Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria Gorete Pires Branco

Tarefas de exploração e investigação no ensino e na aprendizagem da Geometria: Uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade

Junho de 2011

Tarefas de exploração e investigação no ensino e na aprendizagem da Geometria: Uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade

Maria Gorete Pires Branco

UMinho | 2011

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria Gorete Pires Branco

Tarefas de exploração e investigação no ensino e na aprendizagem da Geometria: Uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade

Dissertação de Mestrado
Mestrado em Ciências da Educação
Área de Especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática

Trabalho realizado sob a orientação da
Doutora Maria Helena Martinho

Junho de 2011

DECLARAÇÃO

Nome: Maria Gorete Pires Branco

Endereço electrónico: gorete.branco@sapo.pt

Telefone: 965580998

Número do Bilhete de Identidade: 8601897

Título da dissertação: Tarefas de exploração e investigação no ensino e na aprendizagem da Geometria: Uma experiência com alunos do 10.° ano de escolaridade

Orientadora: Doutora Maria Helena Martinho

Designação do Mestrado: Mestrado em Ciências da Educação, Área de Especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática

Universidade do Minho, 30 de Junho de 2011

Assinatura: ____

(Maria Gorete Pires Branco)

AGRADECIMENTOS

À Doutora Helena, pela sua orientação e disponibilidade que sempre demonstrou, pelo incentivo, pelas suas sugestões e críticas, fundamentais no desenvolvimento e concretização deste trabalho.

Aos professores do curso de mestrado por tudo que me ensinaram.

À Direcção da Escola, à professora e aos alunos que participaram no estudo, pela colaboração e pela disponibilidade demonstrada.

Aos meus pais e irmãs pela compreensão e apoio.

Ao Carlos, pela permanente ajuda em tudo que precisei e pela paciência para me escutar nos momentos difíceis.

Ao Alexandre e à Marta pela presença e pelo apoio em todos os momentos.

Tarefas de exploração e investigação no ensino e na aprendizagem da Geometria: Uma experiência com alunos do 10.º ano de escolaridade

Maria Gorete Pires Branco
Mestrado em Ciências da Educação, Área de Especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática
Universidade do Minho, 2011

RESUMO

O presente estudo procura compreender como é que os alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade, trabalhando em pequenos grupos e realizando actividades com tarefas de exploração e investigação, desenvolvem a capacidade de comunicação e superam dificuldades na aprendizagem da Geometria. Com este objectivo, pretende-se dar resposta às seguintes questões de investigação: (1) Que dificuldades manifestam os alunos de uma turma do 10.º ano, e como evoluem, na actividade desenvolvida em tarefas de exploração e investigação no âmbito da Geometria? (2) Quais os contributos da discussão em pequeno grupo e em grande grupo para superar dificuldades sentidas pelos alunos de uma turma do 10.º ano, em Geometria? (3) Quais os contributos da realização de tarefas de exploração e investigação, resolvidas em pequenos grupos, para o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática dos alunos em Geometria?

A metodologia adoptada neste estudo é de natureza qualitativa e insere-se no paradigma interpretativo, estruturando-se em dois estudos de caso que correspondem a dois grupos de alunos. Os dados foram recolhidos através da observação participante, da análise documental e de entrevistas de grupo.

Os resultados sugerem que os alunos revelam dificuldades em entender alguns dos processos inerentes à actividade investigativa. A realização continuada deste tipo de actividade contribuiu para um entendimento progressivo destes processos, sendo a formulação de questões, aquele a que os alunos dão menor importância. A discussão em pequeno grupo ajudou os alunos a superar dificuldades na aprendizagem da Geometria, em situações que envolviam conceitos e raciocínios matemáticos. Contudo, a discussão em grande grupo tornou-se fundamental na maior parte das situações, cujos raciocínios se revelavam mais complexos. Os alunos melhoraram a sua capacidade de comunicar matematicamente, sobretudo no que se refere à explicação e argumentação de ideias e processos de raciocínio.

Palavras-chave: Tarefas de exploração e investigação; Dificuldades na aprendizagem da Geometria; Comunicação matemática.

Exploration and investigation tasks on teaching and learning in Geometry: An experience with 10th grade students
Maria Gorete Pires Branco
Master of Arts, Supervision in Mathematics Education
Minho University, 2011

ABSTRACT

This study seeks to understand how students of a 10th grade class, working in small groups, accomplish activities with exploration and investigation tasks, develop communication skills and overpass difficulties on learning Geometry. With this aim, one seeks to answer the following research questions: (1) What kind of difficulties do 10th grade class students have, how do they evolve on accomplishing exploration and investigation activities in Geometry? (2) How does discussing, not only in small but also in big groups, help to overpass difficulties felt by students of a 10th grade class in Geometry? (3) Which are the contributions of the tasks of exploration and investigation accomplished in small groups, to the development of student's mathematical communication skills in Geometry?

This study, adopted a methodology of qualitative nature following the interpretative paradigm. It is structured in two case-studies corresponding two groups of students. Data has been collected through participative observation, documental analysis and group interviews.

The results suggest that students show difficulties in understanding some processes inherent to the investigation activity. The continuous accomplishment of this kind of activity contributed for a progressive understanding of these processes. Note that asking questions is the aspect the students give less importance. Small group discussion helped the students to overpass difficulties in learning Geometry, in situations that involved concepts and mathematical reasoning. However, the discussion in big group became fundamental in most of the situations where reasoning was more complex. The students improved their mathematical communicative capacity, mostly in what concerns the explanation and argumentation of ideas and reasoning processes.

Keywords: Exploration and investigation tasks; Difficulties in learning Geometry; Mathematical communication.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

As aceleradas mudanças na sociedade exigem que os cidadãos sejam cada vez mais criativos e versáteis, dotados de autonomia e iniciativa para enfrentarem e resolverem problemas. Esta exigência implica que a escola não se limite a proporcionar os requisitos mínimos para uma inserção rápida no mercado de trabalho, ou para o acesso ao ensino superior, mas que prepare os jovens para se inserirem de modo criativo, crítico e interveniente numa sociedade, em que a capacidade de descortinar oportunidades, a flexibilidade de raciocínio, a adaptação a novas situações e a capacidade de interagir e cooperar são qualidades indispensáveis (Ponte, 1997).

A educação matemática ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificação de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios, pode contribuir de forma positiva, para a formação educacional global da generalidade dos cidadãos. Mas, essas metodologias pressupõem que o professor como agente dinamizador e regulador do processo ensino-aprendizagem crie situações motivadoras, que envolvam os alunos na construção do seu conhecimento e na apropriação de novas ideias e conceitos, através de processos de reflexão sobre a actividade que vão desenvolvendo.

Neste capítulo, reflecte-se ainda sobre a problemática da investigação, é apontado o objectivo do estudo bem como as questões de investigação que o orientam. Posteriormente, são feitas algumas considerações acerca da relevância do estudo e por fim é apresentada uma síntese da estrutura organizativa da dissertação.

1.1. Problema e questões de investigação

Hoje é pedido ao professor que faça uma gestão mais flexível do currículo, que atenda às características dos alunos e às indicações dos documentos curriculares oficiais. De acordo com o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2007), as decisões que o professor toma na sala de aula sobre como proporcionar a todos os alunos experiências com conteúdos matemáticos importantes e a forma como concilia os diferentes interesses, talentos e experiências dos alunos são essenciais para facultar a todos o acesso à Matemática. Por isso, é importante saber o que se pode esperar dos alunos, as dificuldades que apresentam na realização das tarefas, bem como os diferentes desempenhos e procedimentos de resolução da actividade que pode encontrar numa mesma turma. Para tal, deve reflectir sobre as estratégias e tarefas que propõe aos seus alunos, criando situações motivadoras e que contribuam para desenvolver neles, as capacidades intelectuais necessárias para participarem de forma consciente e produtiva na vida da sociedade.

A motivação dos alunos e as suas atitudes face à Geometria, assim como as dificuldades e o insucesso dos mesmos na aprendizagem deste tema, continuam a ser uma preocupação para professores e investigadores. A Geometria, é no entanto, uma área particularmente propícia para um ensino baseado na resolução de situações de natureza exploratória e investigativa e em actividades de construção, de manipulação e de resolução de problemas (Abrantes, 1999). Estas situações proporcionam aos alunos um maior envolvimento nas suas aprendizagens e fornecem um bom contexto para que eles compreendam a necessidade de justificar as suas afirmações ao expressar o seu raciocínio junto do professor e dos colegas (Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira & Varandas, 1999).

A actividade investigativa proporciona momentos de confronto de ideias, onde se estabelecem interacções entre os alunos e entre estes e o professor, que são fundamentais para o desenvolvimento de capacidades de comunicação e argumentação (Segurado, 1997). De acordo com o NCTM (1994) uma excelente forma de levar os alunos a fazer explorações, desenvolver argumentos matemáticos, formular conjecturas, validar soluções e encontrar conexões entre diferentes ideias matemáticas é propondo trabalho de grupo.

Com este estudo pretende-se, assim, compreender como é que os alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade, trabalhando em pequenos grupos e realizando actividades com tarefas de exploração e investigação, desenvolvem a capacidade de comunicação matemática e superam dificuldades na aprendizagem da Geometria.

No contexto da problemática referida, estabeleceram-se três questões de investigação para o estudo:

1. Que dificuldades manifestam os alunos de uma turma do 10.º ano, e como evoluem, na actividade desenvolvida em tarefas de exploração e investigação no âmbito da Geometria?
2. Quais os contributos da discussão em pequeno grupo e em grande grupo para superar dificuldades sentidas pelos alunos de uma turma do 10.º ano, em Geometria?
3. Quais os contributos da realização de tarefas de exploração e investigação, resolvidas em pequenos grupos, para o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática dos alunos em Geometria?

1.2. Relevância do estudo

A disciplina de Matemática é considerada por muitos alunos "a disciplina difícil" do seu plano curricular, e de facto, as estatísticas internacionais e nacionais revelam que os resultados obtidos pelos nossos alunos, na disciplina de Matemática, e em particular no tema de Geometria são bastante fracos. No segundo ciclo de estudos internacionais, o estudo PISA 2003 (Programme for International Student Assessment), com preponderância do domínio da literacia matemática, em que as quatro áreas de conteúdo estabelecidas na avaliação foram: Geometria, Álgebra, Aritmética, Probabilidades e Estatística, revelou que a situação média dos estudantes portugueses sobre literacia matemática era preocupante. A literacia matemática no PISA foi definida como "a capacidade de um indivíduo identificar e compreender o papel que a matemática desempenha no mundo, de fazer julgamentos bem fundamentados e de se envolver na resolução matemática das necessidades da sua vida, enquanto cidadão construtivo, preocupado e reflexivo" (Gabinete de Avaliação Educacional [GAVE], 2004a, p. 7).

O valor da média portuguesa, tanto na escala global como nas subescalas de literacia matemática, situava–se abaixo da média da OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico) e muito distanciado dos valores dos países que obtiveram as melhores classificações médias. Apesar de:

> Em todas as áreas de conteúdo, as percentagens de alunos identificados com baixo nível de literacia serem sempre superiores às médias da OCDE, o afastamento é maior nas subescalas de *espaço e forma,* que tem a ver com a área da Geometria (38% em Portugal *versus* 25% na OCDE) (GAVE, 2004b, p. 16).

A nível nacional, os resultados dos exames, quer do terceiro ciclo do ensino básico, quer do ensino secundário, no que diz respeito à disciplina de Matemática, nos últimos anos têm registado algumas melhorias. Porém, o mesmo não se tem verificado em relação aos resultados do Projecto Testes Intermédios na disciplina de Matemática A, do 10.º ano de escolaridade, os quais têm ficado abaixo da classificação positiva. A média nacional dos testes que incluem essencialmente conteúdos de Geometria, nos anos lectivos de 2007/2008, 2008/2009 e 2009/2010 foi de 8,5; 7,9 e 9,3 valores, respectivamente (GAVE, 2008, 2009, 2010).

Estes resultados levam-nos a questionar: Como poderá ser invertida esta situação? Quais são as práticas escolares que estão em causa, em relação ao ensino da Matemática e em particular ao da Geometria e, na generalidade dos alunos, ao insucesso e desinteresse? Será que as nossas práticas pedagógicas promovem e valorizam o trabalho de grupo, a realização de tarefas de exploração e de investigação, a resolução de problemas, a discussão e a reflexão crítica? Muitas outras questões poderiam ser levantadas para tentarmos perceber o porquê do insucesso na disciplina de Matemática e em particular no tema de Geometria.

O programa de Matemática A do 10.º ano, do Departamento do Ensino Secundário (DES, 2001), a Associação de Professores de Matemática (APM, 1998, 2009) e o NCTM (1991, 2007) recomendam, que os alunos estejam envolvidos em actividades que promovam o desenvolvimento do pensamento matemático, que lhes permitam colocar e responder a questões como: "Porquê?"; "O que acontece se…"; "Não existe outro processo…?" e não apenas na aprendizagem mecânica de regras e procedimentos. E salientam que o recurso à resolução e formulação de problemas e a realização de tarefas de natureza exploratória e de investigação, pelo dinamismo que introduzem na aula, contribuem de forma positiva, para o desenvolvimento nos alunos de capacidades de raciocínio, de comunicação e argumentação e de iniciativa.

Vários estudos têm mostrado que as investigações matemáticas constituem uma poderosa forma de construir conhecimento (Abrantes, 1999; Oliveira, Segurado & Ponte, 1999; Rocha, 2003; Segurado, 1997). Martins, Maia, Menino, Rocha e Pires (2002), afirmam que "as investigações podem proporcionar um maior envolvimento efectivo dos alunos resultante da sua maior confiança no trabalho matemático e promover, assim, concepções e ideias mais positivas sobre a matemática e sobre a sua aprendizagem" (p. 78).

Estes autores afirmam, ainda, que:

> As tarefas de exploração e investigações permitem que os alunos façam pequenas cadeias de raciocínio dedutivo, que fundamentem em evidências empíricas e em factos previamente aceites. Por outro lado, permitem a elaboração sistemática de conjecturas, que podem ser discutidas com base em argumentação consistente (p. 64).

As tarefas de natureza exploratória e investigativa representam, assim, boas oportunidades para pôr os alunos a debater questões, a expor os seus raciocínios, a estabelecer conjecturas, a usar e aplicar a Matemática. O trabalho com este tipo de tarefas implica processos de descoberta que são, de acordo com alguns autores, potenciados pelo trabalho de grupo. A investigação tem sugerido que o trabalho de grupo pode ajudar a promover mais reflexão e mais discussão e que pode ter efeitos positivos na compreensão de conceitos, na comunicação e na motivação dos alunos (Matos & Serrazina, 1996).

Segundo Abrantes (1999), a Geometria fazendo apelo à intuição e à visualização e recorrendo à manipulação de materiais torna-se, dentro da Matemática escolar, uma área propícia a um ensino baseado fortemente na realização de tarefas de exploração e investigação:

> Na Geometria, há um imenso campo para a escolha de tarefas de natureza exploratória e investigativa, que podem ser desenvolvidas na sala de aula, sem necessidade de um grande número de pré-requisitos e evitando, sem grande dificuldade, uma visão da Matemática centrada na realização de algoritmos e em "receitas" para resolver exercícios-tipo (...). As actividades investigativas em Geometria conduzem rapidamente à necessidade de se lidar com diversos aspectos essenciais da natureza da própria Matemática. Formular e resolver problemas, fazer conjecturas, testá-las, validá-las ou refutá-las, procurar generalizações, comunicar descobertas e justificações, tornam-se processos naturais. Ao mesmo tempo, surgem oportunidades para se discutir o papel das definições e para se examinar as consequências de se adoptar uma ou outra definição, assim como para se compreender a natureza e o valor da demonstração em Matemática (Abrantes, 1999, pp. 155-156).

A opção pelo tema de Geometria do ensino secundário deveu-se ao gosto pessoal pela Geometria e pela sua aprendizagem e ao facto de durante os últimos treze anos que leccionei no ensino secundário, me ter apercebido que os alunos revelam muitas dificuldades na compreensão dos conceitos geométricos, muitas vezes relacionadas com a sua capacidade de visualização espacial. Outro factor que contribuiu para a escolha deste tema foi o facto de reunir algumas características propícias para a realização de tarefas de natureza exploratória e investigativa, de construção e manipulação e para a exploração de programas computacionais, nomeadamente *software* de Geometria Dinâmica. O que vai ao encontro de algumas recomendações tanto do NCTM (2007), como do programa de Matemática A do 10.º ano, que fazem referências explícitas ao uso do computador e à realização de tarefas de natureza exploratória e investigativa e destacam a importância da selecção de tarefas diversificadas a propor aos alunos:

> As quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o estudante a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para reforço das atitudes de autonomia e de cooperação (...). Os estudantes devem ter oportunidade de trabalhar directamente com um computador (...). A exploração de programas computacionais pode ajudar eficazmente o estudante a desenvolver a percepção dos objectos do plano e do espaço e a fazer conjecturas acerca de propriedades de objectos geométricos (DES, 2001, pp. 10-24).

Actualmente existem muitos tipos de *software* de Geometria Dinâmica e a Geometria pode retirar grandes vantagens do seu uso. Entre outros temos o *Geometer's Sketchpad* (GSP), e o *Cabri 3D*, que apresentam enormes potencialidades e facilidade de utilização. Estes suportes tecnológicos permitem o desenho, a construção e manipulação de objectos geométricos e a descoberta de novas propriedades desses objectos, através da investigação das relações que se mantêm invariantes (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003).

Segundo Veloso (1998), o *software* de Geometria Dinâmica, nomeadamente o GSP e o *Cabri* pelo seu carácter dinâmico próprio tornam-se "instrumentos poderosos na resolução de problemas e nas actividades de exploração, investigação e descoberta em Geometria e na Matemática em geral" (p. 91). Também Gutiérrez (1996) realça a importância da utilização do computador com *software* específico no ensino e na aprendizagem da Geometria, e em particular na Geometria no espaço. Os alunos poderão ver poliedros e outros sólidos representados em mais posições diferentes na tela do que nos livros, e consequentemente "ganharão uma experiencia mais rica (...), e em particular irão melhorar significativamente a sua capacidade de criar imagens mentais dinâmicas" (p. 11). Por exemplo, um aluno que só tenha visto a imagem nos livros didácticos, dificilmente irá reorganizar o desenho da figura 1 como uma representação de uma pirâmide ou de um octaedro. No entanto, ao rodar estes sólidos num computador, esta posição espacial aparece como parte de um contínuo de imagens, e torna-se nesse sentido, um conjunto de imagens vinculadas mentalmente.

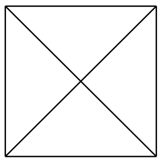


Figura 1. Um quadrado com as suas diagonais ou uma representação de uma pirâmide ou de um octaedro.

Gutiérrez (1996) considera que os computadores podem desempenhar um papel relevante para ajudar os alunos a adquirir e desenvolver capacidades de visualização em contexto de Geometria espacial.

Vários estudos, como por exemplo, os de Ferreira (2005) e Junqueira (1995) com alunos do 9.º ano de escolaridade, sobre o ensino e a aprendizagem de Geometria em Ambientes Geométricos Dinâmicos (AGD), mostraram que a realização de tarefas, com auxílio do computador e *software* adequado, pode contribuir para um processo de ensino-aprendizagem mais rico, devido ao seu poder motivador e às suas potencialidades para o ensino da Geometria, em que a iniciativa e descoberta são predominantes. Segundo estas autoras os alunos mostraram maior interesse, maior empenho, maior autonomia e confiança. Também Idris (2009), no seu estudo com alunos da Malásia, de 14 e 15 anos de idade, concluiu que o uso do GSP aumentou o interesse dos mesmos na aprendizagem da Geometria, reforçou a sua compreensão e ajudou-os a progredir dentro de um nível de pensamento geométrico de van Heile ou para um nível superior.

A utilização de materiais manipuláveis no ensino e na aprendizagem da Geometria é também uma das indicações metodológicas apontadas em vários documentos (DES, 2001; NCTM, 1991, 1994, 2007). A manipulação desses materiais, pode contribuir para que os alunos desenvolvam a sua capacidade de visualização espacial, pois "muitas vezes a dificuldade dos alunos manipularem mentalmente, rodarem ou inverterem um objecto, representado graficamente, resulta de não lhes terem sido proporcionadas experiências de manipulação com esses objectos" (Abrantes *et al.*, 1999, p. 81). A maioria dos estudos comprova que o uso de materiais manipuláveis facilita a construção de representações de conceitos geométricos (Clements & Battista, 1992). A manipulação e a construção de objectos geométricos bi e tridimensionais, permite que os alunos experimentem as suas ideias, analisem e reflictam sobre elas. Além disso, a abordagem física parece manter o interesse dos alunos para o estudo.

1.3. Organização da dissertação

Este trabalho está organizado em sete capítulos, sendo a introdução o primeiro. O segundo constitui o enquadramento teórico, que se centra em primeiro lugar, no ensino e aprendizagem da Geometria, em segundo, nas tarefas de exploração e investigação e em terceiro lugar, na temática da comunicação nas aulas de Matemática e no trabalho de grupo. Em cada uma destas partes é feita uma revisão de literatura sobre o tema que inclui a discussão de resultados de estudos empíricos.

O terceiro capítulo é dedicado à metodologia de investigação. Apresentam-se e fundamentam-se as opções metodológicas e descrevem-se os participantes e procedimentos seguidos, os métodos de recolha de dados e o modo como estes foram analisados.

No capítulo quatro descrevem-se e analisam-se as aulas, tarefa a tarefa, em que participaram os grupos de alunos que foram estudados com mais profundidades. Nos capítulos seguintes – cinco e seis – analisam-se os resultados relativos aos dois grupos-caso. Cada um destes capítulos começa pela caracterização dos alunos que constituem os grupos, segue-se a apresentação e discussão dos dados relativos a cada aspecto estudado, acompanhadas de sínteses parciais que correspondem a um segundo nível de análise de dados.

Por último, no capítulo sete, sintetizam-se as principais conclusões do estudo, apresentam-se algumas recomendações que dele decorrem e indicam-se as principais limitações. Termina-se este trabalho com uma breve reflexão final.

CAPÍTULO II

REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, organizado em três secções, define-se, através da revisão de literatura, o referencial teórico que orientou o desenvolvimento deste estudo e que contribuiu para a contextualização necessária no âmbito do mesmo. Começa-se por fazer referência, na primeira secção, às mudanças no currículo de Geometria do ensino secundário e destacam-se os contributos e as dificuldades na aprendizagem da Geometria. Na segunda secção abordam-se as tarefas de exploração e investigação e a sua realização nas aulas de Matemática. Por fim, a terceira secção, centra-se na comunicação na aula de Matemática, no trabalho de grupo e nas interacções entre os alunos e ainda na discussão no grupo turma.

2.1. O ensino e a aprendizagem da Geometria

A Geometria é um dos temas da Matemática escolar que mais controvérsia tem levantado nos últimos anos. O seu lugar no currículo tem vindo a ser revalorizado e os conteúdos a incluir, as metodologias a utilizar, assim como as finalidades do seu ensino amplamente discutidas. A Geometria constitui um meio privilegiado de desenvolvimento da compreensão, interpretação, intuição e orientação espacial do mundo físico, pelo que todos os conceitos e noções ligadas à visualização e organização espaciais são imprescindíveis no currículo de Matemática. A aprendizagem dos conceitos geométricos, pode proporcionar aos alunos o desenvolvimento de capacidades cognitivas fundamentais, que lhes permitem compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vivem.

Esta secção aborda o ensino e a aprendizagem da Geometria e está dividida em duas subsecções. Na primeira é descrita de uma forma genérica a evolução da Geometria no currículo do ensino secundário, fazendo-se referência aos períodos, antes, durante e após o movimento da Matemática Moderna no estrangeiro e com maior ênfase em Portugal. Salienta-se o facto de durante muitos anos o ensino e a aprendizagem da Geometria serem remetidos para segundo plano e destaca-se a sua recuperação nos currículos de Matemática.

Na segunda subsecção é destacada a importância da aprendizagem da Geometria no desenvolvimento de várias capacidades nos alunos, dando-se especial atenção à capacidade de visualização espacial. São salientadas algumas das dificuldades que os alunos revelam na aprendizagem da Geometria e descritos os níveis de van Hiele de desenvolvimento de raciocínio geométrico.

2.1.1. A Geometria no currículo de Matemática do ensino secundário

A Geometria é uma área da Matemática que proporciona um meio de descrição, análise e compreensão do mundo e da sua beleza visual (NCTM, 2007). Ela trata de formas, das suas propriedades e das suas relações e, por isso, ao olharmos à nossa volta rapidamente nos apercebemos de que na "Natureza são produzidas e reproduzidas determinadas formas e que, além disso, a Natureza prefere certas formas em relação a outras também possíveis. (...) Por exemplo, as colmeias das abelhas obedecem a um padrão (pavimentação) hexagonal" (Loureiro, Oliveira, Ralha & Bastos, 1997, p. 14).

Ela é escolhida unanimemente como tópico obrigatório de ensino aos cidadãos de todo o mundo, uma vez que permite desenvolver simultaneamente o conhecimento do mundo real, o processamento e interpretação visuais e o raciocínio lógico/dedutivo. (Loureiro *et al.*, 1997). A sua importância leva a que exista um consenso generalizado sobre a sua inclusão em qualquer programa curricular. Tal consenso deixa, todavia, de existir quando se trata de decidir qual a Geometria a ser ensinada num determinado nível, e quando se tem que optar por um ou outro método de ensino. Por exemplo, há diferenças significativas entre os países, na ênfase atribuída às Transformações geométricas, aos Vectores e à Geometria das Coordenadas, em relação à Geometria Sintética Euclidiana. Encontra-se ainda um contraste considerável entre alguns países, relativamente ao método de ensino da Geometria, por exemplo, na Holanda, faz-se uma abordagem mais prática, a Geometria está fortemente ligada ao mundo real, já noutros países como a França e o Japão, a abordagem é mais teórica, existindo pouca ligação ao mundo real (French, 2004).

A Geometria tem sofrido alterações nos currículos de Matemática ao longo dos anos. Antes do chamado movimento da Matemática Moderna, o ensino da Geometria baseava-se nas construções geométricas e no estudo da Geometria Euclidiana, no plano e no espaço, sendo exaustivamente formal e demonstrativo. Considerava-se que a Geometria "seria um campo ideal para os alunos aprenderem a demonstrar e também a apreciar a Matemática como uma construção lógica perfeita" (Veloso, 1998, p. 19). Era dada muita ênfase à demonstração, aos axiomas e aos teoremas, na tentativa de levar os alunos a adquirir hábitos de raciocínio rigoroso. Nos meados do século XX, as Geometrias não-euclidianas eram ignoradas no ensino secundário, era apenas abordada a Geometria Analítica. A Geometria Sintética Euclidiana que em outros tempos era considerada como o único modelo de método dedutivo, de precisão e de raciocínio lógico no ensino secundário (UNESCO, 1973), nesta altura, viu-se relegada para o ciclo anterior, dando lugar à Geometria Analítica, que se adequava muito bem a exercícios de cálculo (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997). No 3.º ciclo do ensino liceal (actuais 10.º e 11.º anos de escolaridade), ensinava-se a Álgebra, que era o tema mais importante, a Trigonometria, a Aritmética racional e por último a Geometria Analítica. No final do programa aprovado em 1948, existia uma breve introdução à Geometria Analítica plana, que o aluno teria oportunidade de estudar mais desenvolvidamente no ensino superior, fazendo-se o estudo das coordenadas cartesianas e polares, das suas relações, distância de dois pontos, estudo da recta e de diversos lugares geométricos como a circunferência, elipse, parábola e hipérbole. Nas observações relativas ao 3.º ciclo é referido que:

> O programa de Geometria Analítica, embora limitado a uma ligeira introdução a estudos que o aluno fará desenvolvidamente em cursos superiores, permite-lhe não concluir o curso liceal sem fazer ideia do maravilhoso instrumento de trabalho e de descoberta que é este ramo da Matemática. A propósito deste estudo, e sempre que haja oportunidade, o professor fará pequenas revisões de Geometria Sintética (Decreto n.º 37:112 de 22 de Outubro de 1948).

A decisão da inclusão ou não dos temas nos anos terminais do ensino secundário estava relacionada com "os objectivos de preparação dos alunos para estudos superiores. E como o objectivo era a preparação para o cálculo infinitesimal, a única Geometria importante era a Geometria Analítica" (Veloso, 1998, p. 20).

Entretanto, no estrangeiro desde os anos 20 que decorriam debates sobre o programa de Geometria no ensino secundário. Nas numerosas conferências sobre este assunto, surgiam duas posições: uns eram a favor de conservar grande parte da Geometria Sintética e Axiomática e os outros defendiam uma reestruturação completamente nova do estudo do espaço (UNESCO, 1973). Mas, em Portugal, só a partir de 1937 com o movimento matemático desenvolvido por Aniceto Monteiro, Ruy Gomes e Bento de Jesus Caraça, com a fundação da *Sociedade Portuguesa de Matemática* (SPM) e a criação da *Gazeta de Matemática* em 1939, é que as questões sobre o ensino da Matemática foram debatidas. Em 1941 foi publicado na *Gazeta* o resumo do plano de trabalhos da primeira reunião da Comissão Pedagógica da SPM. Esta Comissão propunha-se promover o estudo de várias questões relativas ao ensino da Matemática a nível do secundário, como por exemplo, "a possível introdução de métodos novos de ensino laboratoriais para os rudimentos de Geometria" (Caraça, 1941, p. 10). Diversos artigos foram publicados na *Gazeta,* sobre o ensino da Geometria, como o de Guerra (1943) e o de Castelnuovo (1947). Guerra sugere um ensino experimental da Geometria com recurso a materiais concretos, apresentando alguns exemplos realizados com os seus alunos. Castelnuovo salienta que "a Geometria nasceu como ciência experimental, de um ponto de vista prático" (p. 9) e verbera o facto de no ensino da Geometria, as definições precederem a prática, implicando que, "o aluno deve primeiro fazer o esforço de conceber as ideias abstractas, e depois que não as compreendeu, fazer as respectivas aplicações" (pp. 9-10). A autora propõe, a substituição de "um método descritivo por um método construtivo" (p. 10), com a passagem do concreto ao abstracto e do complexo ao simples.

Contudo, e segundo Veloso (1998), este foi o escasso reflexo que o debate sobre o ensino da Geometria que existia a nível internacional, teve em Portugal.

No final da década 50 e início dos anos 60 surge o movimento internacional de renovação do ensino da Matemática escolar, designado por movimento da Matemática Moderna, cuja origem estava na insatisfação crescente dos matemáticos com a preparação dos alunos que chegavam à universidade. Com o surgimento deste movimento emergiu a crítica à situação do ensino da Geometria. Jean Dieudonné, matemático do grupo Bourbaki[1], no seminário de Royaumont organizado pela OECE (Organisation Europeenne de Cooperation Economique), em 1959, criticou a forma como se ensinava Geometria, "com sequências de «definições» que não definem nada e de pseudo «demonstrações» que não resistem à análise lógica" (Dieudonné, 1961, p.40). No mesmo seminário, Dieudonné refere que nas escolas secundárias, as noções fundamentais de Geometria já não eram definidas de uma forma axiomática rigorosa. Eram apresentadas fazendo apelo directo à intuição, mas a relação exacta com os objectos físicos que era suposto idealizar não era exposta de forma clara. E salienta que, como não era enunciado qualquer sistema completo de axiomas, era obviamente impossível verificar qualquer demonstração. Porém, menciona que as suas criticas:

> Não visam os objectivos mas os métodos de ensino da Geometria. Afirmo sobretudo, que seria muito melhor basear este ensino, não em noções e resultados artificiais que, na maior parte das aplicações não têm nenhuma utilidade, mas em noções fundamentais que dominam e esclarecem todas as questões onde a Geometria intervém. Enquanto que por exemplo, a noção de vector tem uma importância capital em toda a ciência moderna, a noção de triângulo é artificial e não tem praticamente nenhuma aplicação (Dieudonné, 1961, p. 47).

[1] Grupo fundado em 1935 por jovens matemáticos, na sua maioria franceses, provenientes da *École Normale Supérieure* de Paris, com o objectivo de reformular conteúdos e métodos no ensino da Matemática.

Dieudonné para sintetizar as ideias que defendia para a nova proposta de ensino da Geometria pronunciou uma frase que se tornou emblemática "Se eu quisesse resumir numa frase todo o programa que tenho em mente, seria com o slogan: «Abaixo Euclides!»"(Dieudonné, 1961, p. 35). Este matemático chega a defender o apelo à intuição nos primeiros anos do estudo da Geometria, salientando que não se pode desenvolver com proveito uma teoria matemática sob a forma axiomática enquanto os alunos não estiverem familiarizados com questões sobre as quais ela se aplica e tenham trabalhado durante algum tempo sobre uma base experimental, ou semi-experimental, fazendo constantemente apelo à intuição (Dieudonné, 1961). No entanto, a sua preocupação era a preparação dos alunos para os estudos universitários e nesse sentido propôs um modelo de axiomática, baseado na noção de espaço vectorial para o estudo da Geometria. Esta era de resto, a posição do movimento da Matemática Moderna, resultante do facto dos seus promotores advirem do meio universitário e da concepção estruturalista da natureza da Matemática, devido à influência do grupo Bourbaki que dominava na época (Veloso, 1998).

Assim, com o movimento da Matemática Moderna, os currículos de Matemática foram reformulados, tendo-se introduzido novas matérias e eliminado matérias tradicionais. Surgiram as Estruturas Algébricas, a Álgebra Linear e noções rudimentares de Estatística e de Teoria das Probabilidades. A Trigonometria passou a estar integrada na iniciação à Análise Infinitesimal e a sua abordagem deixou de ser geométrica para passar a ser algébrica e a Geometria Analítica praticamente desapareceu (Ponte *et al.*, 1997). Foi também introduzida uma nova abordagem da Matemática e uma nova linguagem pontuada pelo simbolismo da Lógica e da Teoria de Conjuntos (Ponte, 2003c). A grande preocupação deste movimento, ao introduzir novos temas e novas abordagens era, como já foi mencionado, proporcionar uma melhoria nas aprendizagens dos alunos à entrada para o ensino superior, mas este objectivo não foi atingido. Segundo Freudenthal (1978) a introdução de novos temas no ensino foi feita sem que os "princípios didácticos se moldassem a eles, o que originou uma pavorosa degradação no ensino da Matemática" (p. 160). O formalismo e a ênfase em estruturas abstractas revelaram-se de difícil compreensão para os alunos e as suas competências na resolução de problemas, no raciocínio e no domínio do cálculo não mostravam os progressos desejados (Ponte *et al.*, 1997). Assim, e "perante o declínio dos resultados dos alunos nos testes de admissão à Universidade (nos Estados Unidos), começou a reclamar-se um regresso à ênfase nas competências básicas e à necessidade de estabelecer níveis de competência mínima em exames" (Ponte *et al.*, 1997, p. 53). Tendo surgido no início dos anos 70, um forte movimento de revolta contra o movimento da Matemática Moderna, primeiro nos Estados unidos e depois noutros países.

Em Portugal, a iniciativa mais conhecida do movimento da Matemática Moderna foi uma experiência onde estiveram envolvidas turmas piloto do 3.º ciclo do ensino liceal, conduzida por Sebastião e Silva (Ponte, 2003c). Este redigiu o *Compêndio de Matemática,* dividido em três volumes, contemplando novas matérias que se pretendiam introduzir, articulando-as com as matérias tradicionais. Nos volumes I e II não existe nenhum capítulo dedicado ao estudo da Geometria, os conceitos de Geometria Euclidiana plana e espacial são utilizados como ferramenta em exemplos e exercícios no estudo de outros conceitos. No volume III, Sebastião e Silva, introduz o estudo da Geometria através do cálculo vectorial, assemelhando-se a sua proposta à abordagem defendida por Dieudonné, ou seja, um ensino da Geometria assente num modelo de axiomática, baseado na noção de espaço vectorial. Porém, Sebastião e Silva defendia a importância da visualização e do desenvolvimento da intuição geométrica nos alunos e mostrava preocupação com a renovação dos métodos de ensino. Redigiu o *Guia para a utilização do compêndio de Matemática*, onde se pode encontrar um vasto conjunto de ideias sobre metodologias de ensino.

A partir do início dos anos 70, deu-se a generalização da Matemática Moderna para o ciclo preparatório e para o curso geral unificado, tendo-se elaborado novos programas. Com esta generalização e com a morte de Sebastião e Silva, o ensino da Matemática foi-se degradando, salientou-se o que era abstracto e formal e desvalorizou-se o que remetia para o desenvolvimento da intuição, base da compreensão das ideias matemáticas (Ponte, 2003c). E assim, lentamente o ensino da Geometria foi sendo relegado para um lugar secundário. A Geometria tornou-se o "parente pobre" da Álgebra Linear, as actividades envolvendo construções geométricas foram consideradas matérias de outras disciplinas, como Educação Visual, onde eram consideradas sem qualquer perspectiva matemática. A importância prática da Geometria reduzia-se ao Teorema de Pitágoras e a algumas fórmulas para o cálculo de áreas e volumes (Veloso, 1998), desempenhando a intuição e a visualização um papel menor na actividade matemática dos alunos. Assim, os aspectos indutivos da Geometria que incluíam as capacidades de observação e visualização, a experimentação e a construção desapareceram quase totalmente do seu ensino. Este processo de redução da Geometria no ensino da Matemática, em Portugal, e o virtual desaparecimento da mesma dos programas, decorreu principalmente nos anos 70 e 80 (Ponte, Matos & Abrantes, 1998; Veloso, 1998).

Entretanto, noutros países, algumas experiências e reflexões em torno do ensino da Geometria iam preparando o seu regresso. Segundo Veloso (1998), foi Freudenthal com as suas preocupações quanto ao estado do ensino da Matemática quem maior influência teve no regresso da Geometria como tema fundamental à Matemática escolar. Freudenthal (1973) considera que a Geometria não é apenas dedução, Geometria é essencialmente "compreender o espaço no qual a criança vive, respira e se move. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar, conquistar, a fim de poder aí viver, respirar e mover-se melhor" (p. 403). O autor salienta que a Geometria proporciona uma excelente oportunidade para a aprendizagem da matematização da realidade e para a realização de descobertas, que sendo feitas "com os próprios olhos e mãos são mais convincentes e surpreendentes" (p. 407). No capítulo *The case of geometry* do seu livro *Matematics as an Educational Task,* publicado em 1973, Freudenthal apresenta, através de diversos exemplos e comentários, algumas das principais orientações que propõe para a renovação do ensino da Geometria.

Outro marco essencial para a recuperação da Geometria como tema relevante no ensino da Matemática foi a publicação em 1989, do documento *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* do NCTM, traduzido para português em 1991, com o título *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Este reflecte as novas tendências curriculares e propõe, no caso específico da Geometria, alterações dos programas tradicionais, no sentido de dar maior ênfase a aspectos como: (1) integração da Geometria através de todos os temas, em todos os anos de escolaridade; (2) exploração em computador de figuras bi e tridimensionais; (3) estudo da Geometria no espaço; (4) modelação e aplicação ao mundo real; (5) estudo da Geometria através de abordagens por coordenadas e por transformações geométricas; (6) desenvolvimento de curtas sequências de teoremas e (7) investigações conducentes a argumentos dedutivos expressos oralmente ou por escrito (NCTM, 1991). Em simultâneo o NCTM recomenda, que se dê menor atenção a tópicos como por exemplo: Geometria Euclidiana como sistema axiomático completo; Geometria Analítica como tema isolado e estudo da Geometria de um ponto de vista sintético (NCTM, 1991). As *Normas* apresentam assim, uma visão renovada do ensino da Geometria. Esta visão foi concretizada e intensificada com a publicação das *Adendas* às *Normas* sobre Geometria, com o intuito de fornecer ideias e materiais, apoiar e facilitar a implementação das *Normas*.

Nas *Adendas* para os anos de escolaridade 9-12 – *Geometria a partir de múltiplas perspectivas* – aborda-se de um modo prático a reforma dos conteúdos, da pedagogia e da avaliação dos alunos em Matemática escolar. Propõe-se que as noções geométricas, tal como é recomendado nas *Normas,* sejam abordadas a partir de perspectivas diversificadas tais como: sintética; de coordenadas; de transformações e vectorial, tirando partido das potencialidades das novas tecnologias e de materiais concretos (Coxford, Burks, Giamati & Jonik, 1993).

Também a publicação de livros e o surgimento de novos materiais e *software* para o ensino da Geometria, assim como o lançamento de projectos e reuniões têm vindo a acentuar o regresso da Geometria aos currículos de Matemática.

Em Portugal, esta recuperação foi mais lenta, durante os anos 70 e 80, os programas sofreram algumas remodelações e reajustamentos, mas a Geometria não é muito beneficiada com estas remodelações. Chegaram a ser propostos os aspectos intuitivos da Geometria e a predominância da Geometria no espaço, mas estas tentativas não chegaram a ter consequências nas alterações dos programas, nem nas salas de aula (Veloso, 1998). Por exemplo, o programa do 10.º ano do ensino secundário em vigor a partir do ano lectivo de 1983-1984, no que concerne à Geometria, propunha apenas o estudo da Geometria Analítica plana (incluindo noções de trigonometria, vectores, produto interno de dois vectores, estudo da recta e da circunferência e domínios planos) e é referido que se teve em vista "a necessidade de tratar a Geometria Analítica tão cedo quanto possível, para poder apoiar o estudo da Física" (Ministério da Educação [ME], 1983, p. 2). A única Geometria importante continuava, assim, a ser a Geometria Analítica e o objectivo do seu estudo continuava a ser a preparação para o ensino superior e apoio de outras disciplinas.

É através do aparecimento dos computadores e da sua utilização no ensino que a Geometria iniciou o seu regresso. O surgimento do programa LOGO, de Seymour Papert, desencadeou um movimento crescente de interesse pelas questões de Geometria Plana, esse interesse aumentou com o desenvolvimento do projecto Minerva e com a realização das semanas LOGO. Também a criação, em 1986, da APM, trouxe um novo impulso à Geometria, através da publicação de artigos na revista *Educação e Matemática*, da realização de conferências, comunicações e sessões práticas que se têm vindo a realizar nos encontros anuais de professores e educadores, da publicação de livros com sugestões práticas, como por exemplo, *O Geoplano na sala de aula* de Lurdes Serrazina e José Manuel Matos, publicado em 1988. Este livro para além de fomentar a utilização do geoplano, até então pouco conhecido pelos professores portugueses, apresenta uma metodologia inovadora do ensino da Geometria, através da proposta de numerosas actividades de investigação e problemas, acompanhadas de comentários sobre a utilização e desenvolvimento dessas actividades.

Ainda em 1988, a APM organizou um seminário em Vila Nova de Milfontes, para discutir alguns dos problemas essenciais da renovação do currículo de Matemática dos ensinos básico e secundário. Sendo duas das sessões plenárias dedicadas à discussão sobre as áreas científicas que poderiam ocupar um lugar de destaque nos futuros programas escolares – a Geometria e a estatística (APM, 2009). Os textos levados a discussão foram publicados no livro *Renovação do Currículo de Matemática*, que serviu de base para a elaboração dos programas de Matemática, onde recomenda uma reforma dos conteúdos e dos métodos de ensino, em particular da Geometria. No quinto capítulo pode ler-se "o ensino da Geometria poderá ser profundamente remodelado, explorando-se as potencialidades da linguagem LOGO (ou de outras linguagens suas sucessoras) e de diversos programas utilitários" (APM, 2009, p. 68).

Assim, no fim dos anos 80, aquando da reforma dos programas de Matemática, estavam lançadas algumas condições favoráveis para que a Geometria recuperasse o lugar que há muito lhe competia no currículo. Contudo, no novo programa de Matemática para o ensino secundário generalizado desde 1993, verificava-se a tradição de utilizar a Geometria para mostrar a Matemática na sua perspectiva hipotética-dedutiva. Nas considerações relativas aos conteúdos é mencionado que "a Geometria assume um papel de relevo, considerando o seu poderoso contributo para a estruturação do pensamento e para a compreensão do meio" (ME, 1993, p. 28). A proposta apresentada no programa do 10.º ano, partia de cinco axiomas para a introdução relativa à Geometria no espaço:

> A qual permite uma visão mais clara do espaço, indispensável ao estudo da Geometria Analítica, ao mesmo tempo que proporciona ao aluno algumas ideias sobre a construção hipotético-dedutiva de uma ciência. A compreensão dos axiomas e a demonstração dos teoremas propostos deve apoiar-se no uso de modelos que facilitem a visualização de várias situações (p. 53).

Os autores sugeriam que se aproximasse a Geometria no espaço da realidade, mas o que ficava desta parte do programa de Geometria era um conjunto de teoremas e demonstrações para as quais eram necessários os cinco axiomas. Segundo Veloso (1998) esta primeira parte raramente foi abordada pelos professores que aplicaram o programa, restando a Trigonometria e a Geometria Analítica apresentadas de acordo com a tradição, evitando-se apenas a formalização relativa aos espaços vectoriais. Assim, o novo programa de Matemática continuava a considerar a Geometria Analítica como um tópico isolado de Geometria no ensino secundário, ignorando as recomendações sobre o ensino da Geometria, principalmente as das *Normas* do NCTM.

A aplicação deste programa foi acompanhada por vários protestos de professores de todo o país, por ser demasiado extenso para ser leccionado em quatro horas semanais, a que se seguiram circulares com orientações e cortes *ad hoc* (Ponte, 2003c). Tornando-se clara a necessidade de se proceder a um processo de revisão curricular. Ao longo de 1995 foram feitos vários ajustamentos ao novo programa, de que foi responsável uma equipa técnica coordenada por Jaime Carvalho e Silva. A equipa tomou como ponto de partida os relatórios da experimentação e do início da generalização dos novos programas e numa primeira versão optou por propor três grandes temas para cada um dos anos do ensino secundário, em vez dos quatro que constavam no programa anterior, o que levou a alguns cortes na Geometria, nomeadamente Axiomas e Geometria Sintética, Aplicação do produto escalar à demonstração de algumas propriedades da Geometria e da Trigonometria e Cónicas. A versão final foi publicada em 1997, mas o ajustamento não veio resolver o problema de fundo das opções a tomar quanto ao ensino da Geometria no ensino secundário. Apesar de ser referido no programa que "nos temas de Geometria, procura-se um equilíbrio entre a Geometria por via intuitiva e a Geometria Analítica" (DES, 1997, p. 6), o peso da Geometria Analítica continuava a ser grande. As Transformações geométricas e as Geometrias não-euclidianas não faziam parte do mesmo, apesar das primeiras aparecerem no programa antes do ajustamento, como uma das opções a leccionar. Os objectivos permaneceram sem alteração, continuando a considerar o ensino da Matemática no secundário, como preparação para o prosseguimento de estudos e neste sentido, é privilegiada a Análise Infinitesimal e a Álgebra em detrimento da Geometria que não esteja ao serviço daquelas (Veloso, 1998), como é o caso das Transformações geométricas e da Geometria Sintética.

Contudo, "foi dada uma posição de destaque à Geometria por ser o tema tratado em primeiro lugar tanto no 10.º como no 11.º anos e são dadas indicações que permitem que seja retomada em praticamente todos os outros temas" (DES, 1997, p. 6). E ao se iniciar o programa, em cada ano, pelo tema de Geometria, é dada oportunidade aos alunos de contactarem de uma forma mais directa e concreta com problemas do mundo que os rodeiam (Gomes, 2001). A primeira parte da Geometria do 10.º ano é dedicada à resolução de problemas de Geometria no plano e no espaço, o que permite ao professor proporcionar aos alunos situações para construir e manipular modelos, representar sólidos, resolver problemas e realizar investigações com a utilização de computadores, por exemplo. Nas indicações metodologias relativas à Geometria Analítica surgem muitas recomendações para evitar que o seu estudo se reduza à Álgebra, como por exemplo:

> O professor deve incentivar o aluno a fazer em todas as situações uma figura geométrica de modo a tirar proveito da visualização do problema e a desenvolver a sua capacidade de representação, não deixando que o aluno se limite à resolução exclusiva de equações e à utilização de fórmulas (DES, 1997, p. 19).

Para apoiar a aplicação do programa ajustado foi criada uma comissão de acompanhamento e em 2001 foi homologado o actual programa de Matemática A, do 10.º ano, onde para além de outras alterações foi introduzido o Módulo Inicial, com o intuito de minimizar os problemas da transição entre ciclos. São dadas indicações para que os problemas ou actividades a tratar neste módulo se integrem fundamentalmente nos temas Números, Geometria e Álgebra e que se pretende que esses problemas ou actividades "ponham em evidência o desenvolvimento de capacidades de experimentação, o raciocínio matemático (com destaque para o raciocínio geométrico) e a análise crítica, conduzindo ao estabelecimento de conjecturas e à sua verificação" (DES, 2001, p. 23). Ora este módulo permite, assim, que o professor trabalhe com os alunos mais problemas de Geometria.

Apesar dos programas actuais do ensino secundário, não seguirem algumas das recomendações, por exemplo do NCTM, em relação ao ensino da Geometria, reservaram-lhe um lugar significativo e permitem que se desenvolvam com os alunos actividades interessantes no plano e no espaço proporcionando-lhe o desenvolvimento de capacidades de raciocínio geométrico, de visualização e de resolução de problemas, entre outras. É de salientar que no programa de Matemática A do 10.º ano é referido que se devem apresentar:

> Aos estudantes problemas que possam ser resolvidos por vários processos (perspectiva sintética, geometria analítica, transformações geométricas, utilização de programas de Geometria Dinâmica, perspectiva vectorial). Devem explorar-se sempre que possível as conexões da Geometria com outras áreas da Matemática e o seu desenvolvimento deve prolongar-se noutros temas. (DES, 2001, p. 24).

Vários autores como Abrantes (1999), French (2004) e Veloso (1998) consideram que a riqueza e variedade da Geometria constituem argumentos muito fortes para a sua valorização no currículo de Matemática.

Síntese. A Geometria é um tema importante e com larga aplicação ao longo da história. O seu ensino tem sofrido várias mudanças, particularmente no ensino secundário. Antes do movimento da Matemática Moderna, o ensino da Geometria baseava-se nas construções geométricas e no estudo da Geometria Euclidiana, sendo dada muita ênfase aos axiomas, teoremas e à demonstração. A sua inclusão nos currículos visava a preparação dos alunos para estudos superiores. Com o surgimento do movimento da Matemática Moderna os currículos de Matemática foram reformulados e a Geometria foi remetida para um lugar muito secundário. Salientava-se o abstracto e o formal e os aspectos indutivos que incluíam a intuição e visualização, a experimentação e construção desempenhavam um papel muito reduzido na actividade matemática dos alunos.

As influências de Freudenthal e a publicação das *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática escolar*, pelo NCTM, foram marcos essenciais para a recuperação da Geometria como tema fundamental à Matemática escolar, mas em Portugal essa recuperação foi mais lenta. É através do aparecimento do computador e da sua utilização no ensino, da publicação de artigos na revista *Educação e Matemática* publicada pela APM, da realização de conferências e encontros de professores e da publicação de livros que a Geometria iniciou o seu regresso. Contudo, só na versão final do programa de Matemática para o ensino secundário publicada em 1997 é que é dada posição de destaque à Geometria, sendo o primeiro tema a ser tratado, tanto no 10.º como no 11.º anos. Actualmente, os programas, principalmente de Matemática A reservam-lhe um lugar significativo, permitindo que se desenvolvam com os alunos actividades significativas no plano e no espaço. Assim, e apesar de a Geometria ter sido durante vários anos relegada para segundo plano, ultimamente tem vindo a recuperar o seu lugar no currículo do ensino secundário.

2.1.2. A aprendizagem da Geometria e as dificuldades dos alunos

A Geometria é por excelência um tema formativo, que permite ao aluno trabalhar simultaneamente com números, calculando ou relacionando áreas e volumes, trabalhar com proporções na semelhança de figuras ou trabalhar com expressões algébricas. De acordo com o DES (2001) o seu ensino:

> Reveste-se da maior importância devendo desenvolver nos estudantes uma intuição geométrica e um raciocínio espacial, assim como capacidades para explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, usar e aplicar a matemática, formular e resolver problemas abstractos ou numa perspectiva de modelação matemática (p. 24).

Segundo Geddes e Fortunato (1993), dois dos principais objectivos do ensino da Geometria são o desenvolvimento de capacidades de pensamento lógico e o desenvolvimento de intuições espaciais sobre o mundo real.

Vários investigadores, como por exemplo, Abrantes *et al.* (1999), Afonso (2002), Hoffer (1981) e Junqueira (1995) consideram que a aprendizagem da Geometria, através da resolução de problemas não rotineiros, pode propiciar o desenvolvimento de múltiplas capacidades, apontadas como fundamentais para qualquer pessoa e, em particular, para todos os alunos, sendo a mais óbvia a visualização espacial. O termo visualização é utilizado na literatura de diversas formas e com vários significados, sendo por isso, a terminologia neste domínio também diversificada. Segundo Gutiérrez (1996) pode acontecer que um autor utilize por exemplo, o termo "visualização", outros usem "raciocínio espacial", "capacidades espaciais", ou "percepção espacial", no entanto considera que apesar dos termos serem diferentes representam ideias comuns. Para Tartre (1990) as capacidades espaciais são "capacidades mentais relacionadas com a compreensão, manipulação e reorganização ou interpretação de relações visuais" (p. 216). Esta definição é condizente com a de outros investigadores, como por exemplo, Del Grande (1987) que usa o termo percepção espacial para se referir à "capacidade de reconhecer e discriminar estímulos no e do espaço e interpretar esses estímulos associando-os com experiências anteriores" (p. 126). Arcavi (2003) considera a visualização como:

> A capacidade, o processo e o produto de criação, interpretação, utilização e análise de figuras, imagens e diagramas, na nossa mente, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com o objectivo de descrever e comunicar informação, pensar e desenvolver ideias até então desconhecidas e progredir no conhecimento" (p. 217).

Presmeg (1986) define imagem visual como "um esquema mental que descreve a informação espacial ou visual" (p. 297). A autora considera que esta definição é propositadamente ampla para incluir diferentes tipos de imagens que retratem modelos ou formas, e também imagens na mente. A definição permite também, a possibilidade de que símbolos verbais, numéricos ou matemáticos possam ser organizados espacialmente para formarem imagens.

Gutiérrez (1996) caracteriza a visualização em Matemática como "o tipo de actividade baseada na utilização de elementos visuais ou espaciais, sejam mentais ou físicos, realizada para resolver problemas ou demonstrar propriedades" (p. 9). Considera que a visualização é composta por quatro elementos principais: *imagens mentais*; *representações externas*; *processos de visualização* e *capacidades de visualização*. *Imagens mentais* são "quaisquer tipo de representações cognitivas de um conceito matemático ou propriedade, por meio de elementos visuais ou espaciais" (Gutiérrez, 1996, p. 9). O autor refere que normalmente, apenas alguns tipos de imagens mentais são necessárias para resolver determinado tipo de tarefas. Por exemplo, num estudo com alunos dos ensinos primário e secundário, os estudantes na resolução de tarefas de Geometria em três dimensões, usando *software* dinâmico, utilizaram apenas três tipos de imagens: imagens concretas; imagens cinestésicas, que são imagens criadas, transformadas ou comunicadas com ajuda de movimentos físicos e imagens dinâmicas, ou seja, imagens em movimento na mente. *Representações externas* são "quaisquer tipo de representações verbais ou gráficas dos conceitos ou propriedades, incluindo figuras, desenhos, diagramas, etc., que ajudam a criar ou transformar imagens mentais e fazer raciocínio visual" (Gutiérrez, 1996, p. 9-10). *Processos de visualização* são "acções físicas ou mentais, onde imagens mentais estão envolvidas" (Gutiérrez, 1996, p. 10). O autor considera dois processos de visualização: a interpretação visual da informação, para criar imagens mentais e a interpretação dessas imagens mentais, para gerir informação. *Capacidades de visualização* são capacidades exigidas para realizar os processos necessários com imagens mentais, específicos para determinado problema.

O mesmo autor sublinha que dependendo das características do problema matemático a ser resolvido e das imagens mentais criadas, o aluno deve ser capaz de escolher entre várias capacidades visuais. Sendo as principais as que se descrevem a seguir, que aliás, algumas delas são também caracterizadas por Del Grande (1987): (i) *Percepção figura – fundo* é a capacidade de identificar um componente específico numa determina situação, por exemplo, identificar figuras geométricas em desenhos complexos. Esta capacidade implica que os alunos sejam capazes de isolar essas figuras geométricas, apesar de eventualmente haver outros estímulos irrelevantes que os possam distrair; (ii) *Constância perceptual* é a capacidade de reconhecer figuras geométricas apresentadas em diversas posições, tamanhos, texturas e contextos. Um aluno mostra possuir esta capacidade quando reconhece, por exemplo, um triângulo rectângulo, independentemente da posição que este ocupa no plano, ou então identifica um cubo, mesmo que o observe segundo um ângulo de visão não habitual; (iii) *Rotação mental* é a capacidade de produzir imagens dinâmicas mentais e visualizar uma configuração em movimento; (iv) *Percepção da posição no espaço,* esta capacidade permite distinguir figuras iguais, mas colocadas em orientações diferentes. Quando um aluno não tem a percepção da posição no espaço pode fazer a inversão na escrita de palavras ou de números; (v) *Percepção de relações espaciais* é a capacidade de imaginarmos dois ou mais objectos ou imagens mentais em relação consigo próprios ou em relação uns aos outros, por exemplo, esta capacidade é evidenciada quando um aluno reconhece que dois quadrados são congruentes se um deles é a imagem do outro através de uma translação, ou se o aluno consegue fazer uma construção com cubos a partir do desenho da mesma; (vi) *Discriminação visual,* esta capacidade está envolvida quando procuramos analisar se duas figuras são iguais, ou sendo diferentes, quais são as diferenças. Esta capacidade desenvolve-se quando é proposto ao aluno, por exemplo, para classificar e ordenar formas geométricas.

Quando a visualização é usada para resolver uma tarefa, o enunciado é interpretado pelo aluno como uma representação externa adequada para gerar uma imagem mental, em seguida, essa imagem inicia um processo de raciocínio visual, onde os alunos, dependendo da tarefa e das suas capacidades, utilizam algumas capacidades visuais para executar diferentes processos, e assim, outras imagens mentais e/ou representações externas podem ser geradas antes de os alunos chegarem à resposta (Gutiérrez, 1996).

Para Matos e Gordo (1993) o "conjunto de capacidades relacionadas com a forma como os alunos percepcionam o mundo que os rodeia, e com a sua capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações dos objectos" (p. 13), pode ser desenvolvido através de experiências concretas com uma diversidade de objectos geométricos. A composição e decomposição de figuras acompanhadas da sua descrição, da representação e do raciocínio sobre o que acontece e a utilização de tecnologias que permitam trabalhar com figuras bi e tridimensionais possibilitam também o desenvolvimento da visualização e do raciocínio espacial (Abrantes *et al.*, 1999; NCTM, 2007).

Uma vez que na literatura são identificadas diversas interpretações do significado de visualização, considera-se pertinente esclarecer a perspectiva adoptada nesta investigação. Atendendo ao contexto do estudo entende-se a visualização como a capacidade de percepcionar, interpretar e usar informação visual, com o objectivo de comunicar e de construir conhecimento.

A visualização tem sido salientada em vários estudos como uma capacidade crucial na promoção da actividade mental, sobretudo por estabelecer a ligação entre o mundo físico e o raciocínio. Ela não se reduz apenas à mera produção ou apreciação de figuras ou desenhos, pelo contrário, é considerada útil para apoiar a intuição que contribui para a clarificação das ideias matemáticas e para a interiorização de conceitos em diversas áreas da matemática (Clements & Battista, 1992; Dreyfus, 1991, citado em Barbosa, 2009).

A aprendizagem da Geometria para além de permitir desenvolver capacidades de visualização, permite desenvolver outras capacidades, sendo uma delas a capacidade de verbalização, que envolve a troca de ideias, o desenvolvimento de argumentos e a negociação de significados entre alunos e/ou entre estes e o professor (Matos & Serrazina, 1996). Esta troca de ideias e negociação de significados, segundo Ponte (2005) é proporcionada pelos momentos de discussão, que na aprendizagem da Geometria são fundamentais. Para Abrantes *et al.* (1999) e Hoffer (1981) as actividades de Geometria são um excelente meio para desenvolver a comunicação matemática. O aluno ao descrever uma figura que desenhou, por exemplo num geoplano, para que um colega a possa desenhar ou ao ter que explicar a um colega ou ao professor porque é que duas figuras têm a mesma área, mas perímetros diferentes, está a desenvolver a capacidade de comunicação. A Geometria é "um campo propício para [os alunos] poderem expressar as suas ideias e argumentos, verbalmente ou através de desenhos ou esquemas" (Abrantes *et al.*, 1999, p. 85).

O estudo da Geometria possibilita também desenvolver a capacidade de organização lógica do pensamento matemático que integra capacidades como a intuição espacial, a descoberta de propriedades e de relações espaciais entre objectos. Pensa-se que o desenvolvimento desta capacidade é um "processo gradual que se inicia com experiências concretas, passando por uma diferenciação dos objectos geométricos, passando ainda por uma organização local de propriedades que finalmente se globaliza num sistema axiomático" (Matos & Serrazina, 1996, p. 270).

A realização de tarefas envolvendo conteúdos de Geometria ao fornecer estratégias importantes para a resolução de problemas como sejam desenhar uma figura ou fazer um esquema, permite melhorar não só a capacidade de resolução de problemas, mas também oferece, uma boa oportunidade para os alunos desenvolverem capacidades de desenhar, construir e manipular objectos geométricos (Abrantes *et al.*, 1999; Hoffer, 1981; Matos & Serrazina, 1996). A importância da aprendizagem da Geometria poder-se-á também justificar pelo seu papel como ferramenta no estudo de outros temas da Matemática ou de outras ciências.

A Geometria constitui, assim, um contexto natural para o desenvolvimento de várias capacidades, no entanto, o insucesso dos alunos na sua aprendizagem é reconhecido em vários estudos avaliativos como o SIAEP (Second International Assessment of Educational Progress), o TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) e, mais recentemente, o PISA. A par do insucesso escolar, estão as inúmeras dificuldades que os alunos revelam na aprendizagem da Geometria, até mesmo na aprendizagem de noções geométricas básicas.

Diversos investigadores, como por exemplo, Arcavi (2003), Clements (1998), Duval (1999), Fischbein (1993), Gutiérrez (1992, 1996, 1998), Lowrie (2001) e Tartre (1990), têm-se debruçado sobre a função das imagens mentais na forma como resolvemos problemas, nas dificuldades perceptuais dos alunos na compreensão de desenhos e figuras tridimensionais, na interpretação de representações visuais de conceitos matemáticos e no estudo das capacidades de imaginar transformações de entidades matemáticas.

Quando expressamos ou comunicamos raciocínios matemáticos, geralmente, não o fazemos apresentando os objectos ou conceitos, utilizamos expressões, gráficos, desenhos ou símbolos, que de algum modo os representam, ou seja, servimo-nos de representações externas. Porém, para comunicar os nossos conhecimentos precisamos de pensar sobre tais objectos ou conceitos e nesse caso formamos imagens mentais, que Castro e Castro (1997) denominam por representações internas. Estes autores consideram que as representações externas têm uma dupla função: (1) actuam como estímulo para os sentidos nos processos de construção de novas estruturas mentais e (2) permitem expressar conceitos e ideias aos sujeitos que as utilizam. Uma das formas mais comuns para representar e comunicar conhecimento geométrico é através dos desenhos, que segundo Battista (2007) são fundamentais para a compreensão de conceitos e ideias geométricas.

Parzysz (1991) considera que os desenhos desempenham funções importantes em Geometria: ilustram definições ou teoremas; resumem um complexo conjunto de informações; ajudam na formulação de conjecturas e também ajudam em provas, "o papel do desenho na prova é essencialmente uma 'negativa' natureza, ou seja, ele fornece contra-exemplos a conjecturas" (p. 576). Contudo, os alunos revelam dificuldades em entender o seu uso, quer sendo utilizados para representar classes de formas, quer para representar relações geométricas (Battista, 2007). Os estudantes, muitas vezes, atribuem características de um desenho ao objecto geométrico que representa (Parzysz, 1988), não conseguem perceber que os desenhos não representam necessariamente toda a informação que é conhecida sobre o objecto geométrico.

É de salientar que alguns autores utilizam o termo desenho, outros diagrama, mas pelo facto de se entender que tanto um termo como o outro são usados pelos autores para designar a representação externa de um objecto geométrico, neste trabalho são usados sem distinção de significado.

Para Yerushalmy e Chazan (1990) as dificuldades com o uso dos diagramas estão relacionadas com: (1) a particularidade dos diagramas; (2) o uso comum que confunde certos esquemas-padrão com as classes de objectos aos quais eles pertencem e (3) a forma como um diagrama pode ser visto e descrito. A utilização de um caso particular, de um diagrama, pode prender a atenção dos alunos para detalhes irrelevantes ou até conduzir a dados que não são válidos (Presmeg, 1986). Os diagramas representam uma classe de objectos, servindo como modelos, no entanto cada diagrama tem características próprias e não representativas da classe (Yerushalmy & Chazan, 1990).

Presmeg (1986) sublinha que o recurso a um diagrama padrão, na representação de um conceito, pode induzir a um pensamento inflexível nos alunos que dificulta o reconhecimento desse conceito num diagrama não estandardizado. Os alunos podem ter dificuldades em identificar triângulos rectângulos fora do padrão estabelecido nas orientações que lhe foram dadas, ou em reconhecer triângulos isósceles se a base não estiver na posição horizontal em relação à folha de papel. Presmeg (1992) salienta que imagens protótipos podem ser essenciais para o raciocínio matemático na resolução de problemas, no entanto a imagem mental de um protótipo pode acarretar dificuldades. A autora considera que as dificuldades associadas a imagens protótipos podem assumir uma das duas formas: o não reconhecimento de uma figura quando ela não se assemelha com um protótipo, ou a criação de propriedades estranhas que estão presentes no diagrama, mas não necessariamente, no caso geral.

Gravina (1996) ao estudar as dificuldades inerentes à aprendizagem da Geometria, com alunos universitários, verificou que a particularidade de um desenho protótipo pode conduzir a dificuldades. Por exemplo, os alunos identificaram a altura de um triângulo como o segmento que tem extremidades no lado 'base' e no vértice oposto a esta base, estando este segmento sempre no interior do triângulo e para manter o segmento no interior do triângulo, os alunos ignoravam a perpendicularidade. Junqueira (1995) no seu estudo com alunos do 9.º ano, sobre a aprendizagem da Geometria em AGD, verificou que uma das principais dificuldades dos alunos na justificação das construções foi de natureza visual. Refere que "por vezes, os alunos associavam as propriedades geométricas a exemplos protótipos das figuras, fixavam-se neles e não reconheciam a propriedade noutras situações" (p. 192). A autora considera que a preferência dos alunos por esses exemplos levou-os a visualizar determinadas propriedades associadas aos mesmos, o que influenciou as suas justificações, na medida em que ficavam fixos nessa visualização e dificilmente a generalizavam. Por exemplo, os alunos associam a propriedade da equidistância dos pontos da mediatriz de um segmento de recta aos seus extremos, à representação do triângulo isósceles na posição que mostra a figura 2.

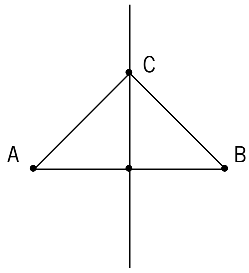


Figura 2. A posição da representação do triângulo isósceles que os alunos associam à propriedade da equidistância dos pontos da mediatriz de um segmento de recta aos seus extremos.

Outra dificuldade ocorre quando os alunos usam diagramas em provas (Battista, 2007), por exemplo, os estudantes podem assumir que os lados que parecem paralelos num diagrama de acompanhamento são paralelos. Ou, podem ligar um teorema ao diagrama de um exemplo dado com a afirmação de teorema. Por exemplo, se um teorema é ilustrado por um diagrama de um triângulo acutângulo, os alunos podem pensar que o teorema não se aplica a triângulos obtusângulos. Dreyfus (1991, citado em Barbosa, 2009) destaca razões que poderão estar associadas às dificuldades dos estudantes na utilização de diagramas: (1) incapacidade para ver um diagrama de diferentes perspectivas; (2) dificuldades em reconhecer as transformações implicadas num diagrama; (3) dificuldade em associar representações visuais e analíticas; (4) interpretação incorrecta ou convencional de um diagrama. A este respeito French (2004) salienta a interpretação de diagramas bidimensionais de objectos tridimensionais. Um exemplo simples surge com a representação típica de um cubo como o da figura 3, que pode ser visto pelos alunos como uma imagem bidimensional de três losangos formando um hexágono.

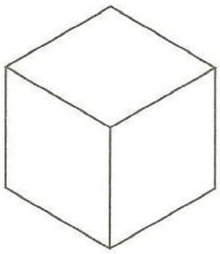


Figura 3. Representação de um cubo.

Mariotti (1995) realça o papel complexo que as imagens desempenham num contexto geométrico, sendo essa complexidade relacionada por um lado, pela impossibilidade de introduzir conceitos geométricos sem dar exemplos, o que significa desenhar figuras ou mostrar modelos e por outro lado, esses exemplos particulares do conceito poderem não ser suficientes para determinar o conceito correctamente.

A importância das imagens mentais na construção do conhecimento matemático é destacada por diversos autores (e.g., Castro & Castro, 1997; Presmeg, 1986). Na formação de imagens mentais, os desenhos associados aos objectos geométricos têm um papel relevante, mas para os alunos nem sempre é claro que o desenho é apenas uma instância física da representação do objecto (Gravina, 1996). Segundo Laborde (1996) o desenho como entidade material sobre um suporte:

> Pode ser considerado um "significante" de um referencial teórico (objecto de uma teoria geométrica como a da Geometria Euclidiana ou da Geometria de Projecções). A figura geométrica consiste no emparelhamento de um referencial dado com todos os seus desenhos (p. 67).

A figura geométrica é assim, definida como um conjunto formado por dois termos, o referencial e um dos desenhos que a representa. Laborde (1996) considera que o termo figura geométrica, visto neste sentido, leva ao estabelecimento de uma relação entre o objecto geométrico e as suas possíveis representações.

Fischbein (1993) salienta que quando nos referimos a objectos geométricos temos que considerar três categorias de entidades mentais: a definição, a imagem (com base na experiência perceptiva-sensorial, como a imagem de um desenho) e o conceito figural. O conceito figural é uma entidade mental que possui simultaneamente componentes conceituais e figurais. A componente conceitual expressa propriedades que caracterizam uma determinada classe de objectos, com base nas suas características comuns. A componente figural corresponde à imagem mental que associamos ao conceito, que no caso da Geometria pode ser "controlada e manipulada", através de regras lógicas e procedimentos no âmbito de um determinado sistema axiomático. A harmonia entre estas duas componentes é que determina a noção correcta do objecto geométrico. Vários estudos têm mostrado que as relações entre estas duas componentes não são fáceis de organizar na mente dos alunos (e.g., Fischbein, 1993; Gravina, 1996; Mariotti, 1995). Fischbein nas suas experiências verificou que alunos do 6.º ano, perante a figura 4 e ao lhes ser pedido para compararem os pontos A e B, disseram que o primeiro era maior do que o segundo, pelo facto de resultar da intersecção de um número maior de rectas. O autor concluiu que a influência da representação figural é muito mais subtil e consegue captar por si só o significado do conceito de ponto.

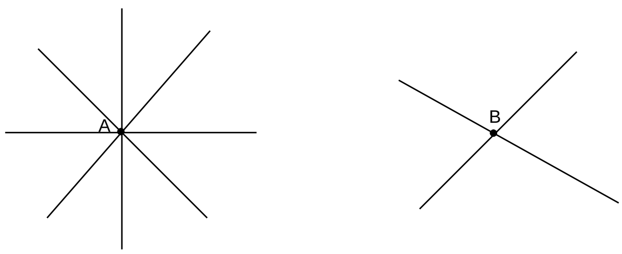


Figura 4. Ponto A, ponto de intersecção de quatro rectas e ponto B, ponto de intersecção de duas rectas.

Também Gravina (1996) no seu estudo verificou haver, por parte dos alunos, um desequilíbrio entre as componentes conceitual e figural de conceitos figurais. Fischbein (1993) considera que a fusão entre a figura e o conceito deve ser absoluta, porém é a organização conceitual que deve ditar as relações e propriedades figurais. Mas:

> O que acontece é que os conceitos e as propriedades figurais permanecem sob a influência dos respectivos sistemas, o conceitual e o figural. Muitas vezes as restrições figurais – normalmente, seguindo as leis de Gestalt – podem escapar do controle conceitual e impor, para a linha do pensamento, interpretações que são

figurativamente consistentes, mas que não são sujeitas às condições conceituais (pp. 150-151).

Fischbein (1993) relata uma experiência em que é apresentado aos alunos o seguinte teorema: [ABCD] é um quadrilátero, P, Q, R e S os pontos médios dos seus lados, então [PQRS] é um paralelogramo. Foi feita a demonstração do teorema e com o objectivo de verificar se os alunos compreenderam que a prova garante a validade do teorema, foram colocadas várias questões. Uma delas era: " V é um céptico, ele acha que temos de verificar para pelo menos uma centena de quadriláteros, a fim de ter a certeza de que [PQRS] é um paralelogramo. Qual é a sua opinião? Justifique a sua resposta." (p. 150). Só 10% dos alunos (N=396) rejeitou a necessidade de novas verificações empíricas. Alguns alunos referiram a necessidade de verificar para várias categorias de quadriláteros. O autor sublinha que embora os alunos conheçam a definição de paralelogramo, pode tornar-se difícil ver as várias formas correspondentes a essa definição. Um rectângulo, um paralelogramo obliquângulo ou um quadrado, são figurativamente tão diferentes que o efeito do conceito simplesmente desaparece. A interpretação da componente figural de um objecto geométrico deve permanecer sujeita às restrições formais, e esta ideia é muitas vezes esquecida pelos alunos. A componente figural tende a libertar-se do controle formal, o que leva a que muitos alunos, depois de aceitarem a prova de um teorema, exijam novas verificações para cada sub-classe especial da respectiva classe de objectos. Fischbein sublinha que a dificuldade em manipular conceitos figurais, isto é, a tendência em negligenciar a definição pela pressão de restrições das figuras é um dos maiores obstáculos na aprendizagem da Geometria.

Mesquita (1992) considera que a representação externa de qualquer conceito geométrico levanta uma ambiguidade, que se traduz no que a autora chama de *duplo estatuto do objecto geométrico*: "Tudo o que se apoia em objectos gerais e abstractos ("ideias" para Poincaré) não pode ser expresso mais que por uma configuração específica, que implica objectos concretos e particulares" (pp. 19-20). A autora aponta que este duplo *estatuto* pode não ser percebido pelos alunos quando são confrontados com problemas de Geometria, pelo que esta ambiguidade pode ser uma fonte de conflito. No espaço a questão do duplo *estatuto* dos objectos geométricos está sempre presente e ajusta-se com mais consistência a dificuldades de representação de pontos do espaço. Para representarmos no plano objectos a três dimensões é necessário, perder tamanho, o que leva a uma redução, bem conhecida, por exemplo, nos sistemas de projecção. Guillén (1991) sublinha que o facto da representação bidimensional de objectos tridimensionais implicar a distorção de algumas das propriedades do objecto, a compreensão das representações requer de visão espacial e conhecimento de convenções que temos que utilizar. O que conduz a dificuldades não só na representação em duas dimensões de objectos tridimensionais, mas também na interpretação de tais representações.

Estas dificuldades são também apontadas por outros autores (e.g., Gutiérrez, 1992, 1998; Castro & Castro, 1997; Mariotti, 1995; Parzysz, 1988, 1991). Gutiérrez (1998) salienta que os alunos dos ensinos básico e secundário, apresentam dificuldades na construção de sólidos geométricos a partir das suas representações planas e em desenhar representações planas de sólidos geométricos. O autor considera que o processo de compreensão do conceito subjacente a uma representação plana complica-se pelo facto de se ter que recorrer a dois passos: (1) a interpretação da figura plana para a converter num objecto tridimensional e (2) a interpretação do objecto para o converter no conceito geométrico objecto de estudo. Por outro lado:

> Sempre que manipulamos objectos espaciais e nos vemos obrigados a representá-los mediante figuras planas, temos um problema que tem ver com a capacidade de visualização espacial e com a habilidade para desenhar representações planas de objectos tridimensionais ou para interpretar correctamente as representações feitas por outras pessoas (pp. 194-195).

Gutiérrez (1998) menciona que a habilidade dos alunos para desenhar é um factor que afecta a capacidade para fazerem representações de sólidos e afirma que esta habilidade não se desenvolve de forma espontânea. Numa experiência, os alunos de vários níveis de ensino representaram, em três momentos diferentes, poliedros que iam manipulando, e ao comparar os desenhos dos alunos, Gutiérrez verificou que não havia diferenças significativas entre as diferentes provas.

A representação de objectos tridimensionais implica perda de informação. Parzysz (1988) apresenta dois níveis de representação de objectos tridimensionais. O nível um que corresponde a formas de representação próximas dos objectos, por exemplo modelos de sólidos de madeira e o nível dois que corresponde a formas de representações distantes, em que a dimensão da representação é estritamente inferior à da figura, que é o caso das representações planas de objectos tridimensionais. Em ambos os níveis há perda de informação, ao utilizarmos modelos não é evidente, por exemplo, imaginar que a altura de uma pirâmide quadrangular regular é perpendicular às diagonais da base. Algumas das representações bidimensionais de sólidos, por exemplo representadas em perspectiva, mantêm a informação do aspecto visual, mas perdem a correspondente à parte oculta, o que muitas vezes, coloca dificuldades aos alunos em compreender a representação plana de objectos tridimensionais (Castro & Castro, 1997). Parzysz sublinha que o problema de codificação (elaboração de uma representação gráfica) de um objecto geométrico 3D num único desenho:

> Tem a sua origem na impossibilidade de dar uma representação próxima dele, e na obrigação subsequente de recorrer a uma representação distante, na qual há uma perda adicional de informação. O transmissor é realmente confrontado com um dilema insolúvel, devido ao facto de que o que se sabe de um objecto 3D entrar em conflito com o que se vê do mesmo (pp. 83- 84).

De acordo com French (2004), o ensino da Geometria "deve procurar desenvolver a intuição geométrica, proporcionando uma experiência rica através da observação, tratamento e manipulação, discutindo e descrevendo as formas, assim como procurar desenvolver *skills* analíticos" (p. 17). No entanto, os alunos apresentam dificuldades que muitas vezes têm a ver com a intuição, como por exemplo, a confusão entre o perímetro e a área de polígonos ou entre a área de uma superfície e o volume de sólidos. Segundo este autor, a confusão não resulta simplesmente de uma confusão de linguagem, mas sim do facto de os alunos pensarem que os conceitos, por exemplo, de perímetro e área estão relacionados de tal forma que, o aumento do perímetro leva ao aumento da área.

Hanna (1990) afirma que a abordagem formal da prova foi desenvolvida, para eliminar a necessidade de recorrer a evidência intuitiva e julgamento humano, uma vez que ambos são potenciais fontes de erros. Mas, French (2004) salienta que os alunos muitas vezes não sentem necessidade da prova matemática, isto porque eles acham que já sabem que um resultado é verdadeiro, ou porque é de certa forma auto-evidente, como por exemplo, a igualdade das amplitudes dos ângulos que se opõem aos lados geometricamente iguais de um triângulo isósceles, ou então com base em evidências experimentais, como ocorre com a medição da amplitude dos ângulos internos de um certo número de triângulos para verificar que a sua soma é 180º. Esta opinião é corroborada por Parzysz (2006) que considera que os alunos ao se concentrarem nas propriedades dos desenhos podem resolver problemas usando soluções empíricas e por isso a prova matemática parece-lhes inútil. Salienta que, embora o desenho, seja uma ajuda considerável para conjecturar pode constituir um obstáculo à elaboração de uma prova matemática. Ferreira (2005) e Junqueira (1995), nos seus estudos, referem que os alunos se baseavam na evidência dos desenhos e que por isso, tinham dificuldade em compreender a necessidade da justificação e da prova. Ferreira salienta que:

> As justificações baseadas na evidência das imagens foi predominante, principalmente no início do estudo e em grupos com mais dificuldades, que dificilmente, ou quase

> nunca, abandonaram o "parece" ou o "vê-se logo", formulando as suas conjecturas e justificações com base nos poucos casos que experimentavam. Por vezes, misturavam a aparência com algumas relações ou propriedades que já tinham estudado, mas sem conseguirem estabelecer um encadeamento lógico das relações que observavam (p. 183).

Junqueira (1995) aponta ainda as dificuldades dos alunos em produzir construções geométricas – conjunto de objectos ligados pelas suas relações que podem ser visualizados no ecrã do computador. Principalmente, em descobrir processos de construção resistente, ou seja, uma "construção em que a aparência da figura que se pretende representar resiste à manipulação dos seus objectos" (p. 70). A autora salienta que até ao fim da intervenção didáctica "um número significativo de alunos continuou a realizar construções que se desmanchavam" (p. 148). Essas dificuldades resultavam: (i) do facto de alguns alunos não compreenderem o sentido da regra de resistência, baseando-se na aparência visual e não na análise das propriedades do objecto geométrico; (ii) da falta de disponibilidade que alguns alunos manifestavam para procurarem soluções resistentes e (iii) do privilégio que os alunos davam a casos particulares de uma construção. Junqueira salienta ainda, que muitas das construções apresentadas pelos alunos eram exemplos protótipos das figuras geométricas. Os alunos consideravam essas construções visivelmente mais agradáveis e para alguns significava estarem mais correctas.

A compreensão do vocabulário geométrico por parte dos alunos e a comunicação de raciocínios geométricos são também dificuldades indicadas por Junqueira (1995). A autora refere que a maior dificuldade dos alunos, em justificar as construções feitas com recurso aos AGD, decorreu da sua falta de capacidade para exprimir oralmente, e sobretudo por escrito, os seus raciocínios. Também Hoffer (1981) salienta as dificuldades dos alunos quando descrevem verbalmente um conceito, referindo que muitas vezes exprimem as suas ideias de forma imprecisa, por exemplo, quando um aluno diz que "um círculo é uma linha redonda" (p. 12). Guillén (2000) num estudo, com alunos do magistério de diferentes áreas educativas e alunos do 6.º ano, sobre a aprendizagem de conceitos geométricos relativos a sólidos, faz menção às dificuldades que os mesmos apresentavam em utilizar e expressar correctamente o vocabulário geométrico quando enunciavam propriedades ou relações, principalmente quando estavam implicados conceitos.

A necessidade de encontrar explicações para as dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem da Geometria tem levado diversos autores a investigar nesta área. Foi o caso dos professores Holandeses, Diana e Pierre van Hiele, que na década de 50 desenvolveram um modelo, no sentido de encontrar resposta para as dificuldades sentidas pelos alunos na aprendizagem da

Geometria. Estes autores presumiram que as dificuldades dos alunos poderiam provir do facto do ensino da Geometria envolver níveis cognitivos diferentes daqueles em que os alunos se encontravam.

Os van Hiele (citados em Crowley, 1987) propõem que a aprendizagem da Geometria se desenvolva numa sequência de cinco níveis de complexidade crescente: *visualização*; *análise*; *dedução informal*; *dedução formal* e *rigor*. Na literatura encontram-se listas muito completas de características dos diferentes níveis de van Heile (e.g., Afonso, 2002; Belchior, 1994; Burger & Shaughnessy, 1986; Crowley, 1987; Hoffer, 1981; Jaime, 1993; Jaime & Gutiérrez, 1990). Apresenta-se a seguir, apenas uma descrição muito sucinta das características de cada nível. No nível 1 – *Visualização*, os alunos reconhecem as figuras geométricas pela sua forma como um todo, ou seja, pela sua aparência física e não pelas suas partes e propriedades. No nível 2 – *Análise*, já reconhecem as figuras pelas suas propriedades e podem descobrir e generalizar essas propriedades através da experimentação. No nível 3 – *Dedução Informal*, os alunos podem estabelecer relações entre propriedades de uma figura e reconhecer classes de figuras. No nível 4 – *Dedução Formal*, a Geometria é entendida como um sistema axiomático, os alunos já fazem conjecturas e começam a compreender o significado de demonstrar, compreendem e fazem raciocínios lógico-formais. No nível 5 – *Rigor*, a Geometria é vista em abstracto, neste nível o aluno pode trabalhar numa variedade de sistemas axiomáticos, isto é, as geometrias não-euclidianas podem ser estudadas e diferentes sistemas podem ser comparados.

Segundo os van Hiele, a passagem de um nível de aprendizagem para o seguinte só é possível depois de cumprir integralmente os requisitos do nível imediatamente anterior. Estes autores consideram que a progressão através dos níveis pode ser influenciada pelos métodos de ensino usados pelo professor, uma vez que essa progressão resulta das experiências pessoais que permitem o desenvolvimento das capacidades de raciocínio geométrico necessárias para atingir um nível superior.

