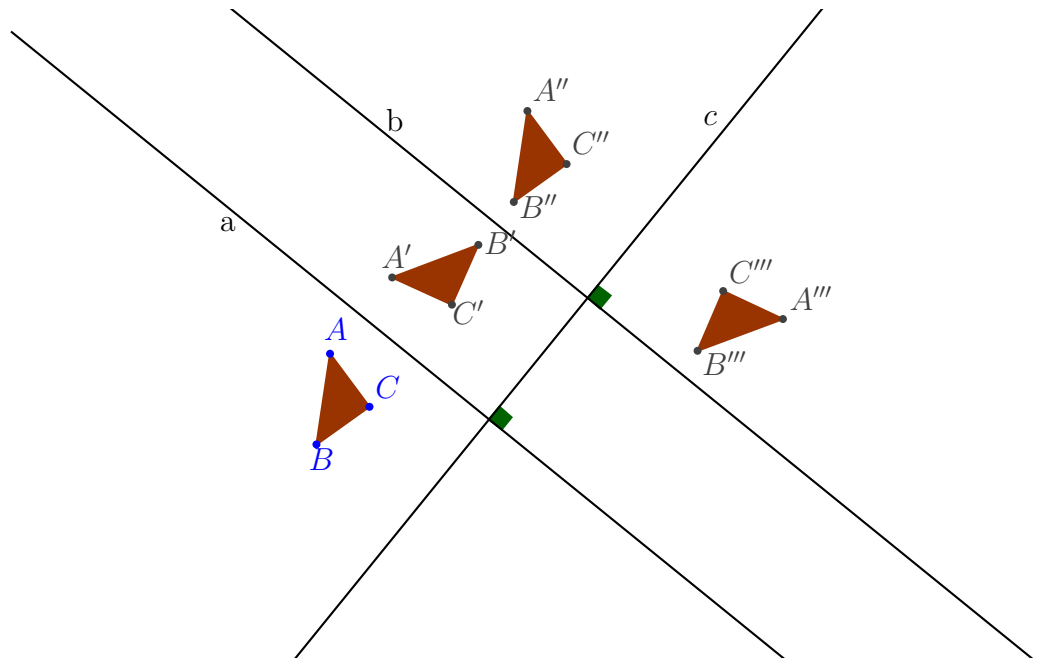
A composição de três reflexões cujos eixos de reflexão são concorrentes num único ponto O é uma reflexão de eixo concorrente com os eixos anteriores no ponto O . Deste modo, na figura seguinte, podemos observar que: $S_a([ABC]) = [A'B'C']$, $S_b([A'B'C']) = [A''B''C'']$ e $S_c([A''B''C'']) = [A'''B'''C''']$ então $(S_c \circ S_b \circ S_a)([ABC]) = S_d[ABC] = [A'''B'''C''']$ em que d é a mediatriz de $[AA''']$, $[BB''']$ e $[CC''']$.

Repare que d é a imagem de c pela rotação de centro O , cujo ângulo tem a mesma amplitude do ângulo formado pelas rectas a e b .



– Outros casos.

A composição de três reflexões cujos eixos de reflexão não são todos paralelos nem concorrentes num único ponto reduz-se à composição (comutativa) de uma reflexão e de uma translação chamada de reflexão deslizante. Na reflexão deslizante, o eixo de reflexão é paralelo à direcção da translação. Assim, se $S_a([ABC]) = [A'B'C']$, $S_b[A'B'C'] = [A''B''C'']$, $S_c[A''B''C''] = [A'''B'''C''']$, então $[S_c \circ S_b \circ S_a][ABC] = [A'''B'''C'''] = (S_c \circ T_c)[ABC]$.



ISOMETRIAS NA GEOMETRIA HIPERBÓLICA

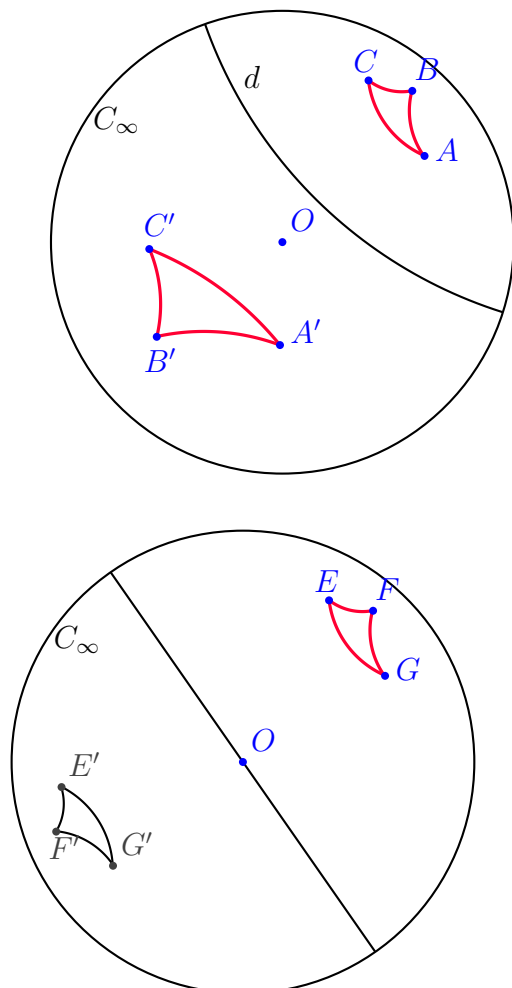
Nas figuras exemplificativas das isometrias, utilizaremos por vezes P-triângulos de forma a tornar mais clara as transformações geométricas. Na geometria hiperbólica, neste modelo do disco de Poincaré, a inversão é a transformação geométrica, no caso lato, que substitui a reflexão euclidiana.

