revisões de matlab

Exercício 1. Seja $x = 1.253$. Calcule as seguintes expressões matemáticas, usando o MATLAB (confronte com as respostas que deverá obter):

Expressão	**Resultado**
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$	0.1820
$x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$	0.6523
$\frac{\sqrt[3]{5+\cos 4x}}{\lvert \operatorname{sen} 3x \rvert}$	3.0107
$\operatorname{sen}^2(\pi x)$	0.5094

Exercício 2. O comando `v=linspace(0,100,401);` gera um vector `v` com 401 elementos (400 subintervalos) igualmente espaçados no intervalo $[0, 100]$. Determine:

a) o 46º elemento de `v`;

b) os três últimos elementos de `v`;

c) um vector com os elementos de ordem ímpar de `v`.

Exercício 3. Considere o vector `z=[10 20 30 40 50 60 70 80]`. Indique qual o resultado de cada um dos seguintes comandos do MATLAB (tente antecipar o resultado, antes de executar o respectivo comando):

```
a. >> u=z(1:2:7)      b. >> v=z(7:-2:1)      c. >> w=z([3 4 5 1])
d. >> z(1:2:7)=0      e. >> z(7:-2:1)=1:4    f. >> z(1:3)=[ ]
```

Exercício 4. Considere a matriz `A=[2 7 9 0; 3 0 5 6; 8 2 0 5]`. Obtenha e explique o resultado de cada um dos seguintes comandos do MATLAB :

```
a. >> A(1,[2 3])            b. >> A(:,[1 4])
c. >> A(2,:)                d. >> A(2,:)=5
e. >> A(:)                  f. >> A(1,:)=[ ]
g. >> B=A(:,[2 2 2 ])       h. >> C=repmat(A(:,2),1,3)
i. >> sum(A)                j. >> sum(A')
k. >> sum(A,2)              l. >> A(4:9)
m. >> [A; A(1:2,:)]         n. >> G(1:6)=A(:,2:3)
o. >> A(11)                 p. >> [l,c]=ind2sub(size(A),11)
q. >> indices=find(A)       r. >> [il,ic]=find(A)
s. >> flipud(A)             t. >> rot90(A)
```

Exercício 5. Defina (de forma simples) uma matriz A:

a) quadrada de ordem 5, com todos os elementos iguais a 3;

b) diagonal, de ordem 5, com todos os elementos da diagonal iguais a 4;

c) tridiagonal, de ordem 5, com elementos diagonais iguais a 4, elementos na sub-subdiagonal iguais a -1 e elementos na sobre-diagonal iguais a 1.

Exercício 6. Defina a matriz `A=pascal(4)` e indique os comandos para:

a) construir uma matriz `B` cujas colunas são as colunas pares de `A`;

b) calcular o inverso de cada elemento de `A`;

c) calcular a matriz inversa de `A`;

d) calcular o quadrado de cada elemento de `A`.

Exercício 7. Dados `x=[1 5 2 8 9 0 1]` e `y=[5 2 2 6 0 0 2]`, execute e explique o resultado dos seguintes comandos:

```
a. >> x>y        b. >> x==y        c. >> x<=y       d. >> x|y
e. >> x&y        f. >> x&(~y)      g. >> ~(x&y)     h. (~x)|(~y)
```

Exercício 8. Dados `x=1:10` e `y=[3 1 5 6 8 2 9 4 7 0]` execute e interprete o resultado dos seguintes comandos:

```
a. >> x(x>5)               b. >> y(x<=4)             c. >> x((x<2)|(x>=8))
d. >> y((x<2)|(x>=8))      e. >> y((x<2)&(x<8))      f. >> x(y<0)
```

Exercício 9. Tente encontar a função pré-definida do Matlab destinada a:

a) testar se um dado inteiro é ou não primo;

b) multiplicar dois polinómios (identificados com os vectores dos seus coeficientes, ordenados do coeficiente do termo de maior grau para o de menor grau);

c) indicar a data e hora do momento;

d) gerar uma matriz que é um quadrado mágico.

Exercício 10. Considere a função $f(x) = \text{sen}(2\pi x)$.

a) Use a função **linspace** para obter uma tabela de valores da função f em 100 pontos igualmente espaçados no intervalo $[0, 1]$. Use o comando **plot** para esboçar o gráfico da função.

b) Repita a alínea anterior, definindo uma função anónima e usando o comando **fplot**.

Exercício 11. Represente, num mesmo gráfico, as funções $f(x) = \text{sen}(x^2)$, $g(x) = x\cos(x)$, no intervalo $[0, 2\pi]$, assinalando ainda o ponto $P = (4, 5)$. Use cores e estilos diferentes para cada gráfico e escreva o texto 'ponto isolado' junto do ponto P.

Exercício 12. *a)* Escreva uma função `s=somaprogr(r,n)` para calcular a soma de uma progressão geométrica $1+r+r^2+\cdots+r^n$ para r e n variáveis. Teste a sua função para os valores de $r = 0.5$ e $n = 10, 20, 100$ e 1000.

b) Use a função **nargin** para permitir invocar a sua função dando apenas o valor de r, tomando, por defeito $n = 20$.

➽Exercício 13. Os números de Fibonacci são calculados de acordo com a seguinte relação:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{com } F_1 = F_2 = 1.$$

a) Escreva uma função `sF=sFibonacci(n)` destinada a encontrar a sequência dos primeiros n termos da sucessão de Fibonacci (n inteiro não negativo).

b) Obtenha os primeiros 15 números de Fibonacci.

c) Verifique (para esses números) a validade da seguinte fórmula: $F_n = \left[\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}\right]$, onde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o famoso *número de ouro* e $[x]$ designa o inteiro mais próximo de x (escolhendo-se o inteiro par, em caso de empate).

d) Considere os seguintes rácios $R_n := \frac{F_{n+1}}{F_n}$; calcule $R_n; n = 1, \ldots, 50$.

e) Sabendo que $\lim_{n\to\infty} R_n = \phi$, diga se os resultados obtidos ilustram ou não essa propriedade.

➽Exercício 14. Considere o seguinte algoritmo para o cálculo de π:

Gere n pontos $\{(x_k, y_k)\}$ cujas ordenadas são números aleatórios no intervalo $[0, 1]$ e determine o número m desses pontos que estão no interior do (primeiro quadrante) do círculo unitário; aproxime π por $\pi_n =: 4m/n$.

Note que π é o limite, quando $n \to \infty$, da sequência (π_n).

Escreva uma pequena *script* em MATLAB para implementar este algoritmo, para $n = 10^k; k = 1\ldots, 7$. Determine o erro para os diferentes valores de n e comente sobre a eficiência/não eficiência deste método de cálculo de π.