O modelo de van Heile tem sido alvo de numerosas investigações envolvendo investigadores e educadores de vários países. Uma das principais preocupações dos primeiros estudos foi a validação do modelo, e numa fase seguinte, o modelo passou a ser utilizado como suporte teórico dessas investigações, como por exemplo nos estudos de Belchior (1994), Burger e Shaughnessy (1986), Jaime e Gutiérrez (1990) e Gutiérrez, Pegg e Lawrie (2004). Os resultados do estudo realizado por Burger e Shaughnessy, em que participaram 13 alunos de vários níveis de ensino, desde o 1.º até ao 12.º ano e um aluno universitário, permitiram concluir que os alunos do ensino secundário tinham noções incompletas acerca das figuras geométricas básicas e das suas propriedades, encontrando-se no nível 2 de raciocínio geométrico de van Heile. De acordo com os autores estas observações podem explicar algumas das dificuldades que os alunos revelam na aprendizagem da Geometria do ensino secundário. Devido ao desfasamento entre o conhecimento dos alunos e a informação fornecida pelo professor ou apresentada nos manuais escolares, os alunos não conseguem acompanhar o trabalho de Geometria a nível formal. Esta opinião é corroborada por Hoffer (1981) ao afirma que os alunos revelam dificuldades na Geometria do ensino secundário, porque é dada demasiada ênfase às provas formais, quando eles não atingiram um nível suficientemente elevado de desenvolvimento de raciocínio, que lhes permita funcionar adequadamente a esse nível, ou seja, no nível 4.

Burger e Shaughnessy (1986) são peremptórios em afirmar que os níveis de pensamento têm carácter local, isto significa que um aluno pode raciocinar em níveis distintos em actividades diferentes. Salientam que alguns alunos oscilavam de um nível para o outro dentro da mesma actividade, esta oscilação era particularmente evidente em alunos do ensino secundário. Que:

> Pareciam regressar do nível 2 ao 1 como o seu nível predominante de raciocínio nas actividades (...). Estes estudantes pareciam preferir a relativa segurança no nível 1 de raciocínio e tendiam a evitar deduzir mesmo sabendo que lhes era acessível. Assim, os níveis pareciam ser algo mais dinâmicos do que estáticos e de uma natureza mais continua do que as suas descrições discretas nos levariam a crer (p. 10).

Os autores consideram que a formação de conceitos geométricos pode ocorrer durante um largo período de tempo e requer instrução específica.

Junqueira (1995) no seu estudo concluiu que em parte, a dificuldade que muitos alunos tiveram em fazer, e mesmo em compreender, o sentido da justificação de uma construção teve a ver com nível de van Hiele de desenvolvimento de raciocínio geométrico em que se encontravam. Segundo a autora, algumas justificações das construções apontadas pelos alunos participantes mostraram que muitos deles reconheciam propriedades das figuras geométricas, mas não eram capazes de fazer raciocínios dedutivos simples pareciam ter um desenvolvimento de nível 2. Outras justificações, que oscilaram entre observação da construção, identificação de propriedades e, por vezes, dedução de propriedades, pareciam indicar raciocínios em transição entre os níveis 1 e 2 ou entre os níveis 2 e 3. No final do estudo apenas um número reduzido de alunos terá atingido o nível 3. A autora salienta que o modelo de van Hiele de desenvolvimento de raciocínio geométrico revelou poder explicativo para muitas situações detectadas no trabalho desenvolvido com os alunos.

Síntese. A Geometria é uma área da Matemática de extrema importância para o desenvolvimento de destrezas e capacidades nos alunos. Ela constitui um meio privilegiado de desenvolvimento da intuição e da visualização espacial, de capacidades de verbalização e de organização lógica do pensamento matemático. Porém, é considerada uma área de difícil compreensão, onde geralmente, os alunos revelam inúmeras dificuldades. Os alunos apresentam dificuldades relacionadas, por exemplo, com o uso dos desenhos, a visualização espacial e representação e com a comunicação das suas ideias e raciocínios. Para explicar estas e outras dificuldades que os alunos revelam na aprendizagem da Geometria, os investigadores têm recorrido ao modelo de pensamento geométrico de van Heile. Este modelo ao propor um meio para identificar o nível de maturidade geométrica de um aluno e sugerir formas de ajuda-lo a progredir através dos níveis, permite não só justificar as dificuldades dos alunos na aprendizagem da Geometria, mas também identificar essas dificuldades e contribuir para a procura de soluções para as ultrapassar.

2.2. As tarefas de exploração e investigação

As tarefas de exploração e investigação são tarefas matemáticas cuja realização pode proporcionar aos alunos o desenvolvimento de várias capacidades de ordem superior. A sua implementação na sala de aula reveste-se da maior importância e implica uma dinâmica de aula que coloca novos desafios, quer a alunos, quer a professores.

Nesta secção, dividida em três subsecções, começa-se por fazer referência, na primeira subsecção, a diferentes tipos de tarefas que os alunos podem desenvolver quando trabalham conceitos matemáticos. Destaca-se a importância da realização de tarefas de natureza exploratória e investigativa no envolvimento dos alunos na sua aprendizagem e no desenvolvimento de determinadas capacidades. São descritas as várias etapas que envolvem a actividade investigativa e apresentados alguns resultados de trabalhos empíricos em que os alunos realizaram explorações e investigações. Na segunda subsecção, referem-se alguns dos factores que podem influenciar uma aula com tarefas abertas e as preocupações a ter na sua planificação. Descrevem-se os três momentos que, geralmente, envolve uma aula com tarefas de natureza exploratória e investigativa: a introdução da tarefa, o desenvolvimento da tarefa e a discussão e apresentação dos resultados. Na terceira subsecção com base na análise de diversos estudos empíricos, discutem-se algumas das principais dificuldades que os alunos revelam na realização de tarefas de natureza exploratória e investigativa.

2.2.1. As tarefas de natureza exploratória e investigativa como tarefas matemáticas

Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de descobrir, de explorar e de investigar. Só assim se pode perceber o que é a Matemática e compreender a sua função e utilidade na intervenção sobre o mundo (Braumann, 2002). Nesta perspectiva, o tipo de experiências proporcionadas aos alunos desempenham um papel relevante. A utilização de tarefas significativas poderá despertar a curiosidade e o entusiasmo dos alunos, fazendo apelo aos seus conhecimentos prévios e intuições, e envolvê-los na sua aprendizagem e na Matemática (NCTM, 2007; Ponte *et al.*, 1997).

Vários autores têm-se debruçado sobre a natureza das tarefas na aprendizagem da Matemática (e.g., Bispo, Ramalho & Henriques, 2008; Christiansen & Walther, 1986; Ponte, 2005; Stein & Smith, 1998). Ponte *et al.* (1997) distinguem tarefa de actividade matemática, "as tarefas matemáticas em que os alunos se envolvem (...) proporcionam o ponto de partida para o desenvolvimento da sua actividade matemática" (p. 73). A actividade, que pode ser física ou mental, refere-se ao aluno, "àquilo que ele faz num dado contexto, podendo incluir a execução de numerosos tipos de acção" (p. 73). Quando se está envolvido numa actividade realiza-se uma determinada tarefa (Ponte, 2005). A tarefa representa, assim, o objecto da actividade dos alunos, tendo em conta a sua aprendizagem e desenvolvimento (Christiansen & Walther, 1986). Ponte *et al.* (1997) mencionam que a tarefa é exterior ao aluno, mas é o aluno que tem de a interpretar e ao fazê-lo pode dar origem a actividades muito diversas (ou a nenhuma), dependendo da sua disposição e do ambiente da sala de aula. De acordo com estes autores, uma tarefa envolve dois aspectos: uma dada situação de aprendizagem e um conteúdo matemático. Tanto um aspecto como o outro "devem apontar de modo sugestivo para conceitos e processos e proporcionar ao aluno uma boa oportunidade de se envolver em actividade matemática" (p. 75). Bispo *et al.* (2008) consideram que as tarefas matemáticas "são pretextos de interacção e colaboração entre alunos e professor, funcionando, por isso, como 'motores' que promovem a aprendizagem e o desenvolvimento do conhecimento matemático" (p. 4).

Para Martins *et al.* (2002) é importante que os alunos quando trabalham conceitos matemáticos sejam confrontados com diversos tipos de tarefas, quer sejam exercícios mais orientados, quer sejam tarefas de desafio mais elevado recorrendo a um trabalho mais exploratório. É propondo "tarefas adequadas que o professor pode suscitar a actividade do aluno" (Ponte, 2005, pp. 11-12). São as tarefas e situações de aprendizagem que dão oportunidade aos alunos de se envolverem na criação da sua própria Matemática e de reflectirem sobre o seu próprio processo de aprendizagem (Bishop & Goffree, 1986). A exploração na sala de aula, dia após dia de "diferentes tipos de tarefas conduz ao desenvolvimento de ideias implícitas nos alunos sobre a natureza da Matemática" (Stein & Smith, 1998, p. 269).

A importância da actividade desenvolvida pelos alunos, a partir de uma dada tarefa é destacada pela APM (2009), ao considerar que a "aprendizagem da Matemática é sempre produto da actividade, e se esta se reduz, por exemplo, à resolução repetitiva de exercícios para aplicação de certas fórmulas, é exactamente isto que se aprende e vai perdurar" (pp. 41-42).

Ponte (2005) considera quatro tipos de tarefas matemáticas, exercícios, problemas, tarefas de exploração e investigações, atendendo a duas dimensões fundamentais, o grau de desafio matemático e o grau de estrutura da tarefa. O grau de desafio matemático relaciona-se com a percepção da dificuldade de uma questão e varia entre os pólos de desafio *reduzido* e *elevado* e o grau de estrutura varia entre os pólos *fechado* e *aberto*. Uma tarefa fechada:

> É aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas (pp. 16-17).

Assim, e de acordo com o autor, os exercícios e os problemas são tarefas fechadas, distinguindo-se pelo grau de desafio, sendo os exercícios tarefas de desafio reduzido e os problemas tarefas de desafio elevado. Em contrapartida as tarefas de exploração e as investigações são tarefas abertas, tendo as investigações um grau de desafio mais elevado em relação às tarefas de exploração. Christiansen e Walther (1986) afirmam ser mais produtivo, tendo em vista as necessidades educacionais, conceber o campo das tarefas como um *espectro* que se estende entre dois pólos: tarefas para as quais é conhecido um procedimento completo conduzindo à solução, frequentemente chamadas exercícios e tarefas para as quais tal procedimento é desconhecido, frequentemente chamados problemas. Estes autores sublinham:

> O carácter *subjectivo* e *relativo* dos problemas, no contexto de sala de aula: o que é um problema para um aluno pode não ser um problema para o seu par; e o que é um problema num nível de desenvolvimento pode ser uma tarefa de rotina num estádio posterior (p. 273).

Esta ideia é corroborada por outros autores (e.g., Abrantes 1989; Ernest 1996; Ponte, 2003a; Ponte 2005; Yeo, 2007) ao considerarem que o que é rotina para uma pessoa pode requerer uma nova abordagem por outra. Neste sentido, e tal como afirma Ponte (2005), um mesmo enunciado, pode corresponder a uma tarefa de exploração ou a um exercício, depende dos conhecimentos prévios de que o aluno dispõe. Por outro lado, é importante que a tarefa proposta tenha significado para o aluno, de modo a emergir o desejo para a realizar (Ernest, 1996). Uma tarefa aparentemente rotineira pode tornar-se num processo de investigação e uma tarefa com características de investigação pode não conduzir a aprendizagem se o aluno não tiver interesse em explorá-la. É essencial que o aluno aceite as tarefas como parte do seu processo de aprendizagem e que a actividade educacional seja desempenhada de forma consciente. Christiansen e Walther (1986) salientam que o papel pedagógico de uma tarefa deve ser apreciado na perspectiva dos alunos (necessidades, interesses e desempenhos) e na perspectiva da interacção pretendida 'à volta da tarefa' entre os professores e os alunos e apresentam a seguinte classificação de tarefas: *tarefas rotineiras* – exercícios de identificação; exercícios de algoritmos e exercícios de aplicação (problemas de palavras) e *tarefas não rotineiras* – Problemas de processo; problemas de pesquisa abertos e situações problemáticas.

De acordo com os autores esta separação em tarefas rotineiras e não rotineiras tem fundamento, pelo facto delas envolverem actividades e acções diferentes, dando origem a desenvolvimentos cognitivos distintos. Para vários autores, como por exemplo, Abrantes (1989), Orton e Frobisher (1996) e Ponte (2005), o valor educativo dos exercícios é claramente limitado à prática de conhecimentos já adquiridos, eles servem principalmente o propósito de consolidação de factos e técnicas. Orton e Frobisher consideram, assim, que o trabalho com tarefas rotineiras tem um contributo mínimo para a aprendizagem da Matemática, não sendo uma actividade apropriada para o desenvolvimento de novos conhecimentos. Ao contrário da resolução de problemas que é um processo pelo qual novo conhecimento pode ser descoberto. Schoenfeld (1996) refere que problemas bem escolhidos podem ser usados como ponto de partida para as discussões matemáticas, levando os alunos a pensar matematicamente.

Pólya (1995) sublinha que os alunos devem estar envolvidos em experiências matemáticas que se aproximem da actividade criativa dos matemáticos e não em procedimentos rotineiros que aniquilam o interesse e tolhem o desenvolvimento intelectual dos estudantes. Considera que se deve desafiar a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os seus conhecimentos e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, incutindo-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes alguns meios para alcançar este objectivo. Pelo seu lado, Gravemeijer (2005) destaca a importância de tarefas que ajudem os alunos a reinventarem a Matemática, como é o caso de problemas contextualizados que levem os alunos a construir modelos que se vão tornando uma base referencial para o nível da Matemática formal. Actividades com sentido matemático, como modelar e simbolizar, comunicar, explorar, conjecturar e provar podem levar os alunos a envolver-se no desafio intelectual de “empurrar as fronteiras do seu próprio conhecimento” (Schoenfeld, 1996, p. 70).

Santos, Brocardo, Pires e Rosendo (2002) consideram que um ensino que incida sobre a resolução de tarefas rotineiras é desajustado e salientam que aprender Matemática deve consistir, essencialmente, em *fazer* Matemática:

> De facto, considera-se importante que os alunos tenham oportunidades de fazer Matemática, particularmente através do trabalho com tarefas de natureza investigativa e exploratória vivendo, ao seu nível de maturidade, uma experiência com características idênticas à dos matemáticos profissionais (Santos *et al.*, 2002, pp. 83-84).

Também Christiansen e Walther (1986) indicam que as tarefas rotineiras, não devem ocupar um lugar central no ensino e na aprendizagem da Matemática. Na sua perspectiva, deve ser dada prioridade a processos educacionais em que os alunos estejam envolvidos, por si mesmos, em actividades de construção, exploração e resolução de problemas. Para estes autores o processo de ensino-aprendizagem da Matemática deve incluir tarefas que apoiem o desenvolvimento e uso de estratégias cognitivas relativamente às seguintes funções: investigação; inquirição; exploração; construção; argumentação racional e matematização, modelando situações externas ou internas à Matemática. Os autores sublinham que as tarefas de exploração têm: (1) um efeito *cativante*, uma vez que motivam e possibilitam a aprendizagem em níveis cognitivos de nível superior; (2) um efeito *reactualizante* no sentido em que o conhecimento e os procedimentos adquiridos se integram como ferramentas e meios necessários no desempenho de acções orientadas por finalidades e (3) um efeito *produtivo* pelo facto de o conhecimento e o saber fazer adquirido previamente, não serem apenas recordados para uso imediato, mas frequentemente, terem de ser moldados, modificados e desenvolvidos para se adaptarem às necessidades actuais.

Para Ponte (2005) cada tipo de tarefas desempenha um papel importante para atingir determinados objectivos curriculares. As tarefas de natureza mais acessível possibilitam aos alunos um elevado grau de sucesso, contribuindo, assim, para desenvolver a sua auto-confiança. As mais desafiantes são indispensáveis para que os alunos tenham uma efectiva experiência matemática. As de natureza mais fechada são importantes para desenvolver o raciocínio matemático nos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estrita e rigorosa entre dados e resultados. As de cunho mais aberto são fundamentais para o desenvolvimento de capacidades nos alunos, como a autonomia e a capacidade de lidar com situações complexas.

Ponte (2009) sublinha, porém, que as tarefas não devem ser tomadas isoladamente. Apesar de uma tarefa poder dar um contributo importante para a aprendizagem:

> É o conjunto das tarefas propostas que é decisivo para que os objectivos de uma certa unidade sejam atingidos. Assim, as tarefas a propor têm de estar inter-relacionadas entre si e devem ser apresentadas aos alunos em sequências coerentes (cadeias de tarefas) de modo a proporcionar um percurso de trabalho favorável à sua aprendizagem (p. 103).

De acordo com Ernest (1996) a actividade de todos os que estão a aprender Matemática, desde que produtiva, deve envolver a formulação e a resolução de problemas. Estes são aspectos que se relacionam, de muito perto com trabalho investigativo.

A discussão dos conceitos de problema e de investigação é frequentemente difícil de conduzir, porque ambos raramente são bem definidos ou entendidos (Orton & Frobisher, 1996), todavia existe consenso em que ambos estão relacionados com a inquirição matemática (Ernest, 1996). De acordo com este autor, o conceito de investigação é problemático por duas razões. Em primeiro lugar, apesar do termo investigação ser um substantivo, ele descreve um processo: a acção de investigar; procura; inquirição; pesquisa pormenorizada. Porém, em educação matemática tem havido uma mudança de significado, é usado frequentemente num sentido mais estrito, que tende a identificar uma investigação com a questão ou situação matemática que lhe serve como ponto de partida. Assim, a mudança não só substitui o significado de toda a actividade por uma das suas componentes, como também está centrada "no professor, focando o seu controlo na 'proposta de uma investigação' como tarefa, análoga à proposta de um problema, em contraste com uma perspectiva de investigação centrada naquele que aprende em que a actividade é conduzida por este" (Ernest, 1996, p. 29). Em segundo lugar, por se tratar de um processo gerador de novas questões, o foco da actividade muda e novas situações são geradas e exploradas, embora as investigações se possam iniciar a partir de uma questão ou situação matemática, o objectivo da inquirição é alterado por quem a conduz.

Contudo, Ernest (1996) aponta alguns aspectos que permitem caracterizar as investigações matemáticas e que as distingue de um problema, estando um deles relacionado com a formulação de questões. Num problema as questões estão formuladas à partida, já as investigações têm um ponto de partida muito menos definido, impondo-se a necessidade da formulação de questões que desencadeiem a actividade. Outro aspecto distintivo entre um problema e uma investigação relaciona-se com os seus objectivos. Num problema o objectivo está definido, cabendo ao aluno definir o caminho a seguir para chegar à solução, numa investigação parte-se à procura do desconhecido, cabendo a quem investiga explorar todos os caminhos partindo de uma dada situação. Utilizando uma metáfora geográfica pode-se dizer que o objectivo num problema é descobrir o caminho para chegar a um determinado lugar, estando a ênfase relacionada com chegada ao destino, enquanto numa investigação “o objectivo é a viagem não o destino” (Pirie, 1987, citado em Ernest, 1996, p. 30), a ênfase está na exploração do desconhecido. A partir de uma dada situação, distintos problemas podem ser formulados e diferentes caminhos podem ser escolhidos (Love, 1996). Assim, nesta perspectiva, a resolução de problemas conduz a um processo convergente, ao contrário da exploração de uma investigação que se apresenta como um processo divergente, atendendo a que os alunos podem definir metas diferentes para prosseguir (Ernest, 1996; Yeo, 2007). Numa investigação “sendo possível concretizar de vários modos os pontos de partida, os pontos de chegada, naturalmente também podem ser diferentes” (Ponte, 2003a, p. 100). Ernest (1996) considera, ainda, que apesar dos problemas e das investigações poderem ser entendidas como abordagem pedagógica à Matemática, têm características distintas, uma vez que o papel do professor e dos alunos é diferente. Numa abordagem de resolução de problemas é o professor que formula o problema, cabendo ao aluno encontrar o caminho que o conduz à solução. Numa abordagem investigativa o professor poderá escolher a situação de partida, mas é o aluno que, em princípio, formula os problemas e as questões dentro da situação proposta e define os seus próprios caminhos.

Neste estudo as tarefas de exploração e investigação são entendidas como tarefas de cunho aberto em que é dada ênfase a processos matemáticos tais como: a formulação de questões; formulação, teste, justificação e prova de conjecturas e ainda a divulgação de resultados. Podem ter como ponto de partida uma questão ou uma situação proposta pelo professor ou pelo aluno. É de realçar que não se faz distinção entre as tarefas de natureza mais exploratória ou mais investigativa, chamando-se tarefas de exploração e investigação ou “investigações” a todas elas. Isso, porque é complicado saber à partida qual o grau de dificuldade que uma tarefa aberta terá para um certo grupo de alunos (Ponte, 2003b).

Para Braumann (2002) aprender Matemática passa por uma vertente investigativa, na qual a exploração e descoberta de estratégias são processos indispensáveis e que só se podem apreender fazendo investigação matemática. Nesta perspectiva o ensino deve ser orientado para que os alunos adquiram *poder matemático*, isto é, capacidades para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, bem como destrezas para usar uma diversidade de métodos matemáticos para resolver problemas não rotineiros (NCTM, 1991). O NCTM (1991, 1994) defende que devem ser dadas oportunidades aos estudantes para investigar e formular questões a partir de situações problemáticas, assim como "para criar novos problemas através da modificação das condições de um dado problema" (NCTM, 1994, p. 97).

Segundo Lerman (1996) a educação matemática deve desenvolver nos alunos o sentido crítico e a capacidade de analisar situações, de estabelecer conjecturas, de formular problemas, de deduzir, de tirar conclusões e de reflectir sobre os resultados. No mesmo sentido, Love (1996) considera que os alunos devem ter oportunidade de se envolverem em actividades matemáticas que lhes permitam adoptar uma atitude crítica perante a sua aprendizagem e desenvolver a capacidade de pensar por eles próprios em Matemática.

De acordo com a APM (2009), algumas das melhores situações de aprendizagem resultam:

> Daquelas questões para as quais nem o professor nem os alunos conhecem os caminhos de solução, e que estão assim verdadeiramente abertas à curiosidade de todo o grupo. E das quais resultam muitas vezes processos inéditos de resolução ou mesmo pequenas descobertas (p. 46).

A importância da realização de investigações matemáticas pelos alunos tem vindo a ser defendida por vários autores (e.g., Ernest, 1996; Goldenberg, 1999; Lerman, 1996; Love, 1996; Mason, 1996; Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.*, 1999; Ponte *et al.*, 2003; Santos *et al.*, 2002) por favorecerem o envolvimento dos alunos na sua aprendizagem.

Ponte *et al.* (2003) afirmam que:

> O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos com vista a atingir um objectivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações. Ao requerer a participação do aluno na formulação das questões a estudar, essa actividade tende a favorecer o seu envolvimento na aprendizagem (p. 23).

As explorações e investigações matemáticas podem propiciar actividades educativas importantes, no desenvolvimento e consolidação de conceitos e de ideias matemáticas e podem permitir uma visão mais ampla da Matemática, muito mais próxima da verdadeira prática do matemático (Ponte & Matos, 1996). Ao estimularem a participação dos alunos favorecendo uma aprendizagem significativa e ao proporcionarem pontos de partida diferentes facilitando o envolvimento dos alunos com diferentes níveis de competências e o reconhecimento e/ou estabelecimento de conexões, as investigações matemáticas apresentam importantes potencialidades educacionais (Santos *et al.*, 2002). Martins *et al.* (2002) referem que o trabalho com investigações matemáticas pode permitir: (1) o desenvolvimento de competências matemáticas, integrando atitudes, capacidades e conhecimentos; (2) a oportunidade de abordar e relacionar dinamicamente conteúdos matemáticos, valorizando as suas conexões e (3) uma compreensão global da natureza da actividade matemática.

As investigações matemáticas como actividades de ensino-aprendizagem ajudam a trazer para a sala de aula, o espírito da actividade matemática genuína. O aluno formula questões, estabelece conjecturas, realiza provas e refutações, justifica e apresenta resultados, argumenta e discute com os colegas e com o professor. Em particular, a exploração de investigações geométricas:

> Pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e da evolução da matemática (Ponte *et al.*, 2003, p. 71).

De acordo com vários autores (e.g., Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira & Oliveira, 1999; Martins *et al.*, 2002) na realização de investigações matemáticas identificam-se quatro etapas. A primeira está relacionada com o reconhecimento da situação, a sua exploração inicial e a formulação de questões a investigar; a segunda refere-se ao processo de formulação de conjecturas; a terceira envolve a testagem das conjecturas e eventual reformulação e a quarta diz respeito à justificação, prova e avaliação do trabalho realizado. Martins *et al.* (2002) consideram que as quatro etapas são igualmente importantes, exigem tempo e não faz sentido tentar eliminar ou esquecer qualquer uma delas. Ponte (2003a) refere que cada uma destas etapas pode incluir várias actividades que são apresentadas na tabela 1.

Tabela 1 – Etapas na realização de uma investigação.

Etapas de uma investigação	**Actividades**
Exploração e formulação de questões	Identificar uma situação problemática Explorar a situação problemática Formular questões
Formulação de conjecturas	Organizar dados Formular conjecturas
Teste e reformulação de conjecturas	Realizar testes Refinar conjecturas
Justificação e avaliação	Justificar conjecturas Avaliar o raciocínio ou resultado do raciocínio

O autor salienta que nem sempre estas etapas seguem a ordem indicada na tabela, muitas vezes uma conjectura inicial aparece em simultâneo com a formulação das questões, o teste e validação de uma conjectura pode levar, por exemplo, à formulação de novas questões e novas conjecturas. Esta ideia é também defendida por outros autores (e.g., Brocardo, 2001; Yeo, 2007). Brocardo sublinha que a actividade investigativa envolve um ciclo marcado por vários processos matemáticos:

> Que não podem ser apenas seguidos de uma forma linear e ordenada. (...) A recolha e organização de dados, a formulação e teste de conjecturas são fases do processo investigativo que devem ser percorridas tanto num sentido como noutro, sendo fundamental analisar as interacções entre elas (p. 541).

A autora usou a expressão *não linearidade* para resumir esta característica da actividade investigativa.

A actividade dos alunos quando se envolvem na realização de investigações matemáticas tem algum paralelo com o trabalho que os matemáticos fazem quando formulam problemas ou procuram aplicar a Matemática a situações complexas (Segurado, 1997).

Exploração e formulação de questões. O estabelecimento de objectivos bem definidos e precisos e a formulação de questões e problemas é um aspecto de grande relevância na realização de uma investigação (Ponte & Matos, 1996; Yeo, 2007). Esta ideia é corroborada por Silver (1996) que considera a formulação de problemas "um aspecto importante da actividade matemática e do processo intelectual" (p. 139). O autor afirma que aqueles que perspectivam as finalidades da educação matemática em termos de proporcionar aos alunos "experiências autênticas, como as que caracterizam a actividade dos matemáticos profissionais, identificarão a formulação de problemas como uma componente importante em virtude do seu papel fundamental na criação matemática" (p. 148). Para Yeo e Yeap (2009) quando os alunos realizam uma investigação devem primeiro tentar entender a tarefa e, em seguida, formular os seus próprios problemas para resolver. Na mesma linha de ideias encontram-se Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.* (1999) ao salientarem que após um certo trabalho de explicitação da situação proposta, é necessário começar por colocar questões produtivas e interessantes.

Formulação e teste de conjecturas. Depois de compreendida a questão ou a situação matemática que serve como ponto de partida para a actividade e o estabelecimento de objectivos ou problematização, o aluno analisa casos específicos ou dados empíricos, que levam à formulação de conjecturas (Yeo & Yeap, 2009). Esta é uma etapa fundamental da experiência matemática, é aí que a intuição dos alunos pode intervir e fortalecer-se (APM, 2009). Para Mason, Burton e Stacey

(1988) a formulação de conjecturas é o processo de perceber ou 'adivinhar' que alguma coisa deve ser verdade e que implica investigar a sua veracidade. Uma conjectura "é uma afirmação que parece razoável, mas cuja veracidade não foi demonstrada. Em outras palavras, não foi justificada convincentemente e não se sabe tão pouco se existem exemplos que a contradigam, nem se sabe que tenha alguma consequência falsa" (Mason *et al.*, 1988, pp. 73-74). Nem todas as conjecturas têm o mesmo alcance matemático. Algumas referem-se a factos relativamente simples ou evidentes. Outras são peculiarmente importantes porque a partir delas é possível extrair muitas conclusões (Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.*, 1999).

Mason *et al.* (1988) consideram que a formulação de conjecturas resulta de duas actividades fundamentais: a particularização ou especialização, provavelmente a mais usual e a analogia com situações anteriormente exploradas. Esta última depende da experiência anterior de quem está a investigar a questão ou situação. Os autores salientam que é importante começar por analisar exemplos particulares, para formular as primeiras conjecturas. Estas, à medida que mais especialização é feita, ou seja, que mais exemplos são analisados, começam naturalmente a ser refutadas ou então reformuladas, dando origem a novas conjecturas. O processo de formulação de conjecturas pode, assim, ser representado como um processo cíclico como mostra a figura 5.

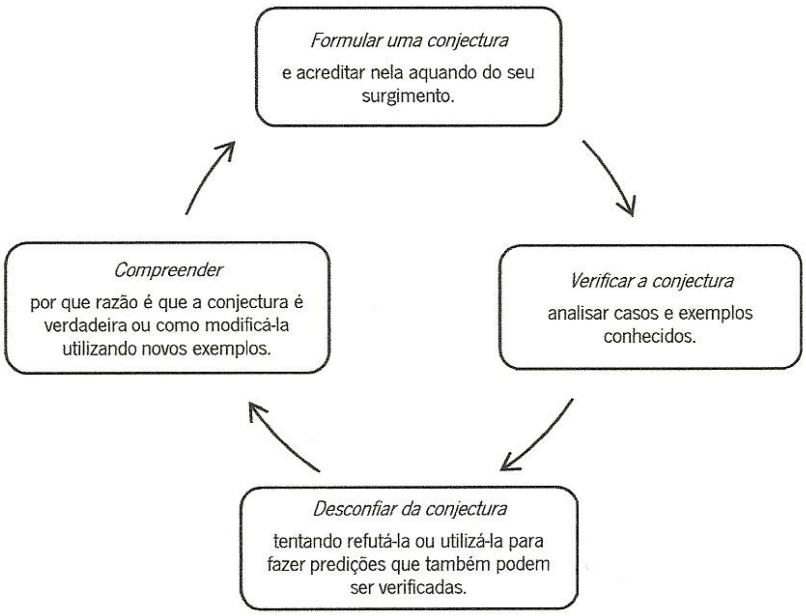


Figura 5. Processo de formulação de conjecturas (Mason *et al.*, 1988).

Atendendo a que a formulação e refinamento de conjecturas envolvem o acto criativo de generalizar, não basta acumular exemplos sistematicamente, é necessário organizá-los e explorar as analogias que se observam. O que requer e mobiliza diversas capacidades intelectuais relevantes, como o espírito de observação, a sistematização de resultados parcelares, a imaginação e poder de abstracção (APM, 2009; Mason *et al.*, 1988).

Uma vez formulada, a conjectura tem que ser *testada*, ou seja, tem que se investigar para ver se se pode justificar convincentemente, ou se se deve modificar, ou então refutar. Para refutar uma conjectura basta um contra-exemplo, contudo o erro pode estar no contra-exemplo. Pode acontecer também que uma conjectura que se mostra falsa, com uma pequena modificação se torne numa conjectura válida (Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.*, 1999).

Justificação/prova de conjecturas. Uma conjectura depois de formulada e testada não tem ainda o *estatuto* de verdade matemática, é preciso justificá-la, procurando argumentos que a validem (Brocardo, 2001). Alguns autores designam este processo por demonstração ou prova (e.g., Battista & Clements, 1995; Hanna 2000; Mariotti, 2000), outros como Mason *et al.* (1988) por justificação e convencimento. Para estes últimos, justificar uma conjectura significa encontrar um esquema subjacente ou uma relação que ligue aquilo que se sabe com o que se quer justificar. Os autores consideram importante que cada um se convença a si e aos outros da validade das conjecturas que formulou e acrescentam que tornar uma justificação convincente pode ser muito difícil. Para o conseguir indicam que é essencial adquirir hábitos de tratar as afirmações como conjecturas, procurar testá-las, tentando refutá-las ou encontrar justificação e analisar criticamente tanto os seus argumentos como os dos outros.

É de salientar que na literatura os termos demonstração e prova, nem sempre são usados com o mesmo significado. No entanto, neste estudo são utilizados indistintamente, por se entender que ambos se referem a um raciocínio convincente e suficientemente rigoroso que valida ideias matemáticas.

Muitos autores defendem a prova formal, outros acreditam que os alunos devem mover-se gradualmente a partir da investigação informal para uma visão mais orientada para a prova formal (Battista & Clements, 1995). Para Oliveira (2002) as inferências do tipo dedutivo que tradicionalmente predominam na Matemática formal (em que o conhecimento já está construído), numa perspectiva investigativa, articulam-se com outros tipos de pensamento inferencial – indutivo, abdutivo e transformativo. Contribuindo para o desenvolvimento de uma actividade epistemologicamente mais relevante na aula. Os alunos ao desenvolverem o seu pensamento indutivo recorrem à observação e análise de situações matemáticas particulares, que depois procuram generalizar, através de múltiplas conjecturas. E "quando não se conhecem contra-exemplos a uma generalização, ou quando os que se conhecem são epistemologicamente irrelevantes, surge, naturalmente, a demonstração para a validar (Oliveira, 2002, p. 27). Em contextos investigativos, o autor considera importante, "por razões epistemológicas e educativas, que os alunos validem, progressivamente, os seus resultados: da pré-demonstração (argumentação convincente), passando pela proto-demonstração (provas mais elaboradas), até à demonstração propriamente dita" (p. 34).

Hanna (2000) considera que a função da prova a nível da sala de aula é promover a compreensão matemática, "a prova ajuda a ver não só que é verdade, mas também porque é verdade" (p. 8). E especifica que uma das formas mais eficazes para usar a prova com essa finalidade é tirar partido da visualização, da exploração e de argumentos baseados na observação, de modo a promover a compreensão da Matemática. Hanna (1996) afirma que na sala de aula não é preciso apresentar um rigor absoluto, mas sim o rigor suficiente para se obter entendimento e convencer. Para Davis e Hersh (1995) um dos objectivos da demonstração, é convencer os outros através da razão, da psicologia e da intuição sobre a verdade de certas afirmações.

Lakatos referido em Davis e Hersh (1995) considera que a Matemática tal como outras ciências é falível e não induvidável, para ele uma demonstração significa "explicações, justificações, elaborações que tornam a conjectura mais plausível e mais convincente, ao mesmo tempo que vai ficando mais pormenorizada e precisa sobre a pressão dos contra-exemplos" (p. 324). Para o autor cada passo da demonstração está sujeito à crítica, que pode ser a apresentação de um contra-exemplo, que Lakatos designa por "contra-exemplo local", se desafia um determinado argumento ou por "contra-exemplo global", se desafia a própria conclusão. Lakatos apresenta o modelo da figura 6 onde se identifica um conjunto de processos e se salientam relações entre eles, que pode ajudar os alunos a criar Matemática.

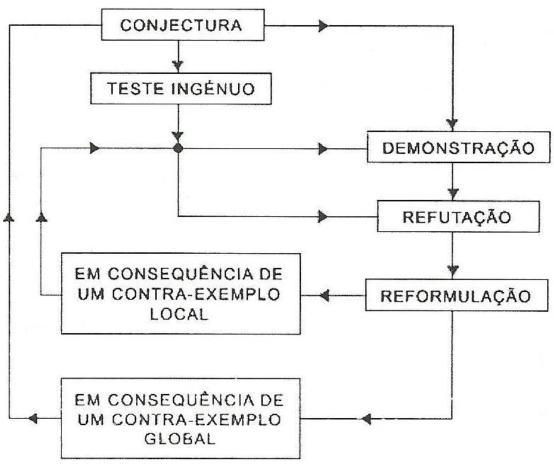


Figura 6. Modelo simplificado de Lakatos para a heurística da descoberta Matemática (Davis & Hersh, 1995, p. 276).

Depois de feita uma abordagem aos processos característicos da actividade investigativa, discutem-se os resultados de alguns estudos empíricos que têm mostrado que a realização de tarefas de exploração e de investigação pode propiciar o desenvolvimento de capacidades de nível superior e promover novas aprendizagens. Em 1995, um grupo de investigadores e de professores dos ensinos básico e secundário começou a desenvolver o Projecto Matemática Para Todos (MPT), em torno da realização de investigações matemáticas na sala de aula. Os dados foram recolhidos através da observação de aulas onde as tarefas foram experimentadas e mostraram, segundo Abrantes (1999), um envolvimento significativo dos alunos, os quais tendem a assumir um papel mais activo e mais autónomo nas aulas. Mostraram também, que a realização de tarefas de investigação pode proporcionar discussão e reflexão em torno de aspectos centrais da própria Matemática e ainda, que explorar situações e ideias, fazer conjecturas, generalizar, discutir, justificar e provar tornam-se elementos chave do trabalho na sala de aula.

Segurado (1997) num estudo com alunos do 6.º ano, concluiu que as tarefas de exploração e investigação proporcionam aos alunos um contexto rico em desafios e que os alunos se sentem motivados e empenhados na sua realização. A autora refere que a realização deste tipo de tarefas, ao levar os alunos a expor as suas ideias e a ouvir as dos colegas, a discutir estratégias, a argumentar e defender as suas opiniões e criticar as dos outros, desenvolve nos alunos processos de raciocínio necessários à compreensão e construção da Matemática. Refere também, que as investigações permitem "íntima relação entre os conteúdos ensinados e os processos de raciocínio. Ao mobilizarem conhecimentos anteriormente adquiridos dão-lhes um outro significado contribuindo desta forma para uma melhor apropriação destes pelos alunos" (p. 135). Segurado salienta, ainda, que os alunos com o decorrer do estudo melhoraram a capacidade de comunicação matemática, assumindo a argumentação um lugar de destaque e que no final do estudo os quatro alunos participantes alteraram, de algum modo, as suas concepções sobre a Matemática.

Fonseca (1999) analisou com detalhe as interacções que ocorrem quando os alunos trabalham em pequenos grupos na resolução de problemas e sobre tarefas de natureza investigativa, num grupo de quatro alunos de uma turma do 8.º ano. A autora concluiu que um ambiente de sala de aula onde se valorize uma metodologia de trabalho em pequeno grupo e se privilegie a resolução de problemas e a realização de investigações matemáticas favorece 'o fazer Matemática', promove a comunicação, a cooperação e a autonomia dos alunos. Fonseca nas conclusões do seu estudo específica, ainda, que tanto a resolução de problemas como a realização de investigações:

> Envolvem características da actividade matemática, como explorar, conjecturar, testar, argumentar. No entanto, nas actividades investigativas, os alunos acedem a níveis mais amplos da actividade, quando tomam decisões sobre o que vão fazer ou quando se envolvem em processos de aprofundamento e de generalização (P. 126).

Azevedo (2009) ao procurar compreender os processos de raciocínio usados por três alunos do 10.º ano na resolução de problemas e em tarefas de exploração e investigação, com recurso à utilização da calculadora gráfica, no trabalho sobre funções. Conclui que a realização de tarefas de exploração e investigação contribui para desenvolver capacidades importantes como a identificação de regularidades, a formulação, teste e justificação de conjecturas e para o desenvolvimento das capacidades de comunicar matematicamente e de justificar processos. Concluiu também que as discussões e reflexões sobre as tarefas permitem a clarificação de pensamentos intuitivos e alargam o tipo de estratégias dos alunos.

Fonseca (2000) estudou os processos matemáticos utilizados por alunos do 10.º ano, na realização de tarefas de investigação nas aulas de Matemática, assim como o discurso promovido nessas aulas e concluiu que com o passar do tempo, os alunos tornaram-se mais autónomos e passaram a valorizar tanto as respostas como os processos usados. A autora salienta que as novas tecnologias se mostraram um bom auxiliar da actividade de investigação.

De acordo com Brocardo (2001) que trabalhou com alunos de uma turma do 8.º ano, tendo estudado com mais detalhe o caso de três desses alunos, a exploração continuada de investigações é uma experiência que para além de motivar os alunos, favorece um ambiente de aprendizagem em que eles participam activamente e facilita a compreensão de ideias matemáticas. Também Junqueira (1995) refere que as tarefas de investigação de construções com recurso aos AGD com vista à formulação e validação de conjecturas se mostraram muito ricas do ponto de vista do desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Os diversos estudos revelam que a realização de explorações e investigações matemáticas pode constituir uma ocasião para os alunos se envolverem no seu processo de aprendizagem. Permite uma melhor compreensão da natureza dos processos de 'fazer Matemática' – explorar, identificar padrões, formular e testar conjecturas, generalizar e demonstrar. E Facilita o desenvolvimento integrado de atitudes e capacidades.

Síntese. O tipo de tarefas propostas na aula de Matemática parece desempenhar um papel importante na actividade do aluno. Há vários tipos de tarefas, tais como os exercícios que são tarefas mais acessíveis, cujo propósito é o de consolidação de conhecimentos, os problemas que envolvem um grau de desafio mais elevado e as tarefas de exploração e as investigações que são tarefas com estrutura aberta. Diversos autores defendem que o ensino-aprendizagem da Matemática deve envolver os alunos na construção dos seus conhecimentos e não apenas na resolução de tarefas rotineiras que pouco contribui para novas aprendizagens. Destacam-se assim, os problemas, as tarefas de exploração e as investigações matemáticas. Os problemas e as investigações são tarefas com um grau de desafio elevado, mas apresentam alguns aspectos distintos, nomeadamente o ponto de partida e o objectivo. Nas investigações o ponto de partida é pouco preciso, havendo necessidade de formular questões e definir objectivos.

A realização de investigações e tarefas exploratórias ao envolver a explicitação de objectivos e a formulação de questões, a formulação e teste de conjecturas, a procura de argumentos que possam validar as que resistem a sucessivos testes e a comunicação de resultados, ajuda a aproximar a actividade dos alunos da actividade dos matemáticos. Vários estudos realizados, em diferentes níveis de ensino, revelam que a realização de tarefas de natureza exploratória e investigativa contribui de forma significativa para desenvolver o pensamento matemático dos alunos e para a compreensão de novos conceitos. E parece ter potencialidade para estimular e desafiar a curiosidade natural dos alunos, bem como proporcionar-lhes o desenvolvimento de várias capacidades. Assim, as tarefas de exploração e investigação como tarefas matemáticas ao exigirem um grau elevado de experimentação, exploração, reflexão e comunicação, constituem uma ferramenta educacional que pode promover aprendizagens significativas.

2.2.2. Dinâmica de uma aula com tarefas de natureza exploratória e investigativa

A dinâmica de uma aula resulta de muitos factores. Depende das tarefas matemáticas propostas e de factores que têm a ver com os alunos (como por exemplo, conhecimentos, experiências de trabalho, atitudes face à Matemática). Mas, depende também, naturalmente, do próprio professor, do modo como introduz as tarefas e apoia os alunos na sua realização (Ponte *et al.*, 1997). Assim sendo, nesta subsecção, para além de se abordarem aspectos relacionados com o trabalho dos alunos, abordam-se também alguns aspectos do trabalho do professor.

Uma aula, que de alguma maneira todos conhecemos, em que é explicada a matéria e são resolvidos e corrigidos exercícios, tem com certeza uma dinâmica bem diferente da proporcionada por uma aula, onde se procura que os alunos sejam construtores activos do seu próprio conhecimento. Ao se considerar o envolvimento dos alunos na sua aprendizagem é de ter em conta a importância do contributo que a actividade investigativa pode ter quando desenvolvida na sala de aula. Pois, o trabalho com tarefas de exploração e investigação, em que a situação ou questões iniciais são pouco estruturadas, proporciona aos alunos a vivência de processos característicos da Matemática – formulação de questões, recolha e organização de dados, formulação e teste de conjecturas e validação das que resistem a sucessivos testes.

A dinâmica de uma aula com tarefas de natureza exploratória e investigativa tem características próprias, podendo, de certa forma, ser influenciada por diversos factores (Tudella *et al.*, 1999). Alguns deles relacionados com a forma como a aula é planeada, não no sentido de planear os 'caminhos' que os alunos vão seguir, mas no sentido de planear o tipo de trabalho a desenvolver. As tarefas em geral são propostas pelo professor, porém também podem ser sugeridas pelos alunos, ou emergir da actividade desenvolvida pelos mesmos (Ponte, 2005). Christiansen e Walter (1986) sublinham que a selecção, adaptação ou construção de situações possíveis de serem investigadas é uma actividade exigente. Apesar de existirem muitas propostas de tarefas já construídas, o professor tem que as descobrir, analisar e adaptar aos seus alunos. Este é o primeiro passo na planificação para a sua apresentação na aula, um trabalho criativo que envolve a ponderação de diferentes aspectos, tais como: (1) o conteúdo matemático; (2) os conhecimentos necessários para a realização da tarefa (3) as características e especificidades do grupo turma, nomeadamente experiências anteriores, capacidades e conhecimentos prévios dos alunos; (4) os recursos e materiais de apoio que podem ser usados e (5) o currículo e alguns constrangimentos de espaço e tempo (Oliveira, Segurado, Ponte & Cunha, 1999; Ponte, 2009; Santos, *et al.*, 2002; Sullivan, 2008).

Também o grau de estrutura da tarefa (Brunheira, 2002; Tudella *et al.*, 1999) e o tipo de linguagem utilizada na redacção do enunciado (Porfírio & Oliveira, 1999) são aspectos a ter em conta aquando da concepção/adaptação da tarefa, no sentido de promover a actividade investigativa. Tudella *et al.* (1999) apontam a necessidade de se ter sempre presente:

> Que a tarefa deve proporcionar uma actividade de investigação *para todos* os alunos e também ter em conta a sua realidade cognitiva e cultural, de modo a despertar a curiosidade e o estímulo, proporcionando-lhes experiências diversificadas e desafiantes, fazendo apelo aos seus conhecimentos prévios e intuições (p. 88).

Neste sentido Christiansen e Walter (1986) indicam que é importante que sejam seleccionadas tarefas que motivem os alunos para a actividade e que, tanto quanto possível, façam isto em e por elas próprias.

Assim, a selecção e adaptação de tarefas, é uma etapa de grande importância, pois tal como afirmam Bishop e Goffree (1986) a actividade dos alunos será afectada pela escolha das tarefas pelo professor e naturalmente pela capacidade do mesmo desenvolver e conduzir as actividades com sucesso. Stein e Smith (1998) distinguem três fases pelas quais passa uma tarefa: a primeira é o modo como ela surge no currículo ou em materiais de ensino; a segunda, a forma como ela é apresentada pelo professor e a terceira a maneira como ela é desenvolvida pelos alunos. De acordo com as autoras a natureza das tarefas muda frequentemente quando passa de uma fase para outra. Por vezes, tarefas aparentemente ricas podem ser subaproveitadas por uma insuficiente exploração e tarefas rotineiras podem conduzir a um trabalho de nível elevado de exigência cognitiva (Martins *et al.*, 2002). Desta forma é tão importante a selecção das tarefas, como a sua exploração na sala de aula. Há, assim, que tomar um conjunto variado de opções relacionadas com questões da organização e gestão da sala de aula (Santos *et al.*, 2002). Sendo algumas dessas opções: o modo como os alunos vão trabalhar na aula, se individualmente, se em pequenos grupos; a constituição dos grupos; a forma como a tarefa vai ser apresentada; o momento em que haverá trabalho em grande grupo e o modo como vão ser confrontados os processos usados.

A metodologia de trabalho mais comum nas aulas em que os alunos realizam investigações matemáticas parece ser o trabalho em pequenos grupos, como é afirmado por Tudella *et al.* (1999).

> De um modo geral, na fase de desenvolvimento da tarefa, a organização que se apresenta mais adequada para a realização da grande maioria das investigações parece ser o trabalho em pequenos grupos, uma vez que se pode criar assim um ambiente propício à troca de ideias, confronto de opiniões e argumentos, onde o receio de 'arriscar' conjecturas é relativamente reduzido (p. 88).

De facto, em vários estudos onde os alunos trabalharam com investigações matemáticas, por exemplo, Brocardo (2001), Ferreira (2007), Fonseca (1999), Ponte e Matos (1996) e Segurado (1997), a opção-base adoptada para a exploração das tarefas foi o trabalho de grupo. Por se tratar de situações onde é relevante a exploração de diferentes caminhos, a discussão de pontos de vista diferentes e a cooperação são fundamentais. Este assunto será abordado mais à frente noutra secção.

Após a escolhida da tarefa e de serem tomadas algumas opções quanto à gestão e organização da sala de aula, o professor tem que se preocupar com a exploração da tarefa. Brunheira (2002) refere que nesta fase de preparação de uma aula com investigações se deve ter em conta a perspectiva dos alunos, uma vez que o seu objectivo principal é prever as resoluções que eles poderão realizar e as dúvidas que lhes poderão surgir, de forma a que o professor prepare a sua forma de actuação. Pois, tal como é afirmado por Christiansen e Walter (1986) a actividade e a aprendizagem dos alunos "depende fortemente das formas pelas quais a tarefa é apresentada pelo professor e das suas interacções com os alunos na aula" (p. 277).

A estrutura de uma aula com tarefas de investigação, de acordo com Christiansen e Walter (1986) e também com Ponte *et al.* (2003) envolve três fases: a introdução da tarefa; o desenvolvimento da tarefa e a discussão de resultados.

Introdução da tarefa. A introdução da tarefa, que normalmente está a cargo do professor é um momento extremamente importante, principalmente quando os alunos não estão familiarizados com a actividade investigativa. Desse momento pode depender tudo o resto, embora deva ser curto, de modo que os alunos não percam o interesse pela tarefa (Oliveira, Ponte, Santos & Brunheira, 1999; Ponte *et al.*, 2003). O modo como a tarefa é apresentada aos alunos constitui, um elemento extremamente importante da actuação do professor. Não é razoável supor que os alunos vão ler as questões ou situações, necessariamente, da mesma forma como quem as gerou (Ponte, 2001). Como afirma Mason (1996), "as questões são apenas palavras, com um ponto de interrogação no final" (p. 78). Uma questão ou situação por si só pode não gerar investigação. É importante recriar a situação que se propõe como sendo uma questão do aluno (Ponte, 2001).

Tudella *et al.* (1999) consideram que a apresentação da tarefa aos alunos poderá ser feita de diversos modos. Um deles é o que estes autores designam por método misto, que inclui a distribuição do enunciado escrito da tarefa aos alunos acompanhada por uma apresentação oral, que pretenderá, por um lado, clarificar a tarefa e explicitar o tipo de trabalho que se quer desenvolver e, por outro, criar um ambiente propício ao desenvolvimento do trabalho dos alunos. Esta apresentação oral poderá ser constituída pela leitura do enunciado da tarefa e por um, ou outro comentário, que o professor julgue pertinente. Contudo, como alertam os autores há, por um lado, o risco de se tecerem demasiadas considerações conduzindo os alunos num determinado sentido, o que pode levar à perda de aspectos relevantes da investigação e por outro lado, dando pouca informação, corre-se o risco de a tarefa não ficar suficientemente clara para os alunos, o que pode criar potenciais obstáculos ao seu trabalho.

Outro modo de introduzir a tarefa é apresentá-la por escrito sem que se faça uma discussão inicial do enunciado, deixando que os alunos iniciem a sua exploração com mais autonomia. Neste caso, o enunciado da tarefa deve estar suficientemente claro, de modo a que os alunos percebam o que se pretende, caso contrário implicará naturalmente um maior apoio do professor junto de cada grupo, no sentido de ajudar os alunos a entender o que se pretende (Tudella *et al.*, 1999). Nalguns casos a tarefa poderá ser apresentada apenas oralmente, podendo eventualmente, o professor ir registando algumas informações importantes no quadro. Pode ainda, pensar-se no caso da introdução da proposta de trabalho não ser preparada previamente pelo professor, surgindo a tarefa na aula, a partir da actividade dos alunos (Fonseca, Brunheira & Ponte, 1999). Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira (1999), no que respeita ao modo de apresentar a tarefa aos alunos, consideram que um enunciado escrito tem a vantagem de fixar a situação de partida, permitindo aos alunos regressar a ela sempre que o desejarem.

Ainda na primeira fase é relevante que os alunos sejam informados sobre o papel que o professor pretende desempenhar, eles devem saber que o professor os pode apoiar, mas que o desenvolvimento da actividade depende principalmente da sua iniciativa (Tudella *et al.*, 1999).

Desenvolvimento da tarefa. Durante o desenvolvimento da tarefa deve haver cuidado para que a aula se centre na actividade do aluno, nas suas ideias e pesquisas. Ao professor cabe-lhe compreender como se vai processando o trabalho dos alunos e prestar apoio sempre que seja necessário. Tendo contudo, o cuidado de não dar as respostas, mas antes levar os alunos a desenvolverem atitudes questionadoras, incentivá-los à reflexão e à procura de argumentos que justifiquem as suas ideias e conjecturas e estimular o confronto de opiniões, de modo a que eles possam definir caminhos e apurar significados. O ambiente de aprendizagem a desenvolver, é assim, em parte, determinado pelas intervenções do professor, cujo papel deve ser, sobretudo de orientador (Oliveira, Ponte *et al.*, 1999). Mesmo quando os alunos seguem caminhos que não os levarão ao sucesso, o professor deve-lhes dar tempo para que seja a experiência a mostrar-lhes o erro. Porém, é relevante que o professor não deixe que uma exploração que leva ao erro se prolongue por muito tempo, pois poderá provocar desmotivação nos alunos (Tudella *et al.*, 1999). Neste caso é importante que o professor dê algumas orientações que levem os alunos a optar por outro caminho possível. É fundamental que o professor crie uma dinâmica de trabalho em que os alunos para além de descobrirem ideia, as saibam argumentar. De acordo com o NCTM (1994) um dos aspectos do papel do professor é 'provocar' o raciocínio dos alunos em Matemática, perguntando-lhes regularmente o 'porquê', após aos seus comentários.

Numa aula com tarefas de natureza exploratória e investigativa é fundamental que os alunos se sintam à vontade, que interajam entre si e que lhes seja dado tempo para colocarem questões, formularem conjecturas, exprimirem as suas ideias e para as discutirem com os colegas (Tudella *et al.*, 1999). Tal como afirma Skovsmose (2000) quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. A discussão e as interacções que se vão desenvolvendo entre os alunos, permitem um trabalho mais rico, os alunos ao formularem as suas conjecturas, ao defendê-las e compará-las com as dos seus colegas, dão passos importantes para clarificarem o seu pensamento e para compreenderem melhor os conceitos e princípios matemáticos (Tudella *et al.*, 1999).

Discussão de resultados. Numa aula com tarefas abertas é essencial proporcionar aos alunos momentos de discussão de resultados, que lhes permitam partilhar ideias e reflectir sobre o trabalho realizado. Como afirmam Bishop e Goffree (1986) a aprendizagem não resulta só da actividade, mas também da reflexão sobre a actividade. A reflexão permite que os processos de resolução sejam valorizados em relação aos produtos e esta reflexão pode levar os alunos a um entendimento mais verdadeiro da Matemática (Tudella *et al.*, 1999). Os momentos de discussão e apresentação de resultados são propícios para promover essa reflexão. Os alunos ao compararem diversas abordagens e ao reflectirem sobre a natureza da tarefa podem compreender melhor o significado das investigações matemáticas e das estratégias que podem usar para as desenvolver.

A fase da discussão é importante para assegurar um grau apropriado de aprendizagem partilhada (Christiansen & Walter, 1986). É nesta fase que os alunos são confrontados com processos e estratégias diferentes das que tinham pensado. Estes momentos permitem clarificar ideias e desenvolver nos alunos capacidades de comunicação matemática e de argumentação, uma vez que ao apresentarem o trabalho desenvolvido poderão ser questionados de modo a que justifiquem, argumentem e expliquem as suas ideias, conjecturas e procedimentos ao grupo turma. Por outro lado, o momento de discussão final "permite que os alunos estabeleçam conexões entre este tipo de trabalho e outros conhecimentos pessoais sobre a aprendizagem da disciplina. Muitas vezes, durante a fase de discussão, são descobertas novas relações e formuladas novas conjecturas" (Tudella *et al.*, 1999, p. 94).

Nos momentos de discussão deve-se garantir que sejam comunicados os resultados e os processos encontrados e os alunos devem ser estimulados a questionarem-se mutuamente (Ponte *et al.*, 2003) e a procurar convencer os outros do valor dos seus argumentos (Mason, 1996).

A altura para realizar a discussão pode ser variável. Oliveira, Segurado, Ponte e Cunha (1999) num trabalho que envolveu alunos do 5.º, 6.º e 7.º anos na realização de uma tarefa de investigação, concluíram que, tanto quanto possível, a discussão dos resultados deve rematar a actividade, ou ser realizada imediatamente depois. Pelo seu lado, Tudella *et al.* (1999) consideram que a altura para a discussão nem sempre poderá ser definida de antemão, por vezes existe necessidade de proporcionar momentos de discussão durante a realização da tarefa, por exemplo, quando a maior parte dos alunos se encontra num impasse, o professor poderá provocar discussão de modo a ajudar os alunos a ultrapassar determinados bloqueios.

Uma aula que envolve a exploração de tarefas abertas impõe novos desafios, quer a professores, quer a alunos, no entanto, e tal como é afirmado por Skovsmose (2000) a solução não é voltar para a "zona de conforto" do paradigma do exercício, mas sim actuar no novo ambiente, ou seja, num ambiente de aprendizagem que o autor designa por "zona de risco" na qual o desafio é enfrentar o grau de incerteza que a caracteriza.

Síntese. Uma aula em que se trabalha com tarefas exploratórias e investigações tem características próprias. As necessidades dos alunos e as competências que o professor deve ter para a preparar e para a conduzir são bastante específicas. Por um lado, há que seleccionar, adaptar ou mesmo construir a tarefa, tendo em conta vários aspectos, tais como: o conteúdo matemático; os objectivos do currículo; a experiência anterior e os conhecimentos prévios dos alunos. Por outro lado, é importante escolher situações potencialmente ricas que estimulem e desafiem o pensamento matemático dos alunos. Além da escolha da tarefa, é necessário ponderar diversos elementos de carácter metodológico, como por exemplo: a forma como os alunos vão trabalhar na aula; o modo como a tarefa vai ser apresentada e considerar a realização de diferentes momentos durante a aula e a respectiva gestão do tempo. A aula com tarefas de natureza exploratória e investigativa envolve três momentos distintos, a introdução da tarefa, o seu desenvolvimento pelos alunos e a discussão de resultados. A introdução da tarefa deve ser breve, a sua apresentação aos alunos, pode assumir a forma escrita, oral ou mista e deve ser feita de forma a que eles entendam o que se pretende e a estimular o seu envolvimento no trabalho. Durante a fase de desenvolvimento, a actividade deve centrar-se nos alunos, deve-lhes ser dado tempo para que eles explorem a tarefa de forma autónoma, discutindo, partilhando, justificando e argumentando as suas ideias com os colegas. O professor precisa de estar atento ao trabalho dos alunos e orientá-los, sem contudo lhes dar respostas. A discussão de resultados é um momento fundamental de partilha e reflexão sobre o trabalho desenvolvido. Nesta fase os alunos apresentam as suas estratégias, resultados e justificações, o professor assume a função de moderador, incentivando-os a questionarem as ideias e afirmações dos colegas. Sendo um dos objectivos principais desta fase o desenvolvimento da capacidade dos alunos para comunicar e argumentar matematicamente.

2.2.3. As dificuldades dos alunos na realização de explorações e investigações

A realização de tarefas de exploração e investigação pode ser uma importante actividade educativa, e constituir uma experiência fundamental na aprendizagem dos alunos. Vários autores descrevem esta actividade como um processo rico que permite o desenvolvimento de múltiplas capacidades nos alunos, contribui para um conhecimento mais amplo de conceitos, facilita a compreensão de ideias matemáticas e é importante para uma aprendizagem significativa (e.g., Azevedo, 2009; Brocardo, 2001; Diezmann, Watters, & English, 2001; Goldenberg, 1999; Oliveira, Ponte, Segurado & Cunha, 1997).

Ao realizar uma investigação matemática é importante começar por uma exploração inicial que permita clarificar a questão ou situação proposta e colocar questões interessantes e produtivas sobre as quais se vai trabalhar. Depois é fundamental analisar alguns dados e formular conjecturas. O teste e a recolha de mais dados podem refinar essas conjecturas ou levar a que sejam refutadas, e a olhar a questão de outra forma, formulando novas conjecturas. Passando a fase do teste há que provar a sua veracidade. Durante este processo novas questões para investigar podem surgir (Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.*, 1999). Assim, a exploração de investigações envolve, processos de raciocínio complexos, que requerem um elevado grau de empenhamento e criatividade por parte dos alunos (Ponte & Matos, 1996).

Diversos trabalhos empíricos têm mostrado que os alunos apresentam dificuldades nas várias fases da actividade investigativa. Uma das dificuldades que eles revelam prende-se com a *exploração inicial e a formulação espontânea de questões*. Brocardo (2001) ao estudar a evolução de três alunos de uma turma do 8.º ano relativamente ao modo de explorar as tarefas de investigação, concluiu que os alunos tiveram dificuldade em entender a investigação como um todo, tendiam a dar resposta *alínea* a *alínea* sem as relacionar entre si. Contudo, ao longo da experiência, a autora notou que os alunos começaram a manifestar preocupação em relacionar as observações iniciais e procurar perceber o foco da investigação. A formulação de questões foi um aspecto a que os alunos não deram muita importância durante todo o estudo, segundo a autora, "depois de realizarem várias explorações iniciais, os alunos não usaram o modo *interrogativo*, mas sim, o modo *afirmativo* avançando várias conjecturas" (p. 538). Também Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.* (1999) com base na análise de dados recolhidos nas aulas do projecto MPT, concluíram que os alunos não formulam explicitamente questões, nem as discutem com detalhe. Mesmo quando lhes são fornecidos pontos de partida mais ou menos explícitos, os alunos podem ter alguma dificuldade em perceber as questões mais gerais que podem emergir da situação (Ponte & Matos, 1996). A dificuldade em formular questões é igualmente salientada por Diezmann *et al.* (2001) na sequência de um estudo que envolveu alunos do 1.º ciclo, na realização de investigações matemáticas. Os autores referem que foram apresentadas aos alunos situações a investigar, dando-lhes alguns exemplos de questões que poderiam ser formuladas e perante uma situação foi-lhes pedido para formularem as suas próprias questões e os alunos ao invés disso, normalmente seleccionavam um exemplo de questões que lhe tinha sido dado.

Rocha (1996) específica que a primeira dificuldade e talvez a maior, com que os alunos de uma turma do 11.º ano se depararam ao realizarem investigações matemáticas com auxílio da calculadora gráfica foi a desorientação. A autora salienta que os alunos perante uma proposta de investigação, que independentemente do seu grau de estruturação, é sempre muito menos guiada do que as que os alunos estão familiarizados, sentem-se desorientados sem saber o que fazer. A desorientação dos alunos ao realizarem investigações matemáticas é igualmente apontada por Ferreira (2007) ao estudar as atitudes dos alunos de uma turma do 8.º ano, perante a actividade de investigação.

Rocha (1996) destaca ainda a dificuldade dos alunos em estabelecerem uma estratégia de abordagem:

> Pareciam sentir que tinham de dar resposta a certas perguntas que não tinham sido formuladas e a sua maior preocupação era descobrir quais seriam essas perguntas. Não lhes parecia possível que as perguntas pudessem ser as que eles quisessem formular e, muito menos, que estas pudessem não ser as mesmas para todos os grupos (p. 184).

Henriques e Ponte (2008) num trabalho que teve por base a realização de uma proposta pedagógica visando promover nos alunos a aprendizagem de conceitos e métodos fundamentais da Análise Numérica, através de uma abordagem de natureza investigativa, com alunos de duas turmas do 2.º ano dos cursos de licenciatura da Escola Naval, salientam que no início os alunos solicitavam muito a professora. Esperavam que fosse ela a dizer-lhes o que era para fazer sem se esforçarem em procurar compreender a tarefa. Os autores salientam, ainda, que a actividade dos alunos não contemplou a formulação de questões, após a exploração inicial da tarefa surgiram logo as primeiras conjecturas. Segundo Ponte e Matos (1996) isto deve-se ao carácter formal e organizado do ensino a que os alunos estão habituados, "ensinam-se respostas sem dar a mínima atenção às questões que as originaram ou à forma como foram alcançadas" (p. 123).

A formulação de conjecturas desempenha um papel importante no trabalho de investigação. As conjecturas podem surgir ao aluno de diversas formas, por observação directa de um número finito de casos, nos quais é observado um padrão constante; por manipulação de dados; por analogia com factos conhecidos ou a partir de uma representação visual de um problema (Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid & Yevdokimov, 2007). Mas, este trabalho indutivo tende muitas vezes a ficar confinado ao pensamento do aluno, não se verificando uma formulação explícita das conjecturas, como é salientado por Ponte *et al.* (2003) com base na análise de dados de uma investigação realizada por alunos de uma turma do 7.º ano. Também Brocardo (2001) observou que inicialmente os alunos formulavam as conjecturas apenas implicitamente, e que muitos deles só ao fim de algum tempo conseguiram entender o seu *estatuto*, tinham tendência a tomar as conjecturas como conclusões. A autora refere:

> É muito forte nos alunos a ideia de que uma tarefa matemática implica a procura de respostas/conclusões e que a evolução para uma postura realmente investigativa em que formulam conjecturas e desenvolvem vários ciclos de confirmação ou refutação destas, é um processo demorado e que tem de ser objecto de um trabalho explícito por parte do professor (p. 540).

As conclusões obtidas por Henriques e Ponte (2008) e Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.* (1999) apontam no mesmo sentido. Henriques e Ponte salientam que num dos grupos só com o trabalho continuado e com a discussão em grande grupo é que os alunos compreenderam o *estatuto* de uma conjectura.

Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.* (1999) referem que os alunos tendem a apresentar o máximo de conjecturas possível, independentemente da sua trivialidade ou relevância. Esta constatação é também salientada por Rocha (2003) quando afirma que um dos dois alunos do 7.º ano que participou no seu estudo, em certas ocasiões com o intuito de chegar a alguma conclusão formulou conjecturas irrelevantes para a investigação. O que parece poder ser explicado pela dificuldade dos alunos em perceber o significado global da tarefa como a descoberta e validação de relações matemáticas (Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.*, 1999).

O teste de conjecturas parece, não colocar muitas dificuldades aos alunos. No entanto, Ponte *et al.* (2003) salientam que existe alguma tendência para os alunos aceitarem uma conjectura com base num número reduzido de testes. Esta tendência, de acordo com Brocardo (2001), parece estar mais relacionada com as dificuldades iniciais dos alunos em perceber as características do processo investigativo, do que propriamente com dificuldades relacionadas com a realização de testes. A autora refere que os dados recolhidos pelos alunos eram testados por eles com facilidade, o problema residia no descuido em analisar outros casos e em assumir como conclusão uma conjectura que resultava do estudo de um ou dois exemplos. Brocardo considera que isto era reflexo das dificuldades dos alunos em compreender a *não linearidade* da actividade investigativa. Os alunos inicialmente mostraram tendência para encarar uma investigação como uma actividade linear que envolvia três fases: (1) recolha de dados; (2) organização desses dados e (3) análise dos dados de modo a tirar conclusão. À medida que foram adquirindo maior experiência na exploração de investigações, os alunos foram compreendendo a *não linearidade* do processo investigativo.

Henriques e Ponte (2008) e Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.* (1999) indicam que não existe na maior parte dos alunos uma preocupação forte em testar e refinar as suas conjecturas, a não ser que lhes seja solicitado pelo professor.

A justificação e a prova das conjecturas são processos de grande relevância na actividade de investigação. As conjecturas que resistiram a sucessivos testes para serem consideradas matematicamente válidas precisam de ser justificadas com base em argumentos lógicos ou, pelo menos, plausíveis (Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.*, 1999). Diversos estudos têm mostrado que os alunos por si sentem pouca necessidade de justificar as suas conjecturas. Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.* (1999) indicam que os alunos, de um modo geral, não sentem essa necessidade, nem parecem ter a noção do tipo de argumentos que podem utilizar para justificar uma conjectura. A percepção dos alunos em perceber a necessidade da prova não parece estar relacionada somente com as dificuldades, mas também com a sua visão da Matemática e da aprendizagem. Quando os alunos descobriam uma conjectura que lhes parecia ser verdadeira, a preocupação era comunicá-la de imediato à professora, para obterem confirmação de que a conjectura estava *certa*, ou então para *mostrarem trabalho* feito. Verificando-se, no caso de alguns alunos, uma grande dependência da professora e uma reduzida confiança em si próprios (Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.*, 1999). A pouca autonomia e autoconfiança dos alunos na validação das suas conjecturas é também referida por Varandas e Nunes (1999) quando descrevem uma experiência com uma turma de alunos do 10.º ano e por Rocha (1996). Esta autora menciona a necessidade dos alunos solicitarem a professora para obterem a confirmação do trabalho realizado e afirma que os alunos conseguiam discutir e defender o seu ponto de vista com os colegas, mas ao mais pequeno sinal de discordância da professora o abandonavam rapidamente. A autora indica que apesar de se ter notado alguma evolução, ao longo da realização das tarefas, os alunos tiveram dificuldade em perceber os processos envolvidos no trabalho com investigações:

> Por um lado, os alunos conseguiram expressar progressivamente melhor as suas opiniões tanto por escrito como oralmente; por outro lado a professora foi-se familiarizando com o tipo de raciocínio utilizado em cada grupo e como tal,

> encontrando mais facilidade na compreensão do processo desenvolvido. Não consegui, no entanto, fazer compreender aos alunos a importância desse processo, nem convencê-los de que as conjecturas que se vinham a revelar falsas não constituíam erros, mas sim uma fase do trabalho perfeitamente natural (pp. 188-189).

Rocha (2003) refere que a prova foi o processo matemático da actividade investigativa que os alunos mais evitaram e aquele em que menos evoluíram. Um dos alunos, algumas vezes omitia esta fase da investigação, optando por avançar, envolvendo-se novamente na exploração, com o intuito de formular mais conjecturas, deixando a prova para o final da sua actividade, o que levou, na maior parte das situações, à não validação das conjecturas, considerando-as, muitas vezes, como válidas. Esta conclusão é consistente com os resultados analisados por Ponte *et al.* (2003), em que os alunos transformavam as conjecturas em conclusão sem passarem por um processo de justificação ou prova. Estes autores consideram que, "a justificação ou prova das conjecturas é uma vertente do trabalho investigativo que tende, com alguma frequência a ser relegada para segundo plano ou até mesmo a ser esquecida, em especial nos níveis de escolaridade mais elementares" (p. 37).

No estudo de Henriques e Ponte (2008) o trabalho dos alunos de um dos grupos, não contemplou o processo de justificação das conjecturas. De acordo com os autores, a falta de hábito na procura de justificações aliada à falta de alguns conhecimentos terá contribuído para isso. Geralmente, a justificação das conjecturas pelos alunos, só era feita quando solicitada pela professora ou então pelos colegas na discussão em grande grupo. Também Fonseca (2000) salienta que a justificação e a prova tiveram uma presença fraca no trabalho dos dois alunos estudados com maior detalhe.

Brocardo (2001) refere que os alunos inicialmente "encararam a prova das suas conjecturas como uma complicação desnecessária introduzida pela professora" (p. 544). Para eles uma conjectura que tinha resistido a sucessivos testes era claramente verdadeira, não sentindo assim qualquer necessidade de a provar. Com o decorrer da experiência esta atitude foi-se alterando e numa segunda fase, apesar de não encararem a prova como um aspecto interior à própria investigação, vários alunos começaram a perceber o que significava justificar as suas conjecturas e a tentar procurar o porquê de uma relação se verificar. Contudo, esta tentativa só era feita se fosse explicitamente solicitado pela professora ou pedido no enunciado da tarefa. Numa fase final, grande parte dos alunos já tinha a noção de que era preciso pensar na prova das conjecturas que formulavam. A autora específica que "perceber a importância e o significado de estabelecer uma prova para as conjecturas que resistem a sucessivos testes se reveste de particulares dificuldades para os alunos" (pp. 545-546). E considera que a utilização do GSP, que possibilita a realização de vários testes, dando a ideia que se estudam os casos todos e o facto de em determinadas tarefas, a prova das conjecturas que pareciam ser verdadeiras não estar ao alcance dos conhecimentos dos alunos poderão explicar, de certa forma, a dificuldade dos alunos interiorizarem a prova como parte do trabalho de investigação. De facto, De Villiers (2001) afirma que depois de os alunos terem investigado cuidadosamente uma conjectura geométrica por meio de uma variação contínua, com um *software*, como por exemplo o GSP, sentem pouca necessidade de adquirir maior convencimento. Porém, o autor constatou que os alunos concordam rapidamente que, "a verificação indutiva apenas confirma o resultado, não dá nenhuma percepção satisfatória ou compreensão sobre a forma como a conjectura é consequência de outros resultados conhecidos" (p. 36).

Gutiérrez (2005) refere que alguns estudos revelam que os AGD podem ser um obstáculo para os alunos compreenderem a necessidade da prova. Porém, o autor considera que esse bloqueio está relacionado com o facto da função da prova ser apresentada aos alunos apenas como verificação, ou seja, como forma de confirmar a veracidade das conjecturas e não como forma de compreender o porquê das conjecturas serem verdadeiras.

Em contrapartida, diversos estudos (e.g., Christou, Mousoulides, Pittalis, & Pitta-Pantazi, 2004; Hoyles & Jones, 1998; Jones, 2000; Marrades & Gutiérrez, 2000) têm mostrado que os programas de Geometria Dinâmica, como o *Cabri* e o GSP podem ajudar os alunos a entender a necessidade da prova formal. Marrades e Gutiérrez (2000) analisaram com detalhe as justificações de dois pares de alunos do ensino secundário em problemas de provas com o *Cabri-Géomètre* e concluíram que os alunos deste nível de ensino não podem fazer uma transição rápida do trabalho empírico para formas abstractas de justificação de conjecturas. Os autores salientam que os alunos necessitam de um período considerável de tempo a trabalharem com o *Cabri* para se começarem a sentir mais à vontade com justificações e provas dedutivas. Algumas vezes os alunos encontraram conjecturas correctas, mas não conseguiram prová-las porque não encontravam, ou não tinham conhecimento das propriedades geométricas envolvidas.

Balacheff (1991) numa experiência com catorze pares de alunos de 13 e 14 anos, em que lhes foi pedido para indicarem uma forma de calcular o número de diagonais de um polígono conhecido e para escreverem as suas respostas como uma mensagem para outros colegas da mesma idade, conclui que as justificações empíricas através de exemplos genéricos eram dominantes. A falta de uma ferramenta linguística eficiente para os alunos expressarem os objectos envolvidos no processo de resolução do problema foi uma das razões para a ausência da prova a um nível mais formal. O autor salienta que a complexidade da prova formal esteve também relacionada com o reconhecimento e levantamento dos conceitos necessários. Muitos alunos sentiam a necessidade da prova, mas não tinham os conhecimentos necessários para a fazer. Por isso, o uso de um exemplo genérico parecia-lhes ser o melhor meio para justificar as suas conjecturas. O autor analisou o comportamento dos alunos quando confrontados com um contra-exemplo de uma conjectura que eles formularam e verificou que muitas vezes tendiam a considerá-lo como uma excepção que não afectava a veracidade da sua conjectura. Parece que a robustez das concepções dos alunos e a existência de um grande domínio da validade da sua conjectura leva-os a privilegiar os tratamentos que consistem em manter de lado um contra-exemplo, seja qual for o nível da prova envolvida no processo de resolução de um problema (Balacheff, 1991).

Alguns alunos acreditam que é possível ter um contra-exemplo e uma prova para uma afirmação (Stylianides & Murani, 2009). Por um lado, têm dificuldade em compreender que a prova é suficiente para garantir a não existência de contra-exemplos (Chazan, 1993) e por outro, tendem a tratar um contra-exemplo de uma conjectura como uma excepção que realmente não afecta a sua veracidade (Balacheff, 1991).

A comunicação de ideias e resultados é um aspecto importante quando se trabalha investigações na sala de aula. Mas, esta parece trazer algumas dificuldades para os alunos. Diezmann *et al.* (2001) salientam que embora as crianças tenham conseguido realizar as investigações propostas, elas tiveram dificuldades em comunicar as suas ideias, quer por escrito, quer oralmente. Muitas vezes precisavam de orientações para poderem registar os seus procedimentos e conclusões nos relatórios. As dificuldades associadas ao registo escrito e elaboração de relatórios são também salientadas por Ferreira (2007) e Henriques e Ponte (2008). No estudo de Ferreira os alunos limitavam-se a registar alguns algoritmos e as conclusões, não expondo os seus raciocínios. A autora considera que "escrever raciocínios e escrever os caminhos percorridos não é ainda, muito bem visto pelos alunos na disciplina de Matemática" (pp. 60-61). Henriques e Ponte referem que inicialmente os relatórios produzidos pelos alunos valorizavam, os produtos relativamente aos processos, reduzindo-se à enumeração de descobertas, sem a apresentação de procedimentos nem justificação. O que em parte resultava do facto dos alunos ainda não terem entendido os processo associados ao trabalho investigativo. Segundo os autores, no decorrer do estudo notou-se uma evolução positiva na qualidade dos relatórios, mas os alunos evidenciaram sempre dificuldades em escrever o que pensavam.

Muitas vezes os alunos têm ideias interessantes, mas revelam dificuldades em as comunicar de forma correcta e clara (Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.*, 1999). Estes autores salientam que na comunicação das suas conclusões os alunos utilizam termos matemáticos inadequados, embora esse uso não impeça, muitas vezes, os alunos de fazerem muitos raciocínios correctos. Em relação à comunicação e registo de ideias e de resultados, Rocha (1996) refere que os alunos são muito sintéticos fazendo apenas referência às conclusões obtidas, que muitas vezes são pouco claras devido a lacunas quer ao nível do Português quer em termos de linguagem Matemática.

No estudo de Ferreira (2005) os alunos referiram a dificuldade em explicar os resultados das explorações com o GSP ao longo da experiência. A autora indica que a necessidade de os alunos apresentarem justificações válidas para as suas conjecturas e de registarem as conclusões, fez com que se mostrassem mais reticentes em relação a este tipo de actividade. Tal como afirma Mason (1996) conseguir que os alunos escrevam sobre o seu trabalho é classicamente difícil. Poucos estão dispostos a perder tempo, voltando atrás no seu trabalho escrevendo-o.

Ponte e Matos (1996) com base num estudo efectuado com três alunos do 8.º ano na realização de tarefas de investigação num micromundo construído em LOGO consideram que as dificuldades dos alunos podem revelar-se em relação aos seus conhecimentos, processos de raciocínio ou ainda, à sua atitude perante a situação. Os alunos poderão não dispor de conhecimentos importantes para a realização da tarefa, ou não conseguir encontrar a melhor maneira de iniciar a exploração e de avaliar os resultados.

Segurado (1997) analisou com detalhe as concepções de quatro alunos do 6.º ano num estudo que envolveu a realização de tarefas de exploração e investigação e conclui que as dificuldades que os alunos apresentaram principalmente na realização das primeiras tarefas, são reveladoras das suas concepções. Para os alunos uma questão tinha apenas uma resposta e depois de encontrada, a tarefa estava concluída. Consideravam que uma resposta ou estava certa ou errada, e que competia à professora a sua validação.

Para Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.* (1999), as dificuldades dos alunos em trabalhar com investigações matemáticas estão relacionadas com as suas concepções, conhecimentos, capacidades e valores. Mas, os alunos para além das dificuldades, também revelam capacidades: (1) no uso de estratégias geométricas e na integração destas com estratégias aritméticas para chegar a conjecturas; (2) em mudar e adaptar conjecturas a partir de contra-exemplos; (3) no uso de estratégias de generalização para alcançar conjecturas e (4) no uso de estratégias de raciocínio que indicam uma notável flexibilidade intelectual. O que sugere que quanto maior atenção for dada a este tipo de trabalho na sala de aula, maior será o progresso esperado.

Síntese. Os resultados de vários estudos indicam que os alunos revelam dificuldades em relação a aspectos específicos da actividade investigativa e também dificuldades de natureza mais geral. A interpretação e compreensão da situação a investigar, pode ser a primeira dificuldade com que os alunos se deparam ao trabalhar com investigações. A formulação de questões é uma etapa a que muitos alunos dão pouca atenção, passando de imediato, na maior parte das situações, à formulação de conjecturas, que em muitos casos são entendidas desde logo como conclusões sem passarem por um processo de teste e justificação. A necessidade da justificação e prova não é compreendia por muitos alunos, que tendem a considerar a verificação de alguns exemplos como suficiente para conferir às suas conjecturas validade matemática.

A compreensão do processo investigativo é outra dificuldade que os alunos apresentam, muitos deles encaram-no como um processo linear, passando da recolha de dados, à sua organização e ao estabelecimento de conclusões. O registo e a comunicação de ideia e resultados também parecem colocar dificuldades aos alunos. Estes tendem a não dar importância ao registo dos procedimentos, limitando-se a registar apenas as conclusões.

Contudo, a experiência prolongada na realização de tarefas de investigação e exploração parece contribuir para que os alunos vão superando estas dificuldades.

2.3. A comunicação nas aulas de Matemática e o trabalho de grupo

O tipo de comunicação que ocorre na aula de Matemática e as interacções que se estabelecem entre alunos e entre estes e o professor são, de certa forma, determinantes na aprendizagem dos alunos. É por intermédio da comunicação que as ideias matemáticas são exteriorizadas, partilhadas e discutidas, quer em pequeno grupo, quer em grande grupo.

Esta secção está dividida em três subsecções. Na primeira faz-se referência à comunicação na sala de aula, destacando a importância da linguagem e do discurso na aprendizagem dos alunos e dá-se especial relevo às explicações produzidas pelos mesmos. Na segunda subsecção, realça-se a relevância do trabalho em pequeno grupo, destacando alguns dos efeitos positivos que esta metodologia de trabalho pode ter na aprendizagem da Matemática por parte dos alunos. Discutem-se as interacções que este tipo de trabalho pode proporcionar, assim como algumas dificuldades que podem advir quando os alunos trabalham em grupo, apresentando relatos de estudos empíricos. Na terceira subsecção aborda-se a discussão no grupo turma, destacando a negociação de significados e a argumentação matemática. Assim como a importância de um ambiente de sala de aula propício à aprendizagem e algumas das vantagens dos momentos de discussão em grande grupo, após o trabalho em pequeno grupo.

2.3.1. A comunicação nas aulas de Matemática

A comunicação, no contexto específico da sala de aula, é um dos aspectos que tem vindo a merecer particular atenção nas actuais orientações curriculares para o ensino da Matemática (e.g., DES, 2001; Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular [DGIDC], 2007; NCTM, 1991, 1994, 2007). Os programas nacionais de Matemática do ensino básico (DGIDC, 2007) e de Matemática A do ensino secundário (DES, 2001) enfatizam o desenvolvimento da capacidade de comunicação por parte do aluno, como um objectivo curricular importante e a criação de oportunidades de comunicação como uma vertente fundamental no trabalho que se realiza na sala de aula. No programa de Matemática A do ensino secundário pode ler-se:

> A comunicação matemática (oral ou escrita) é um meio importante para que os estudantes clarifiquem o seu pensamento, estabeleçam conexões, reflictam a sua aprendizagem, aumentem o apreço pela necessidade da precisão na linguagem, conheçam conceitos e terminologias e aprendam a ser críticos. Cada estudante deve receber do professor estímulo e oportunidades frequentes para falar, escrever, ler e ouvir nas aulas de Matemática (DES, 2001, p. 11).

O NCTM (2007) considera a comunicação como uma parte fundamental da Matemática e da educação matemática e sublinha que através da comunicação, as ideias tornam-se objecto de reflexão, aperfeiçoamento, discussão e correcção. Aponta a necessidade dos alunos trabalharem em tarefas matemáticas que constituam assuntos relevantes de discussão, afirmando que os que têm "oportunidade, encorajamento e apoio para falar, escrever, ler e ouvir nas aulas de Matemática beneficiam duplamente: comunicam para aprender Matemática e aprendem a comunicar matematicamente" (p. 66).

A importância da comunicação na dinâmica da sala de aula tem sido reconhecida em diversos estudos realizados no âmbito da didáctica da Matemática (e.g., Almeida, 2007; Bishop & Goffree, 1986; Martinho, 2007; Medeiros, 2010; Menezes, 2004; Passos, 2008; Sfard, 2001a 2001b, 2002). A comunicação é um aspecto fundamental do processo ensino-aprendizagem, já que é "ao mesmo tempo, um indicador sobre a natureza desse processo e uma condição necessária para o seu desenvolvimento" (Ponte & Serrazina, 2000, p. 118). Numa aula de Matemática, desde a mais inovadora à mais tradicional, tem de existir um fluxo contínuo de comunicação, pois "sem comunicação não há aprendizagem alguma e sem aprendizagem não há ensino" (Bishop & Goffree, 1986, p. 330). Da fluência da comunicação entre os vários intervenientes na aula e naturalmente da diversidade de suportes usados (orais ou escrito), depende grande parte do sucesso no desenvolvimento de capacidades e competências estabelecidas no currículo (Ponte *et al.*, 1997).

O conceito de comunicação pode ser encontrado na literatura definido de muitas maneiras diferentes. A este propósito, Fiske (2005) salienta que "comunicação é uma daquelas actividades humanas que todos reconhecem, mas que poucos sabem definir satisfatoriamente" (p. 13). No âmbito da aula de Matemática, a comunicação refere-se "à interacção dos diversos intervenientes na sala de aula, utilizando uma linguagem própria, que é um misto de linguagem corrente e de linguagem matemática" (Ponte *et al.*, 1997, p. 83).

Associado ao conceito de comunicação surgem outros conceito como linguagem, discurso e interacções, que mantêm entre si e com o primeiro variadas relações (Menezes, 2004). Para comunicar é necessário conhecer uma linguagem entendida no sentido comum (Moreira, 2001) de modo a que a informação possa ser compreendida entre os diversos interlocutores. A linguagem funciona como um veículo de comunicação de informação e pensamentos (Orton & Frobisher, 1996) e desempenha um papel fundamental na formação e expressão de ideias matemáticas (Dekker & Elshout-Mohr, 1998).

