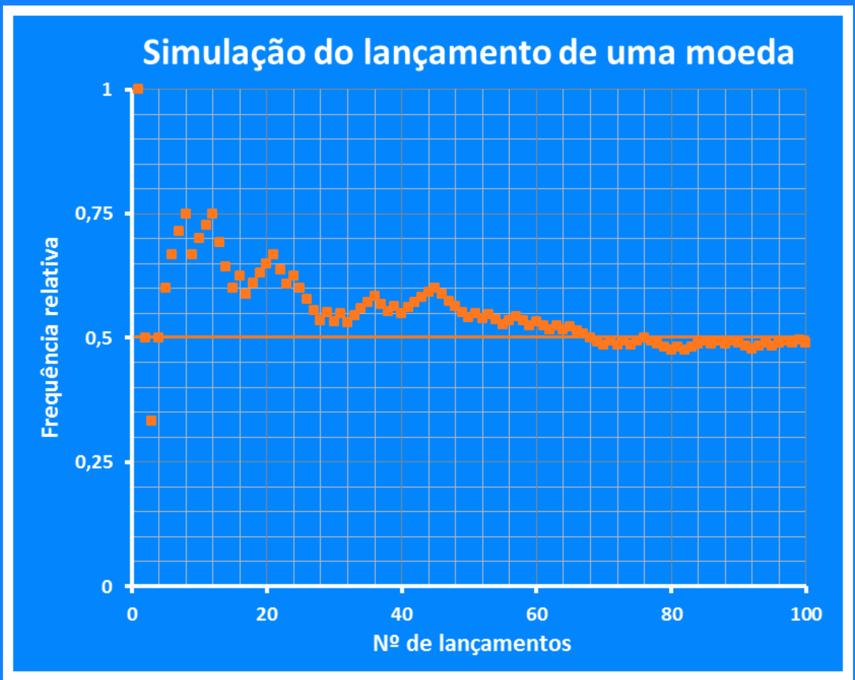
ATAS DO III ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA



Organizadores

José António Fernandes
Floriano Viseu
Maria Helena Martinho
Paulo Ferreira Correia

Centro de Investigação em Educação (CIEd)
Instituto de Educação
Universidade do Minho

2013

FICHA TÉCNICA

Título

ATAS DO III ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA

Organizadores

José António Fernandes
Floriano Viseu
Maria Helena Martinho
Paulo Ferreira Correia

Depósito Legal

353164/12

ISBN

978-989-8525-19-2

Centro de Investigação em Educação (CIEd)
Instituto de Educação
Universidade do Minho
4710-057 Braga

300 Exemplares

Fevereiro de 2013

Apoios

Centro de Investigação em Educação (CIEd)

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Reconhecendo a relevância social da Estatística, com implicações na vida da generalidade das pessoas, celebra-se em 2013 o Ano Internacional da Estatística, uma iniciativa que conta com o apoio de mais de 1400 organizações a nível mundial. As organizações financiadoras do Ano Internacional da Estatística, American Statistical Association, Institute of Mathematical Statistics, International Biometric Society, International Statistical Institute (e a Bernoulli Society) e Royal Statistical Society, estabeleceram os seguintes três principais objetivos para o evento: (1) Aumentar a consciência pública do poder e impacto da Estatística em todos os aspetos da sociedade; (2) Cuidar a Estatística como profissão, especialmente junto dos jovens; e (3) Promover a criatividade e o desenvolvimento das ciências da Probabilidade e da Estatística.

Também nos últimos anos, em consequência da crescente visibilidade social da Estatística, o seu ensino tem sido aprofundado nas escolas de muitos países, entre os quais se encontra Portugal. Especificamente no caso português, com a publicação em 2007 do ajustamento do Programa de Matemática do Ensino Básico, assistiu-se a um desenvolvimento do ensino da Estatística ao nível do ensino básico, fundamentalmente no que respeita ao estudo da dispersão e no que respeita à abordagem didática do tema. Neste último caso salienta-se a sua exploração através de projetos estatísticos e a recomendação do uso de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), que constituem recomendações amplamente preconizadas para o ensino da Estatística.

É neste contexto que se realiza o III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola, que vem na sequência da realização dos dois encontros anteriores, perseguindo a consecução dos três seguintes objetivos:

- Divulgar resultados de estudos realizados no âmbito da Estatística e Probabilidades;
- Contribuir para melhorar o ensino e a aprendizagem de Estatística e Probabilidades;
- Contribuir para o desenvolvimento profissional de professores de Matemática nestas temáticas.

No III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola foram efetuadas treze apresentações orais, das quais quatro conferências, todas elas centradas no tema de Probabilidades, e nove comunicações, também todas elas centradas no tema de Estatística.

Na conferência *La Comprensión de la Probabilidad en los Niños: ¿Qué podemos aprender de la investigación?*, da autoria de Carmen Batanero, discutem-se as teorias sobre o desenvolvimento do raciocínio probabilístico, com ênfase em Piaget e Fischbein, extraindo-se, de seguida, algumas conclusões sobre várias noções probabilísticas a partir das investigações revistas.

Na conferência *La Cuantificación del Azar: Una articulación de las definiciones subjetiva, frecuencial y clásica de probabilidad*, da autoria de Ernesto Sánchez e Julio César Valdez, através de uma metodologia de entrevista, estuda-se o raciocínio desenvolvido por um aluno na realização de duas tarefas (uma focada na noção de experiência aleatória e outra centrada na comparação de probabilidades), tendo por referência diferentes conceitos de probabilidade (clássico, frequencista e subjetivo) e as principais dificuldades de aprendizagem e os níveis de raciocínio no conceito de probabilidade.

Já na conferência *Dilemas Históricos: Valor de las paradojas en la clase de Matemáticas*, os autores, José M. Contreras e Pedro Arteaga, discutem o interesse da exploração de situações paradoxais na aprendizagem de Probabilidades. Concretamente, exploram-se o dilema dos três prisioneiros e o dilema de Condorcet, para os quais são apresentadas algumas formulações e soluções, são analisados os objetos matemáticos implicados nessas soluções, bem como possíveis raciocínios erróneos dos estudantes.

Por último, na conferência *Caracterização das Intuições de Alunos do 9º Ano em Independência e Probabilidade Condicionada*, da autoria de Paulo Ferreira Correia e José António Fernandes, adotando uma metodologia de questionário, caracterizam-se as intuições em independência e probabilidade condicionada de 310 alunos do 9º ano de escolaridade, considerando as repostas (corretas e erradas) dos alunos, as suas justificações e estratégias e o desempenho em matemática.

Relativamente às comunicações, todas elas inseridas no tema de Estatística, em *Un Estudio Empírico de los Problemas de Correlación y Regresión en Libros de Texto de Bachillerato*, os autores M. Magdalena Gea, Carmen Batanero e Gustavo Cañadas estudam as situações apresentadas no tema de Correlação e regressão de manuais do final do ensino secundário, considerando os campos de problemas, os seus contextos e o tipo de dependência.

Na comunicação *A Investigação e a Tecnologia da Informação Contribuindo para o Ensino de Estatística*, da autoria de Ailton Paulo de Oliveira Júnior, relata-se a aprendizagem de conceitos básicos de Estatística de alunos bolsistas da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, apoiados por professores supervisores da Universidade, numa perspetiva de projetos (investigações) e recorrendo a tecnologia da informação e usando dados recolhidos através de questionários em alunos do ensino fundamental e do ensino médio.

Já na comunicação *O Conhecimento de Futuros Professores sobre as Investigações Estatísticas a Partir da Análise de Episódios de Sala de Aula*, da autoria de Ana Henriques e Hélia Oliveira, apresenta-se um estudo sobre o conhecimento de uma futura professora de matemática do 3º ciclo do ensino básico e do ensino secundário para ensinar Estatística através de investigações, a partir da análise de episódios de sala de aula que lhe foram apresentados e tendo por referência um quadro teórico que articula os domínios do conhecimento estatístico do professor para ensinar e o pensamento estatístico.

Na comunicação *A Vida é Feita de Pequenos Nadas! Primeira Análise Qualitativa das Atitudes sobre a Estatística de Professores Portugueses*, da autoria de M. José Alexandre Martins, Maria Manuel Nascimento e Assumpta Estrada, é apresentado um estudo qualitativo sobre atitudes em relação à Estatística de professores do primeiro e segundo ciclos do ensino básico em Portugal.

Em relação à comunicação *O Uso da Folha de Cálculo na Construção de Gráficos Estatísticos por Alunos do 7º Ano*, da autoria de António Pereira de Vasconcelos e José António Fernandes, estuda-se a utilização da folha de cálculo por alunos do 7º ano na construção de gráficos estatísticos, nomeadamente os aspetos que devem ser considerados na sua integração no ensino, as potencialidades e limitações do seu uso na aprendizagem da construção de gráficos estatísticos.

No caso da comunicação *Relevância dos Gráficos Estatísticos nos Manuais Escolares da Disciplina de Ciências Físico-Químicas*, da autoria de Diana Sofia Jesus, José António Fernandes e Laurinda Leite, estudam-se os gráficos estatísticos incluídos nos manuais escolares da disciplina de Ciências Físico-Químicas do 3º ciclo do ensino básico, com foco na análise do tipo e qualidade dos gráficos e no nível de compreensão requerido para a sua leitura e interpretação.

Finalmente, as três comunicações seguintes resultaram de estudos desenvolvidos no âmbito da unidade curricular de Estágio Profissional do Curso de Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade do Minho.