➽Exercício 15. O polinómio de Chebyshev de grau n é definido, para $x \in [-1, 1]$, por

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

É também sabido que os polinómios de Chebyshev satisfazem a seguinte relação de recorrência a três termos:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x$.

a) Usando a relação de recorrência anterior, escreva uma função `M=chebeval(x,N)` para calcular os valores de todos os polinómios de Chebyshev de grau não superior a N em todos os pontos de um vector coluna x. O resultado deverá, assim, ser uma matriz M de dimensão `length(x)`$\times(N+1)$.

b) Use a sua função para esboçar um gráfico com os polinómios de Chebyshev de graus 1 a 5.

c) Use a definição dos polinómios T_n e a função **fplot** para esboçar o gráfico dos polinómio T_4 e T_5.

➽Exercício 16. O chamado *problema dos aniversários* pode ser descrito do seguinte modo: Dado um grupo de n pessoas, qual é a probabilidade de que, pelo menos duas pessoas, façam anos no mesmo dia?

a) Escreva um programa `p=aniversarios(n)` que leia n (número de pessoas) e calcule, por simulação, a probabilidade p de duas ou mais pessoas em n fazerem anos no mesmo dia. Para tal, o programa deverá repetir 1000 vezes os passos seguintes:

- gerar aleatoriamente um vector de dimensão n de inteiros entre 1 e 365;
- verificar se, pelo menos duas datas, coincidem e, em caso afirmativo, incrementar um contador `cont` (inicializado como 0) de uma unidade;

No final, a probabilidade p deverá ser estimada pela fórmula $p = \frac{\texttt{cont}}{1000}$.

b) Teste o seu programa para $n = 5, 10, 20, 40$ e comente.

aritmética computacional

Exercício 1. Use a função **help** do MATLAB para obter mais informação sobre as funções pré-definidas **bin2dec** e **dec2bin** e use-as para:

a) obter a representação, na base decimal, dos seguintes números representados na base binária: $(1011011)_2$ e $(1111111110000)_2$;

b) obter a representação na base binária dos seguintes números representados do sistema decimal: 1325 e 128.

Exercício 2. *a)* Obtenha a representação binária dos números $x = 0.125$ e $y = 0.1$.

Nota: Se desejar, pode usar a função **Fr_dec2bin** disponibilizada na página da disciplina.

b) Relembrando que o MATLAB trabalha no sistema de numeração de norma IEEE 754 em formato duplo, isto é, em $F(2, 53, -1021, 1024)$, com arredondamento para o mais próximo (em caso de empate, arredondando para um número par), quais serão os números $\tilde{x} = fl(0.125)$ e $\tilde{y} = fl(0.1)$, se usar o MATLAB? O número $y = 0.1$ é arredondado por excesso ou por defeito?

Exercício 3. *a)* Escreva um pequena *script* para efectuar as seguintes operações:

$$D1 = \left(\sum_{k=1}^{80\,000} 0.125\right) - 10000, \qquad D2 = \left(\sum_{k=1}^{80\,000} 0.1\right) - 8000$$

b) Comente os resultados obtidos.

Exercício 4. Considere uma máquina com sistema de numeração $F = F(2, 6, -10, 10)$, com arredondamento usual.

a) Determine o número de elementos do conjunto F.

b) Determine o conjunto R_F dos números representáveis nesse sistema.

c) Seja $x = 0.4$. Mostre, justificando convenientemente, que $x \in R_F$, mas $x \notin F$. Indique o valor de $fl(0.4)$.

d) Qual é o número de máquina imediatamente superior ao número 128? Quanto vale, então, $fl(131)$?

Exercício 5. Efectue a seguinte sequência de instruções no MATLAB e explique os resultados obtidos:

```
>> (1+2^(-52))-1
>> (1+2^(-53))-1
>> 1+(2^(-53)-1)
>> 2^(-1074)
>> 2^(-1075)
>> 2^1023
>> 2^1024
```

Exercício 6. Considere as seguintes instruções em MATLAB:

```
>> x=1; k=0;  while 1+x>1, x=x/2, k=k+1, pause(0.01), end

>> x=1; k=0;  while x+x>x, x=2*x, k=k+1, pause(0.01), end

>> x=1; k=0;  while x+x>x, x=x/2, k=k+1,  pause(0.01), end
```

O que fará cada uma delas? Quais serão os dois últimos valores de `x` apresentados, em cada caso? E qual o último valor de `k`? Justifique e confirme os resultados.

ILUSTRAÇÃO DO PROBLEMA DO CANCELAMENTO SUBTRACTIVO

Exercício 7. Considere uma máquina com sistema de numeração $F = F(10, 4, -99, 99)$, com arredondamento usual, e seja dada a função

$$f(x) = x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}).$$

a) Calcule, em F, o valor de $y = f(1000)$.

Nota: Tenha em atenção que os resultados de todos os cálculos intermédios devem ser "arredondados" para números do sistema de numeração $F(10, 4, -99, 99)$.

b) Sabendo que o valor de y (com 8 a.s.) é 15.807437, como justifica o resultado obtido?

c) Sugira uma forma alternativa de resolver o problema em causa e calcule novamente, em F, o valor de y.

➽ Exercício 8. A média de uma amostra de n valores $x_i; i = 1, \ldots, n$, é dada por

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

sendo o desvio padrão amostral dado por

$$s = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \right)^{1/2}. \tag{1}$$

Para maior eficiência, é frequentemente sugerido o uso da seguinte fórmula alternativa para o cálculo do desvio padrão

$$s = \left(\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2 \right) \right)^{1/2}. \tag{2}$$

Escreva uma função, $[media, desvio1, desvio2] = \mathbf{mediaDesvios}(x)$, destinada a calcular a média e o desvio padrão de uma amostra, sendo usadas as duas fórmulas (1) e (2) para o cálculo do desvio padrão.

Teste a sua função para várias amostras $\{x_i\}$. Em particular, tente encontrar uma amostra para a qual as duas fórmulas do cálculo do desvio padrão produzam valores bastante diferentes. Justifique a diferença dos resultados.

interpolação e aproximação

Exercício 1. Obtenha ajuda sobre as funções **polyfit** e **polyval**; em particular, veja como poderá usar a função **polyfit** para construir o polinómio interpolador de um determinado conjunto de pontos.

Exercício 2. Considere a função $f(x) = \exp(x)$.

a) Obtenha uma tabela de valores de f em 11 pontos igualmente espaçados em $[0, 1]$.

b) Estime, por interpolação linear, quadrática e cúbica, usando valores da tabela anterior, os valores de exp(0.07), exp(0.32) e exp(0.93). Compare com os valores exactos e comente.

Exercício 3. Escreva uma função, $\mathbf{plotPolInt}(f, x)$, que

- aceite como argumentos:
  - uma dada função f;
  - um vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de n abcissas (distintas e pertencentes ao domínio da função);
- esboce o gráfico do polinómio P_{n-1}, onde P_{n-1} é o polinómio de grau $\leq n-1$ interpolador da função f nas abcissas x_i.