No modelo do disco de Poincaré há cinco tipos de isometrias:

- Reflexão hiperbólica

A Reflexão hiperbólica pode ter como eixo de reflexão um diâmetro do disco de Poincaré ou uma P-recta. Se a reflexão hiperbólica for relativamente a um diâmetro é, na verdade, a reflexão euclidiana em relação a essa recta, se for relativamente a um arco de circunferência (P-recta) é a inversão circular. Esta transformação só mantém invariante os pontos pertencentes à P-recta que funciona como eixo reflexão.

Nas imagens seguintes os P-triângulos $\Delta[A'B'C']$ e $\Delta[E'F'G']$ são a imagem do P-triângulo $\Delta[ABC]$ e do $\Delta[EFG]$, respectivamente, através de uma inversão propriamente dita e de uma reflexão euclidiana.



- Rotações

A rotação hiperbólica é análoga à rotação euclidiana mas relacionada com a reflexão relativamente a P-rectas, ou seja, é a composição de duas reflexões hiperbólicas cujas P-rectas se intersectam num ponto P ordinário de \mathbb{D} .

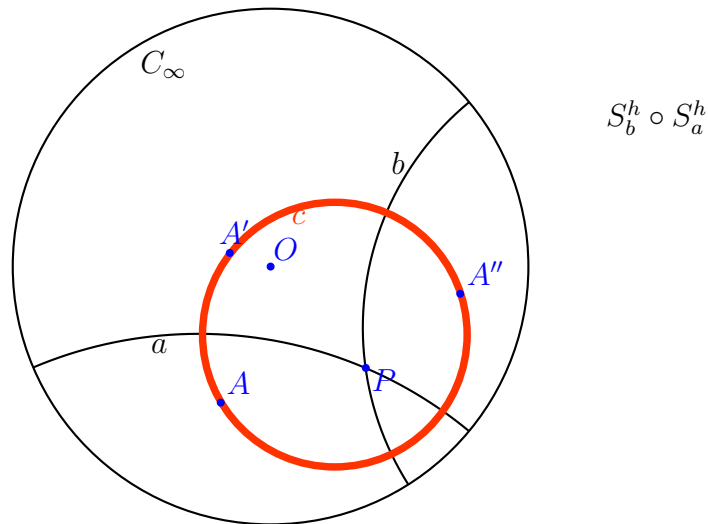
Sejam a e b duas P-rectas que se intersectam em P .

Seja $A \neq P$.

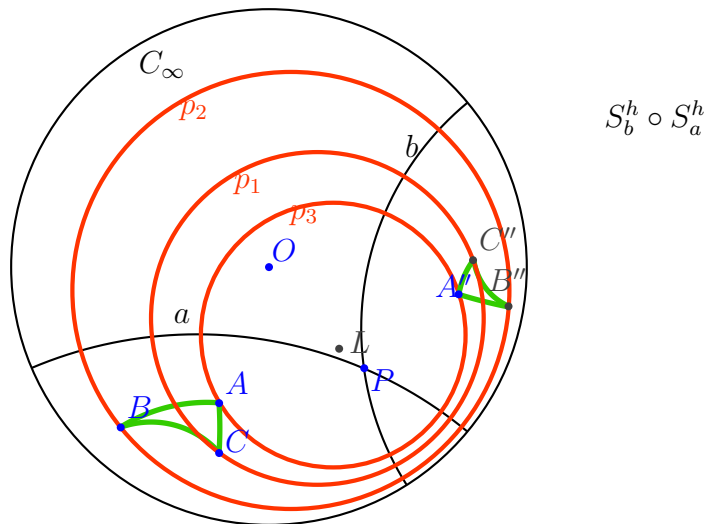
Os pontos $A' = S_a^h(A)$ e $A'' = S_b^h \circ S_a^h(A)$ pertencem à circunferência hiperbólica de centro P e raio $d_h(PA)$. De facto a rotação hiperbólica $(S_b^h \circ S_a^h)$ associa a A o ponto A'' desta circunferência hiperbólica tal que o ângulo orientado entre as semi-rectas tangentes a $\dot{P}(A)$ e $\dot{P}(A'')$ tem

medida 2θ , sendo θ o ângulo orientado entre as semi-rectas tangentes a a e b em P . O ponto P é o único ponto fixo e denominado centro de rotação.

No caso particular de o ângulo formado pelas duas rectas a e b ser de $\frac{\pi}{2}$ então a rotação é de π , ou seja, de **meia-volta**.



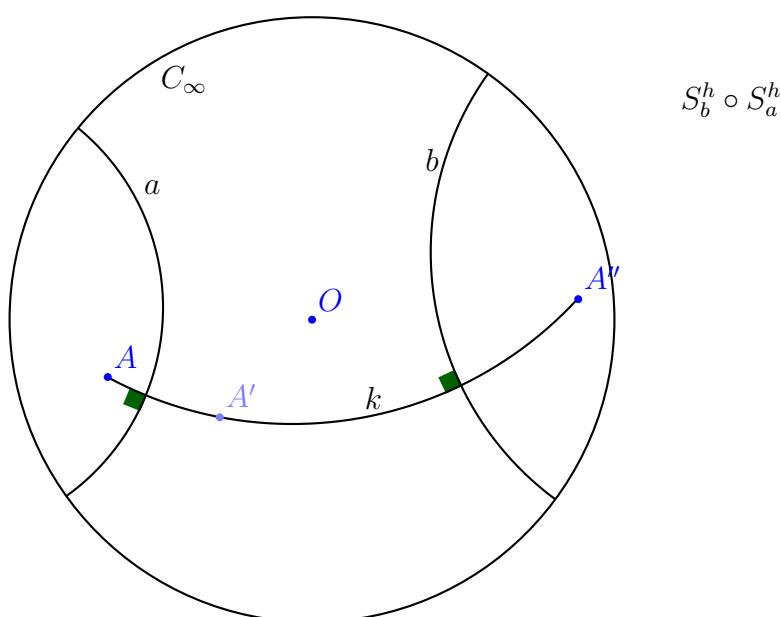
No caso de um triângulo, a transformação do $\Delta[ABC]$ no $\Delta[A'B'C']$ é feita através de P-circunferências de centro hiperbólico P .