Para Pirie (1998) *linguagem* "em sentido mais amplo é o mecanismo pelo qual professores e alunos procuram expressar a sua compreensão matemática" (p. 8). A autora considera que a comunicação matemática na sala de aula pode desenvolver-se através de uma diversidade de formas que classifica em seis categorias. 1 – *Linguagem ordinária* que é aquela que os alunos utilizam no quotidiano através da sua língua materna e que Nesher (2000) e Pimm (1990) designam por *linguagem natural*. 2 – *Linguagem verbal matemática* que se refere a uma forma de comunicação oral ou escrita que utiliza palavras. 3 – *Linguagem simbólica* que é uma forma de comunicação escrita que utiliza símbolos matemáticos. 4 – *Representação visual*, que embora não seja estritamente uma linguagem é considerada por Pirie um meio poderoso que permite comunicar ideias, por exemplo, através de esquemas, diagramas e gráficos. Ponte e Serrazina (2000) apelam este tipo de comunicação de *icónica*. 5 – *Compreensões não ditas mas partilhadas*, que são um meio pela qual a compreensão da Matemática é comunicada. Esta forma de comunicação ocorre quando os alunos discutem as suas matemáticas e deste modo, partilham entre si significados. Para um observador exterior, o que eles discutem pode não fazer sentido, uma vez, que muitas dessas compreensões compartilhadas não são verbalizadas, isto porque os alunos podem, por um lado, ter dificuldade em dizer por palavras os seus entendimentos e por outro, considerar desnecessária a sua verbalização (Menezes, 2004). 6 – *Linguagem quasi-matemática* que é uma linguagem que abrange um tipo de vocabulário próprio não convencional, que normalmente tem para os alunos um significado matemático, que nem sempre é compreendido pelo professor. Esta forma de comunicação, geralmente surge quando a linguagem matemática não está prontamente disponível ou quando é muito sofisticada para o aluno. Pirie apresenta um exemplo do uso desta linguagem pelos alunos quando eles falam da divisão de uma "pizza em Y" para se referirem à divisão do círculo em três partes iguais.

De acordo com Pirie (1998), os dois últimos meios de comunicação estão aquém das formas 'legitimadas' e 'ortodoxas' de linguagem consideradas pelos matemáticos 'puristas'. Contudo, considera que uma linguagem *quasi-matemática* compartilhada com significado para os alunos pode, por um lado, ser desenvolvida rapidamente por eles e por outro lado, aumentar a sua compreensão. A autora indica que é através da sua linguagem que os alunos expressam a sua compreensão matemática e salienta que cada um dos seis meios de comunicação deve estar presente em qualquer sala de aula de Matemática, afirmando que cada um deles, de diferentes maneiras, afecta a aprendizagem e a compreensão da Matemática pelos alunos. Esta ideia é corroborada por Menezes (2004) ao referir que as diferentes formas de linguagem tornam a comunicação matemática possível e essa comunicação será tanto mais rica quanto maior for a diversidade e complementaridade de formas de linguagem.

Pelo seu lado Pimm (1990) e Ponte e Serrazina (2000) indicam que a comunicação através da linguagem verbal tem um papel crucial na aula de Matemática. A linguagem oral é fundamental, por servir de suporte ao pensamento e ao desenvolvimento da compreensão matemática (Ponte *et al.*, 2007), e é indispensável para que os alunos possam exprimir as suas ideias e confrontá-las com as dos colegas (Ponte *et al.*, 1997; Ponte & Serrazina, 2000). Ao falar, os pensamentos são exteriorizados, o que permite uma exposição mais rápida dos mesmos à observação dos outros e ainda que o falante reflicta sobre eles (Pimm, 1990), aspecto este que nem sempre se consegue de outra forma (Nesher, 2000). Quando os alunos tentam explicar os seus métodos podem clarificar pensamentos e significados, e portanto, alcançar uma maior compreensão (Nesher, 2000; Pimm, 1990).

Contudo, a linguagem matemática escrita é também muito importante para expressar ideias matemáticas. Os registos escritos "efectuados no quadro e no caderno do aluno desempenham um papel estruturante, muitas vezes decisivo, das actividades de aprendizagem" (Ponte & Serrazina, 2000, p. 118). A escrita, ao exigir uma expressão mais exacta das ideias, permite, segundo Pimm (1990), exteriorizar ainda mais o pensamento do que a linguagem oral. Ao escrever, o aluno tem que se preocupar em gerar o entendimento dos outros, o que exige uma maior compreensão dos conteúdos e uma melhor capacidade de se comunicar (Freitag, 1997). Para além disso, o registo escrito tem a vantagem de ser um registo visível, que está, até certo ponto, permanente e acessível com facilidade e de se poder recorrer a ele para recordar o pensamento. Pois, para a maioria dos alunos muitas operações matemáticas que envolvem, por exemplo, a manipulação de símbolos são demasiado complexas para as conservar na memória (Pimm, 1990).

A linguagem matemática escrita formal que pode recorrer a palavras da língua materna e a símbolos próprios da Matemática é, de acordo com Pimm (1994), vista como a marca da actividade matemática. No entanto, nem sempre é fácil para os alunos deslocarem-se de uma linguagem oral informal com que estão habituados, para uma linguagem escrita formal. No sentido de facilitar o desenvolvimento desta competência comunicativa por parte dos alunos, o autor propõe duas alternativas, a partir da linguagem oral informal. Uma através da linguagem oral formal, que envolve o trabalho com a formalidade e auto-suficiência da língua falada antes de ser escrita e a outra através da linguagem escrita informal, que depois é trabalhada no sentido de aumentar a adequação a uma forma escrita mais formal. Pimm considera também relevante que os alunos estejam envolvidos em actividades que lhes permitam ler, escrever, ouvir e discutir, o que vai ao encontro das indicações do NCTM (1991) que destacam a importância dos alunos terem oportunidade de se envolver nesse tipo de actividades, onde o uso da linguagem matemática se torne natural. Ao comunicar as suas ideias e raciocínios, utilizando a linguagem oral ou escrita, os alunos aprendem a clarificar, refinar e consolidar o seu pensamento matemático (NCTM, 1991). A utilização destas linguagens é, assim, um meio fundamental para que os alunos possam reflectir sobre a sua compreensão da Matemática (Ponte *et al.*, 2007), considerando e interagindo com as ideias dos outros (Ponte & Serrazina, 2000).

Linguagem e comunicação na aula de Matemática têm sido temas muito discutidos em educação matemática, mas mais recentemente "o foco deslocou-se da linguagem para o discurso" que é considerado como a "linguagem em acção" (Sierpinska, 1998, p. 30).

Para o NCTM (1994) *o discurso* refere-se:

> Ás formas de representar, pensar, falar, concordar ou discordar que professores e alunos usam para se envolver nestas actividades. O discurso encerra valores fundamentais acerca do conhecimento e da autoridade. A sua natureza reflecte-se no

que faz com que uma resposta esteja certa e no que conta para legitimar a actividade, a argumentação e o pensamento matemático (p. 22).

Para além disso, "engloba tanto as formas como as ideias são trocadas como aquilo que as ideias vinculam" (NCTM, 1994, p. 36). O discurso que se desenvolve na aula é fundamental para a aprendizagem dos alunos. O modo como ele decorre determina tanto os processos de construção do conhecimento matemático como a forma como esse conhecimento é valorizado e validado. É através da análise do discurso da aula que se podem obter informações sobre a forma como se processa a aprendizagem dos alunos (Menezes, 1997). Para este autor, o discurso da aula de Matemática "funciona como uma espécie de espelho através do qual se poderá observar uma diversidade de aspectos relacionados com essa mesma aula" (p. 6).

Sfard (2002) ao estudar as formas pelas quais o uso discursivo de ferramentas simbólicas foi interactivamente construído pelos alunos, perspectivou o discurso como "qualquer acto específico de comunicação, quer seja verbal ou não, com os outros ou consigo mesmo, seja sincrónico (como numa conversa face-a-face) ou assíncrono (como numa troca de cartas ou ler um livro)" (p. 322). A autora destaca o significado particularmente amplo desta noção de discurso, abrangendo mais tipos de actividades comunicativas do que as que compreende o uso do termo no quotidiano e sublinha que embora os discursos sejam dinâmicos, em constante mudança, são suficientemente estáveis para que se possa falar de diferentes formas de discurso. Apresentando, assim três tipos de discurso matemático: o discurso matemático quotidiano, que se desenvolve pelas acções do dia-a-dia; o discurso matemático escolar que é aquele que se aprende na escola e o discurso matemático académico, que se refere ao discurso dos matemáticos profissionais em que o uso de artefactos simbólicos e de palavras é mais rigoroso. Estas formas de discurso podem ser caracterizadas e diferenciadas tendo em conta dois factores que segundo Sfard (2001b) merecem especial atenção quando se fala em discurso: (1) as regras que orientam o discurso, designadas pela autora por regras meta-discursivas. No âmbito da educação matemática alguns autores (e.g., Levenson, Tirosh & Tsamir, 2006; Yackel & Cobb, 1996) usam o termo normas sociomatemáticas, que segundo Sfard (2001b), podem ser vistas como um determinado subconjunto das regras meta-discursivas, muito embora considere haver uma diferença subtil entre as noções de regra e norma e (2) os mediadores que são usados como meio de comunicação, como por exemplo, ferramentas simbólicas (gráficos, tabelas, notações numéricas, ...).

Ben-Yehuda, Lavy, Linchevski e Sfard (2005) ao investigarem mecanismos de fracasso dos alunos em Matemática, adoptando uma abordagem comunicacional para a cognição, ressaltam a questão da pluralidade em relação ao discurso matemático, afirmando que existe mais do que uma maneira de comunicar sobre objectos matemáticos, tais como quantidades e formas geométricas. Embora as mesmas palavras possam ser usadas em muitas situações, as regras que regulam o seu uso podem diferir de um ambiente para outro. De forma semelhante, perante a mesma situação, os discursos podem variar mediante os mediadores utilizados como meios de comunicação. Segundo as autoras, o discurso matemático possui uma identidade própria que se caracteriza pelo: (i) uso de palavras; (ii) uso de mediadores visuais, exclusivamente matemáticos, em forma de artefactos simbólicos, que foram criados, sobretudo para a comunicação matemática; (iii) rotinas discursivas, que se referem a padrões repetitivos que expressam um tipo bem definido de pedidos (por exemplo, para calcular, estimar e justificar), questões, tarefas ou problemas e (iv) narrativas aprovadas, tais como definições e teoremas, produzidos ao longo da actividade discursiva.

Ben-Yehuda (2005) considera haver uma estreita relação entre discurso, pensamento e aprendizagem, não podendo o conceito de discurso ser dissociado do conceito de pensamento, pois quando as pessoas pensam, estão de facto a comunicar com elas próprias e quando falam dizem o que pensam. O nosso pensamento é claramente um esforço dialógico, onde informamos, argumentamos, fazemos perguntas e esperamos pelas nossas próprias resposta (Ben-Yehuda, 2005; Sfard, 2001a, 2002). A mudança de discurso reflecte a aprendizagem e consequentemente uma mudança de pensamento. Um aluno compreende um conteúdo quando é capaz de se envolver no discurso. Nesta perspectiva, Sfard (2001a) define aprendizagem como um processo de mudança discursiva. Ao aprender, o aluno amplia as suas capacidades discursivas, de modo a ser capaz de comunicar sobre o tema com os membros da comunidade matemática. O novo discurso pode também permitir ao aluno resolver problemas que antes não conseguia. Nesta óptica de ideias investigar a aprendizagem matemática significa, portanto, conhecer as formas pelas quais os alunos modificam e ampliam as suas acções discursas, em relação a três aspectos: o vocabulário que utilizam; os meios visuais que usam na mediação da comunicação e as regras meta-discursivas que seguem (Sfard, 2001a).

Wertsch (1991, citado em Knuth & Peressini, 2001) com base nas funções do discurso sugeridas por Lotman classifica o discurso que pode ocorrer na sala de aula em dois tipos: *unívoco* e *dialógico*. O *unívoco* é caracterizado pela comunicação na qual o ouvinte recebe a mensagem que o falante transmite e que pretende que o ouvinte perceba. Uma vez transmitida a intenção do falante, o processo de comunicação é considerado concluído com sucesso. Em contrapartida, o discurso *dialógico* é caracterizado por uma comunicação na qual o ouvinte recebe inicialmente a mensagem, e o falante tem intenção de compreender as ideias do ouvinte. Knuth e Peressini (2001) analisaram os dois tipos de discurso em aulas de Matemática com alunos do 7.º ano e concluíram que quando os intervenientes numa aula se envolvem num discurso dialógico, os alunos poderão adquirir uma compreensão mais profunda da Matemática.

O papel que os alunos assumem no discurso da aula é muito importante para o seu sucesso. É essencial que eles participem de forma activa no discurso promovido na aula, ouvindo, respondendo e fazendo perguntas uns aos outros e ao professor, formulando as suas próprias questões, estabelecendo conjecturas e convencendo-se a si e aos outros da sua veracidade, apoiando-se em argumentos matemáticos válidos, usando ferramentas matemáticas diversificadas para raciocinar, estabelecer conexões, resolver problemas e comunicar (NCTM, 1994). Esta participação activa na aula, vai-lhes permitir um entendimento da Matemática conceptualmente mais profundo (NCTM, 1991).

O envolvimento dos alunos no discurso da aula depende, naturalmente, dos seus conhecimentos prévios, competências, atitudes e expectativas (Martinho, 2007), da natureza das tarefas que são propostas, uma vez que tarefas mais problemáticas conduzem com maior facilidade a um tipo de discurso mais dialógico e mais interactivo, do que tarefas mais rotineiras (Menezes, 1997) e dos materiais usados. Mas, depende também, sobretudo do espaço discursivo que o professor lhes reserva (Menezes, 1999) e do tipo de comunicação que se estabelece entre os diversos intervenientes na aula. As orientações dos vários documentos curriculares vão no sentido de valorizar momentos de partilha de descobertas, esclareccimento de dúvidas, explicação e argumentação.

Explicação. Bishop e Goffree (1986) consideram que a explicação é um dos tipos de comunicação que têm significância especial nas aulas de Matemática. De acordo com estes autores, explicar, significa mais do que descrever, dizer ou afirmar. Explicar é um processo sem fim de representar conexões e relações entre o que se está a explicar e outras ideias. Assim, para que a explicação seja bem sucedida, é importante que se estabeleçam conexões entre o que o ouvinte sabe e o que se pretende explicar. Pelo seu lado Leinhardt (2001) sublinha que as explicações são frequentemente definidas como sendo respostas à questão do 'por quê' em relação a um determinado assunto. Contudo, a autora considera as explicações de forma mais ampla e distingue quatro tipos: *Explicações comuns*; *explicações disciplinares*; *auto-explicações* e *explicações instrucionais*. Estes quatro tipos de explicações têm algumas características comuns, como por exemplo, dependem de uma questão implícita ou explícita que obedeça às regras específicas de fechamento no que pode ser respondido e têm certas regularidades, no que se refere à evidência e ao público. Todavia, eles diferem nas especificidades dessas mesmas características.

De entre os quatro tipos destacam-se as *explicações instrucionais,* que em contraste com as restantes são, segundo Leinhardt (2001), desenvolvidas explicitamente para ensinar, mais concretamente, para comunicar um conteúdo de ensino aos outros. Podem ser fornecidas por um livro, um computador, por um professor ou por um aluno, ou ainda ser construídas conjuntamente através de um discurso coerente em torno de uma actividade que envolva a turma e o professor. Elas são frequentemente "acções pedagógicas que ocorrem em resposta a questões implícitas ou explícitas colocadas pelos alunos ou professor" (Leinhardt, 2001, p. 340). Essas questões, podem surgir como uma forma de conectar ou ampliar informações ou conceitos, ou ainda como forma de antecipar utilizações futuras ou novos significados.

As explicações instrucionais podem apoiar a aprendizagem, uma vez que modelam tanto o tipo de questões que podem ser feitas em determinado domínio, como a forma como essas questões podem ser respondidas. Podem ajudar a reafirmar, convencer e demonstrar e ainda sugerir a quem as desenvolve um comportamento mais adequado e metacognitivo para trabalhar numa dada disciplina. A participação de um aluno numa explicação instrucional quer seja ele a produzi-la ou a ouvi-la, ajuda-o a compreender e a utilizar a informação, conceitos e procedimentos de forma mais flexível e criativa (Leinhardt, 2001).

As explicações instrucionais são consideras por Leinhardt (2001) mais do que simples descrição e demonstração, como aliás também é salientado por Bishop e Goffree (1986), mas um pouco menos do que um argumento. Geralmente, contêm um exemplo de algo a ser explicado, tentando estabelecer conexões entre o que se está a explicar e conhecimentos prévios. As actividades e práticas que propiciam o seu surgimento são, segundo Leinhardt (2001), as que envolvem tarefas instrucionais e o discurso na sala de aula. Estas explicações ocorrem mais frequentemente durante discussões em grande grupo, ou em pequeno grupo, antes, durante ou depois da realização de algum tipo de tarefa.

A explicação vista como acto comunicativo tem como propósito, segundo Yackel e Cobb (1996), clarificar aspectos do pensamento matemático de uma pessoa que podem não ser percebidos por outra. Como já foi referido e é salientado por Leinhardt (2001), os alunos podem produzir explicações. Yackel e Cobb com base na análise de dados recolhidos numa turma de alunos do 2.º ano de escolaridade referem que inicialmente as explicações dadas pelos alunos podem ter uma base social, em vez de Matemática, mas à medida que vão participando em aulas, por exemplo, de cunho investigativo vão diferenciando vários tipos de raciocínio matemático e distinguem entre as explicações que descrevem procedimentos e as que descrevem acções com objectos matemáticos e finalmente alguns alunos progridem sendo capazes de tomar as explicações como objectos de reflexão. Estes autores apontam assim três tipos de explicações dadas pelos alunos: (i) *explicações que descrevem procedimentos* – são explicações em que o discurso dos alunos é de natureza procedimental, ou seja, apenas descrevem os procedimentos sem interpretar os resultados, nem fazerem referência explícita ao que significam os objectos matemáticos; (ii) *explicações que descrevem acções sobre objectos matemáticos experiencialmente reais* – são explicações em que os alunos no seu discurso, para além de descreverem os procedimentos clarificam-nos e fazem inferência explícita ao significado dos objectos matemáticos; (iii) *explicações como objecto de reflexão* – neste tipo de explicações, os alunos consideram a adequação da sua explicação para os outros, mais do que simplesmente para eles próprios. Fazendo julgamentos acerca de como os outros poderiam dar sentido à sua explicação, tomando deste modo a explicação como objecto de reflexão.

Ishii (2005) realizou um estudo com dois grupos de alunos universitários, futuros professores de Matemática, com o objectivo de desenvolver um modelo de comunicação das explicações escritas produzidas pelos mesmos. Um dos grupos foi submetido a um ensino tradicional e o outro a um ensino de cunho investigativo. Os dados foram analisados a partir das respostas dos alunos a três questões de um exame final (abordando conjuntos, percentagens e raciocínio proporcional), nas quais era solicitada a explicação da resolução. O autor a partir da análise dos dados induziu um modelo de comunicação, constituído por três categorias de explicações: *explicações algorítmicas*; *explicações estruturais* e *explicações transformativas*. As *explicações algorítmicas* descrevem o trabalho desenvolvido, fornecendo as etapas do processo de resolução, sem muita interpretação e justificação das acções matemáticas que estão a descrever. Podem incluir o significado dos símbolos matemáticos ou fórmulas, fornecer descrições gerais ou inespecíficas da solução e alertar o leitor para as conclusões. As *explicações estruturais* fornecem ao leitor mais do que uma simples descrição dos processos, apresentam definições, detalhes e características e oferecem alguma interpretação e justificação. As *explicações transformativas* são caracterizadas por mostrarem explicitamente o processo de pensamento e raciocínio e as razões lógicas que estão por trás do processo de resolução. Estas explicações podem conter elementos das duas categorias anteriores, mas o que as distingue das restantes é a inclusão de razões do processo de pensamento do aluno. Estas categorias de explicações são, de resto, muito semelhantes às apresentadas por Yackel e

Cobb (1996), indo das que descrevem essencialmente procedimentos, até às que clarificam esses procedimentos, apresentando justificações de modo a que os outros as possam compreender.

Os resultados do estudo mostraram, de acordo com Ishii (2005), que as explicações mais utilizadas, nas respostas às três questões, foram as explicações algorítmicas, tendo-se verificado que o tipo de explicações dadas pelos alunos foi muito semelhante em ambos os grupos.

A explicação dos alunos pode ser vista como um tipo de comunicação com um grande potencial para a aprendizagem significativa da Matemática. Ao explicar, o aluno, descreve processos, estabelece conexões entre os conhecimentos existentes e os novos e clarifica conceitos, aumentando a sua compreensão de forma mais flexível. As explicações dos alunos podem, ainda, melhorar a sua capacidade de comunicação oral e escrita (Matos & Serrazina, 1996) e aumentar a compreensão dos outros (Bishop & Goffree, 1986).

Síntese. A comunicação na sala de aula é considerada um tema de grande relevância para o ensino-aprendizagem da Matemática. Vários investigadores têm reconhecido a sua importância na compreensão das ideias matemáticas por parte dos alunos. Desenvolve-se, sobretudo através da linguagem oral e da linguagem escrita e recorre às representações visuais e à linguagem simbólica. A linguagem oral é indispensável para que os alunos possam exteriorizar os seus pensamentos, exprimir as suas ideias e partilhá-las com os colegas e com o professor, contudo, a linguagem escrita também desempenha um papel importante na aprendizagem da Matemática, favorece a estruturação de conceitos e procedimentos e promove a reflexão. A utilização de diversas formas de linguagem na aula torna a comunicação mais rica. Para isso, é fundamental que os alunos se envolvam em actividades que lhes permitam falar, ouvir, escrever e discutir.

O discurso que se estabelece na aula de Matemática entre os diversos intervenientes assume um papel nuclear na aprendizagem. É através do discurso que o conhecimento é construído, pelo que o papel do aluno no discurso da aula é, em parte, determinante para o seu sucesso. Os alunos aprendem quando se envolvem no discurso. Este envolvimento e as suas intervenções dependem, sobretudo e em certa medida, do espaço discursivo que o professor lhes reserva e dos modos de comunicação que se estabelecem na aula. Sendo importante que se proporcionem momentos de partilha, explicação, reflexão, justificação e argumentação.

A explicação é um tipo de comunicação com grande significância na aula de Matemática. Existem diversos tipos de explicações sendo as mais comuns na sala de aula, as explicações instrucionais. Estas explicações decorrem de questões implícitas ou explícitas colocadas pelos alunos ou pelo professor, emergem das tarefas e do discurso na sala de aula e ocorrem, geralmente, na discussão em grupo. As explicações dos alunos podem ser mais ou menos elaboradas. Ser de natureza procedimental, descrevendo os procedimentos sem justificação das acções; podem para além da descrição dos procedimentos, clarificar e apresentar algumas justificações desses procedimentos ou então ser mais completas e mostrar explicitamente os processos e razões lógicas que estão por trás desses processos, tornando a explicação objecto de reflexão.

2.3.2. O trabalho em pequeno grupo e as interacções entre os alunos

A aprendizagem da Matemática é favorecida quando o ambiente em que é desenvolvida é construído por uma comunidade de pessoas que colaboram entre si, que respeitam e discutem as ideias dos outros, de modo a dar sentido àquilo que se faz e à Matemática. Assim, e de acordo com o NCTM (1994), os alunos devem ser encorajados a ouvir e a questionar as ideias dos colegas e a explicar e defender as suas, face ao desafio colocado pelos outros.

Também as recomendações da APM (1998), do relatório *Mathematics Counts* (Cockcroft, 1982) e do DES (2001), sugerem que se diversifiquem as formas de interacção em aula, proporcionando oportunidades de discussão e de trabalho de grupo, uma vez que estas permitem aos alunos adquirir uma certa prática para enfrentar novos problemas ou ideias matemáticas, explicando e escrevendo os resultados e comunicando as suas observações e soluções, primeiro aos colegas em pequeno grupo e depois à turma e ao professor. No programa de Matemática A do ensino secundário é referido que o trabalho de grupo favorece a comunicação matemática, "os alunos ganham em partilhar com os colegas e com o professor os seus métodos de resolução ou as justificações dos seus raciocínios" (DES, 2001, p. 11). O NCTM (1991) destaca, igualmente, o papel do trabalho de grupo no desenvolvimento da comunicação em Matemática na sala de aula: "[o trabalho em pequenos grupos] constitui um fórum no qual os alunos põem questões, discutem ideias, cometem erros, aprendem a ouvir as ideias dos outros, fazem críticas construtivas e resumem as suas descobertas em documentos escritos" (p. 94).

Atendendo à teoria de Vygotsky, pode-se perceber melhor a importância do trabalho de grupo na aprendizagem dos alunos. Para Vygotsky (1978) a construção dos conhecimentos é vista como uma actividade social e pessoal. O autor refere que a criança possui um "desenvolvimento real", ou seja, um conjunto de capacidades que já se encontram desenvolvidas e que ela pode usar de forma independente, mas possui também um "desenvolvimento potencial" que engloba um conjunto de aptidões que ela consegue utilizar sob a orientação de um adulto ou em colaboração com pares mais capazes. A distância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial é designada por Vygotsky por "zona de desenvolvimento proximal". O autor salienta que a aprendizagem cria uma zona de desenvolvimento proximal que desperta uma diversidade de processos internos capazes de operar somente quando a criança está interagindo com outras pessoas e em cooperação com os seus pares. Esses processos estimulados pela interacção social, uma vez interiorizados, passam a fazer parte das capacidades da criança podendo executá-los de forma independente. Assim, para Vygotsky, a interacção social desempenha um papel fundamental na aprendizagem dos indivíduos. Também Murillo e Marcos (2007) destacam a importância da interacção social na construção dos conhecimentos afirmando que "o saber se contempla como uma construção social" (p. 158). Estes autores consideram que o conhecimento matemático que se ensina na escola é exterior e interior ao aluno, salientando, contudo que só se produz aprendizagem quando o aluno é capaz de o interiorizar e de o dotar de significado pessoal:

> Aqui reside a importância dos meios e dos processos que se põem em jogo para colocar os alunos em contacto com o saber, possibilitando a desconstrução do saber existente e sua posterior reconstrução pelo sujeito que aprende, e é precisamente aqui, no processo de apropriação que as interacções sociais têm um papel fundamental, posto que a apropriação colectiva pode proceder a apropriação individual e os conflitos sócio-cognitivos podem acelerar certas aquisições (p. 158).

Estas considerações parecem de extrema importância para se valorizar a realização de actividades em grupo nas aulas de Matemática.

Alguns autores utilizam a expressão "aprendizagem cooperativa", em vez de "trabalho em pequeno grupo", neste estudo as duas expressões serão usadas sem distinção de significado. Sendo que o trabalho de grupo aqui discutido, corresponde à ideia de aprendizagem cooperativa, considerando-a "como a aprendizagem que ocorre num ambiente onde os alunos, em pequeno grupo, partilham ideias e trabalham colaborativamente para realizar tarefas académicas" (Davidson & Kroll, 1991, p. 362).

A investigação tem revelado que o trabalho em pequeno grupo pode promover mais reflexão e mais discussão entre os alunos, melhorar a comunicação, aumentar a compreensão matemática e a motivação dos alunos. Johnson e Johnson (1990, citados em Abrantes, 1994) com base na investigação, sobretudo na meta-análise de numerosos estudos que têm comparado os resultados de métodos cooperativos com outros métodos de ensino, apontam seis razões para a promoção do trabalho de grupo nas aulas de Matemática: (i) obtêm-se melhores resultados na resolução de problemas, no uso de estratégias de raciocínio e na geração de novas ideias; (ii) fomenta a participação activa dos alunos, ao estimular o desafio intelectual e a sua curiosidade através da discussão; (iii) a resolução de problemas em Matemática é uma actividade *interpessoal* que implica falar, explicar e discutir e em pequeno grupo os alunos sentem-se mais à vontade para o fazer do que perante a turma toda; (iv) promove a interacção entre os alunos mais do que a simples recomendação de que devem discutir uns com os outros; (v) permite que os alunos adquiram maior confiança nas suas capacidades matemáticas individuais e (vi) estimula a motivação, uma vez que em situação de trabalho cooperativo, os alunos tendem a estar mais intrinsecamente motivados para a aprendizagem da Matemática.

Também Boaler (2006) destaca a importância do trabalho de grupo nas aulas de Matemática. Num estudo longitudinal (de 4 anos) comparou os resultados dos alunos de três escolas secundárias dos Estados Unidos da América. Numa foi implementada uma reforma, que a autora chama de abordagem mista, em que os alunos trabalhavam em grupos heterogéneos e nas outras duas foi usado um método de ensino tradicional. Na primeira havia um maior nível de diversidade cultural em termos étnicos e os alunos no início do estudo apresentavam níveis significativamente mais baixos em termos de realização matemática, do que os das outras duas escolas. A autora salienta que a abordagem mista proporcionou um elevado nível de aprendizagem para os alunos, ao fim de dois anos, obtinham um nível mais elevado de realização matemática comparativamente com os das outras duas escolas. Os alunos ficaram com uma visão mais positiva da Matemática e aprenderam a agir de forma mais equitativa na sala de aula.

Snyder (2006) estudou os efeitos da aprendizagem cooperativa nas aulas de Matemática, numa turma do 8.º ano e verificou que a maior parte dos alunos mostrou uma atitude positiva em relação à Matemática. A comunicação oral e escrita melhoraram com o decorrer da experiência, sendo que a evolução foi mais notória na comunicação oral. A autora refere que os alunos foram capazes de explicar conceitos uns aos outros dentro do grupo, o que os ajudou para a posterior apresentação à turma. Este resultado é consistente com o verificado por Segurado (1997) num estudo com alunos do 2.º ano. A autora refere que as interacções estabelecidas em pequeno grupo, permitiram aos alunos desenvolver a capacidade de argumentação, o que se reflectiu nas intervenções e discussões em grande grupo. Segurado refere, ainda, que os alunos melhoraram a capacidade de comunicação matemática, assumindo a argumentação lugar de destaque e que o trabalho de grupo levou os alunos participantes no estudo a adquirir maior confiança nas suas capacidades.

O trabalho de grupo pode ainda, promover a autonomia dos alunos (Dekker & Elshout-Mohr, 1998), permitir a articulação de estratégias de solução e a exposição de erros de compreensão (Bishop & Goffree, 1986). Todavia, os efeitos positivos resultantes do trabalho de grupo não serão independentes de factores relativos à forma de agrupamento dos alunos, à natureza das tarefas, à actuação do professor, nomeadamente a forma como ajuda os alunos a ultrapassar dificuldades internas de funcionamento do grupo e como estimula a interacção entre eles, e naturalmente à experiência dos alunos em trabalhar em grupo (Abrantes, 1994; César, 2000; Edwards & Jones, 1999; Laborde, 1994; Matos & Serrazina, 1996; Weeb, 1989).

Nem todo o tipo de *tarefas matemáticas* é igualmente adequado para o trabalho dos alunos em pequeno grupo (Abrantes, 1994). Na literatura o trabalho de grupo é, geralmente, associado a tarefas que envolvem processos cognitivos mais complexos do que a simples memorização de factos e execução de técnicas e procedimentos, como é o caso das investigações matemáticas e dos problemas. É relevante que a tarefa seja desafiante e que estimule a comunicação entre os alunos, de modo a que eles justifiquem e fundamentem as suas ideias e troquem argumentos. Laborde (1994) salienta que a aprendizagem cooperativa é reforçada quando os alunos têm que descrever e justificar os seus resultados.

As *interacções* entre os alunos são potencialmente mais ricas quando se envolvem na realização de tarefas estimulantes e geradoras de conflitos sócio-cognitivos (Carvalho & César, 2000; César, 2000; César & Torres, 1998; Laborde, 1994; Yackel, Cobb, Wood, Wheatley & Merkel, 1991). Uma vez que um conflito sócio-cognitivo envolve uma dimensão interpessoal, que leva o aluno a gerir a relação social com os outros e a efectuar acções de descentração, para compreender outros pontos de vista e também uma dimensão intrapessoal, por poder haver necessidade de reajustamento das suas acções face a mudanças de posição que possa ter tomado, decorrentes do processo interactivo (Almeida & César, 2007). Assim, resolver um conflito sócio-cognitivo obriga o aluno a ultrapassar um conflito cognitivo, ao mesmo tempo que tem que gerir uma relação social com os colegas com quem está a realizar a tarefa (Carvalho, 2001). Contudo, para que um conflito sócio-cognitivo promova aprendizagem é importante que a confrontação seja ocasião de divergências e que os alunos cooperem activamente na procura de uma solução.

César (2000) alerta para o facto de nem todas as situações de trabalho serem susceptíveis de gerar conflitos sócio-cognitivos entre os alunos. César (1994) refere que as tarefas do tipo "não-habitual", ou seja, tarefas que permitem a exploração de diversas estratégias de resolução, são mais propensas para gerar conflitos sócio-cognitivos e assim fomentar interacções entre os alunos mais frutuosas para o seu desempenho matemático e mais capazes de promover a estabilidade no tempo desses mesmos desempenhos. Para além disso, o modo como se descreve a tarefa também tem influência no desempenho dos alunos e nas estratégias a que recorrem para realizar a tarefa. O contrato didáctico que é um conjunto de regras implícitas ou explícitas que todos "devem conhecer e que os leva a adoptar um determinado comportamento face a uma tarefa que têm de resolver e a decidir qual estratégia que naquele momento vão escolher face à panóplia que têm à sua disposição" (Carvalho, 2001, p. 153) é outro aspecto a ter em conta. Uma vez que este tem um papel relevante no facto de vir ou não a existir conflito sócio-cognitivo (César, 2000). Uma aula onde se pretende promover a interacção entre os alunos, deve reger-se por regras que valorizem o respeito pelos outros e pelo ritmo de trabalho de cada um, os processos de raciocínio que utiliza, a capacidade de procurar soluções novas e de argumentar o seu ponto de vista (César, 2000).

Geralmente, durante uma interacção entre dois ou mais alunos que procuram realizar uma tarefa assiste-se a uma sequência de trabalho cognitivo tanto individual como social (Carvalho, 2003), os alunos começam por procurar individualmente uma solução, que depois vai desencadear uma sequência de interacções e originar reacção dos colegas. Esta sequência interactiva, que pode durar mais ou menos tempo, termina quando se chega a um impasse, a uma solução proposta por um dos elementos do grupo, ou ainda a uma solução elaborada em conjunto. Neste último caso, "pode acontecer que, antes de os sujeitos chegarem a esse consenso tenham de, individualmente, mergulhar na procura de uma outra resolução, que mais tarde dará origem a uma nova sequência interactiva" (Carvalho & César, 2000, pp. 88-89). A interacção que se estabelece quando os alunos defendem a sua opinião e suas ideias ou quando chegam a um consenso promove o desenvolvimento sócio-cognitivo e facilita a apreensão de conhecimentos e a aquisição de competências matemáticas (César, 2000). Esta autora salienta que se podem considerar vários tipos de interacções entre os alunos, quando trabalham em pares, que vão desde a mera execução de tarefas sem que haja comunicação verbal entre os elementos do grupo, embora possa ser observado, até às situações em que os alunos chegam a um consenso e só apresentam uma solução para a tarefa proposta.

Machado (1997) analisou as formas de interacção dos alunos em situação de aprendizagem em pequeno grupo. Os participantes foram os alunos de uma turma do 7.º ano e trabalharam em tarefas de natureza problemática. O autor identificou dois padrões de interacção diferentes: acordo imediato sobre a solução a apresentar (quando os alunos percepcionavam a tarefa como simples) ou discussão das propostas apresentadas. Em relação ao último identificou dois tipos de discussão:

(i) quando os alunos estavam de acordo com a proposta e procuravam em conjunto obter uma justificação, a fim de a assumirem como solução ou (ii) quando a proposta apresentada não se afigurava coerente para todo o grupo e surgia uma proposta alternativa. Ambas as propostas eram discutidas, apresentando 'provas' ou 'refutações', ou pedido de explicações.

Os alunos ao trabalharem em grupo têm mais oportunidade, de explicar e receber explicações, de discutir e resolver problemas, criar soluções, fornecer ideias e ajudar uns aos outros, e por isso, obter maior 'conquista' tanto em termos de realização matemática, como em termos de uma atitude mais positiva em relação à Matemática. Estas são razões apontadas por Zakaria, Chin e Dual (2010) para os resultados obtidos num estudo que comparou o desempenho matemático de 82 alunos, assim como a sua atitude face à Matemática, 44 dos quais trabalharam num ambiente de aprendizagem cooperativa e os restantes fizeram parte do grupo de controle. Os autores especificam que a aprendizagem cooperativa enfatiza a interacção social e propicia um ambiente em que os alunos se sentem mais à vontade para participar e pedir ajuda.

A investigação indica que o benefício das interacções nas aulas de Matemática, não se verifica apenas para os alunos que interagem com o par mais competente, mas também o par mais competente beneficia pelo facto de interagir com o par menos competente, "pois o próprio processo interactivo permite uma co-construção de saberes" (César, 2000, p. 6). A ajuda aos colegas pode permitir, aos melhores alunos, observar processos conhecidos e reflectir sobre eles e os alunos com dificuldades podem beneficiar com a ajuda e explicações recebidas, as quais poderão contribuir para a clarificação e compreensão das ideias matemáticas (Matos & Serrazina, 1996). Mas, para que a explicação recebida contribua para uma aprendizagem efectiva, Weeb (1989) aponta algumas condições: (i) se o aluno que recebe a explicação precisa de ajuda; (ii) se a explicação é relevante e está a um nível de elaboração que corresponda ao nível de ajuda necessária (iii) se é dada no momento em que é precisa; (iv) se a explicação é compreendida; (v) se o aluno tem oportunidade de usar a explicação para resolver o problema e (vi) se o aluno usa de facto essa oportunidade. A autora considera que os alunos quando trabalham em pequeno grupo estão em posição de satisfazer pelo menos algumas das condições mencionadas para fornecer ajuda satisfatória aos colegas e indica algumas razões: (i) estão a trabalhar uns com os outros na mesma tarefa e por isso podem entender melhor do que o professor o que os colegas não compreendem; (ii) partilham o mesmo nível de linguagem, e assim podem traduzir o vocabulário mais difícil de modo a que os colegas o entendam; (iii) podem fornecer ajuda no momento em que surge a dificuldade.

Contudo, Weeb e Mastergeorge (2003) consideram que a ajuda é mais profícua se a explicação recebida for usada, por quem a recebeu, para tentar resolver os problemas de forma independente, pois aplicar a ajuda recebida vai ajudar o aluno a interiorizá-la (Weeb, 1989). Weeb e Mastergeorge sublinham que a natureza das perguntas que os alunos fazem tem importantes efeitos sobre o tipo de respostas fornecidas. Pedidos de ajuda pouco específicos podem levar a explicações que não estejam ao nível da ajuda necessária, até porque muitas vezes, os colegas podem não saber como fornecer explicações a questões gerais, especialmente quando o candidato à ajuda não identifica claramente a área de confusão. E se a ajuda não é relevante, ou está a um nível demasiado baixo de elaboração, por exemplo dar a resposta, ao invés de uma explicação, o aluno que pediu ajuda pode não ser capaz de superar a sua dificuldade. Por outro lado, se a explicação estiver a um nível suficientemente elevado de elaboração, mas o aluno implicado não a entender não será de muita utilidade (Weeb, 1989).

Weeb e Mastergeorge (2003) indicam que os alunos que têm objectivos de aprendizagem bem definidos têm-se mostrado mais propensos para pedir ajuda. Tendem a concentrar-se mais na sua aprendizagem, mostram mais interesses em realizar as tarefas e vêem os seus erros como uma fonte natural e útil de *feedback* no processo de aprendizagem. Enquanto que alunos que não tenham objectivos muito definidos ou que se sentem pouco competentes, podem evitar pedir ajuda. Também a percepção que os alunos têm sobre a Matemática e sobre as razões que atribuem ao seu insucesso pode influenciar a sua interacção na aula (Matos & Serrazina, 1996). Um aluno que considera a Matemática uma disciplina dinâmica é provável que participe mais, do que um aluno que vê a Matemática como um conjunto de regras.

A experiência que os alunos possuem em trabalhar em grupo também influencia o modo como eles interagem com os colegas. Laborde (1994) considera que quando se propõe trabalho de grupo, os alunos devem estar conscientes da interacção social que essa metodologia de trabalho exige e essa consciência não aparece espontaneamente, tem que ser aprendida. Por isso, e tal como também é salientado por outros autores (e.g., Abrantes, Leal, Teixeira & Veloso, 1997; Junqueira, 1995; Machado, 1997), um resultado positivo decorrente de contextos de aprendizagem cooperativa só é visível ao fim de um período de tempo mais ou menos prolongado.

Machado (1997) menciona que, no início do seu estudo com alunos de uma turma do 7.º ano, o relacionamentos dos alunos no grupo era fraco, certos alunos revelavam alguma agressividade, outros passividade, não ouviam uns os outros. A discussão era quase inexistente e nos casos em que ocorria revelava-se pobre do ponto de vista da argumentação. Quando um aluno tinha uma ideia não a submetia à discussão do grupo, chamava o professor para que este a validasse. Contudo, e de acordo com o autor, com o decorrer da experiência foi surgindo de forma gradual, um ambiente de cooperação que se verificou na actividade matemática efectuada, aquando da realização das tarefas no final do ano lectivo. Para isso contribuiu, quer a reestruturação dos grupos, quer a construção de regras para o trabalho em pequeno grupo.

Abrantes *et al*. (1997) referem, com base nos dados recolhidos nas aulas do projecto MAT789 em que foi desenvolvido um currículo inovador de Matemática para os 7.º, 8.º e 9.º anos e que decorreu durante três anos envolvendo quatro turmas de duas escolas, que o trabalho em pequenos grupos não é fácil de concretizar nas aulas de Matemática. Para além das dificuldades de cooperação e de problemas de relacionamento que tendem a ocorrer entre os alunos, também a concepção que têm sobre a Matemática, como uma disciplina cujo objectivo é obter respostas para certo tipo de exercícios, torna a discussão e interacção entre os alunos mais pobre, verificando-se uma forte dependência do professor para validar os resultados. Estes autores sublinham que a aquisição de autonomia por parte dos alunos é lenta e gradual:

> De um modo geral, na experiência do projecto MAT789, os alunos mostraram-se inicialmente muito dependentes em relação à professora, passaram depois por uma fase caracterizada por uma crescente autonomia (...), mas em que subsistiam problemas de relacionamento e alguma instabilidade, até finalmente revelarem (no 9.º ano) uma maior maturidade no modo como trabalhavam em pequeno grupo (p. 65).

Apesar das dificuldades, os autores do projecto privilegiam o trabalho de grupo pelo tipo de interacções que permite desenvolver na sala de aula e em particular pela discussão que promove entre os alunos.

Colocar os alunos em grupo não é suficiente para que haja trabalho de grupo (César, 1994, 2000; Carvalho & César, 2000; Edwards & Jones, 1999; Stacey & Gooding, 1998), muitas vezes colocam-se os alunos em grupo e eles trabalham individualmente. É necessário criar condições que aumentem a probabilidade da ocorrência de interacções entre os elementos do grupo, que contribuam para o progresso do desempenho matemático dos mesmos. Pois a interacção que se estabelece na sala de aula, desempenha um papel fundamental no que é aprendido em Matemática e na forma como é aprendido

Síntese. As actuais propostas curriculares para a Matemática recomendam que se proporcionem aos alunos oportunidades de trabalho em pequeno grupo, possibilitando-lhes, assim, expor as suas ideias, colocar questões, discutir estratégias e soluções, ouvir os colegas, argumentar e criticar outros argumentos. A investigação sugere que esta metodologia de trabalho tem efeitos positivos na compreensão de conceitos, na comunicação de ideias, na motivação e no desempenho matemático dos alunos.

Vários estudos revelam que o tipo de interacção que se estabelece quando os alunos argumentam para defender o seu ponto de vista ou quando chegam a um consenso desempenha um papel importante na apreensão de conhecimentos e na aquisição de competências matemáticas. Situações de interacção em pequeno grupo são benéficas quer para os melhores alunos quer para os alunos que têm mais dificuldades. Ajudar os colegas permite reflectir sobre processos conhecidos a um nível superior e a ajuda recebida quando aplicada na resolução dos problemas pode aumentar a compreensão matemática. No entanto, a experiência que os alunos têm em trabalhar em grupo e as suas concepções sobre a Matemática parecem influenciar o modo como interagem com os colegas na aula.

2.3.3. A discussão no grupo turma

A aprendizagem da Matemática requer a participação empenhada dos alunos, o que implica que lhes sejam propostas tarefas relevantes e formas de trabalho diversificadas, nomeadamente trabalho em pequeno grupo e a participação em discussões no grupo turma (Abrantes *et al.*, 1997). A discussão no grupo turma é um modo de trabalho indispensável para apresentar, discutir e reflectir sobre os resultados de tarefas realizadas em pequeno grupo. É nestes momentos de discussão que ocorre a partilha pública da actividade desenvolvida (Bishop & Goffree, 1986).

A discussão constitui, segundo Ponte (2005), um aspecto da comunicação que surge na aula de Matemática. A sua característica mais relevante é pressupor a interacção entre os diversos intervenientes na aula, que apresentam as suas ideias e se questionam uns aos outros. O controlo passa sucessivamente de um interveniente para outro e "o registo altera-se entre o afirmativo e o interrogativo" (Ponte & Serrazina, 2000, p. 121). Estes autores afirmam que uma discussão pressupõe que os diversos intervenientes assumam uma certa igualdade de papéis, contudo, normalmente o professor assume o papel de moderador, gerindo as várias intervenções e orientando, quando necessário, o conteúdo da discussão. Ponte (2005) sublinha que os momentos de discussão constituem oportunidades fundamentais para a negociação de significados matemáticos e para a construção de novos conhecimentos.

Negociação de significados. Para que seja possível a comunicação na aula é importante que os vários intervenientes entendam e aceitem as perspectivas uns dos outros e que as compartilhem (Araújo, 2004). Essa partilha pressupõe que os intervenientes conversem sobre os significados que atribuem aos conceitos ou acções (Martinho, 2007). Numa aula de Matemática, à partida, o professor e os alunos têm experiências e conhecimentos diferentes (Ponte & Serrazina, 2000; Voigt, 1994). Para o professor os "conceitos matemáticos têm um significado rico, pleno de ligações com outros conceitos e procedimentos matemáticos" (Ponte & Serrazina, 2000, p. 123), enquanto que para o aluno estes conceitos começam por não ter qualquer significado. Assim, o objectivo central do processo de negociação é o significado dos conceitos e relações matemáticas. Voigt (1994) especifica que a negociação de significados é uma condição necessária para a aprendizagem da Matemática. Para Bishop e Goffree (1986):

> O significado matemático é obtido através do estabelecimento de conexões entre a ideia matemática particular em discussão e os outros conhecimentos pessoais do indivíduo. Uma nova ideia é significativa na medida em que cada indivíduo é capaz de a ligar com os conhecimentos que já tem. As ideias matemáticas formarão conexões de alguma maneira não só com outras ideias matemáticas mas também com outros aspectos do conhecimento pessoal (p. 346).

Estes autores sublinham que a negociação de significados implica que os intervenientes, tornem os seus significados públicos e visíveis. Através da conversa e da discussão os participantes podem ficar a conhecer melhor as perspectivas uns dos outros, procurar compreende-las e compartilhá-las, para assim poderem negociar os significados dos conceitos matemáticos (Araújo, 2004). Exemplos e contra-exemplos podem ser trocados, de modo a que cada um se possa aproximar dos referentes do outro (Bishop & Goffree, 1986) e fique a conhecer as suas ligações com o conhecimento matemático (Ponte *et al.*, 1997). Neste processo, a referência a elementos significativos do contexto cultural do aluno, assim como a reflexão sobre actividades desenvolvidas previamente por ele desempenham um papel importante (Ponte & Serrazina, 2000).

Para que a negociação ocorra é relevante que se estabeleçam condições favoráveis e se ensinem regras para a negociação, que de acordo com Bishop e Goffree (1986), não são mais do que meras extensões de regras de participação do debate casual na sala de aula ou de discussão, como por exemplo: dar uns aos outros a possibilidade de falar; tratar as outras contribuições com respeito; perguntar quando não se entendem as ideias dos outros; objectivar quando parece que a contribuição é inválida e apresentar justificações para as suas afirmações. É igualmente importante que os alunos sejam questionados e incentivados a clarificar as suas ideias, a pedir e dar explicações, exemplos e analogias.

Na perspectiva interaccionista, as acções dos indivíduos que interagem têm significados tanto para a pessoa que as pratica como para quem são dirigidas, havendo assim uma acção conjunta que surge a partir da articulação das actividades dos participantes (Yackel, 2001). Os significados que sustentam a acção conjunta são vistos como um produto social que emerge do processo de interacção social, e os significados pessoais do indivíduo e os seus entendimentos são formados através da interpretação dessa interacção. Assim, nesta perspectiva os indivíduos desenvolvem as suas compreensões pessoais à medida que vão participando na negociação das normas da sala de aula, incluindo aquelas que são específicas da Matemática (Yackel & Cobb, 1996) e que são designadas por estes autores por normas sociomatemáticas, ou seja, normas que se focam "em aspectos normativos de discussões matemáticas específicos da actividade matemática dos alunos" (p. 461). A compreensão normativa do que é considerado matematicamente diferente ou eficaz, ou o que é considerado como uma explicação ou justificação matemática aceitável são exemplos de normas sociomatemáticas.

O significado do que é uma explicação aceitável em Matemática não é algo que se possa descrever com antecedência para que os alunos o possam aplicar. Tal como acontece com todas as compreensões normativas, e do ponto de vista do interaccionismo simbólico, são as negociações explícitas ou implícitas entre os vários intervenientes que contribuem para esses significados (Yackel, 2001). Yackel e Cobb (1996) num estudo com alunos do 2.º ano verificaram que a negociação das normas sociomatemáticas na discussão com a turma, permitiu aumentar as oportunidades de aprendizagem tanto para os alunos como para o professor e além disso, explicando e justificando as diferentes soluções, estabeleceram significados partilhados para os conceitos matemáticos trabalhados.

Ambiente de aprendizagem. Num ambiente de aprendizagem baseado na discussão, os alunos devem envolver-se e participar activamente em conversas produtivas que lhes permitam desenvolver cooperativamente as ideias e o pensamento matemático. Essa participação facilita-lhes a aprendizagem (Turner & Patrick, 2004; Voigt, 1994) e proporciona-lhes oportunidades de conhecer novas estratégias para explicarem o seu raciocínio. A motivação dos alunos para participar na aula é influenciada não só pelas suas disposições, concepções e crenças, mas também pelo ambiente da sala de aula (Turner & Patrick, 2004). Esse ambiente, segundo Ponte *et al.* (1997), para além de depender das tarefas propostas e do tipo de comunicação e negociação de significados, depende sobretudo, da cultura de sala de aula que regula as normas de comportamento e de interacção e estabelece as expectativas dos vários intervenientes. Matos e Serrazina (1996), consideram que "comunicação com sucesso exige a negociação de interacções e depende de todos os elementos da turma expressarem respeito e apoio pelas ideias dos outros" (p. 171).

Michaels, O'Connor & Resnick (2008) descrevem práticas de discussão que enfatizam formas e normas do discurso que podem promover a equidade e o acesso à aprendizagem. Essas práticas designadas pelas autoras por discussão responsável abrangem três dimensões: a comunidade de aprendizagem; os padrões de raciocínio e o conhecimento. A primeira dimensão, *comunidade de aprendizagem*, implica que os intervenientes oiçam cuidadosamente as ideias uns dos outros, que as questionem visando esclarecer determinadas afirmações e que indiquem razões pelas quais concordam ou discordam da opinião dos outros. A segunda, relativa aos *padrões de raciocínio*, enfatiza as conexões lógicas e a elaboração de conclusões razoáveis. É uma conversa que envolve explicação e auto-correcção. Na terceira dimensão, *conhecimento*, a discussão é baseada em factos, textos escritos ou outras informações públicas. O objectivo é que os alunos desenvolvam os conhecimentos fundamentais, assim como a linguagem matemática.

As autoras referem que na prática as três dimensões estão interligadas e devem co-ocorrer para promover a aprendizagem académica. A primeira é necessária para que as restantes possam atingir os seus objectivos, sem uma responsabilização da comunidade de aprendizagem, os alunos, em geral, não correm o risco de tornar públicas ideias que não tenham a certeza que estão correctas e que poderiam ser desafiantes para a discussão. Por outro lado, se as outras duas não estiverem presentes, as discussões serão 'educadas', mas vazias de conteúdo. Também a ligação entre as discussões responsáveis que envolvem o raciocínio e o conhecimento é importante, uma vez que factos desconectados são uma base fraca para uma argumentação fundamentada. É importante estabelecer conexões com conceitos e relações conhecidas.

Assim, o ambiente da sala de aula pode ser perspectivado como uma comunidade social e intelectual, em que as ideias dos outros são respeitadas e o raciocínio e o sentido dos conceitos e soluções são valorizados (NCTM, 1994). As normas sociais e as normas sociomatemáticas estabelecidas entre os vários intervenientes na aula desempenham aqui um papel fundamental. Yackel (2001) observou aulas de alunos universitários que trabalhavam com equações diferenciais e verificou que as normas sociais e sociomatemáticas que foram estabelecidas entre os participantes, contribuíram para os alunos se envolverem no pensamento para a resolução dos problemas que lhes foram propostos e na partilha desses pensamentos em pequeno grupo. Como resultado deste envolvimento, os alunos tinham uma base para uma participação significativa na discussão subsequente no grupo turma. Os alunos estavam em condições de contribuir para a argumentação que se desenvolveu de forma interactiva com todos os alunos. Fundamentaram e defenderam as suas opiniões e criticaram as dos colegas. Para além disso, os alunos tornaram-se plenamente conscientes da importância das discussões para a sua aprendizagem. A autora refere que a discussão em grupo é tão 'poderosa' para a aprendizagem dos alunos, que enfatiza o que a maior parte dos matemáticos e educadores consideram ser a essência da Matemática – raciocínio matemático e argumentação.

Argumentação. De facto, a discussão pode contribuir para habituar os alunos a construir argumentações convincentes e para aguçar o seu espírito crítico em relação às argumentações dos outros (APM, 2009). Segundo Boavida, Gomes e Machado (2002) os alunos envolvem-se em actividades matemáticas de argumentação quando vivem experiências de aprendizagem em que: (i) se interrogam sobre o porquê de determinados resultados, procedimentos ou ideias, procuram descobrir esses porquês, e nesse processo fundamentam os seus raciocínios e as suas respostas através de justificações aceitáveis do ponto de vista matemático; (ii) participam na análise e resolução de desacordos, em relação a questões matemáticas, através da apresentação de argumentos convincentes e matematicamente consistentes; (iii) formulam conjecturas, tentam refutá-las ou validá-las procurando contra-exemplos ou construindo provas matemáticas.

Quando se discute o conceito de argumentação existe tendência a identificá-lo com o conceito de prova (Banegas, 2003) todavia, não há necessidade de a argumentação estar estritamente relacionada com a lógica formal como é apresentada em algumas provas matemáticas (Banegas, 2003; Krummheuer, 1998). Há outras actividades humanas, mesmo em Matemática, que têm carácter argumentativo, mas não no sentido estritamente lógico. Como afirma Toulmin (1974, citado em Banegas, 2003) se as conclusões lógicas formais fossem o único procedimento para a argumentação, então o leque de comunicação seria muito restrito e a argumentação como uma forma possível de comunicação seria pouco relevante. Toulmin distingue *argumentação analítica* de *argumentação substancial*. A argumentação analítica baseia-se na dedução lógica correcta, explicita determinados aspectos do significado das proposições através da dedução. Em contrapartida, a argumentação substancial amplia o significado das proposições de forma coerente, ligando-as com casos específicos, através da actualização, modificação ou aplicação. O autor sublinha que a argumentação substancial não deve estar subordinada ou relacionada com a argumentação analítica, como se esta fosse o tipo ideal de argumentação. A argumentação substancial tem o seu próprio papel, apoia gradualmente as afirmações ou decisões através de uma apresentação convincente de relações, explicações e justificações.

A argumentação é, geralmente, entendida como uma forma específica de interacção social (Krummheuer, 1998) e pode ser caracterizada como uma tentativa de transformar algo aberto a questões, em algo mutuamente aceite pelos participantes num debate (Banegas, 2003). Yackel (2001) sublinha que esta abordagem de argumentação é útil como ferramenta metodológica para documentar a aprendizagem colectiva da turma, na medida em que fornece uma forma de demonstrar as mudanças que ocorrem com o tempo. Para além, de ajudar a esclarecer a relação entre explicação e justificação, que os alunos dão individualmente em instâncias específicas na aula e que são tomadas como partilhadas. Pedemonte (2002) considera que a argumentação matemática é acima de tudo, uma justificação racional, que se destaca da explicação, uma vez que a argumentação não pode escapar da racionalidade como pode a explicação. A explicação em Matemática visa clarificar aspectos do pensamento que podem não ser evidentes para os outros (Yackel, 2001), enquanto que a argumentação "não se contenta com a compreensão, ela quer convencer" (Pedemonte, 2002, p. 24). Pelo seu lado, Boavida (2005) considera a argumentação matemática como sendo:

> Conversações [desenvolvida na aula de Matemática] cujo foco é a Matemática e que assumem a forma de raciocínios de carácter explicativo ou justificativo destinados seja a diminuir riscos de erro ou incerteza na escolha de um caminho, seja a convencer um auditório a aceitar ou rejeitar certos enunciados, ideias ou posições pela indicação de razões (p. 7-8).

Porém, faz três reparos a este conceito: a natureza discursiva da argumentação, que não exclui elementos não discursivos, como figuras e dados numéricos ou algébricos; o auditório, que pode restringir-se apenas a um aluno que delibera consigo próprio, pode ser constituído pela turma, ou por alguém com quem se estabelece o diálogo; a natureza dialéctica da argumentação, no sentido em que as conclusões e ideias são verdadeiras para quem as argumenta, mas que podem não ser necessariamente argumentos verdadeiros.

Neste estudo, atendendo às perspectivas dos vários autores mencionados, considera-se que a argumentação é uma actividade mais ampla do que a que valida os resultados recorrendo à dedução lógica formal, seguindo um processo linear. Ela envolve explicação e justificação racional, apresentadas para corrigir, convencer ou refutar afirmações, ideias ou posições.

Krummheuer (1998) ressalta que devido à natureza emergente da interacção social na sala de aula, a argumentação é normalmente realizada por diversos intervenientes e nesse sentido fala de *argumentação colectiva*, salientando que os caminhos seguidos não necessitam provir de uma forma harmoniosa. As discussões podem conduzir a situações de argumentação que levam a correcções, conexões e modificações. Desta forma, a participação activa dos alunos em processos de argumentação colectiva contribui para a sua aprendizagem (Krummheuer, 1998), atendendo a que essa participação vai-lhes permitir desenvolver uma autonomia crescente de argumentação ajudando-os a construir cognitivamente novos significados para os conceitos envolvidos.

Yackel e Cobb (1994, citados em Boavida, *et al.*, 2002), ao delimitarem a argumentação na aula de Matemática, focando-se nas interacções relacionadas com explicações ou justificações do raciocínio dos alunos, distinguem as seguintes funções para os argumentos: (i) informar os outros de interpretações de problemas; (ii) re-descrever o que outros proferiram; (iii) explicar métodos de resolução; (iv) tentar convencer os outros da validade ou não validade de métodos de resolução ou respostas e (v) anunciar descobertas matemáticas. A apresentação de argumentos por parte dos participantes na aula, permite-lhe por um lado, a explicitação dos seus pensamentos e por outro, contribuir para uma interpretação compartilhada da situação (Krummheuer, 1998). Mas, para que os alunos se envolvam em actividades de argumentação matemática é fundamental que se conceba um ambiente favorável de modo a que os mesmos tenham oportunidade de: interagir entre si; colocar questões, explicar e justificar os seus raciocínios; redizer as suas contribuições; comentar e criticar as contribuições dos colegas e tentar estabelecer consensos matematicamente válidos (Boavida, 2005). Ou seja, um ambiente que Sherin (2002) designa por *comunidade de discurso matemático*, em que os alunos contribuem para a discussão na turma não só através da partilha de ideias, mas também através da explicitação dos raciocínios que estão por trás dessas ideias e do julgamento das ideias dos colegas.

Vários estudos têm mostrado que a discussão no grupo turma, após o trabalho em pequeno grupo é muito vantajosa para a aprendizagem dos alunos. No seu estudo Junqueira (1995) concluiu que a procura de argumentos por parte dos alunos para esclarecer e convencer os colegas sobre as conclusões a que tinham chegado levou muitos deles a clarificar e aprofundar as suas ideias, e a apresentá-las de uma forma mais organizada. Conclusão semelhante é apontada por Carvalho (2001) numa investigação que se centrou no estudo das interacções entre pares de alunos do 7.º ano, na aula de Matemática. A autora refere que a discussão entre os vários grupos permitiu aos alunos comparar pontos de vista diferentes daqueles que tinham e clarificar ou reformular argumentos que tinham utilizado em pequeno grupo. Carvalho específica, que "a reflexão conjunta originava momentos de conflito sócio-cognitivo e de dinâmica de co-elaboração colectiva que obrigava os diferentes sujeitos, por vezes, a reconstruir uma determinada estratégia, a enriquecer um argumento, a descobrir ou mesmo a refinar uma solução" (p. 283).

Fonseca (2000) no seu estudo, com alunos de uma turma do 10.º ano em torno da realização de investigações matemáticas, salienta que os momentos de discussão proporcionaram oportunidades para os alunos explicarem algumas ideias, mas sobretudo, formularem novas conjecturas, procurarem justificações e discutirem aspectos pouco pensados em pequeno grupo.

Os momentos de discussão no grupo turma impõem uma maior formalização do raciocínio e incitam os alunos a uma postura mais madura na interacção com os colegas e com o professor (Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.*, 1999), promovendo, assim o desenvolvimento da capacidade de comunicação e argumentação, a autonomia e o espírito crítico. Estes momentos são ainda uma boa oportunidade para sintetizar e resumir estratégias, ideias ou conjecturas que sejam produto de trabalho em pequeno grupo (APM, 2009).

Síntese. A discussão no grupo turma na aula de Matemática proporciona momentos de interacção em que os vários intervenientes partilham, explicam e justificam as suas ideias, fazem perguntas uns aos outros e criticam os argumentos alheios. É através dos momentos de discussão que os participantes podem ficar a conhecer melhor as perspectivas dos outros e negociar significados de conceitos matemáticos. Numa situação de sala de aula, professor e alunos têm experiências e conhecimentos diferentes, daí a negociação de significados ser necessária para que haja aprendizagem.

A cultura da sala de aula deve estimular os alunos a participar, a valorizar e respeitar as ideias dos outros e contribuir para que todos se sintam à vontade para arriscar, propondo as suas conjecturas, procedimentos e conclusões sem receio. Assim, como incentivar os alunos a argumentar e tornar explícitas as suas interpretações, a refutar e contestar as opiniões dos outros. A negociação das normas sociais e das normas sociomatemáticas desempenha aqui um papel crucial.

A literatura indica que as discussões podem conduzir a situações de argumentação, e a participação activa dos alunos numa cultura de argumentação pode contribuir para a aprendizagem por parte dos mesmos. A argumentação matemática pode ser mais ou menos formal, porém o que parece ser importante é que os alunos expliquem e justifiquem os seus raciocínios e as suas ideias de forma a convencer os outros da sua validade matemática.

Vários estudos revelam que os momentos de discussão no grupo turma levam os alunos a clarificar e a aprofundar as suas ideias, a reformular estratégias e refinar soluções e a organizar o seu pensamento. Promovem o desenvolvimento de capacidades de comunicação, estimulam a criatividade e o poder de argumentação.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

Neste estudo, que decorre da implementação, numa turma do 10.º ano, de um proposta pedagógica que valoriza a realização de tarefas de exploração e investigação, como método privilegiado de aprendizagem da Geometria e o trabalho de grupo como criador de dinâmicas de sala de aula que, procuram incentivar a participação activa dos alunos na construção dos seus conhecimentos. Procura-se compreender como é que os alunos, trabalhando em pequenos grupos e realizando actividades com tarefas de exploração e investigação, superam dificuldades na aprendizagem da Geometria e desenvolvem a capacidade de comunicação matemática.

Este capítulo descreve as opções metodológicas adoptadas, começando por fundamentar a opção por uma metodologia de natureza qualitativa. Continua com o delineamento do estudo, com a caracterização dos participantes e termina com os métodos de recolha e análise de dados.

3.1. Opções metodológicas

Atendendo a que se pretendia estudar um fenómeno educativo no ambiente em que este ocorreu, optou-se por uma metodologia de natureza qualitativa, pois tal como afirmam Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos através do contacto directo do investigador com o fenómeno no seu contexto natural.

Bogdan e Biklen (1994) referem-se à investigação qualitativa como "uma metodologia de investigação que enfatiza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais" (p. 11) e identificam cinco características que a investigação qualitativa pode possuir: (1) o ambiente natural é a fonte directa de recolha de dados, sendo o investigador o seu principal instrumento; (2) os dados são essencialmente descritivos; (3) o investigador privilegia o estudo dos processos em relação aos produtos; (4) os dados são analisados de forma indutiva e (5) o investigador interessa-se por compreender a perspectiva dos participantes. Porém, salvaguardam que nem todos os estudos qualitativos têm que possuir todas as características.

Estas características revêem-se neste estudo, embora nem todas com a mesma expressividade. Os dados foram recolhidos sobretudo no ambiente natural da sala de aula, já que foi nesse contexto que os alunos realizaram as tarefas de exploração e investigação. O principal instrumento de recolha foi a própria investigadora, que apesar de ter recorrido a gravações áudio e vídeo e a produções elaboradas pelos alunos, esteve sempre presente na sala de aula e em contacto directo com os participantes, tirando apontamentos e observando as acções ocorridas.

Os dados recolhidos são descritivos, pois assumem essencialmente a forma de palavras e imagens, incluindo transcrições de diálogos entre os alunos e entre estes e a investigadora ou a professora ocorridos durante as aulas, produções elaboradas pelos alunos, transcrições de entrevistas e notas de registo da investigadora. Estes foram analisados pela investigadora, constituindo a sua interpretação o instrumento chave de análise.

Não se teve apenas em consideração os produtos finais, mas acima de tudo, procurou-se compreender as dificuldades com que os alunos se foram deparando na realização das tarefas de exploração e investigação e como foram sendo superadas, assim como os procedimentos e as interacções desenvolvidas ao longo do estudo, nomeadamente em contexto de sala de aula.

No estudo não se pretendia encontrar evidências que comprovassem hipóteses previamente estabelecidas, mas antes contribuir para a construção de novo conhecimento sobre a temática abordada. Assim, o processo de análise dos dados foi sendo construído a partir de dados específicos e da procura de relações entre eles, numa perspectiva indutiva, visando a construção de um todo com sentido a partir do particular.

A investigadora procurou compreender a perspectiva dos alunos e o significado por eles atribuído às diferentes situações. Em particular, através da entrevista, procurou-se questionar os participantes, no sentido de perceber as suas perspectivas e tomar em consideração as experiências do seu ponto de vista.

Como *design* de investigação optou-se pelo estudo de caso interpretativo. A opção por estudos de caso prendeu-se com o facto de se tratar de uma investigação de natureza empírica, que se baseou fortemente no trabalho de campo ocorrendo em contexto real e que se preocupou principalmente com as questões do "como" e do "porquê", procurando tirar partido de múltiplas fontes de evidência, como documentos, observação e entrevistas (Ponte, 2006; Yin, 2009). E também por não se pretender ter controlo sobre os acontecimentos, mas antes compreender a situação como ela é. Além disso, importa ainda salientar, que não se procurou produzir resultados generalizáveis para um universo, mas sim contribuir para o surgimento de novas teorias ou para confirmar ou infirmar teorias existentes (Yin, 2009). A perspectiva interpretativa resultou do facto de se procurar conhecer a realidade tal como ela é vista pelos participantes e compreender o sentido dos acontecimentos e interacções dos mesmos nas situações particulares. E ainda de se ter partido do pressuposto que as situações e os acontecimentos não têm significado em si mesmos, mas que este lhe é atribuído pelas pessoas que neles participam (Ponte, 2006).

O estudo, ao enquadrar-se numa perspectiva interpretativa e numa abordagem qualitativa, apresenta um forte cunho descritivo, apoiando-se numa "descrição grossa", que segundo Gall, Borg e Gall (1996) possibilita ao investigador procurar construtos que ordenem dados descritivos e que os relacionem e confrontem com resultados de investigação relatados na literatura. Podendo, assim ajudar a gerar novas teorias e novas questões para futuras investigações (Ponte, 2006).

Assim, nesta investigação, e atendendo a que se pretendiam investigar vários aspectos relacionados com a actividade investigativa desenvolvida pelos alunos e tendo em conta que esta actividade constitui uma dinâmica da aula difícil de acompanhar, foram considerados dois casos, referentes a dois grupos de alunos.

3.2. Delineamento do estudo

Na preparação para o início da experiência de ensino-aprendizagem foram mantidos vários contactos com a professora da turma, deslocando-se a investigadora à escola para esse efeito. Inicialmente, para dar a conhecer à professora, mais especificamente, os objectivos da experiência, discutirmos as tarefas que estavam a ser planeadas para desenvolver com os alunos, a altura em que iríamos começar, o período de tempo em que iria decorrer a experiência e qual o papel de cada uma dentro da sala de aula. Posteriormente, para discutirmos melhor a planificação e as tarefas para cada aula e ainda para a realização da primeira entrevista à professora que tinha por objecto obter algumas informações para a elaboração de uma breve caracterização da mesma.

A experiência ocorreu de 15 de Setembro a 26 de Novembro de 2010 e pode-se dizer que decorreu em duas fases. Uma primeira fase de quatro aulas de 90 minutos, cujo objectivo principal foi familiarizar os alunos com uma dinâmica de aula semelhante à da realização de tarefas de natureza exploratória e investigativa e com a presença da investigadora. Nessas aulas, os alunos resolveram alguns problemas e uma tarefa de investigação. Como uma grande parte dos alunos da turma não se conhecia, optou-se por, nas três primeiras aulas, deixar trabalhar os alunos lado a lado conforme a sua opção e na aula seguinte, e uma vez que se pretendia que os alunos começassem a trabalhar com tarefas de investigação, foi proposto que trabalhassem em grupo. Essa aula foi gravada em vídeo para os alunos se familiarizarem com a presença da câmara na sala de aula. Durante esta fase, a investigadora foi fazendo a observação informal da turma, para depois, proceder à escolha dos grupos que iriam ser observados com mais atenção.

Numa segunda fase, desenvolveu-se a parte prática do estudo e fez-se a recolha de dados, a partir da observação do trabalho realizado pelos alunos nas aulas, recorrendo ao registo áudio e vídeo e às notas de registo da investigadora e ainda a partir de documentos escritos produzidos pelos mesmos e de entrevistas.

Foram realizadas várias tarefas ao longo da experiência, no entanto neste trabalho são analisadas seis (Anexo I). Não foram objecto de análise tarefas cujos resultados não acrescentavam muito ao estudo, na medida em que se aproximavam dos resultados obtidos nas restantes. Tentou-se que as tarefas se enquadrassem e seguissem a ordem estabelecida no programa curricular do 10.°ano de escolaridade da disciplina de Matemática A, de modo a não provocar um desfasamento muito acentuado do cumprimento do programa em relação às outras turmas. Assim, as três primeiras tarefas foram trabalhadas no âmbito do Modulo Inicial abordando alguns conteúdos de Geometria e as três últimas no âmbito do estudo do tema – Geometria no Plano e no Espaço I – do 10.° ano.

A tarefa 1 – *Quadrados em Quadrados*, tinha como objectivo que os alunos investigassem possíveis relações entre um quadrado inicial e um determinado tipo de quadrados que se podia inscrever nesse quadrado inicial. Foi adaptada das propostas elaboradas pela equipa do projecto Explorar e Investigar para Aprender Matemática (2001). A tarefa 2 – *Investigação com Quadriláteros*, pretendia que fosse estudado o tipo de quadrilátero que se obtém unindo os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero inicial qualquer. Foi adaptada de Coxford *et al.* (1993). A tarefa 3 – *Poliedros Regulares*, tinha como objectivo investigar quantos poliedros regulares convexos é possível construir, bem como estabelecer para cada um as principais características. Foi adaptada de Guillén (1991). A tarefa 4 – *Secções Planas no Cubo*, pretendia que os alunos investigassem o tipo de polígonos que se obtêm quando o cubo é seccionado por um plano e que identificassem a posição relativa desse plano em relação a elementos do cubo. Foi elaborada com base em propostas de Loureiro *et al.* (1997). A tarefa 5 – *Sólidos Platónicos Truncados*, pretendia que os alunos estabelecessem relações entre as propriedades dos sólidos platónicos truncados e as dos sólidos originais. Foi adaptada das propostas elaboradas pela equipa do projecto Explorar e Investigar para Aprender Matemática (2001). A tarefa 6 – *A Stella Octangula*, tinha como objectivo que os alunos estabelecessem relações entre o cubo, a *stella* e um tetraedro pequeno que a compõe. Foi elaborada com base em propostas de Loureiro *et al.* (1997) e de Veloso (1998). É de notar que estas tarefas não foram testadas por se considerarem as suas fontes como uma garantia da sua aplicabilidade e fidedignidade. Na tabela 2 sintetizam-se, cronologicamente, as várias etapas desenvolvidas no estudo.

Tabela 2 – Calendarização das fases em que se desenvolveu o estudo.

Fases do estudo	**Actividades desenvolvidas**	**Calendarização**
Fase I (Fase de preparação)	- Apresentação do projecto à turma. - Entrega das fichas de caracterização. - Resolução de problemas. - Realização de uma investigação (trabalho em grupo e gravação vídeo).	De 15 a 22 de Setembro de 2010
Fase II (Fase de recolha de dados)	Realização das tarefas:	
	- Quadrados em Quadrados	23 de Setembro de 2010 (2 aulas de 90 minutos, sendo uma delas aula suplementar)
	- Investigação com Quadriláteros	4, 6 e 7 de Outubro de 2010 (2 aulas e meia de 90 minutos)
	- Poliedros Regulares	13 e 14 de Outubro de 2010 (2 aulas de 90 minutos)
	- Secções Planas no Cubo	20 e 21 de Outubro de 2010 (2 aulas de 90 minutos)
	- Sólidos Platónicos Truncados	27 e 28 de Outubro de 2010 (2 aulas de 90 minutos)
	- A *Stella Octangula*	10, 11 e 15 de Novembro de 2010 (3 aulas de 90 minutos)
	Realização das entrevistas:	
	- Entrevista ao grupo II	19 de Novembro de 2010
	- Entrevista ao grupo I	26 de Novembro de 2010

3.3. Participantes

A investigação envolveu uma turma do 10.º ano de escolaridade e a respectiva professora de Matemática A, incidindo de uma forma particular em dois grupos de alunos, cada um com três elementos.

Por questões legais e éticas, foi solicitada autorização à Direcção da escola para a realização da investigação (Anexo II), a colaboração da professora da turma para se poder assistir às aulas e proceder à recolha de dados, assim como a autorização aos Encarregados de Educação dos alunos da turma, para os seus educandos serem objecto de recolha de dados (Anexo III). Após terem sido efectuados os pedidos de autorização e solicitada a colaboração da professora, os alunos foram convidados a participar no estudo, depois de lhes ter sido apresentada a proposta e de devidamente esclarecidos sobre o que deles era esperado, garantindo a confidencialidade dos dados recolhidos, com o intuito de proteger a sua identidade. Para tal, recorreu-se a nomes fictícios e à omissão de quaisquer dados que permitam identificar os participantes.

Apresenta-se, em seguida, uma breve descrição da escola e justifica-se a escolha da turma, procede-se à caracterização da professora e da turma e faz-se referência aos grupos de trabalho e à escolha dos grupos-caso.

3.3.1. A Escola e a escolha da turma

O estudo realizou-se na escola onde a investigadora trabalha. Uma escola situada no Vale do Ave, onde o principal sector económico é o sector secundário. É predominantemente orientada para o ensino secundário, e é frequentada por alunos de várias freguesias do concelho de Guimarães. No ano lectivo em que foi desenvolvido o estudo, tinha um total de 1094 alunos a frequentar cursos Científico-Humanísticos e cursos profissionais, distribuídos por 19 turmas do 10.º ano, 16 do 11.º e 13 do 12.º e ainda cerca de 200 alunos a frequentar cursos EFA (Educação e Formação de Adultos). Tinha também em funcionamento um centro de Novas Oportunidades. É de salientar que em anos anteriores, a escola teve turmas do 3.º ciclo do ensino básico.

Apesar de ser uma escola grande, envolvendo cerca de 157 professores e um grande número de alunos, é organizada e com bom ambiente de trabalho. Existe uma sala de estudo, onde os alunos podem ser apoiados por professores das várias disciplinas e uma biblioteca bem apetrechada, no entanto, na data em que foi realizado o estudo ainda não tinha laboratório de Matemática. Encontrava-se em obras de remodelação e por isso as condições de trabalho não foram as melhores.

No ano lectivo em que foi desenvolvido este estudo, 2010/2011, a investigadora encontrava-se de licença sabática, pelo que teve de solicitar a colaboração de uma professora da escola, de modo a poder concretizá-lo.

Como o estudo se centrava no tema de Geometria e se pretendia trabalhar com uma turma do 10.º ano de escolaridade, na disciplina de Matemática A, na escolha da professora, pesava o facto de leccionar esta disciplina e além disso interessava que fosse uma pessoa que estivesse disponível para a experiência e para a investigação.

Foi solicitada a colaboração de uma colega com alguma prática de ensino, que gostava de experiências novas e que inicialmente estava previsto ficar com pelo menos uma turma do 10.º ano de Matemática A, mas depois por razões de distribuição de serviço não ficou com este nível de ensino. Perante esta situação a investigadora solicitou a colaboração de outra colega que tinha ficado com uma turma do 10.º ano. A colega aceitou e no início do ano lectivo reunimos com o objectivo de preparar a planificação das aulas e discutirmos as tarefas. Foi-lhe feita a primeira entrevista, mas no dia seguinte decidiu não colaborar, justificando a sua decisão pelo acréscimo de trabalho que iria ter e também por razões relacionadas com o cumprimento do programa.

Apesar das dificuldades que se depararam, foi então encontrada a professora para participar com os seus alunos neste estudo. Como lhe tinham sido atribuídas duas turmas do 10.º ano de Matemática A, foi seleccionada uma delas. Atendendo a que nem a professora nem a investigadora conheciam as turmas, pois a experiência foi realizada no início do ano lectivo e atendendo também ao facto de os materiais necessários para a realização de algumas tarefas serem escassos, o critério de selecção adoptado foi o menor número de alunos por turma.

3.3.2. A professora da turma

Embora a professora não seja objecto de estudo, para uma melhor compreensão do mesmo, revela-se pertinente descrever alguns aspectos relacionados com a sua formação e experiência profissional e com a sua percepção sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem da Geometria.

A professora leccionava há doze anos, estava efectiva e encontrava-se a trabalhar nesta escola pelo segundo ano consecutivo. Quando foi convidada mostrou-se receptiva e prestável, ainda que, com algum receio por causa do cumprimento do programa. Licenciada em ensino de Matemática pela Universidade do Minho, já leccionou todos os níveis de ensino, desde o 7.º ao 12.º ano, e esta era a 2.ª vez que leccionava a disciplina de Matemática A no 10.º ano, embora a 1.ª vez tenha sido há sete anos. Nunca participou em projectos ou experiências de investigação. Em geral, costuma trabalhar em colaboração com os colegas que leccionam o mesmo nível de ensino, na preparação de materiais didácticos. Afirmou na entrevista feita antes do início da experiência que considera importante trabalhar de forma colaborativa, "porque é bom trocar ideias, por vezes surgem dúvidas, e aprendemos uns com os outros" (1.ªEntrevista à Professora [1.ªEP]).

Não tinha experiência em trabalhar com tarefas exploratórias e investigações na sala de aula, nem com os programas de Geometria Dinâmica GSP e *Cabri 3 D*, isto porque "nos últimos anos tenho leccionado Matemática Aplicada às Ciências Sociais e Matemática dos cursos profissionais e não se costuma trabalhar com esses programas" (1.ª EP). Quando leccionou o tema de Geometria do 10.º ano recorreu a materiais manipuláveis, ao manual, ao quadro e giz e à calculadora.

Considera o ensino da Geometria muito importante salientando que:

> Eles [os alunos] devem trabalhar com Geometria desde pequeninos, primeiro acho que é uma maneira de ligar a matemática com o mundo real, por vezes eles têm dificuldade em ver essa ligação, embora para nós seja óbvia. A Geometria está em tudo que eles vêem, descreve os movimentos e a sua posição. Acho que tem sido dada pouca importância à Geometria, se calhar é isso que nós notamos quando eles chegam ao 10.º ano, não vêm muito preparados, penso que o seu ensino tem que ser progressivo e deve ser dada importância ao longo dos ciclos (1.ª EP).

Acha fundamental que os alunos aprendam a representar figuras e a estabelecer relações entre elas, e que progressivamente relacionem a Geometria com os restantes conteúdos. Salienta que o facto da Geometria:

> Obrigar a uma relacionação de propriedades e consequentemente a ter muitos conhecimentos, faz com que os alunos apresentem muitas dificuldades na sua aprendizagem, nomeadamente dificuldades de visualização no espaço, de abstracção e representação (...). Muitas dessas dificuldades provêm do facto de por vezes não haver tempo de trabalhar o tema com a profundidade necessária e isto ano após ano vai agravando a situação (1.ª EP).

Refere que quando se fala em Geometria a impressão com que fica é que os alunos não gostam, "por não ter muito que decorar, mas ao começarem a explorar acabam por gostar e nota-se que os alunos cada vez mais gostam de Geometria" (1.ª EP).

Acha interessante e vantajoso que se proponha a realização de tarefas de exploração e investigação aos alunos, que se dê tempo para eles procurarem, explorarem, investigarem, errarem e discutirem:

> No início poderão achar mais difícil, mas depois acabam por gostar, permitem-lhe adquirir mais conhecimentos, ter mais facilidades em relacionarem e tirarem proveito das aulas. Mas por outro lado, não temos muito tempo, se calhar depois temos que cortar noutras matérias (1.ª EP).

Costuma propor a realização de tarefas em grupo, principalmente aquelas que são mais difíceis e complexas, por considerar que é muito proveitoso, promove a discussão, a colaboração entre os alunos e a entreajuda. Considera a exploração do tema de Geometria do 10.º ano, através da realização de tarefas de exploração e investigação interessante, por ser dada oportunidade aos alunos de descobrirem e compararem estratégias diferentes, discutirem ideias, errarem e com esses erros aprenderem mais.

3.3.3. Caracterização da turma

A turma que participou no estudo era constituída por 20 alunos, com idades compreendidas entre os 14 e 17 anos, sendo a maioria raparigas, como se pode observar na tabela 3.

Tabela 3 – Distribuição dos alunos participantes no estudo por sexo e idade.

	Idade (em anos)				
Sexo	14	15	16	17	Total
Feminino	1	9	1	1	12
Masculino	4	4	0	0	8
Total	5	13	1	1	20

Apenas um aluno da turma reprovou uma vez durante o seu percurso escolar e foi no 2.º ano de escolaridade. Era uma turma que obteve um bom aproveitamento na disciplina de Matemática, no 9.º ano, no entanto, tinha alunos com muitas dificuldades, em termos de organização e exposição dos seus raciocínios.

Para uma caracterização do ambiente sócio-cultural dos alunos, analisaram-se as qualificações académicas e as categorias sócio-profissionais dos pais e verificou-se que a maior parte não possui a escolaridade obrigatória (9.º ano de escolaridade), apenas cinco possuem o ensino secundário e um tem formação superior. No que se refere às categorias sócio-profissionais, evidencia-se que um número significativo de mães trabalha na indústria têxtil e outras são costureiras, um número menos significativo trabalha no comércio. As categorias sócio-profissionais dos pais são mais variadas, desde operários do ramo têxtil, que são em maior número, aos empregados de serviços, jardineiros, cozinheiros e empresários. É de salientar que 60% dos alunos da turma têm apoio social escolar, de onde se pode inferir que as condições sócio-economicas das famílias são fracas. Apesar da baixa qualificação académica, os pais e encarregados de educação, acompanham a vida escolar dos seus educandos, comparecendo nas reuniões com a Directora de Turma.

Somente 25% dos alunos considerou a disciplina de Matemática a sua preferida, sendo a de Ciências da Natureza a preferida por 50% dos alunos. Uma parte dos alunos, 30%, apontou a disciplina de Inglês como sendo aquela a que têm mais dificuldade, seguindo-se as disciplinas de Matemática, Português e Educação Física, todas com 15 %.

As respostas obtidas através da Ficha de Caracterização (FC) preenchida pelos alunos no início da experiência (Anexo IV), permitiram caracterizar a relação destes com a Matemática e com a disciplina de Matemática. Todos os alunos da turma consideram a Matemática importante para a sua vida no futuro. Dois alunos referiram gostar "mais ou menos" da disciplina de Matemática por ser complicada e difícil, porém reconhecem que os faz pensar e que lhes permite aprender coisas novas. Os restantes alunos gostam da disciplina e apontam razões, como por exemplo: "Ajuda a resolver problemas do dia-a-dia e a expandir os meus conhecimentos" (FC, Aluno 1); "Porque estamos sempre a descobrir maneiras novas de resolver as coisas e cativa" (FC, Aluno 2).