Exercício 4. Considere a chamada *função de Runge*, definida, no intervalo $[-1, 1]$, por

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$, seja P_{n-1} o polinómio interpolador de f em n pontos igualmente espaçados no intervalo $[-1, 1]$.

a) Calcule $P_4(0.07), P_4(0.23), P_4(0.78)$ e $P_4(0.98)$. Compare com os valores exactos de f nesses pontos.

b) Repita a alínea anterior, mas usando os polinómios P_{10} e P_{20}. Comente os resultados.

c) Esboce, num mesmo gráfico, os gráficos da função de Runge e dos polinómios P_2, P_4, P_{10} e P_{20}.

Exercício 5. Chamam-se *nós de Chebyshev* (de grau n) os n zeros do polinómio de Chebyshev de grau n, i.e. os pontos definidos por

$$z_k^{(n)} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right); k = 1, \dots, n.$$

a) Usando a função **plot**, represente graficamente, no intervalo $[-1, 1]$, os nós de Chebyshev de grau 11.

b) Considere o produto

$$\pi(x) = (x - x_1) \dots (x - x_{11})$$

com as duas escolhas de pontos seguintes:

(i)
$$x_k = -1 + (k-1)/5; k = 1, \dots, 11;$$

(ii)
$$x_k = z_k^{(11)}; k = 1, \dots, 11.$$

Esboce os gráficos de $|\pi(x)|$ para cada uma dessas escolhas de nós. Que observa?

Nota: De facto, pode mostrar-se que a escolha $x_k = z_k^{(n)}$ minimiza

$$\max_{x \in [-1,1]} |(x - x_1) \dots (x - x_n)|.$$

c) Seja f a função de Runge introduzida no exercício anterior e seja p_{n-1} o polinómio de grau $\leq n-1$ interpolador de f nos n nós de Chebyshev.

Determine os polinómios p_2, p_4, p_{10} e p_{20} e esboce o gráficos de f e de cada um desses polinómios.

d) Tendo em conta os resultados do exercício anterior, comente os resultados obtidos.

Exercício 6. Obtenha ajuda sobre a utilização das funções **spline**, **ppval** e **unmkpp**.

Exercício 7. Seja f, novamente, a função de Runge e seja s o spline cúbico sem-nó interpolador de f en 11 pontos igualmente espaçados no intervalo $[-1, 1]$.

a) Calcule $s(0.13)$, $s(0.45)$ e $s(0.92)$ e compare com os valores da função f nos mesmos pontos.

b) Determine a expressão das duas cúbicas que formam o spline s nos intervalos $[0, 0.2]$ e $[0.2, 0.4]$.

c) Esboce o gráfico de f e sobreponha-lhe o gráfico de s.

d) Repita as alíneas anteriores, mas sendo s o spline completo.

Nota: $f'(-1) = \frac{25}{338}$ e $f'(1) = -\frac{25}{338}$.

Exercício 8. **Interpolação inversa**

Se tivermos uma tabela de pontos (x_i, y_i) com $y_i = f(x_i)$ valores de uma função $y = f(x)$ nos nós x_i, e se soubermos que a função f é invertível, podemos trocar o papel das abcissas $x_1, \ldots, x_n$ e das ordenadas $y_1, \ldots, y_n$ e construir o polinómio interpolador dos valores $x_1, \ldots, x_n$ nos nós $y_1, \ldots, y_n$, ou seja, construir o polinómio interpolador da função inversa $x = f^{-1}(y)$. Diz-se, neste caso, que se trata de *interpolação inversa*.

a) Calcule, por interpolação inversa, o valor de x para o qual $\tan x = 0.4$, sendo dados os valores

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\tan x$	0.1003	0.2027	0.3093	0.4228	0.5463

b) Determine uma aproximação para o zero da função $f(x) = (4x+1)^3 - 343$ a partir dos valores de f nos quatro pontos $x = 0, 1, 2, 3, 4$, usando interpolação cúbica inversa. Tendo em conta que o zero de f é $x = 1.5$ comente sobre a qualidade da aproximação.

Exercício 9. Obtenha ajuda sobre as funções **interp1** e **interp1q**.

Exercício 10. Considere a função

$$f(x) = x^2 + \frac{10}{\operatorname{sen} x + 1.2}.$$

a) Forme uma tabela de valores de f em 6 pontos igualmente espaçados no intervalo $[-2, 8]$.

b) Esboce o gráfico de f, marcando os pontos da tabela.

c) Use a função **interp1q** para estimar, por interpolação linear segmentada, baseada na tabela da alínea *a)*, os valores de $f(-1)$, $f(1.5)$ e $f(5)$.

d) Sobreponha ao gráfico de f o gráfico do spline de grau 1 interpolador dos pontos da tabela.

Exercício 11. Considere os quatro pontos seguintes, dispostos sobre a circunferência unitária no primeiro quadrante:

$$P_k = (x_k, y_k), \quad x_k = \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{6}),\ y_k = \cos(\frac{k\pi}{6});\ k = 0, 1, 2, 3.$$

a) Seja S o spline cúbico sem-nó interpolador desses pontos. Esboce o gráfico de S e dos pontos dados.

b) Use a função **pchip** para esboçar o gráfico do polinómio cúbico segmentado de Hermite que passa pelo pontos dados.

c) Comente os resultados.

Exercício 12. Determine a recta dos mínimos quadrados que se ajusta aos dados da seguinte tabela:

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	2.04	4.12	5.64	7.18	9.00	12.04

Represente graficamente os pontos (x_i, y_i), com $i = 1, \ldots, 6$, e a recta de regressão.

➽Exercício 13. Para a resolução deste exercício, poderá fazer uso do *Basic Fitting* GUI[1] do MATLAB. Para tal, deverá começar por esboçar o gráfico dos dados e, de seguida, seleccionar **Tools** > **BasicFitting** dos menus que aparecem no cimo da janela com a figura.

Considere a seguinte tabela de valores:

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_i	0.2259	0.2157	0.2622	0.2226	0.3164	0.4439	0.6048	0.8468	1.0553	1.3299

a) Determine a recta de regressão para esses dados e o respectivo erro.

b) Esboce o gráfico dos pontos da tabela e da recta de regressão.

c) Considere os desvios

$$d_i := y(x_i) - y_i.$$

Represente graficamente os pontos (x_i, d_i) e diga qual lhe parece ser o grau adequado do polinómio dos mínimos quadrados a ajustar à tabela dada. Determine esse polinómio e esboce o seu gráfico, marcando também os pontos da tabela. Comente os resultados. Determine o erro para este polinómio.

d) Usando o polinómio da alínea anterior, estime o valor de $y(0.12)$.

e) Construa o polinómio interpolador dos pontos da tabela e esboce o seu gráfico. Usando esse polinómio, estime novamente o valor $y(0.12)$. Compare com o resultado da alínea anterior e comente.

f) Esboce o spline sem-nó interpolador dos pontos da tabela e use-o para estimar o valor de $y(0.12)$.

Exercício 14. Na tabela seguinte estão registados os resultados de uma dada experiência:

x_i	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y_i	5.83	4.04	2.79	2.09	1.43	1.10	0.568	0.520

a) Sabendo que e relação em causa é do tipo $y(x) = Ae^{Bx}$, com A e B constantes, determine o valor dessas constantes, usando mímimos quadrados.

b) Desenhe o gráfico da função obtida e dos pontos correspondentes aos valores da tabela.