- Translações

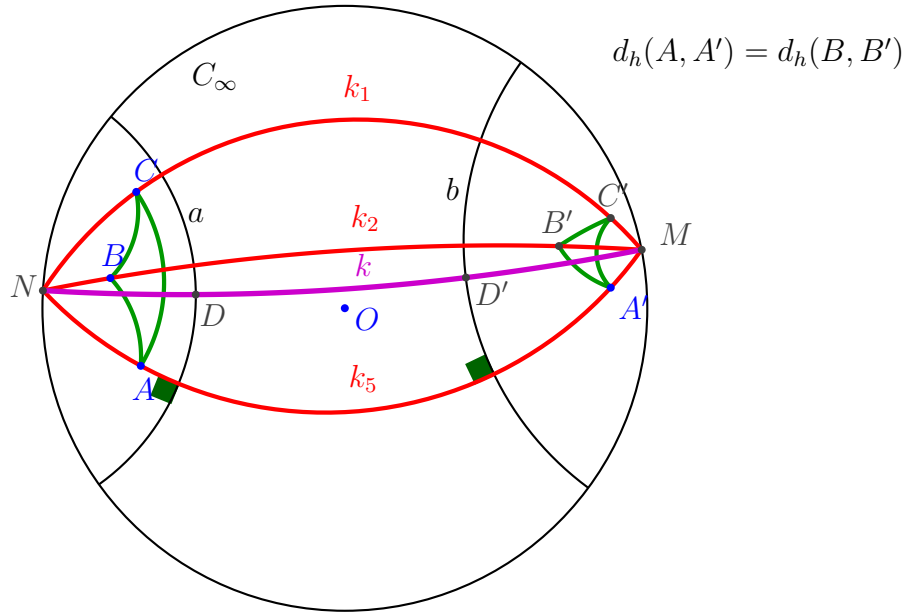
Tal como a rotação hiperbólica, a translação hiperbólica tem analogias

com a translação euclidiana mas, obviamente, referidas às P-rectas do disco de Poincaré. Assim, uma translação é a composição de duas reflexões hiperbólicas relativas a duas P-rectas a e b ultra-paralelas³. Considerando um ponto A ao qual se aplicará a translação, este movimento rígido ocorre ao longo da única circunferência k ortogonal (Proposição 4.1.4) a a e b que contém o ponto A . A figura seguinte ilustra a situação descrita onde A sofre uma translação ao longo do **hipercírculo** k . Recorde que um hipercírculo não é obrigatoriamente uma P-recta.



Analogamente, no caso de o objecto ser um triângulo, a transformação do $\Delta[ABC]$ no $\Delta[A'B'C']$ é feita através de hipercírculos que se intersectam simultaneamente em dois pontos M e N pertencentes a C_∞ . Na imagem seguinte k_1 , k_2 e k_3 são hipercírculos e c é a única P-recta que é ortogonal a a e a b (Proposição 4.1.5) sendo D e D' os pontos de intersecção com as mesmas, respectivamente.

³Recorde que P-rectas ultra-paralelas não têm pontos em comum, nem mesmo na fronteira do disco de Poincaré.



Tal como ocorre na translação euclidiana, a translação hiperbólica não tem pontos fixos e relativamente à distância hiperbólica, tem-se que:

$$d_h(AA') = d_h(BB') = d_h(CC') = 2 * d_h(DD')$$

onde $d_h(D, D')$ pode ser interpretada como a distância hiperbólica entre as P-rectas a e b . Assim, a propriedade referida que se verifica para a translação euclidiana verifica-se também na translação hiperbólica. A única P-recta ortogonal a a e a b chamamos direcção da translação hiperbólica.

- isometria parabólica ou rotação limite

Chama-se rotação limite à composição de duas reflexões, $S_a^h \circ S_b^h$, relativamente a P-rectas a e b que se intersectam num ponto P de C_∞ .

