

UNIVERSIDADE DO MINHO

Laboratório de Órgãos de Máquinas e Tribologia

Guia de Realização do Trabalho Prático

**DETERMINAÇÃO DE FREQUÊNCIAS CRÍTICAS**

**DE VIBRAÇÃO EM VEIOS ROTATIVOS**

João Paulo Flores Fernandes

Guimarães, 1999

## 1. Introdução

Uma vibração mecânica é, em geral, produzida quando um sistema é deslocado da sua posição de equilíbrio estável. O sistema tende a voltar à referida posição sob a acção de forças 'restauradoras' (e.g. forças elásticas, forças gravíticas), atingindo-a com uma velocidade que o leva além desta posição. Como o processo se pode repetir com o tempo, o sistema mantém-se em movimento oscilatório ou periódico em torno da sua posição de equilíbrio, ou seja, vibra.

As vibrações podem ser livres ou forçadas. As vibrações são livres quando o movimento periódico se mantém após a remoção da excitação. Se a causa perturbadora persiste durante o movimento, a vibração designa-se de vibração forçada. As vibrações livres descrevem o comportamento natural do sistema, ou seja, traduzem o seu modo natural de vibração.

Se a frequência de vibração (frequência forçada) de um sistema iguala a frequência natural do mesmo, ocorre o fenómeno denominado de ressonância. Quando isto acontece, a amplitude de vibração aumenta brusca e fortemente, podendo levar o sistema ao colapso.

Os veios, mesmo quando na ausência de cargas exteriores, deflectem durante a rotação. A deflexão máxima ocorre para valores de velocidades designados críticos, ou seja, quando a velocidade de rotação iguala a velocidade natural de vibração do sistema.

As frequências críticas de vibração podem ser determinadas, teoricamente, pelo Método Rayleigh, e experimentalmente pela utilização do equipamento didáctico disponível no Laboratório de Órgãos de Máquinas e Tribologia.

Aconselha-se um conhecimento consolidado da matéria leccionada nas aulas teóricas onde é abordado este assunto, embora aqui seja feita uma breve referência a alguns conceitos.

## 2. Fundamentos teóricos – O Método de Rayleigh

Apresenta-se, de seguida, o método energético desenvolvido por Rayleigh que permite determinar, com bastante simplicidade e rigor, as frequências críticas de vibração em veios rotativos.

Se se considerar um sistema vibrando livremente sem amortecimento, então, durante o movimento, nenhuma energia é adicionada ou retirada ao sistema. Além disso, quando a massa tem velocidade associada, existe energia cinética e, quando a mola é comprimida ou traccionada, há energia potencial. Admitindo que o sistema é conservativo, em cada instante a soma das energias cinética e potencial permanece constante. Esta é a base do método de Rayleigh, que, matematicamente, se traduz por:  $E_{C\text{máx}} = E_{P\text{máx}}$ .

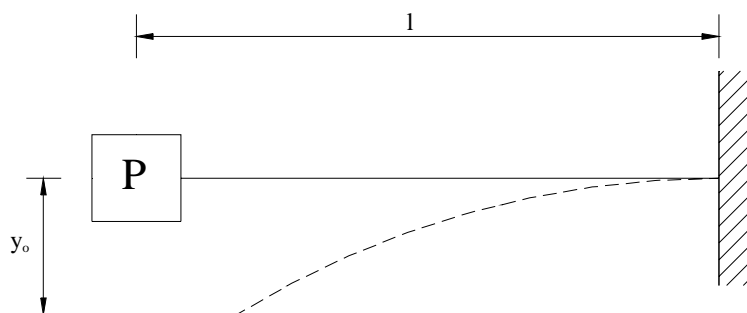


Figura 1 – Sistema simples massa-mola.

Aplicar-se o método ao sistema simples de figura 1. Comece-se por admitir que o movimento é harmónico e da forma  $y = y_0 \cdot \text{sen}(\omega t)$ .

A energia potencial é máxima quando a mola é esticada ou comprimida completamente, e ocorre quando  $\text{sen}(\omega t) = 1$ . Assim,  $E_P = \frac{1}{2} k y_0^2$  e  $k = P/y_0$ , pelo que a energia potencial máxima é dada por:

$$E_{P\text{máx}} = \frac{P \cdot y_0}{2}$$

A velocidade do peso é dada por:  $v = y_0 \cdot \omega \cdot \text{cos}(\omega t)$ . A energia cinética atinge o máximo quando a velocidade é máxima, isto é, quando  $\text{cos}(\omega t) = 1$ . Então, a energia cinética máxima é dada por:

$$E_{C\text{máx}} = \frac{P \cdot y_0}{2g} (y_0 \cdot \omega)^2$$

Igualando as expressões da energia cinética e potencial máxima obtém-se a seguinte relação:  $\omega = \sqrt{\frac{g}{y_0}}$

Esta expressão é bastante útil na determinação das frequências críticas de vibração dos sistemas mecânicos, uma vez que as deflexões estáticas podem facilmente ser determinadas.