[1] GUI≡ Graphical User Interface

➠Exercício 15. Na tabela seguinte estão registados os resultados de uma dada experiência:

x_i	1.10	1.35	2.23	2.49	2.56	2.78	2.81	3.29	3.81
y_i	18.05	13.83	4.97	3.81	3.62	2.91	3.06	2.83	1.66

a) Determine o polinómio interpolador dos pontos da tabela e esboce o seu gráfico. Use esse polinómio para estimar $y(3.2)$.

b) Sabendo que a relação em causa é do tipo $y(x) = A\,x^B$, estime o valor das constantes A e B, usando mínimos quadrados. Esboce o gráfico de y e marque os pontos da tabela. Estime, novamente, $y(3.2)$.

c) Qual das duas estimativas para o valor em $x = 3.2$ lhe parece mais adequada? Justifique.

➠Exercício 16. Na tabela seguinte regista-se a produção de citrinos, em Itália, em determinados anos:

Ano	1965	1970	1980	1985	1990	1991
Produção ($\times 10^5$ Kg)	17769	24001	25961	34336	29036	33417

a) Construa o spline cúbico sem-nó interpolador dos pontos da tabela, esboce o seu gráfico e marque, nesse gráfico, os pontos da tabela; use o spline para estimar os valores da produção nos anos de 1962, 1977 e 1992.

b) Repita a línea anterior para o caso do polinómio interpolador de todos os pontos da tabela.

c) Repita, novamente, para o polinómio dos mínimos quadrados de grau 3.

d) Retire o ponto $(1985, 34336)$ da tabela e repita todos os cálculos anteriores.

e) Sabendo que os valores da produção nos anos referidos foram de: 12380×10^5Kg, 27403×10^5Kg e 32059×10^5Kg, respectivamente, comente os resultados obtidos.

quadratura

Exercício 1. Considere o integral

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx.$$

a) Use a função **trapz** para calcular aproximações para π, usando a regra do trapézio composta, com $N = 2^n; n = 1, 2, \ldots, 10$, subintervalos.

b) Calcule o erro de cada uma das aproximações e e diga se os resultados confirmam a ordem de aproximação $\mathcal{O}(h^2)$ $(h = (b-a)/N)$ da regra do trapézio composta.

Exercício 2. *a)* Use a função **quad**, com valores da tolerância $\mathrm{tol}= 10^{-n}; n = 1, 2, \ldots, 8$, para obter de novo aproximações para π, estimando o integral do exercício anterior. Obtenha o erro em cada aproximação e calcule, também, o número de pontos onde a função integranda é calculada, em cada caso. Comente.

b) Repita, usando a função **quadl**.

Exercício 3. Considere o integral $I = \int_0^1 x^x dx$.

a) Tente calcular o valor exacto de I, recorrendo a um pacote de computação simbólica (por exemplo, o **Mathematica**). Que conclui?

b) Esboce o gráfico de $f(x) = x^x$ relativo ao intervalo $[0, 1]$.

c) Obtenha um valor aproximado para I, usando uma função adequada do MATLAB.

Exercício 4. Considere a função $f(x) = x^{10} - 10x^8 + 33x^6 - 40x^4 + 16x^2$.

a) Esboce o gráfico de f no intervalo $[-2, 2]$.

b) Use a regra do trapézio com $N = 2$ e $N = 4$ subintervalos para obter estimativas para $I = \int_{-2}^2 f(x)dx$. Como explica os resultados obtidos?

c) Quanto valeria o integral calculado pela regra de Simpson simples?

d) Use a função **quad** para estimar o valor de I.

e) Use as funções **polyint** e **polyval** para determinar o valor de I (com a precisão da sua máquina).

Exercício 5. *a)* Defina a função anónima

```
>> f=@(x) x.*log(x)
```

e calcule $f(0)$ e $f(\text{eps})$. Que conclui?

b) Use a função **ezplot** para esboçar o gráfico de f no intervalo $[0, 1]$.

c) Que aconteceria se tentasse usar a regra de Simpson para estimar $I = \int_0^1 f(x)dx$?

d) Use a função **quad** para estimar o integral da alínea anterior? Tem alguma dificuldade? Analise com cuidado a função **quad** para ver como o problema é contornado.

Exercício 6. A função **quadl** do MATLAB usa quadratura adaptativa baseada em regras que têm precisão superior à regra de Simpson (usada em **quad**) e que são uma combinação da chamada *regra de Lobatto com 4 pontos* com uma extensão de *Kronrod*.

A regra de Lobatto com quatro pontos usada em **quadl** é da forma

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx a_1 f(-1) + a_2 f(-x_1) + a_2 f(x_1) + a_1 f(1)$$

(isto é, os pontos extremos do intervalo são nós de quadratura). A simetria desta fórmula faz com que ela seja exacta para todos os polinómios da forma x^p com p ímpar. (Verifique).

A exigência de que a regra seja exacta para os polinómios x^0, x^2 e x^4 conduz a três equações não lineares nas três incógnitas a_1 a_2 e x_1.

a) Determine as três equações referidas e verifique que $x_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $a_1 = \frac{1}{6}$ e $a_2 = \frac{5}{6}$ são solução dessas equações.

b) Qual é o grau de precisão da regra de Lobatto com 4 pontos? Compare com a regra de Newton-Cotes com 4 pontos (regra dos três oitavos) e com a regra de Gauss-Legendre com 4 pontos.

c) Analise a função **quadl** e verifique onde aparecem, nessa função, os valores referidos na alínea *a)*.

Exercício 7. Escreva uma função em MATLAB, Q = $\mathbf{interpquad}(\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{metodo})$ destinada a estimar o integral de uma função da qual se conhece apenas uma tabela de valores.

Mais especificamente, a sua função deve:

- aceitar como argumentos:
  - dois vectores x e y (entradas da tabela de valores de uma certa função); as componentes de x devem estar ordenadas por ordem crescente.
  - metodo – uma string, designando o método a adoptar, que deverá ser: 'linear', 'spline', ou 'pchip'.
- dar como resultado: uma aproximação Q para o integral, entre $a = x(1)$ e $b = x(\text{end})$, da função tabelada; esta aproximação deve ser calculda integrando, com a função $\mathbf{quad}$, a função interpoladora dos valores de x e y construída com o método em causa (interpolação linear segmentada – no caso 'linear', spline cúbico sem-nó, no caso 'spline' ou interpolação segmentada cúbica de Hermite,no caso 'pchip').

Exercício 8. Use a função $\mathbf{interpquad}$ para estimar o integral de uma função da qual se conhece a seguinte tabela de valores:

x	1	2	3	4	5	6
y	9	8	11	7	5	2

Compare o valor obtido com o método 'linear' com o valor obtido usando a função $\mathbf{trapz}$. Como justifica o resultado?