Na comunicação *Aprendizagem de Estatística com Tecnologia no 7º Ano de Escolaridade*, da autoria de Catarina Vasconcelos Pereira Gonçalves, José António Fernandes e Paulo Ferreira Correia, estuda-se a exploração, por alunos do 7º ano, de uma tarefa envolvendo o gráfico circular com o objetivo de identificar formas de utilização da tecnologia no ensino e aprendizagem da Estatística e reconhecer aspetos fortes e frágeis na sua utilização.

No caso da comunicação *A Representação Gráfica na Aprendizagem de Estatística no 10º Ano de Escolaridade*, da autoria de Ana Sofia Alves Ferreira e Floriano Augusto Veiga Viseu, averigua-se o contributo das representações gráficas no desenvolvimento da capacidade estatística de alunos do 10.º ano de escolaridade recorrendo a gráficos estatísticos do manual escolar e trabalhados na sala de aula e às perspetivas dos alunos sobre a estratégia de ensino delineada.

Por último, no texto *Estratégias Usadas por Alunos do 7º Ano na Resolução de Tarefas Estatísticas*, da autoria de Andreia Filipa Teixeira Salgado Ribeiro, Paulo Ferreira Correia e José António Fernandes, estuda-se a exploração, por alunos do 7º ano, de várias tarefas estatísticas com o objetivo de identificar as estratégias usadas pelos alunos na resolução dessas tarefas, incluindo as suas dificuldades.

Braga, fevereiro de 2013
Os Organizadores

PROBABILIDADES

CONFERÊNCIAS

FERNANDES, J. A., VISEU, F., MARTINHO, M. H. & CORREIA, P. F. (ORGS.) (2013). *ATAS DO III ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA*. BRAGA: CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DO MINHO.

LA COMPRENSIÓN DE LA PROBABILIDAD EN LOS NIÑOS: ¿QUÉ PODEMOS APRENDER DE LA INVESTIGACIÓN?

Carmen Batanero
Universidad de Granada, batanero@ugr.es

Resumen. El razonamiento probabilístico de los niños ha sido caracterizado en diversas investigaciones, particularmente por Piaget e Inhelder y Fischbein. En este trabajo se describen los resultados de estos trabajos, con el fin de orientar adecuadamente a los profesores para enseñar la probabilidad a niños en la Educación Primaria.

Introducción

Aunque la enseñanza de la probabilidad ha estado presente en los currículos de enseñanza secundaria en las últimas dos décadas se recomienda adelantar la enseñanza a la educación primaria de forma que se pueda proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica más directa desde su infancia (ej. NCTM, 2000; M.E.C., 2006). En este último documento se incluyen los siguientes contenidos:

- *Primer ciclo* (6-7 años*:* "Carácter aleatorio de algunas experiencias: Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad" (MEC, 2006, p. 43098).
- *Segundo ciclo:* "Carácter aleatorio de algunas experiencias: Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Introducción al lenguaje del azar" (MEC, 2006, p. 43099).
- *Tercer ciclo:* "Carácter aleatorio de algunas experiencias: Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso" (MEC, 2006, p. 43101).

Una condición para asegurar el éxito de estas propuestas es la formación de los profesores. Sin embargo, autores como Pierce y Chick (2011) indican que algunos profesores de matemáticas se encuentran inseguros al enseñar esta materia, pues su interés es contribuir a la formación, no sólo de los conocimientos matemáticos de sus estudiantes, sino también de sus intuiciones probabilísticas. Por otro lado, cuando se sugiere introducir un nuevo tema en el currículo es muy importante estudiar el razonamiento de los niños respecto al mismo, para poder valorar hasta qué punto son asequibles para ellos los nuevos conocimientos que tratamos de enseñar. Los niños aprenden no sólo en la escuela, sino en su entorno familiar y social, y su razonamiento se modifica gradualmente, a partir de sus experiencias y de la interacción con los objetos y el mundo que les rodea. El propósito de esta presentación es dar a conocer a los profesores algunas conclusiones de las investigaciones con niños de primaria en relación a su razonamiento probabilístico, para facilitar al profesor la enseñanza en este nivel educativo.

1. Especificidad de la probabilidad

Al comenzar la enseñanza de la probabilidad es especialmente importante analizar los razonamientos de los niños, puesto que en dichas materias tratamos con ideas bastante abstractas y no tan ligadas a la experiencia directa del niño como pudieran ser los conceptos geométricos o numéricos. Desde muy pequeño el niño debe aprender a estimar, discriminar y diferenciar formas, distancias y cantidades. Estos conceptos básicos se pueden concretizar con objetos físicos; por ejemplo, la suma o la resta se pueden ejemplificar juntando o separando colecciones de dulces, piedrecillas o cualquier otro objeto. Además estas operaciones (también el producto o división) tienen la propiedad de ser reversibles (volver a los datos primitivos al deshacer la operación). Así, si un niño añade dos caramelos a un montón de cinco, obtiene siete caramelos; quitando los dos últimos vuelve a los cinco que tenía inicialmente. Además obtiene el mismo resultado cada vez que repita estas operaciones. Igualmente si, por ejemplo, divide un cuadrado en dos partes iguales doblando por la bisectriz y cortando las dos partes; al volver a unirlas vuelve al cuadrado primitivo.

Por el contrario, no existe una experiencia concreta similar de lo aleatorio, ya que no podemos manipular estos fenómenos para producir un resultado específico, ni devolver los objetos a su estado inicial deshaciendo la operación. Por ejemplo, si hacemos girar la aguja en la ruleta mostrada en la Figura 1, desde la posición inicial (número 6), impulsándola hacia la derecha, no sabemos con seguridad qué número resultará. Supongamos que la ruleta se para en el 1. Si giramos a continuación la aguja en sentido contrario al anterior (hacia la izquierda) no es seguro que vuelva al número 6. Por otro lado, aunque los 8 números en la ruleta tienen la misma probabilidad, no podemos asegurar (e incluso sería difícil) que en ocho giros sucesivos obtengamos una vez cada uno de los números.

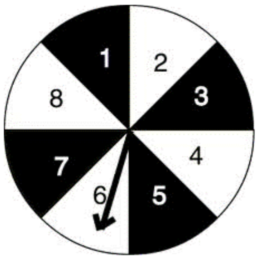


Figura 1. Ruleta con 8 valores equiprobables.

Esta falta de reversibilidad de los experimentos aleatorios sin duda influye en el desarrollo más tardío de las nociones de probabilidad, aunque esto no quiere decir que los niños no tengan ideas intuitivas al respecto. En lo que sigue analizamos las investigaciones sobre el desarrollo del razonamiento probabilístico en los niños llevadas a cabo por Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975) y algunas posteriores.

2. Teorías sobre el desarrollo del razonamiento probabilístico

2.1. Etapas de desarrollo según Piaget

Desde que nacemos hasta que llegamos a la vida adulta, nuestra forma de pensar, así como el razonamiento matemático, van evolucionando. Piaget se centró en dar criterios para determinar en qué nivel de desarrollo intelectual se encuentra el niño a diversas edades respecto a la comprensión formal de los conceptos matemáticos.

La teoría desarrollada por Piaget (1975) indica que cuando un individuo afronta un problema matemático, lo intenta resolver mediante los conocimientos que ya posee, usando esquemas conceptuales existentes. Como resultado de la asimilación, el esquema cognitivo existente se reconstruye o expande para acomodar la situación. Un niño va comprendiendo su entorno del mejorando su sensibilidad a las contradicciones, realizando operaciones mentales, comprendiendo las transformaciones y adquiriendo nuevas nociones.

Piaget postula que la experiencia, la actividad y el conocimiento previo son las bases que determinan el aprendizaje. El conocimiento es construido activamente por el sujeto y no recibido pasivamente del entorno. El niño trata de adaptarse al mundo que le rodea. Cuando una idea nueva se le presenta, se crea un *conflicto cognitivo* o *desequilibrio* en su estado mental si esta idea choca con las ya existentes.

Por ejemplo, cuando se comienza el estudio de los números decimales, puede crearse un conflicto cognitivo respecto a la idea asumida previamente de que todo número tiene un número siguiente (y que era válida para los números naturales). Así cuando un niño percibe que entre un número decimal y otro pueden concebirse infinitos números diferentes, se encuentra perdido. Para reaccionar a este desequilibrio se requiere un proceso de "equilibración" que consiste en los pasos de asimilación y acomodación. La asimilación es la incorporación (aceptación) por parte del sujeto de los datos nuevos (en este caso, aceptar que hay números que no tienen un único siguiente). La acomodación es el cambio o reestructuración de los ya existentes (sería comprender globalmente la estructura del sistema numérico.

El aprendizaje se concibe como un proceso que progresa lentamente con puntos conflictivos que el alumno debe superar mediante el proceso descrito. Conocer es un proceso de adaptación que organiza el propio mundo de la experiencia. La posibilidad de aprender depende del conocimiento previamente adquirido y del desarrollo intelectual del alumno, que sigue una serie de etapas. Las etapas son particiones en fases, de modo que los sujetos que están en una misma fase tienen un modo de razonamiento similar y la progresión de una etapa a otra siempre sigue un cierto patrón (Piaget, 1975).

Estas etapas determinan el desarrollo evolutivo y se concretizan para el caso de la probabilidad en Piaget e Inhelder (1951). Son las siguientes (la edad es aproximada; puede variar de un niño a otro, pero las etapas siempre se suceden en el mismo orden):

- *Período sensorio motor* (0-2 años). Se caracteriza por el movimiento y las sensaciones y describe el razonamiento de los bebés. El bebé comienza a manipular objetos; percibe y experimenta propiedades (color, tamaño, forma, textura, sabor, olor,...). Hacia los 5 meses discrimina conjuntos de 2-3 ítems; a los 10 meses discrimina conjuntos de 3-4 ítems.