O método de Rayleigh é aplicado a um sistema multi-massas composto pelos pesos  $P_1$ ,  $P_2$ , etc., admitindo-se como anteriormente, uma deflexão estática de cada massa de acordo com a equação  $y = y_0 \cdot \text{sen}(\omega t)$ .

As deflexões máximas são, então,  $y_{01}$ ,  $y_{02}$ , etc., e as velocidades  $v_1$ ,  $v_2$ , etc. A energia potencial máxima para o sistema é:

$$E_{P_{\text{máx}}} = \frac{1}{2} P_1 y_{01} + \frac{1}{2} P_2 y_{02} + \dots = \frac{1}{2} \sum P_n y_{0n}$$

A energia cinética máxima é:

$$E_{C_{\text{máx}}} = \frac{1}{2g} P_1 y_{01}^2 \omega^2 + \frac{1}{2g} P_2 y_{02}^2 \omega^2 + \dots = \frac{\omega^2}{2g} \sum P_n y_{0n}^2$$

Igualando, novamente, as expressões da energia cinética e potencial máximas, e resolvendo em ordem a  $\omega$  obtém-se:

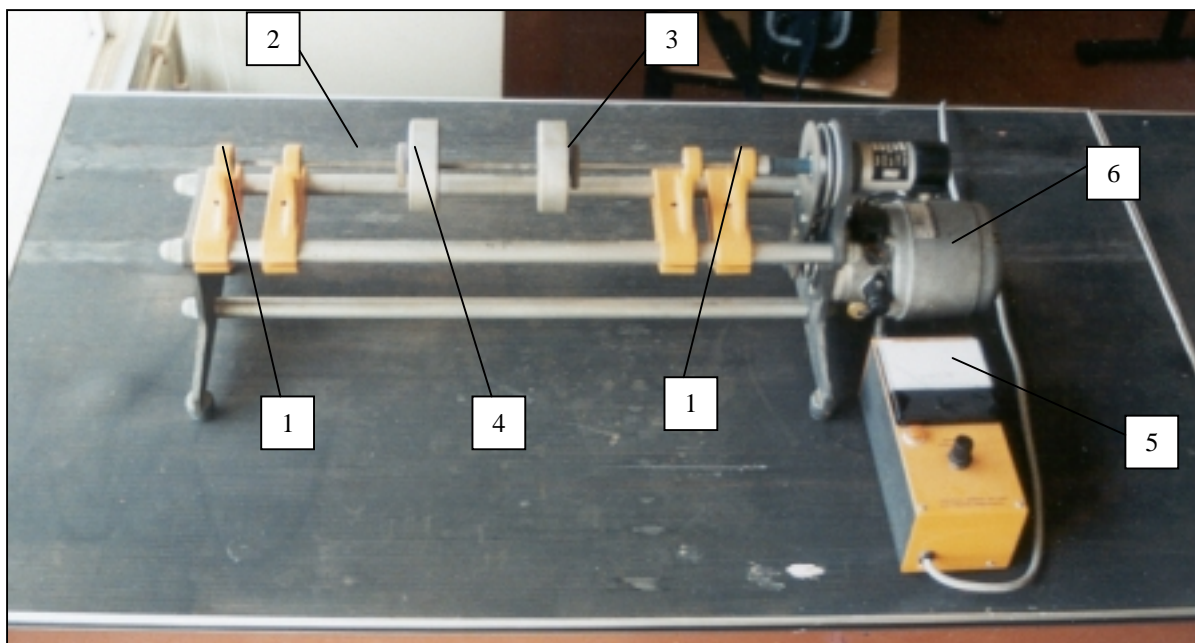
$$\omega = \sqrt{\frac{g \sum P_n y_{0n}}{\sum P_n y_{0n}^2}}$$

Esta equação pode ser aplicada a uma viga, constituindo várias massas ou um veio rotativo com várias massas montadas.

A velocidade crítica determinada pela equação de cima apresenta, para muitos casos, uma aproximação de cerca de 5%. Isto acontece devido a vários factores, tais como: a semelhança entre as curvas de deflexão estática e dinâmica, o efeito de amortecimento do sistema, despreza-se a massa do veio, despreza-se a inclinação das massas.

### 3. Equipamento utilizado

Na realização deste trabalho prático é utilizado o equipamento didáctico da marca TERCO existente no Laboratório de Órgãos de Máquinas e Tribologia. Na figura 2 mostra-se o aspecto geral deste equipamento didáctico.



- |                                   |                                 |
|-----------------------------------|---------------------------------|
| 1 – Apoio/rolamento.              | 2 – Veio.                       |
| 3 – Parafuso de fixação da massa. | 4 – Massa de posição ajustável. |
| 5 – Mostrador conta-rotações.     | 6 – Motor eléctrico.            |

Figura 2 – Aspecto geral do equipamento didáctico de demonstração laboratorial.