Exercício 9. Estime $I = \int_0^1 e^x dx$, formando uma tabela de valores de $f(x) = e^x$ em 11 pontos igualmente espaçados no intervalo $[0, 1]$ e usando a função $\mathbf{interpquad}$, com os três métodos.

Exercício 10.

a) Obtenha os zeros do polinómio de Chebyshev de grau 5.

b) Sabendo que os pesos da fórmula de Gauss-Chebyshev com n pontos são dados por $a_i = \frac{\pi}{n}; i = 1, \ldots, n$, estime o valor do integral $I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos x dx$, usando a regra de Gauss-Chebyshev com 5 pontos.

c) Estime I usando uma função pré-definida do MATLAB.

Exercício 11. Considere o integral

$$I = \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx.$$

a) Determine os 4 zeros do polinómio de Laguerre de grau 4.

b) Use uma regra de Gauss-Laguerre com 4 pontos para estimar o valor de I.
Nota: Os valores dos pesos das fórmula de Gauss-Laguerre com 4 pontos são:

$$a_1 = 0.6031541043,\ a_2 = 0.3574186924,\ a_3 = 0.3888790851 \times 10^{-1},\ a_4 = 0.5392947055 \times 10^{-3}.$$

Sugestão: Faça uso da identidade

$$\frac{x}{e^x - 1} = e^{-x} \frac{e^x x}{e^x - 1}.$$

sistemas lineares

No que se segue, $T = T_n(d, b, c)$ designa uma matriz **tridiagonal** de ordem n, tal que

$$t_{ij} = \begin{cases} d, & \text{se } i = j, \\ b, & \text{se } i = j+1, \\ c, & \text{se } i = j-1. \end{cases}$$

Exercício 1. *a)* Construa, usando a função $\mathbf{diag}$, as matrizes $T_5(4, 1, 1)$, $T_5(2, -1, -1)$ e $T_5(1, 4, -4)$.

b) Escreva uma função em MATLAB, $\mathsf{M} = \mathbf{matTrid}(\mathsf{n}, \mathsf{d}, \mathsf{b}, \mathsf{c})$ destinada a construir a matriz $\mathsf{M} = T_n(d, b, c)$.

Exercício 2. Nas alíneas seguintes, use a função pré-definida $\mathbf{lu}$.

a) Obtenha a decomposição LU da matriz PA, onde

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 \\ 23 & 5 & 7 & 14 \\ 4 & 6 & 13 & 29 \\ 10 & 12 & 19 & 21 \end{pmatrix}$$

e P é uma matriz de permutação adequada (correspondente às escolhas de *pivot* usadas no algoritmo) e resolva, então, o sistema $Ax = b$, onde $b = (16, 3, 44, 42)^\mathsf{T}$.

b) Resolva o sistema $Ax = b$, com $A = T_5(1, 4, -4)$ e $b = (-4, -7, -6, -5, 16)^\mathsf{T}$.

c) Resolva o sistema $Ax = b$ onde $A = T_{10}(4, 1, 1)$ e $b = (1, 1, \ldots, 1)^\mathsf{T}$.

Exercício 3. Dada uma matriz não singular $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e supondo conhecida uma decomposição $A = LU$, como resolveria, de forma eficiente, cada um dos problemas seguintes?

a) Resolver a equação matricial $AX = B$, com B uma dada matriz de $\mathbb{R}^{n\times m}$.

b) Determinar as soluções dos sistemas $A^2x = b$ e $A^3x = b$.

c) Calcular $\alpha = c^\mathsf{T} A^{-1} b$, sendo $c \in \mathbb{R}^n$ dado.

Exercício 4. Gere uma matriz A aleatória, quadrada, de ordem $n = 500$, e um vector aleatório b de ordem $n = 500$. Fazendo uso das funções $\mathbf{tic}$ e $\mathbf{toc}$, determine o tempo necessário para resolver o sistema $Ax = b$, $1, 10, 50$ e 100 vezes, por cada um dos métodos seguintes:

a) usando $x = A\backslash b$;

b) usando $x = U\backslash(L\backslash b)$, calculando as matrizes L e U (usando a função $\mathbf{lu}$) apenas uma vez.

c) usando $x = A^{-1}b$, calculando a matriz inversa de A (usando a função $\mathbf{inv}$) apenas uma vez.

Exercício 5. *a)* Descreva de que forma se pode obter a matriz inversa de uma dada matriz A, coluna a coluna, resolvendo n sistemas da forma $Ax = b$.

b) Escreva uma função X = $\mathbf{myinv}$(A) destinada a calcular a inversa de uma dada matriz quadrada A. A sua função deve fazer uso da função $\mathbf{lu}$ apenas uma vez e, naturalmente, não deve fazer uso da função $\mathbf{inv}$ do MATLAB.

c) Teste a sua função calculando a inversa de algumas matrizes teste e comparando-a com as inversa dada pela função pré-definida $\mathbf{inv}$ do MATLAB.

Exercício 6. Contrariamente a versões anteriores, o MATLAB não dispõe agora de uma função $\mathbf{flops}$ para estimar o número de operações efectuadas numa determinada sequência de instruções, tendo o esforço computacional de ser "medido" através do tempo de execução.

O seguinte exemplo destina-se a testar a afirmação de que o número de operações envolvidas na resolução de um sistema triangular é $\mathcal{O}(n^2)$, onde n é a ordem da matriz do sistema.

Considere uma matriz quadrada de ordem n, triangular inferior, $L = (\ell_{ij})$, onde $\ell_{ii} = 100$ e $\ell_{ij} = 1$ para $i > j$ e seja $b = L * (1, 1, \ldots, 1)^\mathsf{T}$.

Fazendo uso das funções $\mathbf{tic}$ e $\mathbf{toc}$, determine o tempo necessário para resolver cada um dos sistemas sistema $Lx = b$, para $n = 100(10)1000$. Para a resolução dos sistemas, pode usar o comando habitual \ do MATLAB [2] ou a função $\mathbf{linsolve}$ com $\mathbf{opts.LT} = \mathbf{true}$ (a qual é um pouco mais eficiente, pois não perde tempo a testar se a matriz é triangular).

Esboce um gráfico com os pontos cujas abcissas são $n = 10(10)1000$ e cujas ordenadas são dadas pelos respectivos tempos de execução. Ajuste a esses pontos o polinómio dos mínimos quadrados de grau 2 e esboce também o gráfico desse polinómio.

[2] Note-se que $A\backslash b$ começa por testar se A tem alguma estrutura especial; no caso de A ser triangular, a resolução do sistema é feita por substituição directa ou inversa, conforme o caso.

Exercício 7. Faça um estudo idêntico ao do exercício anterior para testar que o cálculo do determinante de uma matriz quadrada A, usando a função pré-definida $\mathbf{det}$, envolve um número de operações de $\mathcal{O}(n^3)$ (correspondente à eliminação de Gauss).