- *Período pre operacional* (2-7 años). Caracterizada por la necesidad de manipular objetos reales para el aprendizaje de un cierto concepto, pues el niño se apoya en sus experiencias empíricas para comprender los conceptos. El niño de preescolar y comienzo de la primaria llega a comprender la organización del espacio, situando y desplazando los objetos (comprendiendo conceptos como dentro/fuera, encima/debajo, delante/detrás, arriba/abajo). También descubre y compara propiedades físicas de los objetos que manipula: longitud, distancia, cantidad. Utiliza diferentes formas de etiquetado para diferenciar colecciones numéricas de pocos elementos, es decir, comienza a contar cantidades pequeñas de objetos y a comprender el concepto de cardinal; contrasta magnitudes por comparación y estima, a partir de una cantidad, la longitud, volumen y peso. Es capaz de ordenar sucesos en el tiempo (saber lo que ocurrió antes y lo que vendrá después). Trabaja con una sola cantidad y resuelve problemas de cambio sencillo (operaciones aditivas).

- *Período de las operaciones concretas* (7-11). Se comienza a comprender la conservación de la masa, peso, número y volumen. Aparecen conceptos secundarios, que no necesitan ser abstraídos de la experiencia concreta. Este es el periodo en que el niño va progresando a lo largo de la educación primaria. Aparece la comprensión de operaciones reversibles (aritméticas) con la adquisición de principios de conservación de cantidad, peso y volumen. Compara y cuantifica magnitudes y formas en geometría; llega a comprender el sistema métrico decimal y representa datos gráficamente. Agrupa los objetos en función de propiedades aditivas o multiplicativas; ordena elementos en función de una cualidad que varía (por peso, por color). Adquiere la comprensión del sistema de numeración y de las operaciones con números. Comprende conceptos espaciales: espacio que ocupan los objetos y su desplazamiento (topológicas, proyectivas, euclidianas, métricas,...); y, operaciones temporales y cinéticas: orden de sucesión de los objetos en el espacio. Los objetos materiales son un referente importante y todavía tiene dificultad para concebir una operación en forma abstracta.

- *Período de operaciones formales* (11-15). El período de las operaciones formales constituye el último paso del desarrollo intelectual, y de adquisición de las habilidades cognitivas y sociales (Inhelder y Piaget, 1955; Piaget, 1975). Se pueden manipular relaciones entre representaciones simbólicas, se formulan hipótesis y se establecen conclusiones. Se comprende el significado de abstracciones verbalmente, sin referirse a objetos particulares. Características del pensamiento formal son: (a) se contempla lo real como parte de lo posible; (b) se acentúa lo hipotético-deductivo frente a lo empírico-inductivo; (c) se depura el pensamiento proposicional; (d) se acentúa la diferencia entre inteligencia práctica y especulativa; (e) se incrementa la cantidad y calidad de las estrategias de procesamiento de la información; (f) se potencia y acentúa el análisis crítico frente a las percepciones globales; (g) se depura y da carácter sistemático al método de análisis; (h) se desarrollan y amplía el razonamiento combinatorio.

En resumen, según Inhelder y Piaget (1955), la adquisición de las operaciones formales viene caracterizada por el razonamiento combinatorio, la lógica de proposiciones, la proporcionalidad, la comprensión de la relatividad de dos movimientos o velocidades, la comprensión del equilibrio mecánico (toda acción le corresponde una reacción de la misma intensidad pero en sentido contrario), la probabilidad y la correlación, que para Piaget es el último paso en la comprensión de la probabilidad.

2.2. La intuición, según Fischbein

Otro autor muy influyente en el campo de la probabilidad es Fischbein (1975), quien trató de demostrar que los niños tienen ideas correctas parcialmente formadas sobre los conceptos probabilísticos y analizó el efecto de la instrucción para la mejora de estas intuiciones. También concede una gran importancia a la intuición como componente de la inteligencia. Para el autor el conocimiento intuitivo "no está basado en la evidencia empírica o en argumentos lógicos rigurosos y, a pesar de ello, se tiende a aceptar como cierto y evidente" (p. 26).

Las intuiciones son, según Fischbein (1987), procesos cognitivos que intervienen directamente en las acciones prácticas o mentales, y tienen las siguientes características: inmediatez, globalidad, capacidad extrapolatoria, estructurabilidad y auto-evidencia. La inmediatez significa que las intuiciones no son reflexivas, sino que surgen con frecuencia en forma espontánea. El carácter global se opone al analítico o descomposición en partes. Las intuiciones van más allá de un caso particular, en cierto modo tienen un carácter teórico y por eso sirven para extrapolar o hacer predicciones. Parecen autoevidentes para el sujeto, quien no necesita demostración. Las intuiciones se relacionan entre sí, formando estructuras de razonamiento. Fischbein (1987) diferencia entre intuiciones primarias y secundarias:

- Las *intuiciones primarias* se adquieren directamente con la experiencia, sin necesidad de ninguna instrucción sistemática. Ejemplo de ellas son las intuiciones espaciales elementales, como el cálculo de distancia y localización de objetos, o el admitir que al lanzar un dado todas las caras tienen la misma probabilidad de salir.

- Por el contrario, las *intuiciones secundarias* se forman como consecuencia de la educación, principalmente en la escuela. Por ejemplo, una intuición secundaria (errónea) es la llamada "falacia del jugador", por la cual, después de lanzar una moneda una serie de veces y haber obtenido caras, el sujeto tiende a predecir que la próxima vez es más probable que salga cruz. Esto se debe a una mala interpretación de la ley de los grandes números.

Una intuición secundaria no se reduce a una simple fórmula aceptada o utilizada automáticamente, sino que se transforma en convicción, en creencia, en un sentimiento de evidencia. Pero una intuición no se forma a partir de la información obtenida de una lectura o de una explicación teórica, sino de una información que el alumno utiliza en sus propias acciones y predicciones a lo largo de gran parte de su desarrollo intelectual.

2.3. Otras investigaciones posteriores

Son muchos los investigadores que, posteriormente, han tratado de confirmar, rechazar o completar las conclusiones de Piaget y de Fischbein y sería imposible reseñarlas acá, debido a su gran número. Una síntesis de ellas puede consultarse en Shaughnessy (1992) y Jones Langrall y Money (2007). De interés para lo que sigue son los estudios de Green (1983) y Cañizares (1997) y Fernandes (2001), quienes realizaron evaluación del razonamiento probabilístico de niños ingleses (11-16 años), españoles (10-14 años) y portugueses (13-18 años) respectivamente con cuestionarios escritos.

3. Algunas conclusiones de las investigaciones sobre razonamiento probabilístico de los niños

Aunque algunas de las investigaciones citadas se interesaron por la comprensión de la probabilidad desde un punto de vista puramente psicológico (para describir etapas de desarrollo y para crear una teoría sobre este desarrollo) el profesor que se enfrenta a la tarea de enseñar al niño está interesado en conocer cuáles son las tareas que puede proponer a distintas edades y qué dificultades puede encontrar el niño en su ejecución. En lo que sigue resumimos esta información sobre la comprensión de conceptos probabilísticos específicos.

3.1. Aceptación del azar

El primer paso para comenzar a enseñar probabilidad es asegurarnos que los niños son capaces de diferenciar las situaciones aleatorias y deterministas, es decir de apreciar algunas características básicas de la aleatoriedad. Los niños están rodeados de azar desde que nacen, en sus juegos (echar a suertes, juegos de datos, cartas,...) y vida cotidiana (meteorología, deportes,...). ¿Desarrollan, entonces los niños pequeños una comprensión intuitiva del azar?

Esta teoría fue rechazada por Piaget e Inhelder (1951), debido a que ellos tenían una concepción muy compleja del significado del azar, que para ellos es complementario a la relación causa-efecto. Según estos autores el azar ha de verse como resultado de la interferencia y combinación de una serie de causas, que actuando independientemente produce un resultado inesperado. El azar habría que considerarlo asimismo como complementario a la composición lógica de operaciones reversibles y requiere un razonamiento combinatorio, para poder concebir las distintas posibilidades que pueden darse en un fenómeno aleatorio. Pero como el niño pequeño no comprende la idea de causa, ni tiene razonamiento combinatorio, según los autores no tiene un marco de referencia para identificar los fenómenos aleatorios.

Piaget organiza el siguiente experimento para probar su teoría. Utiliza una bandeja con dos series de compartimentos (Figura 2). En una de esta serie de compartimentos se colocan cuatro bolas blancas y en el otro cuatro rojas, de modo que al bascular la bandeja se produce la mezcla progresiva de las dos clases de bolas. Antes de mover la bandeja, Piaget pide a los niños que hagan una predicción sobre la colocación final de las bolas.

En el *periodo pre operacional* los niños piensan que, después de mover varias veces la bandeja, las bolas vuelven nuevamente a su lugar original, o bien que el conjunto completo de blancas acabarán en el lugar ocupado originalmente por las rojas, y viceversa. Piaget interpreta esta reacción típica de los niños menores de 7 años como indicadora de que el niño no comprende la naturaleza irreversible de la mezcla aleatoria por tener un pensamiento reversible. Además el niño de esta edad no comprende bien la relación entre causa y efecto, ni tiene razonamiento combinatorio completo, por lo que Piaget piensa no hay una intuición del azar innata en el niño, como no existía tampoco en el hombre primitivo, que atribuía los sucesos aleatorios a causas ocultas o a la "voluntad de los dioses".

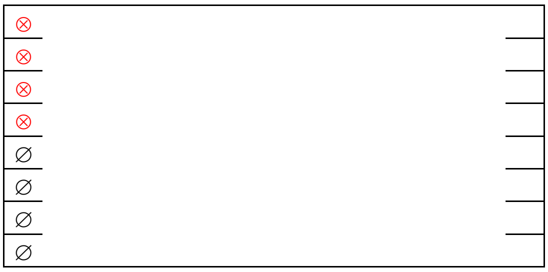


Figura 2. Experimento de la bandeja: Al mover la bandeja, las bolas, que al principio estaban ordenadas se mezclan progresivamente.