Uma vez que a experiência iria decorrer num ambiente de trabalho de grupo, interessava saber a opinião dos alunos sobre esta metodologia de trabalho e sobre o modo como costumavam trabalhar nas aulas de Matemática. A maior parte referiu trabalhar a pares ou em grupo, apenas três alunos mencionaram trabalhar individualmente, salientando, no entanto, que consideram importante trabalhar em grupo, um deles afirmou: "Se tivermos uma dúvida, se o colega souber como se faz é muito melhor e aprendemos depressa" (FC, Aluno 3), outros alunos referiram, por exemplo: "Ajudamo-nos mutuamente e aprendemos maneiras diferentes de raciocinar" (FC, Aluno 4) ou "Quando trabalhamos em grupo, ao termos de explicar o nosso raciocínio ajuda a compreender melhor a matéria" (FC, Aluno 5).

Só 55% dos alunos mencionou que, o que dizem nas aulas de Matemática é valorizado, quer pelos colegas, quer pelo professor. 20% dos alunos considera que o que dizem é valorizado pelo professor, salientando que acham que tudo é importante para os professores e o que dizem conta para avaliação, já em relação aos colegas afirmam não saber e um deles acrescentou: "Entre colegas pode, por vezes, um erro já dar para rebaixar" (FC, Aluno 6). Os restantes alunos afirmaram não saber.

Metade dos alunos da turma afirmou não sentir dificuldade em argumentar e comunicar as suas ideais aos colegas e ao professor, 30%, respondeu "às vezes" e alguns acrescentaram que depende da matéria, que existem conteúdos mais complicados e por isso mais difíceis de explicar.

Os restantes consideraram sentir dificuldade em argumentar e comunicar as suas ideias, um deles escreveu: "Tenho receio/dúvida se está mal e não consigo explicar o raciocínio" (FC, Aluno 7) e outro afirmou que apesar de perceber os conteúdos, "é difícil arranjar as palavras certas para conseguir que os outros percebam" (FC, Aluno 3).

É de salientar que 45% dos alunos já tinha trabalhado no ano lectivo anterior com tarefas de investigação. Desses, 75%, afirmaram que a realização de tarefas exploratórias e investigações nas aulas lhes permite aprender melhor, por exemplo, um dos alunos referiu: "O facto de sermos nós próprios a descobrir o porquê das coisas faz com que entendamos melhor" (FC, Aluno 8). Os que mencionaram não gostar de realizar investigações basearam a sua justificação no grau de dificuldade das mesmas. Dos restantes alunos da turma, a maior parte, afirmou que as tarefas que mais gostam de realizar nas aulas de Matemática são os exercícios, por serem mais fáceis.

Uma boa aula de Matemática é para a maioria dos alunos, uma aula em que o professor explica a matéria e eles resolvem exercícios. Por exemplo: "Uma aula onde o professor explicasse tudo bem e desse exercícios para realizar em grupo ou em pares" (FC, Aluno 9); "Se primeiro o professor nos desse a matéria e depois realizássemos exercícios para entendermos melhor" (FC, Aluno 10).

A maior parte dos alunos, 60%, não gosta de estudar Geometria e considera ter dificuldades na sua aprendizagem, por ser difícil de compreender e por envolver vários conhecimentos. Mas, apesar de a Geometria não ser o seu tema preferido, muitos deles consideram a sua aprendizagem importante, por lhes permitir aprender mais e por estar relacionada com o mundo que os rodeia. Apenas três alunos afirmam que aprender Geometria não será importante para a sua formação profissional.

Na FC era pedido aos alunos para indicarem três de entre vários métodos para aprender Geometria e, 42% apontou como primeira preferência a utilização de materiais manipuláveis, seguindo-se a utilização do computador e de programas de Geometria Dinâmica e só depois a exposição da matéria pelo professor.

Era uma turma unida e mantinha um bom relacionamento com os professores. Apesar de os alunos serem conversadores, eram simpáticos e bem-educados, proporcionando um bom ambiente de trabalho.

3.3.4. Grupos de trabalho e a escolha dos grupos-caso

As recomendações do DES (2001), do NCTM (1994, 2007) e da APM (1998) sugerem que devemos proporcionar aos alunos diversas formas de interacção nas aulas de Matemática, indicando claramente que se deve fomentar o trabalho de grupo. Diversos autores, por exemplo, Tudella *et al.* (1999), consideram que nas aulas com tarefas de natureza exploratória e investigativa, a organização que se apresenta mais adequada parece ser o trabalho em pequenos grupos. Assim, nas aulas em que foram realizadas as tarefas, optou-se por uma metodologia de trabalho em pequenos grupos de alunos.

A literatura indica que diferentes circunstâncias podem sugerir grupos de diferentes tamanhos, mas, em geral, e segundo Orton e Frobisher (1996), os grupos devem ser pequenos, envolvendo entre dois a seis elementos, pela razão óbvia de que quanto maior for o grupo menos hipóteses há de que cada membro se envolva activamente na discussão. Contudo, parece não haver razões relevantes que justifiquem um determinado número de alunos por grupo (Nunes, 1996). Assim, e como algumas tarefas seriam trabalhadas com o auxílio do computador e outras com apoio de materiais manipuláveis, considerou-se que o número mais indicado de alunos por grupo seria de três. Porque por um lado, um número superior de alunos por grupo poderia levar a um menor envolvimento de cada um na actividade e por outro lado, grupos de dois poderiam não oferecer muita interacção ou tornar a existência do grupo problemática quando um deles faltasse como é sublinhado por Nunes. Sendo assim e como a turma era constituída por 20 alunos, formaram-se seis grupos de três elementos e um de dois.

Como a maior parte dos alunos da turma não se conhecia e tendo em conta que alguns autores (e.g., Abrantes *et al.*, 1997; Curcio & Artzt, 1998) referem que o professor deve ser flexível quanto aos critérios de formação e estabilidade dos grupos de trabalho considerando as preferências dos alunos. E também porque nem a investigadora, nem a professora conheciam bem os alunos, antes de formar os grupos, apenas tinham observado três aulas, optou-se por ter em conta as preferências dos alunos na escolha dos seus colegas de grupo. Tendo-se apenas sugerido a troca de grupo a dois alunos, para evitar que a diferença em termos cognitivos fosse muito grande, isto atendendo aos resultados, em termos de aproveitamento, obtidos pelos alunos durante o 3.º ciclo do ensino básico na disciplina de Matemática. Pois, alguns autores (e.g., Dillenbourg, Baker, Blaye & O'malley, 1996; Laborde, 1994) consideram que a heterogeneidade não deve ser exagerada, se a diferença em termos cognitivos for grande, o entendimento entre os alunos poderá ser difícil.

Optou-se pela estabilidade dos grupos de trabalho ao longo da experiência de ensino, atendendo a que a mesma iria decorrer num período de tempo curto e era importante que os alunos se familiarizassem com os estilos de trabalho, as competências e as características pessoais dos outros elementos.

Relativamente à selecção dos dois grupos-caso, como se tinha um conhecimento diminuto dos grupos de trabalho optou-se, por escolher inicialmente quatro grupos para serem observados com mais atenção e serem objecto de gravação áudio, por parecerem mais dinâmicos. Mas, na primeira aula em que foi realizada a segunda tarefa, os elementos de um desses grupos tiveram de ser distribuídos por outros grupos por não terem trazido computador, pelo que restavam três grupos. Dois formados por três alunas cada e o outro por três alunos do sexo masculino. Desses três grupos foram seleccionados dois tendo em conta os seguintes critérios: (1) ser um grupo de cada género, dado que os grupos não eram mistos e (2) a existência de uma boa relação de trabalho entre os elementos do grupo. Num dos grupos de meninas verificou-se uma forte liderança por parte de uma das alunas, dando pouco 'espaço' para as colegas se envolverem no trabalho. No outro, muito embora se observasse alguma tendência de uma das alunas para liderar, todas contribuíam com as suas ideias. Assim e como a comunicação estabelecida entre os elementos do grupo era objecto de análise, optou-se por escolher este último. Tendo então ficado para estudos de caso o grupo I (GI) constituído por Diana, Francisca e Matilde e o grupo II (GII) formado por Luís, Nelson e Pedro.

3.4. Métodos de recolha de dados

A recolha dos dados foi realizada, essencialmente, durante as aulas da disciplina de Matemática A, nas quais os alunos desenvolveram actividades com tarefas de exploração e investigação no âmbito da Geometria.

Tendo em conta o carácter qualitativo da metodologia adoptada nesta investigação, a recolha de dados foi essencialmente descritiva com vista a obter uma caracterização o mais completa possível da situação em estudo. Neste sentido e atendendo a que nos estudos de caso se devem usar múltiplas fontes de evidência (Yin, 2009), procurou-se diversificar os métodos de recolha de dados, com o propósito de obter um conjunto significativo de dados, válido e bem fundamentado (Bogdan & Briklen, 1994; Gall *et al.*, 1996; Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, 2005) tornando possível a sua confrontação, ou seja, o que diversos autores denominam por triangulação dos dados.

Sendo assim, os métodos de recolha de dados utilizados na investigação foram: a observação, a entrevista e a análise documental. Estas são segundo Lessard-Hébert *et al.* (2005) as técnicas que estão normalmente associadas à investigação qualitativa.

3.4.1. Observação

A observação é uma das técnicas que as metodologias qualitativas privilegiam (Lessard-Hébert *et al.*, 2005). De acordo com Gall *et al.* (1996) a observação permite ao investigador formular a sua própria versão do que está a ocorrer e fornece uma descrição mais completa da situação, do que a que seria possível através de outros métodos. Ela "pode assumir uma forma directa sistemática ou uma forma participante" (Lessard-Hébert *et al.*, 2005, p. 143).

A observação participante procura descrever os factos tal como eles são para os sujeitos observados e pode revestir-se de uma forma mais activa ou mais passiva, conforme o nível de envolvimento do observador em relação aos acontecimentos e aos pontos de vista dos participantes. Na observação activa, o observador envolve-se nos acontecimentos e regista-os após eles ocorrerem, ao passo que na observação passiva o observador não participa nos acontecimentos, assiste a eles do exterior (Lessard-Hébert *et al.*, 2005).

Neste estudo a observação foi participante activa, uma vez que o papel de observador foi desempenhado pela investigadora, que trabalhou em assessoria com a professora da turma e interagiu com os indivíduos sujeitos a observação com a finalidade de recolher dados sobre as suas acções, opiniões e perspectivas. A observação ocorreu no contexto natural onde se desenvolveu a investigação. Foi efectuada sobre a forma de registo escrito de notas pela investigadora, após a interacção com os alunos ou a observação da interacção entre os alunos e entre estes e a professora e complementada com o registo áudio e vídeo, de modo a obter informações mais reais e completas da dinâmica da sala de aula. Para Gall *et al.* (1996) as gravações áudio e vídeo têm a vantagem de permitirem registar acontecimentos que ocorrem ao mesmo tempo e de poderem ser estudados várias vezes para uma análise cuidada e quando for mais conveniente para o observador. Assim, nas aulas em que as tarefas foram exploradas dispôs-se de duas câmaras de filmar e de gravadores áudio para obter informações mais detalhadas sobre as interacções ocorridas quer em pequeno grupo, quer em grande grupo. Todos os registos foram visionados pela investigadora e transcritos.

3.4.2. Entrevista

A entrevista é uma fonte rica de obter informações relativas a aspectos não observáveis numa dada situação. Ela é segundo Bogdan e Briklen (1994) "utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador descobrir intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo" (p.134).

As entrevistas podem ser estruturadas, semi-estruturadas e não estruturadas, dependendo do grau de controlo que o investigador deseja ter sobre a situação. De acordo com Gall *et al.* (1996) na investigação qualitativa o formato de entrevista é pouco estruturado, uma vez que a meta do investigador é ajudar os respondentes a exprimirem as suas perspectivas acerca de uma situação nas suas próprias palavras.

As entrevistas podem ser individuais ou de grupo. Para Gall *et al.* (1996) uma entrevista de grupo envolve a formulação de questões a um grupo de sujeitos reunidos para este propósito específico. Este grupo é designado por estes autores por *grupo foco*. Os mesmos autores afirmam que recentemente, os investigadores têm manifestado interesse no uso de *grupos foco* para recolher dados, por verificarem que as interacções entre os participantes estimulam-nos a afirmar sentimentos, percepções e crenças que não exprimiriam em entrevistas individuais. Também Bogdan e Briklen (1994) salientam que nas entrevistas de grupo, os sujeitos ao reflectirem sobre um tópico podem estimular-se uns aos outros e avançar ideias.

Assim, no final da experiência realizou-se uma entrevista semi-estruturada a cada um dos dois grupos que são objecto de estudo de caso, com o objectivo de esclarecer alguns pontos do trabalho realizado e obter informações mais detalhadas sobre a opinião dos alunos em relação à experiência. Esta entrevista embora obedecendo a um guião (Anexo V) previamente preparado, de perguntas abertas, foi flexível permitindo uma recolha de dados num ambiente natural de conversa, deixando os participantes falar livremente sobre os seus pontos de vista. Não foi seguida a ordem exacta das questões que consta do guião e foram integradas novas questões tendo em conta o rumo do diálogo com os entrevistados.

Realizaram-se também duas entrevistas semi-estruturadas à professora da turma, tendo por base um guião orientador de questões abertas para cada uma (Anexos VI e VII). A primeira decorreu no início do estudo com a finalidade de recolher dados acerca da formação académica e percurso profissional da professora, da sua experiência com tarefas de natureza exploratória e investigativa e com programas de Geometria Dinâmica, da sua percepção sobre o ensino da Geometria e sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem da mesma. A segunda realizou-se no final da experiência com o intuito de promover uma reflexão sobre o contributo do estudo quer para os alunos quer para a sua formação.

As entrevistas foram gravadas em áudio para preservar e aumentar a fiabilidade da informação recolhida e posteriormente transcritas.

3.4.3. Análise documental

A análise documental em investigação qualitativa "é utilizada para triangular os dados obtidos através de uma ou duas outras técnicas" (Lessard-Hébert *et al.*, 2005, p. 144).

Nesta investigação foram analisados documentos de registo que continham informações relativas ao percurso escolar e à componente afectiva e social dos alunos, documentos escritos produzidos pelos alunos nas aulas e registo escrito de notas feito pela investigadora ao longo do estudo.

Através dos documentos de registo relacionados com o percurso escolar e com a componente afectiva e social dos alunos foram recolhidas informações relativamente à idade, às retenções dos alunos e aos seus resultados escolares na disciplina de Matemática, assim como algumas informações a nível de ambiente familiar, condições sócio-economicas, habilitações e profissões dos encarregados de educação, bem como as expectativas dos alunos sobre a escola e sobre o seu futuro. Estas informações ajudaram à caracterização da turma e foram complementadas com a análise dos dados obtidos através da ficha de caracterização preenchida pelos alunos no início da experiência, com a observação de aulas que antecederam a intervenção de ensino e com a realização de conversas informais com a professora da turma. Através da ficha de caracterização procurou-se conhecer as concepções e atitudes dos alunos face à Matemática e em particular à Geometria, assim como às aulas de Matemática.

Para eliminar interpretações erróneas das observações realizadas e uma vez que os relatos resultantes de observações participantes são descritos com frequência como subjectivos, recorreu-se à análise de documentos escritos produzidos pelos alunos. Este foi um meio para obter dados mais significativos, sobre a mobilização de conhecimentos, a compreensão de processos usados pelos alunos na realização das tarefas de exploração e investigação, a comunicação escrita do trabalho desenvolvido e sobre as dificuldades sentidas pelos mesmos. Assim, foi pedido a um responsável de cada grupo para no fim de cada tarefa entregar a resolução à investigadora, que depois de digitalizada foi devolvida ao grupo. No final de cada tarefa foi ainda solicitado aos alunos para preencherem um ficha de reflexão individual sobre a mesma (Anexo VIII), a fim de se obterem dados mais concretos sobre a opinião de cada aluno relativamente às dificuldades sentidas na realização da tarefa e ao modo como as ultrapassou. O preenchimento desta ficha foi feito pelos alunos em casa, não só para evitar ocupar tempo da aula, mas também porque foi sugerido pelos próprios alunos.

Com o registo escrito de notas procurou-se obter informações sobre observações, questões, diálogos e comentários pertinentes para a investigadora, que surgiram durante a recolha de dados e que foram registadas durante e após a observação na sala de aula e após as conversas informais realizadas com a professora da turma.

3.5. Análise de dados

A análise de dados é um processo complexo que "envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros" (Bogdan & Briklen, 1994, p. 205). Estes autores recomendam que alguma análise seja realizada durante a recolha de dados para que este processo tenha alguma orientação.

Neste estudo, a par da recolha de dados procedeu-se a alguma análise dos materiais que constituíram a base de trabalho disponível para tentar responder às questões de investigação. A análise do material recolhido seguiu o modelo proposto por Miles e Huberman (referido em Lessard-Hébert *et al.*, 2005), que envolve a redução dos dados, a apresentação e a interpretação/verificação das conclusões. O processo de redução dos dados consistiu na selecção, simplificação e transformação dos dados obtidos através das notas de registo de observação, documentos produzidos pelos alunos e registos de gravações em áudio e vídeo, para que se pudessem retirar conclusões, tendo, contudo, o cuidado de não os descontextualizar. A apresentação dos dados foi efectuada através de um sistema de categorias que emergiu dos próprios dados e teve por base o referencial teórico do estudo. A interpretação/verificação das conclusões considerou a atribuição de significado a partir dos dados e das relações identificadas entre eles, permitindo a elaboração de afirmações no sentido de responder às questões de investigação.

A análise que ocorreu ao longo da recolha dos dados foi essencialmente realizada a partir do visionamento das gravações vídeo de cada aula, compatibilizando-as com as gravações áudio e da transcrição integral das mesmas, que foi feita a seguir a cada aula. Na fase de transcrição foram registados alguns comentários sobre o que foi observado e tomadas notas que referenciavam episódios mais importantes. Toda a informação compilada era organizada de modo a que a investigadora pudesse lidar com ela mais facilmente. Para cada grupo-caso foi elaborada uma pasta contendo toda a informação por tarefa, as transcrições, os documentos produzidos pelos alunos e as notas de registo consideradas pertinentes para o estudo.

Após a recolha de dados, optou-se inicialmente, por fazer uma descrição da dinâmica das aulas em que foram realizadas as tarefas de natureza exploratória e investigativa, procurando compreender de que forma os alunos da turma se envolveram neste tipo de actividade. Neste sentido, foi feita a leitura atenta das notas de registo apontadas pela investigadora, das transcrições das gravações das aulas, que juntamente com as produções elaboradas pelos alunos, nomeadamente registo do trabalho desenvolvido em cada tarefa e fichas de reflexão individual sobre as tarefas, permitiu descrever essas aulas e analisar alguns aspectos que se prendem com a actividade investigativa e com as dificuldades dos alunos. Essa descrição e essa análise foram feitas tarefa a tarefa seguindo as três fases que envolve uma aula de investigação – introdução da tarefa, desenvolvimento da tarefa e discussão final – e por último, foram descritas as dificuldades referidas pelos alunos nas fichas de reflexão individual sobre a tarefa.

Depois deste trabalho procedeu-se a uma nova leitura de todo o material existente referente aos grupos-caso: transcrições das aulas, notas de registo, documentos escritos produzidos pelos alunos e transcrições das entrevistas. Essa leitura foi acompanhada da marcação de frases e episódios, com auxílio de cores diferentes e de anotações nas margens, procurando regularidades e padrões para se elaborar uma lista de codificação/categorização, que fosse ao encontro das questões de investigação. Estabeleceu-se assim, uma estrutura de abordagem dos casos, que foi sendo aperfeiçoada ao longo da escrita do primeiro caso – Grupo I. A estrutura adoptada compreende três categorias: processos utilizados pelo grupo na realização das tarefas de exploração e investigação; dificuldades reveladas pelos alunos na aprendizagem da Geometria e envolvimento dos alunos na realização das tarefas. Cada uma destas categorias foi dividida em subcategorias. Segue na tabela 4 o desdobramento das categorias.

Na escrita dos resultados são usados excertos das transcrições das gravações das aulas e das entrevistas, assim como das produções dos alunos relativas ao trabalho desenvolvido e à sua reflexão acerca das dificuldades sentidas na realização das tarefas e como foram superadas, para sustentar o que vai sendo descrito e permitir ao leitor analisar informação original. Contudo, e para que o trabalho não se tornasse repetitivo e demasiado longo, procurou evitar-se a inclusão de evidências sob a forma de excertos nalgumas situações em que estas se mostravam dispensáveis por não acrescentar nada de substancial.

Tabela 4 – Desdobramento das categorias.

Categorias	**Subcategorias**
Processos utilizados pelo grupo na realização das tarefas de exploração e investigação	Exploração inicial e formulação de questões
	Formulação e teste de conjecturas
	Justificação e prova
	Comunicação do trabalho realizado
Dificuldades reveladas pelos alunos na aprendizagem da Geometria	Uso de desenhos
	Construção de polígonos e representação de objectos tridimensionais
	Visualização
Envolvimento dos alunos na realização das tarefas	Papeis assumidos pelos alunos na interacção com os colegas
	Padrões de interacção

CAPÍTULO IV

A REALIZAÇÃO DA EXPERIÊNCIA NA TURMA

Neste capítulo são descritas e analisadas as aulas em que foram realizadas as tarefas de exploração e investigação, nas quais participaram os alunos que constituem os grupos que são objecto de estudo de caso desta investigação.

As tarefas de exploração e investigação (Anexo I) realizaram-se, em geral, com uma periodicidade de uma por semana, excepto entre a primeira e a segunda e ainda a quinta e sexta que foram realizadas com um intervalo de 15 dias. Tiveram o seu início em finais de Setembro e decorreram em aulas de 90 minutos, tendo terminado em meados de Novembro. O tempo inicialmente previsto para a consecução das tarefas, em algumas delas prolongou-se um pouco mais. A origem deste prolongamento deveu-se, sobretudo ao pouco conhecimento da maior parte dos alunos em trabalhar com este tipo de tarefas e também ao aprofundamento a que algumas das tarefas foram submetidas.

Todas as tarefas foram entregues por escrito a cada um dos alunos, de modo a que pudessem regressar a ela sempre que desejassem. A investigadora, paralelamente, teceu algumas considerações de forma a clarificar alguns pontos da tarefa e a promover o envolvimento dos alunos no trabalho. Para cada tarefa foi entregue uma folha em branco a cada um dos grupos e pedido que registassem por escrito o trabalho realizado.

Durante a realização das tarefas houve o cuidado para que a aula se centrasse na actividade do aluno. A professora e a investigadora tentaram cingir-se o mais possível a um apoio discreto, deixando que os alunos trabalhassem de forma mais autónoma.

Para todas as tarefas realizou-se um momento de discussão final no grupo turma, a fim de partilhar e reflectir sobre o trabalho realizado e ainda para que os alunos ficassem com uma visão global desse mesmo trabalho. Esta discussão ocorreu, em geral, na aula em que os alunos terminaram a realização da tarefa.

Tarefa 1 – Quadrados em Quadrados

Com esta tarefa pretendia-se que os alunos investigassem possíveis relações entre um quadrado inicial (cujos lados tinham medidas de comprimento inteiras) e um determinado tipo de quadrados que se podia inscrever nesse quadrado inicial. A primeira questão era mais estruturada permitindo que os alunos se apercebessem da forma como os quadrados se podiam inscrever num quadrado inicial. Na segunda questão pedia-se que fossem investigadas relações entre os quadrados inscritos e o quadrado inicial, cabendo aos alunos decidir sobre os aspectos a investigar.

A investigadora antes de entregar a tarefa aos alunos explicou que após a apresentação da mesma, deveriam começar a realizar o trabalho, que essa realização dependia essencialmente da sua iniciativa e que era fundamental ouvir a opinião uns dos outros e discutir as ideias no ceio do grupo. Também informou que a professora e a investigadora, apenas iriam orientar e dar o apoio estritamente necessário. Explicou, ainda, a importância dos processos inerentes ao trabalho investigativo e também do registo do trabalho desenvolvido para depois ser apresentado e discutido em grande grupo.

Introdução da tarefa. A proposta de trabalho depois de entregue aos alunos foi lida pela investigadora em voz alta, que paralelamente foi questionando os alunos de forma a diminuir eventuais dificuldades de interpretação do enunciado.

Desenvolvimento da tarefa. Após a breve apresentação da tarefa, os alunos começaram a desenhar quadrados obedecendo às condições pedidas no enunciado. À medida que iam avançado, chamavam a professora ou a investigadora com o intuito de obter confirmação. Estas iam circulando pelos diferentes grupos para tentarem acompanhar o trabalho dos alunos. A maior parte dos grupos, ao mesmo tempo que ia desenhando os quadrados ia escrevendo o número de quadrados inscritos possíveis: 3x3 $\rightarrow$ 2 quadrados; 4x4 $\rightarrow$ 3 quadrados; 5x5 $\rightarrow$ 4 quadrados. Depois de desenhar os quadrados inscritos para os casos do quadrado inicial 3x3, 4x4 e 5x5, os alunos formularam algumas conjecturas, mas, alguns deles não fizeram o teste nem sentiam a necessidade de as justificar. Só após lhes ter sido solicitada a justificação é que a apresentaram. O ritmo de trabalho dos grupos já era bastante diferente. Uns já estavam na segunda questão e outros ainda estavam a procurar argumentos para justificar a conjectura.

Na segunda questão alguns grupos sentiam-se um pouco perdidos, não sabiam por onde começar. Outros formularam de imediato algumas conjecturas, baseando-se apenas na exploração de um caso. Houve grupos que fizeram primeiro alguns cálculos para determinar a medida do comprimento dos lados dos quadrados e só depois formularam algumas conjecturas. Só as alunas do grupo III se preocuparam em formular algumas questões, ainda que de forma pouca precisa.

Os alunos estabeleceram algumas relações entre perímetros e entre áreas dos quadrados inscritos nos quadrados iniciais 3x3, 4x4 e 5x5. Apenas o grupo I iniciou a exploração para o caso do quadrado inicial nxn, durante a aula de 90 minutos que decorreu no primeiro bloco da manhã.

No mesmo dia, mas agora no último bloco de aulas da tarde, foi dado mais algum tempo, cerca de 15 minutos, para os alunos continuarem a realização da tarefa e depois passou-se à discussão em grande grupo.

Discussão final. A investigadora solicitou a um dos grupos (GIII) para apresentar o trabalho desenvolvido. As alunas começaram por partilhar com os colegas as conjecturas que tinham formulado na primeira questão, o que gerou alguma discussão, embora grande parte dos alunos não se tenha envolvido nessa discussão. Alguns alunos pediam explicações e outros referiam o que tinham feito. Foi um momento em que os alunos tiveram oportunidade de ficar a conhecer estratégias diferentes daquelas que tinham utilizado e também de se aperceberem da importância do teste das conjecturas.

Na segunda questão a discussão foi mais participada, apesar de muitos alunos continuarem a não contribuir com as suas ideias. Dois alunos do grupo VI pediram para serem eles a apresentar o que tinham feito (a colega de grupo faltou nessa aula). Referiram a conjectura que tinham formulado em relação aos perímetros dos quadrados inscritos, fizeram os cálculos para determinar a medida do comprimento dos lados dos quadrados inscritos no quadrado inicial 3x3, utilizando o Teorema de Pitágoras e calcularam os perímetros dos quadrados:

> Carlos: Os perímetros são iguais.
> Joaquim: E são menores que o do quadrado inicial.
> Rosa: Nós também vimos para as áreas.
> Carlos: Para as áreas não fizemos, mas podemos fazer, é fácil, no primeiro é 5. Depois fizemos o perímetro para os do 4x4 e aí já vimos que a conjectura não era válida, o segundo dava diferente.
> Joaquim: Eu faço aqui os cálculos.
> Investigadora (Inv): É importante que organizem os dados.
> Matilde: Nós fizemos tabelas para depois ser mais fácil comparar, colocamos os dados do comprimento dos lados, do perímetro e das áreas para percebermos se existem relações.
> Inv: Querem dar uma ajuda aos vossos colegas?
> (Matilde foi ao quadro e desenhou uma tabela como a que tinham feito).

Nelson ofereceu-se para ir ajudar Joaquim a fazer os cálculos para os casos dos quadrados inscritos nos quadrados iniciais 4x4 e 5x5. Organizaram os dados em tabelas, tal como tinha sugerido Matilde e formularam, em conjunto, uma conjectura genérica: "Os quadrados inscritos são iguais dois a dois para o n ímpar e quando é par também, só o do meio é diferente", realizaram alguns testes e foram apresentando alguns argumentos para a sua justificação. Procuraram generalizar e obter as expressões para a medida do comprimento dos lados, dos perímetros e das áreas para quadrados inscritos no quadrado inicial nxn, para estabelecer relações entre esses quadrados e o quadrado inicial, o que demorou algum tempo. Os alunos estavam com dificuldade em obter essas expressões, mas com alguma orientação da investigadora, conseguiram. Tendo ficado registadas na tabela da figura 7.

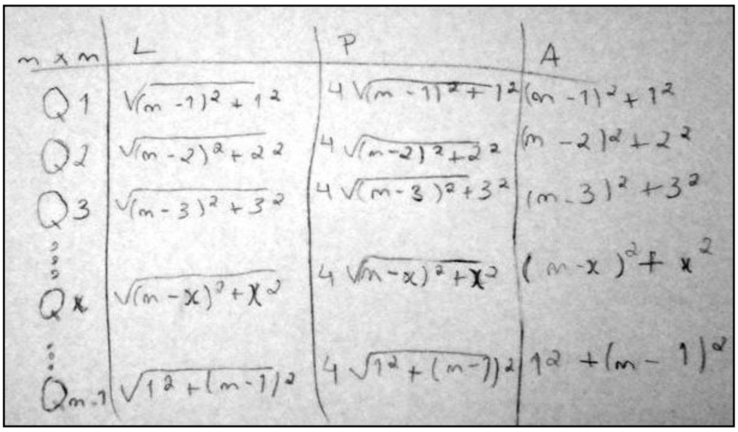


Figura 7. Tabela com as expressões das medidas do lado, perímetro e área dos quadrados inscritos no quadrado inicial nxn.

Após a generalização a maior parte dos alunos não sentia a necessidade da prova:

Inv: Então e agora?
Carlos: Agora, agora já está, já chegamos à conclusão.
Nelson: É, e vemos que os quadrados das pontas são iguais, têm a mesma expressão.
Inv: Vocês obtiveram as expressões das medidas através da generalização, é preciso fazer a prova.
Francisca: Nós provamos para o quadrado inscrito x.
Matilde: Pusemos m.
Luís: E como é que provaste?
Francisca: Fizemos um quadrado de lado n e depois um inscrito e...
Inv: É melhor virem aqui ao quadro explicar.

As alunas do grupo I foram as três para o quadro explicar aos colegas como tinham feito.

Dificuldades referidas pelos alunos. A maior parte dos alunos na ficha de reflexão individual sobre a tarefa mencionou que sentiu dificuldades na questão 2, alguns porque não sabiam como começar, sentiam-se perdidos, por exemplo Mara escreveu: “Senti mais dificuldades na questão 2. Pois não sabia como começar a fazer a resolução da mesma”. Outros referiram a dificuldade em expressar as suas ideias e raciocínio, como foi o caso de Artur que referiu: “Senti mais dificuldades em explicar o meu raciocínio à colega de grupo ”. Outros porém, apontam a dificuldade na generalização, por exemplo Rosa afirmou: “As dificuldades que senti foram as de conseguir chegar às expressões que dessem para todos os quadrados inscritos no quadrado nxn, para estabelecer relações”. Esta aluna, como aliás muitos outros, mencionou que só conseguiu superar as dificuldades aquando da discussão na turma: “Cheguei só mais tarde, em grupo tínhamos tentado estabelecer algumas relações que não chegamos a terminar, mas depois na discussão em turma superei".

E de facto, os alunos em pequeno grupo avançaram algumas relações entre os quadrados inscritos e o quadrado inicial, para os casos dos quadrados 3x3, 4x4 e 5x5, mas para o quadrado nxn poucos conseguiram, foi através da discussão na turma que os alunos ficaram a conhecer essas relações.

Tarefa 2 – Investigação com Quadriláteros

Esta tarefa foi realizada com auxílio do GSP. A primeira questão orientava os alunos para investigarem o tipo de quadrilátero que se obtém quando se unem os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero inicial qualquer. A segunda questão era mais aberta e pretendia que os alunos estabelecessem relações entre os dois quadriláteros e a terceira questão era mais específica pedindo a investigação para casos particulares de quadriláteros.

Os alunos tinham trabalhado com o GSP nas duas aulas anteriores. Na primeira, a investigadora explicou alguns procedimentos de funcionamento, uma vez que nenhum aluno sabia trabalhar com este *software*, e foi feito algum trabalho exemplificativo do que era uma investigação com o GSP. Na segunda aula, os alunos utilizaram o GSP para realizarem uma investigação com triângulos.

Apresentação da tarefa. O enunciado da tarefa foi entregue aos alunos e optou-se por não fazer a leitura, uma vez que este estava claro, deixando assim, que os alunos iniciassem a sua exploração com mais autonomia. Apenas foi recordado para irem registando o trabalho que iam desenvolvendo.

Desenvolvimento da tarefa. Os alunos estavam entusiasmados e começaram de imediato a construir um quadrilátero. Formularam algumas conjecturas, que rapidamente foram refutadas quando movimentaram um dos vértices do quadrilátero inicial. Todos os grupos acabaram por conjecturar que o quadrilátero que se obtém unindo os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero qualquer é um paralelogramo. Embora alguns tenham demorado bastante tempo, como foi o caso do grupo II.

Atendendo a que os alunos, em geral, não estavam a conseguir provar a conjectura, apresentavam apenas justificações baseadas na percepção visual e nalgumas medições, optou-se por proporcionar um momento de discussão no grupo turma, antes da maior parte dos grupos passar para a segunda questão. Os alunos obtiveram algumas medições, para justificar que o quadrilátero obtido unindo os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero qualquer tinha lados e ângulos geometricamente iguais dois a dois e quando lhes foi perguntado o que era um paralelogramo, Rosa respondeu: "Tem 4 lados e são paralelos dois a dois". Os restantes alunos concordaram com esta opinião. Mas, não sabiam justificar porque é que os lados do quadrilátero que obtiveram eram paralelos dois a dois. Como se pode verificar pelo diálogo seguinte:

> Inv: Como é que justificam que os lados são paralelos dois a dois?
> Joana: Porque os lados são sempre iguais dois a dois e os ângulos também.
> Luís: Geometricamente iguais.
> Inv: Exacto ou congruentes, já vimos isso na última aula. Então, a Joana diz que os lados e os ângulos são sempre congruentes dois a dois. Como podemos ter a certeza?
> (Ocorreu um período de silêncio).
> Inv: Então? Ninguém diz nada?
> Leonel: Quando movimentamos dá igual.
> Artur: Vê-se que os lados são sempre paralelos dois a dois.

Uma vez que os alunos não conseguiram apresentar argumentos plausíveis para justificar que os lados eram paralelos dois a dois, a investigadora sugeriu-lhes que representassem uma das diagonais do quadrilátero inicial ficando este dividido em dois triângulos. E foi recordada a proposição de Euclides, que tinha sido abordada na aula anterior aquando da realização de uma tarefa de investigação com triângulos, e que permite afirmar que se unirmos por um segmento os pontos médios de dois dos lados de um triângulo, esse segmento vai ser paralelo ao terceiro lado. Com esta sugestão e com as contribuições dos alunos, especialmente de Matilde, conseguiu-se provar a conjectura formulada.

Na segunda questão, os alunos não formularam questões de forma explícita, usaram afirmações como por exemplo: "Vamos ver em relação aos ângulos" (GV) ou "Vamos ver se há [relações] entre as áreas" (GIII) e as estratégias de trabalho diferiram de uns grupos para os outros. Uns à medida que iam efectuando algumas medições iam formulando conjecturas, outros resolveram efectuar muitas medições, olhar atentamente para elas e só depois procuraram formular conjecturas. Outros, ainda, para além de efectuarem também numerosas medições organizaram-nas, para mais facilmente formularem as conjecturas. Os alunos estabeleceram, assim várias conjecturas, algumas das quais de forma implícita, outras irrelevantes para a investigação. Através da medição das áreas dos dois quadriláteros todos os grupos conseguiram conjecturar que a área do quadrilátero inicial era o dobro da do inscrito. Fizeram alguns testes, mas, nenhum dos grupos teve a preocupação de validar a conjectura. Para os alunos, o facto de arrastarem um dos vértices do quadrilátero inicial e a razão das áreas dar um valor constante era suficiente.

Ao toque da campainha a maior parte dos grupos já estava na questão três, apenas dois não tinham terminado a segunda questão. Na aula seguinte, que ocorreu passado um dia, foi dado algum tempo para os alunos continuarem a realização da tarefa. Tendo-se prolongado mais do que o previsto. Pois os alunos, de um modo geral, apresentaram dificuldades, em construir os vários quadriláteros. Alguns grupos revelaram também dificuldades na identificação do paralelogramo que se obtém unindo os pontos médios dos lados consecutivos desses quadriláteros. Estas dificuldades prendiam-se com o desconhecimento das propriedades específicas de alguns dos quadriláteros e também com o não reconhecimento de um determinado tipo de quadrilátero quando o desenho que o representava não se assemelhava com um protótipo. Nalguns grupos os alunos só reconheceram um quadrado quando ele estava na posição horizontal. Como foi caso dos alunos do grupo VII, que não identificaram o quadrilátero [GHIJ] da figura 8 como um quadrado.

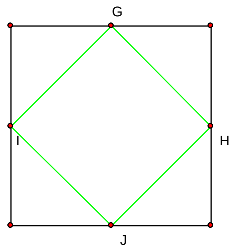


Figura 8. O quadrilátero obtido pelo grupo VII, depois de unirem os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrado.

Foi necessário questionar os alunos no sentido de os levar a pensar nas propriedades dos quadriláteros.

Foi ainda necessário fornecer orientações a alguns grupos para a construção de quadriláteros especiais. Pois construíam os quadriláteros *ha doc* e depois desmanchavam-se por arrastamento. Um outro aspecto a salientar foi a pouca preocupação por parte de alguns grupos em registar as conjecturas, principalmente as que foram refutadas, assim como as justificações. Limitavam-se a observar os quadriláteros que iam obtendo por arrastamento de um dos vértices do quadrilátero inicial, a fazer várias medições e a verbalizar algumas justificações.

Discussão final. Uma vez que a questão um já tinha sido discutida, na aula anterior, a discussão iniciou-se pela apresentação dos resultados da questão dois. Foi o grupo V, que a pedido da investigadora começou essa apresentação. É de notar que nesta aula foi necessária uma distribuição dos alunos de dois grupos pelos restantes grupos, pelo facto de uma aluna do grupo VI que tinha ficado de trazer o computador ter faltado e um aluno do grupo IV se ter esquecido do computador. Os alunos começaram por dizer que conseguiram estabelecer relações, entre áreas e entre perímetros. Relativamente às áreas todos os colegas concordaram. O mesmo não aconteceu em relação aos perímetros. Os alunos deste grupo afirmaram que a razão dos perímetros dos dois quadriláteros era de 1,44, o que levou a alguma contestação por parte dos outros grupos:

Mara: A razão entre os perímetros deu 1,44.
Nelson: Não, isso já não acontece.
Francisca: Oh stôra, se calhar não arrastaram, muitas vezes, porque a nós no início também dava constante, mas depois arrastamos mais vezes e vimos que não dava.
Carlos: Devíamos ter movimentado mais, para ver melhor.

Esta discussão acabou por permitir que estes alunos se apercebessem da importância do teste das conjecturas. Também em outros grupos se verificou que os alunos não tiveram muito cuidado em fazer o teste das conjecturas e o mesmo aconteceu com a sua validação.

A prova da conjectura que os alunos formularam em relação às áreas dos dois quadriláteros, foi feita na aula seguinte, em grande grupo, uma vez que não tinha sido realizada em pequeno grupo. Os alunos não apresentaram ideias, então a investigadora pediu a Carlos para representar, no quadro, uma figura de acordo com que o que era pedido no enunciado e sugeriu que traçasse uma das diagonais do quadrilátero inicial, questionou os alunos sobre o que se pretendia provar e pediu sugestões. Alguns alunos sugeriram relacionar as áreas dos triângulos semelhantes [BCD] e [GCH] da figura 9 e foi a partir desta sugestão que se iniciou a prova da conjectura.

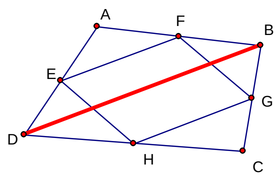


Figura 9. Desenho semelhante ao representado no quadro por Carlos.

Foram vários os alunos que participaram na discussão, alguns que nunca tinham participado de forma espontânea, deram a sua opinião e questionaram os colegas, como foi o caso de Lúcia, de Fábio e de Mónica:

Nelson: A área do triângulo pequeno é o dobro da do triângulo maior.
Lúcia: Não, é metade, porque o triângulo pequeno tem menor área que o grande.
(Começaram vários alunos a falar ao mesmo tempo).
Inv: Calma, vamos lá por partes. Porquê é que os triângulos são semelhantes?
Luís: Porque têm um ângulo comum que é aquele ali, o HCG.
Mónica: E os lados são proporcionais.
Lúcia: Mas, que lados?
Mónica: O DC e HC e o CB e CG.
Inv. Qual é a razão de semelhança?
Cátia: É 2.
Fábio: 2! Não percebi.

Cátia: Então não vês, é por causa dos pontos médios, os lados do pequeno são metade dos do grande.
Inv: Ora então, qual a razão entre as áreas dos dois triângulos?
Nelson: Vai ser 4.

Terminada a prova, a discussão prosseguiu com a apresentação dos resultados da investigação para casos especiais de quadriláteros. Um dos alunos do grupo V começou por dizer que verificaram que: "Em todos os casos o quadrilátero que se obtém é um paralelogramo". O que é confirmado por outros alunos. Apesar de ter sido provado que o tipo de quadrilátero que se obtém unindo os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero qualquer é um paralelogramo, parece não ter sido suficiente. Alguns alunos não partiram do princípio que iria dar sempre um paralelogramo:

Inv: Acham que poderia não dar um paralelogramo?
Joana: Mas, deu sempre.
Carlos: Não, deu-nos também um rectângulo.
Mara: Não vês que um rectângulo é um paralelogramo.
Inv: Explica ao teu colega porque é que o rectângulo é um paralelogramo.
Mara: Tem os lados paralelos dois a dois, não é?
Carlos: Sim, mas e os ângulos são todos de 90°.
Joaquim: Pois, os ângulos são todos de 90°, e não são iguais dois a dois?
Carlos: Ah, sim, está bem.
(Falam vários alunos ao mesmo tempo).
Inv: Diz Diana.
Diana: Já tínhamos visto na primeira questão que dava sempre um paralelogramo, tinham que dar todos. São todos paralelogramos, o rectângulo é, o quadrado e os outros também.

Verificou-se que alguns alunos revelam dificuldades na classificação dos vários quadriláteros. Relativamente ao tipo de paralelogramos que obtiveram para os casos do quadrilátero inicial ser um paralelogramo obliquângulo, um quadrado, um rectângulo ou um losango, os alunos iam concordando uns com a opinião dos outros, em pequeno grupo já tinham esclarecido algumas dúvidas. Por vezes observou-se uma ou outra discordância em relação à justificação apresentada, mas chegaram rapidamente a um consenso. No caso do quadrilátero inicial ser um trapézio ou um papagaio, as opiniões já foram mais divergentes. Para o trapézio, uns alunos afirmavam que se obtinha um losango, outros um papagaio e outros um rectângulo. Alguns alunos consideravam um papagaio como sendo um paralelogramo.

A discussão desta tarefa permitiu aos alunos confrontarem-se com novas questões e justificações que não tinham sentido necessidade de procurar, mas que constituem um elemento fundamental no trabalho investigativo. Permitiu ainda clarificar ideias e esclarecer dúvidas.

Dificuldades referidas pelos alunos. Os alunos mencionaram na ficha de reflexão sobre a tarefa ter sentido dificuldades em validar as conjecturas, em construir os vários quadriláteros e identificar as propriedades desses quadriláteros e em exprimir quer oralmente quer por escrito os seus raciocínios e ideias. Por exemplo, Joana afirmou: "Tive dificuldade em justificar o que via e em construir os quadriláteros", Leonel: "Nesta tarefa tive dificuldade para ver quais eram as propriedades das figuras" e Cátia: "Senti dificuldades em conseguir expor o meu raciocínio e a escrevê-lo, mas já senti menos dificuldades que na outra tarefa, à medida que vamos realizando tarefas, isto vai melhorando". Os alunos, em geral, referiram ter superado as dificuldades com a ajuda dos colegas do grupo, com a discussão na turma e com as "dicas" das professoras. Por exemplo, Joana escreveu: "Cheguei a superá-las muito bem com a ajuda dos meus colegas de grupo e com as dicas das professoras" e Leonel referiu: "De certa forma, sim. Com a discussão com os colegas".

Tarefa 3 – Poliedros Regulares

Nesta tarefa pretendia-se que os alunos investigassem quantos poliedros regulares convexos é possível construir e que estabelecessem as principais características para cada um deles.

Introdução da tarefa. O enunciado da tarefa foi entregue aos alunos e lido em voz alta pela investigadora. Que paralelamente foi colocando algumas questões, procurando que os alunos recordassem a noção de poliedro regular. A investigadora solicitou aos alunos que representassem a planificação de cada um dos sólidos. Foram distribuídas várias peças de *polidron* (triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos regulares) pelos grupos.

Desenvolvimento da tarefa. Os alunos começaram logo por tentar construir poliedros, uns optaram por trabalhar com triângulos, outros com quadrados. Rapidamente construíram o tetraedro e outros o cubo. O entusiasmo e o prazer visível em usar as peças para construir os poliedros levavam alguns alunos ao esquecimento do registo das suas características. Havendo, assim a necessidade de os alertar para esse registo. A maioria dos grupos seguiu a sugestão dada no enunciado da tarefa de organizar e registar as características dos poliedros numa tabela. Todos os grupos apontaram o número de vértices, arestas e faces e o tipo de face do poliedro. Alguns acrescentaram o número de faces e a amplitude dos ângulos internos das faces que concorriam em cada um dos vértices de cada poliedro.

Apesar de ter sido recordada a noção de poliedro regular, alguns grupos estavam a considerar poliedros que não eram regulares e não se apercebiam desse facto, pois não tinham procurado clarificar o foco da investigação.

Alguns alunos à medida que iam recolhendo os dados iam formulando e reformulando algumas conjecturas. Por exemplo, os alunos do grupo IV formularam a conjectura: "Com 5 triângulos já não dá para construir poliedros regulares", fizeram alguns testes e a conjectura foi reformulada: "Com 5 triângulos dá para construir um poliedro regular" (GIV). Este processo de teste e reformulação de conjecturas foi bastante demorado, os alunos tentavam construir poliedros, depois desfaziam-nos e voltavam a tentar. A representação das planificações e a contagem das arestas, principalmente no caso do dodecaedro e do icosaedro, também demoraram bastante tempo e provocaram alguma dificuldade e confusão. Os alunos não conseguiam acertar a contagem das arestas dos sólidos com a feita pelos seus colegas de grupo, mas depois descobriram formas de garantir a não repetição das mesmas arestas ou de não esquecer de contar outras:

Francisca: Deu-me 25 [arestas no dodecaedro].
Diana: A mim deu 31. Comecei aqui, 1, 2, ...
Francisca: Vê nas faces azuis, para ser mais fácil. Estamo-nos a baralhar todas.
Diana: Que confusão. Vamos pôr os dedos.
Francisca: Mas, não chegam. É melhor com canetas.
Matilde: Eu também tenho dedos (risos).
Diana: Podemos pôr *postites*.
(...)
Francisca: Vamos contar primeiro em cima, 1, 2, ..., 5, depois 5 em baixo.
Matilde: Pronto, agora vamos contar as do meio, mas não mexas.

Os alunos nesta tarefa já mostraram mais preocupação em testar e justificar as suas conjecturas, no entanto foi necessário questioná-los no sentido de procurarem justificações plausíveis. Esta procura levantou, algumas dificuldades, principalmente no caso da justificação para o número de poliedros regulares que se podem obter com pentágonos regulares.

Nalguns casos, o trabalho em pequeno grupo não gerou muita discussão, quando um aluno apresentava uma ideia, os outros aceitavam-na sem grande contestação. E quando conseguiam construir mais um sólido chamavam a professora ou a investigadora para lhe mostrarem e para obterem confirmação, continuando, assim a mostrar pouca confiança em si próprios.

Discussão final. No dia seguinte, foi preciso dispor de algum tempo da aula, cerca de 30 minutos, para os alunos concluírem a realização da tarefa e só depois foi feita a discussão final. À medida que se iam discutindo os resultados, um aluno ia registando as conclusões no quadro. O número de poliedros regulares encontrados e algumas das suas características, como o número de faces, vértices e arestas, tipo de face do sólido e número de faces que concorrem em cada vértice do poliedro não geraram muita discussão. Verificou-se alguma discordância relativamente à contagem do número de vértices e de arestas, mas depressa se chegou a consenso. Por vezes, alguns alunos questionavam os outros sobre determinadas características que eles tinham estabelecido e que os colegas não referiam, como por exemplo, a soma das amplitudes dos ângulos que concorriam em cada vértice do poliedro:

> Lúcia: E os ângulos? Não disseste nada.
> Fábio: Ah, dá 180°.
> (Estavam a falar do tetraedro).
> Joaquim: Eu concordo, mas porque dá 180, tens que explicar.
> Fábio: O de cada triângulo é 60 e temos 3 [triângulos], é vezes 3, que dá os 180°.

As alunas do grupo I estabeleceram outras características, por exemplo, relativamente à altura de um tetraedro, que geraram discussão em torno de conceitos, como altura, baricentro, circuncentro e ortocentro de um triângulo. Verificou-se que muitos alunos não tinham noções claras destes conceitos:

> Leonel: O circuncentro tem a ver com o triângulo?
> Carlos: O circuncentro é o centro da circunferência.
> Cátia: Mas também temos que ter o triângulo.
> Joaquim: Não estou a perceber.
> Cátia: Temos que ter os vértices do triângulo a tocar na circunferência.
> Inv: Queres vir aqui [ao quadro] explicar?
> (A Cátia foi ao quadro e desenhou a figura 10).
> Carlos: O que ela vai fazer é a altura do triângulo que é igual ao raio da circunferência.
> Francisca: Achas que sim? Pode não ser.
> Carlos: Pelo menos parece. Ela agora pode traçar a altura e ver o centro.
> Cátia: Não ia traçar a altura.
> Carlos: Mas, se traçares a altura vai dar no meio da base do triângulo que é o centro.
> Cátia: O que eu queria dizer é que, o circuncentro vai ser o ponto de intersecção dos segmentos que traçamos aqui neste ponto, neste e neste [pontos médios dos três lados do triângulo].
> Inv: Segmentos? A que segmentos te estás a referir?
> Cátia: Às medianas, não, mediatrizes.

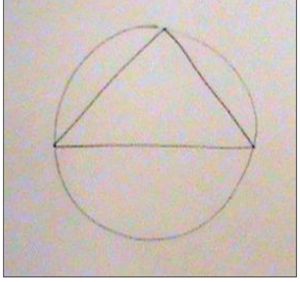


Figura 10. Desenho feito por Cátia.

O que Carlos pretendia explicar aos colegas é que o circuncentro do triângulo era o centro da circunferência circunscrita, só que ele baseou-se na evidência do desenho, considerando o triângulo isósceles tendo por base o diâmetro da circunferência. Esta discussão continuou, a investigadora pediu a contribuição dos restantes alunos, foi esclarecida a noção de segmento de recta, medianas e mediatrizes e foi retomada a ideia de Carlos no sentido de levar os alunos a compreenderem que os desenhos não representam necessariamente toda a informação que é conhecida sobre os objectos geométricos. A ideia de Carlos foi também aproveitada para ser discutida a noção de altura de um triângulo e também a noção de ortocentro que os alunos referiram não conhecer. Só depois foi continuada a discussão sobre os restantes poliedros regulares.

Dificuldades referidas pelos alunos. As dificuldades apontadas pelos alunos relativamente a esta tarefa podem ser agrupadas em três tipos. Dificuldades associadas à construção dos poliedros e à contagem dos vértices e arestas; dificuldades em justificar conjecturas e dificuldade de representação. Por exemplo, Mariana afirmou: "Senti dificuldades na construção, pois as peças soltavam-se. Também senti dificuldades em contar os vértices e as arestas dos poliedros, tivemos que contar várias vezes". Fábio referiu: "As principais dificuldades que senti foram em explicar porque é que não dava para construir mais figuras com certos polígonos regulares". E Mara mencionou: "Tive dificuldades em desenhar as planificações, no dodecaedro e no icosaedro eram muito complicadas". À Pergunta da ficha de reflexão individual sobre a tarefa (RI) "Chegaste a superá-las? Como?", estes alunos responderam: "Sim. Com alguma paciência e com a ajuda dos restantes membros" (Mariana, RI); "Sim, discutindo em grupo e chegando a uma conclusão e também com alguma ajuda das professoras" (Fábio, RI); "Sim, pois tinha a ajuda dos meus colegas que davam indicações" (Mara, RI). Estes alunos, assim como a maior parte dos restantes, indicaram ter superado as dificuldades, principalmente com a ajuda dos colegas de grupo.

Tarefa 4 – Secções Planas no Cubo

Com esta tarefa pretendia-se que os alunos investigassem o tipo de polígonos que se obtêm quando se secciona um cubo por um plano e relacionassem o tipo de polígono obtido com a posição do plano de corte, em relação a vários elementos do cubo.

Introdução da tarefa. Quando os alunos entraram na sala já tinham sobre a mesa um cubo em acrílico com algum líquido colorido e o enunciado da tarefa, que depois foi lido em voz alta pela investigadora. Em simultâneo foi sendo recordada a noção de secção plana e solicitado aos alunos para se concentrarem na superfície do líquido em repouso. Foi ainda dito aos alunos que poderiam variar a quantidade de líquido no cubo conforme achassem necessário.

Desenvolvimento da tarefa. Todos os grupos começaram por analisar a situação em que o cubo estava assente por uma face no plano da mesa. Discutiram a estratégia de registo e organização dos dados, no entanto, não formularam questões de modo preciso. Uns optaram por continuar a analisar situações em que a superfície do líquido intersectava quatro faces do cubo e outros por analisar situações em que o líquido intersectava três das faces do cubo. À medida que iam analisando as situações iam representando o cubo e a respectiva secção, ao lado indicavam o tipo de polígono obtido, descreviam a posição do plano de corte em relação a alguns elementos do cubo e apresentavam algumas justificações.

Enquanto os alunos realizavam a sua investigação a professora e a investigadora, à semelhança do que havia acontecido nas outras aulas em que foram realizadas as tarefas, iam circulando de grupo em grupo, fazendo algumas questões que ajudassem os alunos a resolver eventuais dificuldades e a pensar melhor sobre o trabalho que estavam a desenvolver. Foi necessário ir dizendo aos alunos para mudarem o cubo de posição ou simplesmente para o inclinarem para um lado ou para o outro, a fim de obterem outros polígonos. Pois, nalguns grupos os alunos encontravam um ou dois polígonos e achavam que já não era possível obter mais. Como se pode verificar no diálogo seguinte:

Artur: Já obtivemos o rectângulo.
Luísa: Achamos que não dá mais stôra.
Professora (prof): Já experimentaram, pôr o cubo noutra posição?
Artur: Já, mas não conseguimos ver mais.
Prof: Então experimenta lá Luísa. Inclina mais para o lado, mais. Que secção é?
Artur: Parece um paralelogramo.
Prof: Façam outros movimentos e vão vendo.

Era notória a preocupação dos alunos em justificar as suas conjecturas, embora ainda houvesse necessidade de os orientar no sentido de procurar argumentos lógicos ou pelo menos plausíveis. A dependência da professora ou da investigadora como fonte de validação de conhecimentos começava a ser mais reduzida, os alunos solicitavam mais o apoio, destas, quando estavam com dificuldades que não conseguiam esclarecer no grupo.

A representação do cubo nas várias posições e da respectiva secção foi bastante difícil para muitos alunos, nalguns grupos tentavam os três alunos e depois o que tivesse mais jeito era o que desenhava.

Quando tocou para saída os alunos ainda não tinham acabado a exploração da tarefa. Uns grupos ainda estavam a analisar as situações em que o plano de corte intersecta quatro faces do cubo e outros, as situações em que o plano de corte intersecta três faces. Na aula do dia seguinte foi necessário dar algum tempo para os alunos terminarem a tarefa, cerca de 40 minutos.

Discussão final. A investigadora pediu a Rosa para iniciar a apresentação do trabalho realizado. Ela começou por referir que a primeira secção que obtiveram foi um quadrado e justificou: “É um quadrado porque tem quatro lados”. A investigadora perguntou se era uma justificação convincente e vários alunos referiram outras propriedades do quadrado e justificaram a posição do plano de corte em relação a vários elementos do cubo, como por exemplo faces, arestas e diagonais faciais e espaciais. Rosa acabou por concordar que de facto a justificação apresentada servia para qualquer quadrilátero.

De seguida, vários alunos queriam apresentar as suas descobertas, foi preciso a investigadora pedir para falar um de cada vez. A investigadora pediu a opinião de alunos menos participativos e os restantes iam criticando as ideias apresentadas e acrescentando e defendendo as suas próprias opiniões. Por exemplo, quando Mariana justificou que um dos polígonos que obtiveram quando o plano de corte intersectava três faces do cubo foi um triângulo isósceles referindo: “Porque intersecta três faces e dois dos lados são duas diagonais das faces”, os colegas não concordaram:

> Joaquim: Não.
> Artur: Ou paralelos às diagonais.
> Joaquim: Olha lá, se dois lados são paralelos às diagonais, o terceiro também é, porque senão não dava direito. Não é?
> Inv: Explica melhor o que é isso de não dar direito.
> Joaquim: O corte tem que ficar direito, se começo a cortar por aqui [vértice do cubo] e vou sempre pelas diagonais acabo na outra.
> Nelson: É como ele diz, ele tem razão, assim os três lados do triângulo são iguais, já é equilátero.
> Inv: Perceberam o que os vossos colegas explicaram?
> Alunos: Sim.

Uns grupos conseguiram obter mais secções planas no cubo do que outros, por exemplo, só três dos grupos obtiveram triângulos escalenos, o que gerou alguma discussão, porque uns diziam que não se conseguia obter, outros que sim, foi necessário um dos alunos pegar no cubo com o líquido e mostrar aos colegas que de facto quando a superfície do líquido intersecta três faces do cubo se podem obter triângulos escalenos. O mesmo aconteceu em relação a alguns quadriláteros, como os paralelogramos não rectângulos. No caso em que o plano de corte intersecta cinco faces do cubo, os alunos tiveram dificuldade em justificar porque não podiam obter um pentágono regular, foi preciso a investigadora durante a discussão questioná-los:

> Inv: Para obterem um pentágono como secção plana de um cubo, quantas faces tem que intersectar o plano de corte?
> Francisca: Cinco.
> Helena: Só não intersecta uma.
> Inv: Muito bem. E qual é a posição relativa das faces do cubo umas em relação às outras?
> Luís: Paralelas.
> Carlos: Não, algumas são perpendiculares.
> Luís: Sim, só estava a pensar na da frente e a de trás e..., oh são paralelas duas a duas, pronto.
> Inv: São paralelas duas a duas. Então ao cortarmos cinco faces do cubo, vamos cortar faces paralelas?
> Joaquim: Vai, sim senhora, vai cortar, ... se só não corta uma, vai cortar quatro.
> Matilde: As opostas.
> Inv: Agora pensem, se cortarmos dois pares de faces paralelas, o que podemos dizer acerca dos lados do pentágono que vamos obter?

Com este diálogo, os alunos rapidamente chegaram à conclusão que os pentágonos não podiam ser regulares porque um pentágono regular não tem lados paralelos. Na situação em que o plano de corte intersecta as seis faces do cubo, todos os grupos justificaram que se obtêm hexágonos irregulares e hexágonos regulares e indicaram a posição do plano de corte em relação a elementos do cubo, nomeadamente arestas e diagonal espacial.

Dificuldades referidas pelos alunos. Os alunos acerca desta tarefa mencionaram ter tido dificuldades: em formular e justificar conjecturas; identificar o polígono obtido quando se secciona o cubo por um plano; obter determinadas secções planas no cubo; representar o cubo e as respectivas secções; relacionar o tipo de polígono obtido com a posição do plano de corte, em relação a elementos do cubo, principalmente às diagonais espaciais e ainda, em comunicar por escrito o trabalho desenvolvido. Por exemplo, Joana escreveu: "Nesta tarefa senti mais dificuldades em ver qual o polígono que resultava do corte e em escrever o que fazíamos" e referiu ainda que "a dificuldade em explicar e escrever por palavras tem vindo a diminuir ao longo das tarefas que temos desenvolvido". Fábio afirmou: "Senti dificuldades em descobrir algumas secções, por exemplo o triângulo escaleno, que pensávamos que não existia" e acrescentou que chegou a superar as dificuldades "depois na discussão entre os grupos pudemos observar que na realidade essa secção existia". Helena referiu ter sentido dificuldades "em obter explicações para algumas características das secções" e mencionou que superou as dificuldades "com a ajuda dos outros membros do grupo”. É curioso que Helena acrescentou “consegui superar uma coisa nesta tarefa. Falei e entrei na discussão da turma”.

De facto, vários alunos que não participavam espontaneamente na discussão da turma, com o decorrer da experiência começaram a fazê-lo.

Tarefa 5 – Sólidos Platónicos Truncados

Com esta tarefa pretendia-se que os alunos procurassem estabelecer relações entre as propriedades dos sólidos platónicos truncados e as dos sólidos originais.

Introdução da tarefa. Os alunos entraram na sala, sentaram-se, escreveram o sumário, foi-lhes entregue o enunciado da tarefa e pedido para ligaram os computadores e abrirem o ficheiro, onde se encontrava representado um cubo truncado. Este ficheiro tinha sido passado para o computador de cada um dos grupos na aula anterior aquando da explicação das várias funcionalidades do *software Cabri 3D*. Não foi feita a leitura do enunciado da tarefa. A investigadora disse apenas aos alunos que na questão dois, poderiam se necessário, truncar o tetraedro.

Desenvolvimento da tarefa. Alguns grupos começaram logo por contar os vértices do cubo truncado, outros definiram a estratégia de organização e registo dos dados e só depois iniciam a contagem dos elementos do cubo truncado. Outros, porém obtiveram o número de elementos do cubo truncado, sem procederem à contagem, começaram por relacionar, por exemplo o número de faces do cubo truncado com o número de faces e de vértices do cubo.

Os alunos, à medida que iam contando e comparando os elementos do cubo truncado com os do cubo, iam formulando e reformulando conjecturas. Verificou-se que os alunos apresentavam dificuldades a nível de cálculo mental. Já em outras tarefas se tinha notado essa dificuldade, mas nesta houve uma maior evidência. Por exemplo, os alunos do grupo VII registaram a conjectura: “O número de faces não é o triplo, é o dobro, ou seja, no cubo temos 6 e no cubo truncado 14”; as alunas do grupo I escreveram, também em relação ao número de faces do cubo truncado, “6 faces (octógonos) + 8 faces (triângulos) = 12”. Nalguns casos este tipo de erros foi detectado aquando do teste das conjecturas, noutros, os alunos nem se aperceberam. Como foi o caso dos alunos do grupo VII, que estabeleceram a conjectura com base no caso do cubo e depois a conjectura passou no teste para o caso do tetraedro e foi refutada para o caso do octaedro e aí os alunos escreveram “O octaedro regular tem 8 faces e o octaedro truncado tem 14, que não chega a ser o dobro das do octaedro regular”.

Observou-se que, em geral, os alunos nesta tarefa tiveram a preocupação de registar as conjecturas que formularam, mesmo aquelas que foram refutadas, e de as testar. Como se pode observar, por exemplo, pelo seguinte segmento de discussão entre as alunas do grupo III:

> Helena: Vamos escrever a conjectura.
> (...)
> Cátia: Pois, então o número de faces do sólido truncado será o dobro do número de vértices do sólido original. Agora, para o tetraedro dá.
> Helena: Para o cubo já não foi o dobro, olha, dá 14 faces.
> Cátia: Só podemos validá-la se der para todos e se para o cubo não dá. Vamos pôr que é falsa. O que achas Mariana?
> Mariana: Acho que sim, mas temos que pôr porque é que é falsa.

Estas alunas recolheram dados relativos ao número de faces, vértices e arestas do cubo, do tetraedro e do octaedro e dos respectivos sólidos truncados, e formularam uma conjectura que relaciona o número de faces do sólido truncado com o número de vértices do sólido original. Tiveram a preocupação de a testar e de apresentar um contra-exemplo.

Todos os grupos truncaram o tetraedro, uns para fazerem a contagem das faces, arestas e vértices, outros para testar as conjecturas que já tinham formulado. Alguns grupos a partir da análise do cubo truncado já conseguiram perceber a relação entre alguns dos elementos dos sólidos platónicos originais e dos sólidos truncados. Aqueles alunos que ainda não tinham percebido essa relação tiveram necessidade de truncar o octaedro. Alguns desses alunos apresentaram dificuldades de visualização, precisavam de rodar os sólidos para fazer a contagem, não conseguiam imaginar as partes não visíveis desses sólidos.

Encontrar justificação que validassem algumas conjecturas que resistiram a vários testes, não foi fácil para alguns dos grupos, principalmente a que relacionava o número de arestas do sólido truncado com elementos do sólido original.

Nesta tarefa, os alunos não chamaram tantas vezes a professora ou a investigadora, para validar as suas descobertas, mostraram-se mais confiantes em si próprios e mais autónomos, à semelhança do que havia acontecido na tarefa anterior.

Quando terminou a aula, os alunos ainda não tinham acabado de realizar a tarefa. O registo das conjecturas, o teste e nalguns grupos a procura de justificações para determinadas conjecturas demorou bastante tempo. Também o facto de alguns alunos terem tido a necessidade de truncar o octaedro contribuiu para que a realização da tarefa se prolongasse um pouco mais do que o previsto. De modo que na aula do dia seguinte, foi dado um período de tempo, cerca de 15 minutos, para os alunos terminarem a tarefa.

Discussão final. A investigadora pediu aos alunos do grupo VII, para iniciarem a apresentação do trabalho desenvolvido, uma vez que tinham tido alguma dificuldade. Foi Luísa quem começou a indicar o número de faces, vértices e arestas do cubo e do cubo truncado. Neste ponto verificou-se logo algum desacordo, os alunos do grupo V, não concordaram com Luísa quando afirmou: "O cubo tem 8 vértices, no inicial, tem 6 faces e arestas tem 12, depois ficou 24 vértices, 36 arestas e 14 faces". Joana disse: "São 35 e não 36", os alunos dos outros grupos defenderam a afirmação de Luísa e Joaquim prontificou-se para explicar aos colegas porque tinha de dar 36. Os alunos tinham-se enganado a contar e não se tinham apercebido, apesar de terem estabelecido a conjectura: "Para o número de arestas temos que somar as arestas do sólido original com as arestas das secções obtidas", não a testaram para o caso do cubo truncado. Um dos alunos, o Leonel, referiu "enganamo-nos a contar, também aconteceu noutros e depois apercebemo-nos, mas neste esquecemo-nos de ver se dava certo". Joaquim insistiu em explicar o porquê do 36:

> Joaquim: 12 arestas que é do cubo original, toda a gente está de acordo? (Os colegas riram). Depois temos 8 vértices e em cada vértice vai ficar com 3 arestas e se fizermos 12+3x8 dá 36.
> Nelson: 12+3x8? 12+3x8 dá 15x8 e não dá 36.
> Carlos: Mas primeiro, faz-se sempre primeiro a conta de vezes, depois é que é a de mais.

Gerou-se algum burburinho. Mas, o silêncio de Nelson indicava que ele tinha percebido que de facto Carlos tinha razão. A discussão continuou em torno da expressão que Joaquim tinha referido, uma vez que alguns alunos não tinham percebido:

> Cátia: Eu não percebi de onde resulta a expressão?
> Joaquim: 12 que era do cubo original e 8 vértices.
> Cátia: Do cubo original? Dos vértices, das arestas?
> Rosa: Das arestas do cubo original.
> Joaquim: Eu estava a falar das arestas, depois 8 que era o número de vértices e em cada vértice concorrem 3.
> Lúcia: Não, era um e ficam 3 [vértices].
> Joaquim: Estou a falar direito, em cada vértice formaram-se 3 arestas.
> Inv: E porque se formaram 3?
> (...)
> Helena. É porque concorrem 3 faces ao mesmo vértice.

Esta discussão foi importante não só para os alunos ficarem a perceber a relação existente entre o número de arestas do sólido truncado e elementos do sólido original, que mais tarde foi discutida para todos os sólidos platónicos, mas também para que os alunos prestassem atenção à forma como os outros alunos se expressavam quando apresentavam as suas opiniões. Como se pode verificar pela transcrição seguinte:

> Joana: No tetraedro regular temos 4 vértices, 6 arestas e 4 faces, depois no truncado temos 12 vértices, 18 arestas e 8 faces. O tipo de faces são triângulos e nas arestas temos 6 que são as arestas do original mais 3, que vai coincidir cada vértice 3 faces vão ser 3 que vai dar um triângulo, depois vezes 4 que é o número de vértices.
> (...)
> Carlos: Está certo.
> Matilde: Tu dizes fazer a soma 6+3 e depois multiplicar por 4, dá 36, assim estão a contar as arestas mais do que uma vez.
> (...)
> Francisca: Pois e 6+3 dá 9 e 9x4 dá 36.
> (A Joana foi ao quadro escrever a expressão)
> Joana: Não, é 6+3x4 e dá 6+12 que dá 18.
> Cátia: Foi a maneira como disseste.

As relações que os alunos estabeleceram entre o número de arestas do sólido truncado e elementos do sólido original foram as que causaram maior discussão. O grupo I formulou uma conjectura diferente dos restantes: "O número de arestas do sólido truncado é o triplo das do sólido original". Testaram-na para todos os sólidos platónicos, mas não conseguiram encontrar justificações. Foi na discussão em grande grupo que foram encontradas algumas justificações. A relação entre as faces e entre os vértices dos sólidos truncados e elementos dos sólidos originais não originou muita discussão, uns alunos iam apresentando o que tinham feito, os outros iam concordando e pedindo explicações e justificações sempre que os colegas não as apresentavam.

A análise do tipo de faces correspondentes às secções feitas nos sólidos truncados não gerou discussão, não suscitou dúvidas aos alunos e por isso não houve discordância.

Dificuldades referidas pelos alunos. Nesta tarefa alguns alunos mencionaram não ter sentido dificuldades, consideraram a tarefa acessível. Os restantes, em geral, indicaram ter tido dificuldades em encontrar justificações para algumas conjecturas. Por exemplo, Cátia na ficha de reflexão individual sobre a tarefa escreveu: "O mais difícil de fazer foi arranjar razões para fundamentar as conjecturas formuladas. Quanto ao resto não tive quaisquer dificuldades" e na resposta à questão "Chegaste a superá-las? Como?" a aluna referiu:

> Depois de pensar melhor sobre as conjecturas formuladas e com a ajuda das colegas de grupo, consegui superar essa dificuldade. Uma coisa que acho que já estou bem melhor a fazê-lo é conseguir expor melhor as minhas ideias, penso que ao longo da realização das várias tarefas vou aperfeiçoando (Cátia, RI).

Artur e Leonel mencionaram outras dificuldades. Artur afirmou ter sentido dificuldades em "encontrar algumas das relações entre os vértices, arestas e faces dos sólidos" e mencionou ter conseguido superar essas dificuldades na discussão no grupo turma: "Sim, com a ajuda no debate da turma". Leonel referiu dificuldade de visualização: "No início senti mais dificuldades em visualizar as figuras, mas foi fácil chegar às conjecturas" e acrescentou que superou essa dificuldade: "Sim, com a ajuda do *Cabri* a visualização dos sólidos é muito melhor".

Tarefa 6 – A *Stella Octangula*

Esta tarefa era constituída por duas questões. Na primeira pedia-se aos alunos que identificassem o poliedro que se obtém quando seis diagonais faciais do cubo (uma de cada face) concorrem em quatro vértices do mesmo e sugeria-se que construíssem esse poliedro com o auxílio do *software Cabri 3D*. Na questão dois, constituída por duas alíneas, pretendia-se que os alunos identificassem o poliedro que se obtém pela intersecção dos dois poliedros que se podem construir a partir das diagonais faciais do cubo nas condições referidas na primeira questão e que estabelecessem relações entre o cubo, um tetraedro e a *stella octangula*.

Introdução da tarefa. A tarefa foi proposta aos alunos de uma forma muito simples, a investigadora limitou-se a entregar o enunciado a cada um dos alunos e a dizer para lerem atentamente o que era pedido.

Desenvolvimento da tarefa. Em cada um dos grupos, um elemento leu o enunciado da primeira questão em voz alta para os restantes elementos. Como já tinham o computador ligado, com o programa aberto, um dos alunos começou por representar um cubo, os outros iam dando indicações para representar diagonais faciais do mesmo. Alguns grupos demoraram mais do que outros para construírem o novo poliedro, uns traçavam as diagonais, mas não concorriam só em quatro vértices, depois apagavam e voltavam a traçar. Uns conjecturaram que o novo poliedro era uma pirâmide triangular, outros um tetraedro regular e procuraram encontrar razões que justificassem a sua opinião.

Na questão dois, alguns alunos perante a dificuldade em visualizar o poliedro que resulta da intersecção dos dois tetraedros, perguntavam se podiam construir a *stella octangula* e depois truncar os tetraedros pequenos para ser mais fácil identificar o poliedro. Outros, como o sólido estava representado em duas dimensões, tiveram dificuldade em formar na sua mente uma imagem tridimensional da *stella*. Não conseguiam visualizar que a *stella* da figura 11, era composta por quatro tetraedros vermelhos e quatro azuis.

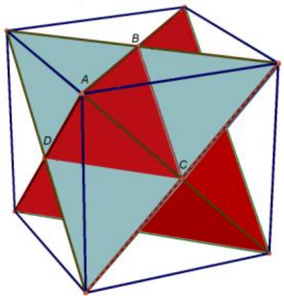


Figura 11. Figura apresentada no enunciado da tarefa.

Outros, porém, viam o sólido ABCD como um polígono. Como foi o caso de Leonel:

Leonel: Este triângulo grande [o azul] está dividido em 3 triângulo, e este do meio [sólido ABCD] parece um papagaio, não é?
Joana: Não.
Leonel: Então o que é?
Joana: Não vês que o ponto A é como se estivesse puxado para cá.
Fábio: No A forma um bico, como este aqui em baixo, ou este do vermelho.
Leonel: Ah! Já estou a ver parece uma estrela.

A discussão em pequeno grupo e nalguns casos também o apoio da professora ou da investigadora foram importantes para ajudar os alunos a percepcionar a *stella*.

Na segunda alínea da questão dois, alguns grupos começaram por tentar estabelecer relações entre os elementos do sólido ABCD e do cubo, outros formularam logo algumas conjecturas como por exemplo: "Se considerarmos só o tetraedro [grande], o pequeno é um quarto" (GIII), que mais tarde foi refutada. Alguns alunos começaram por procurar estabelecer relações entre as áreas totais dos tetraedros e do cubo e outros entre os volumes dos tetraedros, do cubo e da *stella*. Não havendo a preocupação de formular questões de forma explícita.

Quando a aula terminou, os alunos, em geral, estavam a iniciar os cálculos para obter uns, as áreas da superfície, outros os volumes dos sólidos em função da aresta do cubo. Na aula seguinte continuaram esses cálculos, que se tornaram muito morosos, os alunos cometeram vários erros pelo meio, e alguns chegaram a resultados absurdos. Então foi-lhes dada a sugestão para tomarem para unidade de volume, o volume do tetraedro ABCD e a partir daí, os alunos conseguiram estabelecer algumas relações entre os volumes dos sólidos.

Discussão final. A discussão da tarefa ocorreu na terceira aula. A primeira questão gerou pouca discussão, Diana começou por dizer qual o poliedro que tinham obtido e apresentou algumas razões para justificar a opinião do grupo, outros alunos completaram a justificação apresentada por Diana. Os alunos do grupo V referiram que tinham identificado o polígono como sendo uma pirâmide triangular, Helena contestou de imediato: "Não, porque é um poliedro regular", os alunos explicaram: “Mas depois vimos melhor rodamos o cubo e vimos que era um tetraedro” (GV). A investigadora quis saber mais concretamente o que distinguia um poliedro do outro. Uns alunos argumentavam que “no tetraedro os lados são todos iguais” e outros contrapunham “não são lados são faces”, mas depressa chegaram a consenso.

Na primeira alínea da questão dois, todos os alunos concordaram que o poliedro que se obtinha pela intersecção dos dois tetraedros grandes era um octaedro e foram apresentando as justificações. Mas, apesar deste acordo a investigadora quis saber porque alguns grupos durante a discussão em pequeno grupo consideraram ser “duas pirâmides triangulares, juntando as bases”. Os alunos desses grupos tentaram explicar o raciocínio que inicialmente tinham feito, mas os outros contestaram e gerou-se discussão em torno do octaedro e pirâmides quadrangulares. Uns argumentavam que um octaedro podia ser considerado como sendo “duas pirâmides quadrangulares uma por cima e outra por baixo”, outros referiam que não “quando juntas as bases, nos vértices só concorrem 3 faces”, o que foi de imediato criticado. Discutiu-se ainda o tipo de faces de uma pirâmide quadrangular.

Ainda em relação à primeira alínea da questão dois, alguns alunos referiram ter tido dificuldade em identificar o poliedro:

> Francisca: Mas, foi difícil.
> Matilde: Foi mais ou menos, não estávamos a imaginar muito bem a figura.
> Cátia: Pois, porque ela está representada em perspectiva não é? E nós temos que a imaginar como se fosse normal.
> Helena: Eu tive dificuldade e ainda não consegui perceber bem.
> Inv: Vamos ver então, quantos tetraedros dos pequenos azuis achas que tem a *stella*?
> Helena: 3.
> Inv: Porquê?
> Helena: Porque este [tetraedro ABCD] que está a vermelho faz parte do outro.
> Cátia: Mas não está certo.
> Helena: Eu só vejo 3.
> Cátia: Falta o de trás.
> Matilde: Porque tem outro atrás que não se vê.
> Carlos: Se vires no tetraedro vermelho já vês que tem 4 e eles são iguais.
> Luís: O que está por trás é igual ao que esta aqui, o ABCD.
> (...)
> Inv: Quantos vértices tem um tetraedro?
> Helena: Tem 4, agora já percebi tenho que imaginar o que está do outro lado, porque aqui só se vêem 3, falta o outro.

A ajuda dos colegas contribuiu para que Helena imaginasse o tetraedro em três dimensões, mas para isso também foi importante a aluna ter dito que ainda não tinha percebido, ou seja, ter dado a entender que precisava de ajuda. É de salientar o interesse dos colegas em ajudá-la, aliás, este ambiente de entreajuda verificou-se ao longo da experiência.

Durante a apresentação do trabalho desenvolvido relativamente à segunda alínea da questão dois, os alunos expuseram as relações que tinham estabelecido e explicaram como chegaram a elas. Uns começaram por dizer que tinham estabelecido relações entre os volumes dos sólidos, outros entre áreas das superfícies de alguns sólidos, como foi o caso dos alunos do grupo IV que foram ao quadro explicar como tinham encontrado a relação entre as áreas da superfície do cubo e do sólido ABCD. Enquanto eles iam explicando e apresentando os cálculos efectuados, os colegas iam apontando algumas incorrecções e pedindo algumas justificações subjacentes aos cálculos. Relativamente, à relação encontrada entre os volumes do sólido ABCD e da *stella*, os alunos foram concordando uns com os outros, muito embora tenha havido questionamento e pedido de explicações por parte de alguns deles. A procura da relação entre os volumes da *stella* e do cubo gerou bastante discussão e foi em grande grupo que essa relação foi provada, pois os alunos em pequeno grupo não o tinham feito. A partir desta e da relação estabelecida entre os volumes da *stella* e do sólido ABCD, encontrou-se a relação entre o volume do cubo e do sólido ABCD.

Nesta aula os alunos formularam conjecturas, apresentaram outras já estabelecidas anteriormente, explicaram como verificaram conjecturas, procuraram justificações, questionaram e argumentaram em defesa das suas opiniões.

Dificuldades referidas pelos alunos. A maior parte dos alunos mencionou ter sentido dificuldades em visualizar os sólidos em três dimensões e em estabelecer relações entre eles. Alguns alunos escreveram ter sentido dificuldades em justificar conjecturas. Como por exemplo Carlos: "O mais difícil foi arranjar razões para justificar algumas conjecturas". Helena afirmou: "Senti dificuldades a visualizar a figura, pois esquecia-me da parte de trás" e diz tê-las superado "na aula seguinte quando começamos a discussão entre grupos, explicaram-me e eu acompanhava o raciocínio e percebi". Por exemplo, Leonel referiu "O mais difícil nesta tarefa foi conseguir ter capacidade de percepção, de visão no espaço. Também tive dificuldades nas relações entre os sólidos, foi um pouco difícil conseguir chegar a certas relações". À pergunta "Chegaste a superá-las? Como?"da ficha de reflexão individual sobre a tarefa, ele respondeu "A visualização no espaço foi sendo superada ao longo da realização da tarefa com ajuda dos colegas. Quanto às relações entre os sólidos, mais tarde apercebi-me que tínhamos errado nos cálculos". Alguns alunos salientaram que esta foi uma tarefa difícil e de facto tiveram muitas dificuldades, principalmente relacionadas com a percepção visual.

Síntese

A descrição e análise das fases de uma aula de investigação (introdução da tarefa, desenvolvimento da tarefa e discussão final), em cada uma das seis tarefas apresentadas e das dificuldades referidas pelos alunos na ficha de reflexão individual sobre cada tarefa, mostram de tarefa para tarefa como se desenvolveu o trabalho investigativo e a forma como os alunos se envolveram nesse trabalho e na discussão do mesmo e ainda como foram superando dificuldades.

Introdução da tarefa. O momento da introdução de cada uma das tarefas foi curto. Fez-se a distribuição do enunciado escrito da tarefa aos alunos acompanhada, por algumas indicações relacionadas com a organização do trabalho e em três das tarefas, por uma apresentação oral, que foi constituída pela leitura do enunciado e por um breve questionamento no sentido de levar os alunos a recordar algumas noções que eram precisas para a realização da tarefa ou de evitar possíveis dificuldades de interpretação do enunciado.

Desenvolvimento da tarefa. No decorrer das aulas em que foram realizadas as tarefas, os alunos foram alterando gradualmente o seu desempenho em tarefas de exploração e investigação. Na tarefa 1, os alunos na questão mais aberta sentiram-se perdidos, sem saber como começar, o que não foi notório nas tarefas seguintes. Para tal contribuiu o facto de na realização da primeira tarefa, os alunos se começarem a aperceber que podiam eles próprios definir aspectos a investigar e caminhos a seguir. Verificou-se que os alunos foram, de forma gradual, passando de uma fase de grande dependência da professora ou da investigadora, em que estas eram solicitadas não só para o esclarecimento de dúvidas, mas também para a confirmação de conjecturas e justificações, para outra em que se tornaram mais autónomos e mais seguros de si próprios. Discutindo as questões no ceio do grupo, solicitando apoio em questões mais difíceis.

As primeiras tarefas, foram encaradas pela maior parte dos alunos como questões para as quais tinham de recolher, organizar e analisar dados de modo a obter conclusões. Verificando-se a tendência para formular conjecturas baseadas em um ou dois casos e considerá-las logo como conclusões. Alguns grupos, não mostravam muita preocupação em testar as conjecturas e, em geral, os alunos não procuravam explicações nem justificações de modo espontâneo, só o faziam quando incentivados pela professora ou pela investigadora. Esta atitude foi-se alterando com o decorrer da experiência. Os alunos mostraram uma preocupação crescente na procura de justificações para as suas conjecturas e também no registo dessas mesmas conjecturas. A insistência da professora e da investigadora na necessidade da justificação e prova das conjecturas terá contribuído para que os alunos começassem a tomar consciência dessa necessidade. A formulação de questões foi uma etapa à qual os alunos não atribuíram importância, raramente formularam questões de forma explícita.

Discussão final. Na aula de discussão da tarefa 1, os alunos mostraram-se pouco activos, apenas alguns participaram de forma espontânea. Na tarefa 2 verificou-se um aumento da participação por parte de alguns alunos, que até então não tinham contribuído com a sua opinião para a discussão em grande grupo. Nas restantes tarefas os alunos tornaram-se mais interventivos, mesmo os mais fracos, e as aulas de discussão foram aulas dinâmicas, os alunos reflectiram sobre diversos aspectos do trabalho investigativo desenvolvido, apresentaram as suas descobertas, questionaram os colegas pediram explicações e justificações, criticaram as ideias dos outros e argumentaram em defesa das suas ideias e opiniões. Nestas aulas, foram formuladas novas conjecturas, procuradas justificações e realizadas provas, os alunos, esclareceram dúvidas, clarificaram ideias e aprenderam novos conceitos.

Observou-se que os alunos revelaram um certo desenvolvimento nas suas capacidades de comunicação e argumentação. O facto de serem questionados pelos colegas e também pela investigadora e de lhes serem pedidas explicações e justificações acerca das suas opiniões contribuiu, para que eles ao comunicar as suas ideias procurassem dar justificações mais convincentes.