Exercício 8. *a)* Use a função $\mathbf{chol}$ para testar se as seguintes matrizes são ou não definidas positivas:

$$P = \mathbf{pascal}(5),\ M = \mathbf{magic}(5),\ R = \mathbf{randn}(5),\ A = R'{*}R,\ B = R'{+}R,\ C = R'{+}R{+}\mathbf{eye}(5).$$

b) Fazendo uso da decomposição de Cholesky, resolva o sistema $Px = b$ onde $b = \mathbf{ones}(5,1)$. Como poderia resolver o sistema $Mx = b$, fazendo uso da decomposição de Cholesky?

Exercício 9. Considere as matrizes

$$A_\epsilon = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0.5+\epsilon \end{pmatrix}.$$

a) Calcule, recorrendo a funções pré-definidas, o número de condição de A_ϵ para $\epsilon = 10^{-k}; k = 1,2,3,4$ (relativamente à norma $\|\cdot\|_\infty$).

b) Resolva os sistemas

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 0.5001y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 0.4999y = 1 \end{cases},$$

compare as soluções obtidas e comente.

Exercício 10. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1.002 & 1 \\ 1 & 0.998 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 0.002 \\ 0.002 \end{pmatrix},$$

o qual admite como solução exacta $x = (1,-1)^\mathsf{T}$. Seja $\tilde{x} = (0.29360067817338, -0.29218646673249)^\mathsf{T}$ uma "aproximação" para a solução do sistema. Calcule o vector residual $r = A\tilde{x} - b$, compare $\|r\|_\infty$ com $\|x-\tilde{x}\|_\infty$ e comente.

Exercício 11. A seguinte sequência de instruções

```
>> densidade=nnz(A)/prod(size(A));
>>esparsidade=1-densidade;
```

dá-nos a medida da *esparsidade* de uma matriz A (cujo valor, para matrizes dispersas, deverá ser próximo de 1).

A *largura de banda* de uma matriz é a distância máxima dos elementos não nulos da matriz, da diagonal. Esta pode ser calculada do seguinte modo:

```
>> [i,j]=find(A);
>> larg_banda=max(abs(i-j));
```

Calcule a esparsidade e a largura de banda das seguintes matrizes: $\mathbf{eye}(10)$, $\mathbf{eye}(1000)$,$T_{10}(4,1,1)$, $T_{1000}(4,1,1)$,$\mathbf{rand}(10)$ e $\mathbf{rand(1000)}$.

Exercício 12. *a)* Construa a matriz $T_{10}(4,1,1)$ e, usando a função $\mathbf{sparse}$, converta-a na forma dispersa.

b) Use a função $\mathbf{spy}$ para visualizar o padrão de esparsidade da matriz obtida na alínea anterior.

c) Construa uma matriz correspondente à forma dispersa de $T_{10}(2,-1,-1)$, usando a função $\mathbf{spdiags}$.

Exercício 13. Seja $A = T_n(2,-1,-1)$ e $b = (1,2,\ldots,n)^\mathsf{T}$.

a) Resolva os sistemas $Ax = b$, para $n = 10, 10^2, 10^3$, pelos dois processos seguintes, calculando também o tempo gasto na resolução:

(i) Usando A e b na forma densa e usando o comando $\backslash$.

(ii) Construindo a matriz A na forma dispersa e usando de novo o comando $\backslash$ para resolver o sistema.

b) Que acontece se tentar resolver o sistema para $n = 10^4$, por cada um dos processos?

Exercício 14. Escreva uma função raioM $= \mathbf{raioMetIter}(\mathsf{A}, \mathsf{MET}, \omega)$ destinada a calcular o raio espectral da matriz de iteração de um dos métodos iterativos, Jacobi, Gauss-Seidel ou SR(ω), para uma certa matriz A.

A sua função deve

- aceitar como argumentos:
  - uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$;
  - uma *string* MET, que deverá ser : 'J', 'GS' ou 'SR', conforme o método pretendido;
  - um número real ω que é o valor do parâmetro de relaxação para o método SR (se a função for invocada apenas com 2 parâmetros de entrada, deverá considerar-se $\omega = 1$);
- dar como resultado: raioM, o raio espectral da matriz de iteração do método.

Na resolução de algumas alíneas dos exercícios seguintes deve fazer uso da função $\mathbf{metIter}$ disponível na página da disciplina.

Exercício 15. Seja $A = T_{10}(4, 1, 1)$.

a) Calcule o raio espectral das matrizes de iteração de Jacobi, Gauss-Seidel e SR(ω), com $\omega = 1.07$, para essa matriz A. Qual dos métodos convergirá mais rapidamente, se aplicado à solução de um sistema da forma $Ax = b$?

b) Considere $b = A * \mathbf{ones}(10, 1)$ e utilize cada um dos métodos referidos na alínea anterior, tomando como aproximação inicial o vector $x0 = \mathbf{zeros}(10, 1)$, considerando $tol = 10^{-10}$ e $kmax = 100$. Os resultados confirmam a conclusão da alínea anterior?

c) Verifique se a matriz A é definida positiva e, em caso afirmativo, use o método do gradiente sem pré-condicionamento para resolver de novo o sistema.

d) Pode provar-se o seguinte resultado:

Para matrizes tri-diagonais, o raio espectral da matriz de iteração de Gauss-Seidel é o quadrado do raio espectral da matriz de iteração de Jacobi.

Podemos, portanto, concluir que, para este tipo de matrizes, os métodos ou divergem ambos ou convergem ambos e, no último caso, a convergência do método de Gauss-Seidel é mais rápida do que a do método de Jacobi.

Verifique o resultado para as matrizes $T_{10}(4, 1, 1)$ e $T_{10}(1, 4, 4)$.

Exercício 16. Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 9x - 2y = 1 \end{cases}$$

a) Tente resolvê-lo pelos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel, considerando como aproximação inicial o vector nulo. (Use $tol = 10^{-6}$, $kmax = 100$).

b) Calcule o raio espectral das matrizes de iteração de Jacobi e Gauss-Seidel e comente.

c) Troque a ordem das duas equações e repita, então, os procedimentos da alínea *a)*. Comente os resultados.

Exercício 17. *a)* Execute a seguinte sequência de instruções

```
>> A=gallery('wathen',12,12); n=length(A);
>> b=ones(n,1);
>> spy(A)
```

b) Verifique se a matriz A é definida positiva. Resolva o sistema $Ax = b$ pelo método do gradiente, primeiramente sem pré-condicionamento e, de seguida, usando $P = \mathbf{diag}(\mathbf{diag}(A))$ como matriz de pré-condicionamento.

c) Calcule, usando $\mathbf{condest}$ estimativas para o número de condição das matrizes A e $P^{-1}A$ e comente.

Exercício 18. Seja A uma matriz tri-diagonal de ordem $n = 10000$ tal que $a_{ii} = 2$, se i é ímpar e $a_{ii} = 3$, se i é par e $a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = 1$; seja b o vector tal que $b_i = 10001 - i; i = 1, \ldots, 10000$. Resolva, da forma que achar conveniente, o sistema $Ax = b$.

equações não lineares

Exercício 1. Mostre que a equação $xe^{-x} - 0.25 = 0$ tem uma raiz no intervalo $[0,1]$ e outra no intervalo $[1,3]$. Determine, usando o método da bissecção, um valor aproximado para cada uma dessas raízes, com erro inferior a 0.05.