Esta opinión de Piaget es rechazada por Fischbein para quien la *intuición primaria* del azar, esto es, la distinción entre fenómeno aleatorio y determinista aparece antes de los 7 años. Fischbein se basa en la conducta de los niños al practicar juegos de azar, ya que en juegos sencillos, los niños son capaces de elegir la opción de mayor probabilidad. Por ejemplo, si preguntamos al niño en cuál de las dos cajas A y B (Figura 3) es más fácil sacar bola roja con los ojos cerrados, el niño es capaz de acertar si el número de casos desfavorables es igual y el número de casos es pequeño.

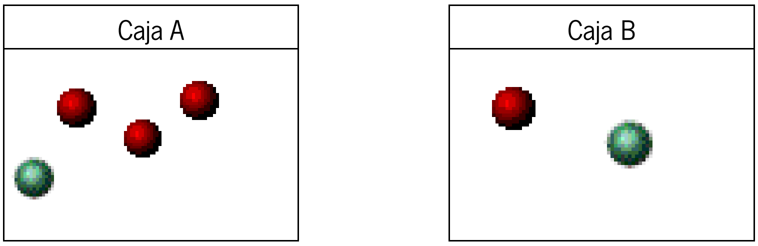


Figura 3. Urnas con fichas de colores.

En el *periodo de las operaciones concretas* (entre 7 y 11 años) con la adquisición de esquemas operacionales espacio-temporales y lógico-matemáticos, el niño alcanza la capacidad de distinguir entre el azar y lo deducible, aunque esta comprensión no es completa, puesto que el pensamiento está todavía muy ligado al nivel concreto. No obstante, el niño comienza a comprender la interacción de cadenas causales que conducen a sucesos impredecibles, y la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios. Puede entender, por ejemplo, que la cantidad de nubes, junto con el viento va a producir o no la lluvia. Pero, si no comprende bien la interferencia de las causas, sin reconocer su independencia, o comprende la independencia y no la interferencia, no llega a construir la idea de azar. Puede entonces pensar que la lluvia la producen las hadas o los mayores o buscar otra explicación causal.

En los fenómenos aleatorios los resultados aislados son imprevisibles pero el conjunto de posibilidades puede determinarse mediante un razonamiento de tipo combinatorio, con lo que se vuelve previsible. Así, aunque no sabemos si el próximo bebé que nazca será niño o niña, podemos predecir que en una gran ciudad la mitad más o menos de los recién nacidos serán de cada sexo. Es en este momento, cuando comprende la regularidad global de los fenómenos aleatorios, cuando el niño comienza a asignar probabilidades a los sucesos, como razón entre las posibilidades de un caso particular y del conjunto de posibilidades. Si se aceptan estas teorías, la idea de azar, para Piaget, lo mismo que la de probabilidad, no puede ser totalmente adquirida hasta que se desarrolle el razonamiento combinatorio, en la etapa de las *operaciones formales.*

Fischbein, por un lado, como hemos visto, indica que hay una intuición parcial del azar en el niño, que se va desarrollando poco a poco. Pero es necesaria la enseñanza, pues de otro modo, es posible que una persona llegue a las operaciones formales con una pobre percepción del azar. Entonces buscará dependencias causales que reduzcan lo incierto, incluso en situaciones donde no existen tales dependencias, por ejemplo "la mala suerte". Estará influenciado por las tradiciones culturales y educativas de la sociedad moderna, que orientan el pensamiento hacia explicaciones deterministas.

3.2. La estimación de la frecuencia relativa

Supuesto que un niño sea capaz de diferenciar los fenómenos aleatorios y deterministas, el segundo paso es que pueda estimar en una serie de experimentos cuáles son los sucesos que aparecen con mayor o menor frecuencia. Muchos psicólogos han llevado a cabo experimentos de aprendizaje probabilístico, en los cuales se trata de estudiar las predicciones de los sujetos ante situaciones en que un suceso se repite con una determinada frecuencia relativa.

Por ejemplo (Figura 4), se presenta al alumno dos luces de color diferente (roja y blanca) que se encienden intermitente y aleatoriamente con una determinada frecuencia, por ejemplo, el 70 y el 30%, del tiempo respectivamente. Los resultados de este experimento indican que *en el periodo preoperacional* el niño adapta sus predicciones a las probabilidades de los sucesos que se le presentan como estímulo. Ello nos indica que los niños son capaces de apreciar las diferentes frecuencias relativas con que aparecen los resultados de los fenómenos aleatorios.

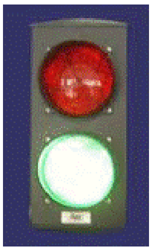


Figura 4. Experimento con dos bombillas.

La estimación de la frecuencia relativa mejora en el *periodo de operaciones concretas*. Como resultado de experiencias acumuladas, la intuición de la frecuencia relativa se desarrolla de un modo natural como consecuencia de las experiencias del niño con situaciones que implican sucesos aleatorios, en las que sea necesaria una estimación de las frecuencias relativas de los fenómenos. Es fácil pensar en tales experiencias en la vida diaria, por ejemplo, cuando estimamos el tiempo que transcurre entre un autobús y otro, o hacemos una previsión sobre si va a llover o no, según el día se presente más o menos nublado, etc. En el *periodo de las operaciones formales* el adolescente ha hecho progresos en comparación a los niños más pequeños en lo que se refiere a la intuición de la frecuencia relativa, particularmente en casos donde las predicciones tienen algún resultado práctico.

3.3. Estimación de posibilidades y noción de probabilidad

Piaget e Inhelder pensaron que el niño en el *periodo pre-operatorio* es incapaz de estimar correctamente la probabilidad de un suceso, por ejemplo, de sacar una bola roja en las urnas representadas en la Figura 3. Sugieren que el niño de esta edad no posee los recursos necesarios, que serían la habilidad de distinguir entre el azar y lo deducible, el concepto de proporción y los procedimientos combinatorios.

Fischbein piensa que, a pesar de ello, el niño puede estimar probabilidades sencillas o al menos compararlas, por ejemplo, en el problema propuesto en la Figura 3, si le preguntamos en cuál de las urnas es más fácil sacar bola roja. Este tipo de situaciones aparecen con frecuencia en los textos de primaria o recursos en Internet para este nivel (Ver ejemplo de la Editorial Anaya, http://roble.pntic.mec.es/arum0010/temas/porcentaje_probabilidad.html en la Figura 5).

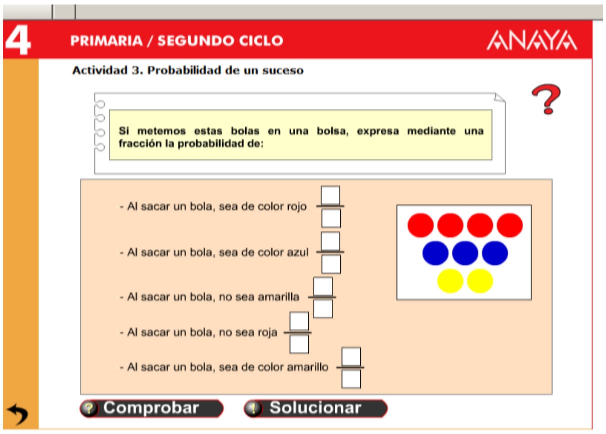


Figura 5. Anaya. Azar y Probabilidad.

En el *periodo de las operaciones concretas* los niños pueden resolver problemas que impliquen comparación de probabilidades de un mismo suceso (por ejemplo, bola roja) en dos experimentos diferentes sólo en situaciones donde, bien el número de casos favorables (bolas rojas) o el número de casos no favorables (bolas verdes) son iguales en ambos experimentos (sus estimaciones se basan en comparaciones binarias). Posteriormente pasan a resolver problemas en que los casos se pueden poner en correspondencia mediante una proporción.

Los adolescentes progresan rápidamente en el cálculo de probabilidades, incluso cuando las fracciones a comparar tienen diferente denominador. Esto se observa con niños a partir de 12-13 años, en incluso a partir de 10 años con la ayuda de la instrucción.

Muchos otros autores han analizado las estrategias que siguen los niños al comparar probabilidades. Reproducimos en la Tabla 1 una síntesis de la descripción que hace Cañizares (1997).

Tabla 1 — Estrategias de los niños para comparar probabilidades

Estrategia	Edad	Descripción
a. Comparación del número de casos posibles	2-3 años	Elegir la caja que contenga mayor número de bolas
b. Comparación del número de casos favorables	4 años	Elegir la caja que contenga más bolas del color favorable. Resuelve el problema correctamente cuando el número de casos desfavorables es igual en las dos cajas.
c. Comparación del número de casos desfavorables	7 años	Elegir la caja con menor número de bolas del color desfavorables cuando el número de casos favorables es igual. Resuelve el problema correctamente cuando el número de casos favorables es igual en las dos cajas.
d. Estrategias aditivas	8-11 años	Elegir la caja donde la diferencia entre casos favorables y desfavorables sea mayor. Se tienen en cuenta todos los datos pero no se usan proporciones.
e. Estrategia de correspondencia	12-13 años	Establecer la proporción entre el número de casos favorables y desfavorables en una de las cajas y comparar con la composición de la otra, eligiendo la caja que de mayor proporción. Resuelve el problema correctamente cuando el número hay una proporción sencilla (por ejemplo 2 a 1) de casos favorables y desfavorables en una de las cajas, pero no en la otra.
f. Estrategias multiplicativas	12-14 años	Aplicar la regla de Laplace. Es la más elaborada y requiere del dominio del cálculo con fracciones. Es necesario establecer las fracciones formadas por los números de casos favorables y desfavorables para después comparar las fracciones así obtenidas
g. Otros tipos		Hacer referencia a la suerte; elegir el color favorito, etc.