A máquina é constituída por um veio flexível, movido por um motor eléctrico de velocidade variável e munido de massas de posicionamento ajustável. Este sistema consegue criar condições de funcionamento propositadamente amplificadas em termos de resposta vibracional que, embora não sendo as encontradas em aplicações usuais, permitem uma fácil detecção das frequências críticas de rotação, para aferição dos resultados obtidos com o método analítico de cálculo.

No atinente à segurança do utilizador/aluno devem estar sempre presentes as *Normas Básicas de Segurança em Laboratórios e Oficinas*, com especial cuidado e precaução sobre os seguintes aspectos:

- antes de ligar a corrente eléctrica deve verificar-se que o potenciómetro se encontra no “zero”, uma vez que a máquina não dispõe de interruptor “ON/OFF”;

- após a ligação eléctrica deve verificar-se se a luz piloto acendeu;
- o facto de haver peças rotativas e de a máquina estar completamente desprotegida;
- a não existência de um sistema de segurança em caso de emergência ou necessidade de parar rapidamente a máquina.

#### 4. Realização do ensaio

Antes de proceder à realização dos ensaios, deve ser preenchido o cabeçalho da *Folha de Registo de Resultados* (página 45).

Cada ensaio, correspondente a uma determinada posição das massas, terá a duração de 10 minutos, no máximo.

A sequência recomendada para a realização dos ensaios é a seguinte:

- 1- Verificar se o potenciómetro se encontra no 'zero'.
- 2- Ligar/Verificar as ligações eléctricas.
- 3- Posicionar as massas para cada situação.
- 4- Efectuar a medição, no mostrador conta-rotações, da velocidade crítica de rotação, aumentando gradualmente a velocidade de rotação do motor eléctrico, rodando o botão do potenciómetro.
- 5- Registar o valor obtido no passo anterior.
- 6- Efectuar a medição da velocidade crítica de rotação, diminuindo gradualmente a velocidade de rotação do motor eléctrico.
- 7- Registar o valor obtido no passo anterior.
- 8- Repetir 3 vezes o procedimento a partir do passo 4.

Devem efectuar-se 6 leituras (3 na subida e 3 da descida da velocidade de rotação) para se obter com mais rigor a velocidade (ou intervalo de velocidades) crítica de rotação.

Após a realização dos ensaios devem registar-se os valores obtidos, que serão objecto de análise e discussão em aula teórico-prática.

# FOLHA DE REGISTO DE RESULTADOS

## Determinação de Frequências Críticas de Vibração em Veios Rotativos.

### Identificação dos elementos do grupo

Nome: \_\_\_\_\_ Nome: \_\_\_\_\_ Nome: \_\_\_\_\_

Número: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

### Dados

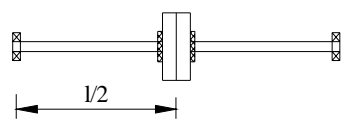
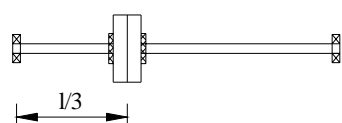
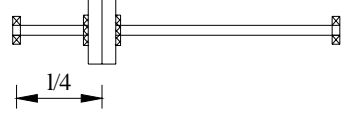
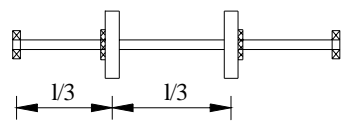
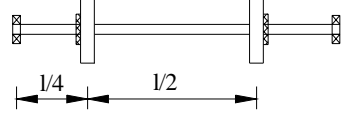
Comprimento do veio  $l = 470$  mm

Módulo de elasticidade do veio  $E = 2,2E5MPa$

Diâmetro do veio  $\phi = 6,1$  mm

Peso de cada massa  $M = 1$  kg

### Resultados obtidos

Posicionamento das massas	Resultados [r.p.m.]			Diferença percentual
	Subida	Descida	Teóricos	
	550-560	550-540	560	3,57%
	610-620	610-600	630	0,15%
	710-720	710-700	748	6,42%
	630-640	630-620	651	4,76%
	760-780	760-750	792	5,30%



## 5. Bibliografia

Miranda, A.A.S., “Textos de apoio à disciplina de Órgãos de Máquinas II”, componente teórica, 1999.

Hall, A.S., Holowenko, A.R. e Laughlin, H.G., Elementos Orgânicos de Máquinas – 2ª edição, McGraw-Hill, Brasil, 1976.

Rao, S., Mechanical Vibrations – third edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

Shigley, J.E., “Dinâmica das Máquinas”, Ed. Edgar Blücher Lda, S. Paulo, Brasil, 1969.