Nota: Faça primeiro algumas iterações sem recorrer ao programa $\mathbf{metBissec}$ e, depois, utilize esse programa.

Exercício 2. *a)* Determine um intervalo de amplitude 1 que contenha a raiz da equação $x \log x - 1 = 0$.

b) Estime, "a priori", o número de iterações a efectuar para, usando o método da bissecção, determinar uma aproximação para essa raiz com 3 algarismos significativos e calcule essa aproximação.

Exercício 3. Seja $\phi : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ uma aplicação contractiva, com constante de Lipschitz L e seja α o ponto fixo de ϕ em $I = [a,b]$. Seja (x_k) a sequência definida pelo método do ponto fixo com função iterativa ϕ, com $x_0 \in I$. Mostre que, se $L < \frac{1}{2}$, então, ao utilizarmos o critério de paragem $|x_k - x_{k-1}| < \delta$, teremos garantia de que a iteração x_k satisfará também $|\alpha - x_k| < \delta$. Que poderá acontecer se $\frac{1}{2} < L < 1$?

Exercício 4. Considere a equação

$$\log x + 2 = 0,$$

a qual, naturalmente, tem como única raiz $x = \exp(-2) \approx 0.13534$.

a) Mostre que as três funções seguintes podem ser consideradas como funções iterativas do método de ponto fixo para a determinação dessa raiz:

$$\phi_1(x) = x + \log x + 2, \quad \phi_2(x) = -\frac{1}{2}(x \log x), \quad \phi_3(x) = x\,(1 - \log x - 2)\,.$$

b) Como prevê que se comporte o método do ponto fixo associado a cada uma dessas funções iterativas (desde que x_0 seja razoavelmente perto de $x = 0.13534$)?

c) Use a função $\mathbf{metPontoFixo}$, com aproximação inicial $x_0 = 0.1$, para confirmar as suas previsões da alínea anterior.

d) Analisando cuidadosamente o vector $\mathbf{erros}$ fornecido pela função $\mathbf{metPontoFixo}$ (com os erros estimados nas diversas iterações), estime **numericamente** a ordem de convergência e a constante de convergência dos métodos que forem convergentes. Compare os valores obtidos com os valores esperados **teoricamente**.

Exercício 5. Considere a equação $x^2-1=0$. Use a função $\mathbf{metNewton}$, com $x_0=2$, para determinar uma aproximação para uma das suas raízes, usando o método de Newton. Confirme, numericamente, a ordem de convergência quadrática do método e o valor da constante de convergência (o qual é dado por $C=\left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right|$).

Exercício 6. Considere a equação

$$x^2-2x+1=0.$$

a) Considere a aplicação do método de Newton, com aproximação inicial $x_0=2$, para procurar a raiz da equação. Como explica a "lentidão" da convergência do método, neste caso? Qual é a ordem de convergência e quanto vale (teoricamente) a constante de convergência? Confirme, numericamente, os valores indicados para a ordem de convergência e para a constante de convergência.

b) Tente encontrar a solução da equação, usando a função pré-definida do MATLAB, $\mathbf{fzero}$ (pode usar uma aproximação inicial, ou indicar um intervalo que contenha a raiz). Como justifica as dificuldades encontradas?

c) O método da bissecção poderia ser usado para determinar a raiz? Porquê?

Exercício 7. Considere a função

$$f(x)=\mathsf{sign}(x-2)\sqrt{|x-2|},$$

onde sign denota a função definida por

$$\mathsf{sign}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

A função f tem, naturalmente, um único zero (simples) $x=2$.

a) Use o método de Newton com $x_0=3$ para estimar esse zero; repita com $x_0=1.5$ e $x_0=2.25$. Os resultados obtidos não contrariam a teoria da convergência do método de Newton? Porquê?

b) Esboce o gráfico de f e comente.

c) Use a função **fzero** do MATLAB para calcular o zero de f.

Exercício 8. Considere a função

$$f(x) = 0.5 - x\,\mathrm{exp}(-x^2),$$

a qual tem um único mínimo e um único máximo. Determine o mínimo e o máximo de f, usando:

a) o método de Newton;

b) a função **fminsearch**;

c) a função **fminbnd**.

Exercício 9. A curva definida por $y = x^3 - e^x$ tem dois pontos de inflexão. Use um método à sua escolha para os determinar.

Exercício 10. Considere o seguinte sistema não linear

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2 = 0 \\ x_1^2 + 4x_2^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

a) Efectue cinco iterações do método de Newton, com aproximação inicial $\mathbf{x}_0 = [1 \;\; 2]^\mathsf{T}$, para obter uma aproximação para a sua solução, $\mathbf{x} = [0 \;\; 1]^\mathsf{T}$.

b) Procure a solução do sistema, usando a função **fsolve**.

Exercício 11. Determine todas as raízes dos sistemas não lineares seguintes.

Nota: Pode usar a função **ImplicitPlot** do pacote **Graphics** do *Mathematica* para estimar, graficamente, as aproximações iniciais.

a)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ x + y - 2xy = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - x + y - 4 = 0 \\ 5x^2 - 6xy + 5y^2 + 16x - 16y + 12 = 0 \end{cases}$$

equações diferenciais ordinárias

Exercício 1. Use a função **metEuler** para resolver os PVI's abaixo indicados. Em cada caso, esboce o gráfico da solução analítica e marque as aproximações obtidas; use $N = 10$ e repita para $N = 20$.

a) $y'(t) = te^{3t} - 2y, \quad y(0) = 0; \quad t \in [0, 1]$
Solução analítica: $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$

b) $y'(t) = 1 + \frac{y}{t}, \quad y(1) = 2; \quad t \in [1, 2]$
Solução analítica: $y(t) = t \log t + 2t$

c) $y'(t) = 1 + \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2, \quad y(1) = 0; \quad t \in [1, 3]$
Solução analítica: $y(t) = t \tan(\log t)$

d) $y'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, \quad y(1) = -1; \quad t \in [1, 2]$
Solução analítica: $y(t) = -1/t$

Exercício 2. Considere o seguinte problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y' = ty^2, \ t \in [0, 1], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

a) Usando a função **metEuler**, calcule aproximações para y(1.0), usando, sucessivamente, $N = 2^k; k = 1, \ldots, 10$.

b) Sabendo que a solução exacta do problema é dada por $y(t) = \frac{2}{2-t^2}$, diga se os seus resultados ilustram a ordem de convergência global do método.

c) Repita, usando as funções **metRK2** e **metRK4**, as quais implementam o método de Runge-Kutta de 2ª ordem e o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, respectivamente.