3.4. Distribución y convergencia

Piaget e Inhelder (1951) investigaron la comprensión de los niños sobre lo que ellos llamaron "distribuciones uniformes", que en realidad eran distribuciones de Poisson en el plano.

El niño tiene experiencia de observar la distribución de las gotas de lluvia sobre un embaldosado. Basándose en esta experiencia Piaget e Inhelder usan la siguiente técnica experimental: una hoja de papel blanco es dividida en cuadrados de 2 o 3 cm, y algunas fichas se lanzan sobre la hoja de papel al azar, simulando gotas de lluvia (o bien se les dan al niño fichas para colocar sobre el embaldosado del patio o de una habitación). Se pide al niño que prevea donde caerán las gotas de lluvia sucesivas y cómo se efectuará la distribución, cuando aumentamos el número de gotas. Algunos ejemplos de posibles distribuciones que los niños podrían hacer en esta tarea se presentan en la Figura 6. Un experimento alternativo (Batanero y Serrano, 1999) es preguntar a los niños cuáles, entre las cuatro distribuciones presentadas en la Figura 6 serían las que ellos esperan se formen cuando comienza a caer la lluvia sobre las baldosas.

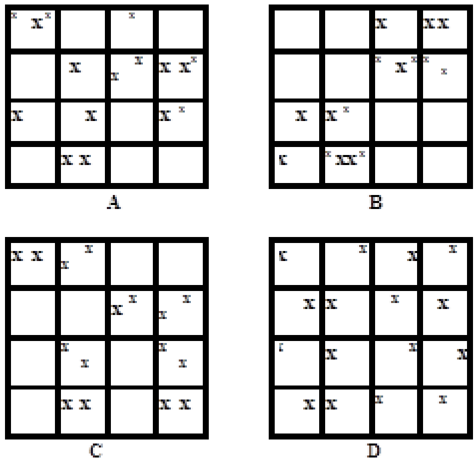


Figura 6. Posibles distribuciones de puntos en un embaldosado.

Los niños de *preescolar* saben que, cuando cae la lluvia, habrá gotas por todas partes, es decir, en todas las baldosas. Ello no implica que comprendan que la distribución es, a la vez, aleatoria y cada vez más regular. En el primer estadio, el niño está convencido de la distribución regular de la lluvia. Cuando trata de reproducirla, distribuye las gotas sistemáticamente, de modo que van rellenando uno a uno todos los cuadrados, antes de repetir uno de ellos. Si la retícula tiene todos los cuadros con alguna gota, excepto un cuadro vacío, los niños colocan la gota en el cuadro vacío, de modo que se lograse un patrón uniforme. El deseo de regularidad domina las predicciones de los niños. Sólo considerarían razonable el modelo D en la Figura 6 e incluso pedirían para poner todas las marcas en el centro de cada cuadro.

Al proponer a los niños del *periodo de las operaciones concretas* el problema, aceptan la irregularidad de la distribución, aunque si todos los cuadrados, menos uno tienen al menos un punto, el cuadrado "seco" se considera todavía como el más probable para recibir la siguiente gota. Es más difícil ya encontrar niños que colocan las gotas en una posición fija (por ejemplo el centro) en todos los cuadrados, es decir, aceptarían sin cuestionar el modelo D en la Figura 6. La comprensión de la ley de los grandes números es sólo intuitiva y empírica.

Con el *periodo de las operaciones formales* se comprende, finalmente, el mecanismo de la convergencia progresiva. En función del número cada vez mayor de gotas, la diferencia en el número de gotas en las baldosas cada vez disminuye más, no en forma absoluta, sino en forma relativa. La ley de los grandes números se comprende por su doble aspecto combinatorio y proporcional. En este estadio (12 años o más) aparece el razonamiento proporcional y Piaget e Inhelder creen que los niños comprenden la ley de los grandes números. Elegirían como aleatorio el modelo A, que es el más razonable, pues en el B aparecen patrones geométricos no esperados y en el C todas las celdas tienen o bien dos puntos o están vacías.

3.5. Convergencia a la distribución normal

Otro problema estudiado por Piaget e Inhelder es la comprensión de la convergencia y la distribución progresivamente normal que se produce, por ejemplo cuando los granos de arena caen a través de un pequeño orificio (en un reloj de arena o bolas en un aparato de Galton, ver Figura 7). El aparato construido por Galton, el Quincux, que tiene forma de plano inclinado de madera donde se han colocado unos clavos regularmente espaciados. Al dejar caer algunas bolas por el orificio superior, se dispersan al azar, recogiéndose en unas casillas colocadas al final del plano inclinado.

Para Piaget, para comprender el mecanismo de esta distribución es preciso captar la simetría de las trayectorias posibles de las bolas al caer por el orificio, porque hay las mismas posibilidades para cada una de orientarse a derecha o izquierda. Las casillas centrales reciben más bolas que las extremas y la disposición es simétrica. Piaget indica que la representación matemática de dicha distribución corresponde a la curva normal.

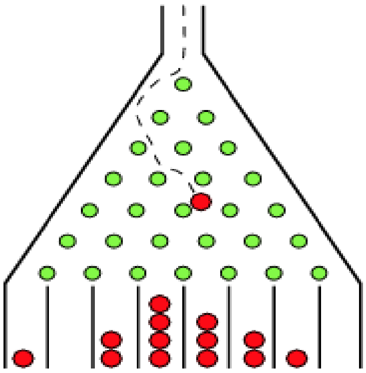


Figura 7. Aparato de Galton.

Piaget utiliza un dispositivo parecido al aparato de Galton, pero simplificado en sus experimentos. Utiliza 5 aparatos, de los cuales cuatro tienen la abertura superior en la parte central y uno la tiene en el extremo superior derecho. Los aparatos se diferencian por el número de bifurcaciones (con 2 en los dispositivos I y V, 3 en el II, 4 en el IIII y un gran número en el aparato IV) (ver Figura 8). En cada una de ellos comienza introduciendo una bola, después una segunda y tercera, preguntando al niño donde cree que va a caer y por qué. Una vez comprendida la experiencia, se pide al niño que explique la forma que tomaría la distribución cuando se dejasen caer un gran número de bolas. Finalmente se dejan caer las bolas y se pide al niño que interprete la distribución obtenida.

El primer estadio se caracteriza por la ausencia de la idea de distribución. En la caja I generalmente los niños hacen apuestas simples a favor de uno de los dos casilleros, pero sin la idea de igualación al aumentar el número de bolas. En la caja II el niño prevé bien una distribución igual en los tres casilleros o bien que todas las bolas irán a parar a uno de los casilleros. Con la caja III el niño apuesta por un de los casilleros centrales o por una distribución irregular. En la caja IV se espera en general una distribución irregular.

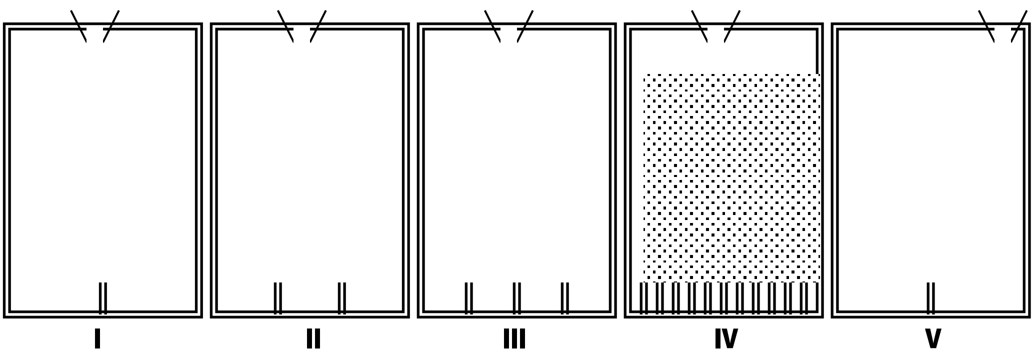


Figura 8. Dispositivo experimental de Piaget.

La etapa de operaciones concretas se caracteriza por un principio de distribución de conjunto generalizable, reconocible. El niño prevé la desigualdad entre las frecuencias laterales y centrales. Pero esta distribución permanece insuficientemente cuantificada, a falta de comprensión de la ley de los grandes números. Por ello, aunque hay una simetría global, no hay aún equivalencia entre los sectores correspondientes. En la caja I el sujeto prevé una igualdad aproximada entre los dos casilleros, pero sin que esta igualdad se consiga progresivamente con el número de bolas. En la caja II se prevé un máximo central, pero sin igualdad en los casilleros laterales. La caja III da lugar a la previsión correcta de la ventaja de las casillas centrales, pero sin equivalencia entre ellas ni entre las laterales. La caja IV no provoca la previsión de una distribución simétrica regular, pero comienza a haber una generalización de las experiencias anteriores sobre la configuración de conjunto.

El tercer estadio (a partir de 12 años) está marcado por la cuantificación de la distribución de conjunto, es decir, por la previsión de una equivalencia entre las partes simétricas correspondientes de la dispersión. Esto es claro para las cajas I a II; la caja IV da lugar a ensayos de graduación hasta descubrir la distribución en forma de campana, el progreso más notable es la comprensión del papel de los grandes números en la regularidad de la distribución.