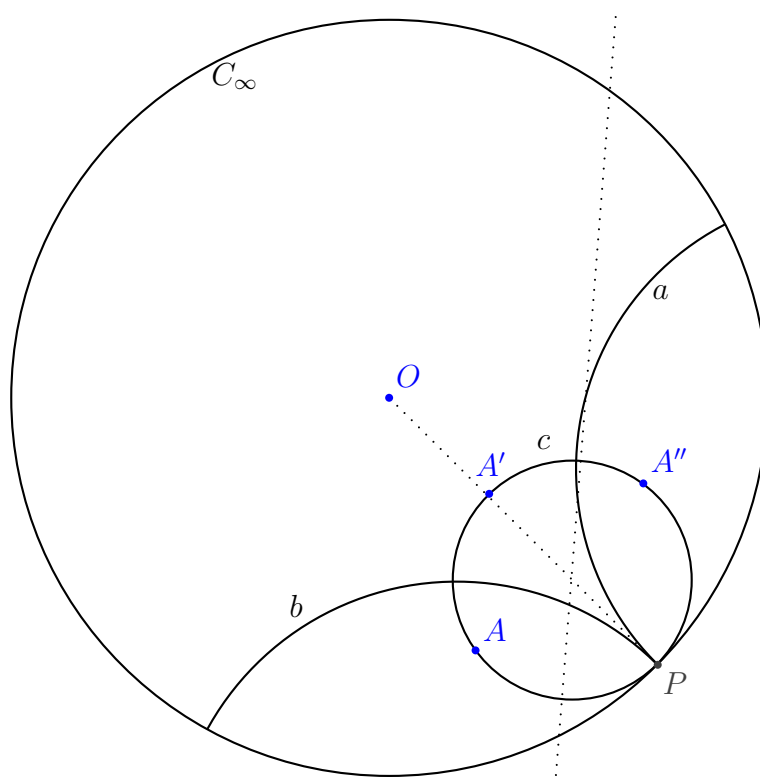
Esta isometria, cujo único ponto fixo é o ponto P , não tem correspondência na Geometria Euclidiana, no entanto, acaba por ter analogia com a rotação e a translação hiperbólicas.

Com efeito, seja $A \in \mathbb{D}$ e sejam $A' = S_b^h(A)$ e $A'' = S_a^h(A') = (S_a^h \circ S_b^h)(A)$. Podemos considerar a circunferência euclidiana c que passa por A e P e cujo centro é a intersecção da mediatriz de $[AP]$ com o raio $[OP]$. Esta circunferência é tangente a C_∞ (portanto é um horocírculo)

e é ortogonal a a e b pois o suporte destas P-rectas são circunferências ortogonais a C_∞ em P .

Os pontos A' e A'' pertencem a esta circunferência c .

Como c pode ser interpretada como uma circunferência hiperbólica de centro P podemos interpretar a isometria como uma rotação (hiperbólica) limite de centro P . Por outro lado, como c é ortogonal a σ e δ podemos interpretar a isometria como uma translação limite cuja direcção é dada pela "recta" reduzida ao ponto P .

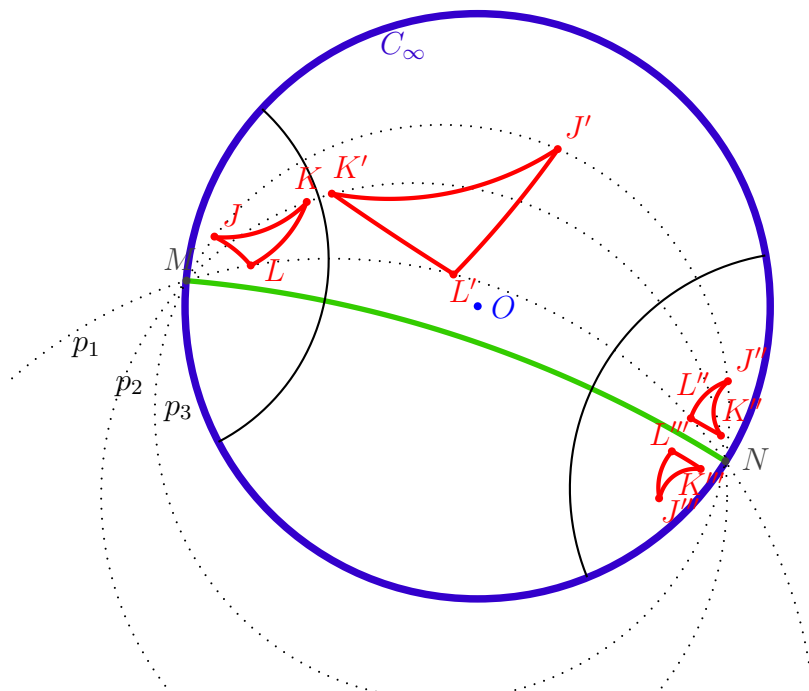


- reflexão deslizante

Tal como na Geometria Euclidiana as únicas composições de três reflexões hiperbólicas que não sejam equivalentes a uma reflexão simples são as chamadas reflexões deslizantes. Uma reflexão deslizante é uma composição $S_a^h \circ S_b^h \circ S_k^h$ relativamente a P-rectas a , b e k tais que a e b são ultra-paralelas e k é a única P-recta ortogonal a a e a b . Como $S_a^h \circ S_b^h$ é a translação de direcção k podemos então dizer que a reflexão deslizante $S_a^h \circ S_b^h \circ S_k^h$ é a reflexão relativamente à P-recta k seguida da translação de direcção k .

Podemos observar que não há pontos fixos mas a P-recta k fica invariante pela reflexão deslizante $S_k^h \circ S_b^h \circ S_a^h$.

Na figura seguinte podemos observar as P-rectas ultras-paralelas a e b , a P-recta $M)(N$, ortogonal a a e b e os hipercírculos p_1 , p_2 e p_3 . O P-triângulo $\Delta[JKL]$ é transformado no P-triângulo $\Delta[J''K''L'']$ através de uma translação hiperbólica e $\Delta[J''K''L'']$ é transformado no P-triângulo $\Delta[J'''K'''L''']$ através da inversão relativamente à P-recta $M)(N$.



4.4 Pavimentações

Pavimentar um plano de forma regular é respeitar as seguintes condições:

1. os polígonos com n lados têm de ser regulares e congruentes, sem espaços vazios entre eles e de forma a preencherem todo o plano;
2. em cada vértice dos polígonos concorrem o mesmo número k de polígonos congruentes.