Exercício 3. *a)* Obtenha ajuda sobre as funções **ode23** e **ode45**. Obtenha também ajuda sobre a função **odeset**.

b) Use a função **ode23** (com os valores das tolerâncias para o erro escolhidos por defeito) para determinar aproximações, no intervalo $[0, 3]$, para a solução do seguinte PVI:

$$y'(t) = -y(t) - 5e^{-t}\text{sen}5t; \quad y(0) = 1.$$

Esboce o gráfico da solução analítica do problema, dada por $y(t) = e^{-t}\cos 5t$, e da solução aproximada.

c) Repita, usando a função $\mathbf{ode45}$, escolhendo uma tolerância para o erro (relativo) de 10^{-8} e calculando aproximações nos pontos $t_k = k/4$; $k = 0, 1, \ldots, 12$.

Exercício 4. Use a função $\mathbf{ode23}$ para determinar aproximações, no intervalo $[0, 1]$, para a solução do seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y''(t) = t\,y, \\ y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

Esboce o gráfico da solução aproximada.

Exercício 5. O movimento de um pêndulo rígido simples pode ser descrito pela chamada *equação de Mathieu* (ou *do pêndulo*)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta = 0,$$

onde θ é o ângulo que o pêndulo faz com a vertical, g é a aceleração da gravidade e ℓ é o comprimento do pêndulo.

a) Escreva a equação do pêndulo como um sistema de duas equações de primeira ordem.

b) Considere um pêndulo de comprimento $\ell = 9.8$ e sujeito às seguintes condições iniciais

$$\theta(0) = 2; \quad \frac{d\theta}{dt}(0) = 0.$$

Use a função $\mathbf{ode45}$ para encontrar aproximações para a solução do PVI correspondente, no intervalo $[0, 10]$. Esboce o gráfico da solução e também a chamada *órbita no espaço de fases*, isto é, o gráfico dos pontos $(\theta(t), \frac{d\theta}{dt}(t))$.

c) Repita, considerando as condições iniciais:

$$\theta(0) = 2; \quad \frac{d\theta}{dt}(0) = -1 \qquad \text{e} \qquad \theta(0) = 2; \quad \frac{d\theta}{dt}(0) = 1.$$

Exercício 6. Considere o PVI

$$\begin{aligned} &y'(t) = y^2 - y^3 \\ &y(0) = \delta; \quad t \in [0, 2/\delta]. \end{aligned}$$

a) Considere $\delta = 0.1$. Obtenha soluções para o problema, usando as funções $\mathbf{ode45}$ e $\mathbf{ode23s}$, com as seguintes opções:

```
>> options=odeset('RelTol',1e-4,'Stats','on');
```

Em cada caso, faça um gráfico da solução obtida e indique o número de pontos usados para esboçar o gráfico.

b) Repita, para $\delta = 0.001$.

c) Comente os resultados obtidos.

teste final

20 junho 2009

Exercício 1. Na tabela seguinte regista-se a produção de citrinos, em Itália, em determinados anos:

Ano	1965	1970	1980	1985	1990	1991
Produção ($\times 10^5$ Kg)	17769	24001	25961	34336	29036	33417

a) Construa a função spline cúbica sem-nó interpoladora dos pontos da tabela, esboce o seu gráfico (relativo ao intervalo $[1962, 1992]$) e marque, nesse gráfico, os pontos da tabela.

b) Use a função anterior para estimar os valores da produção nos anos de 1962, 1977 e 1992.

c) Retire o ponto $(1985, 34336)$ da tabela e repita os cálculos anteriores.

d) Sabendo que os valores da produção nos anos referidos foram de: 12380×10^5Kg, 27403×10^5Kg e 32059×10^5Kg, respectivamente, comente os resultados obtidos.

Exercício 2. Seja A a matriz de Pascal de ordem 6.

a) Determine a decomposição de Cholesky de A e use-a para:

(i) Resolver o sistema $Ax = b$, onde $b = (1, 2, \ldots, 6)^\mathsf{T}$.

(ii) Calcular o determinante de A.

(iii) Calcular a terceira coluna da inversa de A.

b) Tente resolver, de novo, o sistema $Ax = b$, usando o método de Gauss-Seidel, o método SR com o valor do parâmetro $\omega = 1.2$ e o método do gradiente (sem pré-condicionamento), registando o número de iterações efectuadas, em cada caso.
Nota: Use $tol = 10^{-5}$ e $kmax = 500$.

c) Calcule o raio espectral das matrizes de iteração de Gauss-Seidel e de SR(ω), bem como o número de condição de A, e comente.

Exercício 3. Seja f uma função suficientemente diferenciável na vizinhança de um determinado ponto r tal que

$$f(r) = f'(r) = 0, \quad f''(r) \neq 0.$$

Nestas condições, como sabe, o método de Newton (com x_0 suf. próximo de r) converge apenas linearmente para r. No entanto, a seguinte variante do método

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; k = 0, 1, 2, \ldots$$

tem convergência (no mínimo, quadrática). Considere a equação

$$10x^3 - 10x^2 + 2.5x = 0.$$

a) Tendo em atenção que se trata de uma equação polinomial, encontre as suas raízes.

b) Use o método de Newton para determinar a raiz positiva da equação anterior e verifique, numericamente, que a convergência é apenas linear.

c) Modifique a função **metNewton** para construir uma função que implemente o método acima referido para lidar com raízes duplas. Use, então, essa função para procurar a raiz positiva da equação anterior e confirme que a convergência quadrática é, de facto, recuperada.

Exercício 4. Considere o seguinte sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ e^x - y = 1.5 \end{cases}$$

o qual admite duas soluções. Determine (aproximações) para essas soluções, usando um método à sua escolha.

Exercício 5. Considere o seguinte método (do tipo Runge-Kutta)

$$\begin{array}{l} y_1 = \alpha \\ \text{Para } k = 1, \ldots, N: \\ \quad K_1 = hf(t_k, y_k), \\ \quad K_2 = hf(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_1}{2}), \\ \quad K_3 = hf(t_k + h, y_k + 2K_2 - K_1), \\ \quad y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \end{array}$$

para resolver um PVI da forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \\ y(a) = \alpha, \end{cases}$$

onde $t_k = a + (k-1)h; k = 1, \ldots, N+1, \; h = (b-a)/N.$

a) Modificando convenientemente a função $\mathbf{metRK2}$, escreva uma função em MATLAB que implemente este método.

b) Considere o seguinte PVI

$$\begin{cases} y'(t) = \operatorname{sen} t + y(t), \; t \in [0,1] \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

(i) Use o método referido para determinar aproximações para $y(1)$, usando valores do passo h dados por $\left(\frac{1}{2}\right)^k$, para $k = 1, 2, \ldots, 9$.

(ii) Sabendo que a solução analítica do problema é

$$y(t) = \frac{1}{2}(e^t - \operatorname{sen} t - \cos t)$$

calcule os erros cometidos em cada uma das aproximações.

(iii) Efectue os cálculos necessários para tentar determinar (numericamente) qual deverá ser a ordem do método em causa e indique qual é essa ordem.