4. Implicaciones para el aula

El estudio de estas investigaciones sugiere que los niños pueden adquirir nociones probabilísticas, al introducirlas mediante actividades basadas en juegos de azar, que favorecen su adquisición intuitiva. De este modo diversos investigadores sugieren experiencias sencillas que pueden llevar a los niños a la comprensión progresiva de otras más complejas.

Por ejemplo, antes de tratar de trabajar con los niños con el aparato de Galton, sería bueno comenzar con la comprensión de experiencias compuestas sencillas de bifurcación por canales, como las propuestas por Green (1983), donde pregunta a los niños por cuál de los canales pasarán más bolas cuando se dejan caer un número grande de ellas en distintos dispositivos (Figura 9).

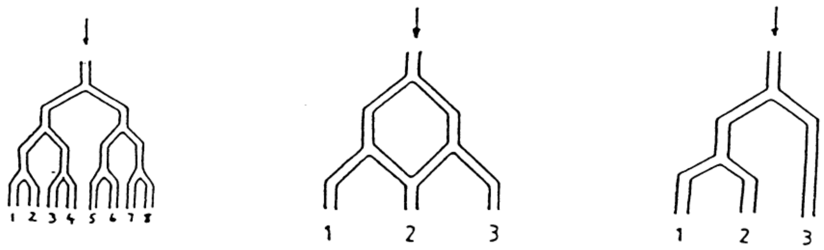
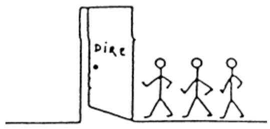


Figura 9. Bifurcación por canales en el cuestionario de Green (1983).

Para responder la pregunta el niño debe comprender la igualdad de posibilidades en cada bifurcación inicial, razonar mediante la regla del producto en cada bifurcación (si, por ejemplo, en primer dispositivo, la mitad de las bolas caen por cada bifurcación en el primer nivel y en el segundo por cada bifurcación la mitad de los que llegan a él, por cada bifurcación del segundo nivel llegan la cuarta parte de las bolas, que a su vez se dividen en dos partes en la última bifurcación. Por tanto, a cada uno de los canales 1 a 8 llegan la mitad de las anteriores, esto es la octava parte de las bolas. En el segundo dispositivo hay también que aplicar la regla de la suma en el canal 2, donde llegarán la mitad de las bolas que se bifurquen a la izquierda en el nivel 1 y la mitad de las que se bifurquen a la derecha en dicho nivel, esto es la mitad de la mitad multiplicado por dos, que da un total de la mitad de las bolas.

Otro punto importante es educar el razonamiento combinatorio, que, aunque se desarrolla lentamente, puede ser favorecido con actividades sencillas de enumeración, como la siguiente, propuesta por Green (1983).

Tres chicos son enviados al director por alborotar. Para esperar su castigo, tienen que alinearse en fila ante la puerta del despacho del director. ¡Desde luego, ninguno quiere ser el primero!
Supongamos que los niños se llaman Andrés, Benito y Carlos (A, B y C). Escribe todos los posibles órdenes en que podrían alinearse.



La enseñanza ha de cuidar también las creencias infundadas sobre los experimentos aleatorios, por ejemplo, la creencia en la suerte o en números favoritos o la preferencia por un color. En Godino, Batanero y Cañizares (1987) se pueden consultar propuestas didácticas sobre probabilidad, basadas en dichos trabajos y para diferentes edades en la educación primaria. Otro recurso importante es la simulación (Fernandes, Batanero, Contreras y Díaz, 2009) que permite, mediante el apoyo de la tecnología que los niños experimenten situaciones aleatorias y, de este modo, ganen experiencia, mejorando sus intuiciones sobre estas experiencias.

Referencias

Batanero, C. y Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education 30*(5), 558-567.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

Fernandes, J. A. (2001). Intuições probabilísticas em alunos do 8.º e 11.º anos de escolaridade. *Quadrante*, *10*(2), 3-32.

Fernandes, J. A., Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante*, Número monográfico. "As novas tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática", *XVIII* (1-2), 161-183.

Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Reidel.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1988): A*zar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Green, D. R. (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (vol. 2, pp. 766-783). Universidad de Sheffield: Teaching Statistics Trust.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l´enfant à la logique de l´adolescent*. París: Presses Universitaires de France.

Jones, G., Langrall, C., y Mooney, E. (2007). Research in probability: responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 2, pp. 909-955). Greenwich, CT: Information Age Publishing y NCTM.

MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Madrid: Autor.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Piaget, J. (1975). *Psicología de la inteligencia*. Buenos Aires: Psique.

Piaget, J., y Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idèe de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Pierce, R. y Chick, H. (2011). Teachers' beliefs about statistics education. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics — Challenges for teaching and teacher education* (pp. 151-162). New York: Springer.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465- 494). London: MacMillan.

FERNANDES, J. A., VISEU, F., MARTINHO, M. H. & CORREIA, P. F. (ORGS.) (2013). *ATAS DO III ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA*. BRAGA: CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DO MINHO.

LA CUANTIFICACIÓN DEL AZAR: UNA ARTICULACIÓN DE LAS DEFINICIONES SUBJETIVA, FRECUENCIAL Y CLÁSICA DE PROBABILIDAD

Ernesto Sánchez y Julio César Valdez
Cinvestav-IPN, México
esanchez0155@gmail.com; aeyttso@yahoo.com.mx

Resumen. En este artículo se exploran la viabilidad y dificultades para lograr un entendimiento del concepto de probabilidad con base en una articulación de las definiciones subjetiva, frecuencial y clásica. Para esto se consideran los diferentes enfoque de la probabilidad, las principales dificultades en el aprendizaje de este concepto y los niveles de razonamiento que distinguen niveles que van de la apreciación subjetiva de situaciones de azar a su cuantificación. Las evidencias presentadas provienen de una entrevista con un estudiante de bachillerato que no tiene antecedentes de estudios previos de probabilidad; se muestra que las dificultades del sujeto son: darle significado a la cuantificación del azar, superar la ley de los pequeños números y aceptar y asimilar la variación.

Introducción

Los estudios clásicos (Piaget e Inhelder, 1975; Fischbein, 1975) sobre el entendimiento de nociones de probabilidad arrojan luz sobre diferentes aspectos de la probabilidad y sus dificultades. Tales estudios han sido realizados con alumnos de diferentes edades y de ellos se concluye que una edad óptima para su introducción puede ser a partir de los 11 años, aunque Fischbein sugiere que se puedan obtener ciertos logros antes de esa edad con ayuda de lecciones de enseñanza. Sin embargo, organizar con un sujeto más maduro su aprendizaje de la probabilidad ofrece, por un lado, mejores posibilidades al entrevistador para hacerlo responsable de la resolución de las tareas y la exposición de sus ideas; además de proponerse un aprendizaje integral del concepto de probabilidad, en el que se asimilan y articulan los tres enfoque de probabilidad: clásico, frecuencial y subjetivo. Por otro lado, se puede esperar que el sujeto recorra las etapas que van de sus ideas subjetivas a la cuantificación de la probabilidad en un periodo más corto que el de un sujeto de menor edad. Esto permitiría observar dificultades que se presentan en este proceso y que podrían considerarse dificultades mayores o insuperables para los más pequeños.

Algunas de las principales ideas que subyacen en el presente estudio fueron inspiradas por la conjunción de la lectura de la historia del surgimiento de la probabilidad en el siglo XVII (Hacking, 1975, Gigerenzer, et al. 1989) y por el marco del desarrollo del razonamiento probabilístico de Jones, Langrall, Thornton y Mogill, (1997). El nacimiento formal de la probabilidad se ubica en 1654, cuando Pascal y Fermat intercambiaron sus soluciones a problemas de juegos de azar. El primer capítulo de Hacking (1975) se pregunta acerca de las razones por las que la probabilidad surge tan tardíamente, ya que las actividades de juegos de azar son prácticas ancestrales de la humanidad y, también, hay rastros antiguos del registro de frecuencias relativas. Por un lado, los grados de creencia acerca de un evento o proposición y, por el otro, la tendencia de algunos eventos aleatorios a producir frecuencias relativas estables se cuantificaron alrededor de 1654 dando lugar al concepto de probabilidad. A partir de ese momento, y por un largo periodo, la visión subjetiva de la probabilidad (referida a estados de la mente) y la visión objetiva (referida a estados del mundo) se entremezclaron para explorar las aplicaciones de la teoría a diferentes campos de la actividad humana (Gigerenzer, et al. 1989).

Por otra parte, en las investigaciones de Jones et al. se señala que los estudiantes transitan de un nivel subjetivo a un nivel numérico en su entendimiento de la probabilidad, es decir, sugiere un proceso de cuantificación de las nociones vagas, intuitivas y cualitativas que los estudiantes ponen en juego en sus primeras experiencias con problemas relativos a situaciones de incertidumbre (ver sección 2.3 más adelante). Las notas históricas y el marco de Jones sugieren explorar la posibilidad de enfatizar más y observar el papel del enfoque subjetivo combinado con los otros enfoques, para propiciar un mejor entendimiento de la probabilidad.

2. Antecedentes

De acuerdo a Langrall y Mooney (2005), un gran número de investigaciones basadas en un enfoque clásico de la probabilidad se dividen en dos grupos, unos que proponen problemas centrados en el cálculo de la probabilidad de un evento formado por elementos de una clase en una mezcla de dos o más clases de elementos y otros sobre la comparación de probabilidades de eventos, cuya situación paradigmática se refieren a la elección de una urna entre dos urnas con contenidos conocidos, con el fin de optimizar la ocurrencia de un evento dado. Otro tipo de estudios se centran en la exploración del espacio muestral, en particular, cuando se trata de contar de manera sistemática todos los posibles resultados de una experiencia compuesta.