O que acabámos de apresentar refere-se à geometria euclidiana mas, dado que na geometria hiperbólica os polígonos regulares têm as mesmas carac-

terísticas⁴, podemos concluir que as afirmações anteriores também são válidas no disco de Poincaré.

Neste capítulo vamos considerar a pavimentação com polígonos regulares de n lados com α a medida de amplitude dos seus ângulos internos.

Na Geometria Euclidiana temos que:

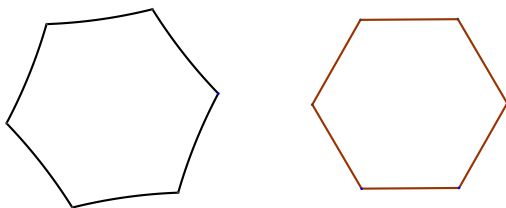
$$\sum (\hat{\text{ângulos internos}}) = (n - 2)\pi$$

pelo que, a amplitude de cada ângulo interno é

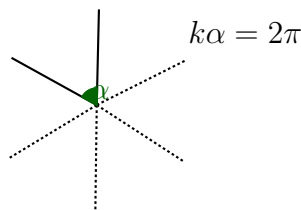
$$\alpha = \frac{(n - 2)\pi}{n}$$

As duas últimas igualdades são válidas na Geometria Euclidiana mas não na Geometria Hiperbólica como podemos verificar nos Teoremas 4.2.1 e 4.2.2.

Nas imagens seguintes podemos observar um hexágono regular nas geometrias hiperbólica e euclidiana, respectivamente.



Contudo, pelo segundo ponto das condições para pavimentar o plano, dado que em cada vértice concorrem k polígonos regulares, temos que, nas duas Geometrias, $k\alpha = 2\pi$.



Considerando novamente, apenas a Geometria Euclidiana e as observações anteriores, da igualdade $k\alpha = 2\pi$ temos:

$$k \frac{(n - 2)}{n} = 2 \Leftrightarrow k = \frac{2n}{n - 2} \Leftrightarrow k = 2 + \frac{4}{n - 2}$$

Assim, em cada vértice do polígono regular têm de concorrer $k = 2 + \frac{4}{n-2}$, $n \geq 3$, polígonos regulares, pelo que podemos observar os resultados da tabela:

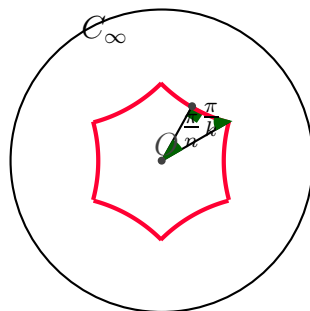
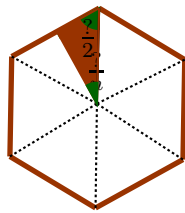
⁴Informação retirada da obra de David A. Singer.

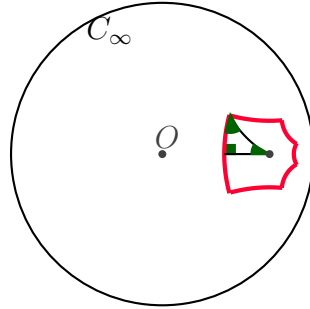
$n, n \geq 3$	$\frac{4}{n-2}$	$2 + \frac{4}{n-2}$
3	4	6
4	2	4
5	não é inteiro	...
6	1	3
$n \geq 7$	não é inteiro	...

Pela análise da tabela, concluímos que os únicos polígonos regulares que pavimentam o plano Euclidiano são o triângulo, o quadrado e o hexágono. O próximo teorema apresenta esta informação do seguinte modo:

Teorema 4.4.1. *As únicas três pavimentações regulares do plano Euclidiano são feitas com quadrados, triângulos equiláteros e hexágonos regulares. ([25, pág. 190])*

Mas, pavimentar o plano, quer seja Euclidiano quer seja Hiperbólico, com polígonos regulares permite-nos concluir que, em particular, a pavimentação também é possível com triângulos rectângulos.





Com efeito, cada polígono pode ser pavimentado por triângulos cujas amplitudes dos ângulos internos são:

$$\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{n}; \frac{\alpha}{2}$$

Pelo ponto dois das condições para as pavimentações (página 104), como em ambas as geometrias $k\alpha = 2\pi$, as amplitudes dos ângulos internos destes triângulos rectângulos são $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{n}$ e $\frac{\pi}{k}$.

$$\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{n}; \frac{\pi}{k} = \frac{\alpha}{2}$$

Ora, na geometria Hiperbólica sabemos, pelo Teorema 4.2.1, que a soma dos ângulos internos é menor do que π . Logo as amplitudes $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{n}$ e $\frac{\pi}{k}$ deverão verificar:

$$\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{k} < \pi$$

ou seja

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{k} < 1$$

ou seja

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}$$

Em suma, para pavimentar um plano hiperbólico com n polígonos regulares e k polígonos concorrentes em cada vértice, os números inteiros k e n devem satisfazer a condição

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}.$$

O teorema seguinte mostra que esta condição necessária é de facto suficiente.

Teorema 4.4.2. *Poincaré*⁵.

Para quaisquer $n, k \geq 3$ com $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}$ existe uma pavimentação regular do plano hiperbólico com polígonos de n lados e k polígonos concorrentes em cada um dos vértices.