Dificuldades referidas pelos alunos. As dificuldades referiras pelos alunos após a realização e discussão de cada uma das tarefas dividem-se em dois tipos: (1) dificuldades relacionadas com a actividade investigativa, como a justificação de conjecturas e a comunicação de raciocínios quer oralmente quer por escrito e (2) dificuldades no âmbito da Geometria. Estas últimas estão relacionadas com: a construção de polígonos e a identificação das suas propriedades; a representação de objectos geométricos tridimensionais em duas dimensões e visualização de objectos tridimensionais, principalmente quando eles estão representados em duas dimensões.

Naturalmente que algumas das dificuldades resultantes da actividade investigativa, mencionadas pelos alunos, por exemplo, a justificação das conjecturas, estão relacionadas de certa forma com as dificuldades no âmbito da Geometria.

Os alunos, em geral, indicaram ter superado as dificuldades sentidas, com o apoio dos colegas de grupo, através da discussão na turma e também do apoio da professora e da investigadora. Em relação à dificuldade em comunicar as suas ideias e raciocínios, os alunos salientaram que esta foi diminuindo com o decorrer da experiência.

CAPÍTULO V

O CASO DO GRUPO I

Neste capítulo caracterizam-se os elementos que constituem o grupo e apresenta-se a análise e discussão dos resultados relativos ao grupo I. Essa análise será orientada em torno de três eixos principais: processos utilizados pelo grupo na realização das tarefas de exploração e investigação; dificuldades reveladas pelas alunas na aprendizagem da Geometria e o envolvimento das mesmas na realização das tarefas.

5.1. Diana, Francisca e Matilde

As três alunas de 15 anos de idade, já se conheciam, estudam juntas desde o primeiro ciclo do ensino básico, no entanto esta foi a primeira vez que trabalharam no mesmo grupo. Frequentam esta escola desde o 7.º ano de escolaridade e não apresentam nenhuma retenção no seu percurso escolar. Já tinham trabalhado com investigações matemáticas no 9.º ano.

Diana

Aluna reservada e insegura, revela algumas dificuldades em argumentar perante as refutações dos colegas e não gosta muito de participar na discussão com a turma, por não se sentir muito à vontade. Vive com os pais e com o irmão de 11 anos de idade. O seu pai é trabalhador da construção civil e a mãe costureira, ambos com o 1.º ciclo do ensino básico. Diana anda na escola porque quer e gostava de ser Educadora de Infância ou Psicóloga.

A sua disciplina preferida é a de Ciências da Natureza, por ser uma disciplina que lhe permite conhecer o funcionamento e constituição do corpo humano. A disciplina em que sente mais dificuldades é a de Inglês, referindo mesmo que desde que começou a ter aulas de Inglês detestou e que por isso pôs a disciplina de lado.

Considera que a Matemática é importante para a sua vida, porque "está em todo o lado (...) temos de estar sempre a usar a Matemática no dia-a-dia" (FC). Refere gostar da disciplina de Matemática, pelo facto "de nos ajudar a raciocinar, a termos conhecimentos a nível de tudo e por ser muito prática e não ser tão aborrecida" (FC).

As actividades mais significativas que já realizou nas aulas de Matemática foram aquelas em que trabalhou com o computador, porque "motivam e por isso estou mais atenta e aprendo mais"

(FC). As que menos lhe agradaram foram as que envolveram investigações. Afirma não gostar de realizar este tipo de tarefas por serem difíceis "começamos do zero sem nada e depois temos que relacionar muitos conhecimentos. É difícil" (FC). Prefere resolver exercícios e problemas e justifica a sua preferência: "Talvez por ser habituada desde a primeira classe, que é isso que fazemos e tem resultado comigo" (FC). Diana considera que uma boa aula de Matemática seria aquela em que tivessem oportunidade de aprender de uma forma divertida, com actividades novas.

Menciona na ficha de caracterização que nas aulas de Matemática costuma trabalhar individualmente ou em grupo e acrescenta, em grupo "podemos trocar opiniões com os colegas, aprendemos com eles e eles aprendem connosco e cada elemento pode dar o seu contributo para chegarmos à resposta".

Afirma sentir dificuldade em argumentar e comunicar as suas ideias aos colegas e à professora, por considerar que muitas vezes lhe é difícil "arranjar as palavras certas para conseguir que os outros percebam" (FC).

Diana refere não gostar de estudar Geometria, por achar que "é muito difícil e também é complicado perceber" (FC) e afirma sentir dificuldades na sua aprendizagem, pelo facto de "não conseguir ver os objectos no espaço" (FC). De entre os vários métodos que lhe são apresentados na ficha de caracterização, para aprender Geometria, Diana prefere em primeiro lugar, a utilização de materiais manipuláveis, seguido da utilização do computador e de programas de Geometria Dinâmica e da organização de debates para discutir ideias.

Francisca

Aluna empenhada, organizada e responsável. Gosta de se sentar nos lugares da frente para "estar mais atenta nas aulas" (Notas de registo [NR]). É participativa, quer no trabalho em pequeno grupo, quer na discussão com a turma e tem um poder de argumentação bastante razoável. Vive com os pais e com as duas irmãs. O pai é soldador e a mãe está desempregada, ambos com o 2.º ciclo do ensino básico. Anda na escola por considerar que estudar é importante para a sua formação e pretende prosseguir os estudos, mas ainda não sabe a profissão que gostava de ter.

A disciplina preferida de Francisca é a de Ciências da Natureza, por abordar temas sobre o meio que nos envolve, os seres vivos e a forma como tudo funciona. A disciplina em que sente mais dificuldades é a de Educação Física, por envolver desportos e actividades com as quais não se identifica muito.

Menciona na ficha de caracterização que a Matemática é importante para a sua vida, uma vez que "tudo o que nos rodeia, de certa forma, também é Matemática e ao longo da nossa vida a Matemática acompanha-nos sempre" (FC). Gosta da disciplina de Matemática, por adorar pensar e porque é uma disciplina que "desenvolve o raciocínio, gosto dos desafios que são propostos nas aulas, pois fazem-me aprender mais e aplicar conhecimentos que já adquiri e assim preparar-me para outras situações futuras" (FC).

As actividades mais significativas que já realizou nas aulas de Matemática foram as que envolveram investigações, "no início pensamos que é difícil (...), temos de pensar, trabalhar e tirar as nossas conclusões, mas são, sem dúvida, uma óptima forma de aprender" (FC). Para além de gostar de realizar investigações, gosta também de resolver problemas por requererem mais raciocínio. Nas aulas de Matemática costuma trabalhar individualmente ou em grupo. Menciona ser importante trabalhar em grupo porque "em grupo podem-se comparar as formas de pensar e juntos chegar mais longe. Também porque se desenvolvem capacidades de trabalho em equipa e de entreajuda, que nos serão úteis no futuro" (FC).

Francisca considera não sentir dificuldades em argumentar e comunicar as suas ideias aos colegas e à professora, acha que o faz de forma explícita, refere que "se não conseguir que entendam da forma que expliquei recorro a outros métodos" (FC) e quando não entende qualquer matéria pede para que lhe seja explicada novamente.

Para ela uma boa aula de Matemática é uma aula com "actividades, tarefas, momentos diversificados, usando métodos diferentes de ensinar e explicar as várias matérias e também que fossem propostas aos alunos formas diferentes de aplicar os novos conhecimentos" (FC). E acrescenta que uma aula em que "é dada a matéria sempre com o professor a falar e depois se passa à resolução de exercícios, o resto da aula, torna-se aborrecida e também por vezes mais difícil de assimilar" (FC).

Em relação à Geometria, Francisca afirma gostar "mais ou menos (...), sinto receio desta parte da matéria, pois não me sinto muito à vontade nesta área" (FC), referindo que tem algumas dificuldades principalmente por envolver muitos conceitos, "[a Geometria] relaciona muita coisa, por exemplo, perímetros, áreas, volumes, ..." (FC). Mas apesar de não ser uma área de que gosta muito, considera a sua aprendizagem importante, "pois o espaço que as coisas ocupam, a sua métrica e estética ..., são coisas úteis no dia-a-dia e é uma parte da Matemática que deve ser bem percebida" (FC). Quando lhe é pedido na FC para indicar, por ordem, os três métodos que prefere para aprender Geometria, Francisca aponta em primeiro lugar a utilização de computadores e de programas de Geometria Dinâmica, seguido da utilização de materiais manipuláveis e da resolução de problemas relacionados com situações reais.

Matilde

Aluna muito aplicada e com bons resultados escolares. Gosta de se sentar nos lugares da frente para não perder nada do que se passa nas aulas, tem grande sentido crítico e de humor. Nas aulas assume uma atitude de interesse, tem um bom poder de argumentação e é colaborativa e participativa nos trabalhos de grupo, no entanto na discussão com a turma gosta mais de ouvir do que expor as suas ideias. Na entrevista realizada no final da experiência afirmou:

> Eu gosto de ficar a ouvir a opinião dos outros e a tentar perceber como é que chegaram ali. Quando estamos numa aula de exercícios ou assim, eu participo bem mais do que neste tipo de discussões. Nestas aulas gosto mais de ouvir, quando não estou a perceber alguma coisa que eles dizem aí pergunto e coloco muitas questões. Participar com aquilo que fiz não gosto tanto, interessa-me saber como eles pensam (Entrevista de Grupo [EG]).

Tem uma irmã mais velha que estuda na universidade e que a apoia nos estudos. O pai é marceneiro e tem o 2.º ciclo do ensino básico, a mãe completou o 3.º ciclo, era empregada de balcão, mas encontra-se desempregada, Matilde tem apoio social - escalão B. Afirma andar na escola para assegurar o seu futuro, mas ainda não sabe o que quer ser.

Na ficha de caracterização afirma que as suas disciplinas preferidas são Matemática e Inglês, por serem aquelas que mais gosta de aprender. A disciplina com maior dificuldade é Educação Física, pelo facto de "não ser boa em todas as modalidades" (FC). Considera que é fundamental saber Matemática, por "estar presente em tudo no nosso dia-a-dia e na formação profissional" (FC). Gosta da disciplina de Matemática pelo facto de ser "divertido e aliciante saber mais da disciplina e por gostar de resolver problemas e exercícios" (FC).

Salienta que as actividades mais significativas que já realizou nas aulas de Matemática foram as que envolveram investigações em grupo, aliás, refere que as investigações, as tarefas exploratórias e os problemas são as tarefas que mais gosta de realizar, por serem "aquelas que exigem mais de nós, mas também nos fazem, do meu ponto de vista, aprender melhor" (FC). As aulas que menos lhe agradaram foram aquelas em que passou "as aulas inteiras a resolver exercícios, o que acho ser importante, mas prefiro realizar outras tarefas" (FC). Para ela, uma boa aula de Matemática é uma aula em que os alunos têm oportunidade de investigar em grupo, de debater com os outros colegas da turma as conclusões a que chegaram e ainda uma aula em que "nos obrigam a não chegar apenas a respostas, mas também a explicá-las" (FC).

Geralmente, nas aulas de Matemática costuma trabalhar a pares ou em grupo. Considera que "em grupo é mais fácil e mais rápido chegar às conclusões comparando ideias. Aprendemos mais uns com os outros e de uma forma mais interessante" (FC). Referiu não sentir dificuldades em argumentar e comunicar as suas ideias aos colegas e à professora, tenta sempre "abordagens diferentes caso alguma coisa não seja entendida" (FC).

A Geometria não é a matéria favorita de Matilde, salienta, no entanto, não ter muitas dificuldades na sua aprendizagem. Considera que "é necessário muito trabalho até que se consiga entender, mas depois torna-se fácil" (FC). Refere que a aprendizagem da Geometria é importante na sua formação por "exigir esforço e capacidades para a entender" (FC). De entre os métodos indicados na ficha de caracterização para aprender Geometria, Matilde, escolhe em primeiro lugar, a exploração de tarefas de investigação, seguido da utilização do computador e de programas de Geometria Dinâmica e da utilização de materiais manipuláveis.

5.2. Processos utilizados pelo grupo na realização das tarefas de exploração e investigação

Exploração inicial e formulação de questões

As alunas decidiram na aula de realização da primeira tarefa que o registo do trabalho desenvolvido não seria feito sempre pela mesma pessoa, iria rodando e que o mesmo se passaria relativamente a quem trabalhava com o computador, isto nas tarefas em que fosse utilizado. Apesar de se ter verificado que esta decisão nem sempre foi cumprida, durante a realização da experiência, principalmente no que respeita ao registo.

Nas duas primeiras tarefas, *Quadrados em Quadrados* e *Investigação com Quadriláteros*, as alunas fizeram a exploração questão a questão. Depois de lerem o enunciado de cada questão, definiram algumas estratégias de exploração, organização e registo de dados. Como se pode observar pelo episódio seguinte, relativo à exploração da questão dois da primeira tarefa:

> Matilde: Vamos colocar numa tabela, podemos começar pelas medidas dos lados dos quadrados inscritos.
> Diana: Não, devemos começar por pôr a do quadrado inicial.
> Matilde: Pois, porque temos que ver relações destes com o quadrado inicial.
> Francisca: É melhor fazermos quadrado a quadrado, porque a seguir as medidas já vão ser diferentes.

Pode-se dizer que as alunas desenvolveram um trabalho pautado por uma exploração inicial e respostas questão a questão, sem muitas vezes as relacionarem entre si e sem tentar perceber o foco da investigação e de a entender como um todo.

Não formulavam questões de forma explícita, por exemplo, na questão dois da primeira tarefa pretendiam estabelecer relações entre as medidas dos lados dos quadrados, perímetros e áreas, mas não usaram o modo interrogativo. O mesmo se verificou na questão dois da segunda tarefa, as alunas com base na observação das representações construídas e na sua manipulação foram formulando várias conjecturas e ao longo desse processo, iam referindo por exemplo: "Vamos ver outra coisa, podemos ver as medidas dos lados"; "As diagonais também podemos ver se são paralelas aos lados do inscrito ou assim"; "Vamos agora às áreas". Continuavam a usar o modo afirmativo em vez do interrogativo.

Na tarefa seguinte *Poliedros Regulares*, depois de a investigadora ter lido o enunciado da proposta de trabalho, Matilde construiu de imediato o cubo, entretanto Francisca seguindo a sugestão dada no enunciado, vai representando uma tabela na folha branca, para colocar algumas das características de cada poliedro regular que fossem encontrando. Nesta tarefa, as alunas, começaram logo por construir poliedros, mas apesar de não definirem estratégias de exploração, procuraram relacionar as observações iniciais como o foco da investigação:

> Matilde: O cubo é regular. Interessa.
> Diana: Vou construir o paralelepípedo. Não temos peças.
> Matilde: Coloca assim dois quadrados para um lado. Podemos escolher as cores e tudo.
> Francisca: Este parece um prédio, parece aquele jogo.
> Matilde: Não podemos construir um paralelepípedo, porque temos que investigar os poliedros regulares.
> Francisca: Tinhas que pôr um quadrado daqui... Tinha que ter os lados iguais todos.
> Diana: E os ângulos também.

Ao registarem algumas características do cubo, Diana formulou a questão "As diagonais do cubo, será que são iguais como no quadrado? ", após esta questão, as alunas procuram investigá-la. Entretanto, Diana formulou uma outra questão "Quando as diagonais [espaciais do cubo] se cruzam também dará 90°?". Mas, durante o desenvolvimento do restante trabalho não formularam questões de forma explícita, continuavam a proferir afirmações como por exemplo: "Com triângulos ainda dá para vermos mais".

Na tarefa *Secções Planas no Cubo*, as alunas apesar de movimentarem o cubo e avançarem de imediato uma conjectura, discutiram estratégias de exploração e de organização e registo dos dados:

> Francisca: Não espera, aqui pede para relacionar com arestas, diagonais, faces ...
> Matilde: Mas primeiro. Não temos que desenhar primeiro as secções?
> Francisca: Sim, mas também temos que pôr isto tudo. Não seria melhor fazermos uma tabela ou algo assim.
> Matilde: Não sei, não é só para identificar o que é que são?
> Francisca: Não, temos que relacionar com o cubo, e conforme vamos desenhando é que vamos pondo.
> Matilde: Mas primeiro temos que desenhar o cubo, só depois pomos o que forma. Acho que é melhor dizer assim, tipo, aqui forma um quadrado e desenhas um quadrado e depois vem o resto.
> Francisca: Então primeiro desenhamos e pomos logo, a posição com as arestas e isso.
> (...)
> Diana: Desenho um cubo não é?
> Matilde: Sim, mas não demores muito tempo, não é preciso estar aí com a régua a demorar muito.

Era a vez de Diana fazer o registo do trabalho desenvolvido. Matilde à semelhança do que havia sucedido nas tarefas anteriores mostrava-se preocupada com o tempo gasto no registo dos dados. As colegas insistiam: "Tem que ficar direitinho para ficar estético", pretendiam que o trabalho ficasse bem organizado e com boa apresentação. Francisca dizia: "A apresentação também conta". A transcrição apresentada evidencia que a discussão entre as alunas serviu não só o propósito de definir estratégias de organização e registo dos dados, mas também de clarificação do objectivo da investigação.

Nas duas tarefas seguintes, *Sólidos Platónicos Truncados* e *A Stella Octangula*, as alunas para além de definirem estratégias de organização e registo dos dados, revelaram alguma preocupação em relacionar as observações iniciais com o foco da investigação. Como se pode verificar pelo diálogo seguinte ao iniciarem a exploração da primeira das duas tarefas:

> Matilde: É a tua vez de apontar. (Diz Matilde para Francisca).
> Francisca: Pomos faces, vértices e arestas, não é?
> Diana: É, e temos que comparar e também vamos ter que comparar nos outros, diz aqui na [questão] 2.
> (...)
> Matilde: Podemos já ver relações, para as faces, já vamos adiantando e percebendo.
> Francisca: Pois, pode ser, 6 são do cubo e depois as outras são as que foram cortadas, que são 8. São as faces do inicial mais o número de cortes.

As alunas, ao fazerem a contagem do número de faces do cubo truncado, tentaram não só comparar os elementos deste com os do cubo, mas também procurar entender a relação entre eles, tentando relacionar as explorações iniciais com o foco da investigação. O que denota que não olharam só para a primeira questão, mas que leram todo o enunciado e estavam a perceber a investigação como um todo. Porém, continuaram a não formular questões de forma explícita, como se pode observar pela transcrição seguinte referente à tarefa *A Stella Octangula*:

> Diana: Podemos estabelecer relações em termos de faces, arestas e assim.
> Matilde: Fazemos com o volume, faces, arestas e vértices.
> Francisca: E área.
> Matilde: Área de um sólido?
> Francisca: A área a toda a volta, a área de cada face.
> Matilde: Podemos a área de cada face e depois multiplicamos pelo número de faces, a área da figura é a quantidade de cartão que é preciso para a construir. Mas, a área vai ser um bocado complicado, não temos medidas.
> Francisca: Temos de dar x. E o perímetro também podemos pôr aqui.
> Matilde: O perímetro de um sólido? Não se calcula o perímetro de um sólido.

As alunas usaram o modo afirmativo quando discutiram que relações iriam procurar estabelecer entre o tetraedro, o cubo e a *stella*. Apenas se verificou que após terem avançado algumas conjecturas foram formulando uma ou outra questão de forma mais precisa, como por exemplo: "E quantos tetraedros dos pequeninos tem o octaedro?".

Na entrevista a investigadora questionou as alunas sobre o facto de não terem formulado questões de forma explícita e as alunas responderam:

> Francisca: Pois não formulamos, porque nos esquecíamos, pensávamos, por exemplo, vamos ver as áreas, ou as arestas e depois estávamos entusiasmadas e íamos logo estabelecer as relações e esquecíamo-nos de registar as questões, fazíamos mentalmente, às vezes dizíamos mas não tivemos muito cuidado com isso de formular as questões.
> Matilde: Era mesmo aquela coisa de avançar.

Apesar de as alunas estabelecerem alguma discussão em torno dos pontos que iriam investigar não mostraram preocupação em formular questões, pelo menos de forma explícita. Raramente formularam questões precisas e estas não foram registadas. A tendência para procurar respostas era mais forte.

Formulação e teste de conjecturas

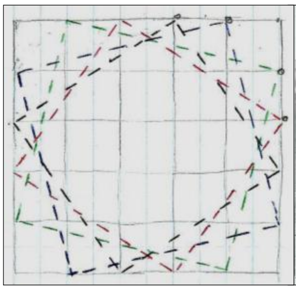
Na primeira tarefa, as alunas formularam um número reduzido de conjecturas, baseando-se na análise de dois ou três casos e consideraram-nas como conclusões. Tentaram estabelecer relações entre o quadrado inicial e os quadrados inscritos, mas apenas apresentaram os cálculos e as conclusões. Agindo como se tratasse da resolução de um simples exercício. Mostraram uma grande dependência da professora e da investigadora. Por exemplo, relativamente à primeira questão da tarefa, com base na observação dos quadrados inscritos nos quadrados iniciais 3x3, 4x4 e 5x5, estabeleceram a conclusão de que o número de quadrados inscritos no quadrado inicial nxn era n-1. Neste momento chamaram a investigadora:

> Matilde: Stôra está bem?
> Inv: O que é que vocês as três acham?
> Francisca: Nós chegamos a esta conclusão, porque dá no 3x3, no 4x4 e no 5x5.
> Inv: E será que vai dar para quadrados com outras dimensões? Será uma conclusão, ou será ainda uma conjectura?
> Matilde: Ah, sim.
> Inv: Então o que têm de fazer?
> Francisca: Aaah, temos que verificar se está certa.

A investigadora deixou as alunas e foi para outro grupo. Dali a pouco tempo chamaram a professora a fim de validar a sua justificação, sem no entanto, terem feito o teste da conjectura. Na questão dois, depois de terem definido as relações que iriam investigar e de terem feito alguns cálculos para determinar as medidas dos lados dos quadrados inscritos, do perímetro e da área, as alunas procuraram algumas regularidades, mas não encontraram e chamaram novamente a professora:

> Matilde: Vamos comparar, no 3x3 temos $4\sqrt{5}$, no 4x4 temos $4\sqrt{10}$, não dá para comparar nada. Não tem nada que dê para comparar.
> Francisca: Humm...
> Diana: Perguntamos à stôra.
> Matilde: Vamos então perguntar? Oh stôra podia chegar aqui se faz favor? Dois são sempre iguais. Vamos fazendo a tabela para o 5x5.
> Matilde: Oh stôra pode chegar aqui? Nós fizemos tabelas com os valores, mas não encontramos regularidades.
> Prof: Não há nenhuma?
> Francisca: Entre os quadrados formados, dois são iguais.
> Prof: E então, não podem formular nenhuma conjectura?
> Francisca: Sim, temos uma conjectura, que é dois dos quadrados inscritos vão ser sempre iguais

No registo escrito do trabalho desenvolvido acerca da tarefa não é feita referência à conjectura formulada. Apenas apresentaram a representação dos quadrados e a tabela com os valores, para cada um dos quadrados iniciais 3x3, 4x4 e 5x5, como a que se pode observar na figura 12 para o caso do quadrado inicial 5x5.



5x5	Lado	Perímetro	Área
Qua. Inicial	5	20	25
Qua. Formado 1	$\sqrt{13}$	$4\sqrt{13}$	13
Qua. Formado 2	$\sqrt{13}$	$4\sqrt{13}$	13
Qua. Formado 3	$\sqrt{17}$	$4\sqrt{17}$	17
Qua. Formado 4	$\sqrt{17}$	$4\sqrt{17}$	17

Figura 12. O quadrado 5x5 e a tabela com o número de quadrados, inicial e inscritos e as respectivas medidas dos lados, perímetros e áreas.

As alunas formularam a conjectura com base no estudo dos quadrados iniciais 3x3 e 4x4 e na procura de regularidades, fizeram o teste para o caso 5x5 e uma vez que a conjectura se verificou para este caso, passaram imediatamente para o estudo do quadrado inicial nxn, procurando generalizar, sem se preocuparem em fazer mais testes, nem procurarem refinar a conjectura e até formular outras.

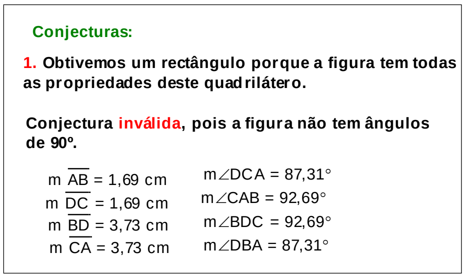
Perante a dificuldade em efectuar os cálculos para o caso geral, as alunas solicitaram o apoio da investigadora: “Stôra, nós já fizemos para os outros casos e agora no nxn, não sabemos como fazer, não sabemos como vamos dividir o quadrado inicial”. A investigadora deu-lhes algumas “pistas” que iam no sentido de as ajudar a encontrar a expressão para a medida do lado de um quadrado inscrito no quadrado nxn, partindo da análise dos casos anteriores. Ao encontrarem a expressão para a medida do lado do primeiro quadrado inscrito chamaram novamente a investigadora com o intuito de obterem confirmação. Esta pediu às alunas para discutirem no grupo os resultados obtidos, mas depois de terem estabelecido a relação entre as medidas dos lados, perímetro e área de um quadrado inscrito qualquer com o quadrado inicial, solicitaram mais uma vez a presença da investigadora com a mesma intenção, obter validação, mostrando uma reduzida confiança em si próprias.

Na segunda tarefa, *Investigação com Quadriláteros*, as alunas depois de construírem um quadrilátero e de unirem os pontos médios dos lados consecutivos desse quadrilátero. Com base na observação de um número limitado de exemplos, obtidos através de manipulações restritas da construção avançaram algumas conjecturas relativamente ao tipo de quadrilátero que obtiveram: “Parece um quadrado”; “É um trapézio” ou “É sempre um rectângulo”. No entanto, aqui já se nota maior preocupação das alunas em testar as conjecturas. Como se pode observar pelo diálogo seguinte relativo à terceira conjectura:

Diana: Primeiro vamos medir. Tem os lados iguais dois a dois.
Francisca: E tem ângulos de 90º?

Diana: Não sei.
Matilde: Vamos então ver se é um rectângulo.
Diana: Temos que medir os ângulos, primeiro.
Matilde: A figura tem todas as propriedades de um rectângulo. Lados iguais dois a dois e ângulos de 90°.
Diana: Não é, olhem este já dá 98,7°.
Matilde: Como isso é possível se tem os lados iguais dois a dois?
Francisca: Se for inclinado é um paralelogramo.

As alunas refutaram a conjectura e formularam uma nova: "É um paralelogramo". Realizaram vários testes para esta última conjectura, arrastavam um dos vértices do quadrilátero inicial e iam observando os valores das medidas do comprimento dos lados e das amplitudes dos ângulos do quadrilátero inscrito. Tiveram o cuidado de registar a conjectura que foi refutada, e apresentar um contra-exemplo, como mostra a figura 13.



Conjecturas:

1. Obtivemos um rectângulo porque a figura tem todas as propriedades deste quadrilátero.

Conjectura inválida, pois a figura não tem ângulos de 90º.

m $\overline{AB}$ = 1,69 cm	m∠DCA = 87,31°
m $\overline{DC}$ = 1,69 cm	m∠CAB = 92,69°
m $\overline{BD}$ = 3,73 cm	m∠BDC = 92,69°
m $\overline{CA}$ = 3,73 cm	m∠DBA = 87,31°

Figura 13. Registo feito pelas alunas para uma das conjecturas que formularam.

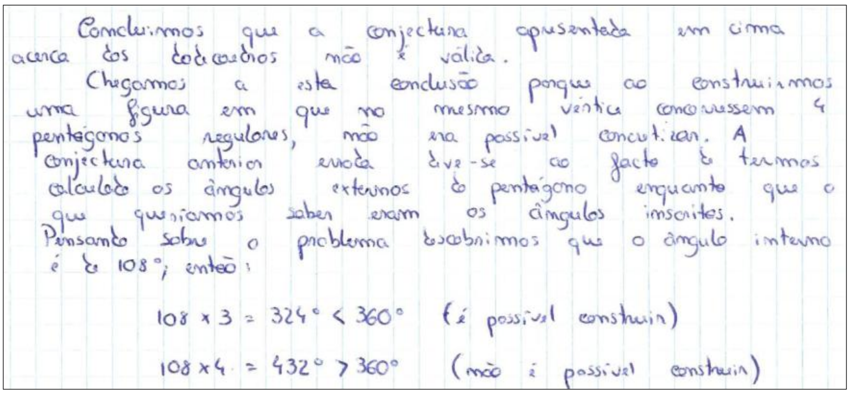
Ao estabelecerem relações entre os dois quadriláteros, as alunas com base na manipulação da construção feita formularam a conjectura: "As diagonais do quadrilátero inicial são paralelas aos lados do inscrito", que depois de realizarem alguns testes e de alguma discussão foi reformulada. Formularam novas conjecturas algumas das quais foram refutadas aquando do teste, como por exemplo: "A razão dos perímetros é constante". Esta conjectura foi avançada pelas alunas com base num número muito reduzido de movimentos dos vértices do quadrilátero inicial. Quando este número aumentou a conjectura foi refutada. Contudo, e apesar de terem registado uma ou outra conjectura que tinha sido refutada, esta conjectura não foi registada. As alunas mostravam alguma tendência para fazer o registo das conjecturas que lhe pareciam ser válidas, desvalorizando as que se revelaram falsas, apresentando, assim alguma dificuldade em entender que essas não constituem erros, mas fazem parte de uma fase do trabalho investigativo.

Nesta tarefa, muito embora a organização dos dados necessários para a formulação das primeiras conjecturas fosse facilitada pelas potencialidades do GSP, as alunas conseguiram tomar decisões importantes relativamente à formulação e teste de conjecturas. Com base numa primeira análise dos dados formulavam conjecturas e geravam mais dados de modo a poderem confirmá-las, arrastando um dos vértices do quadrilátero inicial e observando alguns valores das medições obtidas através do GSP, que finalmente eram organizados de forma a tornar mais evidente a sua validade. Pode-se dizer que as alunas mostraram uma maior preocupação em testar as conjecturas, para isso terá contribuído não só a facilidade com que o GSP permite gerar dados, mas também a discussão final da primeira tarefa, na qual as alunas se aperceberam da importância do teste das conjecturas, e naturalmente as sucessivas chamadas de atenção por parte da professora e da investigadora.

Na tarefa *Poliedros Regulares*, as alunas formularam várias conjecturas, algumas das quais irrelevantes para a investigação como por exemplo, conjecturas relacionadas com a posição relativa das diagonais espaciais do cubo e com a altura do tetraedro. Outras triviais como: "As diagonais espaciais do cubo são iguais" ou " Algumas das faces do cubo são perpendiculares e outras paralelas". Para as alunas parecia ser importante analisar o maior número possível de características de cada sólido construído e formular o máximo de conjecturas independentemente da sua trivialidade. Como se pode verificar pela transcrição seguinte:

> Matilde: Só nós é que ainda estamos na primeira figura, olhem os outros quantas já construíram.
> Francisca: Mas, se calhar eles não analisaram tantas coisas como nós.
> Matilde: É, nós analisamos muita ciosa, já temos muitas conjecturas e escrevemos tudo.

Contudo, também formularam conjecturas relevantes para a investigação, por exemplo: "Com quadrados só dá para construir o cubo" ou "Podem concorrer no mesmo vértice 4 pentágonos". Esta última foi formulada com base no cálculo da soma das amplitudes dos ângulos que podiam concorrer num vértice do poliedro. As alunas calcularam a amplitude de um ângulo interno de um pentágono regular, utilizando o mesmo procedimento para o cálculo da amplitude de um ângulo externo, tendo obtido o valor de 72°, que multiplicado por 4 dá 288°, portanto inferior a 360°. Ao testarem a conjectura, as alunas verificaram que não era possível construir poliedros regulares concorrendo quatro pentágonos em cada vértice, porque "não há espaço para a quarta peça, sobrepõem-se". Então refutaram a conjectura, preocuparam-se em tentar perceber o porquê destes resultados e reformularam a conjectura. Matilde desconfiou do valor obtido para a amplitude do ângulo interno do pentágono regular e afirmou: "Tem que ter a ver com os ângulos" e procuraram, encontrar o erro. As alunas apresentaram os motivos que as levou à refutação da conjectura, como mostra a figura 14.



Concluímos que a conjectura apresentada em cima acerca dos dodecaedros não é válida.
Chegamos a esta conclusão porque ao construirmos uma figura em que no mesmo vértice concorressem 4 pentágonos regulares, não era possível concretizar. A conjectura anterior errada deve-se ao facto de termos calculado os ângulos externos do pentágono enquanto que o que queríamos saber eram os ângulos inscritos.
Pensando sobre o problema descobrimos que o ângulo interno é de 108°, então:

108 × 3 = 324° < 360° (é possível construir)

108 × 4 = 432° > 360° (não é possível construir)

Figura 14. Justificação apresentada pelas alunas para a refutação da conjectura.

A exploração da tarefa *Secções Planas no Cubo* foi iniciada pelo estudo de secções planas no cubo determinadas por um plano secante ou de corte que intersecta quatro faces do cubo. Matilde pela observação do cubo com o líquido, assente sobre o plano da mesa avançou a conjectura: “A secção obtida quando o cubo está nesta posição é um quadrado”, que foi imediatamente aceite pelas colegas e que não lhes suscitou a necessidade de realizar o teste, por lhes parecer válida, apenas Diana referiu: “ Se virássemos e ficasse esta [outra face do cubo] para baixo ia dar igual”. De seguida, Francisca colocou o cubo noutra posição e conjecturou que podiam obter um rectângulo. Após uma breve discussão acerca da definição de estratégias de exploração, organização e registo dos dados e ainda da justificação da primeira conjectura formulada, voltaram a colocar o cubo na posição em que Francisca tinha observado um rectângulo e procuraram testar este resultado:

Francisca: E se tivesse mais líquido, também daria [o rectângulo]?
Diana: Continuava a ser porque só aumentava.
Matilde: Podemos deitar mais um pouco de líquido, mas continuava a ser. Deita pouco.
Diana: Põe como estava.
Francisca: É, dá na mesma, vai mexendo, também dá.

Depois de procurarem justificar a conjectura e de relacionarem o rectângulo com a posição do plano de corte em relação a alguns elementos do cubo, nomeadamente faces, arestas e diagonais espaciais, consideravam não ser possível obter mais quadriláteros. Diana diz para a investigadora: “Já vimos os quadriláteros, são todos rectângulos”. A investigadora aconselhou as alunas a mudar a posição do cubo e a analisar bem as situações. Com outras posições particulares do cubo conjecturaram que podiam obter trapézios escalenos e isósceles. Através de mais experiências particulares com o cubo com líquido, formularam novas conjecturas, umas vezes aumentaram a quantidade de líquido, outras diminuíram-na, como foi para o caso em que a superfície do líquido intersectava três faces do cubo. Conjecturaram que podiam obter triângulos equiláteros e triângulos isósceles. Diana questionou as colegas: “E o escaleno não dá para fazer?”, experimentaram, mas não conseguiram identificar um triângulo escaleno. Para estes casos não variaram a quantidade de líquido para verificar se obtinham o mesmo tipo de polígono, mantendo a mesma posição do cubo. Por terem percebido aquando do teste realizado para o caso do rectângulo, que fazendo essa experiência e o líquido intersectar o mesmo número de faces, o tipo de polígono obtido era o mesmo. Através do processo de especialização conseguiram conjecturar que podiam ainda obter pentágonos e hexágonos. As alunas fizeram várias experiências na tentativa de obterem um pentágono regular, mudavam o cubo de posição, variavam a quantidade de líquido e questionavam-se: “Porque não dá um pentágono regular?”, só na discussão final da tarefa é que as alunas encontraram a resposta a esta questão.

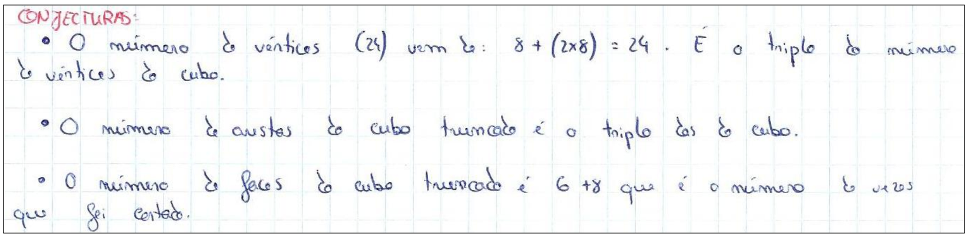
Concluíram a investigação escrevendo: “Não é possível formar mais secções com um número de lados maior que seis, pois o cubo apenas tem seis faces”.

Na tarefa seguinte *Sólidos Platónicos Truncados*, as alunas através da contagem das faces, vértices e arestas do cubo e do cubo truncado formularam as primeiras conjecturas para as relações entre os elementos do sólido truncado e do sólido original. Conjecturaram que o número de faces e de vértices do cubo truncado era o dobro do do cubo e o número de arestas o triplo. Matilde desconfiou destas conjecturas pelo facto da relação entre o número de faces e de vértices ser o dobro e entre o número de arestas ser o triplo:

> Matilde: Será que estão mal as arestas? Vamos contar outra vez, mas se eram 8 em cima e 8 em baixo, 16, e depois 5 vezes 4, 20 e 20 mais 16 dá 36. É o triplo [das do cubo].
> Diana: E não podemos comparar só as faces e os vértices?

As alunas tinham a ideia de que a relação entre os elementos do cubo e do cubo truncado tinha que ser a mesma para faces, vértices e arestas. Entretanto, a investigadora passou pelo grupo e apercebeu-se que as alunas no número de faces do cubo truncado tinham feito 6+8=12 e alertou: “Os cálculos estarão todos correctos?”. Francisca diz de imediato “6 mais 8 são 14. Oh enganamo-nos”, a partir daí revêem os cálculos e fazem novas contagens. Tentaram encontrar explicações para os resultados obtidos no sentido de reformularem as conjecturas, mas perante a dificuldade em encontrarem essas explicações optaram por passar para a exploração de outro sólido.

A investigadora questionou as alunas: “Então já acabaram a exploração do cubo?”, elas afirmaram que depois retomariam o estudo do cubo e a investigadora aconselhou-as a analisarem uma relação de cada vez no sentido de evitarem confusões. Passado algum tempo reformularam as conjecturas e registaram-na como mostra a figura 15.



CONJECTURAS:

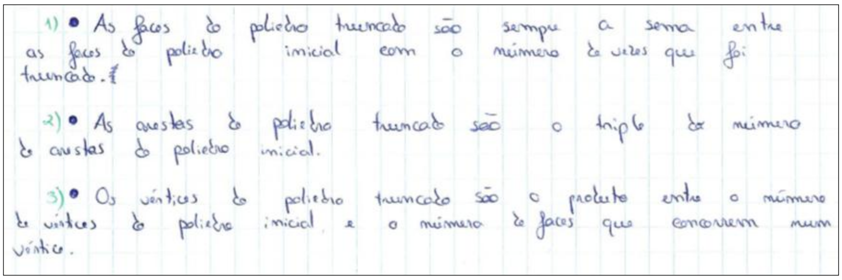
• O número de vértices (24) vem de: 8 + (2×8) = 24. É o triplo do número de vértices do cubo.

• O número de arestas do cubo truncado é o triplo das do cubo.

• O número de faces do cubo truncado é 6 + 8 que é o número de vezes que foi cortado.

Figura 15. Conjecturas reformuladas para o caso do cubo truncado.

As alunas continuaram a exploração e compararam o número de faces, vértices e arestas do tetraedro truncado com elementos do tetraedro regular e escreveram: “As conjecturas que indicamos em cima são válidas, neste caso”. Procuraram generalizar esses resultados e observaram que para o caso do octaedro truncado a conjectura que tinham avançado relativamente aos vértices não se verificava. Este contra-exemplo levou as alunas novamente à reformulação dessa conjectura. Através da análise dos casos particulares, exploraram as analogias que iam observando e escreveram conjecturas genéricas como mostra a figura 16.



1) • As faces do poliedro truncado são sempre a soma entre as faces do poliedro inicial com o número de vezes que foi truncado.

2) • As arestas do poliedro truncado são o triplo do número de arestas do poliedro inicial.

3) • Os vértices do poliedro truncado são o produto entre o número de vértices do poliedro inicial e o número de faces que concorrem num vértice.

Figura 16. Conjecturas genéricas formuladas pelo grupo.

Na tarefa *A Stella Octangula* pela observação do poliedro construído quando seis diagonais faciais do cubo concorrem em quatro dos seus vértices, Diana conjecturou que era uma pirâmide triangular, mas as colegas não concordaram, Matilde argumentou “tem triângulos equiláteros e são todos iguais. É um tetraedro”, o que foi corroborado por Francisca. Matilde convenceu Diana que afirmou: “Pois, as suas arestas são diagonais faciais do cubo”. Ao tentarem identificar o poliedro que se obtém pela intersecção dos dois tetraedros, Francisca avançou a conjectura: “O poliedro obtido é um tronco”, mas as colegas desconfiaram desta conjectura e depois de alguma análise foi refutada. Após uma longa discussão em torno da visualização da *stella*, formularam uma nova conjectura: “Vai ser um octaedro”.

Para estabelecerem relações entre os sólidos, as alunas, tentaram calcular o volume do tetraedro ABCD em função da aresta do cubo. O que não foi conseguido. Depois, de a investigadora ter dado a sugestão de considerarem o volume do sólido ABCD como unidade de volume, as alunas começaram por procurar definir o volume da *stella* em função do volume desse sólido.

Conjecturaram com base na observação da representação da *stella* que o volume desta era 12 vezes o volume do sólido ABCD, considerando que o volume do octaedro (poliedro que resulta da intersecção dos dois tetraedros grandes) era quatro vezes o volume do sólido ABCD. No entanto, desconfiaram da conjectura, representaram um octaedro, analisaram-no e consideraram a conjectura falsa. E perante a dificuldade em estabelecer uma relação entre os volumes do octaedro e do sólido ABCD, procuraram encontrar uma relação entre os volumes do cubo e da *stella*. A investigadora ao se aperceber que as alunas tinham refutado a conjectura, questionou-as no sentido de relacionarem o volume do tetraedro grande com o tetraedro ABCD e então verificaram que a conjectura não era falsa e conseguiram prová-la.

Verificou-se que nesta tarefa as alunas tiveram mais dificuldade em formular conjecturas, devido ao grau de dificuldade da mesma.

Justificação e prova

A compreensão da necessidade da justificação e da prova das conjecturas por parte das alunas foi um processo gradual. Na primeira tarefa, consideravam as conjecturas como conclusões sem sentir necessidade de as justificar ou provar. Por exemplo, na questão dois, depois de encontrarem as expressões: $\sqrt{(n-m)^2+m^2}$; $4\sqrt{(n-m)^2+m^2}$ e $(n-m)^2+m^2$, que relacionam a medida do lado de um quadrado inscrito, m, do perímetro e da área, respectivamente, com o quadrado inicial nxn, através da generalização que foram fazendo a partir dos casos particulares, as alunas davam a tarefa por terminada. Foi preciso a investigadora incentivá-las a realizar a prova. Perante este incentivo e algum questionamento por parte da investigadora, as alunas através da utilização de raciocínio geométrico e algébrico apresentaram a prova que mostra a figura 17.

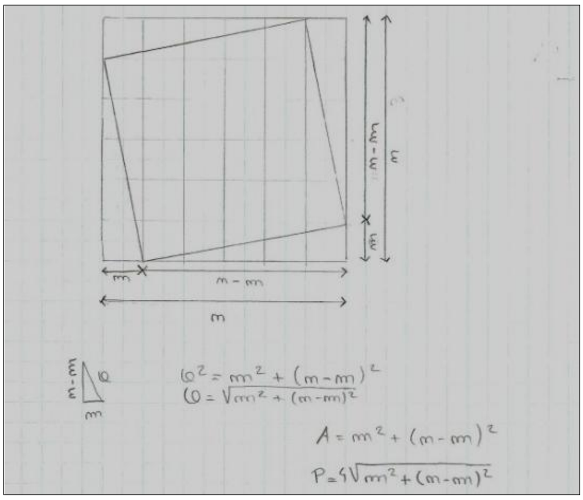


Figura 17. Prova apresentada pelas alunas.

Na segunda tarefa, *Investigação com Quadriláteros*, as alunas tentaram provar que o quadrilátero que se obtém unindo os pontos médios dos lados consecutivos de qualquer quadrilátero é um paralelogramo, "traçando paralelas", ou seja, as alunas efectuaram os procedimentos no GSP para traçar um recta paralela a um dos lados do paralelogramo e que passasse por um ponto do lado oposto, e como essa recta "passou por cima do lado" então para as alunas estava provado que os lados eram paralelos, considerando assim, a função da prova apenas como verificação. A investigadora solicitou às alunas que tentassem procurar razões lógicas que justificassem a sua conjectura, mas elas não conseguiram avançar nenhuma ideia para o fazer. Não tinham presente algumas propriedades geométricas envolvidas. Foi então, que se optou por fazer a prova em grande grupo, uma vez que os restantes alunos também não tinham conseguido. Perante a sugestão apresentada pela investigadora, Matilde que tinha ido ao quadro, a pedido da investigadora, para explicar aos colegas como tinham confirmado que os lados eram paralelos dois a dois, representou um quadrilátero qualquer, uniu os pontos médios dos lados consecutivos obtendo outro quadrilátero que se pretendia provar ser um paralelogramo e traçou uma diagonal do quadrilátero inicial, como mostra a figura 18.

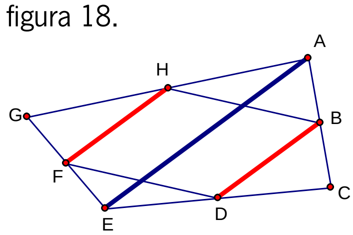


Figura 18. Representação semelhante à que Matilde fez no quadro.

Os alunos foram apresentando algumas ideias para se provar que os lados DB e FH são paralelos, como se pode observar pela seguinte transcrição:

> Joaquim: O de fora ficou dividido em dois triângulos.
> Pedro: Dois lados do quadrilátero inscrito são paralelos à diagonal [do quadrilátero inicial].
> Inv: Porquê?
> Nelson: Porque o lado do quadrilátero inscrito foi obtido através dos pontos médios.
> Matilde: Este triângulo [DCB] e este [EAC] são semelhantes.
> Luís: Têm um ângulo comum.
> Matilde: Sim e estes dois [ângulos EAC e DBC] são ângulos de lados paralelos, por isso também são geometricamente iguais.

Na última fala Matilde utilizou uma justificação em círculo, ou seja, argumentou com o que deveria ser justificado. Os alunos acabaram por justificar que os triângulos DCB e EAC são semelhantes porque "dois lados são proporcionais e o ângulo por eles formado é comum". A investigadora questionou-os: "O facto de os triângulos serem semelhantes prova que os lados DB e

EA são paralelos?". Matilde afirmou: "Neste caso sim porque estão na mesma posição". Francisca acrescentou: "Podemos ver por aquela propriedade que vimos na última aula". Foi então recordada a proposição de Euclides. E Matilde diz de imediato:

> Agora é fácil porque, nós vimos que este [lado DB] é paralelo à diagonal, não é? E por outro lado este [lado FH] também é paralelo à mesma diagonal, pela tal propriedade, porque é a mesma coisa, estes pontos [F e H] também são pontos médios, então os dois lados também são paralelos.

A argumentação de Matilde convenceu os colegas e Carlos afirmou: "Agora traçávamos a outra diagonal e pelo mesmo processo mostrávamos que os outros dois [lados FD e HB] também eram paralelos". Os alunos foram avançando ideias relevantes que com alguma orientação por parte da investigadora permitiram realizar a prova.

Ainda nesta tarefa, as alunas formularam uma conjectura que relacionava as áreas do quadrilátero inicial e do quadrilátero inscrito: "A área do quadrilátero inicial é o dobro da área da figura inscrita, logo a razão é 2", efectuaram alguns testes, mas não apresentaram qualquer justificação, nem mostraram tendência para o fazer. Matilde diz para as colegas "vamos arrastar para vermos se dá sempre", Diana efectuou várias manipulações da construção e foi dizendo, "olhem, dá" e decidiram procurar outras relações. O facto de o GSP lhes permitir fazer rapidamente um grande número de testes, levava à ideia de que a relação se verificava para todos os casos. No entanto, para estas alunas, esta não terá sido a razão principal para não terem justificado a conjectura, mas sim o querer avançar o maior número de relações possível. Para uma das conjecturas, não conseguiram encontrar contra-exemplos, como se pode verificar pelo diálogo seguinte e procuraram justificá-la:

> Francisca: Dois [ângulos] são obtusos e dois agudos.
> Diana: É o que eu disse.
> Matilde: Será que não há excepções?
> Diana: Nós já mexemos muitas vezes e dá sempre assim, só nos de 90° é que não.
> Francisca: Então temos que explicar porquê.
> Matilde: Stôra, nós já encontramos algumas relações, agora estamos com dificuldades em justificar porque é que dá sempre dois ângulos agudos e dois obtusos excepto nos rectângulos.

Começaram por justificar que o quadrilátero inscrito tinha dois ângulos agudos e dois obtusos, mas entretanto tocou para sair e na aula seguinte as alunas não se lembraram de terminar a justificação. Aquando da discussão final da tarefa, Francisca referiu: "Nós também encontramos uma relação entre os ângulos das duas figuras que são dois agudos e dois obtusos excepto quando são todos de 90°". As alunas apenas tinham observado os valores das amplitudes dos ângulos de um e de outro quadrilátero e verificado que tanto num como no outro havia dois ângulos agudos e dois obtusos, sem no entanto terem observado qualquer relação entre os ângulos dos dois quadriláteros. Quando interpeladas acerca dessa relação, as alunas apenas justificaram a existência de dois ângulos agudos e dois obtusos no quadrilátero inscrito, baseando-se nas propriedades dos paralelogramos. Para o quadrilátero inicial, não conseguiram apresentar qualquer justificação. A investigadora pediu às alunas para efectuarem alguns testes e dali a pouco tempo, Francisca encontrou um contra-exemplo. Este momento foi aproveitado para realçar a importância do teste e da justificação e prova das conjecturas.

A justificação apresentada pelas alunas relativamente aos quadriláteros inscritos que se obtêm para os casos particulares de quadriláteros baseava-se apenas na aparência visual e na confirmação das propriedades de cada um dos quadriláteros inscritos, através de medições obtidas pelo GSP, como mostra a figura 19, para o caso do quadrilátero inicial ser um losango.

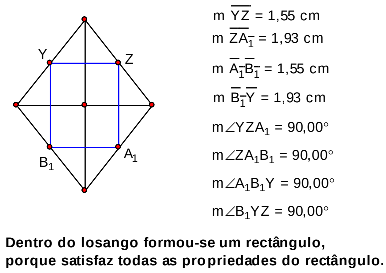


Figura 19. Representação e justificação apresentadas pelo grupo para o caso do losango.

Na tarefa *Poliedros Regulares*, as alunas evidenciaram maior preocupação com a justificação das suas conjecturas, embora tenha sido necessário insistir para que procurassem argumentos pelo menos plausíveis. Justificaram que com quadrados só dava para construir o cubo baseando-se nas experiências que realizaram com as peças de *polidron*:

> Matilde: Nós já tínhamos visto que podíamos ter duas peças aqui, duas ali, ali, sempre duas, ia dar um poliedro regular, mas era uma ampliação deste [do cubo].
> Diana: Pois tendo sempre o mesmo número de quadrados, temos na mesma um cubo, se pusermos de outra maneira dá um paralelepípedo e já não é regular.
> Francisca: Aqui [no cubo] em cada vértice concorrem 3 [faces].
> Matilde: Para ser regular tem que ser sempre o mesmo número [de faces] a concorrer em cada vértice. E se concorrerem 4?
> Diana: Não dá, olha, não faz vértice.
> Matilde: Então é essa a justificação.

A investigadora que estava próxima do grupo questionou as alunas: "O que significa não fazer vértice?" Diana disse: "Não dá assim para dobrar". A investigadora sugeriu que procurassem razões para não permitir a dobragem, mas as alunas ficaram em silêncio, então a investigadora avançou uma pista "há pouco disseram que a amplitude dos ângulos internos de cada quadrado era de 90º, pensem se esse dado poderá ajudar para encontrarem justificações válidas". As alunas tinham sobre o plano da mesa a figura plana que haviam construído e rapidamente chamaram a investigadora para lhe comunicar a justificação que tinham encontrado:

> Matilde: Stôra, aqui à volta do ângulo [no qual concorrem as 4 faces], dá 360º, por isso é que não dá para dobrar, não é? Diga-nos se está bem.
> Inv: São vocês quem tem que decidir se está bem.
> Francisca: Sim, mas oh stôra, eu acho que se der menos de 360º dá, com 360º não.
> Inv: Pronto, então discutam as três para poderem decidir.

As alunas continuavam a mostrar pouca confiança em si próprias. Depois de alguma discussão decidiram escrever: "Se concorrerem num vértice mais de 3 faces a soma dos ângulos que concorrem nesse vértice irá ser de 360º, o que não permite a dobragem. Forma-se uma figura plana". Não contemplando, porém na sua justificação casos em que concorrem mais de quatro faces em cada vértice, apesar de terem referido "mais de 3 faces". Para as restantes conjecturas formuladas em torno dos restantes poliedros regulares, as alunas continuaram a apresentar justificações baseadas em raciocínio aritmético. Apesar de algumas conjecturas que formularam serem irrelevantes para a investigação, tiveram o cuidado de justificar a maior parte delas. Por exemplo, conjecturaram que a "altura do tetraedro é perpendicular à base no baricentro do mesmo", a justificação apresentada baseava-se em raciocínio geométrico: "Porque é perpendicular às medianas do triângulo da base no ponto onde se intersectam". Na discussão final, a investigadora pediu às alunas para explicarem como é que esta afirmação justificava a conjectura e Francisca apoiada no critério de perpendicularidade entre rectas e planos, referiu: "Porque se é perpendicular a duas rectas concorrentes do plano é perpendicular ao plano, e ela é perpendicular no ponto de intersecção das medianas, é por isso".

As justificações avançadas pelas alunas para conjecturas que estabeleceram na tarefa *Secções Planas no Cubo* foram apoiadas sobretudo na intuição, como se pode observar pela discussão das alunas quando procuram justificar que uma das secções obtidas no cubo quando o plano de corte intersecta quatro das suas faces é um rectângulo:

> Matilde: Temos que ver porque é um rectângulo.
> Diana: Porque o mesmo líquido que está num vértice é igual ao que está no outro e por isso forma dois a dois.
> Matilde: Esta distância vai ser igual nos dois.
> Diana: Sim esta, porque tem a mesma quantidade de líquido.
> Matilde: Como sabes que tem a mesma quantidade?

Diana: Porque é um rectângulo e para ser um rectângulo tem que ter a mesma quantidade.
Matilde: Nós temos que ver. Primeiro só podemos considerar a secção esta parte [a superfície do líquido], aqui não podemos. E depois, até porque, como é que tu dizes que é um rectângulo se queres justificar que é um rectângulo.
(...)
Matilde: É, para dar um rectângulo, estas arestas [aresta assente no plano da mesa e a oposta] são paralelas à secção.

É de notar que Diana na sexta fala usa uma justificação em círculo ao responder à pergunta de Matilde e esta alerta-a para este facto, o que significa que compreendeu aquando da discussão da tarefa dois, que não se deve argumentar com o que se pretende justifica. As alunas revelaram dificuldade em encontrar uma justificação para a conjectura e só ao fim de uma longa discussão é que o conseguiram. Já, por exemplo, para as secções que obtiveram quando o plano de corte intersecta seis faces do cubo, a justificação foi encontrada com mais facilidade, apesar de não estar muito fundamentada, como mostra a figura 20.

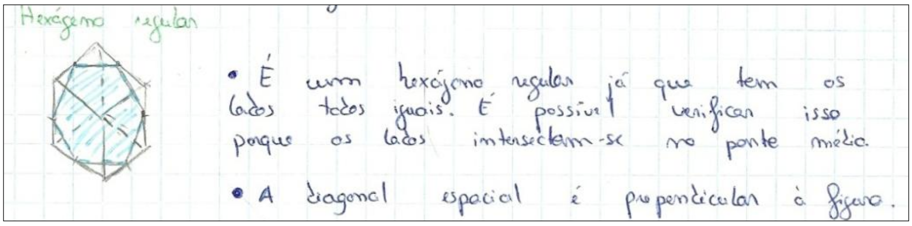


Figura 20. O desenho e a justificação para o caso da secção plana no cubo ser um hexágono regular.

É de salientar que nesta tarefa a prova não era acessível a alunos deste nível de ensino.

Nas últimas tarefas, *Sólidos Platónicos Truncados* e *A Stella Octangula*, a procura de justificações plausíveis por parte das alunas para as suas conjecturas foi mais evidente. Por exemplo, as alunas conjecturaram na primeira das duas tarefas que o número de arestas de um sólido truncado era o triplo do número de arestas do sólido original e tentaram encontrar razões válidas para a justificar:

Matilde: Agora temos que ver o porquê, do vezes 3.
Francisca: Porque concorrem 3 faces.
Matilde: Vamos fazer num que não concorram 3.
(...)
Matilde: Dá em todos o triplo, mas agora de onde vem o 3?
Francisca: Deve haver uma forma de justificar.
Diana: Em cada vértice concorrem 3 arestas.
Francisca: É sempre vezes 3 porque em cada vértice concorrem 3 arestas.
Matilde: Não estou satisfeita. Isso não chega, temos que encontrar uma razão lógica que explique porque concorrem 3 arestas.

Diana: Mas achas que está mal?
Matilde: Não está mal, mas...
Francisca: Pois e nós pusemos o triplo das arestas, temos que partir das arestas do primeiro [sólido inicial].
Matilde: Pois é, nós estamos a relacionar arestas com arestas, mas porquê do maldito 3? De onde tu vens amigo?

As alunas insistiram, mas não conseguiram encontrar um argumento válido que justificasse a conjectura. No entanto, também não procuraram reformular a conjectura ou formular uma nova, pelo facto de se verificar para todos os sólidos platónicos. As restantes conjecturas foram justificadas com base na visualização dos sólidos iniciais e em raciocínio aritmético.

Também na tarefa, *A Stella Octangula*, a justificação de algumas conjecturas estabelecidas pelas alunas se baseou na visualização. Outras conjecturas foram provadas com base em raciocínio aritmético e algébrico, nomeadamente para as que foram formuladas em torno das relações entre os volumes dos três sólidos, tetraedro, *stella* e cubo. Para a prova de algumas dessas relações, como por exemplo, a relação entre os volumes do cubo e da *stella*, foi preciso a investigadora proceder a alguma orientação e questionamento.

Nas últimas tarefas verificou-se uma menor dependência das alunas em relação à professora ou à investigadora, como fonte de validação do trabalho desenvolvido, como se pode observar num diálogo tido pelas alunas aquando da realização da tarefa *Sólidos Platónicos truncados*:

Diana: Está certa a nossa conjectura.
Matilde: Agora vamos explicar.
Francisca: Primeiro é melhor a stôra ver.
Matilde: Não é nada, Francisca, e a stôra diz sempre para decidirmos nós.
Diana: É, e se não estiver bem vemos na discussão.
Francisca: Está bem, podemos começar por explicar que o número de vértices...

Embora por vezes ainda se observasse alguma tendência para o fazer, em geral, as alunas solicitavam apoio em situações que não conseguiam resolver entre elas.

As alunas consideraram que justificar as conjecturas foi um trabalho difícil. Na entrevista referiram:

Matilde: Explicar o porquê foi difícil.
Diana: É, tivemos mais dificuldades em justificar as conjecturas. Formular é mais fácil um bocadinho, justificar é mais difícil.
Inv: Porquê?
Francisca: Porque às vezes é difícil arranjar justificações para aquilo que vemos e outras vezes até tínhamos ideias, mas depois para as escrevermos era complicado.

Matilde: Mas, acho que evoluímos porque tornou-se mais comum, isso de explicar e argumentar e eu acho que isso das investigações está-me a fazer muito mais perguntar as coisas, porque é que é assim, em Matemática e mesmo em Física e Química.

De facto observou-se uma evolução positiva ao longo do estudo, relativamente à preocupação das alunas em procurar explicações e justificação para as suas conjecturas. Matilde salientou que o trabalho com investigações tem contribuído para ela tentar procurar "os porquês", mesmo noutras disciplinas, o que é muito positivo.

Comunicação do trabalho realizado

A divulgação do trabalho realizado foi difícil para as alunas, principalmente a comunicação escrita. Na primeira tarefa, *Quadrados em Quadrados*, após terem desenhado os quadrados inscritos nos quadrados iniciais 3x3, 4x4 e 5x5 e indicado o número de quadrados inscritos para cada caso, registaram de forma pouco explícita a conjectura formulada relativamente ao número de quadrados inscritos num quadrado nxn, apenas escreveram: "Com a observação dos quadrados descobrimos que em: n $\rightarrow$ n.º de quadrados = n-1". O mesmo aconteceu com a justificação apresentada para a mesma conjectura, como se pode observar na figura 21.

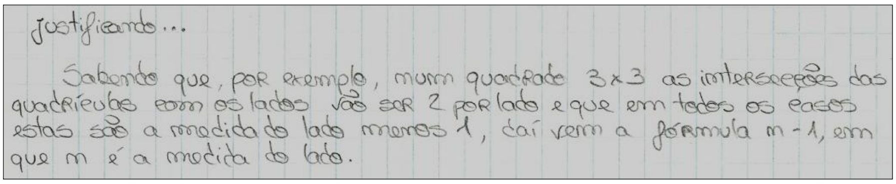

Justificando...
Sabendo que, por exemplo, num quadrado 3x3 as intersecções das quadrículas com os lados vão ser 2 por lado e que em todos os casos estas são a medida do lado menos 1, daí vem a fórmula n - 1, em que n é a medida do lado.

Figura 21. Registo da justificação feita pelas alunas.

As alunas apenas explicam e de forma pouco clara, que num quadrado inicial nxn temos n-1 pontos de intersecção das quadriculas com o lado do quadrado inicial. Para além, de não justificarem convenientemente que num quadrado inicial nxn se podem inscrever n-1 quadrados cujos vértices são pontos de intersecção das quadrículas com os lados do quadrado inicial, é notória a dificuldade em comunicar por escrito os seus raciocínios.

Na tarefa *Investigação com Quadriláteros*, as alunas limitaram-se a apresentar as construções feitas, a registar conjecturas, principalmente as que lhes pareciam ser válidas e a indicar algumas medições para confirmar essas conjecturas. Apesar de, por exemplo, terem procurado provar a conjectura que formularam relativamente ao tipo de quadrilátero que obtiveram unindo os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero qualquer, traçando paralelas, não fizeram qualquer registo acerca dessa tentativa. Foi apenas comunicada por Matilde aquando da discussão em grande grupo: "Seleccionamos este lado e este ponto [ponto do lado oposto] e traçamos uma paralela como se não tivesse nada na figura e calhou exactamente em cima do lado”. A explicação de Matilde limita-se apenas a descrever procedimentos sem interpretar os resultados.

Na tarefa *Poliedros Regulares* verificou-se que as alunas registaram as principais características dos poliedros encontrados, numa tabela, tal como era sugerido no enunciado da tarefa, desenharam as suas planificações e registaram ainda a maior parte das conjecturas formuladas e a sua justificação. Por exemplo, registaram que não é possível construir poliedros regulares com hexágonos regulares e justificaram, como se pode observar na figura 22.

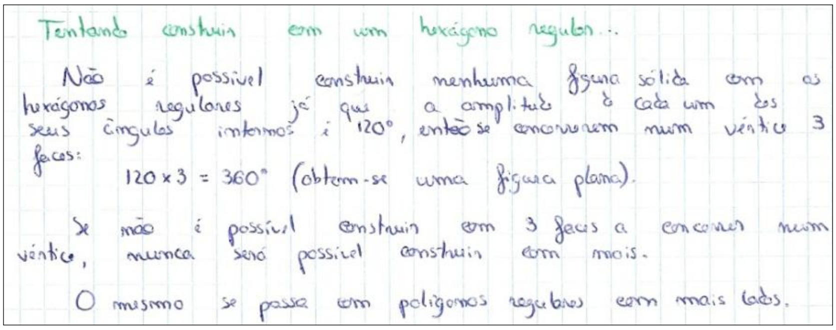

Tentando construir com um hexágono regular...
Não é possível construir nenhuma figura sólida com os hexágonos regulares já que a amplitude de cada um dos seus ângulos internos é 120°, então se encontrarem num vértice 3 faces:
120 x 3 = 360° (obtem-se uma figura plana).
Se não é possível construir com 3 faces a concorrer num vértice, nunca será possível construir com mais.
O mesmo se passa com polígonos regulares com mais lados.

Figura 22. Registo efectuado pelas alunas relativamente à impossibilidade de construir poliedros regulares com polígonos regulares com 6 ou mais lados.

Esta justificação está mais explícita comparativamente, por exemplo, à da figura 21. As alunas explicitam o processo de pensamento e raciocínio, de modo a que os outros o possam compreender, fornecem ao leitor mais do que uma descrição de procedimentos, oferecem alguma interpretação.

Durante a discussão final da tarefa, as alunas apresentaram algumas conjecturas que tinham formulado, que lhe pareceram ser importantes, por exemplo relativamente ao tetraedro e que conduziram à discussão de determinados conceitos, como o de baricentro de um triângulo, que alguns dos alunos referiram não saber, outros não se lembrar. Então Francisca explicou que: “Num triângulo ao unirmos cada vértice ao ponto médio do lado oposto desse vértice, essas linhas vão-se intersectar e esse ponto é o baricentro”. Francisca, apesar de não usar o termo mediana, procurou que a explicação fosse entendida pelos outros tentando estabelecer conexões entre o que estava a explicar e conhecimentos prévios.

Na quarta tarefa *Secções Planas no Cubo*, as alunas para cada secção encontrada fizeram a representação do cubo com a respectiva secção e registaram as conjecturas e a sua justificação e para a maior parte das secções encontradas registaram também a posição do plano de corte em relação a alguns elementos do cubo. Procuraram justificar as conjecturas com base na intuição e percepção visual, o que lhe levantou dificuldades em termos de comunicação escrita. Por exemplo, conjecturaram que quando o plano de corte intersecta quatro faces do cubo uma das secções obtidas é um trapézio isósceles, encontraram alguns argumentos para justificar a conjectura, mas depois o problema era como registá-los, como mostra a discussão seguinte:

> Matilde: Como vamos pôr isto no papel? Agora para escrever…
> Diana: Podemos começar por escrever que estes dois triângulos [que o líquido forma com duas faces paralelas] são semelhantes e isósceles.
> Francisca: E podemos pôr que os lados se formam a partir da ligação desses dois lados.
> Matilde: Não, é melhor escrevermos primeiro porque é um trapézio. Tem dois lados paralelos.
> Diana: Porque segundo os triângulos que formam…
> Matilde: Os triângulos que formam são semelhantes e isósceles.
> Francisca: E esses lados são paralelos a diagonais destas faces e unindo um lado de um com o do outro…
> Diana: Temos os lados geometricamente iguais.
> Matilde: Pois, mas para escrever isso… Hoje estamos cheias de rabiscos. Pronto, então pomos, os outros dois lados são geometricamente iguais e os triângulos que formam são semelhantes e isósceles. E agora?

As alunas acabaram por registar a justificação que segue na figura 23.

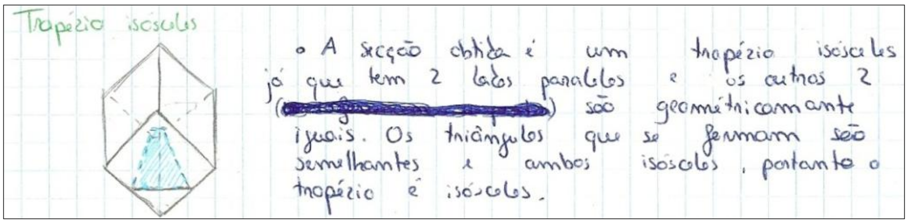


Figura 23. Registo feito pelas alunas para justificar que a secção é um trapézio isósceles.

A partir do episódio de discussão depreende-se que as alunas pretendem explicar que dois lados do quadrilátero são paralelos, por serem lados de triângulos isósceles semelhantes que o líquido formava com duas faces paralelas do cubo, quando este estava na posição indicada na figura, e que são paralelos às diagonais dessas faces, mas ao registarem a justificação, não explicitam claramente o seu raciocínio. Não fornecem ao leitor a indicação de que triângulos se trata nem como é que o facto de os triângulos serem semelhantes e isósceles justifica que a secção é um trapézio isósceles.

Na tarefa *Sólidos Platónicos Truncados* foi registado o número de faces, vértices e arestas para os sólidos iniciais e para os sólidos truncados, as conjecturas formuladas e as justificações encontradas. Nesta tarefa, as alunas não revelaram muita dificuldade em comunicar as suas descobertas e os seus raciocínios, quer por escrito, quer oralmente.

Na discussão no grupo turma, as alunas disseram:

Diana: Nós formulamos três conjecturas, uma para as faces, outra para os vértices e outra para as arestas e verificamos para todos os poliedros regulares e para os truncados que lhe correspondem. Temos que as faces do poliedro truncado são sempre a soma entre as faces do poliedro inicial e o número de vezes que foi truncado, que é igual ao número de vértices do inicial.
Carlos: E como justificaram?
Matilde: Então, vamos truncar cada vértice e …
Diana: Em cada vértice vai dar uma face.
Matilde: Sim e depois ainda temos as faces do poliedro inicial. Assim vamos ter as faces iniciais mais as faces que resultam do corte.

A justificação apresentada pelas alunas convenceu os colegas. Mas, quando comunicaram a conjectura que relacionava as arestas do sólido truncado com elementos do sólido original, a maior parte dos colegas não concordou defendendo a relação que foi sendo discutida à medida que foram apresentados os resultados para cada um dos poliedros truncados, acompanhada da respectiva justificação. As alunas, apesar de não terem encontrado justificação defenderam a sua conjectura. Os colegas acabaram por concordar que a conjectura formulada pelas alunas se verificava para todos os sólidos platónicos e procurou-se encontrar algumas razões.

Na tarefa *A Stella Octangula*, as alunas registaram as conjecturas que foram formulando e a sua justificação e apresentaram alguns cálculos que realizaram com o intuito de estabelecer relações entre os volumes dos tetraedros, da *stella* e do cubo. Mas revelaram dificuldade em comunicar por escrito o seu raciocínio. Como se pode observar pelo diálogo tido pelas alunas, aquando do registo da justificação para a conjectura que formularam acerca do poliedro que resultava da intersecção dos dois tetraedros grandes:

Francisca: Vamos escrever.
Matilde: Ora explicar porquê.
Diana: Porque a intersecção dos dois tetraedros, cada um separa-se em 4 tetraedros, depois como são dois 4+4.
Matilde: Como puseste?
Francisca: É um octaedro porque pela intersecção de dois tetraedros obtemos em cada vértices um triângulo equilátero, sendo 8 vértices obtemos 8 triângulos.
Matilde: Um triângulo! É um tetraedro não é um triângulo.
Francisca: Mas, se cortares dá um triângulo, como obtemos 8 triângulos equiláteros iguais dá um octaedro.
Diana: Um corresponde a cada vértice.
Matilde: Temos 8 vértices. Mas, 8 vértices onde?
Francisca: No cubo. Como temos 8 vértices, vamos ficar com 8 faces que formam o octaedro.
Matilde: Não está muito bem explicado, mas pronto, para nós percebermos está bem, agora para alguém que ler aquilo não vai perceber grande coisa.

Passado algum tempo, as alunas tentaram melhorar a justificação. Durante a discussão alguns alunos foram apresentando as suas justificações, mas estas eram pouco explícitas, então a investigadora perguntou: "Alguém quer apresentar uma justificação mais convincente?" e Matilde disse: "Se imaginássemos que cortávamos os tetraedros pequeninos, de cada corte resultava uma face, que é um triângulo equilátero e como temos 8 tetraedros pequeninos, íamos ter 8 faces e 4 a concorrer no mesmo vértice, por isso é um octaedro". Matilde apresentou uma justificação em que são explicitadas as razões subjacentes ao seu raciocínio. Tentando assim, que o seu pensamento e raciocínio seja entendido pelos outros. Aliás esta foi uma preocupação crescente por parte das alunas, principalmente de Matilde, com o decorrer da experiência.

Na entrevista quando lhes foi perguntado quais as dificuldades que sentiram na realização das tarefas, as alunas referiram:

> Matilde: Escrever o que dizemos, foi uma coisa ... É muito complicado, uma pessoa está ali a falar, é muito mais complicado passar para o papel.
> Inv: Mas, qual é o principal problema?
> Matilde: O nosso problema é que queremos que o que escrevemos se perceba, que as outras pessoas que não ouviram aquilo que nós explicamos percebam, porque é muito mais fácil explicar a alguém, fazer desenhos ou assim, do que escrever num papel e perceber por ali.
> Diana: Eu também acho que é difícil passar para o papel, porque quando nós estamos a falar toda a gente percebe a nossa linguagem e depois ao passar para o papel temos que fazer com cenas matemáticas, com conceitos matemáticos e essas coisas todas.
> Matilde: Tem que se escrever de outra forma que não falamos. Nós por mais que queiramos, não escrevemos da mesma forma que falamos, então é mais complicado às vezes e depois tem que ficar com sentido.
> Francisca: É, quando estamos a falar podemos dizer isto e aquilo e na folha temos que dizer o nome e custa saber o nome.
> Inv: Acham que a realização de tarefas deste tipo vos ajudou de alguma forma a minimizar essa dificuldade?
> Matilde: Sim, por exemplo em relação ao início do ano passado, nós já estamos muito diferentes, porque nós não escrevíamos nada. Nas folhas tínhamos zero.
> Francisca: Agora já estamos mais habituadas. Já não custa tanto.

A maior dificuldade salientada pelas alunas foi a comunicação escrita do seu trabalho. Esta dificuldade estava em tentar explicitar os seus raciocínios de forma a que fossem compreendidos pelos outros e parece estar relacionada com o uso do vocabulário geométrico. As alunas consideraram que na comunicação escrita têm que se ter mais cuidado com a linguagem e vocabulário usado e que por isso é mais difícil. Mas, consideraram também que a realização continuada de tarefas de exploração e investigação as ajudou a minimizar essa dificuldade.

Síntese

As alunas ao longo da realização da experiência foram fazendo alguma exploração inicial das tarefas, quanto à definição de estratégias a desenvolver, organização e registo dos dados. Mas, inicialmente faziam-no questão a questão, sem muitas vezes as relacionar, revelando alguma dificuldade em entender a investigação como um todo, valorizando o chegar a uma conclusão não relacionando as observações iniciais que iam fazendo. Com o decorrer do estudo, mais propriamente a partir da terceira tarefa, a preocupação de que era importante ler todo o enunciado e procurar clarificar o foco da investigação e relacionar as explorações iniciais começou a ser evidenciada.

A formulação de questões foi sempre uma fase da actividade investigativa, à qual as alunas não prestaram muita atenção. Embora por vezes, durante a realização de algumas tarefas, tenham formulado algumas questões de modo preciso, nunca as registaram. Mesmo no final da experiência, em geral, as alunas continuavam a usar o modo afirmativo em vez do interrogativo.

Relativamente à formulação e teste de conjecturas, inicialmente verificou-se uma clara tendência para explorar poucos casos. Na primeira tarefa, as alunas formulavam conjecturas com base em dois ou três casos e estas eram, assumidas como conclusões, sem por vezes realizarem o teste ou então após um número muito reduzido de testes e sem apresentarem qualquer justificação. Procediam como se estivessem a resolver um simples exercício, apresentavam algumas representações e alguns cálculos e uma conjectura era explicitada por ser considerada como uma conclusão. Na segunda tarefa verificou-se alguma evolução, as alunas revelavam preocupação em testar as conjecturas, muito embora nalgumas situações esse teste se tenha reduzido a um número muito limitado de casos, razão pela qual não encontraram contra-exemplos para algumas das conjecturas formuladas que não eram válidas. Nas tarefas seguintes essa evolução foi cada vez mais notória, as alunas manifestavam maior preocupação com o teste das suas conjecturas. Para isso terá contribuído o facto das mesmas se terem apercebido, da sua importância na actividade investigativa. Principalmente, porque para algumas conjecturas que lhes pareciam ser válidas encontraram contra-exemplos e também por terem observado aquando da discussão em grande grupo que o mesmo aconteceu com algumas conjecturas formuladas por outros grupos, que não foram testadas, ou então apenas foram submetidas a um número muito reduzido de testes.

Ao longo do estudo, as alunas formularam conjecturas utilizando o processo de especialização e procura de regularidades, baseando-se na observação empírica e na manipulação de representações e construções de polígonos e sólidos geométricos, na percepção visual de objectos geométricos e em contagens e raciocínio numérico e algébrico. Observou-se que o uso de materiais manipuláveis e a utilização das novas tecnologias facilitaram a formulação e o teste das conjecturas. Ao permitirem realizar experiências particulares contribuíram para a formulação de mais conjecturas e para efectuar testes mais rapidamente, sobretudo as novas tecnologias.

Verificou-se que para as alunas era importante formular o máximo de conjecturas possível independentemente da sua trivialidade ou relevância para a investigação, principalmente na segunda e terceira tarefas, apesar de algumas delas não terem sido registadas. O que parece estar relacionado com o facto de as alunas pretenderem mostrar muito trabalho feito e de por vezes não terem o cuidado de relacionar as suas observações com o foco da investigação.

Inicialmente as alunas tinham tendência a não registar as conjecturas que eram refutadas, faziam-no esporadicamente, mostrando alguma dificuldade em compreender que estas resultavam de uma fase importante do trabalho investigativo. Com o decorrer da experiência essa tendência começou a diminuir. Embora não tenham feito o registo de uma ou outra conjectura que foi refutada, registavam a maior parte.

A justificação e prova de conjecturas constitui uma fase fundamental da actividade investigativa, mas inicialmente, as alunas não sentiam a necessidade de apresentar qualquer justificação para as suas conjecturas, estas eram identificadas como conclusões. Só com a insistência por parte da professora e da investigadora é que a justificação começou a ser considerada. Na segunda tarefa, as alunas mostraram alguma evidência em procurar justificar algumas das conjecturas que resistiram a vários testes, parecia terem começado a entender o seu *estatuto*, mas o facto de quererem apresentar o máximo de resultados possível contribuiu para que não tivessem apresentado justificação para algumas delas. Para outras apresentavam argumentos baseados na aparência visual e na confirmação de propriedades dos quadriláteros através de medições. A partir da terceira tarefa, observou-se uma maior preocupação por parte das alunas em justificar as conjecturas. Apesar de haver necessidade de as incentivar a procurar argumentos lógicos ou pelo menos plausíveis. Nas duas últimas tarefas verificou-se que as alunas já procuravam encontrar argumentos lógicos para a justificação das conjecturas, embora em alguns casos não o tenham conseguido, em parte, por não terem presentes determinados conhecimentos que eram necessários. Contudo, ao longo da experiência, as alunas foram apresentando justificações baseando-se na intuição e percepção visual, em propriedades geométricas e raciocínio aritmético e algébrico. A prova teve uma presença fraca no trabalho das alunas. Na segunda tarefa, na questão em que era pedido para provarem a conjectura, as alunas procuraram fazê-lo, mas encararam a função da prova apenas como verificação. Nalguns casos ela não era acessível a alunos deste nível de ensino, como por exemplo, na tarefa *Secções Planas no Cubo*, noutros houve necessidade de a investigadora apresentar sugestões, fornecer 'dicas' ou proceder a algum questionamento às alunas. Contudo, no final da experiência as alunas procuravam provar as suas conjecturas.

Esta fase da actividade investigativa foi considerada pelas alunas como uma fase difícil, não só porque em várias situações revelaram dificuldade em encontrar argumentos lógicos, mas também pela dificuldade em comunicar os seus raciocínios, sobretudo por escrito.

Inicialmente, as alunas para além de não fazerem o registo de todo o trabalho desenvolvido, quando o faziam era de forma pouco explícita, não conseguiam expor o seu raciocínio de forma clara. A partir da terceira tarefa, observou-se uma maior preocupação, por parte das alunas, em registar as suas ideias e descobertas e em procurar explicar e justificar os seus pensamentos e raciocínios para que os outros os entendessem. No entanto, e apesar de ao longo da experiência se verificar uma evolução positiva, as alunas continuaram a revelar alguma dificuldade em comunicar os seus raciocínios. Essa dificuldade foi mais notória na comunicação escrita de justificações que se baseavam na intuição e percepção visual e parece estar relacionada com a utilização de vocabulário geométrico.

Em termos da comunicação oral observou-se uma evolução mais acentuada. Nas primeiras tarefas, as explicações apresentadas aquando da discussão final, limitavam-se à descrição de procedimentos, com o decorrer da experiência, as alunas nas suas explicações para além de descreverem procedimentos, vão expondo as razões subjacentes ao seu raciocínio e fazendo alguma interpretação dos resultados, tomando-as como objecto de reflexão. As discussões em pequeno grupo e o trabalho sistemático em torno da importância de apresentar explicações e justificações convincente terão ajudado a esta evolução.

É ainda de salientar que com o decorrer da experiência, o grupo tornou-se mais autónomo, as alunas solicitavam cada vez menos o apoio da professora ou da investigadora para a confirmação das suas descobertas. Para tal terá contribuído o facto de a investigadora incentivar as alunas a tomar decisões no ceio do grupo e também terem adquirido uma progressiva compreensão do trabalho investigativo.

5.3. Dificuldades reveladas pelas alunas no âmbito da Geometria

Uso de desenhos

A particularidade dos desenhos e os exemplos protótipos de figuras geométricas levantaram algumas dificuldades para a identificação de determinados polígonos que foram construídos pelas alunas. Por exemplo, na tarefa *Investigação com Quadriláteros* as alunas construíram um quadrado inicial com o auxílio do GSP e, em seguida, o quadrilátero que se obtém unindo os pontos médios dos lados consecutivos desse quadrado. Tendo a construção ficado representada como mostra a figura 24.

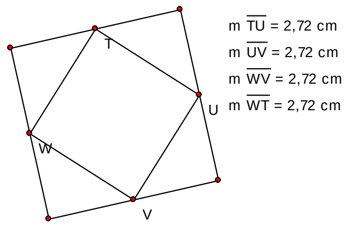


Figura 24. Construção feita pelo grupo e as medidas dos lados do quadrado [WTUV].

Depois de feita a construção, Diana não identificou o quadrilátero inscrito como um quadrado, como se pode observar pela transcrição seguinte:

Diana: Parece um losango.
Francisca: Vamos tirar as medidas.
Diana: É, são iguais.
Matilde: Por serem iguais também pode ser um quadrado.
Diana: Sim, mas olha para a posição, olhem mesmo arrastando.
Matilde: Não é. Então tira as medidas dos ângulos.
Diana: São todos de 90º, é um quadrado.
Matilde: E vê-se também se traçares as diagonais, vão ser iguais. Não podes pensar que os quadrados são sempre assim direitinhos.
Francisca: Se o imaginarmos direito vê-se que é um quadrado.
Diana: Tens razão, mas parecia-me. Agora traçamos as diagonais, não é?

Diana estava com dificuldade em reconhecer o quadrado por este não se assemelhar a um exemplo protótipo, como aliás aconteceu com alunos de outros grupos. A aluna apesar de evidenciar conhecer as propriedades do quadrado, identificou o quadrilátero através do seu aspecto figural. Verificando-se um desequilíbrio entre a componente conceitual e figural do objecto geométrico. A sugestão de Matilde para tirar “as medidas dos ângulos” ajudou Diana a entender que se tratava de um quadrado, foi importante verificar que a amplitude dos ângulos internos era de 90º.

Ainda na mesma tarefa, as alunas ao investigarem os quadriláteros que se obtêm unindo os pontos médios dos lados consecutivos, para os casos particulares dos quadriláteros, depois da construção e da identificação do quadrilátero inscrito no quadrilátero inicial verificaram se o mesmo era um paralelogramo. Por exemplo, para o caso do quadrilátero inicial ser um rectângulo ou um papagaio como mostra a figura 25.

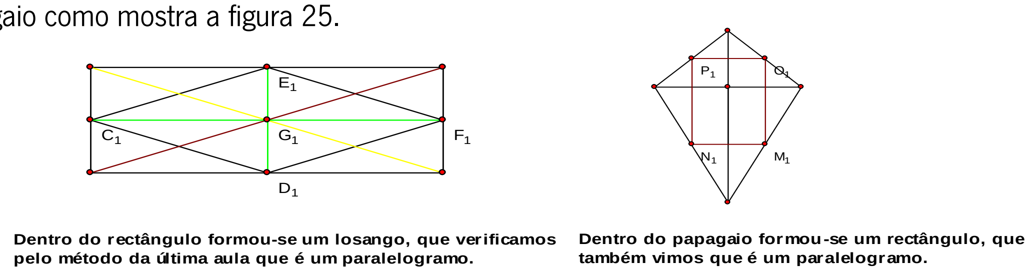


Figura 25. Construções e conjecturas apresentadas pelo grupo para o caso do rectângulo e do papagaio.

Apesar de ter sido provado, anteriormente, que o tipo de quadrilátero que se obtém quando se unem os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero qualquer é um paralelogramo, as alunas sentiram necessidade de confirmar, seguindo o método usado para a prova, que os quadriláteros que obtiveram eram paralelogramos, como se pode observar pelo registo apresentado na figura acima.