Unos estudios que consideran el enfoque frecuencial consisten en la realización de experimentos repetidos para que los niños perciban que en uno o pocos ensayos un evento es impredecible mientras que se puede predecir la distribución de los eventos cuando se realizan muchas repeticiones del experimento (Horvath y Lehrer, 1998). Más recientemente se han realizado estudios en los que se explora la manera en que los estudiantes deciden si un dado está bien balanceado o no, con base en los resultados de muchos lanzamientos del dado; esta situación la exploran de manera más profunda cuando se utiliza el apoyo de software, que proporciona herramientas de simulación y facilidad para la representación de los resultados (Pratt et al. 2008; Lee, Angotti y Tarr, 2010).

Se puede decir que los estudios empíricos basados en un enfoque subjetivo son de carácter negativo, pues ponen en evidencia las limitaciones de los sujetos para apreciar cualitativa o cuantitativamente ciertas situaciones de manera conveniente ya sea para estimar probabilidades o para tomar buenas decisiones (Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares, 1998; Batanero y Sánchez, 2005). Sin embargo, no se han encontrado estudios cuyo propósito sea explorar la comprensión de la probabilidad o la solución de problemas por parte de estudiantes utilizando un enfoque puramente subjetivo y son escasas las investigaciones que consideran los tres enfoques, incluyendo el subjetivo. No obstante, Hawkins y Kapadia (1984, pp. 374-375) sugieren que "las nociones intuitivas de los niños son subjetivas e incoherentes. Sugerimos que la manera más fructífera para construir un marco para el desarrollo de las ideas probabilísticas de los niños es utilizar un enfoque subjetivo, además del tradicional *a priori* y del frecuentista".

2. Marco conceptual

El marco consta de una componente de contenido, que analiza los diferentes enfoques de probabilidad; una componente de aprendizaje que revisa las dificultades principales que la investigación ha descubierto con relación al entendimiento de la noción de probabilidad; una componente de enseñanza que propone una metodología para el aprendizaje de la probabilidad con base en ideas actuales de la didáctica.

2.1. Los diferentes enfoques de la probabilidad

A continuación se hace una breve exposición de los tres principales enfoques de la probabilidad que se consideran en la enseñanza, antes del enfoque axiomático. Se resume su definición y algunas consideraciones acerca de su utilización en la enseñanza. Al final, se mencionan las principales limitaciones de cada enfoque.

El enfoque clásico. Se realiza la asignación de probabilidades con base en el análisis del espacio muestral, bajo el supuesto de que éste es finito y que sus elementos son equivalentes. La probabilidad de un evento es el cociente de los casos favorables por los casos posibles; éste un procedimiento sencillo y racional para calcular probabilidades. Este enfoque ha sido privilegiado en la enseñanza. Por ejemplo, Ortiz, Cañizares, Batanero y Serrano (2002) informan que es frecuente encontrar, en los manuales escolares de España, el tratamiento de los temas de probabilidad restringido al enfoque clásico y a ejemplos y problemas de situaciones de juego. No es improbable que así sea en otros países.

El enfoque frecuencial. Se asigna una probabilidad con base en la tendencia de las frecuencias relativas de un evento, al repetir el experimento un gran número de veces; para ello se requiere que el experimento sea repetible bajo condiciones similares; se basa en las propiedades del fenómeno y no en apreciaciones a priori. Hawkins y Kapadia (1984) sostienen que este enfoque tiene la ventaja de "ligar directamente las nociones teóricas con los resultados de los experimentos". En la actualidad, se ha vuelto más viable para la enseñanza gracias a la presencia de programas (Fathom) con ordenadores (Pratt, 1998, 2000), pues permite abarcar la ley de los grandes números. Stohl (2005) sostiene que "sólo mediante un acercamiento a la enseñanza que abarque tanto el enfoque clásico como el frecuencial, pueden los estudiantes desarrollar intuiciones apropiadas de probabilidad".

El enfoque subjetivo. Consiste en la asignación de un número a un evento aleatorio de parte de una persona, de manera que refleje su grado de creencia o convicción en su ocurrencia y que esté dispuesta a apostar y asumir las consecuencias de manera consistente con su asignación. Este enfoque es aplicable a una más amplia variedad de eventos y situaciones aleatorias. Hawkins y Kapadia (1984) se pronunciaron a favor de enfatizar más el acercamiento subjetivo en la enseñanza de la probabilidad: "El tercer enfoque, que defendemos fuertemente, es la noción de una enseñanza basada en la probabilidad subjetiva o intuitiva" (p. 370); 24 años después, Kapadia (2008) sigue manteniendo esa posición, sin embargo, señala que no se ha encontrado todavía una forma sostenida para enseñar a hacer juicios de probabilidad y estimaciones de riesgo de manera subjetiva con base en información cualitativa y objetiva.

Es importante tener presente las limitaciones de cada enfoque, pues en parte justifica su articulación en la enseñanza. El enfoque clásico es aplicable sólo a situaciones que generan un espacio muestral equiprobable; pero, fuera de situaciones de juego, hay muy pocas situaciones de la naturaleza o sociales que cumplen esta condición. Su definición de probabilidad es circular pues se basa en el concepto mismo que define al presuponer la equiprobabilidad del espacio muestral. Por su parte, el enfoque frecuencial tiene el problema de que para obtener una estimación de la probabilidad se requiere hacer el experimento varias veces, aunque no se sabe cuántas veces es adecuado hacerlo. En contraste con las situaciones de juegos, cuando se trata de fenómenos de la naturaleza la noción de experimentos repetidos bajo condiciones similares requiere de una cuidadosa reflexión. Finalmente, el enfoque subjetivo tiene un valor relativo que depende de la persona y no sólo de una característica objetiva de los eventos o las situaciones. Una probabilidad subjetiva puede variar de persona a persona y, con este enfoque, es más propenso a caer en sesgos personales al estimar las probabilidades que con los otros enfoques.

2.2. Dificultades principales en el aprendizaje de la probabilidad

Una de las líneas más desarrolladas de la investigación en la educación matemática (o didáctica de la matemática) ha sido el estudio de errores y dificultades de los estudiantes al enfrentar diferentes conceptos matemáticos. Se ha descubierto que los errores sistemáticos no se pueden atribuir a distracciones ni a las dificultades por falta de atención o estudio o sólo a la propia complejidad del concepto, sino que muchas veces se deben a que los estudiantes tienen sus propias ideas previas sobre las situaciones, las cuales suelen ser persistentes e inconsistentes con el punto de vista normativo. En el campo de la probabilidad es muy frecuente que las personas mantengan un conjunto de ideas que contradicen los resultados del cálculo y la teoría, por lo que es necesario que en la enseñanza se tengan en cuenta y se procure su superación (Garfield y Alhgren, 1988; Shaughnessy, 1992; Batanero y Sánchez, 2005). Expondremos brevemente algunas de los descubrimientos más relevantes que contribuyen a entender las dificultades que enfrenta el aprendizaje de la probabilidad.

El enfoque al resultado aislado ha sido propuesto por Konold (1991) como un marco para explicar algunos errores frecuentes de los estudiantes frente a tareas de probabilidad. Asegura que la incomprensión de la materia de muchos sujetos obedece *al enfoque del resultado aislado*. Este consiste en que los alumnos creen que el objetivo principal de la probabilidad en situaciones de incertidumbre es predecir con éxito un resultado en un solo ensayo, de manera que interpretan una pregunta de probabilidad como una pregunta que les pide adivinar lo que ocurrirá en un solo experimento. Si se les informa que el pronóstico del tiempo dice que hay 70% de probabilidad de lluvia y se les pregunta por su significado, afirman que lloverá; si luego se les pide que supongan que finalmente no llovió, concluyen entonces que el pronóstico estaba equivocado. Una inclinación natural frente a los conocimientos de cualquier campo científico es esperar que estén relacionados con causas y consecuencias y no sólo sean etiquetas o adornos. Es posible que el enfoque del resultado aislado sea una manera de entender la probabilidad derivada de esta inclinación.

El sesgo de equiprobabilidad consiste en una tendencia de los estudiantes a pensar que los resultados de una experiencia aleatoria tienen la misma probabilidad. En los experimentos de Lecoutre (1992) y Lecoutre y Cordier (1990) se describe la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad al comparar el evento de obtener una suma de 5 con el de obtener una suma de 6 al lanzar un dado dos veces. Esta pregunta se hace de diferentes maneras y la respuesta de la mayoría sigue siendo que los dos eventos tienen la misma probabilidad. Los autores sostienen que la causa no es atribuible a una falta de razonamiento combinatorio, sino a una idea de que si un experimento es al azar, todos sus resultados deben tener la misma probabilidad. Es posible que el sesgo de equiprobabilidad sea fomentado, en lugar de superado, con una enseñanza que sobreestime el enfoque clásico.

Sesgos de la atención es una observación de Falk (1983) acerca de las estrategias de los niños al pedírseles que elijan una de dos urnas con diferentes proporciones de bolas negras y blancas, de manera que tengan más posibilidades de extraer de ella una bola al azar de alguno de esos colores, por ejemplo, blanca. Informa que en su estudio surgieron tres estrategias diferentes que llevan a una valoración parcial de las probabilidades, a saber, elegir la urna con más bolas blancas, elegir la urna con menos distractores (bolas negras) o seleccionar la urna con la mayor diferencia a favor de las bolas blancas. En las dos primeras, los estudiantes atienden a una sola variable, en la segunda, consideran ambos colores pero con una estrategia aditiva. Este tipo de tareas tienen el inconveniente de que el estudiante puede asumirlas simplemente como tareas de comparación de fracciones o números relativos (¿dos en tres es mayor que tres en cuatro?) y no como tareas de probabilidad en las que manejen la incertidumbre.