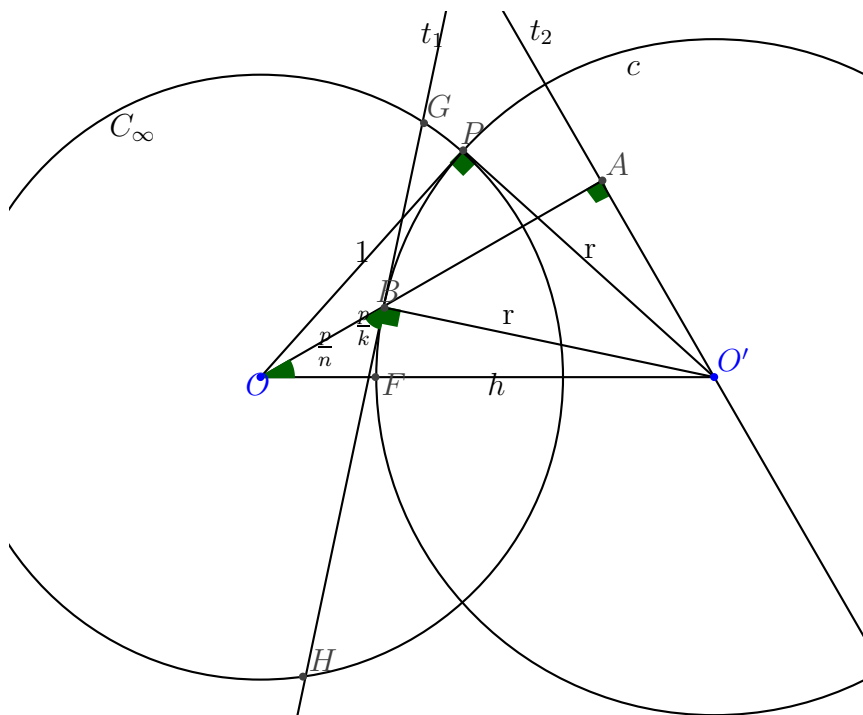
Como podemos facilmente perceber, a desigualdade $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}$ tem infinitas soluções para valores de n e k inteiros com $n, k \geq 3$. Vejamos alguns exemplos:

$n, n \geq 3$	$k, k \geq 3$	$\frac{1}{n} + \frac{1}{k}$	Pavimentação
3	3	$\frac{2}{3} (> \frac{1}{2})$	Não
3	4	$\frac{7}{12} (> \frac{1}{2})$	Não
3	5	$\frac{8}{15} (> \frac{1}{2})$	Não
3	6	$\frac{1}{2} (> \frac{1}{2})$	Não
3	$\forall k \in \mathbb{N}, k > 6$	$\dots (< \frac{1}{2})$	Sim
4	3	$\frac{7}{12} (> \frac{1}{2})$	Não
4	4	$\frac{1}{2} (= \frac{1}{2})$	Não
4	$\forall k \in \mathbb{N}, k > 4$	$\dots (< \frac{1}{2})$	Sim
\dots	\dots	\dots	Sim

Dados n e k tais que $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}$ ($n, k \geq 3$ e $n, k \in \mathbb{N}$), vamos agora construir um triângulo rectângulo em \mathbb{D} cujas amplitudes dos ângulos internos são $\frac{\pi}{n}$, $\frac{\pi}{k}$ e $\frac{\pi}{2}$, sendo o vértice em $\frac{\pi}{2}$ o centro do Disco de Poincaré.

Observemos agora a figura seguinte que nos auxiliará na fundamentação da construção do P-triângulo referido.

⁵A prova deste teorema pode ser consultada em ([13])



Na imagem podemos observar:

- a circunferência C_∞ de centro O e raio 1;
- o P-triângulo $\Delta[OBF]$ cujas amplitudes dos ângulos internos são as mencionadas anteriormente, ou seja, $O\hat{F}B = \frac{\pi}{2}$, $B\hat{O}F = \frac{\pi}{n}$ e $O\hat{B}F = \frac{\pi}{k}$;

Para a construção deste triângulo será suficiente a representação de uma circunferência c ortogonal a C_∞ cujo centro O' estará a uma certa distância h de O .

Supondo a construção feita, vamos ver como o valor de h é determinado por n e k .

Consideremos os seguintes elementos da figura anterior:

- a recta t_1 tangente a c e que passa por B ;
- a recta t_2 perpendicular a OB e que passa por O' . O ponto A é o ponto de intersecção de t_2 com OB .

A partir das características dos dados da figura anterior, podemos tirar algumas conclusões:

- sendo o triângulo $\Delta[OPO']$ rectângulo em P (pois as circunferências são ortogonais), temos $1 + r^2 = h^2$ onde $h = \overline{OO'}$;

- como t_1 é perpendicular a BO' e $G\widehat{B}A = O\widehat{B}H = \frac{\pi}{k}$, então $A\widehat{B}O' = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{k}$. Os pontos G e H são os pontos de intersecção de t_1 com C_∞ .