A investigadora ao se aperceber dessa verificação interpelou as alunas:

Inv: Porque estão a fazer essa verificação?
Francisca: Para vermos se são paralelogramos.
Inv: Não tínhamos prova na primeira questão que se obtinha um paralelogramo?
Francisca: Este é um rectângulo..., é um paralelogramo.
Matilde: Pois é, já não precisávamos de ver, bastava ver as propriedades.
Diana: São diferentes, mas são paralelogramos.
Matilde: Sim, são todos paralelogramos, porque já tínhamos visto que qualquer um ia ser, não era preciso verificar.
Francisca: Ah, sim.

As alunas só depois desta conversa é que se aperceberam que pelo facto de se ter realizado a prova, não havia necessidade de mais verificações empíricas. Embora as alunas tivessem presente a definição de paralelogramo, o facto dos casos particulares de paralelogramos serem figurativamente diferentes, levou-as a sentir a necessidade da verificação.

Construção de polígonos e representação de objectos tridimensionais

A construção geométrica de quadriláteros no ecrã do computador foi um trabalho que acarretou alguma dificuldade para as alunas. Na tarefa *Investigação com Quadriláteros*, as alunas para estudarem os casos particulares dos quadriláteros construíram cada um deles. O paralelogramo obliquângulo foi construído sem grande dificuldade. Para o quadrado, a construção quando se arrastavam dois dos seus vértices desmanchava-se, mas as alunas não atribuíram muita importância a esse facto, uma vez que quando movimentavam cada um dos restantes vértices a construção parecia manter-se resistente. Passaram então para o losango e acabou por acontecer a mesma situação.

As alunas tinham tentado construir os quadriláteros com base nalgumas propriedades dos mesmos, mas depois colocaram pontos um pouco *ad hoc*, dando à construção no ecrã a aparência da figura geométrica que pretendiam. Após terem verificado que as construções se desmanchavam tentaram procurar qual seria a origem, ao fim de algum tempo, aperceberam-se que de facto não tinham construído os quadriláteros como muito rigor e decidiram então construi-los novamente atendendo às suas propriedades. Por exemplo, para a construção do losango:

> Francisca: Traça um segmento, direito. Agora é melhor marcar o ponto médio, porque senão acontece a mesma coisa. Agora uma linha maior.
> Matilde: Tem que ser perpendicular não é?
> Diana: É. Mas isso não vai ser um papagaio?
> Matilde: Não.
> Diana: Eu acho que é.
> Francisca: Não é nada, está bem, porque marcando ali no ponto médio, os lados [do polígono] vão ser iguais e no papagaio não são todos iguais.
> Diana: Ah! É isso do ponto médio das diagonais.
> Matilde: Agora uma rotação de 180º.
> Diana: Temos que deixar esta construção do meio senão apaga a figura.

As alunas começaram por construir o losango partindo da representação das diagonais, considerando uma delas com maior comprimento do que a outra. Nesta parte mostraram-se mais autónomas e tentaram resolver a situação sem pedir apoio. Observou-se que todas as construções feitas pelas alunas, à excepção do quadrado eram exemplos protótipos dos diferentes quadriláteros, como se pode verificar, por exemplo, pelas figuras 19 e 25. As alunas consideravam essas construções "mais fáceis de fazer e vê-se melhor qual é [o quadrilátero]" (NR).

A representação de sólidos geométricos em duas dimensões gerou alguma confusão no grupo e dificuldades. Na tarefa *Secções Planas no Cubo* era pedido para desenharem o que iam observando. Era a vez de Diana fazer o registo do trabalho desenvolvido, então após terem feito alguma exploração inicial e estabelecido algumas conjecturas, Diana desenhou um cubo observando o modelo com o líquido que estava assente sobre a mesa e a secção que se formava, as colegas iam indicando como devia fazer. A dificuldade surgiu quando Diana tentou representar o cubo estando este assente no plano da mesa por uma das suas arestas. Não conseguia desenhar o que observava. As colegas iam-lhe dando algumas orientações, tais como: "Desenha aquela [aresta] mais inclinada"; "Essa não pode ficar nessa posição, senão não fica bem"; "Traça tipo, uma paralela a esta". Mas, mesmo assim Diana continuava com dificuldades, até que decidiram ser Matilde a desenhar e a fazer o registo do trabalho que iam realizando, mas Francisca também fez algumas representações. A dificuldade de Diana parecia estar relacionada com a habilidade para desenhar e também com a capacidade de visualização espacial. Todavia, quando estavam quase a terminar a realização da tarefa, faltava desenhar o cubo com a secção quando o plano de corte intersectava cinco das suas faces e investigar a situação em que o mesmo intersectava as seis faces do cubo. Diana tentou desenhar o cubo numa posição não-habitual:

> Diana: Vou tentar desenhar agora para ver se consigo.
> Matilde: Não é difícil.
> Diana: Estás a ver não consigo. Como é que vós conseguis?
> Francisca: Tenta lá desenhar o cubo, começa pela parte que está pousada.
> Diana: Mas, não está direito. Estás a ver fica-me sempre mal. Está a ver stôra não consigo desenhar.
> Inv: Continua, aos poucos vais melhorando.

Diana continuou a tentar enquanto as colegas procuravam explicações para o facto de não se obter um pentágono regular quando o plano de corte intersectava cinco faces do cubo. Dali a algum tempo:

> Diana: Este parece que já está mais direito.
> Francisca: Olha, vês.
> Matilde: Ficou mais direito que os meus.
> Diana. Já estou mais contente, consegui.

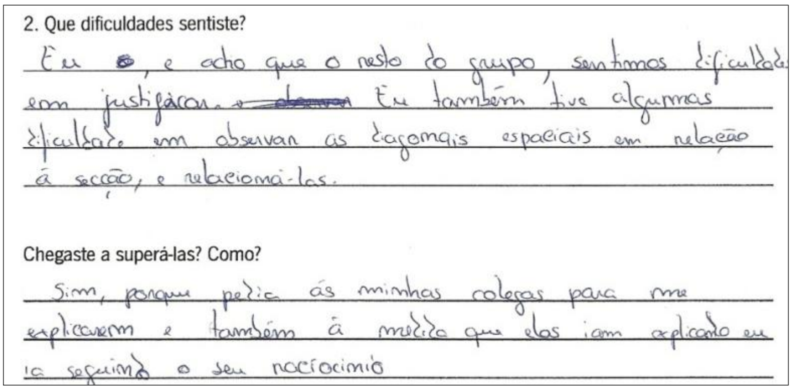
Para Diana era importante conseguir desenhar o cubo quando este estava numa posição não-habitual, ou seja, quando não está assente por uma face num plano horizontal, tal como as suas colegas conseguiam. Quando conseguiu ficou entusiasmada e continuou a treinar. A persistência por parte da aluna e o incentivo e ajuda das colegas contribuíram para que conseguissem ultrapassar a dificuldade.

Visualização

Algumas das conjecturas formuladas e das justificações apresentadas pelas alunas basearam-se na intuição e percepção visual. Mas, nalgumas situações não foi fácil, devido a dificuldades associadas à visualização. Na tarefa *Secções Planas no Cubo* tiveram alguma dificuldade em verificar qual a posição do plano de corte em relação a alguns elementos do cubo. Por exemplo para o caso da secção ser um triângulo equilátero:

> Matilde: A diagonal espacial não é nada [em relação ao plano de corte].
> Inv: Não é nada, o que é isso de não ser nada?
> Matilde: Não é paralela ou assim.
> Inv: Analisem bem a situação.
> Francisca: Estás a ver essa, se vires a outra já concorre.
> Matilde: Ah!
> Francisca: É perpendicular.
> Matilde: Perpendicular!
> Diana: Não percebo. Como é que vês que é perpendicular?
> Matilde: É, não mexas, vai intersectar no meio do triângulo.
> Francisca: Agora já não está muito direitinho outra vez. Se tu imaginares ela a passar deste bico a este, vai ser perpendicular ali mesmo no meio, que é o baricentro, imagina as medianas já vês.

Diana e inicialmente Matilde estavam com dificuldade em percepcionar a posição da diagonal espacial do cubo em relação ao plano de corte. Diana na ficha de reflexão individual sobre a tarefa escreveu, o que se pode observar na figura 26.


2. Que dificuldades sentiste?

Eu, e acho que o resto do grupo, sentimos dificuldade em justificar. ~~[illegible]~~ Eu também tive algumas dificuldade em observar as diagonais espaciais em relação à secção, e relacioná-las.

Chegaste a superá-las? Como?

Sim, porque pedia às minhas colegas para me explicarem e também à medida que elas iam explicando eu ia seguindo o seu raciocínio

Figura 26. Resposta à questão 2 da ficha de reflexão sobre a tarefa, dada por Diana.

A explicação, sobretudo de Francisca contribuiu para que a colega tivesse esclarecido a sua dúvida.

Na tarefa *A Stella Octangula*, as alunas tiveram muitas dificuldades para identificar o poliedro que resulta da intersecção dos dois tetraedros grandes. Principalmente, porque não conseguiam percepcionar e interpretar a representação bidimensional da *stella*. Inicialmente Francisca conjecturou que o poliedro resultante da intersecção seria o sólido ABCD (um dos tetraedros pequenos), mas Diana não concordou argumentando "então o debaixo [outro tetraedro pequeno] também é". Matilde considerou ser "o que dá no meio" e as colegas acabaram por concordar com ela. Mas, após este consenso, o problema estava em conseguirem imaginar o que daria "no meio", como se pode observar pela transcrição:

> Francisca: Vai ficar um prisma e a secção vai ser um pentágono.
> Matilde: Um prisma como?
> Francisca: Porque se fizéssemos o corte de cima e o corte de baixo e depois estes, ficava tipo um tronco, que parece um prisma.
> Matilde: Mas não dá um tronco isso era se cortássemos só um, por exemplo.
> Francisca: Se cortarmos as partes que ficam de fora [os tetraedros pequenos], tanto de um como do outro [tetraedros grandes], aqui assim nesta parte podíamos ver qual era a figura.
> Matilde: Se tirássemos esta parte aqui [sólido ABCD]. Se cortarmos, a figura onde se intersectam os dois, vai ficar um biquinho [vértice] para baixo e outro biquinho para cima.
> Diana: E biquinhos para o lado, por isso vai ficar um losango.

Francisca defendia que cortando os tetraedros pequenos obtinha um "tronco" que para ela era "um sólido parecido com um prisma", por "ter duas bases iguais e depois as faces" (NR), e a secção resultante do corte era identificada como um pentágono porque considerou o sólido ABCD como uma pirâmide pentagonal como se pode observar pela justificação apresentada mais tarde à investigadora: "Estava a contar estes lados [duas arestas do cubo], assim via aqui [no sólido ABCD] 4 faces, mais uma do outro lado e assim ao cortar dava um pentágono" (NR). As outras colegas identificavam a secção resultante do corte do sólido ABCD como um quadrilátero. Não conseguiam visualizar o sólido ABCD como um tetraedro. Neste episódio, como aliás também em outros, pode-se verificar que as alunas na sua discussão utilizam uma linguagem que abrange um tipo de vocabulário pouco convencional, mas que é compreendido por elas. No entanto, na discussão com a turma não o utilizavam procuravam usar linguagem matemática.

A investigadora apercebendo-se da dificuldade das alunas decidiu questioná-las, no sentido de saírem deste impasse:

> Inv: O vértice A será um vértice do cubo?
> Matilde: Ah! É vértice do cubo, é.
> Inv: Então, que sólido é o ABCD?
> Matilde: Esta parte aqui [face] é um triângulo, mas a parte de baixo não é.
> Inv: Não é?
> Matilde: Não sei.
> Diana: Não, porque vai ter este vértice, depois este aqui ao lado, o de trás e este deste lado.
> Francisca: É, é porque vai ter este vértice, este e este [os vértices B, C e D].
> Matilde: É, é outro tetraedro.
> Inv: Por quantos tetraedros pequenos azuis é composta a *stella*?
> Matilde: Por 3.

Diana: E o do meio é outro.
Inv: O do meio? Não percebi.
(As alunas ficaram em silêncio durante 8 segundos).
Francisca: Este azul tem que ter outro do outro lado. Tem 4.
Matilde: E o vermelho outros 4.
(...)
Matilde: Este é um tetraedro, vai ter aqui um triângulo, daqui outro triângulo, a figura vai ter um triângulo daqui, outro daqui, vai ter muitos triângulos. Quantos triângulos vai ter?
Diana: 4 cada um.

As alunas para além de revelarem dificuldades em visualizarem o tetraedro ABCD manifestavam também, dificuldades em compreender as partes ocultas da representação plana da *stella*. O questionamento e sobretudo as contribuições de Francisca ajudaram a conceber uma imagem tridimensional da *stella*. No entanto, ainda persistiram algumas dificuldades relacionadas com a percepção visual, principalmente quando as alunas tentavam procurar relações entre os volumes dos sólidos, nomeadamente entre o cubo e a *stella*. Francisca na ficha de reflexão sobre a tarefa referiu ter superado essas dificuldades na discussão com a turma e ter ficado a conhecer outras relações entre os sólidos, como se pode observar pela figura 27.

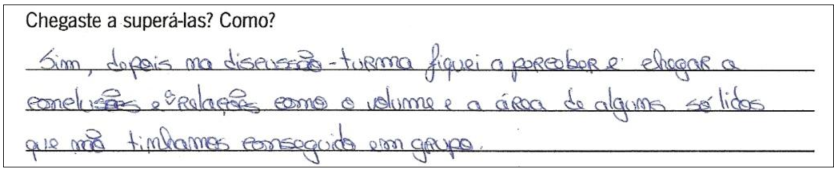

Chegaste a superá-las? Como?
Sim, depois na discussão - turma fiquei a perceber e chegar a conclusões e relações como o volume e a área de alguns sólidos que não tinhamos conseguido em grupo.

Figura 27. Resposta dada por Francisca na ficha de reflexão sobre a tarefa.

Na entrevista, Francisca recorda esta situação em que a discussão em grande grupo a ajudou a superar dificuldades, quando lhes é pedido para darem a sua opinião sobre a fase de discussão na turma:

Diana: Nós estamos com uma ideia na cabeça e depois vem outra totalmente diferente e depois começamos a duvidar daquilo que sabemos e isso é bom para termos a certeza. E muitas vezes ajudou-nos a perceber coisas que não tínhamos percebido.
(...)
Francisca: Vamos perceber outras maneiras de chegar à mesma coisa, também ajudou a melhorar a argumentação e também para sabermos um pouco mais da questão, porque muitas vezes podem ter ficado dificuldades para trás e outros grupos podem ter percebido e assim ficamos a saber.
Inv: Lembram-se de alguma situação em que a discussão em grande grupo vos tenha ajudado a superar dificuldades?
Francisca: Lembro-me daquela que foi difícil para encontrar relações, a da *stella*.
Matilde: E aquela que não encontrávamos explicação para, o vezes três, [tarefa, *Sólidos Platónicos Truncados*]. A maneira deles ajudou-nos a perceber, nós nem

> seguer tínhamos pensado nessa forma, nós vimos logo que era vezes três e ficamos ali muito tempo a tentar perceber e não pensamos noutras maneiras.
> (...)
> Diana: Ah, lembro-me naquela da *stella* por causa da visualização, eu não conseguia ver o que tinha assim no meio e elas explicaram-me e também noutras.

As alunas referiram que a discussão em grande grupo, para além de lhes permitir ficar a conhecer outras formas de pensar, ajudou-as a superar dificuldades e Diana recordou algumas situações em que as colegas a ajudaram a ultrapassar dificuldades.

Síntese

As dificuldades manifestadas pelas alunas na realização das tarefas propostas não se prenderam apenas com a natureza das tarefas, mas também com os conteúdos de Geometria que elas envolviam e que foram trabalhados. Verificou-se que o uso de desenhos levantou algumas dificuldades às alunas, principalmente a Diana, que apesar de mostrar evidências do conhecimento das propriedades dos quadriláteros, manifestou alguma dificuldade em os reconhecer quando estes não se assemelhavam com os exemplos protótipos desses quadriláteros. A ajuda das colegas foi importante para ela superar essa dificuldade. Verificou-se ainda a tendência para a construção de exemplos protótipos dos diferentes quadriláteros. As alunas consideravam essas construções mais fáceis de representar e de identificar. Inicialmente a construção dos quadriláteros era feita atendendo a um número limitado de propriedades dos mesmos, tentavam construí-los, dando-lhes no ecrã do computador a aparência visual do quadrilátero pretendido. Só quando se aperceberam que se continuassem a proceder dessa forma, as construções se desmanchavam, é que começaram a ter cuidado e atender às propriedades específicas de cada quadrilátero, de modo a fazerem construções resistentes.

O aspecto figural dos diferentes paralelogramos levou as alunas a não considerar a prova como suficiente para garantir a validade de uma conjectura. Sentindo a necessidade de verificações empíricas após a prova.

A representação bidimensional de objectos tridimensionais acarretou alguma dificuldade a Diana. Dificuldade essa, relacionada não só com a percepção visual, mas também com a habilidade para desenhar. Mas, com alguma orientação por parte das colegas e algum treino, a aluna foi conseguindo desenhar algumas representações. A interpretação de representações em duas dimensões de objectos tridimensionais foi outra das dificuldades sentida pelas alunas. Inicialmente, não conseguiam formar uma imagem mental de determinados sólidos representados no plano. Com algum questionamento por parte da investigadora e sobretudo, com a discussão em pequeno grupo essas dificuldades foram sendo superadas. Em geral, e tal como é salientado pelas alunas nas fichas de reflexão individual sobre as tarefas e na entrevista, as discussões em pequeno grupo e em grande grupo contribuíram para superar dificuldades.

5.4. Envolvimento das alunas na realização das tarefas

Papeis assumidos pelas alunas na interacção com as colegas

Durante a experiência as alunas raramente trabalharam de forma independente. Na primeira tarefa, *Quadrados em Quadrados*, enquanto a investigadora entregava o enunciado da tarefa aos restantes colegas, Matilde, individualmente, começou por ler o enunciado e desenhou um quadrado inscrito no quadrado inicial representado no enunciado. Mas, após a investigadora ter dito para começarem o trabalho, esta aluna iniciou a interacção lendo o enunciado em voz alta e perguntando às colegas se percebiam e Francisca apresentou uma sugestão:

> Francisca: Rodamos este [o quadrado inscrito no quadrado inicial 3x3 que já estava desenhado no enunciado] e já vemos quantos dão.
> Matilde: Não, reparem, só dá mais outro diferente, eu fiz assim (desenhou no enunciado de Diana, o que tinha feito no dela). Uni os vértices que não estavam ligados e que são intersecção das quadrículas com este lado do quadrado e deu-me este quadrado, mas também não dá mais nenhum, porque já não há mais vértice.
> Francisca: E aqui estes do meio [pontos de intersecção das quadrículas do interior do quadrado inicial]?
> Matilde: Mas, tem que tocar no quadrado inicial para ser inscrito.

A sugestão de Francisca não é aceite por Matilde que explica às colegas o que já tinha feito. No entanto, Francisca continuou a interacção colocando uma questão visando a clarificação e Matilde deu sequência à intervenção no sentido de responder à questão de Francisca. Diana assistiu atenta à interacção das colegas, sem intervir, só quando Francisca estava a desenhar os quadrados é que Diana interveio: "Faz com cores diferentes para se perceber melhor". Durante a realização da tarefa Diana interagiu pouco com as colegas, ia acompanhando o raciocínio delas, dando uma ou outra sugestão ou fazendo algumas questões quando tinha dúvidas. Matilde e Francisca lideraram o discurso.

Na segunda tarefa, *Investigação com Quadriláteros*, era Diana que trabalhava com o computador o que contribuiu para interagir mais com as colegas, como se pode observar pelo episódio seguinte:

Matilde: Vamos ver outra coisa.
Diana: Podemos ver as medidas dos lados.
Francisca: Isso, já vimos, para quê vamos fazer outra vez?
Diana: Já vimos as do grande [quadrilátero qualquer], temos que ver as do pequeno [quadrilátero inscrito].
Francisca: Os lados são todos diferentes, do grande, e os ângulos?
Diana: Tem dois, tem dois obtusângulos e dois agudos.
Francisca: Obtusângulos e acutângulos!
Matilde: Como é que tu vês que tem dois obtusângulos e dois agudos?
Diana: Olha aqui [no ecrã do computador], as medidas dos ângulos.
Francisca: É obtusos e agudos.
Diana: Era isso que eu queria dizer.

Matilde iniciou a interacção, que foi continuada por Diana apresentando uma ideia que defendeu, mas não fundamentou, quando Francisca a questionou. Diana foi respondendo às questões colocadas pelas colegas, baseando-se na observação das medições que ia obtendo com o GSP. Na segunda aula da realização da mesma tarefa foi Matilde que trabalhou com o computador e Diana estava menos comunicativa:

Francisca: Parece um rectângulo.
Matilde: Vamos calcular os lados e os ângulos ... Agora verifiquem por favor (Matilde estava a arrastar um dos vértices do quadrilátero inicial).
Francisca: Os ângulos dão igual.
Diana: É, os ângulos não mexem.
Matilde: Então dentro do losango obtemos um rectângulo. É um paralelogramo não é?
Diana: Um paralelogramo?
Francisca: Sim, como vimos para os outros, se o de dentro é um paralelogramo.
Diana: Ah, Sim.
(...)
Francisca: Stôra, aqui dá um losango não é?
Inv: Porque acham que pode ser um losango? Que te parece Diana?
(Diana ficou em silêncio e a investigadora conversou com a aluna, no sentido de ela participar mais nas discussões).
Matilde: Vamos medir os lados e o resto.
Francisca: Então Diana, tens que falar mais.
Matilde: E que mais temos que medir?
Diana: Os ângulos.
Francisca: Quais são as propriedades do losango Diana?
Diana: Dois ângulos obtusos e lados todos iguais e esta diagonal tem que ser mais pequena do que esta.
Matilde: É precisamente, tem dois ângulos obtusos, dois agudos e os lados são todos iguais. Confirmamos que é um losango não é?

Neste diálogo Diana interagiu pouco. Matilde estava entusiasmada e ia indicando e perguntando o que era preciso fazer. Francisca a partir do momento que a investigadora conversou com Diana, incentivou a colega a participar mais e foi-lhe colocando algumas questões com esse propósito. Diana parecia não se sentir muito à vontade para participar, por ter algum receio de errar. Considerava as colegas mais inteligentes: "Elas são mais inteligentes do que eu, por isso não gostava de dizer as coisas" (EG).

Na tarefa *Poliedros Regulares*, Diana mostrou-se mais comunicativa:

> Diana: Este é um cubo porque tem as faces todas iguais.
> Matilde: Por isso é regular.
> Diana: E os ângulos também são iguais, ou melhor geometricamente iguais.
> Matilde: Sim e tem 8 vértices.
> Diana: Os ângulos e as...
> Inv: Diz Diana. O que pretendias dizer? Não tenhas receio de arriscar.
> Matilde: Diz, ela é boa nas investigações.
> Diana: Não estava correcto. Para além dos lados e dos ângulos. As diagonais do cubo, será que são iguais como no quadrado?
> Francisca: Ah, nós sabíamos calcular as diagonais.

Nesta interacção, Diana avançou ideias no sentido de justificar que o cubo é um poliedro regular e formulou uma questão que depois foi investigada, mas ainda manifestava algum receio em arriscar. Matilde que tinha alguma tendência para liderar o grupo, neste episódio, vai interagindo com Diana incentivando-a a contribuir com as suas ideias. Francisca estava a desenhar a tabela onde iam registar as principais características dos poliedros e por isso participou menos.

A tarefa *Secções Planas no Cubo* foi considerada difícil pelas alunas, principalmente pela dificuldade tida em encontrar argumentos que justificassem as conjecturas e também em comunicar essas justificações, mas todas contribuíam com as suas ideias. Por exemplo, para justificar que uma das secções planas do cubo era um trapézio escaleno:

> Diana: O trapézio é escaleno porque os triângulos [que o líquido forma com as faces do cubo] são escalenos.
> Francisca: Tem dois lados paralelos e os outros dois não são iguais. São concorrentes.
> Diana: Mas, os do isósceles também são concorrentes.
> Francisca: Mas são iguais.
> Diana: Temos que dizer que são concorrentes e diferentes. Oh Francisca, concorrentes também os do isósceles são. E os triângulos são semelhantes, só que não são isósceles.
> (...)
> Diana: Eu acho que temos que pôr que são diferentes.
> Francisca: Mas se já pusemos que são concorrentes.
> Diana: No outro eles também se intersectavam, mas eram iguais e aqui intersectam-se mas são diferentes.
> Matilde: A Diana tem razão, porque no outro eles também são concorrentes e neste são diferentes.

Diana apresentou uma ideia para justificar que a secção era um trapézio escaleno, Francisca continuou a intervenção e acrescentou elementos novos. Entretanto, Matilde estava a representar o cubo com a respectiva secção e não prestou muita atenção à interacção das colegas. Diana considerou que a razão que Francisca apresentou para justificar que os lados não paralelos do trapézio não eram iguais, não era suficiente e perante a insistência da colega ela não desistiu e defendeu a sua ideia apresentando argumentos. Já não se sentia tão insegura e revelava um certo desenvolvimento na sua capacidade de comunicação e de argumentação.

Nas duas últimas tarefas, as três alunas interagiam entre si contribuindo com as suas ideias para a realização do trabalho. Por exemplo, quando tentavam, na última tarefa, estabelecer relações entre os volumes de um tetraedro pequeno e da *stella*, as alunas procuraram obter o volume desse tetraedro em função da aresta do cubo e com esse objectivo tentaram calcular a altura do tetraedro:

> Francisca: A altura [do tetraedro] é perpendicular ao baricentro da base.
> Matilde: E como vamos determinar esta distância? (Apontando para a distância do baricentro a um vértice do triângulo da base).
> Francisca: Fazendo uma circunferência que passasse nestes três pontos [vértices do triângulo da base].
> Diana: Mas, não sabes qual é o raio.
> (Francisca desenhou um triângulo inscrito numa circunferência).
> Francisca: Este lado [do triângulo] é uma corda.
> Diana: Está bem, é uma corda, mas como vais saber o raio?
> Francisca: O triângulo é equilátero não é?
> Matilde: É, Francisca, mas como vais calcular o raio, não vais a lado nenhum.
> Diana: E se formos pela tangente.
> Matilde: Nós sabemos algum ângulo?
> Diana: Sabemos, o triângulo é equilátero sabemos.

Francisca apresentou uma proposta e Matilde continuou a interacção colocando uma questão, com o objectivo de obter clarificação. Francisca explicou a sua ideia, que foi percebida pelas colegas, mas que não lhes pareceu ser viável e então Diana avançou uma nova ideia que posteriormente foi analisada. Observou-se que as ideias de cada uma eram respeitadas e que todas tentavam que as colegas se sentissem à vontade para participar e defender os seus pontos de vista, ideias e raciocínios.

Padrões de interacção

A realização de algumas das tarefas gerou mais discussão do que outras. Na primeira questão da tarefa *Quadrados em Quadrados*, ocorreram momentos de acordo imediato, o que uma aluna propunha as outras iam concordando, como se pode observar no episódio seguinte:

Diana: Agora vão ser 3 [quadrados inscritos no quadrado inicial 4x4].
Matilde: É, e no 5x5 vão ser 4. Depois no nxn são n-1
Diana: Sim.
Matilde: Vamos escrever a conclusão.
Francisca: Então pelo mesmo processo, descobrimos que no 4x4 são 3...

A segunda questão da mesma tarefa, envolveu momentos de alguma discussão, por exemplo, quando as alunas procuraram encontrar relações entre a medida dos lados de um quadrado inscrito e do quadrado inicial nxn:

Inv: Observem o desenho e analisem como obtiveram, por exemplo, o $\sqrt{13}$.
Francisca: O $\sqrt{13}$ veio da raiz de 3 ao quadrado mais 2 ao quadrado.
(...)
Matilde: É raiz de, n-1 ao quadrado mais n-2 ao quadrado.
Francisca: Não dá, como é que obtinhas o $\sqrt{13}$?
Matilde: Ah, fiz para o n igual a 4.
Diana: Eu não percebi.
Francisca: Se o n é 5, então n-1 faz 4 e n-2 faz 3 e assim dava raiz de, 4 ao quadrado mais 3 ao quadrado.
Matilde: Pois já não dá.
Francisca: Mas, o n é 5, para dar 3, pode ser n-2 e o outro...
Matilde: Espera estamos no quadrado que está no 2.º ponto, não é? Então o outro é 2. Acho que assim já dá. Ficava raiz de, n-2 ao quadrado mais 2 ao quadrado.
Diana: Ainda não percebi.
Matilde: Então, estamos no n igual a 5, não é?
Diana: Sim.
Matilde: E tinha de dar a raiz de, 3 ao quadrado mais 2 ao quadrado, assim dava 5-2, que é 3 e depois o 2 porque estás a ver aqui [aponta para a figura que tinham desenhado].
Diana: Já percebi, mas dão dois $\sqrt{13}$.
Francisca: Ah, pois tens razão, se víssemos do outro lado, olha [a representação do quadrado 5x5] dava daqui 2 e aqui 3.
Matilde: Pois, pois podia. São iguais dois a dois.

A partir da dica da investigadora, as alunas tentaram arranjar uma expressão genérica para a medida do lado do quadrado inscrito 2 no quadrado inicial nxn. Matilde apresentou uma proposta, mas Francisca não concordou e pediu explicações a Matilde, no sentido de ela perceber que de facto a proposta não era válida. Então tentam em conjunto procurar uma alternativa. Diana inicialmente não participou na discussão, apenas estava a tentar perceber o raciocínio das colegas, mas não percebeu e pediu ajuda. As duas colegas explicaram-lhe, ajudando-a a entender como chegaram à expressão. Estas explicações contribuíram não só para ajudar Diana, mas também para

Francisca e Matilde se aperceberem que a expressão das medidas dos lados dos quadrados inscritos equidistantes do ponto médio do lado do quadrado inicial era a mesma.

A tarefa *Investigação com Quadriláteros* gerou pouca discussão, os desacordos eram facilmente resolvidos, com base na observação das medições obtidas pelo GSP.

Também na tarefa *Poliedros Regulares* se observaram alguns momentos em que houve pouca discussão, como por exemplo, no seguinte episódio:

Francisca: É regular, é um octaedro
Matilde: É, tem 8 faces congruentes e concorrem 4 em cada vértice.
Diana: Forma-se na mesma, a partir de triângulos equiláteros. Não há nenhum destes com mais faces?
Francisca: Dá para juntar pelo menos mais um triângulo. Ainda dá muitos mais, 240 mais 60 dá 300, ainda dá com mais de um.
Matilde: Se for mais um dá 360 e já não dá.
Francisca: Pois é. Temos que ver para o de 5.

Francisca afirmou que o poliedro obtido era um octaedro e as colegas concordaram e foram avançando justificações. Diana levantou uma questão pertinente para a investigação, na medida em que lhes permitiu investigar se daria para construir poliedros regulares com mais de quatro triângulos equiláteros a concorrer em cada vértice. Francisca continuou a interacção procurando responder à questão formulada, fazendo algum raciocínio aritmético, mas Matilde corrigiu Francisca que concordou com a opinião da colega.

Na mesma tarefa, para além de momentos em que se observou pouca discussão, ocorreram outros em que a discussão entre as alunas foi maior. Por exemplo, na situação em que investigavam, se com quatro pentágonos regulares a concorrer num vértice era possível construir poliedros regulares. Utilizando as amplitudes dos ângulos internos do pentágono regular parecia ser possível, mas experimentado com peças de *polidron* verificaram que não, então colocaram a hipótese de o erro estar no cálculo das amplitudes dos ângulos e procuraram encontrar esse erro:

Diana: Os ângulos [internos do pentágono regular] vão ter todos a mesma amplitude.
Matilde: Nós já vimos isso. Vamos ver isto [o pentágono regular] numa circunferência.
Diana: Nós já dividimos por 5, Matilde.
(Matilde desenha um pentágono inscrito numa circunferência como mostra a figura 28).
Matilde: Este ângulo [ao centro] era igual a este arco.
Diana: Este arco dá 360° a dividir por 5. Que dá estes ângulos e estamos a repetir o mesmo.
Francisca: É, estamos a repetir.
Matilde: Não, não estamos, esta amplitude aqui vai dar 72, esta 72, aqui 72, este 72 e este 72°.

Francisca: E agora?
Matilde: Acho que é metade deste aqui, que dá 108. E 108 x3 dá 324, mais 108 já não dá. Eh, já descobri.
Diana: Eu não percebi.
Francisca: Eu também não percebi muito bem, explica outra vez.
Matilde: Temos a circunferência não é?
Diana: Sim, eu percebi os 72.
Matilde: Lembram-se daquela parte dos ângulos inscritos e ângulos ao centro que demos o ano passado? Este ângulo ao centro era igual à amplitude do arco. Mas, os ângulos que estávamos a ver são ângulos inscritos, ou seja, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco. O que nós estávamos a calcular eram os ângulos ao centro. E os ângulos inscritos dão 108° e é por isso que não dá.

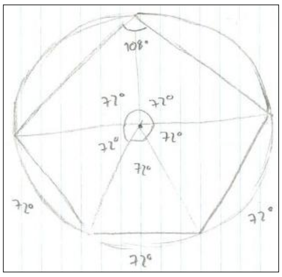
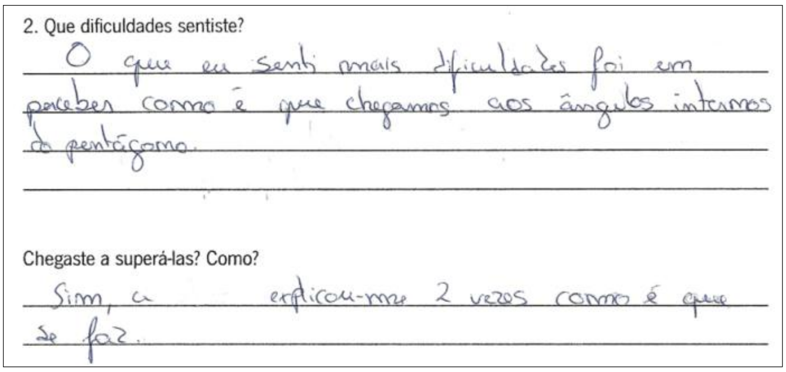


Figura 28. Desenho feito por Matilde, para encontrar a amplitude de um ângulo interno de um pentágono regular.

Na segunda fala Matilde apresentou uma proposta e a discussão desenrolou-se em torno dessa proposta. Diana considerou que essa proposta não resolvia o problema e argumentou que, o que Matilde propunha já tinha sido feito, e esta ideia é corroborada por Francisca, mas não apresentam nova proposta. Matilde não concordou com as colegas e defendeu a sua ideia, apresentando argumentos, mas as colegas não perceberam e pediram explicações. Matilde apoiando-se no desenho que tinha elaborado, explicou às colegas o seu raciocínio, estabelecendo conexões com conhecimentos prévios. Esta explicação baseada em conceitos e propriedades matemáticas convenceu as colegas e contribuiu para superar dificuldades, como se pode verificar pelo que Diana escreveu na ficha de reflexão, figura 29.


2. Que dificuldades sentiste?

O que eu senti mais dificuldades foi em perceber como é que chegamos aos ângulos internos do pentágono.

Chegaste a superá-las? Como?

Sim, a explicou-me 2 vezes como é que se faz.

Figura 29. Respostas dadas por Diana na ficha de reflexão sobre a tarefa 3.

Na tarefa *Secções Planas no Cubo* a procura de justificações para as conjecturas provocou algum conflito entre as alunas, como por exemplo, quando procuravam justificar que uma das secções planas no cubo era um rectângulo:

> Diana: Se tu puseres metade, assim para cada lado vamos saber, é que este [lado da secção] é igual a este.
> Matilde: Porquê? Como sabes que é metade?
> Diana: Porque é metade, está tanto para este lado, como para aquele.
> Matilde: Como é que sabes que está tanto para este como para aquele?
> Diana: Porque assim fica metade mais ou menos.
> Matilde: Não me parece que isso ...
> Diana: Oh Matilde não compliques. Estás mesmo a complicar. Vês eu consigo ver a mesma coisa deste lado e desse. Por isso é igual.
> Matilde: Não estou nada a complicar.
> Francisca: Pronto, o que ela quer dizer é que estes dois lados são iguais, porque o cubo está assim [com uma aresta assente no plano da mesa].
> Matilde: Estes dois lados são iguais, porque este lado tem o mesmo comprimento desta aresta e este desta e por isso são iguais.
> Diana: Sim e são paralelos.
> Francisca: São paralelos?
> Diana: São iguais. Mas também são paralelos.

Diana tenta justificar que dois dos lados do rectângulo são geometricamente iguais, através da quantidade de líquido que observava, ou seja, quando a superfície do líquido é paralela à aresta do cubo que está assente no plano da mesa e por isso afirma "se puseres metade, assim para cada lado ...". Matilde faz algumas perguntas visando clarificação, mas Diana insiste com a sua ideia não acrescentando nada de muito substancial, porque lhe parece óbvio através da percepção visual que os dois lados maiores da secção são geometricamente iguais e considera que a colega está a complicar. Francisca que tinha percebido a ideia de Diana, interveio e tentou redimir o conflito. Matilde apresentou uma alternativa que foi aceite pelas colegas e, em seguida, procuraram completar a justificação.

Na tarefa *Sólidos Platónicos Truncados*, à semelhança do que aconteceu na tarefa 2, os desacordos foram resolvidos rapidamente. A última tarefa, *A Stella Octangula*, gerou mais discussão. Por exemplo, quando as alunas investigavam que tipo de tetraedros correspondiam aos espaços vazios entre o cubo e a *stella*:

> Francisca: Este bocado aqui é igual [aos tetraedros pequenos], ou não será?
> Matilde: É, quer dizer, não sei.
> Francisca: É, é.
> Matilde: Não é nada, esta é a aresta do cubo e isto é um bocado da coisa [da diagonal facial do cubo].
> Francisca: É metade, vimos antes que era metade.

Matilde: Sim, metade da diagonal.
Francisca: Mas este [tetraedro] é igual aos outros.
Diana: Não Francisca, porque a aresta não é o mesmo que a diagonal.
Francisca: Faz aí a diagonal.
Matilde: Francisca a diagonal não é igual à aresta. Temos aqui x, agora era $\sqrt{2}$ x, não dá.

Francisca iniciou a interacção com uma questão e Matilde respondeu, mas não tinha a certeza se o sólido que corresponde ao espaço vazio entre o cubo e a *stella* era um tetraedro regular semelhante a um tetraedro pequeno. Francisca afirmou ser, mas não fundamentou a sua opinião, Matilde que verificou que uma das arestas do sólido era uma aresta do cubo, não concordou com Francisca e tentou explicar, mas não convenceu a colega. Diana argumentou a favor da opinião de Matilde, mesmo assim Francisca continuou pouco convencida foi necessário apresentar-lhe as expressões.

Na entrevista as alunas referiram que a interacção e a discussão no grupo as ajudou a ultrapassar dificuldades e a aprender mais:

Francisca: O trabalho em grupo ajudou a tirar dúvidas e a perceber a forma das outras pensar, muitas vezes eu dizia uma coisa e elas pensavam de outra maneira e assim aprendemos mais.
Matilde: Corrigíamos umas às outras, (...) em grupo há oportunidade de alguém dar por ela e é mais fácil, por exemplo houve casos em que eu ou ela ou ela tinham chegado a conclusões erradas e explicar umas às outras que isso estava mal, ajuda-nos a todas e foi mais fácil chegarmos às conclusões.
Diana: E não tínhamos chegado às conclusões que chegamos se não estivéssemos todas. Elas ajudavam-me a perceber melhor as coisas e eu agora já falava mais.
Matilde: Ela desde o início melhorou muito nisso do falar. Agora já insistia e explicava as ideias dela, no início não. Nós dizíamos para ela falar e a stôra também dizia para ela tomar iniciativa e isso ajudou.
Diana: Eu agora já sabia, quando havia discussão já estou eu lá. Eu agora já explicava o que pensava e já participava na discussão na turma.
Francisca: As discussões e a parte de ir ao quadro também nos fez melhorar a argumentação, porque tínhamos que explicar para os outros perceberem.

As alunas apontam vários aspectos positivos resultantes do trabalho em grupo. Consideraram que em grupo foi mais fácil chegar às conclusões e tiveram oportunidade de explicar umas às outras, corrigir erros e esclarecer dúvidas. E consideraram ainda que melhoraram a sua participação, comunicação e argumentação.

Síntese

No grupo estabeleceu-se um bom ambiente de trabalho. Inicialmente Diana participava pouco, ia seguindo o raciocínio das colegas e interagia esporadicamente, proferindo afirmações curtas. Contudo, sempre que não compreendia o que as colegas iam dizendo, perguntava e dizia que não percebia, mostrando sempre interesse em aprender, o que foi importante para ultrapassar algumas dificuldades. As colegas explicavam-lhe, o que também contribuía para que elas próprias ficassem a perceber melhor e desenvolvessem capacidades de comunicação e argumentação. Nas primeiras tarefas Matilde e Francisca lideravam o discurso, mas apesar disso, as ideias de todas eram submetidas à discussão. Na terceira tarefa Diana mostrou-se mais participativa e mais activa, apesar de ainda revelar algum receio em dar a sua opinião. A partir daí sentiu-se mais à vontade e contribuía com as suas ideias, defendia-as, apresentando argumentos e por vezes formulava algumas questões pertinentes para a investigação. Para isso contribuiu o incentivo das colegas e da investigadora. As alunas apresentavam propostas, questionavam as colegas visando clarificação, apresentavam explicações e justificações e defendiam as suas ideias. Apesar de por vezes, Matilde ter alguma tendência para liderar o grupo, talvez por ter mais facilidades de compreensão e de comunicação, as contribuições de todas eram respeitadas e analisadas.

Os padrões de interacção estabelecidos entre as alunas durante a realização das tarefas variaram desde o acordo imediato até situações de algum conflito. Nas questões mais simples para as alunas, uma avançava uma ideia e as colegas concordavam, considerando a proposta como solução. Noutras situações apesar de se verificar acordo surgia alguma discussão, as alunas contribuíam com os seus pensamentos e reflexões no sentido de procurar validar a proposta avançada por uma das alunas. Ocorreram situações em que se observou algum desacordo que ao fim de uma sequência interactiva curta era resolvido, uma aluna apresentava uma proposta, que era refutada ou então sujeita a uma clarificação, mas rapidamente chegavam a um consenso e em grupo procuravam uma alternativa ou então validar essa proposta.

Observaram-se, no entanto, outras situações em que o desacordo permanecia durante uma sequência interactiva mais longa. Em que a proposta de uma aluna não era aceite pelas colegas ou era sujeita a um pedido de explicação e essa aluna continuava a defende-la, gerando por vezes algum conflito que geralmente ocorria entre duas das alunas e era resolvido pela outra aluna.

Durante estas discussões foram apresentadas e debatidas ideias que envolviam os conteúdos das tarefas, foram colocadas questões e dadas respostas, pedidas e fornecidas explicações que contribuíram para superar dificuldades e segundo as alunas, aprender mais, corrigir erros e esclarecer dúvidas. Estas discussões contribuíram ainda para desenvolver capacidades de comunicação e argumentação, principalmente para Diana que apresentou uma evolução muito positiva ao longo da experiência.

CAPÍTULO VI

O CASO DO GRUPO II

O capítulo inicia com a caracterização dos elementos do grupo e continua com a análise e discussão dos dados, feita tal como no caso do grupo I, através de três categorias: processo utilizados pelo grupo na realização das tarefas de exploração e investigação; dificuldades reveladas pelos alunos no âmbito da Geometria e envolvimento dos alunos na realização das tarefas.

6.1. Luís, Nelson e Pedro

Luís e Pedro de 15 anos de idade são primos e estudaram sempre na mesma escola. Nelson de 14 anos vinha de uma escola básica com 2.º e 3.º ciclos situada a escassos metros da escola onde frequenta o 10.º ano. Os três alunos não tiveram retenções durante o seu percurso escolar e esta foi a primeira vez que trabalharam no mesmo grupo e com tarefas de exploração e investigação.

Luís

Aluno interessado e empenhado, perspicaz e participativo. Gosta de estar atento nas aulas "porque assim aprendo melhor" (EG). É filho único e vive com os pais, cujas habilitações são o 8.º ano de escolaridade. O pai é cozinheiro e a mãe costureira. Costuma estudar todos os dias e anda na escola porque pretende ser Engenheiro Mecânico.

A disciplina em que sente mais dificuldades é a de Português, por não se esforçar muito. A sua preferida é a de Matemática, "acho uma disciplina muito interessante e muito importante para o futuro" (FC). Considera que a Matemática é necessária no dia-a-dia.

Nas aulas de Matemática costumava trabalhar individualmente, mas prefere trabalhar em grupo, porque "acho interessante conhecer as diferentes ideias que surgem e gosto de conviver com os meus colegas" (FC). Diz não sentir dificuldade em argumentar e comunicar as suas ideias aos colegas e ao professor, "consigo-me exprimir sem dificuldade" (FC). As tarefas que mais gosta de realizar nas aulas de Matemática são "os exercícios. Porque são mais simples" (FC). Na entrevista salientou que a actividade mais significativa que já realizou nas aulas de Matemática foi "a que construímos os poliedros regulares, ficamos com uma visão melhor dos sólidos" (EG).

Acha que a Geometria é uma matéria importante e gosta de a estudar. Afirmou não sentir dificuldades na sua aprendizagem, "consigo interiorizar todos os conceitos e não tenho dificuldade em resolver os exercícios" (FC). Considera a aprendizagem da Geometria relevante na sua formação profissional, atendendo à área de estudo que pretende seguir. De entre os métodos assinalados na FC para aprender Geometria, Luís prefere a resolução de exercícios do livro para praticar técnicas, seguindo-se a utilização do computador e de programas de Geometria Dinâmica e a resolução de problemas relacionados com situações reais.

Nelson

Aluno empenhado, mas um pouco distraído, é participativo nas discussões com a turma e colaborativo nos trabalhos de grupo e tem um poder de argumentação razoável, embora apresente algumas dificuldades em termos de comunicação escrita. Tem dois irmãos mais velhos, mas só ele vive com os pais. O pai é empresário e tem o 4.º ano de escolaridade e a mãe é comerciante e tem o 11.º ano. Nelson afirma estudar todos os dias e anda na escola porque pretende ser Engenheiro.

A sua disciplina preferida é a de Educação Física "sentimo-nos com mais liberdade e há um maior contacto com os colegas" (FC). A disciplina em que sente mais dificuldades é a de Físico e Química, mas afirma não saber explicar o porquê.

Considera a Matemática importante para a sua vida no futuro, "pois é a base da maioria dos cursos universitários" (FC) e gosta da disciplina de Matemática, "aumenta o nosso conhecimento sobre números e aumenta a capacidade de raciocínio" (FC).

As actividades mais significativas que já realizou nas aulas de Matemática foram as que envolveram a resolução de "problemas de trigonometria, pois os triângulos são interessantes" (FC), aliás refere que a trigonometria é o conteúdo que mais gostou de estudar. As que menos lhe agradaram foram actividades que envolveram a resolução de equações, por ter sentido dificuldades em perceber como se resolvem. Nas aulas de Matemática costumava trabalhar a pares e afirma gostar de trabalhar em grupo por poder "adquirir e partilhar conhecimentos e chegar a uma resolução mais depressa" (FC).

Nelson diz conseguir explicar a matéria aos colegas e não sentir dificuldades em argumentar e comunicar as suas ideias. Na sua opinião "as pessoas andam na escola para adquirir conhecimentos e resolver as suas dúvidas" (FC). As tarefas que mais gosta de realizar nas aulas de Matemática são "os exercícios, porque podemos treinar muito as formas de resolução sem pensar muito" (FC). Na ficha de caracterização preenchida no início da experiencia afirmou que para ele uma boa aula é aquela em que "o professor dá pouca matéria e há muito treino" (FC), mas na entrevista feita no final da experiência referiu:

> Numa aula é bom trabalhar com investigações e depois resolver exercícios. Gostei mais deste tipo de aulas porque fomos nós a pensar e assim aprendemos melhor. Por exemplo, para estudarmos as secções foi muito melhor como fizemos do que se fosse o professor a explicar, se calhar não tínhamos percebido (EG).

Afirmou gostar de estudar Geometria, no entanto acrescentou: "Existem algumas matérias que não gosto tanto " (FC), por sentir dificuldades em compreende-las. De entre os métodos para aprender Geometria indicados na FC, Nelson apontou em primeiro lugar a utilização de materiais manipuláveis, seguido da exposição pelo professor e da resolução de problemas relacionados com situações reais.

Pedro

Aluno com grande sentido de humor, muito distraído, pouco organizado e com muita dificuldade em termos de comunicação escrita. Vive com os pais e com a irmã de 20 anos de idade, que se encontra a estudar. O pai é inseminador e tem o 12.º ano de escolaridade e a mãe tem um curso superior, mas está desempregada. Pedro tem apoio social escolar - Escalão A e Bolsa de mérito. Afirma andar na escola "para não ir trabalhar" (Ficha sócio-biográfica) e ainda não sabe a profissão que gostaria de ter.

Na ficha de caracterização menciona não ter disciplina preferida e aquela em que tem mais dificuldades é a de Português, "não gosto de escrever, por dar muito trabalho" (FC). Considera que a Matemática é importante para a sua vida no futuro, "preciso dela para um curso superior". Gosta da disciplina de Matemática porque "não tem que escrever muito" (FC).

Pedro refere que todas as actividades que realizou nas aulas de Matemática foram significativas para ele, excepto as que envolviam Geometria, pelo facto de "ter que desenhar" (FC). Nas aulas costumava trabalhar individualmente, mas salienta que é importante trabalhar em grupo, "aprendemos uns com os outros e tiramos dúvidas" (FC). Refere não sentir dificuldades em argumentar e comunicar as suas ideias aos colegas e ao professor, "porque não tenho inibições" (FC).

Relativamente aos conteúdos que mais gostou de estudar na disciplina de Matemática, Pedro respondeu "todos excepto trigonometria" (FC). Em relação à Geometria afirmou "dá muito trabalho e atrapalho-me a desenhar. Não gosto muito de desenhar nem escrever" (EG). O método que Pedro assinalou em primeiro lugar para aprender este tema, de entre os que lhe foram apresentados na

FC, foi a utilização de materiais manipuláveis, seguido da resolução de problemas relacionados com situações reais e da exploração de tarefas de investigação.

6.2. Processo utilizados pelo grupo na realização das tarefas de exploração e investigação

Exploração inicial e formulação de questões

Os alunos na primeira tarefa, *Quadrados em Quadrados*, depois de a investigadora ter lido o enunciado, cada um, individualmente, tentou ver quantos quadrados se podiam inscrever num quadrado 3x3. Passado algum tempo e depois de a investigadora lhes ter solicitado para trabalharem em grupo, os alunos começaram a definir estratégias de registo e organização dos dados:

> Luís: Desenhamos os quadrados não é?
> Nelson: Depois podemos fazer uma tabela e registamos as dimensões, pontos de intersecção...
> Luís: No zero não vale a pena fazer. Começamos pelo 1x1.

Após terem resolvido a primeira questão, Nelson sugeriu, "vamos ler isto [enunciado da questão 2]" e Pedro avançou de imediato uma conjectura, mas Nelson não tinha percebido o que se pretendia:

> Nelson: Estabelecer relações? Mas já está. Já sabemos que temos n-1.
> Luís: Mas aqui diz com diferentes dimensões.
> Nelson: Isso já está na tabela.
> Pedro: Chamamos a stôra.
> Nelson: Aqui dimensões diferentes pode ser 20x20 e assim não é?
> Pedro: Podemos desenhar outro por fora do 3x3, ou assim.
> Nelson: Não, porque assim já não é inscrito.

A questão dois tinha uma estrutura aberta e por isso os alunos sentiam-se perdidos sem saber por onde começar. Foi preciso a professora dar alguma orientação no sentido de eles entenderem o que se pretendia com a questão.

Durante a realização da tarefa, os alunos não formularam questões de forma explícita, procuraram estabelecer relações entre os perímetros dos quadrados, mas proferiram afirmações, como por exemplo: "Vamos ver entre os perímetros, começamos pelo perímetro do inicial".

Na segunda tarefa, *Investigação com Quadriláteros*, Nelson começou por ler o enunciado da primeira questão em voz alta e Pedro representou um quadrilátero. Os alunos não procuraram clarificar o objectivo da investigação e à semelhança do que havia acontecido na primeira tarefa exploraram questão a questão, sem por vezes, as relacionarem, não se preocuparam em entender a investigação como um todo. Não formularam questões de forma explícita, continuaram a usar o modo afirmativo como se pode observar pela transcrição seguinte:

> Luís: Vamos tirar as medidas do de fora para vermos os perímetros.
> Pedro: Não é preciso.
> Nelson: Então temos que estabelecer relações com o de fora, temos que fazer.
> Pedro: Está bem.
> Nelson: Vamos também fazer a área do de fora.
> (...)
> Pedro: Também podemos ver se tem entre os lados.

Avançaram algumas ideias para procurar relações entre um quadrilátero qualquer e o quadrilátero que se obtém unindo os pontos médios dos lados consecutivos desse quadrilátero, mas não usaram o modo interrogativo.

Na terceira tarefa, *Poliedros Regulares*, os alunos começaram logo por tentar construir poliedros, sem se preocuparem em clarificar o objectivo da investigação, sobretudo Pedro que ia construindo poliedros sem analisar se eram ou não regulares e sem mostrar interesse em fazer qualquer registo:

> Pedro: Olha outro, ficou bonito não ficou?
> Nelson: O que interessa ficar bonito ou não, oh.
> Luís: Não destruas isso [poliedro], porque temos de registar.
> Nelson: Outro igual, Pedro.
> Pedro: Ah! Pois é igual, vou ter de desmontar este Luís, para montar mais.
> Luís: Agora espera, esse é igual a este, meu.
> Prof: Estão a construir poliedros regulares?
> Nelson: Ai tem que ser regulares?
> Prof: Então. Ora lê o enunciado.
> Nelson: Investiguem quantos poliedros regulares... Ah pois! Têm que ser só os regulares. Oh Pedro, temos é que investigar quantos são os regulares. Por isso tem calma.

Só depois de a professora solicitar a leitura do enunciado a Nelson é o objectivo da investigação que foi clarificado. Após terem construído o tetraedro e de alguma discussão em torno desse poliedro, Nelson sugeriu aos colegas a definição de estratégias para organizar e registar os dados:

> Nelson: Temos que registar os dados numa tabela, acho que é melhor vermos agora como vamos fazer, para começar a ficar direito.
> Luís: Também temos que fazer a planificação.
> (...)

Nelson: Bom, podemos fazer a tabela atrás para registar as características.
Luís: Fazemos aqui a planificação. Assim.
(...)
Luís: Pomos a tabela e aqui ao lado [da planificação] algumas características.
Nelson: Nós temos que pôr as características para todos não é só desse. Temos que pôr o número de vértices, faces, arestas, ... Que mais Pedro?
Pedro: Ângulos.
Luís: Ai, e podemos pôr se é triângulo ou isso.

Os alunos definiram o tipo de características que pretendiam analisar e registar para cada um dos poliedros. Mas, a formulação de questões a investigar não parecia ser importante para eles. Durante a realização da tarefa, apenas formularam uma ou outra questão de forma clara, como por exemplo: "Com triângulos dará para fazer mais poliedros regulares?".

Na tarefa *Secções planas no Cubo*, Pedro não percebeu o que se pretendia investigar e perguntou aos colegas:

Pedro: Mas é para cortar?
Luís: Não, tu imaginas que isto é como se estivesse cortado.
Pedro: Cortado assim?
Luís: Como se estivesse cortado, como se não pudesse ir mais.
Nelson: Imaginas cortado pela linha do líquido e temos, é que dizer se a secção é um quadrado, rectângulo ou assim.
Luís: Também temos que ver se é paralelo e isso.

A questão colocada por Pedro serviu para que fosse clarificado o objectivo da investigação. Após esta clarificação, os alunos decidiram acerca da organização dos dados na folha de registo. A formulação de questões continuou a ser um aspecto a que os alunos davam pouca atenção. Por exemplo, quando estavam a investigar as secções que se podem obter quando o plano de corte intersecta três faces do cubo, os alunos conjecturaram que uma das secções era um triângulo isósceles, e de seguida, formularam a questão: "Só dará este tipo de triângulo?" procuraram investigar e estabelecerem outras conjecturas, no entanto esta questão não foi registada. O mesmo se observou na realização das tarefas seguintes, *Sólidos Platónicos Truncados* e *A Stella Octangula*, em que os alunos durante o desenvolvimento das tarefas formularam explicitamente apenas uma ou duas questões e estas, resultavam da formulação ou do teste de conjecturas. Na segunda destas tarefas quando pretendiam estabelecer relações entre os sólidos, continuaram a usar o modo afirmativo, como se pode observar pela transcrição seguinte:

Nelson: Temos que estabelecer relações entre este, este e o cubo.
Luís: Oi, é que vai ser.
Nelson: Ora bem, podemos fazer áreas. Temos que fazer a altura, o teorema de Pitágoras, ...

Luís: E volumes.

Na penúltima tarefa, *Sólidos Platónicos Truncados*, a partir da leitura do enunciado, os alunos entenderam a investigação como um todo, isto porque à medida que foram estudando cada um dos sólidos não se limitaram a fazer comparações entre os elementos de um sólido original e do truncado, mas procuraram desde logo estabelecer relações entre esses elementos no sentido de as generalizar.

Pedro faltou à primeira aula de realização da última tarefa, *A Stella Octangula*, os colegas iniciaram a sua exploração pela leitura do enunciado e após essa leitura procuraram fazer uma primeira análise das questões propostas, como se pode observar pelo diálogo seguinte:

> Nelson: Nesta [primeira questão] temos que representar 6 diagonais faciais do cubo.
> Luís: A 2 é que parece mais difícil.
> Nelson: É para estabelecer relações.
> Luís: A *stella* é esta aqui da figura, é feita com as diagonais do cubo, não é?
> Nelson: É, é o que diz aqui.
> Luís: Então o que fizermos na primeira já nos vai servir.

Os alunos com esta exploração inicial procuram relacionar as questões propostas e entender a investigação como um todo.

Na entrevista quando questionados acerca da formulação de questões para investigar, os alunos referiram:

> Luís: Nós estávamos habituados a responder logo. E por isso, por exemplo quando queríamos ver relações pensávamos, bom, vamos ver com perímetros e começávamos a ver como devíamos fazer. Começávamos sempre pelo mais fácil.
> Nelson: Íamos fazendo, mas não nos lembrávamos disso das questões.
> Pedro: É uma adaptação muito difícil do 9.º para o 10.º ano e não estávamos habituados a fazer investigações. Como disse o Luís, nós estávamos habituados a ver os exercícios e responder logo.

Os alunos associam a falta de preocupação em relação à formulação de questões, à falta de hábito. O facto de estarem habituados a um ensino em que as tarefas lhe são propostas completamente formuladas, terá contribuído para a dificuldade e falta de preocupação em formular questões e em procurar estabelecer objectivos de pesquisa.

Formulação e teste de conjecturas

Na primeira tarefa, *Quadrados em Quadrados*, os primeiros dados recolhidos levaram os alunos a formular conjecturas. Na questão um, com base na análise dos casos dos quadrados iniciais 3x3 e 4x4 encontraram algumas regularidades e formularam a conjectura: "O número de quadrados inscritos num quadrado nxn é n-1". Testaram-na, não só representando os quadrados inscritos em quadrados iniciais com outras dimensões, mas seguindo um raciocínio aritmético, por exemplo, para o quadrado inicial 5x5, escreveram: "No quadrado 5x5 existem 16 pontos de intersecção [das quadriculas com os lados do quadrado inicial], cada quadrado utiliza 4 pontos, logo 16 ÷ 4 = 4". Porém, consideram-na como uma conclusão.

Na questão dois pela observação da representação dos quadrados inscritos no quadrado inicial 3x3, Pedro conjecturou: "Nos quadrados inscritos o perímetro é sempre igual e as áreas também", mas Luís contestou a afirmação de Pedro, mencionando: "Não porque há aqui um que não é igual", referindo-se ao quadrado inscrito que obtiveram unindo os pontos médios dos lados do quadrado inicial 4x4. Assim, a conjectura que Pedro tinha formulado foi refutada com base neste contra-exemplo. Após terem efectuado os cálculos para perímetros e áreas dos quadrados inscritos nos quadrados iniciais 3x3 e 4x4, escreveram: "No quadrado 3x3 a área e o perímetro dos quadrados inscritos é igual. No 4x4 existem 2 quadrados inscritos que são geometricamente iguais e outro que a dimensão é diferente". Entretanto, a aula terminou e na aula seguinte, os alunos continuaram com os cálculos para o caso do quadrado inicial 5x5, e conjecturaram "são iguais dois a dois [os quadrados inscritos]", mas não procuraram formular conjecturas genéricas.

Pode-se dizer que os alunos formularam conjecturas com base na análise de um ou dois casos, e a análise de mais exemplos particulares permitiu-lhes fazer alguns testes. No entanto, as conjecturas que foram refutadas não foram registadas pelos alunos.

Na tarefa *Investigação com Quadriláteros*, após construído um quadrilátero qualquer e unidos os pontos médios dos lados consecutivos desse quadrilátero, os alunos avançaram de imediato algumas conjecturas: "É um quadrado"; " É um rectângulo", mas estas conjecturas foram refutadas:

Luís: Mas o rectângulo tem que ter os ângulos de 90°.
Nelson: Pois e este não tem, ora mede.
Luís: Não dá 90°.
Nelson: Mede tudo.
Pedro: Dois ângulos são iguais e os outros dois também.
Luís: Papagaio não é, rectângulo também não, quadrado não. Trapézio também não é.
Nelson: Deve ser um losango.

Esta última conjectura foi também refutada com base na medição dos lados do quadrilátero, obtida com auxílio do GSP. Os alunos perante a dificuldade em identificar o quadrilátero inscrito no quadrilátero inicial, decidiram arrastar um dos seus vértices e depois de alguma discussão e manipulação da construção, conjecturaram que o quadrilátero obtido era um paralelogramo.

Fizeram alguns testes por arrastamento de um dos vértices do quadrilátero inicial e procuraram justificar a conjectura.

Para a questão dois, os alunos decidiram obter algumas medições e Pedro antes de tentar ver se existia alguma relação entre elas avançou uma conjectura: "A área do grande é igual às outras duas juntas", mas os colegas consideram a conjectura trivial, Luís afirmou: "Mas isso é óbvio". Nelson sugeriu a organização dos dados, para "se poder perceber melhor". Pedro observou os valores das áreas dos dois quadriláteros e formulou nova conjectura: "Esta aqui [área do quadrilátero inscrito] é metade da do quadrilátero grande [quadrilátero inicial]", fizeram alguns testes e consideram-na como conclusão.

Na questão três e após a construção de cada um dos quadriláteros particulares foram avançando conjecturas, algumas das quais não foram testadas por lhe parecerem demasiado evidentes, como por exemplo, para o caso do quadrado, no entanto testaram outras, como se pode observar pela transcrição seguinte:

> Nelson: É outro paralelogramo.
> Luís: Agora arrasta para ver se vai dar.
> Pedro: Assim parece um losango.
> Nelson: Dá mais umas voltinhas.

Os alunos com base numa primeira análise das construções feitas e dos dados obtidos pelo GSP, formularam as primeiras conjecturas, e gerando mais dados foram fazendo o teste, muito embora algumas das conjecturas não tenham sido testadas, por lhe parecerem válidas. Continuaram a não registar as conjecturas que se mostravam falsas. Revelavam dificuldades em entender que a refutação e reformulação de conjecturas fazem parte de um processo do trabalho investigativo.

Na terceira tarefa, *Poliedros Regulares*, os alunos construíram o tetraedro, realizaram mais algumas experiências na tentativa de obter mais poliedros formados por triângulos equiláteros, mas não conseguiam obter poliedros regulares:

> Nelson: 1, 2, 3, agora neste tem 1, 2, 3, 4, 5. Não é.
> Pedro: O outro grande que tinha feito também não dá.
> Luís: Pois há vértices que não têm o mesmo número de faces.
> Pedro: Este também não vai dar, a face de baixo é plana e as faces têm que ser todas iguais.

Então conjecturam que com triângulos equiláteros não dava para construir mais poliedros regulares para além do tetraedro. A professora incentivou-os a continuarem a experimentar e passado algum tempo já tinham o octaedro construído. Registaram as características, incluído a soma das amplitudes dos ângulos que concorriam em cada vértice. Entretanto, Pedro diz: “Não dá com 5”, mas Nelson não concordou, “mas ainda dá com 300°”. Então os três alunos tentaram construir o icosaedro. Apesar de terem encontrado mais dois poliedros regulares com faces triangulares não reformularam a conjectura. O entusiasmo em trabalhar com as peças de *polidron* levava a que os alunos se descuidassem e não prestassem muita atenção à reformulação de algumas conjecturas. Contudo, formularam uma nova conjectura “com 6 faces [triangulares] já não dá para construir poliedros regulares”. Tentaram construir poliedros com faces pentagonais e conjecturaram que para além do dodecaedro dava para construir poliedros regulares com quatro pentágonos regulares a concorrer em cada vértice, por terem considerado a amplitude de um ângulo interno igual a 72°. Os alunos tal como aconteceu com as alunas do grupo I, calcularam a amplitude de um ângulo interno do pentágono regular utilizando o mesmo procedimento para o cálculo da amplitude de um ângulo externo. Mas, quando tentaram construir um sólido concorrendo quatro faces pentagonais no mesmo vértice constataram que não era possível e então reformularam a conjectura e procuraram alguns argumentos para a justificar, tendo registado o que mostra a figura 30.

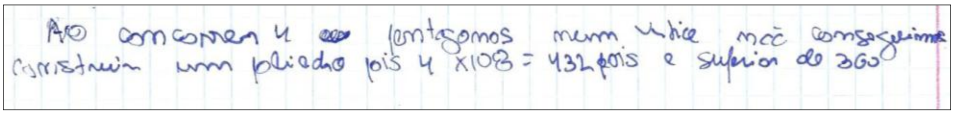


Figura 30. Uma das conjecturas reformuladas pelo grupo e a justificação.

Os alunos formularam conjectura com base no processo de especialização e testaram-nas através da realização de mais experiências particulares com as peças de *polidron*.

Na tarefa, *Secções Planas no Cubo*, através da observação do cubo com o líquido colorido assente sobre o plano da mesa, os alunos conjecturaram que uma das secções obtidas quando o plano de corte intersectava quatro faces do cubo era um quadrado, mas não testaram a conjectura, apenas foi dito por Pedro: “Se enchermos mais [o cubo] obtemos na mesma um quadrado”, mas não concretizaram. Mudando o cubo de posição formularam outra conjectura: “Outra secção é um rectângulo” e estas foram as duas secções que os alunos encontraram quando o plano de corte intersecta quatro faces do cubo. Através da realização de experiências particulares aumentando ou diminuído o líquido no cubo e mudando-o de posição formularam novas conjecturas. Conjecturaram que quando o plano de corte intersecta três faces do cubo, as secções poderiam ser triângulos isósceles, equiláteros e escalenos. Caso o plano de corte intersectasse cinco faces, a secção plana era um pentágono irregular. Mas, os alunos não mostraram muita preocupação em testar algumas destas conjecturas, para algumas ainda movimentavam o cubo para um lado e para o outro, como por exemplo, quando a secção era um triângulo escaleno ou um pentágono irregular, para as restantes não sentiram essa necessidade, quando, questionados, pela investigadora responderam: "Vê-se bem que se estiver assim [na mesma posição] se mexermos ou deitarmos fora líquido, dá o mesmo, nós não fazíamos por isso" (NR).

Na quinta tarefa, *Sólidos Platónicos Truncados*, os alunos pela observação do cubo truncado e com base em raciocínio aritmético, sem efectuar a contagem avançaram as primeiras conjecturas que relacionavam o número de faces, vértices e arestas do cubo truncado com os elementos do cubo:

Nelson: As faces são 6 mais esses cortes. Quantos vértices tem o cubo?
Luís: Tem 8.
Nelson: Pronto, vai ter 8 e 6, 14 faces. É ou não é?
Pedro: O quê?
Nelson: 14 faces.
Luís: O número de vértices é as faces que estão truncadas.
(...)
Pedro: 8x3, quanto é 8x3? 8x3 é... 24, tem 24 vértices. Um triângulo tem 3 vértices e 8x3 dá 24.
Luís: Agora arestas.
Pedro: Isso é um bocado mais complicado.
Luís: Arestas tem mais 24, acho eu. 8x6?

Depois de mais alguma discussão em torno do número de arestas do cubo truncado e da sua relação com elementos do cubo, apresentaram então as conjecturas que mostra a figura 31.

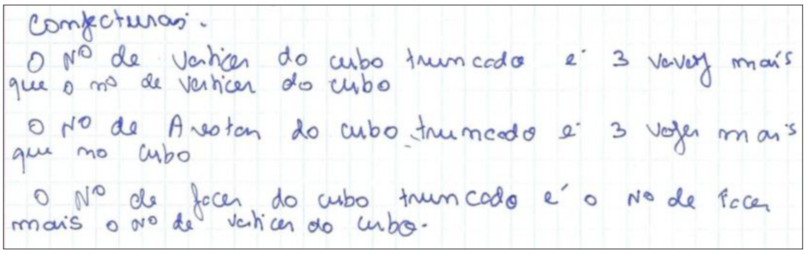
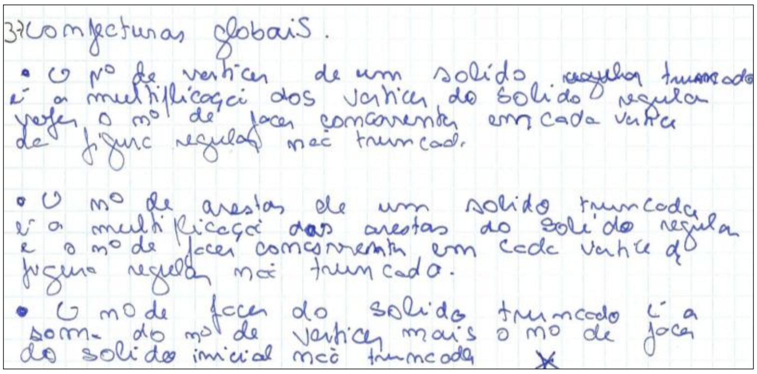


Figura 31. Conjecturas apresentadas pelo grupo para o caso do cubo truncado.

Os alunos fizeram o estudo para os restantes sólidos platónicos e verificaram que no caso do tetraedro regular estas relações se mantinham. O mesmo não aconteceu para o octaedro e então as conjecturas referente ao número de vértices e de arestas foram reformuladas, tendo ficado "o número de vértices do octaedro truncado é 4 vezes mais do que no octaedro" e "o número de arestas no octaedro truncado é 4 vezes mais do que no octaedro". Continuaram o estudo para o dodecaedro e icosaedro e formularam conjecturas genéricas como se pode observar na figura 32.



3) Conjecturas globais.

• O nº de vertices de um solido ~~regular~~ truncado é a multiplicação dos vertices do solido regular pelo nº de faces concorrentes em cada vertice da figura regular não truncada.

• O nº de arestas de um solido truncado é a multiplicação das arestas do solido regular e o nº de faces concorrentes em cada vertice da figura regular não truncada.

• O nº de faces do solido truncado é a soma do nº de vertices mais o nº de faces do solido inicial não truncado

X

Figura 32. Conjecturas genéricas estabelecidas pelo grupo II.

A partir das conjecturas que tinham formulado para cada um dos sólidos platónicos, os alunos procuraram generalizá-las para todos, só que como não tinham feito o teste para todos os casos não se aperceberam que a conjectura que relacionava o número de arestas do sólido truncado com elementos do sólido original não era válida. Só quando procuraram justificá-la é que se aperceberam disso.

Verificava-se alguma tendência para os alunos não realizarem o teste para casos em que lhes parecia que as conjecturas iriam resistir a esse teste e noutras situações aceitarem a conjectura com base num número reduzido de testes.

Na primeira aula de realização da última tarefa, *A Stella Octangula*, os alunos depois de construírem o poliedro que se obtém quando seis diagonais faciais do cubo concorrem em apenas quatro dos seus vértices, conjecturaram que esse poliedro era um tetraedro e revelaram preocupação com o teste da conjectura, analisaram, ainda que implicitamente, a situação em que as outras seis diagonais do cubo concorriam nos restantes quatro vértices.

Na questão dois, Luís avançou uma conjectura para identificar o poliedro que resultava da intersecção dos dois tetraedros grandes que formavam a *stella*: "É outro tetraedro", mas Nelson tinha ouvido as colegas do grupo I, que estavam sentadas na mesa da frente, dizer que era um octaedro e diz: "Ouviste Luís é um octaedro", então procuraram averiguar a validade do que as colegas tinham dito e chegaram à conclusão de que a conjectura era válida.

Para estabelecerem relações entre os volumes do cubo, da *Stella* e dos tetraedros pequenos que compõem a *stella* tentaram definir o volume de um tetraedro grande em função da aresta do cubo, mas não conseguiram. Então perante a sugestão da investigadora de considerarem o volume de um tetraedro pequeno como unidade de volume e com base na visualização da representação em duas dimensões do cubo e da *stella* apresentada no enunciado da tarefa, formularam a conjectura que mostra a figura 33.

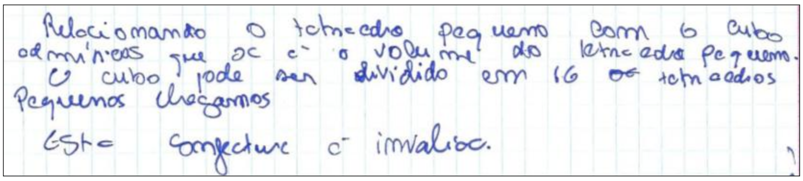


Figura 33. A conjectura formulada pelos alunos para relacionar o volume do cubo com o de um tetraedro pequeno.

Os alunos conjecturaram que o volume do cubo era 16 vezes o volume de um tetraedro pequeno, mas depois de alguma análise consideram que a conjectura não era válida e reformularam-na: "O volume do cubo é 22 do volume do [tetraedro] pequeno", mas Pedro duvidou desta conjectura:

> Pedro: Isso não me parece estar bem, o do cubo dar 22 vezes maior.
> Nelson: Será 22 ou 24?
> Pedro: Nós sabemos que a razão de semelhança [entre os volumes de um tetraedro grande e de um pequeno] é oito, já temos um valor.
> Luís: Se um pequeno tiver 1, o grande tem 8, o outro também 8.
> Nelson: Mas depois falta o espaço do meio [o volume do octaedro].
> Luís: Na *stella* vai haver 8, ... 16, não. Vai haver 12.
> Nelson: Porquê?
> Luís: Porque 8 mais 8 dá 16 e há uma parte que é comum nos dois.

Os alunos acabaram por deixar de lado a conjectura que relacionava o volume do cubo com o de um tetraedro pequeno e a partir do raciocínio de Luís, formularam nova conjectura: "A *stella* é igual a 12 tetraedros dos pequenos", que relacionava o volume da *stella* com o volume de um tetraedro pequeno.

Nesta tarefa, os alunos com base na percepção visual e em algum raciocínio aritmético formularam e reformularam várias conjecturas. Apesar de uma ou outra conjectura que foi refutada não ter sido registada, os alunos registaram a maior parte, o que significa que já entendiam que a refutação e reformulação de conjecturas fazem parte do trabalho investigativo.

Justificação e prova

A justificação e a prova de conjecturas nem sempre estiveram presentes no trabalho dos alunos. Na questão um da primeira tarefa, os alunos formularam uma conjectura acerca do número de quadrados inscritos num quadrado inicial nxn e consideraram-na como conclusão sem sentirem necessidade de a justificar. Depois de a investigadora os ter incentivado a justificar a conjectura, fizeram-no seguindo o raciocínio que tinham feito para explicar que nos quadrados iniciais 3x3 e

4x4 se podiam inscrever, respectivamente, 2 e 3 quadrados, como se pode observar pela transcrição seguinte:

> Pedro: Podemos justificar assim, cada quadrado tem 4 vértice.
> Luís: Cada quadrado utiliza 4 pontos, é melhor.
> Pedro: No 3x3, como temos 8, então vem 8÷4, que dá os 2 quadrados inscritos e no 4x4, temos 12 e 12÷4 dá os 3.
> Luís: No nxn, temos... temos que ver quantos pontos temos ao todo.
> Nelson: Ao todo? Em cada lado temos n-1 e ao todo dá 4 vezes isso, é ou não é?
> Luís: É. Então ao todo dá 4 vezes isso e depois dividimos por 4.
> Pedro: Multiplicamos por 4 o n-1 e depois dividimos por 4 e dá n-1.
> Nelson: Pronto, já está justificado. Agora escrevemos isto.
> Pedro: É isso é, mas vamos chamar a stôra para ver se chega assim.

Os alunos basearam a sua justificação em raciocínio aritmético e algébrico e apesar de estarem todos de acordo com a justificação, não sentiam confiança em si próprios, chamaram a professora com o intuito de validar o que pretendiam escrever.

No sentido de estabelecerem relações entre os quadrados inscritos e o quadrado inicial, os alunos realizaram alguns cálculos que lhes permitiram refutar e refinar conjecturas, mas acabaram por não apresentar justificação para as conjecturas que resistiram a alguns testes. As conjecturas que eles formularam foram generalizadas aquando da discussão com a turma:

> Nelson: No 3x3 e no 5x5 vimos que os quadrados eram iguais dois a dois e no 4x4 também e o do meio era diferente.
> Joaquim: É, nós também vimos isso.
> Inv: Então para o caso geral o que poderiam dizer?
> Cátia: Podemos ver quando n é par e quando é impar.
> Luís: Ah! Os quadrados inscritos são iguais dois a dois para o n ímpar e quando é par também, só o do meio é diferente.
> Inv: Porque é que será?
> Nelson: É por causa de serem simétricos.
> Inv: Simétricos em relação a quê?
> Nelson: Ali ao meio.
> Joaquim: Ao meio do lado do quadrado.

Os alunos avançaram alguns argumentos no sentido de validar a conjectura referida por Luís acerca da relação de igualdade entre os quadrados inscritos equidistantes do ponto médio do lado do quadrado inicial.

Na primeira questão da tarefa *Investigação com Quadriláteros* era pedido aos alunos para provarem a conjectura que estabelecessem relativamente ao tipo de quadrilátero que se obtém unindo os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero qualquer, mas eles não fizeram qualquer tentativa no sentido de a provar, apenas apresentaram uma justificação baseada na aparência visual e na observação de algumas medidas obtidas pelo GSP. Tendo registado o que mostra a figura 34.

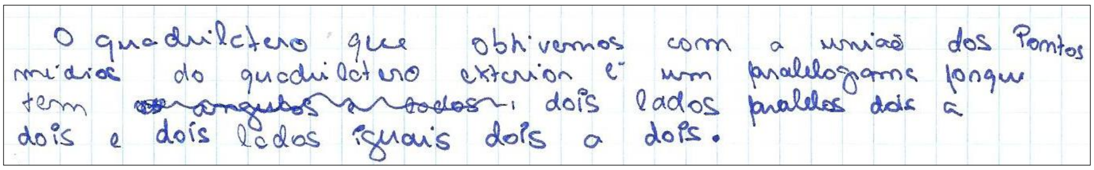

O quadrilatero que obtivemos com a uniao dos Pontos medios do quadrilatero exterior é um paralelogramo porque tem ~~angulos todos~~ dois lados paralelos dois a dois e dois lados iguais dois a dois.

Figura 34. Resposta apresentada pelo grupo para a questão 1 da tarefa 2.

Quando procuraram estabelecer relações entre os dois quadriláteros, os alunos formularam apenas a conjectura que relacionava as áreas dos mesmos e não apresentaram qualquer justificação. O facto de terem realizado alguns testes e verificado que a relação se mantinha invariante por arrastamento de um dos vértices do quadrilátero inicial era suficiente para os alunos. Não sentiam a necessidade da justificação nem da prova. Como aliás se pode depreender pela afirmação de Luís quando a investigadora explicou, aquando da discussão final, que era necessário provar a conjectura: "Então, mas quando arrastamos a razão dava sempre 2". Os alunos ainda não tinham compreendido o *estatuto* de uma conjectura. Contudo, e apesar de os alunos não terem procurado argumentos para provar a conjectura, na discussão com a turma avançaram ideias importantes para a realização da prova.

Para o estudo dos casos particulares de quadriláteros, os alunos procuraram justificar as conjecturas com base na aparência visual e nas propriedades de cada um, que eram confirmadas através das medições que obtinham com o GSP. A figura 35 mostra a justificação para o caso do quadrado.

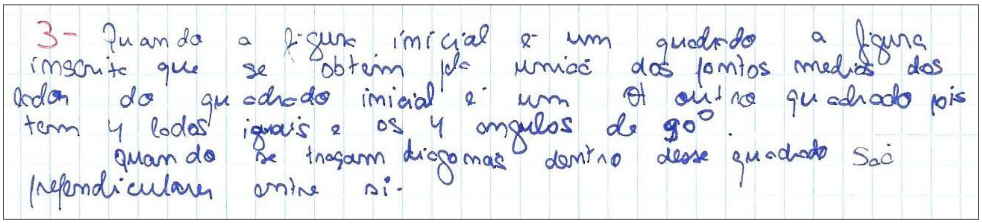
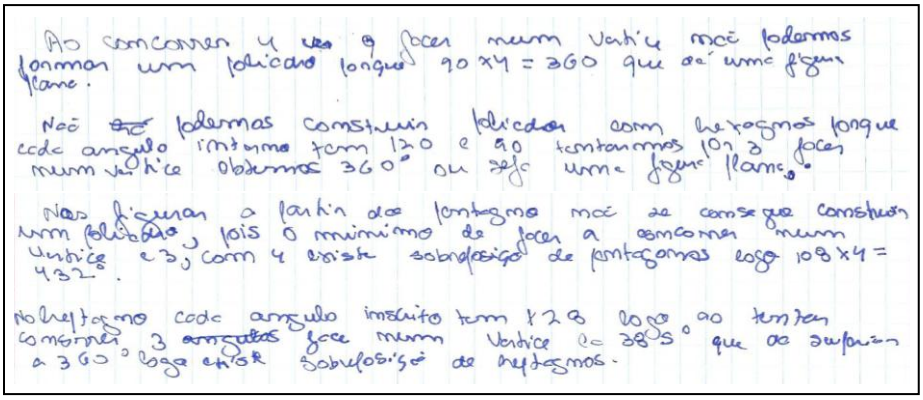

3- Quando a figura inicial é um quadrado a figura inscrita que se obtem pela uniao dos pontos medios dos lados do quadrado inicial é um ~~ot~~ outro quadrado pois tem 4 lados iguais e os 4 angulos de 90°.
Quando se traçam diagonais dentro desse quadrado São perpendiculares entre si.

Figura 35. Resposta apresentada pelo grupo para o caso do quadrado.

Quando os alunos estavam a discutir esta justificação Nelson diz para Luís que estava a fazer o registo: "Não sei se queres pôr que os triângulos que forma são iguais, porque a figura é obtida a partir dos pontos médios e assim os lados são iguais", o que parecia constituir um primeiro passo para a prova, mas os colegas consideram desnecessário referindo: "Está bom assim" e Nelson não insistiu. E acabaram por apresentar a justificação da conjectura com base nas propriedades do quadrado, não sentindo necessidade de a provar.

O facto de no enunciado estar ou não mencionado "justifiquem" ou "validem" as conjecturas, tinha influência na atitude dos alunos relativamente à justificação das mesmas. Nesta fase, os alunos apresentavam alguma justificação apenas quando lhes era solicitada.

Na terceira tarefa, *Poliedros Regulares*, os alunos formularam algumas conjecturas com base nas experiências realizadas com as peças de *polidron* e procuraram encontrar justificações. Conjecturaram que com seis faces triangulares regulares a concorrer num vértice não era possível construir poliedros regulares e apresentaram justificação. O mesmo aconteceu em relação a outro tipo de faces como se pode observar na figura 36.


Ao concorrer 4 ~~ves~~ 9 faces num vértice não podemos formar um poliedro porque 90 x 4 = 360 que dá uma figura plana.

Não ~~…~~ podemos construir poliedros com hexagonos porque cada angulo interno tem 120 e se tentarmos por 3 faces num vértice obtemos 360° ou seja uma figura plana.

Nas figuras a partir do pentagono não se consegue construir um poliedro, pois o minimo de faces a concorrer num vertice é 3, com 4 existe sobreposição de pentagonos logo 108 x 4 = 432°.

No heptagono cada angulo inscrito tem 128 logo ao tentar concorrer 3 ~~angulos~~ face num Vertice é 385° que ultrapassa a 360° logo existe sobreposição de heptagonos.

Figura 36. Justificações apresentadas pelo grupo para algumas conjecturas.

Os alunos justificaram que com quatro quadrados a concorrer num vértice não é possível construir poliedros regulares por se obter uma figura plana e o mesmo acontece com três faces hexagonais regulares quando estas concorrem num vértice. Nestas justificações estão subjacentes as condições de que para se poder construir um poliedro têm que concorrer no mínimo três faces num vértices e a soma das amplitudes dos ângulos que concorrem num vértice tem que ser inferir a 360°. Os alunos apresentam assim, justificações baseadas em raciocínio aritmético e na observação das construções feitas com auxílio das peças de *polidron*. Parece terem começado a entender o *estatuto* das conjecturas. Para tal terá contribuído o trabalho realizado em torno da importância da justificação e prova na tarefa 2.

Na tarefa *Secções Planas no Cubo*, à semelhança do que se verificou na tarefa anterior, os alunos mostraram preocupação em justificar as suas conjecturas. Conjecturaram, por exemplo, que uma das secções obtidas no cubo quando o plano de corte intersecta três das suas faces era um triângulo equilátero e procuraram justificações, como se pode observar na figura 37. Os alunos consideram que a secção obtida era um triângulo equilátero pelo facto dos seus lados serem paralelos a três diagonais faciais do cubo e para além de apresentarem a representação do cubo com a secção, apresentam também um desenho ao lado que, segundo a sua opinião é para "ajudar a perceber melhor isto que escrevemos, o vezes três é para se perceber que são 3 faces como esta [desenhada na figura]” (NR).

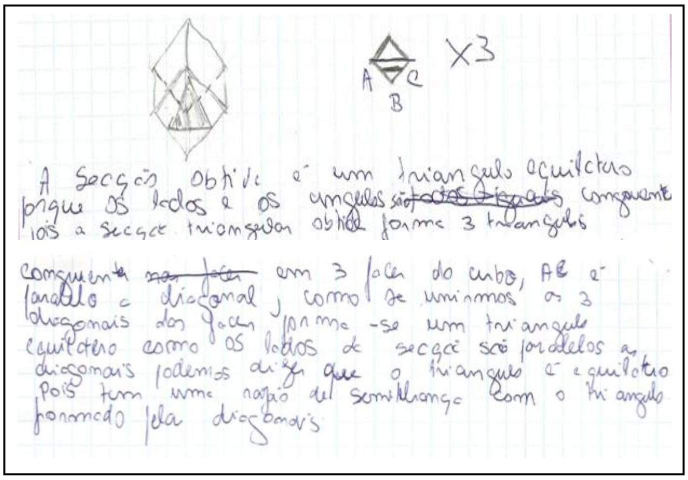


Figura 37. Justificação apresentada pelo grupo para o caso em que a secção plana no cubo é um triângulo equilátero.

As justificações apresentadas pelos alunos para as conjecturas formuladas nas duas últimas tarefas, *Sólidos Platónicos Truncados* e *A Stella Octangula*, basearam-se na percepção visual e em raciocínio aritmético e algébrico. Na primeira destas duas tarefas, os alunos justificaram as conjecturas que estabeleciam a relação entre o número de faces e de vértices de um sólido platónico truncado com elementos do sólido original e quando procuram justificar a conjectura genérica que tinham formulado para a relação entre o número de arestas de um sólido truncado e elementos do original aperceberam-se que a conjectura era falsa:

> Nelson: Falta para as arestas.
> Luís: As arestas, nós temos o número das do sólido regular a multiplicar pelas faces que concorrem num vértice.
> Nelson: Agora porquê?
> Pedro: Em cada vértice vais cortar e em cada corte ficam 3 ou 4 ou 5.
> Nelson: Mas temos que contar as que já tínhamos. Não pode ser a multiplicar.
> Luís: Pois é, temos que somar as que tínhamos mais as novas.
> Nelson: Assim tem mais lógica é ou não é Pedro?
> Pedro: É, tem lógica.
> Luís: Temos que mudar a conjectura e a justificação agora é fácil.
> Nelson: É as que já tinha o sólido mais as que se formam em todos os vértices.
> Pedro: As que se formam tem a ver com as faces que concorrem.
> Nelson: Podemos ver se dá, mas deve dar.

Os alunos fizeram o teste para alguns dos sólidos platónicos e justificaram a conjectura seguindo o raciocínio apresentado.

Na tarefa *A Stella Octangula*, os alunos foram conseguindo pensar em alguns argumentos para justificar que o poliedro que resultava da intersecção dos dois tetraedros grandes era um octaedro e em outros que comprovavam a relação entre os tetraedros pequenos e a *stella*. As relações entre os volumes do cubo e da *stella* e entre o cubo e os tetraedros pequenos foram provadas em grande grupo.

Nesta tarefa, os alunos apesar de alguma dificuldade procuraram encontrar argumentos plausíveis para validar as conjecturas e em alguns casos avançar ideias para as provar.

Os alunos na entrevista quando lhes foi perguntado que dificuldades sentiram no trabalho com as tarefas realizadas responderam:

> Luís: Justificar. Nós vimos a olho e depois para encontrar justificações e escrevermos é mais difícil.
> Pedro: É, fazíamos as coisas, mas depois dizer porquê é difícil.
> Luís: Também por não sabermos as regras todos da matemática dificultou o nosso trabalho, porque quando é o professor a explicar a matéria ele vai dizendo quais as regras e aqui não, nós é que temos que descobrir e ver as relações.
> Nelson: É complicado arranjar justificações para as conjecturas.
> Luís: Porque tínhamos que justificar com muito pormenor, explicar sempre o porquê e às vezes as coisas parecem, mas depois vemos que não está certo.
> Nelson: Custou porque não estávamos habituados, mas assim ficamos com a certeza se o que parece está certo ou não, e aprendemos melhor. Aprendemos que temos que justificar tudo o que fazemos.
> Pedro: Nós não estávamos habituados e ao princípio foi mais difícil porque nós nunca tínhamos trabalhado com investigações (...). Mas, as aulas assim são mais interessantes.

Os alunos referiram dificuldades em justificar as suas conjecturas e que o facto de não estarem habituados a trabalhar com este tipo de tarefa tornou o trabalho mais difícil principalmente no início da experiência. Salientaram também que o desconhecimento de algumas "regras matemáticas" contribuiu para que sentissem mais dificuldades. Contudo, consideraram que aprenderam "melhor" e que as aulas de realização de tarefas de exploração e investigação "são mais interessantes".

Comunicação do trabalho realizado

A comunicação do trabalho realizado, sobretudo da justificação das conjecturas levantou alguma dificuldade aos alunos. Na primeira tarefa, *Quadrados em Quadrados*, os alunos inicialmente não registavam o trabalho que iam desenvolvendo, foi preciso alertá-los para o fazerem. Luís tomou a iniciativa de ser ele a proceder ao registo e a partir daí foi sempre ele que o fez, os colegas salientaram não ter muito jeito para escrever. Nesta tarefa representaram os quadrados iniciais 3x3 e 4x4 e os respectivos quadrados inscritos e a seguir a cada um deles registaram uma conclusão, como mostra a figura 38 para o caso do quadrado inicial 4x4.

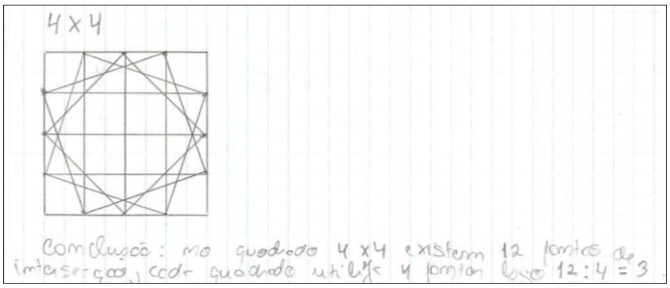


Figura 38. Representação do quadrado 4x4 com os respectivos quadrados inscritos e a conclusão apresentada pelos alunos.

Com a conclusão, os alunos pretendiam explicar que como existem 12 pontos de intersecção das quadrículas com os lados do quadrado inicial 4x4 e como cada quadrado inscrito utiliza quatro desses pontos, então no quadrado inicial só se podem inscrever três quadrados. Mas, não o fizeram de forma muito explícita. Fizeram o mesmo raciocínio para quadrados com outras dimensões, até ao 7x7 e registaram numa tabela, com duas colunas, a dimensão do quadrado (1x1, 2x2, ...) e o número de quadrados inscritos para cada caso. Observando a regularidade existente entre a dimensão do quadrado inicial e o número de quadrados inscritos no mesmo, generalizaram o resultado para o quadrado inicial nxn e formularam uma conjectura que consideraram como conclusão final. Inicialmente os alunos tinham apenas registado a conjectura e após terem sido alertados para a necessidade da justificação, discutiram como deveriam justificá-la e chamaram a professora no sentido de esta validar o que pretendiam registar, mas a professora remeteu a responsabilidade para o grupo e então decidiram apenas completar o que tinham escrito, tendo então registado o que mostra a figura 39.

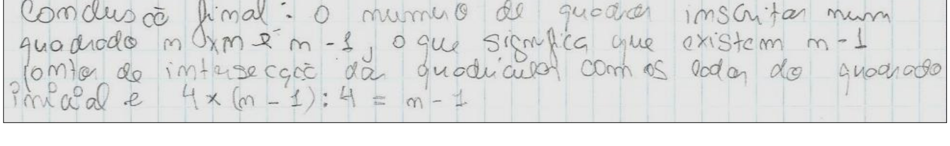


Figura 39. Registo da conjectura e justificação para a questão 1 apresentada pelo grupo.

Verifica-se que apesar de terem utilizado uma expressão genérica para traduzir o raciocínio que tinham feito para os casos particulares, acabaram por não o explicitar.

Na discussão final da tarefa, Nelson explicou o raciocínio que tinham feito para verem quantos quadrados se podiam inscrever em cada quadrado inicial: “Nós vimos de outra maneira, contamos todos os pontos de intersecção e dividimos por 4, que são os que utiliza cada quadrado". Nesta explicação, Nelson expõe essencialmente procedimentos, sem interpretar os resultados.

Para a segunda questão registaram alguns cálculos que efectuaram para determinar o perímetro e a área dos quadrados iniciais 3x3, 4x4 e 5x5 e dos respectivos quadrados inscritos, que contribuíram para a formulação de conjecturas. E efectuaram o registo de algumas dessas conjecturas.

Na tarefa *Investigação com Quadriláteros*, os alunos para a primeira questão registaram apenas uma das conjecturas que formularam acerca do quadrilátero que se obtém unindo os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero qualquer e a respectiva justificação. Na segunda questão depois de terem encontrado uma relação entre as áreas dos dois quadriláteros, decidiram registá-la e pediram o apoio da professora:

> Luís: Vamos escrever, mas...
> Nelson: Escrevemos aquilo que o Pedro disse da soma das áreas dos triângulos.
> Luís: Oh stôra, nós estamos a tentar escrever que a soma das áreas dos triângulos que construímos quando construímos o quadrilátero inscrito é...
> Prof: Mas vocês não têm nenhum triângulo construído no quadrilátero inscrito.
> Luís: Não a soma das áreas dos triângulos de fora.
> Prof: Vocês querem dizer a área que sobra.
> Nelson: Sim, a área deste, este, este e este é igual à do de dentro.
> Prof: Então escrevam o que estão a pensar.

Os alunos pretendiam escrever que a área do quadrilátero inscrito era igual à soma das áreas dos quatro triângulos que o quadrilátero inicial formava com o quadrilátero inscrito, mas acabaram por registar o que mostra a figura 40.

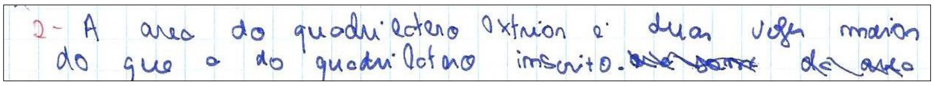

2- A area do quadrilatero exterior é duas vezes maior do que o do quadrilatero inscrito.

Figura 40. Resposta apresentada pelos alunos para a questão 2.

Os alunos mostravam pouca confiança em si próprios para comunicar por escrito os seus raciocínios. Na questão três registaram as conjecturas acerca do tipo de quadrilátero que se obtém unindo os pontos médios dos lados consecutivos de quadriláteros particulares e alguns argumentos para as justificar. Para este registo não revelaram muitas dificuldades, baseavam-se nas propriedades dos quadriláteros.

Na tarefa *Poliedros Regulares* foi representada a planificação de cada um dos cinco poliedros regulares, ainda que com alguma dificuldade, e ao lado, os alunos registaram o número de faces e a soma das amplitudes dos ângulos que concorriam num vértice do poliedro. O número de vértices, faces, arestas e o tipo de face do poliedro foram registados numa tabela, tal como sugerido no enunciado. Para o registo das justificações das conjecturas formuladas, os alunos revelaram dificuldades e pediram apoio, por exemplo para registarem a justificação de que com quatro triângulos equiláteros a concorrer no mesmo vértice se obtinha um poliedro regular:

Nelson: Ora aqui, 60, 60, ..., 240º cada vértice.
Luís: É cada ângulo.
Nelson: Cada vértice.
Luís: Cada ângulo.
Nelson: Só se escreveres cada ângulo da face tem 60º, como são 4 faces, dá 240º.
Luís: Cada ângulo tem.
Nelson: Cada ângulo concorrente no vértice, mas não devia ser cada ângulo, devia ser cada vértice.
Luís. Então chama a stôra.
Nelson: Oh stôra podia vir cá? Aqui devemos pôr cada ângulo do triângulo tem 60º, ou cada vértice do triângulo?

O facto de por vezes os alunos não terem a noção clara dos conceitos dificultou a comunicação escrita do seu raciocínio. É de salientar que Pedro não participou nesta discussão, estava empenhado em construir outros poliedros.

Na discussão com a turma Nelson explicou que com seis faces triangulares regulares não era possível construir poliedros regulares:

Cátia: Nós achamos a planificação deste [icosaedro] um bocado difícil.
Nelson: Foi um bocado difícil, foi. Agora com 6 já não dá.
Inv: E porque é que não dá? Não te esqueças que é importante que a tua justificação convença os outros.
Nelson: Porque cada ângulo de um triângulo mede 60º e concorrendo 6 triângulos num vértice vai dar 6 vezes 60 que dá 360º, que não dá espaço para construir o poliedro. Dá uma figura plana, por isso é que não dá para dobrar e fazer o poliedro.

Nelson nesta explicação explana o seu raciocínio de modo a que os outros o possam entender, comunica as razões que estão subjacentes ao seu pensamento e oferece interpretação dos resultados.

Na tarefa *Secções Planas no Cubo*, os alunos continuaram a revelar dificuldades em comunicar por escrito os seus raciocínios. Por exemplo, os alunos conjecturaram que uma das secções planas no cubo quando o plano de corte intersecta três das suas faces era um triângulo isósceles e depois de terem procurado alguns argumentos para justificar esta conjectura procederam ao seu registo, que lhes gerou dificuldades como se pode verifica pelo diálogo seguinte:

Nelson: Agora como é que vamos pôr?
Luís: É difícil de explicar.
(...)

Nelson: Pomos aí um desenho, só o triângulo, só esta parte.
Luís: Desenha-se aqui. Esta face não é? Desenha-se esta face.
Nelson: Podes desenhar um triângulo rectângulo.
(...)
Nelson: Espera agora, faz aqui uma diagonal. E agora este paralelo, daqui aqui do C ao F. Deste ponto ao outro.
Pedro: Para que outro?
Nelson: Outro, esse não é diagonal. Temos que lhe dar outro nome.
Luís: Só se virmos destes dois, porque fazem duas figuras destas. Para dizer que tem duas iguais.
Nelson: Esta [hipotenusa de um dos triângulo que o líquido forma com as faces dos cubo] é igual a esta. Podemos dizer que a hipotenusa é um lado do triângulo e aquela também, e este é paralela à diagonal.
Luís: Pomos, a hipotenusa do triângulo ABC tem outra igual e forma dois lados do triângulo.
Pedro: Da secção talvez.
(...)
Luís: E o CF é paralelo a uma diagonal.
Nelson: E por isso é um triângulo isósceles.

Os alunos perante a dificuldade em expor o raciocínio, decidiram utilizar para além da linguagem verbal matemática, o que Pirie (1998) designa de representações visuais ou Ponte e Serrazina (2000) por comunicação *icónica*, ou seja, utilizaram desenhos para apoiar a comunicação das suas ideias, como se pode observar na figura 41.

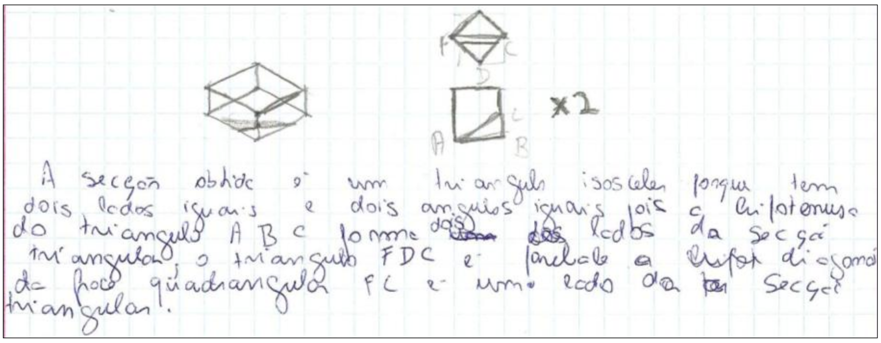


Figura 41. Registo feito pelo grupo para justificar que a secção é um triângulo isósceles.

Pela análise do diálogo depreende-se que os alunos pretendem explicar, recorrendo à intuição espacial, que dois dos lados da secção são geometricamente iguais por serem hipotenusas de dois triângulos rectângulos congruentes, que no registo representam pelo triângulo ABC "x 2", e também pelo facto do terceiro lado CF da secção ser paralelo à diagonal da face que o contém. Mas, ao registarem a justificação e apesar do uso de representações visuais, os alunos não explicitam o seu raciocínio de forma a que o leitor o possa entender. A falta de alguma pontuação e de acentuação, que aliás se verifica em todos os registos que os alunos apresentaram, também contribui para que a escrita fique menos perceptível.

Nesta tarefa, os alunos embora tenham tido dificuldade em comunicar por escrito a justificação para as suas conjecturas, não pediram apoio à professora ou à investigadora para o fazer, já mostravam maior confiança em si próprios.

Na tarefa *Sólidos Platónicos truncados*, os alunos registaram para cada um dos sólidos platónicos e respectivos sólidos truncados o número de faces, vértices e arestas e três conjecturas para cada caso, acerca das relações entre faces, vértices e arestas do sólido truncado e elementos do sólido original. Assim como, o tipo de faces que resultava da truncatura dos sólidos platónicos, as conjecturas genéricas para cada relação encontrada e as respectivas justificações. Nesta tarefa os alunos não revelaram muita dificuldade em comunicar as suas ideias.

Na última tarefa, *A Stella Octangula*, os alunos revelaram alguma dificuldade em comunicar por escrito o trabalho desenvolvido, como se pode verificar pela transcrição do episódio seguinte, em que os mesmos procuram registar a justificação da conjectura que relacionava os volumes da *stella* e de um tetraedro pequeno:

> Luís: Já está, são 12 dos tetraedros pequenos.
> (...)
> Nelson: Vamos escrever. Pedro ajuda.
> Pedro: Se o tetraedro grande equivale a 8 dos pequenos, 8 tetraedros, não risca isso, se separarmos os 8 tetraedros da figura ficamos com um volume equivalente a um tetraedro dos grandes, e os restantes equivalem a um octaedro. Que tem como volume 4 tetraedros pequenos, porque cada tetraedro grande tem 8, como já foi dito, e ainda falta um, mas como área onde estão encontrados.
> Nelson: Volume.
> Pedro: Sim volume.
> Luís: Era mais fácil se justificássemos de outra maneira, cada um tem 8, depois 1,2,3,4 é o que fica visível e dentro tem outros 4.
> Pedro: Mas ainda faltam 8, mas como tem a mesma parte comum divide-se por dois e irá dar 4 tetraedros.
> Nelson: É isso.

Contudo, apesar dessa dificuldade já conseguem comunicar de forma mais clara o seu raciocínio, como se pode observar na figura 42.

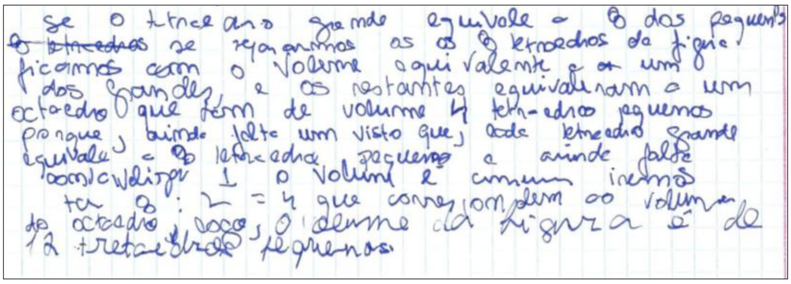


Figura 42. Registo da justificação para a relação entre os volumes da *stella* e de um tetraedro pequeno.

Embora se verifique alguma falta de organização na apresentação da escrita e falta de pontuação, o raciocínio está mais explícito, do que por exemplo o apresentado na figura 41. Apresentam o processo de pensamento e raciocínio, razões que estão por trás desse pensamento, oferecem alguma interpretação e alertam o leitor para a conclusão. Na discussão final a investigadora perguntou que relações encontraram entre o sólido ABCD (tetraedro pequeno) e a *stella*, Francisca referiu que o volume da *stella* era igual ao volume de 12 tetraedros pequenos e Luís concordou com Francisca:

> Luís: É 12 é, a nós também deu 12, porque cada um dos grandes equivale a 8 dos pequenos e...
> Lúcia: Não percebi.
> Luís: A medida do tetraedro grande é o dobro da do pequeno, então o volume do grande vai ser 8 vezes maior do que o do pequeno, por causa de ser ao cubo, se a razão de semelhança das medidas é 2 entre os volumes é 8, percebeste?
> Lúcia: Ah, sim.
> Luís: Como na figura [*stella*] só vemos 4 de cada um, que são os que ficam de fora, dentro ficam os outros 4, que equivale ao volume do octaedro, então 4 de um dos grandes mais 4 do outro faz 8 e mais os 4 do octaedro faz 12.
> Joaquim: Está certo o que ele disse.

Luís baseou a explicação em conceitos matemáticos, procurou estabelecer conexões entre o que ia explicando e conhecimentos prévios e considerou a sua adequação para os outros, mais do que simplesmente para si próprio, procurou que os outros a compreendessem. Aliás a justificação que ele pretendia registar baseava-se no raciocínio apresentado nesta explicação.

Síntese

Nas duas primeiras tarefas, a exploração inicial feita pelos alunos consistiu na leitura e definição de algumas estratégias de registo e organização de dados, não procuraram clarificar o objectivo da investigação, exploravam questão a questão sem muitas vezes as relacionarem. Nas perguntas com uma estrutura mais aberta sentiam-se perdidos sem saber como começar, foi necessário algum apoio e orientação. Não formularam questões de forma explícita, usaram o modo afirmativo em vez do interrogativo.

Na terceira tarefa, iniciaram a exploração sem se preocuparem em clarificar o foco de investigação, só depois de a professora os questionar é que essa clarificação foi feita, assim como a definição de estratégias de organização dos dados e aspectos a analisar. Nas últimas tarefas observou-se alguma preocupação em tentar entender a investigação como um todo, embora na última tenham respondido questão a questão procuraram relacioná-las. A formulação de questões continuou a ser um aspecto a que os alunos não deram muita atenção, ainda que tenham formulado algumas questões de forma precisa, após a formulação ou o teste de conjecturas, não as registaram. Em geral, continuaram a usar o modo afirmativo em vez do interrogativo. Esta falta de preocupação dos alunos em formular questões de investigação, deveu-se, segundo a opinião dos mesmos, à falta de hábito.

O processo de formulação de conjecturas teve lugar em qualquer uma das tarefas. Apesar de muitas delas terem sido formuladas com base na análise de um ou de dois casos e algumas de forma implícita. Inicialmente, após a realização de um número reduzido de testes eram consideradas como conclusões. Nalguns casos, verificou-se que a realização de alguns testes levou ao refinamento de umas conjecturas e à refutação de outras, no entanto estas últimas não eram registadas. Os alunos revelavam dificuldade em compreender que a refutação e a reformulação de conjecturas fazem parte do trabalho investigativo. Verificou-se que os alunos para algumas das conjecturas formuladas não realizaram o teste por terem a convicção de que resistiam ao mesmo. E para outros casos realizavam apenas um número muito reduzido de testes, o que levou a que numa dada situação eles só se tivessem apercebido que a conjectura era falsa quando procuraram argumentos para a justificar. Na última tarefa foram formuladas várias conjecturas e a análise mais pormenorizada das situações levou à reformulação de algumas delas, os alunos mostravam maior preocupação em relação ao teste das conjecturas. Para tal, terá contribuído, o facto de se terem apercebido que um número reduzido de testes ou a sua ausência poderia levar a considerarem válidas conjecturas que se mostravam falsas. Na fase final da experiência a maior parte das conjecturas refutadas já eram registadas. Os alunos mostravam ter adquirido uma progressiva compreensão do trabalho investigativo.

Ao longo da experiência, os alunos formularam conjecturas com base no processo de especialização, embora nalgumas situações elas tenham surgido da análise de um número restrito de casos. Pode-se dizer que formularam conjecturas baseando-se na percepção visual, em raciocínio aritmético, algébrico e também geométrico.

A justificação e a prova de conjecturas nem sempre estiveram presentes na actividade dos alunos. Nas primeiras tarefas as conjecturas eram consideradas como conclusões, só eram apresentadas justificações quando solicitadas. Uma conjectura que resistisse a alguns testes era considerada válida. Os alunos não sentiam a necessidade da justificação e ainda menos da prova das conjecturas. Quando apresentavam justificações, estas baseavam-se na aparência visual dos desenhos e nalgumas medições que obtinham com auxílio do GSP.

A partir da terceira tarefa, esta atitude foi-se alterando, os alunos começaram a entender o *estatuto* de uma conjectura. Foram percebendo o que significava justificar as conjecturas e manifestando preocupação em apresentar argumentos plausíveis que as pudessem validar.

Os alunos consideraram a justificação e prova uma fase difícil do trabalho investigativo, pelo facto de terem que explicar sempre o que iam observando de forma pormenorizada e de por vezes, não terem presente conceitos e regras matemáticas que lhes permitissem justificar as suas conjecturas com mais facilidade. Contudo, salientaram que a necessidade da justificação os ajudou a ter a certeza acerca do que observavam e a aprender melhor.

A comunicação do trabalho realizado, principalmente a comunicação escrita não foi fácil para os alunos. Nas primeiras tarefas discutiam o que deveriam registar e antes de o fazer solicitavam a professora ou a investigadora para validar o que pretendiam escrever, sobretudo em relação à justificação das conjecturas, mostrando uma reduzida confiança em si próprios. Revelavam dificuldades em expressar por escrito os seus raciocínios. Os registos efectuados eram pouco explícitos. Nalguns casos apresentaram justificações em que para além da linguagem verbal utilizaram também representações visuais com o intuito de facilitar a comunicação das suas ideias. Mas, os registos continuavam pouco explícitos para o leitor e a falta de pontuação e acentuações tornava a sua leitura ainda menos perceptível. Todavia, com o decorrer da experiência mostravam mais autonomia para registar as suas ideias e raciocínios. No final da experiência notou-se alguma evolução, ainda que pouco notória. Apresentavam os seus raciocínios de forma mais clara, embora a redacção continuasse algo confusa e com falta de algum rigor.

Observou-se que os alunos revelaram maior dificuldade em comunicar por escrito justificações que se baseavam na percepção visual e intuição, como aconteceu, por exemplo na tarefa *Secções Planas no Cubo* e também na justificação de algumas conjecturas da última tarefa.

A comunicação oral revelou-se mais fácil para os alunos, no entanto, no início da experiência quando comunicavam o seu trabalho, as explicações, em geral, caracterizavam-se pela descrição de procedimentos. Com o decorrer da experiência, as explicações mostravam explicitamente o processo de raciocínio e ofereciam alguma interpretação dos resultados, eram apresentadas de modo a convencer os outros. As discussões em pequeno grupo e o trabalho sistemático feito em torno da importância de se comunicar o nosso pensamento e raciocínio de modo a que os outros o possam entender e ainda o questionamento por parte dos colegas terá contribuído para essa evolução.

6.3. Dificuldades reveladas pelos alunos no âmbito da Geometria

Uso de desenhos

A particularidade dos desenhos e o facto de os alunos associarem determinadas propriedades de objectos geométricos a desenhos que os representam levantou-lhes algumas dificuldades. Na tarefa *Investigação com Quadriláteros*, os alunos depois de ser provado que o quadrilátero que se obtém unindo os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero qualquer é um paralelogramo, consideraram ser necessário verificar se os quadriláteros que se obtêm efectuando o mesmo procedimento para casos particulares de quadriláteros eram paralelogramos. Como se pode observar no episódio seguinte em que discutem acerca do paralelogramo que se obtém quando o quadrilátero inicial é um rectângulo:

> Nelson: Marca os pontos médios.
> Luís: Está bem feito. Agora é um losango.
> Pedro: Vou tirar as medidas… É as medidas dos lados são todas iguais.
> Luís: E os ângulos?
> Pedro: São estes dois iguais e aqueles também.
> Luís: Arrasta. É um paralelogramo?
> Nelson: Os ângulos são iguais dois a dois e os lados são paralelos.
> Luís: Tens a certeza que são paralelos?
> Nelson: São porque este lado tem a mesma medida que o outro e os outros dois também por isso têm que ser paralelos.

O facto de os casos particulares de paralelogramos serem figurativamente diferentes, levava os alunos à necessidade de novas verificações empíricas. A intervenção de Diana aquando da discussão final em que refere que todos os quadriláteros inscritos têm que ser paralelogramos, uma vez que já tinha sido provado contribuiu para que os alunos percebessem que não havia necessidade de verificar que os diferentes quadriláteros que obtinham para os casos particulares de quadriláteros eram paralelogramos:

> Nelson: O quadrado é, o losango…
> Luís: Têm que ser todos, já tínhamos provado.
> Matilde: Todos têm lados paralelos e iguais dois a dois e ângulos também iguais dois a dois.

Na discussão final da tarefa *Poliedros Regulares* quando a propósito de uma conjectura, que as alunas do grupo I formularam, acerca da altura de um tetraedro regular foram discutidos alguns conceitos relacionados com triângulos, os alunos do grupo II defendiam a ideia de que num triângulo apenas se podia traçar uma altura e essa tinha que ficar no interior do mesmo. Cátia tinha ido ao quadro para explicar a noção de circuncentro e como parecia haver alguma confusão em relação à altura de um triângulo, a investigadora pediu-lhe para representar um triângulo e traçar uma altura. Cátia desenhou um triângulo acutângulo considerando a base na posição horizontal em relação ao quadro e traçou uma altura:

Inv: Só podemos traçar aquela altura?
Luís: Só, não há mais.
Nelson: Só, porque a altura vai de um vértice e é perpendicular à base do triângulo.
Joana: A altura é uma perpendicular que vai do vértice mais alto ao lado oposto.
Inv: Então também achas que só podemos traçar uma altura?
Joana: Sim.
Carlos: A base pode ser qualquer uma, podemos traçar três alturas. Posso ir aí stôra?
Inv: Sim claro.
Carlos: Pode ser deste [vértice], desde que seja perpendicular ao lado oposto e deste para o outro lado na mesma.

A investigadora desenhou um triângulo obtusângulo no quadro e pediu a Nelson para representar as três alturas. O aluno representou-as como mostra a figura 43.

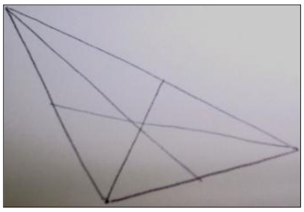


Figura 43. Tentativa do traçado das alturas do triângulo, pelo Nelson.

Para o aluno a imagem mental associada à altura de um triângulo era um segmento de recta que tinha extremidade num vértice e era perpendicular à base do triângulo quando esta está numa posição horizontal em relação ao quadro ou à folha de papel e quando esse segmento se encontra no interior do triângulo. E ainda, que esse segmento era único para cada triângulo, aliás esta era também a ideia de Luís e de outros alunos. Esta imagem mental associada a um exemplo protótipo levantou dificuldades a Nelson em representar as alturas de um triângulo num desenho não estandardizado. O aluno para manter o segmento no interior do triângulo ignorava a perpendicularidade. Após a representação por Nelson alguns alunos referiram:

Alunos: Duas não estão bem.
Inv: Porquê?
Francisca: Não são perpendiculares ao lado oposto do vértice.
Inv: Então como podem ser traçadas?
Artur: Nunca dá para ficar perpendicular.
Carlos: Mas assim não são alturas [de um triângulo].
Joaquim: Pois não, têm que ser perpendiculares.

Matilde: Eu acho que a dali tem que ficar fora.
Nelson: Fora como?
Matilde: Lembro-me de termos feito exercícios que para calcular a altura tínhamos que ver fora.
Cátia: Ah, também me lembro, tínhamos que aumentar o lado, o do outro lado do vértice.
Inv: O lado oposto ao vértice, muito bem.
Nelson: Dizes aumentar assim para este lado? Assim?
Cátia: Sim e agora traças do vértice uma perpendicular.
Nelson: Ah! Assim esta já dá. Não sabia que podia ficar fora. Agora a outra é a mesma coisa.

Esta discussão permitiu ultrapassar a dificuldade sentida por Nelson e também por outros alunos e esclarecer o conceito de altura de um triângulo.

Construção de polígonos e representação de objectos tridimensionais.

Na tarefa *Investigação com Quadriláteros*, os alunos para investigarem os quadriláteros que se obtém unindo os pontos médios dos lados consecutivos de quadriláteros particulares, construíram esses quadriláteros com o auxílio do GSP. Essa construção acarretou-lhe dificuldades que se prendiam com o desconhecimentos das propriedades específicas de alguns dos quadrilátero e com o facto de os tentarem construir *ad hoc*:

Luís: Começamos a construir um quadrado.
Pedro: O de fora é que tem que ser um quadrado não é?
Luís: É:
Pedro: Marcamos os quatro pontos e unimos, agora deslocamos, assim dá mais ou menos.
Inv: Pedro arrasta um dos vértices.
Luís: Eh, desfaz-se.
Inv: Pensem porque será?
Nelson: Se calhar é porque fizeste à sorte. Temos que fazer direito.
Pedro: Mas dá mais trabalho.
Nelson: Oh, o quadrado tem ângulos de 90°.
Luís: Fazemos aquilo da rotação. Representa aí um segmento e depois fazes uma rotação de 90°, para ficar perpendicular.
Pedro: Agora marcamos os outros pontos.
Nelson: Depois não fica direito.

Pedro começou por construir o quadrado dando à construção no ecrã a aparência visual de um quadrado, sem se preocupar em produzir uma construção resistente. Mesmo depois de verificar que a construção se desmanchava e de os colegas lhe darem algumas indicações, continuava a tentar marcar pontos *ad hoc*, mostrando pouca disponibilidade para procurar soluções resistentes.

Para construírem o papagaio revelaram dificuldades por não terem presente as suas propriedades:

Nelson: Podemos fazer agora o papagaio.
Luís: Neste como vamos fazer?
Nelson: Aqui não podemos fazer aquilo das rotações pois não?
Luís: Não sei. Não tem ângulos de 90°, acho eu.
Pedro: Fazemos batota. Marca aí dois pontos para um lado e depois fazemos o outro mais ou menos.
Luís: A stôra não quer assim à sorte.
(...)
Luís: É quase como o losango.
Nelson: As diagonais são perpendiculares não são?
Pedro: Mas, não podemos fazer igual. Chamamos a stôra.
Luís: Podemos começar pelas diagonais.

Os alunos com esta discussão e com algum questionamento por parte da professora conseguiram construir o quadrilátero. Na última construção (trapézio), Pedro mostrou-se mais responsável e procurou produzir uma construção resistente, atendendo às propriedades específicas do quadrilátero. Para isso foi importante a contribuição dos colegas. Observou-se tal como no caso do grupo I, que os alunos construíram exemplos protótipos dos quadriláteros, como se pode verificar, por exemplo para o quadrado, o trapézio e o papagaio na figura 44.

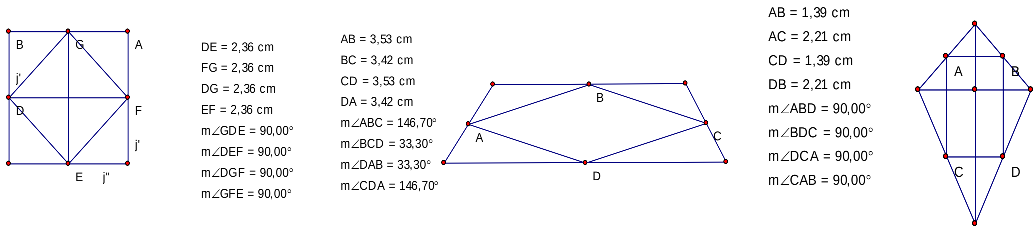
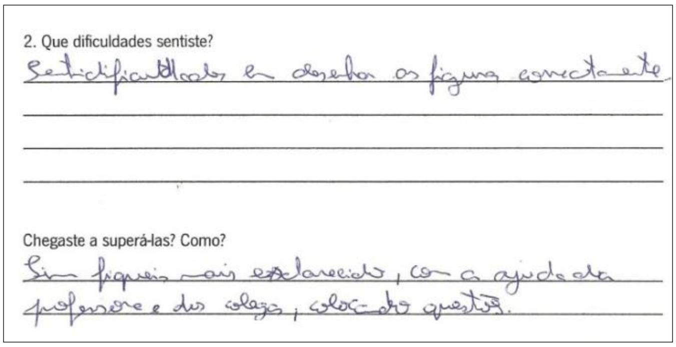


Figura 44. Algumas das construções feitas pelo grupo.

Os três alunos na ficha de reflexão individual sobre a tarefa mencionaram ter sentido dificuldades na construção dos quadriláteros. Por exemplo, Nelson escreveu o que mostra a figura 45.


2. Que dificuldades sentiste?

Senti dificuldades em desenhar as figuras correctamente

Chegaste a superá-las? Como?

Sim fiquei mais esclarecido, com a ajuda da professora e dos colegas, colocando questões.

Figura 45. Respostas a questões da ficha de reflexão sobre a tarefa 2, pelo Nelson.

A ajuda dos colegas de grupo e algum questionamento por parte da professora contribuíram, na opinião de Nelson, para superar dificuldades na construção dos quadriláteros.

A representação de sólidos em duas dimensões colocou muitas dificuldades aos alunos. Na tarefa *Secções Planas no Cubo*, os alunos depois de clarificarem o objectivo da investigação e da definição de algumas estratégias de organização e registo dos dados, conjecturaram que a secção que se obtém quando o cubo está assente por uma das faces num plano horizontal é um quadrado. Após o registo da conjectura, Luís disse: "Eu não sei desenhar cubos", os colegas incentivaram-no e deram algumas indicações, como por exemplo: "Desenha a parte da frente que é um quadrado", "Agora o de cima". Desenhar o cubo em outras posições foi ainda mais complicado. Para desenharem o cubo na posição em que a secção dava um rectângulo experimentaram os três, um em cada folha, para verem qual era o que desenhava melhor para posteriormente, desenhar na folha que era para entregar à investigadora. Nas situações seguintes decidiram que seria à vez, pois os três revelavam dificuldades em representar o cubo nas várias posições. Os dois colegas iam dando indicações ao outro na tentativa de o ajudar numa tarefa que lhe era difícil de realizar:

Luís: Este é que vai ser difícil de desenhar.
Pedro: Faz lá Nelson.
Nelson: Como é que eu faço.
Pedro: Fazes de lado. Tens que inclinar mais.
Nelson: Mais ainda.
Pedro: És como aqueles artistas, só põem um ponto no meio da linha.
Nelson: Agora vou fazer uma linha, mas para fazer para trás é que é.
Luís: Faz esta aqui de lado.

Para que ficasse mais perceptível o que pretendiam comunicar, nalguns casos, os alunos desenharam ao lado as faces do cubo que eram intersectadas pelo plano de corte. Como mostra a figura 46, para o caso em que a secção é um pentágono irregular.

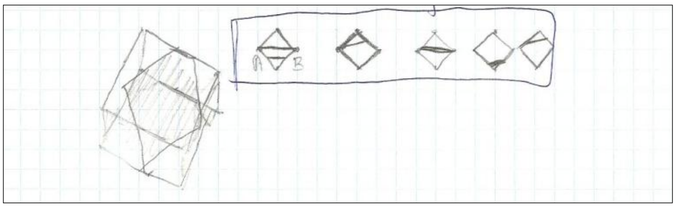


Figura 46. Representação feita pelos alunos para o caso do pentágono irregular.

A percepção visual e a habilidade dos alunos para desenhar afectaram a capacidade dos mesmos para a representação plana do cubo nas várias posições e das respectivas secções. As indicações dos colegas contribuíam para minimizar as dificuldades na representação, apesar de não terem sido totalmente superadas.

Visualização

Algumas das dificuldades apresentadas pelos alunos na formulação e justificação de conjecturas estavam associadas à capacidade de visualização espacial. Por exemplo, na tarefa *Secções Planas no Cubo*, os alunos revelaram dificuldade em percepcionar a posição relativa do plano de corte com elementos do cubo, como se pode observar pelo episódio seguinte, em que os mesmos discutem a posição do plano de corte em relação a arestas e faces do cubo quando a secção produzida no mesmo é um rectângulo:

> Nelson: É um rectângulo porque tem este [lado] igual a este e este também igual àquele.
> (...)
> Luís: Temos que ver as posições.
> Pedro: Esta [face] é perpendicular a esta.
> Nelson: O quê?
> Pedro: Esta é perpendicular a esta.
> Nelson: Não
> Pedro: Esta é perpendicular ao líquido.
> Nelson: Esta quem? A aresta, ai a face. A face também não é.
> Luís: Estas aqui é que são perpendiculares. Tens que esquecer esta parte. Tens que olhar para a superfície do líquido.
> Nelson: A secção obtida é um rectângulo, porque...
> Luís: Porque é paralelo... Este [lado da secção] é paralelo a quê?
> Nelson: Este é paralelo a esta [aresta do cubo]. Vê aqui, esta linha é paralela a esta aqui em baixo.
> Luís: Esta não parece.
> Nelson: Então não é? Se fizeres aqui uma linha não é paralela a esta?
> Pedro: Não é paralela é perpendicular.
> Nelson: Oh Pedro, é perpendicular só se fosse com esta. Olha esta é paralela a esta.
> Luís: Ele tem razão, aquela é Pedro. Esta aresta é paralela a esta e esta a esta.
> Pedro: Não estava a ver. A secção é paralela a estas arestas. Pronto já percebi.

Pedro revelava dificuldades em visualizar a posição do plano de corte em relação, quer a faces, quer a arestas do cubo, não conseguia visualizar que três das arestas do cubo quando ele estava assente no plano da mesa por uma das suas arestas eram paralelas a essa mesma aresta e que a secção era paralela a essas arestas, isto apesar de poder observar o cubo com o líquido. A ajuda dos colegas contribuiu para Pedro percepcionar a posição da secção em relação a elementos do cubo.

Também na tarefa *A Stella Octangula*, os alunos revelaram dificuldade associadas à visualização espacial. Por exemplo, quando procuraram estabelecer relações entre o volume do cubo e dos tetraedros pequenos, os alunos consideraram que o volume do octaedro correspondia ao volume de dois tetraedros pequenos e os espaços entre o cubo e a *stella* correspondiam a seis desses tetraedros:

> Luís: São 8 dos pequenos e agora, o do meio não dá dois tetraedros? O octaedro não se forma a partir de dois tetraedros?
> Nelson: O octaedro sim. Mas temos que saber estes espaços brancos.
> Luís: Aqui olha, assim não dava para pôr outro, aqui assim é outro. Acho que aqui é outro, aqui outro…
> Nelson: Cada espaço branco é um? Então 1,2,3, ..., 6. São mais 6 e agora contar os de dentro.
> Luís: Os de dentro são 8. Mas olha aqui forma dois. Tem 10.
> Nelson: 10 não. Se tem aqui 6 mais 8 são catorze.
> Luís: Catorze, catorze x. Não é. E o de dentro, e o octaedro?
> Nelson: Se já o contaste!
> Luís: Não contei.
> Nelson: No octaedro são mais dois.
> Luís: Pequeninos?
> Nelson: Sim.
> Luís: Então são 16. Vamos registar esta conjectura.

Os alunos primeiro consideraram que pelo facto do octaedro resultar da intersecção de dois tetraedros, o seu volume correspondia ao volume de dois tetraedros pequenos. Depois e apesar de saberem que a *stella* é composta por 8 tetraedros pequenos e pelo octaedro, parecem não ter formado na sua mente uma imagem tridimensional correcta da *stella*, uma vez que consideram apenas um "espaço em branco" por cada face do cubo. Após uma análise mais pormenorizada, os alunos reformularam a conjectura. Na discussão com a turma, os alunos referiram:

> Nelson: Nós primeiro tínhamos visto que o cubo era igual a 16 tetraedros pequenos e depois a 22.
> Lúcia: 22 porquê?
> Nelson: Eram os 16 dos tetraedros grandes, mais os espaços em branco.
> Pedro: Mas, tínhamos que tirar os comuns. O octaedro só tem 4. Por isso, depois tínhamos 18.
> Diana: O cubo é constituído pela *stella* mais pelos espacinhos vazios.
> Inv: E esses espacinhos vazios correspondem a que sólidos?
> Matilde: A tetraedros.
> Inv: E quantos tetraedros desses que correspondem aos espaços vazios temos?
> Rosa: 6.
> Luís: Sim 6, um por cada face.
> Francisca: Não são 6, são 7.
> Carlos: São 8.
> Inv: Já disseram 6, 7 e agora 8.
> Joaquim: São 8 stôra, porque temos 2 em cada face.
> Inv: Vejam bem quantos têm na face da frente.
> Joana: Na da frente temos 1, 2, ... Temos 4.

> (…)
> Joaquim: Sim, 4 na frente.
> Luís: 4 atrás, 8.
> Nelson: Aqui deste lado só já podemos contar 2 e do outro, outros 2, faz 12.

Foi através desta discussão que os alunos ficaram a saber que os espaços entre o cubo e a *stella* correspondiam a 12 tetraedros irregulares e a partir daí estabeleceu-se a relação entre o volume do cubo e dos tetraedros pequenos.

Pedro na ficha de reflexão sobre a tarefa mencionou que o grupo e a discussão com a turma contribuíram para superar dificuldades em visualizar os sólidos e em estabelecer relações entre os volumes dos mesmos, como mostra a figura 47.

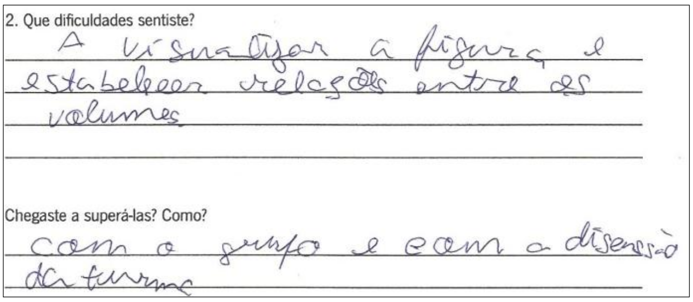

2. Que dificuldades sentiste?
A visualizar a figura e estabelecer relações entre os volumes
Chegaste a superá-las? Como?
com o grupo e com a disenssão da turma

Figura 47. Respostas dadas por Pedro a questões da ficha de reflexão sobre a tarefa 6.

Os alunos na entrevista mencionaram que o trabalho em pequeno grupo e a discussão na turma ajudaram a superar dificuldades e a conhecer outras estratégias de resolução e formas de pensar:

> Pedro: [O trabalho em grupo] ajudou, o que um não sabia, o outro dava uma ideia e discutimos essa ideia e depois vão surgindo outras, que nos vão ajudar a perceber melhor as coisas. Em grupo se um percebe menos uma coisa o outro ajuda e explica. Naquela tarefa que era para fazer o quadrado e os outros [tarefa *Investigação com quadriláteros*], eu não sabia construir um quadrado no programa [GSP], fazia à sorte e depois o Luís disse, temos que fazer uma rotação de 90° para o outro lado ficar perpendicular e isso já me ajudou.
> Nelson: E aquela que era para construirmos os poliedros fui eu que expliquei, porque é que alguns davam, por causa daquilo dos ângulos à volta dos vértices que eles não percebiam.
> Inv: E a discussão na turma?
> Luís: A discussão com a turma ajuda sempre, porque uns desenvolvem uma coisa, outros outra e depois nós ficamos a saber mais.
> Nelson: E também quando nós apresentamos as nossas ideias, os outros podem não concordar e assim ficamos a saber se está certo ou não. Porque no nosso grupo podemos pensar que está certo o que fizemos e depois com a discussão vemos que não está e eles explicam porque está mal.

Pedro: Na discussão tínhamos as ideias de 20 pessoas e isso fez com que ficássemos a conhecer maneiras de pensar diferentes e aprendemos sempre coisas novas e também esclarecemos dúvidas.

A opinião dos alunos acerca do trabalho de grupo é bastante positiva, o facto de cada um apresentar a sua ideia e esta ser discutida em grupo e de uns apoiarem e explicarem aos outros quando tinham dúvidas contribuiu, segundo eles, para ultrapassar dificuldades. Consideraram que a discussão na turma lhes permitiu aprender coisas novas e esclarecer dúvidas.

Síntese

Os alunos ao longo da realização da experiência de ensino revelaram dificuldades que se prendiam com a natureza das tarefas, mas também com os conteúdos de Geometria trabalhados. Os desenhos são fundamentais para a aprendizagem de conceitos geométricos, mas o uso de exemplos particulares de desenhos levantou algumas dificuldades aos alunos. Nomeadamente, a Nelson, pelo facto de associar o conceito de altura de um triângulo a um exemplo protótipo de triângulo acutângulo. A imagem mental do conceito associada a esse exemplo levou a que não o soubesse aplicar em outros triângulos.

O facto dos casos particulares dos paralelogramos serem figurativamente diferentes conduziu os alunos, à semelhança do que aconteceu com as alunas do grupo I e também com alunos de outros grupos, à necessidade de verificarem se o quadrilátero que obtinham unindo os pontos médios dos lados consecutivos de cada um dos quadriláteros particulares era um paralelogramo, mesmo depois de ter sido realizada a prova. Apesar de os alunos conhecerem a definição de paralelogramo, revelavam dificuldades em reconhecer as várias formas correspondentes a essa definição.

A construção de quadriláteros particulares também causou dificuldades aos alunos. O desconhecimento das propriedades específicas de alguns deles e a disponibilidade, sobretudo de Pedro para produzir construções resistentes fizeram com que alguns dos quadriláteros construídos se desmanchassem. Inicialmente as construções eram feitas dando-lhe a aparência visual do quadrilátero que pretendiam representar, sem atender às suas propriedades e mesmo depois de verificarem que as construções se desmanchavam, Pedro apresentava alguma tendência para construir os quadriláteros um pouco *ad hoc*, seguindo assim o caminho que lhe era mais fácil, mas que levava a construções que não resistiam à manipulação. No entanto, no final da tarefa já atendia às propriedades dos quadriláteros para proceder à sua construção. Verificou-se que os alunos para todos os casos construíram exemplos protótipos dos vários quadriláteros por serem mais fáceis de representar.

Os alunos revelaram ainda dificuldades, quer para representar objectos tridimensionais em duas dimensões, quer para interpretar representações planas de objectos tridimensionais. A capacidade de visualização e a habilidade para desenhar afectaram a capacidade dos alunos para representar o cubo nas diferentes posições. A dificuldade em percepcionar sólidos geométricos representados no plano, como a *stella*, causou obstáculos aos alunos para estabelecer relação, principalmente, entre os volumes dos sólidos.

Os alunos salientaram nas fichas de reflexão individual sobre as tarefas e na entrevista que o trabalho em pequeno grupo, algum questionamento por parte da professora ou da investigadora e a discussão na turma ajudaram a superar estas e outras dificuldades.

6.4. Envolvimento dos alunos na realização das tarefas

Papeis assumidos pelos alunos na interacção com os colegas

No início da experiência, os alunos começaram por trabalhar individualmente, mas depois de a investigadora lhe ter solicitado que trabalhassem em grupo, começaram a interagir uns com os outros, contudo Pedro apresentava alguma tendência para trabalhar individualmente. Talvez o facto de estar habituado a trabalhar nas aulas dessa forma tenha contribuído para isso. Nas primeiras tarefas, houve a necessidade de, por vezes, o alertar para cooperar com os colegas, inclusive, algumas vezes eram os próprios colegas a solicitar a sua colaboração.

Durante a realização da primeira tarefa observou-se que os alunos apresentavam as suas ideias, mas nem todos as defendiam, como se pode verificar, por exemplo, pela transcrição seguinte:

> Luís: Agora no 4x4 é a mesma coisa. Podemos começar por calcular o lado deste.
> Pedro: Só temos que fazer o do meio e um do lado.
> Luís: Temos de fazer dos 3.
> Pedro: A área do meio é 8. Não é igual aos outros.
> Luís: Vê-se bem, um é mais pequeno que os outros.
> Nelson: É, só temos que fazer o cálculo para dois, porque o primeiro e o terceiro são iguais. A hipotenusa dos triângulos tem a mesma medida.
> Luís: Então fazemos só de dois.

Luís iniciou a interacção propondo o cálculo da medida do lado de um dos quadrados inscritos no quadrado inicial 4x4. Pedro continuou a interacção apresentando a ideia de fazerem os cálculos apenas para dois dos quadrados inscritos, mas não a fundamentou e nem a defendeu quando não foi aceite por Luís. Foi Nelson quem defendeu a opinião de Pedro apresentando alguns argumentos baseados na percepção visual, que acabaram por convencer Luís.

Na tarefa *Investigação com Quadriláteros*, os alunos iam apresentando e defendendo as suas ideias, mas nem sempre as fundamentavam, como por exemplo, no episódio seguinte em que procuravam investigar qual o tipo de quadrilátero que se obtém quando se unem os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero qualquer:

> Pedro: É mesmo um papagaio, eu vou fazer já aqui um de 90° que depois é mais fácil de ver.
> Luís: Não é fácil conseguires.
> Pedro: Assim já parece mais um papagaio.
> Nelson: Parece! Tu tens que olhar para as medidas dos lados para poderes dizer.

Depois de terem avançado e refutado algumas conjecturas, Pedro afirmou ser um papagaio e tentou convencer os colegas, dando ao quadrilátero inicial a aparência visual de um rectângulo, porém não apresentou argumentos para fundamentar a sua afirmação. Nelson aconselhou-o a observar os valores das medidas dos lados do quadrilátero inscrito, com o intuito de lhe fazer entender que não se podia basear simplesmente na aparência visual do desenho, mas também não avançou explicações. Pedro tinha tendência para identificar as figuras geométricas, no sentido do Nível 1 de van Heile.

Os alunos iam interagindo uns com os outros, no entanto, Pedro distraia-se com muita frequência e mostrava pouca preocupação em registar o trabalho desenvolvido. O mesmo aconteceu na tarefa *Poliedros Regulares*, em que praticamente se limitava a construir poliedros sem se preocupar em analisar se eram ou não regulares e em registar as suas características:

> Pedro: Já construí outro.
> Luís: Tem calma Pedro. Agora ajuda aqui neste. Só queres fazer tu.
> (...)
> Nelson: Oh, Pedro pára agora, temos que ver estes.
> Inv: Pedro, vamos lá ajudar os teus colegas. Não te podes limitar apenas a construir poliedros, a tua contribuição também é importante para o restante trabalho (...).

Foi necessário, mais uma vez, a investigadora chamá-lo à atenção e explicar-lhe que era importante cooperar com os colegas. A partir daí o aluno começou a ajudar os colegas na análise dos poliedros e no registo do trabalho realizado:

> Pedro: Os ângulos deste [tetraedro] medem 180°.
> Luís: Não. É 360° acho eu.

Inv: Vocês têm que defender e fundamentar as vossas ideias para que os outros as possam entender. Porque achas que é 360°?
Luís: Eu acho que é 360° porque forma aqui à volta uma roda.
Pedro: Mas é formado por triângulos. Este ângulo [interno de um triângulo equilátero] é de 60° e...
Luís: Ah, os outros também são de 60°.
Nelson: E concorrem 3 faces.
Pedro: Pois e dá 180° como eu tinha dito.
Luís: Vamos já escrever isto.

Pedro apresentou a ideia de que a soma das amplitudes dos ângulos que concorriam num vértice do tetraedro era de 180°, mas não a fundamentou. Luís não concordou, considerou ser outro valor, mas também não fundamentou a sua opinião, só depois de a investigadora intervir é que os alunos apresentaram alguns argumentos e, em conjunto, procuraram esclarecer a ideia de Pedro.

A quarta tarefa *Secções Planas no Cubo*, foi difícil para os alunos, não só pelas dificuldades associadas à representação plana do cubo nas várias posições, mas também pela dificuldade em justificar as conjecturas e comunicar o seu raciocínio. Mas, todos participaram com as suas ideias, como se pode observar pela transcrição seguinte:

Luís: Este é equilátero, porque forma aqui nas faces 3 triângulos iguais.
Pedro: E como vamos explicar que são iguais?
Luís: As linhas são as hipotenusas destes triângulos. Temos que dizer que são iguais, porque os triângulos...
Nelson: Podíamos dizer que são paralelos às diagonais.
Luís: Mas só a três?
Nelson: Sim esta, esta e esta. As faces são iguais e por isso as diagonais também são.
Luís. É, as diagonais das faces do cubo são sempre iguais.
Pedro: Ah, como o outro é equilátero este também é equilátero.
Nelson: São semelhantes.
Luís: Vai ter os ângulos todos iguais. Iguais não, congruentes.

Luís afirmou que a secção obtida era um triângulo equilátero e apresentou uma explicação baseada na intuição. Pedro concordou e colocou uma questão no sentido de procurarem explicações para o que observavam. Nelson apresentou uma proposta e Luís continuou a interacção fazendo uma pergunta visando a clarificação. Os três alunos contribuiram com as suas ideias para completarem a justificação.

Nas duas tarefas seguintes observou-se que os três alunos continuaram a trabalhar de forma cooperativa. Cada um expunha a sua ideia e defendia-a apresentando alguns argumentos. O episódio seguinte que ocorreu aquando da realização da tarefa *Sólidos Platónicos truncados*, em que os alunos procuravam estratégias para a contagem do número de arestas do cubo truncado, mostra uma dessas situações:

> Pedro: Assim contas duas vezes algumas. Há que pensar, 4 estão garantidas, depois temos que contar as outras todas.
> Nelson: 4 porquê?
> Pedro: Em cada face destas [face octogonal do cubo truncado] tens 8 e 4 são as do corte, só são contadas uma vez.
> Nelson: 4x6?
> Luís: Vai dar 4x6.
> Pedro: 4x6 dá 24.
> Luís: São 48, faz aí mais 24 põe ai. Põe 24 a dividir por 2, 12. É 36 arestas.
> Pedro: Isso não dá, isso não dá.
> Luís: Dá, dá. Primeiro contamos estas, 1,2,3,4, 4x6 dá 24 e depois como eram 48 ao todo, tiramos as 24 que só contamos uma vez e dá 24 e as outras 24 a dividir por 2, que dá 12, depois 24 mais estas 12 dá 36.
> Pedro: Eu estava a pensar, estas 4 são comuns, 24 a dividir por 2 dá 12, mais as outras 24. Dá 36.
> Luís: Foi o que eu disse.
> Nelson: Dá as duas maneiras.

Pedro alertou os colegas para o facto de estarem a contar algumas arestas duas vezes e começou a expor o seu raciocínio. Nelson continuou a interacção colocando uma questão com o intuito de obter clarificação. Pedro clarificou parte do seu raciocínio e os colegas foram acompanhando. Luís procurou completar o raciocínio de Pedro, mas este, não o considerou correcta, no entanto Luís defendeu a sua ideia e argumentou que das 48 arestas, 8 por cada face octogonal do cubo truncado, retirariam 24 que eram contadas apenas uma vez e as restantes 24 tinham de ser divididas por dois por serem contadas duas vezes, de onde resultavam $(48-24)+24\div2 = 36$ arestas. Pedro obtinha o mesmo resultado, mas através de um raciocínio ligeiramente diferente. Não fazia a contagem das arestas no total, contabilizava as que resultavam do corte que eram 24 e somava-lhe metade das restantes, uma vez que eram contadas duas vezes, ou seja, fazia $4\times6+(4\times6)\div2$. Ambos os alunos defenderam e argumentaram as suas ideias e chegaram à conclusão que ambas levavam ao mesmo resultado.

Na última tarefa verificou-se que os alunos questionavam uns os outros com mais frequência, no sentido de obter clarificação e de levar os colegas a justificar as suas ideias, como mostra o diálogo apresentado a seguir, em que procuravam estabelecer uma relação entre o volume do cubo e o volume de um tetraedro pequeno que compõe a *stella*:

> Luís: Dá 24 vezes um tetraedro pequeno. O volume do cubo é 24 vezes o volume de um tetraedro pequeno.

Pedro: Quais são os factos que te levam a chegar a essa conclusão?
Luís: 8 mais 8, 16 não é? 16 e depois...
Pedro: Porque estás a somar 8 mais 8?
Nelson: Porque são dois.
Luís: Então não vês que são dois tetraedros [grandes]?
Pedro: Só que tens o que é comum. Eles não são inteiros. Luís, isso não está bem assim.
Luís: Espera, nós temos que o volume de um grande é 8 o do pequeno, depois mais 8 do outro 16, depois mais 6. Em cada face forma mais um dos pequenos, não é? Então, 16 mais 6 dá 24.
Nelson: Não 22.
Luís: 22 enganei-me. O volume do cubo é 22 do volume do pequeno.

Luís avançou uma conjectura, Pedro colocou algumas questões com o intuito de perceber a ideia do colega e perante a explicação dada por Nelson, considerou que a afirmação de Luís não era correcta, apresentando uma justificação. Porém, Luís acabou de expor o seu raciocínio, que depois constatou não estar correcto.

Ao longo da experiência foi-se observando um maior envolvimento dos alunos na discussão no grupo e um certo desenvolvimento das capacidades de comunicação matemática e argumentação. A evolução foi mais notória no caso de Pedro.

A professora da turma através de conversas informais tidas com a investigadora ao longo da experiência foi salientando esse facto e na segunda entrevista feita no final da experiência, reitera-o:

> A evolução em termos de comunicação foi notória. Estou a pensar, por exemplo no Pedro, ele inicialmente comunicava pouco, o Pedro isolava-se, pensava sozinho, nem escrevia e depois com o decorrer do tempo ele foi discutindo, foi aperfeiçoando a capacidade de comunicar, embora tenha resistido sempre em escrever, mas naquele grupo notou-se uma evolução muito grande em termos de discussão no grupo, se calhar no das meninas já começaram melhor. Mesmo em termos de discussão na turma houve uma evolução grande, no inicio havia muitos que não falavam e depois para o fim já todos queriam participar, eles até diziam, mas nós ainda não falamos e queriam ir ao quadro (2.ª Entrevista à professora [2.ª EP]).

A opinião da professora em relação à evolução dos alunos em termos de comunicação é bastante positiva, não só relativamente a este grupo, mas também à turma em geral, salientando o seu interesse em participar na discussão em grande grupo.

Padrões de interacção

A primeira tarefa não gerou muita discussão entre os alunos, cada um ia apresentando a sua ideia e os colegas iam concordando, ou havendo algum desacordo era rapidamente resolvido.

Exemplo disso é o episódio seguinte, em que os alunos procuravam investigar relações entre um quadrado inicial e os quadrados inscritos nesse quadrado:

> Nelson: Vamos ver entre os perímetros, começamos pelo perímetro do inicial.
> Luís: O perímetro é 9.
> Pedro: Não é nada, é 6. Não é 12.
> Nelson: Está certo é 12, podemos agora ver o perímetro do quadrado inscrito.
> Pedro: Não. A área era mais fácil, porque contávamos pelas quadrículas.
> Nelson: Agora começamos com o perímetro é melhor continuarmos. Também é fácil. Temos aqui um triângulo, podemos ir pelo teorema de Pitágoras.
> Pedro: Está bem.
> Luís: Calculamos a hipotenusa, já dá o lado do quadrado.

Nelson apresentou uma proposta que foi aceite pelos colegas, Luís avançou uma resposta para o perímetro inicial do quadrado 3x3, a qual foi corrigida por Pedro e confirmada por Nelson, mas quando este último sugeriu o cálculo do perímetro de um quadrado inscrito, Pedro não se mostrou muito agradado com a sugestão, por considerar que seria mais fácil obter o valor da área do quadrado, contando as quadrículas. Porém, perante o argumento do colega aceitou rapidamente a sugestão e, em seguida, procuraram, em conjunto, calcular o lado dos quadrados inscritos no quadrado inicial 3x3.

Na segunda tarefa *Investigação com Quadriláteros*, surgiram alguns desacordos entre os alunos, mas a facilidade com que o GSP permite gerar dados, contribuiu para que esses desacordos fossem resolvidos rapidamente. Como se pode observar através da transcrição de um episódio, em que os alunos investigavam o tipo de quadrilátero que se pode obter unindo os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero qualquer:

> Nelson: Deve ser um losango.
> Luís: Vamos ver.
> Pedro: Podemos medir os ângulos. Tem estes dois iguais e estes também.
> Luís: Vê os lados.
> Nelson: Tem dois a dois iguais, é. O losango é tipo, um rectângulo só que tem dois ângulos iguais dois a dois e dois lados iguais.
> Pedro: O losango são dois triângulos, um por cima e outro por baixo.
> Luís: Isso é um quadrado com uma diagonal.
> Nelson: Este [lado] é igual a este e este é igual a este, neste caso, agora se é um losango já não sei.
> Luís: Não é um losango. Um losango tem que ter os lados todos iguais.
> Nelson: São iguais dois a dois. Então não é.
> Pedro: Não é.

Nelson avançou uma conjectura que se afigurava válida. Os colegas submetem-na a verificação. Depois dessa verificação surgiu alguma discussão à volta do conceito de losango, que gerou dúvidas a Nelson acerca do que tinha afirmado (fala oito). Mas, após Luís ter referido que não era um losango, apresentando argumentos, os colegas, através da observação das medições rapidamente chegaram à conclusão de que o quadrilátero que observavam não era um losango. Verifica-se, neste episódio que Nelson e Pedro não tinham presente o conceito de losango. Aliás, ao longo da experiência os alunos revelaram dificuldades que se prendiam com o facto de não terem presentes regras matemáticas e conceitos geométricos básicos.

O início da realização da tarefa *Poliedros Regulares* gerou logo um momento de discussão entre os alunos. O debate desenrolou-se em torno da planificação do tetraedro que Luís construiu com as peças de *polidron*:

> Luís: Isto é um poliedro.
> Pedro: Mas é preciso fazer em 3D.
> Luís: Em 3D? Não é nada.
> Pedro: Isto é um poliedro?
> Inv: Vocês é que têm que ver, discutam entre vocês.
> Nelson: É assim um poliedro. Senão vai ser um triângulo.
> Luís: Não é nada, não tens que fazer em 3D.
> (Nelson pergunta a um colega que estava na mesa detrás).
> Nelson: Não é Artur para fazer em 3D, isto?
> Artur: É.
> Nelson: Já está em 3D.
> Luís: E vós a dar-lhe com o 3D.

Luís defendia a ideia de que a planificação que tinha construído era um poliedro. Os colegas não concordaram e perante a insistência de Luís, Pedro perguntou à investigadora que remeteu a questão para o grupo. Nelson na tentativa de convencer o colega mostrou-lhe um poliedro que tinha construído, mas não conseguiu. Decidiu então perguntar a um colega de outro grupo, que confirmou a ideia de que era "para fazer em 3D", mesmo assim Luís não ficou convencido e pediu explicações, como se pode verificar a seguir:

> Luís: Não é nada, não é um poliedro.
> Nelson: Então o que é?
> Luís: Estás tolo. O que é um poliedro?
> Pedro. Vai ao livro e vês o que é.
> Luís: Uma pirâmide é um poliedro?
> Nelson: Claro que é. O que tu construíste é uma figura plana. Como os triângulos ou quadrados. Mas nós queremos poliedros e não polígonos. Estás a confundir polígono com poliedro. Mas este aqui é que é o poliedro.
> Luís: Ah! Já percebi esta é uma figura plana é a planificação, se dobrar assim dá o poliedro.

Luís perguntou aos colegas: "O que é um poliedro?", mas Pedro respondeu apenas: "Vai ao livro e vês o que é". Perante a ausência de explicações, por parte de Pedro, Luís na tentativa de obter esclarecimento optou por utilizar um exemplo e a argumentação de Nelson acabou por convencê-lo de que o que tinha feito era a planificação do tetraedro e não o poliedro.

Nas tarefas *Secções planas no Cubo* e *Sólidos Platónicos Truncados*, observaram-se alguns momentos em que ocorreram alguns desacordos, como por exemplo na primeira destas duas tarefas quando os alunos procuravam investigar a posição do plano de corte em relação a elementos do cubo, mas a maioria das situações que iam investigando, não gerou grandes discussões. O episódio seguinte, em que os alunos investigavam as secções planas no cubo quando o plano de corte intersecta três das suas faces é um exemplo disso:

> Nelson: Este é um triângulo escaleno.
> Luís: O escaleno tem que ter os 3 lados diferentes.
> Nelson: São diferentes, olha.
> Pedro: É, parecem diferentes.
> Luís: São, este lado é menor, este vai até ao vértice e depois o outro une ali. É escaleno.
> Pedro: Mexe um bocado para vermos.
> Luís: Assim também é, ou assim.
> Nelson: Temos que justificar.
> Luís: Podemos justificar com aquilo de ter lados paralelos às diagonais como fizemos nos outros.
> Nelson: Ah, sim. Se tiver um paralelo é isósceles.
> Pedro: Se forem todos é equilátero e aqui não é nenhum.

Nelson apresentou uma proposta, que pareceu ser válida aos restantes elementos do grupo e colectivamente, procuraram arranjar argumentos para a justificar e assumirem como verdadeira.

A última tarefa, *A Stella Octangula*, gerou alguns momentos de muita discussão entre os alunos. Por exemplo, quando Luís e Nelson (Pedro não estava presente) tentavam estabelecer relações entre o volume do cubo e o de um tetraedro grande. Depois de terem designado a aresta do cubo pela variável x e de terem obtido a expressão do volume do cubo, pretendiam definir o volume de um tetraedro grande em função de x:

> Luís: A área da base é a área do triângulo. Pelo teorema de Pitágoras, sabemos este lado que é $\sqrt{2}$ x, acho eu. x ao quadrado e x ao quadrado.
> Nelson: E o h ao quadrado.
> Luís: Podemos pôr d de diagonal, então d ao quadrado igual a x ao quadrado mais x ao quadrado, que dá d igual a $\sqrt{2x^2}$.
> Nelson: Isso corta tudo. Cortas este com este e dá 2x.
> Luís: Não dá 2x, dá $\sqrt{2}$ x.

Nelson: Dá.
Luís. Não dá. Só corta o do x.
Nelson: É, quanto é que vale?
Luís. Pergunta à stôra e vais ver como não é.
(Levantaram-se ambos e foram perguntar à professora).
Luís: Eu bem te disse. Porque isto fica raiz de 2 vezes raiz de x ao quadrado.
Nelson: Pronto faz a área.

Luís considerou que a medida do comprimento da diagonal de uma face do quadrado dava $\sqrt{2}$ x, pelo seu lado Nelson não concordou, na sua opinião essa medida dava 2x. Gerou-se assim um conflito que só foi remediado pela professora.

Os alunos tinham determinado a medida do lado de uma face de um tetraedro grande em função da aresta x do cubo e pretendiam calcular a sua área, pelo que continuaram a efectuar os cálculos e quando procuravam calcular a altura dessa face surge novo desacordo:

Luís: Então a área da base. E qual é a altura?
Nelson: A altura temos que fazer.
Luís. Aqui é $\sqrt{2}$ x, aqui também, porque ele é equilátero. E agora este é metade.
Nelson: Agora é fazer as contas.
Luís: Fica h [medida da altura do triângulo] ao quadrado igual a $\sqrt{2}$ x ao quadrado menos...
Nelson: Não é assim.
Luís: Porquê?
Nelson: Porque isto é a hipotenusa.
Luís: E então?
Nelson: O que é isto?
Luís. É um cateto
Nelson: Ah, e aqui?
Luís: É a hipotenusa.
Nelson: E este?
Luís: Esse é o outro cateto.
Nelson: Ah, e então não sabes que é a hipotenusa ao quadrado que é igual a um cateto ao quadrado mais o outro ao quadrado?
Luís: Pode ser assim, este cateto ao quadrado igual à hipotenusa ao quadrado menos o outro cateto ao quadrado.
Nelson: Não pode nada.
(Nelson pergunta ao colega detrás)
Nelson: Então não é a hipotenusa ao quadrado igual a um cateto ao quadrado mais o outro ao quadrado?
Artur: É.
Nelson: Então o h ao quadrado tem que estar aqui [no 2.º membro da equação]. O h é um cateto.
Luís: E então, fica na mesma assim. É igual, podes pôr como estava a dizer e depois se passares este para aqui [2.º membro] não vai dar igual?
Nelson: Menos raiz quadrada...

> Luís. Passas este para aquele lado, fica a mesma coisa.
> Nelson: E porque é menos, se está do mesmo lado?
> Luís. Não está nada, este agora tem que passar para aqui.

Este desacordo resultou do facto de Luís na tentativa de calcular a medida da altura de um triângulo equilátero, utilizando o teorema de Pitágoras, ter escrito que a medida de um cateto ao quadrado era igual à diferença dos quadrados das medidas dos outros dois lados. Nelson considerou que esse raciocínio não estava correcto, Luís pede explicações e Nelson com o intuito de justificar a sua ideia colocou uma série de questões ao colega, mas este continuou a defender o que tinha feito. Nelson perante esta situação de conflito recorreu a um colega de outro grupo, que confirmou a sua ideia. Porém, Luís explicou com pormenor ao colega que ambas as situações eram correctas, acabando por convencê-lo.

Na entrevista, os alunos salientaram que o facto de terem discutido e realizado o trabalho em pequeno grupo os ajudou a compreender melhor os assuntos abordados e proporcionou mais à vontade para participar na discussão com a turma:

> Luís: Por termos trabalhado em grupo, depois já estamos mais à vontade para participarmos na turma. Já conseguimos explicar e justificar melhor.
> Nelson: Porque já foi discutido com os colegas do grupo e já sabemos mais ou menos como explicar. As nossas discussões ajudaram a esclarecer as coisas, às vezes dizíamos coisas mal e os outros insistiam e isso ajuda.
> Pedro: Em grupo nós sentimo-nos mais à vontade para participar e envolvemo-nos mais no trabalho. Nestas aulas aprendemos a trabalhar em grupo e aprendemos outras ideias novas.

É de salientar o que é afirmado por Pedro na última frase: "Nestas aulas aprendemos a trabalhar em grupo (...)". O que parece ser importante. A sua atitude e postura foram evoluindo positivamente e no final da experiência cooperava com os colegas e participava de forma activa nas discussões.

Síntese

O envolvimento dos alunos na realização das tarefas foi melhorando ao longo da experiência. No início da primeira tarefa começaram por trabalhar individualmente, mas a partir daí Luís e Nelson trabalharam sempre de forma cooperativa. Pedro apresentava alguma tendência para trabalhar individualmente e sobretudo para não cooperar com os colegas no que diz respeito ao registo do trabalho desenvolvido. Achava que dava muito trabalho. No entanto, ia participando com as suas ideias, mas nem sempre as defendia e raramente as argumentava, o que aliás também se verificou com os colegas, que nem sempre fundamentavam as suas opiniões. Só a partir da terceira tarefa e depois de os colegas e a investigadora o chamarem à atenção algumas vezes é que Pedro começou a cooperar com os colegas de forma mais empenhada e responsável. Observou-se também, a partir da terceira e quarta tarefas, que os três alunos começaram a questionar mais os colegas, a pedir explicações, a defender e justificar as suas opiniões e raciocínios e no final da experiência cada um argumentava em defesa das suas ideias e questionava os outros frequentemente visando clarificação e justificação. Não se verificou liderança por parte de nenhum dos alunos, as ideias de todos eram discutidas e respeitadas, apesar de por vezes proferirem frases, como por exemplo "estás tolo", não eram utilizadas com intenção de ofender os colegas, era apenas resultado do à vontade que tinham uns com os outros.

Os padrões de interacção que se estabeleceram no grupo variaram, tal como no grupo I, desde o acordo imediato até situações de conflito. O acordo imediato ocorria, em geral, em situações consideradas mais simples pelos alunos. Um dos alunos apresentava uma proposta e essa proposta era aceite de imediato pelos colegas, sem que houvesse praticamente discussão. Noutras situações embora se verificasse acordo ocorria discussão. Era apresentada uma proposta por um dos alunos que se afigurava coerente para os restantes e, em conjunto, eram procurados e discutidos argumentos que a pudessem validar.

Nos casos em que havia desacordo observaram-se duas situações. Uma em que o desacordo era resolvido através de uma sequência interactiva curta e outra em que esse desacordo só era resolvido depois de uma sequência interactiva mais longa. Na primeira, um aluno apresentava uma proposta e um colega ou os dois não estavam de acordo com a proposta apresentada, e procuravam refutá-la, mas o aluno que a propôs argumentava em sua defesa e convencia os colegas a aceitá-la, ou então depois de um aluno ter apresentado uma proposta, esta era sujeita a verificação e os outros não concordavam com a mesma, apresentavam argumentos e o aluno que a tinha proposto perante os argumentos dos colegas acabava por concordar com eles. Na segunda situação, um aluno apresentava uma proposta que não era aceite por um ou pelos dois colegas e estes apresentavam uma nova proposta e ambas as propostas eram discutidas, cada aluno argumentava a favor da sua proposta, surgindo assim, um conflito que só era remediado por intermédio da professora ou da investigadora, ou depois de muita discussão e quando um dos alunos apresentava uma justificação detalhada de forma a convencer os outros da sua asserção.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

Neste capítulo recorda-se, de forma resumida, o objectivo e as questões de investigação que estruturaram este trabalho, bem como a metodologia adoptada. De seguida, apresentam-se as principais conclusões. Indicam-se algumas recomendações que emergem do estudo e algumas das limitações do mesmo. Por último, apresenta-se uma breve reflexão final.

7.1. Síntese do estudo

O presente trabalho descreve um estudo desenvolvido numa turma do 10.º ano de escolaridade, num contexto de sala de aula, em que se privilegiou a realização de tarefas de natureza exploratória e investigativa, envolvendo conteúdos de Geometria, e valorizou o trabalho de grupo.

O estudo procurou compreender como é que os alunos, trabalhando em pequenos grupos e realizando actividades com tarefas de exploração e investigação, desenvolvem capacidades de comunicação matemática e superam dificuldades na aprendizagem da Geometria. Com este propósito foram formuladas as seguintes questões de investigação:

1. Que dificuldades manifestam os alunos de uma turma do 10.º ano, e como evoluem, na actividade desenvolvida em tarefas de exploração e investigação no âmbito da Geometria?
2. Quais os contributos da discussão em pequeno grupo e em grande grupo para superar dificuldades sentidas pelos alunos de uma turma do 10.º ano, em Geometria?
3. Quais os contributos da realização de tarefas de exploração e investigação, resolvidas em pequenos grupos, para o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática dos alunos em Geometria?

Face às questões de investigação a que se procurou dar resposta, adoptou-se uma metodologia de natureza qualitativa, tendo por base o paradigma interpretativo, seguindo a modalidade de estudo de caso. Foram tomados como casos dois grupos de três alunos cada. Os dados foram recolhidos através da observação das aulas em que foram desenvolvidas as tarefas de exploração e investigação, efectuada sobre a forma de registo escrito de notas pela investigadora e complementada com o registo áudio e vídeo; das produções elaboradas pelos alunos e da entrevista de grupo, semi-estruturada, a cada um dos grupos-caso no final da experiência. A análise dos dados começou a ser feita ao longo da sua recolha e tornou-se mais intensiva no final da mesma, mediante um sistema de categorias que emergiu dos próprios dados e teve por base o referencial teórico do estudo.

7.2. Principais conclusões

Apresentam-se as conclusões deste trabalho organizadas de acordo com as questões de investigação enunciadas. Em cada uma delas sumariam-se alguns dos aspectos mais relevantes mencionados nos dois estudos de caso.

Dificuldades manifestadas pelos alunos na actividade investigativa e a forma como os mesmos foram evoluindo

A realização de tarefas de exploração e investigação envolvem vários processos de raciocínio complexo, que requerem um elevado grau de empenhamento e criatividade por parte dos alunos (Ponte & Matos, 1996). A exploração inicial e a formulação de questões, a formulação e o teste de conjecturas, a procura de argumentos que possam validar as que resistem a sucessivos testes e ainda a comunicação dos resultados. Todos estes processos foram utilizados pelos alunos na sua actividade com tarefas de natureza exploratória e investigativa, contudo constatou-se que a sua presença não foi igual nas seis tarefas propostas e que os alunos revelaram mais dificuldade nuns do que noutros.

Vários autores salientam que na actividade investigativa é importante começar por uma exploração inicial que permita clarificar a questão ou situação e colocar questões a investigar (e.g. Martins *et al.*, 2002; Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.*, 1999). Os resultados empíricos analisados neste trabalho sugerem que os alunos não dão muita importância a esta fase da actividade investigativa. No início da experiência, a exploração inicial que era feita consistia na definição de algumas estratégias de exploração e de registo e organização dos dados. Não procuravam clarificar o foco da investigação, tal como no estudo de Brocardo (2001), os alunos exploravam questão a questão sem muitas vezes as relacionar, revelando assim dificuldades em entender a investigação como um todo. As alunas do grupo I, a partir da terceira tarefa começaram a procurar relacionar as explorações iniciais com o objectivo de investigação e a ideia de que era importante ler todo o enunciado para procurar clarificar o foco de investigação foi sendo evidenciada. Os alunos do grupo II, manifestaram ter maior dificuldade em entender a importância da clarificação da situação a investigar, foi preciso a intervenção da professora para que eles começassem a procurar clarificar o objectivo da investigação e só a partir da quarta tarefa é que mostraram alguma preocupação em fazê-lo.

Os alunos deste grupo, no início da experiência, perante questões com uma estrutura mais aberta sentiam-se perdidos sem saber o que fazer, foi necessária alguma orientação por parte da professora. Estes dados são consistentes com os de outras investigações (Ferreira, 2007; Rocha, 1996). Esta desorientação decorria do facto de os alunos estarem habituados a trabalhar com propostas mais guiadas. Aos poucos, foram percebendo que eram eles próprios que tinham que definir aspectos a investigar e caminhos a seguir e essa dificuldade foi diminuindo.

A formulação de questões a investigar foi um processo com uma presença muito reduzida na actividade dos alunos. Ao longo de toda a experiência, após a realização de alguma exploração inicial, os alunos não formularam questões de forma explícita, usaram o modo afirmativo em vez do interrogativo. Contudo, a partir da terceira tarefa verificou-se que os alunos, de ambos os grupos, formularam algumas questões de forma precisa resultantes da formulação ou do teste de conjecturas, mas nunca as registaram. Para eles o facto de terem ou não formulado questões não parecia ser relevante, o que interessava era dar a resposta. Estes dados são consistentes com resultados de vários estudos que destacam a formulação de questões como um aspecto que se reveste de particular dificuldade para os alunos (Brocardo, 2001; Diezmann, Watters & English, 2001; Ponte & Matos, 1996). Tal como é sublinhado pelos alunos do grupo II na entrevista, o facto de estarem habituados a realizar tarefas completamente formuladas, terá contribuído para a dificuldade e falta de preocupação em formular questões e em procurar estabelecer objectivos de pesquisa.

A formulação de conjecturas teve lugar em qualquer uma das seis tarefas realizadas pelos alunos. Foi de entre todos os processos, o que surgiu mais naturalmente, nalgumas tarefas, mesmo antes de qualquer exploração inicial emergiam as primeiras conjecturas sob a forma de afirmações que eram confirmadas ou refutadas posteriormente. No entanto, numa fase inicial, os alunos formulavam as conjecturas com base na análise de um ou dois casos e à semelhança do observado noutras investigações (Brocardo, 2001; Henriques & Ponte, 2008; Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.*, 1999), a ideia dos alunos de que as tarefas matemáticas implicam a procura de respostas/conclusões levou-os a considerar as conjecturas como conclusões após um número reduzido de testes. As conjecturas só eram explicitadas se consideradas como conclusões. O trabalho continuado e principalmente os momentos de discussão em grande grupo das duas primeiras tarefas contribuíram para que os alunos começassem a compreender o *estatuto* de uma conjectura e a partir da terceira tarefa as conjecturas, em geral, eram testadas e justificadas.

Ao longo do estudo, os alunos formularam conjecturas baseando-se na observação empírica e na manipulação de representações e construções de polígonos e sólidos geométricos, na percepção visual de objectos geométricos e em raciocínio aritmético, algébrico e também geométrico. Observou-se que o processo de formulação de conjecturas teve maior presença nas tarefas em que os alunos recorriam a um maior número de exemplos particulares, percebendo-se uma forte relação entre o processo de especialização e a formulação de conjecturas, tal como é realçado por Mason, Burton e Stacey (1988).

As alunas do grupo I, na segunda e terceira tarefas, revelaram tendência para apresentar o máximo de conjecturas possível, independentemente da sua trivialidade ou relevância para a investigação. O que confirma resultados de outros estudos (Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.*, 1999; Rocha 2003) e parecia estar relacionada, por um lado, com alguma dificuldade e um certo descuido por parte das alunas em relacionar essas conjecturas com o foco da investigação e por outro, por considerarem importante mostrar muito trabalho feito. Nas últimas três tarefas essa tendência já não se verificou, para tal terão contribuído as chamadas de atenção da investigadora para se concentrarem mais no foco da investigação.