Assim, dado que os triângulos $\Delta[OAO']$ e $\Delta[BAO']$ são triângulos rectângulos, usando as razões trigonométricas, temos que:

- $\sin(\angle ABO') = \frac{\overline{AO'}}{r}$
- $\sin(\angle AOO') = \frac{\overline{AO'}}{h}$

Logo,

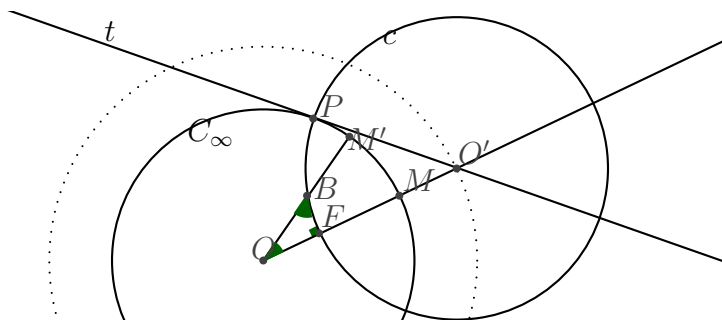
$$\begin{aligned} r \cdot \sin(\angle ABO') &= h \cdot \sin(\angle AOO') \\ \Leftrightarrow \sqrt{h^2 - 1} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{k}\right) &= h \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ \Rightarrow (h^2 - 1) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{k}\right) &= h^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ \Leftrightarrow h^2 \cdot \left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{k}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] &= \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{k}\right) \\ \Leftrightarrow h &= \sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{k}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{k}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}} \end{aligned}$$

Deste modo, calculando o valor de h de acordo com os números n e k previamente definidos, a construção do triângulo $\Delta[OBF]$ é bastante simples.

Assim, considerando uma circunferência C_∞ de centro O e raio 1 e dev-eremos seguir as seguintes etapas:

- construa uma qualquer semi-recta euclidiana com origem no ponto O e denote por M o ponto de intersecção da mesma com C_∞ ;
- represente $O' \in \dot{O}M$ tal que $\overline{OO'} = h$;
- represente uma recta t tangente a C_∞ e que passa por O' ;
- denote por $\{P\} = t \cap C_\infty$;
- represente a circunferência c de centro O' e raio $[O'P]$ e o ponto $\{F\} = c \cap \dot{O}M$;
- represente o ponto M' a imagem do ponto B pela rotação em torno de O e amplitude $\frac{\pi}{n}$. Denote por $\{B\} = c \cap \dot{O}M$;

O triângulo hiperbólico $\Delta[OBF]$ é um P-triângulo cujos ângulos internos têm amplitude $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{k}$.



A parte mais complexa está agora construída, resta-nos apresentar uma forma de construir a pavimentação de todo o disco. No caso geral, podemos ter um triângulo com os ângulos internos $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{k}$ e pavimentar o plano hiperbólico como é referido no Teorema seguinte:

Teorema 4.4.3. *Teorema de Poincaré - Poincaré 1882* ⁶.

Qualquer triângulo hiperbólico com ângulos internos $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}$ e $\frac{\pi}{n}$ tais que $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$ gera uma pavimentação única do plano hiperbólico.

Para construir a pavimentação, o teorema seguinte apresenta explicitamente o procedimento.

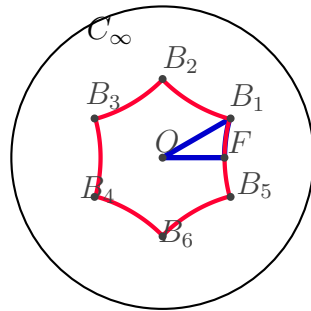
Teorema 4.4.4. *Seja Δ um triângulo hiperbólico com ângulos internos $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}$ e $\frac{\pi}{n}$. Então os triângulos obtidos através das reflexões do triângulo relativamente a cada um dos lados seguida da reflexão dos triângulos obtidos (imagens) relativamente a cada um dos seus lados, e sempre assim infinitamente, pavimentam o plano hiperbólico sem espaços livres ou sobreposições. ([26, pág. 107].*

Para exemplificar a construção de uma pavimentação tomaremos o caso particular de $n = 6$ e $k = 4$ (quatro P-polígonos regulares concorrentes em cada vértice dos P-hexágonos regulares), pelo que $h = \sqrt{2}$.

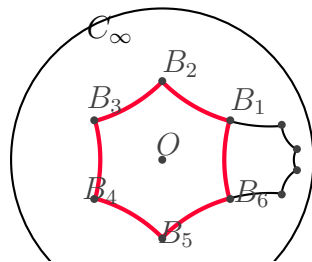
Assim, seguindo os passos da construção anterior, podemos construir um triângulo rectângulo cujas amplitudes dos ângulos internos são $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$. De seguida, vamos construir um P-hexágono regular de centro O .

Para isso, basta representar os vértices B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 imagens de B_1 pela rotação de centro O e amplitude $\frac{\pi}{3}, 2\frac{\pi}{3}, \pi, 4\frac{\pi}{3}, 5\frac{\pi}{3}$ respectivamente.

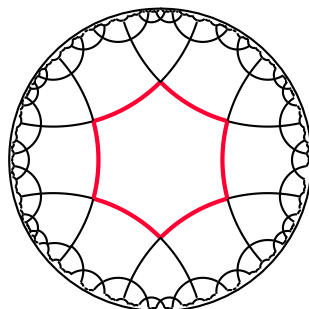
⁶Este Teorema foi primeiramente provado por Henri Poincaré em 1882 e uma prova deste teorema pode ser consultada em ([18, pág. 200])



Assim, de acordo com o teorema anterior (4.4.4) considere-se a recta σ suporte de B_1B_2 e aplique-se a inversão circular, relativamente a σ , aos pontos B_3, B_4, B_5 e B_6 e obteremos outro hexágono. Este hexágono, segundo uma visão euclidiana, é menor do que o hexágono inicial pelo facto de as distâncias hiperbólicas distorcerem a nossa visão usual da realidade euclidiana.