Após a formulação de uma conjectura ela tem que ser testada. Este processo teve presença em todas as tarefas, embora em muitas situações o teste se confinasse a um número reduzido de casos. Estes resultados são consistentes com os de outras investigações (Brocardo, 2001; Henriques & Ponte, 2008). Os alunos não revelaram dificuldades em realizar o teste, no entanto nalguns casos o facto de realizarem um ou dois testes levou-os, quer num grupo quer no outro, a assumir conjecturas que se mostraram falsas aquando da procura de argumentos que as validassem. A realização do teste permitiu aos alunos de ambos os grupos refinar e reformular algumas conjecturas, porém observou-se que o refinamento e reformulação de conjecturas não era uma preocupação sempre presente na actividade dos alunos. Por vezes, verificou-se um certo descuido em refinar ou reformular conjecturas depois de realizados mais testes. Observou-se que os alunos inicialmente não registavam as conjecturas que se mostravam falsas, revelavam dificuldade em entender que a refutação e reformulação de conjecturas fazia parte da actividade investigativa, tal como o observado no estudo de Rocha (1996). As alunas do grupo I começaram a entender que a refutação de conjecturas faz parte do trabalho investigativo mais cedo do que os alunos do grupo II. Estes só na fase final da experiência é que mostraram preocupação em proceder ao registo das conjecturas que se vinham a revelar falsas. Para algumas conjecturas, estes alunos realizavam o teste de modo implícito e não o concretizavam por terem a convicção que essas conjecturas resistiriam ao mesmo.

O teste de conjecturas foi realizado através da experimentação e da geração de mais exemplos, manipulando as construções e obtendo medições com auxílio do GSP, ou fazendo experiências com as peças de *polidron* e com o cubo com líquido, ou ainda manipulando sólidos geométricos com auxílio do *Cabri 3D* e fazendo raciocínio aritmético e geométrico.

Verificou-se que o uso de materiais manipuláveis e a utilização das novas tecnologias facilitaram a formulação e o teste de conjecturas. As novas tecnologias ao permitirem realizar mais experiências particulares contribuíram para a formulação de mais conjecturas e para efectuar testes mais rapidamente, muito embora os alunos nalgumas situações não tenham aproveitado as potencialidades do GSP para realizar um maior número de testes.

A justificação de conjecturas gerou dificuldades aos alunos e nem sempre esteve presente na sua actividade. Diversos estudos têm mostrado que os alunos por si não sentem necessidade de justificar nem provar as suas conjecturas (Henriques & Ponte, 2008; Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.*, 1999; Rocha 2003). Os dados recolhidos apontam no mesmo sentido. Numa fase inicial os alunos não sentiam a necessidade de justificar nem provar as suas conjecturas. A justificação das conjecturas só era apresentada se explicitamente solicitada no enunciado da tarefa ou pedida pela professora ou pela investigadora. O facto de uma conjectura ter resistido a alguns testes era suficiente para a considerarem válida, não sentindo pois qualquer necessidade de procurar argumentos que a justificassem. Com o decorrer da experiência esta atitude foi-se alterando e a partir da terceira tarefa, os alunos de ambos os grupos procuravam justificar as suas conjecturas, já entendiam a justificação das conjecturas como um aspecto inerente à actividade investigativa, contudo era necessário incentivá-los a procurar argumentos lógicos ou, pelo menos, plausíveis que as pudessem validar. No final da experiência, os alunos já tinham a noção de que era necessário procurar argumentos plausíveis para justificar as suas conjecturas. Observou-se que a justificação das conjecturas se revelou mais difícil nos casos em que os alunos procuravam argumentos baseados na percepção visual e intuição e em raciocínio geométrico.

A prova, tal como no estudo de Fonseca (2000) teve uma presença fraca no trabalho desenvolvido pelos alunos. Observou-se uma relativa pobreza no trabalho em pequeno grupo relativamente a este processo. Os alunos numa fase inicial, à semelhança do observado por Borcardo (2001), não assumiam a prova, tal como a justificação como um aspecto intrínseco ao trabalho investigativo. As alunas do grupo I, na primeira tarefa, apresentaram a prova para a relação estabelecida entre um quadrado inicial nxn e um quadrado inscrito qualquer nesse quadrado, mas por incentivo e alguma orientação por parte da investigadora, uma vez que por si não sentiam essa necessidade. Na segunda tarefa realizaram a prova quando solicitada no enunciado da tarefa, no entanto, encararam a função da prova apenas como verificação. Os alunos do grupo II não realizaram qualquer prova, mesmo quando solicitada, apenas apresentaram argumentos baseados na aparência visual das construções e nalgumas medições obtidas através do GSP. Nelson em determinado momento ainda esboçou uma tentativa de provar uma das conjecturas, mas os colegas acharam desnecessário e o aluno acabou por não insistir. A observação dos desenhos e dos dados empíricos gerados pelo GSP permitiam identificar os quadriláteros pelas suas propriedades e por isso a prova não lhes parecia necessária. Este resultado corrobora aquilo que é salientado por Parzysz (2006) quando considera que os alunos ao se concentrarem nas propriedades dos desenhos podem resolver problemas usando soluções empíricas e por isso a prova matemática parece-lhes inútil. Todavia, na discussão em grande grupo aquando da realização da prova de algumas conjecturas os alunos de ambos os grupos avançaram ideias relevantes para a concretização da mesma.

O trabalho sistemático em torno da importância de provar as conjecturas que resistiam a vários testes contribuiu para que os alunos no final da experiência evidenciassem alguma preocupação em provar as suas conjecturas. Procuravam compreender o porquê de certas conjecturas se mostrarem verdadeiras e tentavam encontrar argumentos lógicos que as pudessem validar, apesar de em alguns casos não o terem conseguido e ser necessária alguma orientação e questionamento por parte da investigadora. No entanto, é de destacar o esforço feito pelos alunos num processo que nalguns casos não lhes era acessível. Tal como no estudo de Marrades e Gutiérrez (2000), algumas vezes os alunos encontravam conjecturas verdadeiras, mas não conseguiam prová-las porque não se recordavam ou não tinham conhecimento das propriedades geométricas envolvidas.

Os dados analisados evidenciam que a justificação e a prova de conjecturas são processos que se revestem de particular dificuldade para os alunos. Aliás, esta constatação é de resto referida pelos próprios alunos. A falta de hábito em procurar justificar as suas ideias e asserções aliada a uma certa falta de conhecimentos poderão explicar a dificuldade dos alunos em justificar e provar as conjecturas.

A comunicação quer oral quer escrita do trabalho desenvolvido é um aspecto importante da actividade investigativa. Os dados sugerem que a comunicação escrita do trabalho realizado reveste-se de dificuldade para os alunos, sobretudo o registo da justificação de conjecturas. Numa fase inicial os alunos, principalmente os do grupo II não mostravam muita preocupação em proceder ao registo do seu trabalho foi necessário alertá-los para o fazerem. Como afirma Mason (1996) poucos alunos estão dispostos a perder tempo, voltando atrás no seu trabalho escrevendo-o. Observou-se nas duas primeiras tarefas que os alunos tinham a tendência para registar apenas algumas representações, algoritmos quando realizados e as conclusões. E os registos que efectuavam eram pouco explícitos, revelavam dificuldade em comunicar por escrito os seus raciocínios. Os alunos do grupo II, depois de discutirem o que registar e como o fazer, chamavam a professora ou a investigadora para obterem confirmação, mostrando pouca confiança em si próprios. O mesmo se verificou em relação às alunas do grupo I, mas neste caso a dependência da professora ou da investigadora era maior. As alunas na primeira tarefa solicitavam apoio com muita frequência, não só quando tinham dificuldades, mas sempre que formulavam uma conjectura ou obtinham um resultado, com o intuito de obter validação. Estes resultados são consistentes com os de outras investigações (Rocha, 1996; Varandas & Nunes, 1999), que referem a pouca autonomia e autoconfiança dos alunos na realização do seu trabalho. Com o decorrer da experiência os alunos foram, de forma gradual, passando de uma fase de grande dependência da professora ou da investigadora, para outra em que se tornaram mais autónomos e mais seguros de si próprios, discutindo as questões no ceio do grupo, solicitando apoio em questões mais difíceis. Uma atitude questionadora, por parte da professora e da investigadora, respondendo com questões às dúvidas, pedindo explicações aos alunos e remetendo para o grupo as decisões a tomar e também o facto de os alunos terem adquirido uma progressiva compreensão do trabalho investigativo terão contribuído para isso.

O registo das justificações das conjecturas revelou-se sempre uma tarefa difícil para os alunos. A dificuldade era maior no registo de justificações que se baseavam na intuição e percepção visual. Os alunos do grupo II com o intuito de facilitar a comunicação escrita dos seus raciocínios, nalgumas das justificações utilizaram para além da linguagem verbal, o que Pirie (1998) designa de representação visual ou Ponte e Serrazina (2000) por comunicação *icónica*, mas mesmo assim algumas justificações ficavam pouco claras para o leitor. As alunas do grupo I consideraram a comunicação escrita dos seus raciocínios o aspecto do seu trabalho que mais dificuldades lhes causou. Esta dificuldade advém do facto de as alunas ao escrever se preocuparem em gerar o entendimento dos outros e parece estar relacionada com o uso do vocabulário geométrico, principalmente quando estão implicados termos e conceitos. Estes dados confirmam resultados de outras investigações que referem a comunicação, sobretudo escrita, de raciocínios geométricos e a utilização do vocabulário geométrico, aspectos que se revestem de particular dificuldade para os alunos (Guillén, 2000; Junqueira, 1995). Mas, a realização continuada de tarefas de natureza exploratória e investigativa contribuiu para alguma evolução, ainda que pouco notória. Esta observação parece sugerir que o desenvolvimento da capacidade de comunicação escrita de raciocínio geométrico é um aspecto que requer um trabalho sistemático durante um período de tempo mais prolongado.

Contributos da discussão em pequeno grupo e em grande grupo para superar dificuldades sentidas pelos alunos em Geometria

As dificuldades manifestadas pelos alunos na realização das tarefas propostas não se prendiam apenas com os processos inerentes à actividade investigativa, mas também com a aprendizagem da Geometria. O uso e compreensão de desenhos, a construção e interpretação de representações visuais de conceitos matemáticos e a representação e visualização de objectos tridimensionais foram algumas das dificuldades sentidas pelos alunos.

Vários autores salientam que os desenhos são fundamentais para a compreensão de conceitos e ideias geométricas (Battista, 2007; Parzysz, 1991), porém a particularidade dos desenhos e os exemplos protótipos de figuras geométricas originaram algumas dificuldades aos alunos. Diana e outros alunos revelaram dificuldades em reconhecer um quadrado quando ele não se assemelhava a um exemplo protótipo desse polígono. Apesar de Diana evidenciar conhecer as propriedades do quadrado, a imagem mental associada a um exemplo protótipo gerou-lhe dificuldades em o reconhecer noutra posição. Verificando-se um desequilíbrio entre a componente conceitual e figural do objecto geométrico. Estes dados confirmam o que é salientado por Presmeg (1992) ao afirmar que a imagem mental associada a imagens protótipos pode conduzir ao não reconhecimento de uma figura quando ela não se assemelha com um protótipo. Para a superação desta dificuldade contribuiu a intervenção das colegas de grupo no sentido de Diana identificar o quadrado através das suas propriedades.

Também o facto de os alunos associarem um determinado conceito geométrico de uma classe de objectos a um desenho protótipo conduziu a dificuldades. A imagem mental que Nelson tinha do conceito de altura de um triângulo associada a um exemplo protótipo levantou-lhe dificuldades em representar as alturas de um triângulo num desenho não estandardizado. O aluno identificava a altura de um triângulo como o segmento de recta perpendicular baixado de um vértice para a base do mesmo quando esta está numa posição horizontal em relação à folha de papel, estando este segmento no interior do triângulo e tal como o observado no estudo de Gravina (1996), o aluno para manter o segmento no interior do triângulo ignorava a perpendicularidade. As intervenções de alguns alunos na discussão em grande grupo, gerada em torno deste conceito e da representação das alturas de um triângulo num desenho não protótipo, contribuíram para Nelson e outros colegas clarificarem o conceito de altura de um triângulo e ultrapassar esta dificuldade.

Fischbein (1993) salienta que a harmonia entre a componente conceitual e figural de um objecto geométrico é que determina a noção correcta desse objecto. Os dados sugerem, à semelhança de outras investigações (Fischebein, 1993; Gravina, 1996; Mariotti, 1995) que as relações entre estas duas componentes não são fáceis de organizar na mente dos alunos. Depois de provado que o quadrilátero que se obtém unindo os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero qualquer é um paralelogramo, os alunos de ambos os grupos quando estudaram os casos particulares de quadriláteros evidenciaram a necessidade de novas verificações empíricas. Apesar de terem presente a definição de paralelogramo, o facto dos vários paralelogramos serem figurativamente tão diferentes, o efeito do conceito simplesmente desaparece. Tal como é referido por Fischbein (1993) os alunos tendem a esquecer que a interpretação da componente figural deve permanecer sujeita às restrições formais. As alunas do grupo I só se aperceberam de que não havia necessidade da verificação para cada sub-classe de paralelogramos quando interpeladas pela investigadora e os alunos do grupo II através da discussão em grande grupo. A intervenção de Diana contribuiu para que os colegas percebessem as várias formas correspondentes à definição de paralelogramo.

A construção de polígonos com auxílio do GSP revestiu-se de alguma dificuldade para os alunos de ambos os grupos. As alunas do grupo I, numa fase inicial da construção dos casos particulares de quadriláteros, produziam construções com base numa ou duas propriedades específicas dos quadriláteros e na marcação de alguns pontos *ad hoc*, dando à construção no ecrã do computador a aparência visual do quadrilátero que pretendiam construir. Mas, depois de construírem dois dos quadriláteros e terem verificado que as construções se desmanchavam, não conservando as características dos quadriláteros pretendidos, procuraram, através da discussão em pequeno grupo, encontrar soluções resistentes, utilizando propriedades e relações de cada quadrilátero que iam construindo.

No grupo II a dificuldade em procurar soluções resistentes foi maior. Isto por não terem presentes as propriedades específicas de alguns dos quadriláteros que desejavam construir e também por alguma falta de disponibilidade, sobretudo de Pedro em procurar encontrar soluções que permitissem produzir construções resistentes. Estes dados confirmam resultados do estudo de Junqueira (1995) que refere a falta de disponibilidade de alguns alunos para procurarem soluções resistentes. No início, as construções eram produzidas dando-lhe a aparência visual do quadrilátero que pretendiam construir e depois de verificarem que as construções não resistiam à manipulação e de serem alertados para procurarem produzir construções resistentes, Pedro à menor dificuldade tinha a tendência para fazer construções *ad hoc*. Contudo, na última construção já procurava soluções resistentes, para tal contribuiu a ajuda e a insistência dos colegas de grupo para ter em atenção as propriedades do polígono a construir. A discussão em pequeno grupo e algum questionamento por parte da professora, visando que os alunos recordassem as propriedades específicas de alguns quadriláteros contribuíram para que os mesmos superassem as dificuldades sentidas na construção dos quadriláteros. Observou-se tal como no estudo de Junqueira que a maior parte das construções feitas pelos alunos eram exemplos protótipos dos casos particulares de quadriláteros. Os alunos consideravam essas construções mais fáceis de representar e de identificar.

Gutiérrez (1998) sublinha que os alunos apresentam dificuldades em desenhar representações planas de sólidos geométricos. Os dados recolhidos apontam no mesmo sentido. Diana no início da realização da tarefa *Secções Planas no Cubo* não conseguia desenhar o cubo nas várias posições. Apenas conseguiu desenhá-lo quando o mesmo estava assente por uma face no plano da mesa e com algumas indicações das duas colegas de grupo. No final da tarefa esta dificuldade tinha sido superada, após algum treino e ajuda das colegas, a aluna já conseguia desenhar o cubo noutras posições. No grupo II, os três alunos sentiam dificuldade em desenhar a representação plana do cubo nas várias posições e apesar da ajuda dos colegas de grupo ter contribuído para minimizar a dificuldade, ela não foi totalmente ultrapassada. Esta dificuldade não se prendia apenas com a capacidade de visualização espacial, mas principalmente com a habilidade para desenhar e esta habilidade tal como afirma Gutiérrez não se desenvolve de forma espontânea.

Vários autores sublinham que a representação bidimensional de objectos tridimensionais conduz a dificuldades de interpretação de tais representações (Gutiérrez, 1998; Parzysz, 1988, 1991). Os dados analisados no presente trabalho confirmam esta ideia, indicando que a percepção e interpretação de representações planas de objectos tridimensionais se revestem de dificuldade para os alunos. As alunas do grupo I não conseguiam formar na sua mente uma imagem tridimensional da *stella*, através da observação da sua representação plana. Isto pela dificuldade em: (i) percepcionar o tipo de sólidos que compõem a *stella* e (ii) compreender as partes ocultas da representação plana. O primeiro ponto envolveu momentos de muita discussão entre as alunas, várias ideias foram defendidas e vários argumentos apresentados. Esta discussão e algum questionamento por parte da investigadora contribuíram para que as alunas conseguissem ultrapassar esta dificuldade. A dificuldade em compreender as partes ocultas da representação plana da *stella* foi mais fácil de ultrapassar, as contribuições, sobretudo de Francisca ajudaram as colegas a entender a informação do aspecto visual correspondente à parte oculta da representação bidimensional da *stella* e desta forma a formar uma imagem tridimensional deste sólido.

A percepção visual e interpretação dos sólidos correspondentes ao espaço compreendido entre o cubo e a *stella* também levantaram dificuldades aos alunos de ambos os grupos. Estas dificuldades estavam relacionadas com o facto da representação plana de objectos tridimensionais implicar, tal como é salientado por Parzysz (1988), a perda de informação correspondente à parte oculta.

A discussão em grupo e naturalmente algum questionamento por parte da professora e da investigadora concorreram para que estas e outras dificuldades fossem superadas, como de resto é evidenciado pelas opiniões dos alunos, quer na entrevista, quer nas fichas de reflexão individual sobre as tarefas. Para tal, foi importante: (1) os alunos durante as discussões em grupo sentirem à vontade para pedir ajuda aos colegas; (2) os colegas fornecerem explicação que estava a um nível de elaboração que correspondia ao nível da ajuda necessária e (3) a ajuda ser fornecida no momento em que surgia a dificuldade. Os dados recolhidos confirmam resultados de outras investigações que referem que uma metodologia de trabalho em pequeno grupo propícia um ambiente em que os alunos se sentem mais à vontade para pedir e fornecer ajuda (Zakaria, Chin & Dual, 2010) podendo assim concorrer para ultrapassar dificuldades. E a discussão no grupo turma após o trabalho em pequeno grupo é muito vantajosa para a aprendizagem dos alunos (Junqueira, 1995) proporcionando a possibilidade de clarificação e esclarecimento de dúvidas.

Os resultados sugerem que a discussão em pequeno grupo contribui para a superação de dificuldades em situações que envolvem noções geométricas básicas e raciocínios mais simples para os alunos e que a discussão em grande grupo se torna fundamental na maior parte das situações, cujos raciocínios se revelam mais complexos.

Contributos da realização de tarefas de exploração e investigação, resolvidas em pequenos grupos, para o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática dos alunos em Geometria

A realização das tarefas de exploração e investigação em pequeno grupo proporcionou momentos de discussão e interacção entre os alunos, embora algumas tarefas tenham gerado maior discussão do que outras.

Numa fase inicial os alunos iam apresentando as suas ideias ao grupo, mas nem todos as defendiam. Como era o caso de Diana, que embora revelasse interesse na realização do trabalho e procurasse seguir o raciocínio das colegas, questionando-as e pedindo ajuda quando não o compreendia, mostrava-se pouco comunicativa. Ia respondendo a questões colocadas pelas colegas e apresentando algumas ideias, mas em geral, não as defendia. Parecia sentir-se pouco segura para o fazer, considerava que as colegas eram "mais inteligentes" do que ela e por isso tinha algum receio de errar, apesar de as suas ideias serem valorizadas e respeitadas pelas colegas. Também no grupo II, os alunos nem sempre defendiam as suas ideias, e as discussões, tal como referido no estudo de Machado (1997), eram pobres do ponto de vista da argumentação. Pedro apresentava alguma tendência para trabalhar individualmente, por vezes era necessário alertá-lo no sentido de cooperar com os colegas e participar de forma responsável na realização do trabalho, principalmente no que dizia respeito ao registo do mesmo. Numa fase posterior, sobretudo a partir da terceira e quarta tarefas, a atitude de Pedro foi-se alterando. Começou a cooperar mais com os colegas, a participar mais nas discussões e de forma mais empenhada e responsável. Para tal terão contribuído as várias chamadas de atenção, quer por parte da investigadora, quer por parte dos colegas que iam solicitando a sua colaboração. Como é referido pelo aluno na entrevista, as aulas em que foram realizadas as tarefas de exploração e de investigação ajudaram-no a aprender a trabalhar em grupo.

A partir da terceira e quarta tarefas, os alunos mostraram-se mais comunicativos, principalmente Diana que intervinha mais nas discussões e já começava a defender e a argumentar as suas ideias e também os alunos do grupo II que mostravam maior preocupação em explicar e justificar as suas opiniões. Na fase final da experiência os alunos em ambos os grupos questionavam-se mutuamente com o intuito de obter clarificação e justificação, o que contribuía para que procurassem apresentar explicações e argumentos cada vez mais convincentes.

As interacções que se estabeleceram em pequeno grupo compreendem dois tipos de padrões distintos: situações em que se verificava acordo e situações em que emergia desacordo. A figura 48 sintetiza os padrões de interacção ocorridos nos grupos:

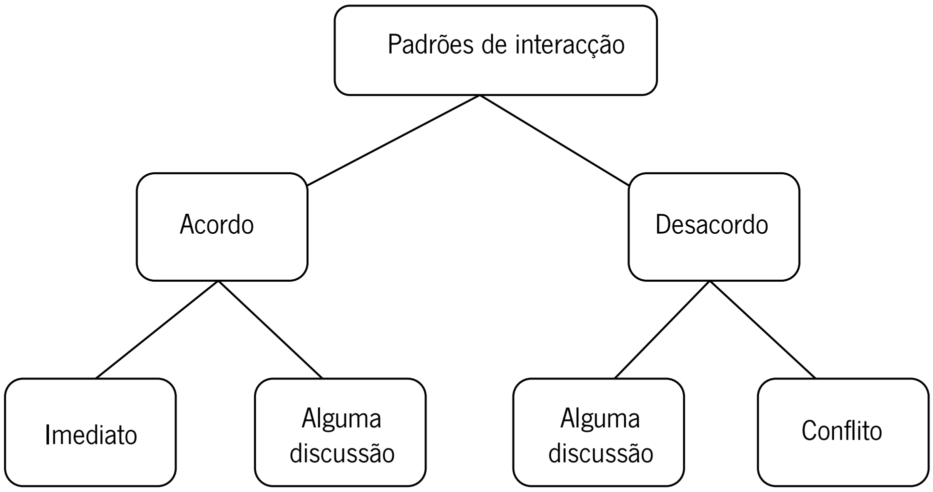


Figura 48. Padrões de interacção estabelecidos nos grupos.

O acordo imediato ocorria, à semelhança do referido no estudo de Machado (1997), em situações consideradas mais simples pelos alunos. Em que um dos alunos apresentava uma proposta e essa proposta era aceite imediatamente pelos colegas, sem que houvesse discussão, considerando-a como solução. Nas situações em que se verificava acordo, mas ocorria alguma discussão, era apresentada uma proposta por um dos alunos, que se afigurava coerente para os restantes e, em conjunto, procuravam argumentos para a validar. Nas situações de desacordo, algumas delas eram resolvidas ao fim de uma sequência interactiva curta, em que um aluno apresentava uma proposta e os colegas não estavam de acordo, mas o aluno que a propôs argumentava em sua defesa, apresentando justificações convincentes que levavam os colegas a aceitá-la. Ou então, a proposta apresentada era sujeita a verificação, os outros alunos não concordavam com a mesma e apresentavam argumentos que convenciam o aluno que a propôs a concordar com eles. Em outras situações de desacordo o consenso só era conseguido ao fim de uma sequência interactiva longa. Um aluno apresentava uma proposta que não era aceite por um ou pelos dois colegas e estes apresentavam uma nova proposta e ambas as propostas eram discutidas, cada aluno argumentava a favor da sua proposta e procurava refutar a proposta do colega, surgindo um conflito sócio-cognitivo. Este conflito no grupo I, em geral, ocorria entre duas das aulas e era resolvido pela terceira aluna. No grupo II a 'força' dos argumentos conduzia, por vezes, à necessidade do pedido de intervenção da professora ou da investigadora para remediar o conflito, ou então este era resolvido depois de muita discussão, e de um dos alunos explicar o mais pormenorizadamente possível a sua proposta, até convencer os outros da sua validade. Estes momentos de desacordo conduziam a situações de argumentação que levavam, tal como é salientado por Krummheuer (1998), a correcções, conexões e modificações, contribuído assim para a aprendizagem.

A participação activa dos alunos nas discussões com os colegas e os padrões de interacções estabelecidos no grupo, especialmente as situações de desacordo, em que os alunos eram confrontados com opiniões e pontos de vista diferentes dos seus, facilitaram o desenvolvimento de argumentações e de explicações, o que se reflectiu na comunicação do trabalho desenvolvido aquando da discussão em grande grupo. Numa fase inicial os alunos, em geral, apresentavam explicações que descreviam essencialmente procedimentos, sem muita interpretação e justificação das acções matemáticas envolvidas. Com o decorrer da experiência, as explicações para além de descreverem procedimentos clarificavam-nos mostrando explicitamente o processo de pensamento e raciocínio e ofereciam alguma interpretação dos resultados. No final da experiência, os alunos consideravam a adequação das suas explicações para os outros, mais do que simplesmente para si próprios, tomando-as como objecto de reflexão. Estes resultados são consistentes com dados analisados por Yackel e Cobb (1996). Os alunos procuravam apresentar explicações baseadas em conceitos e propriedades matemáticas e estabelecer conexões entre os novos conhecimentos e conhecimentos prévios.

A realização de tarefas de exploração e investigação, em pequeno grupo, ao levar os alunos a explicar as suas ideias e raciocínios e a ouvir as dos seus pares, a discutir estratégias, a argumentar em defesa das suas opiniões e a questionar e criticar as dos outros permitiu-lhes clarificar e refinar o seu pensamento matemático, bem como desenvolver capacidades de comunicação e de argumentação. O facto de os alunos terem interagido com os colegas em pequeno grupo concorreu para que se sentissem mais à vontade para explicar e argumentar as suas ideias em grande grupo e para adquirir maior confiança nas suas capacidades, o que confirma dados de outros estudos (Segurado, 1997; Snyder, 2006), e por conseguinte participarem mais, como aliás é mencionado pelos alunos na entrevista.

Verificou-se que embora os alunos nas suas interacções com os colegas de grupo, por vezes, usem uma linguagem que abrange um tipo de vocabulário pouco convencional – o que parece estar relacionado, tal como é salientado por Pirie (1998) com o facto da linguagem matemática não estar prontamente disponível – na discussão com a turma, os alunos assumem um postura mais 'formal' e revelam maior preocupação em usar linguagem matemática. Depreendendo-se assim, que também os momentos de discussão em grande grupo, ao imporem maior formalização do raciocínio fomentam o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática.

Os resultados analisados neste trabalho indicam que com o decorrer da experiência, ocorreu uma melhoria na capacidade de comunicação matemática dos alunos, sendo que a evolução foi mais notória em termos de comunicação oral do que escrita, o que confirma dados do estudo de Snyder (2006). A evolução dos alunos em termos de comunicação oral é de resto destacada pela professora da turma na entrevista realizada no final da experiência.

7.3. Recomendações e limitações do estudo

Recomendações. Reconhecendo as potencialidades, salientadas por vários autores (e.g., Azevedo, 2009; Brocardo, 2001; Fonseca, 2000; Segurado, 1997), que a realização de tarefas de exploração e investigação pode ter na aprendizagem dos alunos e no desenvolvimento de capacidades relevantes que podem contribuir para que os mesmos se tornem cidadãos mais participativos, críticos e autónomos, são apontadas algumas recomendações a professores com pretensão de proporcionar aos seus alunos tarefas deste tipo, bem como algumas recomendações para futuras investigações.

O trabalho com este tipo de tarefas envolve uma dinâmica de aula que requer uma planificação cuidada por parte do professor, desde logo na selecção ou construção da tarefa. A estrutura das questões ou da situação a investigar é um aspecto que se deve ter em conta. Quando os alunos não estão familiarizados com a actividade investigativa é importante que inicialmente a tarefa forneça alguma orientação, de forma, a que os mesmos não se sintam perdidos, pois a desorientação pode levar a alguma desmotivação. Após uma fase inicial a estruturação das tarefas poderá ser cada vez mais aberta, de modo a torná-las mais desafiantes para os alunos. Um outro aspecto relevante aquando da elaboração da tarefa é o de fornecer alguma indicação no enunciado da mesma no sentido de levar os alunos a formular as suas próprias questões para investigar e a justificar as suas conjecturas, pelo menos até que os alunos manifestem uma certa compreensão do trabalho investigativo. Uma vez, que a formulação de questões e a justificação de conjecturas são processos da actividade investigativa que parecem estar relacionados com os hábitos de trabalho dos alunos.

Também o modo com os alunos vão trabalhar na aula é um aspecto importante que o professor deve ponderar. Uma metodologia de trabalho em pequeno grupo parece influenciar positivamente a investigação dos alunos, na medida em que pode proporcionar momentos de discussão e interacção que os ajudem a progredir no seu trabalho. Quanto à dimensão dos grupos, é importante que estes sejam pequenos (3 ou no máximo 4 alunos), sobretudo quando a realização da tarefa envolve a manipulação de materiais manipuláveis ou o uso de novas tecnologias, de modo a que todos os alunos tenham oportunidade de se envolver activamente no trabalho. Mas por outro lado, que sejam compostos por mais de dois alunos, pois podem ocorrer momentos de interacção que levam a conflitos sócio-cognitivos entre dois dos alunos e a opinião de um terceiro aluno pode contribuir para que esse conflito seja resolvido.

É importante que o professor se aproprie da tarefa, bem como dos processos que envolvem a actividade investigativa para que possa orientar os alunos, mantendo contudo, uma atitude questionadora e incentivadora, promovendo processos matemáticos que os alunos tendem a não considerar, como a formulação de questões e a justificação e prova.

A discussão e apresentação do trabalho desenvolvido é uma fase fundamental do trabalho de investigação, por isso carece de atenção por parte do professor. Este momento é propício para desafiar e incentivar os alunos a aprofundar a investigação, a reflectir sobre o trabalho realizado, a criticar e questionar as ideias dos outros, a apresentar argumentos que convençam os colegas e também o professor e a usar a linguagem matemática. Daí também a importância da apropriação da tarefa para que o professor se sinta à vontade para moderar a discussão em torno das descobertas realizadas pelos alunos e de possíveis dificuldades que possam surgem e que, por vezes, não são previsíveis. Pois, e atendendo a que a exploração de uma investigação é um processo divergente (Ernest, 1996), não se sabe, perante uma dada situação, quais os aspectos que os alunos irão explorar e os caminhos que irão seguir.

Os resultados deste trabalho sugerem também algumas recomendações que poderão constituir sugestões para futuras investigações. As conclusões do estudo indicam que a comunicação escrita de raciocínios levanta dificuldade aos alunos, no entanto, tendo em consideração a abordagem qualitativa adoptada não é possível generalizar as conclusões obtidas a outros alunos. Interessaria então investigar se esta dificuldade é também sentida por outros alunos do mesmo nível de ensino, pertencentes a contextos sócio-económicos diferentes quando trabalham a mesma temática, ou mesmo a alunos de níveis de escolaridade diferentes. Por outro lado, seria ainda interessante diversificar as áreas temáticas em que se enquadram as tarefas fornecidas aos alunos e investigar se esta dificuldade é semelhante à manifestada pelos alunos quando realizam tarefas de exploração e investigação centradas na Geometria.

Também poderá ser interessante procurar compreender se os tópicos abordados poderão influenciar uma maior ou menor utilização de determinados processos da actividade investigativa, para isso seria necessário implementar mais tarefas ainda que dentro do tema de Geometria, mas abordando outros conteúdos programáticos, ou então dentro de temáticas diferentes.

Um outro assunto refere-se às concepções dos alunos acerca da Geometria. No início do estudo foram recolhidos alguns dados referentes a este assunto com o objectivo de complementar a caracterização dos alunos, não sendo, no entanto, objecto de estudo. Seria relevante perceber quais as concepções que os alunos deste nível de ensino têm sobre a Geometria e a sua aprendizagem e avaliar a influência da realização de tarefas de exploração e investigação na mudança ou enriquecimento dessas concepções.

Durante a realização das tarefas em pequeno grupo, os alunos na sua interacção com os colegas, assim como na discussão final em grande grupo colocam um leque variado de questões. Seria importante que se desenvolvesse uma investigação que analisasse e tipificasse as questões colocadas pelos alunos, quer em pequeno grupo, quer em grande grupo e estudasse a influência destas questões na sua aprendizagem.

Decorre ainda a recomendação de realizar mais estudos focados na análise das potencialidades das tarefas de exploração e investigação no ensino e na aprendizagem da Geometria. Alguns poderão incidir, tal como o presente estudo, no ponto de vista dos alunos, contudo, seria também importante que outros focassem aspectos do trabalho do professor.

Atendendo à importância da implementação de tarefas de natureza exploratória e investigativa nas aulas de Matemática, e tendo em conta, que a dinâmica de uma aula com tarefas desta natureza constitui um quadro de acção bastante exigente para o professor, seria relevante que na formação inicial de professores, existisse um lugar privilegiado em que os futuros professores pudessem experienciar os processos característicos da actividade investigativa, bem como a implementação deste tipo de tarefas na sala de aula. Seria igualmente relevante, que na formação contínua de professores, se realizassem oficinas de formação, em que os professores, através do trabalho colaborativo, planificassem aulas com este tipo de tarefas, e que depois da sua implementação na sala de aula, houvesse lugar para a discussão, reflexão e partilha de experiências e ideias.

Limitações. Este estudo, tal como qualquer outro esteve condicionado por alguns factores, quer internos, quer externos à investigação. De seguida, indicam-se alguns desses factores. Reflectindo sobre as conclusões deste trabalho faz-se um balanço positivo, no entanto, tem-se consciência de que se o estudo se prolongasse por mais tempo, as conclusões poderiam ser mais consistentes. O factor tempo foi de todos o mais limitador, uma vez que foi impeditivo para que os alunos pudessem aprofundar mais o seu trabalho e para que as discussões no grupo turma fossem mais abrangentes e mais aprofundadas, pois a extensão do programa curricular e a necessidade do seu cumprimento tiveram bastante peso na gestão do tempo para a realização e discussão de cada tarefa.

Também o facto de a experiência ter decorrido no início do ano lectivo, isto porque o tema de Geometria do 10.º ano é o primeiro tema a ser trabalhado, a seguir ao módulo inicial e também porque se considerou que o módulo inicial e a Geometria no espaço seriam mais adequados para a realização deste tipo de tarefas, foi limitador. Na medida em que houve pouco tempo para conhecer os alunos e para estes se familiarizarem com a nova metodologia de trabalho, antes de se proceder à recolha de dados. O facto de nem a professora nem a investigadora conhecerem a turma foi limitador, desde logo para a formação dos grupos de trabalho e também por não se saber até que ponto as tarefas que se pretendiam propor seriam ou não desafiantes para os alunos.

Outro factor que também pode ter sido limitador, foi o facto da investigadora não se ter limitado ao papel de observadora passiva. Tendo orientado as aulas e acabado por desempenhar o papel de professora, o que impossibilitou que se focasse apenas na observação e registo de notas, no sentido de permitir uma recolha de dados mais completa. Mas, por outro lado, permitiu ter um contacto mais pessoal com os alunos, ganhar a sua confiança de modo a que eles se sentissem à vontade para colocar questões e discutirem as tarefas em conjunto. Os alunos desde o início mostraram-se muito cooperantes e foi de um forma espontânea que começaram a interagir com a investigadora.

7.3. Reflexão final

Reflectindo sobre o trabalho realizado, considero que esta experiência de ensino se revelou profícua para os alunos, para mim e também para a professora da turma.

Para os alunos, a realização das tarefas de exploração e investigação propostas e a metodologia de trabalho adoptada nas aulas em que essas tarefas foram trabalhadas contribuíram, além do mencionado nas principais conclusões, para que os alunos se apercebessem de determinadas dificuldades, que se calhar de outra forma não se teriam apercebido. Muitas delas relacionadas com conceitos que estão subjacentes à aprendizagem dos tópicos de Geometria abordados. Parecem ter contribuído também para aumentar a motivação dos alunos, uma vez que mesmo os alunos mais fracos se empenharam na exploração das tarefas propostas. Esta ideia é de resto mencionada pela professora na entrevista realizada no final da experiência:

> Os alunos com mais dificuldades, nestas tarefas acho que participam muito mais, como acho que nenhum aluno olhava para aquilo e ficava impedido de fazer porque não percebia, acho que todos percebiam minimamente, então isso levou a que tenham tido um papel mais interventivo, mesmo os alunos mais fracos. Se calhar com outro tipo de aulas, os alunos mais fracos ficavam mais de lado e aqui foram participando (2.ª EP).

Com o decorrer da experiência os alunos tornaram-se mais activos, empenhados e participativos, mesmo alunos que mostravam ter pouco à vontade para contribuir com as suas ideias e raciocínios para a discussão no grupo turma, no final da experiência conseguiam fazê-lo, o que para alguns deles foi uma 'conquista'. Como é salientado por Diana na entrevista " Eu agora já explicava o que pensava e já participava na discussão na turma", ou por Helena na ficha de reflexão individual da quarta tarefa "consegui superar uma coisa nesta tarefa. Falei e entrei na discussão da turma". Houve, inclusive discussões, em que todos queriam explicar a sua opinião, questionar e criticar as ideias dos colegas.

Os alunos na entrevista mencionam vários aspectos positivos acerca da experiência e das aulas em que foram trabalhadas as tarefas: "Gostei das aulas, porque tivemos oportunidade de sermos nós a pensar e assim aprendemos melhor"; "Achei estas aulas muito interessantes, porque tínhamos que ser nós a chegar às conclusões sem ajuda"; "Ao termos que justificar e explicar aprendemos mais a argumentar e a comunicar" ou "Eu acho que isto das investigações está-me a fazer muito mais perguntar as coisas, porque é que é assim (...)". O aspecto que alguns deles salientam como menos positivo é o facto da realização de tarefas de natureza exploratória e investigativa ser uma actividade mais trabalhosa e mais difícil do que a realização de outro tipo de tarefas: "Temos que cruzar o que já sabemos para conseguir chegar a conclusões e aprendemos mais, mas só que dá trabalho e é difícil". A professora aponta vários aspectos positivos acerca da experiência, como por exemplo:

> Os alunos desta turma tiveram experiências que outros alunos não tiveram, eles exploraram tarefas muito enriquecedoras e que se calhar vão visualizar durante muito tempo, por exemplo na truncatura, eles truncaram e por isso quando virem um poliedro truncado vão visualizar mentalmente o que fizeram e isso é uma mais-valia (2.ª EP).

Para mim, a realização deste estudo constituiu uma experiência relevante que me ajudou, a reflectir sobre a minha prática pedagógica. Permitiu-me reconhecer as potencialidades e a relevância do trabalho investigativo, no envolvimento dos alunos na construção das suas aprendizagens e no desenvolvimento de determinadas capacidades importantes e ainda, tomar conhecimento acerca das dificuldades que este trabalho pode trazer tanto aos alunos como ao professor. Contribuiu para um aprofundamento dos meus conhecimentos sobre aspectos a ter em conta na elaboração deste tipo de tarefas e ainda acerca de aspectos relacionados com o ensino e a aprendizagem da Geometria, enriquecendo desta forma a minha formação.

Para a professora da turma, a participação na experiência parece ter contribuído para reflectir na sua prática, como se pode verificar através da transcrição seguinte:

> Foi uma maneira diferente de encarar o ensino, daqui para a frente vou muitas vezes, adoptar estratégias de não orientar tanto os alunos de lhes dar mais tempo para eles reflectirem sobre as coisas, acho que é realmente importante levá-los a descobrir por eles, em vez de lhe dizer é assim, para eles verem que são capazes. Em súmula foi uma maneira diferente de ver o ensino. Tirei algo muito positivo desta experiência, nada de negativo (2.ª EP).

Atendendo aos aspectos positivos da participação na experiência de ensino, mencionados tanto pelos alunos, como pela professora, parece-me relevante que se incentive os professores a implementar tarefas de exploração e de investigação nas suas aulas. Também me parece pertinente que mais estudos como este sejam realizados e dados a conhecer às escolas e aos professores de Matemática, para que possam enriquecer a sua formação e, desse modo, melhorar as suas práticas.

Como investigadora esta experiência constituiu para mim uma fonte de aprendizagem acerca do trabalho inerente a um estudo de investigação. E em relação a este ponto, parece-me importante realçar a relevância, que a meu ver, tem a realização de entrevistas em grupo na recolha de dados. Por um lado, os alunos podem-se sentir menos constrangidos para responder estando com os seus colegas do que simplesmente com o entrevistador. Por outro lado, como já trabalharam durante algum tempo com os colegas de grupo, sentem-se à vontade para exprimirem as suas opiniões, percepções e sentimentos e as ideias de uns estimulam os outros a responder, permitindo, assim obter mais informação e provavelmente mais rica.

Através da experiência foi-me possível perceber os contributos que a realização e divulgação de estudos de investigação podem ter para a melhoria das práticas pedagógicas dos professores. Além disso, a elaboração deste estudo alertou-me para a importância da realização de novas experiências, quer ligadas à formação de professores, quer centradas na aprendizagem dos alunos.

No final do estudo apraz-me dizer que, apesar das dúvidas e das dificuldades sentidas, é particularmente gratificante a ideia de que os alunos, para além de aprenderem Geometria, tiveram oportunidade de experienciar processos característicos da actividade matemática.

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, *8*, 7-10 e 35.

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do Projecto Mat789*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Abrantes, P. (1999). Investigações em Geometria na sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 153-167). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Abrantes, P., Leal, L., Teixeira, P. & Veloso, E. (1997). *Mat789, inovação curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação e Departamento da Educação Básica.

Afonso, C. (2002). *As fases de aprendizagem do modelo de van Hiele: Uma experiência no ensino da Geometria com futuros professores do 1.º ciclo*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga.

Almeida, M. (2007). *A comunicação na aula de Matemática: Dois estudos de caso com futuros professores*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga.

Almeida, P. & César, M. (2007). Contributos da interacção entre pares, em aulas de ciências, para o desenvolvimento de competências de argumentação. *Interacções*, *3* (6), 163-196.

APM (1998). Matemática 2001: Recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática. Consultado em 11 de Outubro de 2010, em http://www.apm.pt/apm/2001/2001_m.htm.

APM (2009). *Renovação do currículo de Matemática. Seminário de Vila Nova de Mil Fontes 1988: Edição Comemorativa*. Lisboa: Autor.

Araújo, J. D. L. (2004). Um diálogo sobre comunicação na sala de aula de matemática. *Veritati*, *4*, 81-93.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215–241.

Azevedo, A. (2009). *O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem de funções. Uma experiência com alunos do ensino secundário*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. In E. von Glasersfeld (ed.), *Radical construtivism in Mathematics Education* (pp. 89-110). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Banegas, J. (2003). Argumentation in mathematics. Consultado em 1 de Março de 2011, em

http://my.fit.edu/~aberdein/Alcolea.pdf.

Barbosa, A. C. (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: Um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico*. Tese de Doutoramento, Universidade do Minho, Braga.

Battista, M. T. (2007). The development of geometry and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on Mathematics teaching and learning* (pp. 843-905). Charlotte: NCTM e Information AGE Publishing.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1995). Geometry and proof. *Mathematics Teacher*, *88* (1), 48-54.

Belchior, M. (1994). *Níveis de pensamento geométrico e atitudes face à Geometria e ao seu ensino de futuros professores*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga.

Ben-Yehuda, M. (2005). Using discourse analysis to investigate arithmetical thinking processes of students with learning difficulties in inclusive classes. Consultado em 2 de Fevereiro de 2011, em http://www.isec2005.org.uk/isec/abstracts/papers_b/bemyehuda_m.shtml.

Ben-Yehuda, M., Lavy, I., Linchevski, L. & Sfard, A. (2005). Doing wrong with words or what bars students' access to arithmetical discourses. *The Journal for Research in Mathemtics Education*, *36* (3), 176-247.

Bishop, A. & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Bispo, R., Ramalho, G. & Henriques, N. (2008). Tarefas matemáticas e desenvolvimento do conhecimento matemático no 5.º ano de escolaridade. *Análise Psicológica*, *26* (1), 3-14.

Boaler, J. (2006). "Opening our ideas": How a detracked mathematics approach promoted respect, responsibility, and high achievement. *Theory into Practice*, *45* (1), 1-11.

Boavida, A. M. (2005). A argumentação na aula de Matemática: Olhares sobre o trabalho do professor. In XVI SIEM. Consultado em 25 de Janeiro de 2011, em http://fordis.ese.ips.pt/siem/programa.asp.

Boavida, A. M., Gomes, A. & Machado, S. (2002). A argumentação na aula de Matemática: Olhares sobre um projecto de investigação colaborativa. *Educação e Matemática*, *70*, 18-26.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Braumann, C. (2002). Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação dos professores* (pp. 5-24). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula da Matemática: Um projecto curricular no 8.º ano*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Brunheira, L. (2002). O conhecimento didáctico e as atitudes de uma professora estagiária face à realização de actividades de investigação na aula de Matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 183-205). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Burger, W. F. & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Heile levels of development in Geometry. *Journal for research in Mathematics Education*, *17* (1), 31-48. (Tradução em espanhol de Maria Luisa Luna e Angel Gutiérrez).

Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. & Yevdokimov, A. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning*, *5* (1), 55-72.

Caraça, B. J. (1941). Sociedade Portuguesa de Matemática. *Gazeta de Matemática*, *8*, 10.

Carvalho, C. (2001). *Interacção entre pares: Contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7.º ano de escolaridade*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Carvalho, C. (2003). Comunicações e interacções sociais nas aulas de Matemática. Consultado em 16 de Fevereiro de 2011, em http://cie.fc.ul.pt/membrosCIE/ccarvalho/docc53.pdf.

Carvalho, C. & César, M. (2000). Reflexões em torno de dinâmicas de interacção: O caso do trabalho em díade em tarefas não-habituais de estatística. In C. Monteiro, F. Tavares, J. Almiro, J. P. Ponte, J. M. Matos & L. Menezes (Orgs.), *Interacções na aula de Matemática* (pp. 85-97). Viseu: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Castelnuovo, E. (1947). Um método activo no ensino da Geometria intuitiva. *Gazeta de Matemática*, *33*, 9-13.

Castro, E. & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. In L. Rico (Cood.), *La educación matemática en la ensenãnza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Editorial Horsori.

César, M. (1994). Factores psico-sociais e equações. In A. Vieira, E. Veloso & L. Vicente (Eds.), *Actas do ProfMat 94* (pp. 82-92). Lisboa: APM.

César, M. (2000). Interacções sociais e apreensão de conhecimentos matemáticos: A investigação contextualizada. In J. P. Ponte & L. Serrazina (Orgs.), *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália - Actas da Escola de Verão em Educação Matemática - 1999* (pp. 5-46). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

César, M. & Torres, M. (1998). Actividades em interacção na sala de aula de matemática: Desenvolvimento curricular em matemática. In G. Cebola & M. A. Pinheiro (Eds.), *Actas do VI Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 71-87). Portalegre: SPCE.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24* (4), 359-387.

Christiansen, B. & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M. & Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *Proceedings of the 28th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 215-222). Norway.

Clements, D. (1998). Geometric and spatial thinking in young children. Consultado em 2 de Dezembro de 2010, em http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED436232.pdf.

Clements, D. & Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan Publishing Company.

Cockcroft, W. H. (1982). Mathematics counts. London: HMSO. Consultado em 12 de Fevereiro de 2011, em http://www.educationengland.org.uk/documents/cockcroft/.

Coxford, A., Burks, L., Giamati, C. & Jonik, J. (1993). *Geometria a partir de múltiplas perspectivas. Normas para o currículo e a avaliação em Matemática Escolar, colecção de adendas, anos de escolaridade 9-12*. Lisboa: APM.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching Geometry, K-12* (pp. 1-16). Reston, VA: NCTM.

Curcio, F. & Artzt, A. (1998). Students communicating in small groups: Making sense of data in graphical form. In H. Steinbring, M. Bartolini Bussi & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 179-190). Reston, VA: NCTM.

Davidson, N. & Kroll, D. L. (1991). An overview of research on cooperative learning related to mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22* (5), 362-365.

Davis, P. & Hersh, R. (1995). *A experiência Matemática*. Lisboa: Gradiva.

De Villiers, M. (2001). Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad*. *Educação e Matemática*, *63*, 31-36.

Dekker, R. & Elshout-Mohr, M. (1998). A process model for interaction and mathematical level raising. *Educational Studies in Mathematics*, *36*, 303–314.

Del Grande, J. J. (1987). Spatial perception and primary geometry. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching Geometry, K-12* (pp. 126-135). Reston, VA: NCTM.

DES (1997). *Matemática: Programas 10.º, 11.º e 12.º anos*. Lisboa: Ministério da Educação e Departamento do Ensino Secundário.

DES (2001). *Programa de Matemática A do 10.º ano de escolaridade*. Lisboa. Ministério da Educação e Departamento do Ensino Secundário.

DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Departamento de Educação Básica.

Dieudonné, J. (1961). Pour une conception nouvelle de l' enseignement des mathématiques. In *Mathématiques nouvelles* (pp. 31-50). Paris: OECE.

Diezmann, C. M., Watters, J. J. & English, L. D. (2001). Implementing mathematical investigations with young children. In *Proceedings 24th annual conference of the Mathematics Education research group of Australasia* (pp. 170-177). Sydney.

Dillenbourg, P., Baker, M., Blaye, A. & O'malley, C. (1996). The evolution of research on collaborative learning. In E. Spada & P. Reiman (Eds.), *Learning in humans and machine: Towards an interdisciplinary learning science* (pp. 189-211). Oxford: Elsevier.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *In Anais do PME 21* (Vol.1, pp. 3-26). México.

Edwards, J. & Jones, K. (1999). Students' views of learning mathematics in collaborative small groups. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 281-288). Haifa.

Equipa do projecto Explorar e Investigar para Aprender Matemática (2001). *Investigações matemáticas na sala de aula: propostas de trabalho. Geometria*. Lisboa: APM.

Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 25-48). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ferreira, C. M. (2007). *Alunos do 8.ºano perante actividades de investigação matemática: Perspectivas, atitudes e implicações*. Dissertação de Mestrado, Universidade Portucalense, Porto.

Ferreira, E. (2005). *Ensino e aprendizagem de Geometria em Ambientes Geométricos Dinâmicos: O tema de Geometria do Plano no 9.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 139-162.

Fiske, J. (2005). *Introdução ao estudo da comunicação*. Porto: Asa.

Fonseca, C. N. (1999). *Interacções em pequenos grupos em resolução de problemas e actividades investigativas na aula de Matemática: Uma experiência no 8.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto. Lisboa: APM.

Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula.* Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Fonseca, H., Brunheira, L. & Ponte, J. P. (1999). As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. *Actas do ProfMat 99*. Lisboa: APM.

Freitag, M. (1997). Reading and writing in the mathematics classroom. *The Mathematics Educator*, *8* (1), 16-21.

French, D. (2004). *Teaching and learning Geometry.* London: Continuum.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1978). Enseñanza de las matemáticas modernas o enseñanza moderna de las matemáticas? In J. Hernández (Org.), *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Alianza Editorial.

Gall, M. D., Borg, W. R. & Gall, J. P. (1996). *Educational research: An introduction*. New York: Longman Publishers USA.

GAVE (2004a). Organização para a cooperação e desenvolvimento económico. Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática. PISA 2003 (Programme for International Student Assessment). Consultado em 12 de Abril de 2010, em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=33&fileName=pisa_2003_lite_matem.pdf.

GAVE (2004b). Resultados do estudo internacional PISA 2003 (Programme for International Student Assessment). Consultado em 12 de Abril de 2010, em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=33&fileName=relatorio_nacional_pisa2003.pdf.

GAVE (2008). *Projecto testes intermédios 2007-2008. Informação n.º 17*. Lisboa. Autor.

GAVE (2009). *Projecto testes intermédios 2008-2009. Informações n.º 7*. Lisboa. Autor.

GAVE (2010). *Projecto testes intermédios 2009-2010. Informações n.º 9*. Lisboa. Autor.

Geddes, D. & Fortunato, I. (1993). Geometry: Research and classroom activities. In D. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom middle grades mathematics* (pp. 199-222). New York: Macmillan Publishing Company.

Goldenberg, P. (1999). Quatro funções de investigação na aula de Matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-49). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Gomes, A. J. (2001). Novas matemáticas, a necessidade de mudar. *Educação e Matemática*, *65*, 48-49.

Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Gravina, M. (1996). Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação,* (pp. 1-13). Belo Horizonte. Consultado em 10 de Dezembro de 2010, em http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos_teses/EDUCACAO_E_TECNOLOGIA/GEODINAMICA.PDF.

Guerra, J. C. (1943). Sobre o ensino da Geometria nos liceus. *Gazeta de Matem*ática, *13*, 7-8.

Guillén, S. G. (1991). *El mundo de los poliedros*. Madrid: Editorial Sintesis.

Guillén, S. G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las ciências*, *18* (1), 35-53.

Gutiérrez, A. (1992). Procesos y habilidades en visualización espacial, *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría,* (pp. 44-59). Consultado em 12 de Dezembro de 2010, em http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/marcoapg.html.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. *Proceedings of the 20th PME conference* 1, (pp. 3-19). Consultado em 12 de Dezembro de 2010, em http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/marcoapg.html.

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA*, *3* (3), 193-220.

Gutiérrez, A., Pegg, J. & Lawrie, C. (2004). Characterization of students' reasoning and proof abilities in 3-dimensional geometry. *Proceedings of the 28th P.M.E. Conference 2*, (pp. 511-518). Consultado em 12 de Dezembro de 2010, em http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/marcoapg.html.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica, *Actas del 9.º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, (pp. 27-44). Consultado em 12 de Dezembro de 2010, em http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/marcoapg.html.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21* (1), 6-13.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. Proceedings of the international group for the psychology of mathematics education, Valencia, Spain, Vol I. Consultado em 9 de Janeiro de 2011, em http://fcis.oise.utoronto.ca/~ghanna/pme96prf.html.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 5-23.

Henriques, A. & Ponte, J. P. (2008). Actividades de investigação na aprendizagem de Análise Numérica. *Revista da Educação*, *16* (2), 5-32.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher*, *74*, 11-18.

Hoyles, C. & Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 121-128). Dordrecht: Kluwer.

Idris, N. (2009). The impact of using Geometers' Sketchpad on malaysian students' achievement and van Hiele geometric thinking. *Journal of Mathematics Education*, *2* (2), 94-107.

Ishii, D. (2005). *Developing a model of communication for pre-service elementary teachers' written mathematical explanations*. Tese de Doutoramento. Universidade de Ohio. Consultado em 5 de Fevereiro de 2011, em http://etd.ohiolink.edu/sendpdf.cgi/Ishii%20Drew%20K.pdf?acc_num=osu1118788162.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis Doctoral, Universidade de Valencia, Valencia.

Jaime, A. & Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. In S. Llinares & M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.

Jones, k. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic Geometry software and their evolving Mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 55-85.

Junqueira, M. (1995). *Aprendizagem da Geometria em ambientes computacionais dinâmicos: Um estudo no 9.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa. Lisboa: APM.

Knuth, E. & Peressini, D. (2001). Unpacking the nature of discourse in Mathematics classrooms. *Mathematics Teaching in the middle school*, *6* (5), 320-325.

Krummheuer, G. (1998). Formats of argumentation in the mathematics classroom. In H. Steinbring, M. Bartolini Bussi & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 223-234). Reston, VA: NCTM.

Laborde, C. (1994). Working in small groups: A learning situation? In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a scientific discipline* (pp.147-158). Dordrecht: kluwer academic publishers.

Laborde, C. (1996). Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. In L. Puig & J. Calderón (Eds.), *Investigación y didáctica de las matemát*icas (pp. 67-85). Madrid: CIDE.

Leinhardt, G. (2001). Instructional explanations: A commonplace for teaching and location for contrast. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 333-357). Washington, DC: American Educational Research Association.

Lerman, S. (1996). Investigações: Para onde vamos? In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 107-115). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G. & Boutin, G. (2005). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Levenson, E., Tirosh, D. & Tsamir, P. (2006). Mathematically-based and practically-based explanations: Individual preferences and sociomathematical norms. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *4* (2), 319–344.

Loureiro, C., Oliveira, A., Ralha, E. & Bastos, R. (1997). *Geometria: Matemática – 10.º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação e Departamento do Ensino Secundário.

Love, E. (1996). Avaliando a actividade Matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 89-105). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Lowrie, T. (2001). The influence of visual representations on mathematical problem solving and numeracy performance. *42th annual MERGA conference*, (pp. 354-361). Sydney.

Machado, V. (1997). *Interacções em grupos em Matemática: Uma experiência no 7.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto. Lisboa: APM.

Marrades, R. & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 87–125.

Mariotti, M. A. (1995). Images and concepts in geometrical rasoning. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in Mathematics Edication*, (pp. 79-116). New York: Springer.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic Software environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 25–53.

Martinho, M. H. (2007). *A comunicação na sala de aula de Matemática: Um projecto colaborativo com três professoras do ensino básico*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Martins, C., Maia, E., Menino, H., Rocha, I. & Pires, M. (2002). O trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da Matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação dos professores* (pp. 59-80). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Mason, J. (1996). Resolução de problemas matemáticos, no Reino Unido: Problemas abertos, fechados e exploratórios. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 89-105). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1988). Pensar matematicamente. Madrid: Ministério de Educación y Ciencia e Labor.

Matos, J. M. & Gordo, M. F. (1993). Visualização espacial: Algumas actividades. *Educação e Matemática*, *26*, 13-17.

Matos, J. M. & Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ministério da Educação (1983). *Curso complementar do ensino secundário. Programa de Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação e Direcção-Geral do ensino secundário.

Ministério da Educação (1993). *Matemática e Métodos Quantitativos. Organização curricular e programas. Ensino secundário*. Lisboa: Ministério da Educação e Direcção Geral dos Ensinos Básico e Secundário.

Medeiros, K. (2010). *A comunicação na formação inicial de professores de Matemática: Concepções e práticas de explicação na sala de aula*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Menezes, L. (1997). O discurso do professor de Matemática. *Educação e Matemática*, *44*, 5-11.

Menezes, L. (1999). Matemática, linguagem e comunicação. *ProfMat 99* (pp.123-145). Portimão: APM.

Menezes, L. (2004). *Investigar para ensinar Matemática: Contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Mesquita, A. L. (1992). The types of apprehension in spatial geometry: Sketch of research. *Strutural Topology*, *18*, 19-30.

Michaels, S., O'Connor, C. & Resnick, L. (2008). Deliberative discourse idealized and realized: Accountable talk in the classroom and in civic life. *Studies in Philosophy and Education*, *27*, 283–297.

Moreira, D. (2001). Educação Matemática e comunicação: Uma abordagem no 1.º ciclo. *Educação e Matemática*, *65*, 27-32.

Murillo, J. & Marcos, G. (2007). Una metodología para potenciar y analizar las competencias geométricas y comunicativas. In M. Camacho, P. Flores & M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 157-170). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e Instituto de Inovação Educacional. (Original em inglês publicado em 1989).

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e Instituto de Inovação Educacional. (Original em inglês publicado em 1991).

NCTM (2007). *Princípios e normas profissionais para a Matemática escolar*. Lisboa: APM e Instituto de Inovação Educacional. (Original em inglês publicado em 2000).

Nesher, P. (2000). Posibles relaciones entre el language natural y language matemático. In N. Gorgorió, J. Deulofeu & A. Bishop (Cords.), *Mathemáticas y Educación. Retos y Cambios desde una perspective internacional* (pp. 109-124). Barcelona: Graó.

Nunes, F. (1996). *O ensino da Matemática e o trabalho de grupo: Dois estudos de caso*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Oliveira, H., Ponte, J. P., Santos, L. & Brunheira, L. (1999). Os professores e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 97-110). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Oliveira, H., Ponte, J. P., Segurado, I. & Cunha, H. (1997). Mathematical investigations in the classroom: A collaborative project. In V. Zack, J. Mousley & C. Breen (Orgs.), *Developing practice: Teachers' inquiry and educational change* (pp. 135-142). Geelong, Australia: Centre for Studies in Mathematics, Science and Environmental Education.

Oliveira, H., Segurado, I. & Ponte, J. P. (1999). Tarefas de investigação em Matemática: Histórias da sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 189-206). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Oliveira, H., Segurado, I., Ponte, J. P. & Cunha, H. (1999). Investigações matemáticas na sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 121-131). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Oliveira, P. (2002). A aula de Matemática como espaço epistemológico forte. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 25-40). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Orton, A. & Frobisher, L. (1996). *Insights into teaching mathematics*. London: Cassell.

Parzysz, B. (1988). Knowing vs seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, *19*, 79-92.

Parzysz, B. (1991). Representation of space and students' conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics*, *22* (6), 575-593.

Parzysz, B. (2006). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, *17*, 128-151

Passos, C. (2008). A comunicação nas aulas de Matemática revelada nas narrativas escritas em diário reflexivo de futuros professores. *Revista interacções*, *8*, 13-36.

Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de da démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Tese de Doutoramento, Université Joseph Fourier-Grenoble I/Université de Genova, Genova.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Ediciones Morata e Ministerio de Educación y Ciencia.

Pimm, D. (1994). Mathematics classroom language: Form, function and force. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 159-169). Dordrecht: kluwer academic publishers.

Pirie, S. (1998). Crossing the gulf between thought and symbol: Language as (slippery) stepping-stones. In H. Steinbring, M. Bussi & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 7-29). Reston, VA: NCTM.

Pólya, G. (1995). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Editora Interciências.

Ponte, J. P. (1997). O Ensino da Matemática na sociedade da informação. Consultado em 19 de Dezembro de 2009, em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/97-Ponte(Educ&Mat).rtf.

Ponte, J. P. (2001). Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. In F. L. Lin & T. J. Cooney (Orgs.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53-72). Dordrecht: Kluwer.

Ponte, J. P. (2003a). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação, 2,* 93-169.

Ponte, J. P. (2003b). Investigar, ensinar e aprender. *Actas do ProfMat 2003* (CD-ROM, pp. 25-39). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2003c). O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? In *O ensino da Matemática: Situação e perspectivas* (pp. 21-56). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de trabalho de investigação (Ed.), O *professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Ponte, J. P. (2009). O novo programa de Matemática como oportunidade de mudança para os professores do Ensino básico. *Interacções*, *12*, 96-114.

Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática: Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação e Departamento do Ensino Secundário.

Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H. & Varandas, J. (1999). Investigando as aulas de investigações matemáticas. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 133- 151). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Varandas, J. M., Brunheira, L. & Oliveira, H. (1999). *A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas*. Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J. M., Veia, L. & Viseu, L. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, *20* (2), 39-74.

Ponte, J. P. & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interacções sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 119-138). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ponte, J. P., Matos, J. M. & Abrantes P. (1998). *Investigações em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M. & Ferreira, C. (1999). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, *7* (2), 41-70.

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Porfírio, J. & Oliveira, H. (1999). Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. In P. Abrantes, J.P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 111- 117). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Presmeg, N. C. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, *17* (3), 297-311.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *23* (6), 595-610.

Rocha, C. (2003). *Uma experiência com actividades de investigação na aula de Matemática. Competências matemáticas, atitudes e concepções de dois alunos do 7.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto, Porto.

Rocha, H. (1996). Investigando com a calculadora gráfica. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 183-191). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Santos, L., Brocardo, J., Pires, M. & Rosendo, A. I. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2.º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação dos professores* (pp. 88-106). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 61-71). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Segurado, I. (1997). *A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2.º ciclo*. Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Sfard, A. (2001a). Learning mathematics as developing a discourse. In R. Speiser, C. Maher, C. Walter (Eds.), *Proceedings of 21st conference of PME-NA* (pp.23-44). Columbus, Ohio: Clearing House for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Sfard, A. (2001b). There is more to discourse than meets the ears: Learning from mathematical communication things that we have not known before. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 13-57.

Sfard, A. (2002). The interplay of intimations and implementations: Generating new discourse with new symbolic tools. *The Journal of Learning Sciences*, *11*, 319-358.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*, 205-233.

Sierpinska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, M. Bussi & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 30-62). Reston, VA: NCTM.

Silver, E. (1996). Acerca da formulação de problemas de Matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 61-71). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, *14*, 66-91.

Snyder, S. (2006). Cooperative learning groups in the middle school mathematics classroom. Consultado em 12 de Fevereiro de 2011, em http://scimath.unl.edu/MIM/files/research/SnyderS.pdf.

Stacey, K. & Gooding, A. (1998). Communication and learning in small-group discussions. In H. Steinbring, M. Bartolini Bussi & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 191-206). Reston, VA: NCTM.

Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3* (4), 268–275.

Stylianides, A. J. & Murani, T. (2009). Can a proof and a counterexample coexist? A study of students' conceptions about proof. *Proceedings of CERME 6*. Lyon. Consultado em 2 de Fevereiro de 2011, em http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg2-14-stylianides.pdf.

Sullivan, P. (2008). Designing task-based mathematics lessons as teacher learning. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 133-1137). Morelia, Mexico.

Tartre, L. A. (1990). Spatial orientation skill and mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21* (3), 216-229.

Tudella, A., Ferreira, C., Bernardo, C., Pires, F., Fonseca, H., Segurado, I. & Varandas, J. M. (1999). Dinâmica de uma aula com investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 87-96). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Turner, J. & Patrick, H. (2004). Motivational Influences on student participation in classroom learning activities. *Teachers College Record*, *106* (9), 1759-1785.

UNESCO. (1973). *Tendances nouvelles de l'enseignement de la mathématique* (vol.3). Paris: autor.

Varandas, J. M. & Nunes, P. (1999). Actividades de investigação: Uma experiência no 10.º ano. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 169- 173). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Veloso, E. (1998). *Geometria. Temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 275-298.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Weeb, N. M. (1989). Peer interaction and learning in small groups. *International Journal of Education Research*, *13*, 21-39.

Weeb, N. M. & Mastergeorge, A. M. (2003). The development of students' helping behavior and learning in peer-directed small groups. *Cognition and instruction*, *21* (4), 361-428.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In M. van den Heuval-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 9–23). Utrecht, Holland.

Yackel, E., Cobb, P., Wood, T., Wheatley, G. & Merkel, G. (1991). A importância da interacção social na construção do conhecimento matemático das crianças. *Educação e Matemática*, *18*, 17-21.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27* (4), 458-477.

Yeo, J. B. W. (2007). Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment (Technical Report ME2007-01). Consultado em 21 de Janeiro de 2011, em http://math.nie.edu.sg/bwjyeo/publication/MMETechnicalReport2007_MathematicalTasks_ME200701.pdf.

Yeo, J. B. W. & Yeap B. H. (2009). Investigating the processes of mathematical investigation. *Paper presented at the 3rd Redesigning Pedagogy International Conference*. Singapore. Consultado em 21 de Janeiro de 2011, em http://math.nie.edu.sg/bwjyeo/publication/CRPPConf2009Paper_MIGames.pdf.

Yerushalmy, M. & Chazan, D. (1990). Overcoming visual obstacles with the aid of the supposer. *Education studies in Mathematics*, *21* (3), 199-219.

Yin, R. (2009). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks: Sage.

Zakaria, E., Chin, L. C. & Daud, M. Y. (2010). The effects of cooperative learning on students' mathematics achievement and attitude towards mathematics. *Journal of Social Sciences*, *6* (2), 272-275.

Referência Legislativa

Decreto n.º 37:112 do Diário de Governo n.º 247 de 22 de Outubro de 1948.

ANEXOS

Anexo I – Tarefas

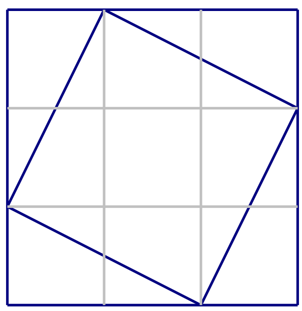
Tarefa 1

Quadrados em Quadrados

Pretende-se que reflictam em grupo, registem as vossas conclusões para, em seguida, serem discutidas no grupo turma.

Num quadrado podem-se inscrever outros quadrados. De entre estes considerem aqueles cujos vértices são pontos de intersecção das quadrículas com os lados do quadrado inicial.

Na figura, podem observar um quadrado 3×3, com um quadrado inscrito, nas condições anteriormente descritas.



1. Num quadrado como este, quantos quadrados nestas condições poderão inscrever? E em quadrados 4×4? E 5×5? E n×n?

2. Com base nos quadrados que já desenharam e alargando o vosso estudo a quadrados com dimensões diferentes, investiguem possíveis relações entre os quadrados inscritos e o quadrado inicial.

Adaptada das propostas elaboradas pela equipa do projecto Explorar e Investigar para Aprender Matemática (2001). *Investigações matemáticas na sala de aula: propostas de trabalho. Geometria*. Lisboa: APM.

Tarefa 2

Investigação com Quadriláteros

Com auxílio do *software* "*The Geometer's Sketchpad*", construam um quadrilátero à vossa escolha. Marquem o ponto médio de cada um dos lados do quadrilátero que construíram e, em seguida, unam os pontos médios de lados consecutivos de modo a obter outro quadrilátero.

1. Que tipo de quadrilátero obtiveram? Provem a vossa conjectura.

2. Estabeleçam relações entre o quadrilátero inicial e o quadrilátero que obtiveram unindo os pontos médios dos lados consecutivos do quadrilátero inicial.

3. Investiguem agora o que acontece se o quadrilátero inicial for um paralelogramo obliquângulo? Um quadrado? Um losango? Um rectângulo? Um trapézio? Um papagaio?

Formulem e validem as vossas conjecturas

Adaptada de Coxford, A., Burks, L., Giamati, C. & Jonik, J. (1993). *Geometria a partir de múltiplas perspectivas. Normas para o currículo e a avaliação em Matemática Escolar, Colecção de Adendas, Anos de escolaridade 9-12*. Lisboa: APM.

Tarefa 3

Poliedros Regulares

Com polígonos regulares congruentes podem-se construir poliedros regulares.

Utilizando *polidrons*, investiguem quantos poliedros regulares convexos é possível construir. Encontrem explicações para a vossa resposta

Estabeleçam, para cada um, as principais características.

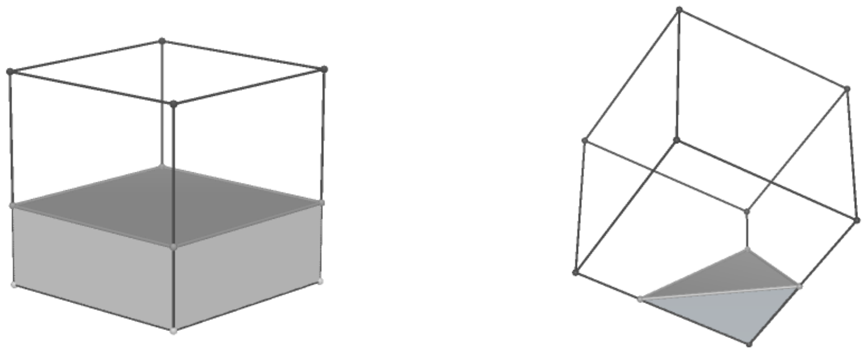
***Sugestão**:* À medida que vão construindo os poliedros registem numa tabela as principais características.

Adaptada de Guillén, S. G. (1991). *El mundo de los poliedros*. Madrid: Editorial Sintesis.

Tarefa 4

Secções Planas no Cubo

Considerem um cubo transparente no qual se introduziu um líquido colorido. O polígono formado pela superfície do líquido em repouso simula a secção produzida no cubo por um plano secante ou de corte e se se for variando a posição do cubo vão-se observando as várias possibilidades de corte.



Deitem um pouco de líquido colorido num cubo em acrílico e investiguem as várias secções que podem obter no cubo, determinadas por um plano secante ou de corte e que podem ser representadas pela superfície do líquido.

Relacionem, sempre que possível, o tipo de polígono obtido com a posição do plano de corte, em relação a faces, arestas, diagonais faciais ou espaciais do cubo.

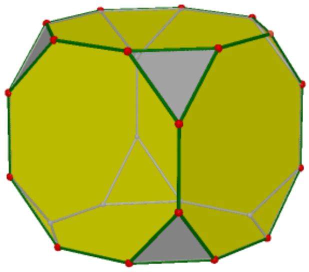
Registem as conclusões, desenhando o que vêem e escrevam as justificações para as vossas conjecturas.

Elaborada com base nas propostas de Loureiro, C., Oliveira, A. F., Ralha, E. & Bastos, R. (1997). *Geometria: Matemática-10.º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação e Departamento do Ensino Secundário.

Tarefa 5

Sólidos Platónicos Truncados

1. Abram o ficheiro "*cubo truncado. cg3*", observem o poliedro que resultou do corte de cada vértice do cubo por um plano, obtendo polígonos regulares, tal como mostra a figura.



Quantos vértices, arestas e faces tem o cubo truncado? Comparem esses dados com os do cubo original.

Nota 1: Para rodarem a figura pressionem o botão direito do rato, aparece o símbolo , com o botão do rato pressionado movimentem-no.

1. Façam o mesmo estudo para os restantes sólidos Platónicos.

Nota 2: Abram um novo ficheiro, na ferramenta escolham o poliedro regular que pretendem estudar e representem-no. Seleccionem o plano base, pressionem o botão direito do rato e escolham *esconder/mostrar*, para esconderem o plano.

3. Qual a relação entre os elementos do sólido original e do sólido truncado? Encontrem uma justificação para cada relação encontrada.

4. No caso do cubo truncado, as faces correspondentes às secções são triângulos. Analisem o que acontece nos outros poliedros truncados.

Adaptada das propostas elaboradas pela equipa do projecto Explorar e Investigar para Aprender Matemática (2001). *Investigações matemáticas na sala de aula: propostas de trabalho. Geometria*. Lisboa: APM.

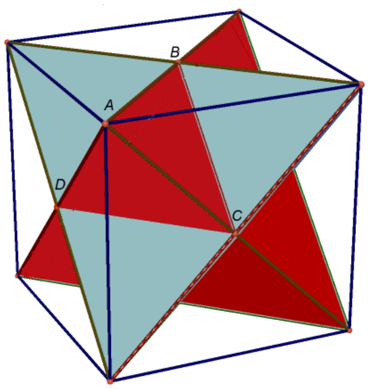
<u>Tarefa 6</u>

A *Stella octangula*

1. Num cubo podemos considerar uma diagonal em cada face, de modo que as 6 diagonais representadas concorram só em 4 vértices do cubo. Esses segmentos são as arestas de um novo poliedro. De que poliedro se trata? Justifiquem a vossa conjectura.

Sugestão: Construam o novo poliedro com auxílio do *software Cabri 3D*.

2. Se na mesma construção representarmos da mesma forma as restantes diagonais faciais do cubo obtemos a *stella octangula*, como mostra a figura seguinte.



2.1. Observem a figura e identifiquem o poliedro que se obtém pela intersecção dos dois sólidos que podem ser construídos a partir das diagonais faciais do cubo nas condições da questão 1. Justifiquem.

2.2. Estabeleçam relações entre o sólido ABCD da figura, a *stella octangula* e o cubo.

Elaborada com base nas propostas de Loureiro, C., Oliveira, A. F., Ralha, E. & Bastos, R. (1997). *Geometria: Matemática-10.º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação e Departamento do Ensino Secundário e de Veloso, E. (1998). *Geometria. Temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Anexo II – Pedido de autorização à Direcção da Escola

Ex.^{mo} Senhor

Director da Escola

Secundária ______________________

Eu, Maria Gorete Pires Branco, aluna do Curso de Mestrado em Ciências da Educação, na área de Supervisão Pedagógica na Educação Matemática, na Universidade do Minho, venho, por este meio, solicitar a sua autorização para desenvolver, com uma turma do 10.º ano, em colaboração com a professora de Matemática A, um projecto de ensino e aprendizagem do tema de Geometria com tarefas de exploração e investigação.

O projecto insere-se no âmbito de uma investigação que culminará na minha dissertação de Mestrado. Com este projecto pretendo compreender como é que os alunos trabalhando em pequenos grupos e realizando actividades com tarefas de exploração e investigação desenvolvem a capacidade de comunicação matemática e superam dificuldades na aprendizagem da Geometria.

Para concretizar este objectivo preciso de recolher dados através de entrevistas realizadas aos alunos e à professora da turma, da fotocópia de produções elaboradas pelos alunos e de gravações áudio e vídeo de aulas. Comprometo-me a assegurar o anonimato das fontes, sendo os dados trabalhados apenas por mim, sem intenção de prejudicar o processo de aprendizagem e avaliação dos alunos.

Fico à inteira disposição de V. Ex.ª para complementar toda a informação que julgue oportuna.

Agradecendo desde já a sua colaboração, subscrevo-me com os melhores cumprimentos,

15 de Setembro de 2010

Atenciosamente

____

(Maria Gorete Pires Branco)

Anexo III – Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Ex.[mo(a)] Sr.[(a)]

Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a)

____, N.º______, do 10.º ano.

Vai ser desenvolvido com os alunos da turma do(a) seu(sua) educando(a), em colaboração com a professora de Matemática A, um projecto de ensino e aprendizagem do tema de Geometria com tarefas de exploração e investigação. O projecto insere-se no âmbito de uma investigação que culminará numa dissertação de Mestrado. Este tem como objectivo compreender como é que os alunos trabalhando em grupo e realizando tarefas de exploração e investigação, desenvolvem a capacidade de comunicação matemática e superam dificuldades na aprendizagem da Geometria.

Assim, solicito que autorize o(a) seu(sua) educando(a) a participar na recolha de dados. Utilizar-se-ão fotocópias de trabalhos realizados pelos alunos, entrevistas e gravações áudio e vídeo de aulas.

Em todas as aulas, a responsável pela turma continuará a ser a professora de Matemática A.

É garantido, por mim, que os dados recolhidos apenas serão utilizados para os objectivos da investigação. Garante-se, igualmente, o anonimato do(a) aluno(a), a confidencialidade da informação e que as gravações serão destruídas no final do estudo.

Fico à inteira disposição de V. Ex.ª para complementar toda a informação que julgue oportuna.

Agradecendo, desde já, a colaboração prestada de V. Ex.ª, solicito que assine a declaração em baixo, devendo depois destacá-la e devolvê-la.

Com os melhores cumprimentos,

____

(Maria Gorete Pires Branco)

Declaro que autorizo o(a) meu (minha) educando(a) ______________________________, a participar na recolha de dados conduzida pela Professora Maria Gorete Pires Branco no âmbito da sua dissertação de Mestrado.

____/_____/__________

O(A) Encarregado(a) de Educação

____

Anexo IV – Ficha de caracterização

Esta ficha tem como objectivo saber o que pensas sobre a disciplina de Matemática e sobre as aulas de Matemática. As tuas respostas não terão influência alguma na avaliação e serão confidenciais.

1. Qual é a tua disciplina preferida? ____

Porquê?

____

____

2. Qual é a disciplina em que tens mais dificuldades? ______________________________

Porquê?

____

____

3. Achas que a Matemática é importante para a tua vida no futuro? ___________________

Porquê?

____

____

4. Gostas da disciplina de Matemática? ________

Indica três razões para a tua resposta?

1.ª____

2.ª____

3.ª____

5. Quais as actividades mais significativas que já realizaste nas aulas de Matemática? Porquê?

____

____

6. E quais as actividades que já realizaste nas aulas de Matemática, que menos te agradaram? Porquê?

____

____

7. Como costumas trabalhar nas aulas de Matemática? Individualmente, a pares ou em grupo?

____

8. Gostas de trabalhar em grupo? __________ Indica duas razões que justifiquem a tua preferência?

1.ª ____

2.ª ____

9. Consegues explicar a matéria ao(s) teu(s) colega(s) e entender o que ele(s) te explica(m)?

____

____

10. Sentes dificuldade em argumentar e comunicar as tuas ideias aos teus colegas e à professora? ______ Porquê?

____

____

11. O que dizes nas aulas de Matemática é valorizado pelos teus colegas? _____________ E pela professora? ___________O que te leva a pensar assim?

____

____

12. Que tipo de tarefas gostas mais de realizar nas aulas de Matemática (exercícios, problemas, tarefas exploratórias, investigações)? Porquê?

____

____

____

13. Como seria para ti uma boa aula de Matemática?

____

____

____

14. Na disciplina de Matemática qual foi a matéria que mais gostaste?

___

___

15. Gostas de estudar Geometria? Porquê?

___

___

16. Sentes dificuldades na aprendizagem da Geometria? ___________ Indica duas razões para a tua resposta?

1.ª ___

2.ª ___

17. Achas que aprender Geometria é importante para a tua formação? Porquê?

___

___

18. De entre os vários métodos para aprender Geometria, indica, por ordem, os três que mais preferes.

—— Exposição da matéria pelo professor.

—— Utilização de materiais manipuláveis.

—— Resolução de problemas relacionados com situações reais.

—— Exploração de tarefas de investigação.

—— Organização de debates para discutir ideias.

—— Resolução de exercícios do livro para praticar técnicas.

—— Utilização do computador e de programas de Geometria Dinâmica.

Nome: ___

Obrigada pela tua colaboração!

Anexo V – Guião da entrevista aos alunos

Sendo uma entrevista semi-estruturada, não se elabora um conjunto muito preciso de questões, são definidos alguns tópicos a abordar:

- Opinião sobre a experiência e sobre as aulas de Matemática em que foram trabalhadas as tarefas exploratórias e investigações.

- Esclarecimento de alguns pontos que suscitaram o interesse da investigadora na resolução das tarefas.

Mais especificamente as questões a colocar são:

- O que acharam das aulas onde foram trabalhadas tarefas exploratórias e investigações matemáticas?

- Que tipo de dificuldades sentiram no trabalho com tarefas de natureza exploratória?

- Gostaram de trabalhar em grupo? Porquê? O facto de trabalharem em grupo ajudou-vos de alguma forma a superar as dificuldades sentidas?

- Este trabalho ajudou-vos, de alguma maneira, na participação na aula e na comunicação das vossas ideias ao grupo e à turma?

- O trabalho desenvolvido ajudou-vos a comunicar e a argumentar os vossos raciocínios?

- A discussão no grupo turma ajudou-vos a superar dificuldades?

- De um modo geral, que balanço fazem da experiência?

Anexo VI - Guião da primeira entrevista à professora

Percurso académico e profissional

- Qual a tua formação académica?
- Há quantos anos leccionas?
- Quais os níveis de ensino que já leccionaste?
- Já participaste em algum projecto ou experiência inovadora?
- Habitualmente trabalhas de forma colaborativa com outros colegas?
- Tens experiência em trabalhar com tarefas exploratórias na sala de aula? E com investigações matemáticas?

Ensino da Geometria

- Consideras importante o ensino da Geometria? Porquê?
- O que consideras fundamental que os alunos aprendam em Geometria?
- Como costumas explorar o tema de Geometria no plano e no Espaço do 10.º ano e a que meios recorres? (Novas tecnologias; quadro, giz e manual; materiais manipuláveis, ...).
- Que opinião achas que os alunos têm da Geometria?
- Os alunos costumam revelar dificuldades neste tema? Quais?
- A que atribuis as dificuldades que os alunos manifestam na aprendizagem da Geometria?
- Qual a metodologia de trabalho na aula que consideras mais adequada para abordar este tema? Porquê?

Trabalho de grupo e tipo de tarefas

- Nas tuas aulas os alunos costumam trabalhar em grupo? Porquê? Que tipo de trabalho realizam em grupo?
- Achas interessante propor aos alunos a realização de tarefas de natureza exploratória para trabalhar este tema? Porquê?

Anexo VII - Guião da segunda entrevista à professora

Experiência de Ensino e Aprendizagem

Aulas

- As aulas onde foram trabalhadas as tarefas exploratórias e investigação foram motivadoras?
- Achas que os alunos aproveitaram bem o facto de trabalharem em grupo?
- O que achaste do papel dos alunos nestas aulas?
- Que diferenças encontraste relativamente às outras aulas?
- Quais foram os aspectos mais marcantes destas aulas?

Tarefas

- Consideras que o tipo de tarefas proposto poderá ajudar a colmatar as dificuldades, sentidas pelos alunos, neste tema?
- Das tarefas propostas, quais as que consideraste mais importantes?
- Achas que a realização de tarefas de natureza exploratória facilitou a compreensão dos conteúdos?

Experiência em geral

- Consideras que os alunos sentiram dificuldades na realização das tarefas? Que tipo de dificuldades?
- As dificuldades foram diferentes daquelas que geralmente os alunos manifestam na abordagem deste tema? Em que aspecto?
- Qual a tua opinião sobre à reacção dos alunos em relação à metodologia usada?
- Achas que a metodologia adoptada estimulou ou facilitou a aprendizagem? Em que medida?
- A metodologia usada ajudou a superar algumas das dificuldades dos alunos? De que forma?
- Quais as vantagens e desvantagens que destacas na utilização desta metodologia de trabalho?
- Que capacidades permitiu desenvolver nos alunos esta metodologia de trabalho?
- De um modo geral, o que funcionou e não funcionou na experiência? O que alteravas?
- Que significado teve a experiência para ti?
- De um modo geral, qual é a tua apreciação sobre a experiência?

Anexo VIII – Ficha de reflexão individual sobre a tarefa

Responde individualmente a cada uma das seguintes questões:

1. O que aprendeste ao realizares a tarefa?

____

____

____

____

2. Que dificuldades sentiste?

____

____

____

____

Chegaste a superá-las? Como?

____

____

____

3. Qual foi o teu contributo para o trabalho de grupo?

____

____

____

____

Nome: ______________________________ Grupo n.º __________

Obrigada pela tua colaboração!