Repetindo o processo descrito anteriormente em relação aos restantes lados do hexágono regular inicial e, posteriormente, para os lados dos hexágonos obtidos num processo infinito, o disco de Poincaré ficará totalmente pavimentado. Na imagem seguinte é possível observar o início da pavimentação do Disco de Poincaré, utilizando os passos anteriormente referidos. Para a construção desta imagem foi utilizado o programa de geometria dinâmico, Geogebra, com o auxílio de ferramentas criadas a partir da geometria euclidiana.



Repare que, na pavimentação anterior, todos os polígonos são hexágonos regulares que, ao olho euclidiano, parece que diminuem à medida que se

aproximam da fronteira do disco de Poincaré.

A pavimentação do disco de Poincaré foi um tema que motivou o interesse do famoso artista M.C. Escher que desenvolveu um conjunto de trabalho intitulado "Circle Limit". Escher tem então quatro trabalhos em que pavimenta o disco de Poincaré com régua e compasso, utilizando para tal imagens em vez de polígonos. Estas imagens têm como base, figuras que são polígonos regulares.

Bibliografia

- [1] Araújo, P. V. (1998) *Curso de Geometria*. Gradiva Publicações.
- [2] Barbosa, J. L. M. (2009) *Geometria Hiperbólica*. 5ª Edição. Universidade Federal do Ceará.
- [3] Barth, A. (2007) *Tessellations: The Link Between Math and Art*. Consultado em Agosto, 12, 2010, em <http://ramanujan.math.trinity.edu/tumath/students/projects/amanda.barth.nm.pdf>
- [4] Bonola, R. (2007) *Non-Euclidean Geometry*. Cosimo, Inc.
- [5] Brannan, A. D., Esplen, M. F. e Gray, J. J. (n.d.) *Geometry*. Cambridge University Press.
- [6] Coxeter, H. S. M. (n.d.) *Introduction to Geometry*. 2ª Edição. John Wiley & Sons, Inc.
- [7] Coxeter, H. S. M. (1998) *Non-Euclidean Geometry*. 6ª Edição. The Mathematical Association of America.
- [8] Coxeter, H. S. M. (n.d.) *Regular Polytopes*. Londres: Methuen & Co. Ltd.
- [9] Coxeter, H. S. M., Emmer M., Penrose R. e Teuber M. L. (1985) *M.C.Escher: Art and Science*. University of Toronto.
- [10] Eves, H. (1992) *Fundamentals of Modern Elementary Geometry*. Londres: Jones and Bartlett Publishers.
- [11] Fitzpatrick, R. (2008) *Euclid's Elements of Geometry. Modern English translation*.
- [12] Gans, D. (1993) *An Introduction to NON-EUCLIDEAN GEOMETRY*. Academic Press New York University.

- [13] Goodman-Strauss (n.d.) *Regular Production Systems and Tilings in the Hyperbolic Plane*. comp.uark.edu/~strauss. Consultado em Maio de 2010, em <http://comp.uark.edu/~strauss/distribution/talks/tritalk.pdf>
- [14] Goodman-Strauss (2001) *Compass and Straightedge in the Poincaré disk*. American Monthly 108, 38.49.
- [15] Greenberg, M. J. (1980) *Euclidean and Non-Euclidean Geometries - Development and History*. 2ª Edição. W. H. Freeman and Company.
- [16] Gray, J. (2007) *Worlds out of nothing. A course in the history of Geometry in the 19th century*. Springer.
- [17] Hartshorne, Robin. (2000) *Geometry: Euclid and Beyond*. Springer.
- [18] Iversen, B. (1992) *Hyperbolic Geometry*. Cambridge University Press.
- [19] Margenstern, M. (2002) *Tiling the Hyperbolic Plane with a Single Pentagonal Tile*. Journal of Universal Computer Science, vol. 8, no. 2 (2002), 297-316. Consultado em Agosto 12, 2010, em <http://en.scientificcommons.org/42281221>
- [20] Margenstern, M. (2002) *Navigation in Tilings of the Hyperbolic Plane and Possible Applications*. International MultiConference of Engineers and Computer Scientists 2010 Vol I. Consultado em Agosto 14, 2010, em http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0909/0909.2157v1.pdf
- [21] Oetiker, T., Partl H., Hyna I. e Schlegl E. (2007) Uma não tão pequena introdução ao Latex 2. Tradução portuguesa por Alberto Simões. Consultado em Maio 2010, em <http://alfarrabio.di.minho.pt/albie/lshort/ptlshort.pdf>
- [22] Palladino, D. e Agazzi E. (1978) *LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE e i fondamenti della geometria*. 1ª Edição. Biblioteca della EST - Edizioni Scientifiche e Tecniche.
- [23] Rouelle, S. B., Bovet, A. (2002) *La géométrie non-euclidienne dans le modèle du disque de Poincaré*. Consultado em Setembro, 9, 2010, em <http://www.auguste-piccard.ch/pages/TM-PDF/TM2002/TM2002BovetBoutinard/TM2002BovetBoutinard.pdf>
- [24] Singer, D. A. (1998) *Geometry plane and fancy*. Springer-Verlag New York, Inc.

- [25] Smart, J. R. (1998) *Modern Geometries*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing Company.
- [26] Stahl, S. (1993) *The Poincaré half-plane: a gateway to modern geometry*. Jones and Bartlett Publishers, Inc.
- [27] Tikhomirov, V. M. e Prasolov V. V. (2001) *Translations of MATHEMATICAL monographs*. Volume 200. American Mathematical Society inc.
- [28] Veloso, E. (1998) *Geometria - Temas Actuais*. Materiais para Professores. Instituto de Inovação Educacional.