Representatividad. La heurística de representatividad consiste en evaluar la probabilidad de un evento sobre la base del grado en el que el sujeto percibe que el evento representa a la población de la que proviene o el proceso que lo genera. Cuando en este tipo de razonamiento se ignora el tamaño de la muestra o el papel de la independencia de las selecciones, se producen sesgos en las estimaciones de probabilidades (Tversky y Kahneman, 1982a). Un ejemplo clásico del sesgo de representatividad se presenta cuando se pide evaluar qué es más probable al seleccionar una familia de seis descendientes: que la secuencia de hijos sea HHHHHH o que sea HMMHMH (donde H significa "hombre" y M "mujer"). Varios estudiantes sugieren que la segunda es más probable, pues es más representativa del hecho de que cada sexo tiene ½ de probabilidad de ocurrir; sin embargo, el cálculo de probabilidades dice que ambas secuencias son igualmente probables.

La ley de los pequeños números consiste en una tendencia a considerar que cualquier muestra es representativa de la población, que para muestras pequeñas es evidentemente falso (Tversky y Kahneman, 1982b). Este sesgo está relacionado con creencias referentes a las probabilidades, por ejemplo, esperar que en seis tiradas de un dado ocurran las seis caras, es decir, números diferentes o pensar que en una serie de lanzamientos de monedas la secuencias más frecuentes son aquellas en las que hay más alternancias de cara y sello. También se relaciona con la tendencia a creer que pequeñas diferencias en un par de muestras son significativas.

2.3. Niveles de razonamiento del concepto de probabilidad

El modelo de enseñanza que se ha seguido en este estudio está inspirado en el marco sobre la comprensión probabilística propuesto por Jones (Jones et al., 1997), que ofrece indicaciones del desarrollo en el tiempo del razonamiento probabilístico de los estudiantes de nivel medio básico mediante una jerarquía formada por cuatro niveles. El nivel 1 describe el razonamiento subjetivo o no-cuantitativo; el nivel 2, transicional, se refiere al paso entre el razonamiento subjetivo y un razonamiento cuantitativo ingenuo; el nivel 3 involucra un razonamiento cuantitativo informal y el nivel 4 incorpora razonamiento numérico y formal. El hilo conductor de la jerarquía de Jones se refiere al paso de lo subjetivo a lo numérico y sugiere que el problema fundamental en el entendimiento de la probabilidad se centra en el proceso de cuantificación del azar o la incertidumbre. Esta descripción del desarrollo del razonamiento probabilístico se puede relacionar con los enfoques de probabilidad, como lo hacemos en la siguiente adaptación de la jerarquía de Jones:

Nivel 1. Subjetivo. En este nivel los estudiantes sólo hacen apreciaciones subjetivas sobre la propensión de ocurrir un evento: creen que un evento es más o menos probable, perciben que una sucesión de resultados de repeticiones de un experimento de Bernoulli es irregular, vale decir, aleatorio; pueden reconocer intuitivamente cuál de dos eventos, cuyas probabilidades son significativamente diferentes, se puede esperar con más oportunidades de éxito.

Nivel 2. Transicional. En este nivel, los estudiantes asignan subjetivamente un número para representar su creencia en la propensión de ocurrir de un evento. Eventualmente dicho número puede ser proveniente de la regla de Laplace. A partir de dicha asignación pueden obtener otras probabilidades de manera consistente de acuerdo con la normativa; en particular, la probabilidad del complemento. Perciben que la probabilidad de una sucesión de resultados de Bernoulli tiende a disminuir en comparación con la probabilidad de éxito.

Nivel 3. Cuantitativo informal. En este nivel, los estudiantes relacionan su asignación subjetiva de la probabilidad de un evento con la frecuencia con la que se presenta el evento en varias repeticiones del experimento y son capaces de entender el significado de que se aproxime una a la otra. En particular, entienden intuitivamente *el principio de la estabilidad de las frecuencias*. Son capaces de cambiar su apreciación subjetiva con base en la frecuencia. Conciben los resultados de un experimento como *signo* o *evidencia* de que la probabilidad subjetiva asignada es correcta o no, pero no desde un punto de vista del enfoque del resultado aislado.

Nivel 4. Numérico. En este nivel, los estudiantes relacionan la estructura del espacio muestral con la probabilidad frecuencial y subjetiva de un evento. Esto les revela el significado de la definición clásica en los casos en que esta es aplicable. También les permite integrar las diferentes probabilidades de los resultados del experimento en una distribución. Surge la necesidad de contar con recursos combinatorios (v.g. diagramas de árbol) para hallar la probabilidad de secuencias de resultados de experimentos de Bernoulli.

3. Metodología

Participante. El sujeto de estudio es un alumno de bachillerato (17 años), cuya formación escolar ha sido totalmente en instituciones públicas. Entre sus habilidades matemáticas se destaca su razonamiento lógico-deductivo y su capacidad para manejar y pensar en términos de símbolos matemáticos. Asimismo, exhibe un pensamiento crítico ante la presentación de conceptos y procedimientos matemáticos. No obstante, esta facilidad matemática motiva la renuencia del alumno a expresar por escrito procedimientos que le son fáciles u obvios. Al momento de las entrevistas, el estudiante recién había aprobado un examen extraordinario de álgebra con calificación de 9 (0 – 10), apoyado por el entrevistador, y se encontraba con adeudos de diversas materias, entre las que se destaca geometría analítica. A pesar de ciertas indisciplinas, como la impuntualidad, se consideró como un buen sujeto de estudio, ya que cuenta con los conocimientos apropiados (operaciones con fracciones, manejo de proporciones y simbólico).

Instrumento. La recolección de datos se hizo a partir de dos actividades. La Actividad I tiene como fin indagar sobre el razonamiento *subjetivo* del alumno acerca de la probabilidad. Se elaboró con base en una situación que el alumno recién había experimentado (Cuadro 1).

Con la Actividad II (Cuadro 2) se pretende que el alumno se haga del concepto de probabilidad, como medida del azar, apoyado en la simulación física y computacional. Se presenta un problema de comparación de probabilidades en un escenario de urnas, donde el planteamiento tiene como base una respuesta anterior proporcionada por el alumno ante una variante de este problema: *"sin importar que son proporcionales hay mayor cantidad de fichas negras"*.

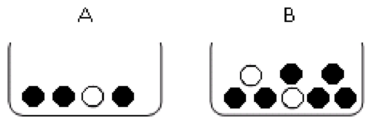
Cuadro 1. Resultados de examen

María ha acudido a presentar un examen extraordinario de álgebra. El examen es de opción múltiple y consta de 20 reactivos. Cada reactivo cuenta con cuatro opciones de respuesta. El mínimo de reactivos correctos para aprobar el examen es 12. María contesta correctamente ocho reactivos y los restantes al azar.

a) ¿Crees que María apruebe el examen? ¿Por qué?
b) ¿Consideras que existe alguna forma de conocer con anticipación las posibilidades que tiene María de aprobar o no el examen? Si es así, ¿cuál sería esa forma?
c) Si María presentara nuevamente el mismo examen, bajo condiciones similares (igual número de respuestas correctas y el resto contestadas al azar), ¿crees que obtendría el mismo resultado? Justifica tu respuesta.

Cuadro 2. Comparación de probabilidades

En la urna A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la urna B se han metido 6 fichas negras y 2 fichas blancas (Figura 1).



Se gana un premio si se extrae una ficha negra. Juan considera que elegir la urna B es lo más conveniente porque sin importar que son proporcionales hay mayor cantidad de fichas negras.

a) ¿Cuál es tu opinión sobre la explicación de Juan?
b) ¿Cómo medirías la posibilidad de que ocurra el evento "sacar una ficha negra de la urna A"? ¿Qué valor le asignarías?
c) ¿Cómo medirías la posibilidad de que ocurra el evento "sacar una ficha negra de la urna B"? ¿Qué valor le asignarías?
d) ¿De qué forma corroborarías la respuesta dada en a)?

Procedimiento. La Actividad I forma parte de una tarea más amplia destinada a abordar el tema de *Experimento* o *Experiencia Aleatoria*. La aplicación de la Actividad II se llevó a cabo en dos sesiones de acuerdo con el siguiente esquema: (1) Resolver una tarea sobre comparación de probabilidades en un escenario de urnas; (2) Simular físicamente la tarea y contrastar los resultados de la simulación con lo previsto en 1; y (3) Hacer la simulación computacional de la tarea y comparar con los resultados obtenidos en 1 y 2. Ambas actividades fueron videograbadas y duraron una hora por sesión.

4. Resultados

En lo siguiente se exponen y comentan algunos extractos seleccionados de las entrevistas llevadas a cabo con el estudiante, que se han organizado en cuatro episodios por orden secuencial para mostrar la evolución del pensamiento del estudiante.

Primer episodio. La pregunta ¿Crees que María apruebe el examen? pretendía motivar una valoración subjetiva del evento "María aprueba el examen" por parte del sujeto. Miguel respondió "yo creo que sí lo pasa", la explicación de su creencia no estuvo exenta de cuantificación: "[...] Son doce respuestas que tiene que dar y con cuatro pasa. Uno de cada tres que acierte pasa el examen". Se puede notar que su razonamiento se basa en un modelo de la situación en el que implícitamente asigna tanta posibilidad a responder correctamente una pregunta como a fallarla. Su valoración subjetiva se basó en un procedimiento cuantitativo "uno de cada tres que acierte pasa el examen", no obstante, las respuestas a las preguntas que vinieron después muestran que dicha proporción no la utilizó para asignar una probabilidad al evento en cuestión.

E: [...] *Si tú tuvieras que asignarle algún valor al evento 'María aprueba el examen',... ¿tú qué valor le asignarías?*
A: *¿Cómo qué valor? No entiendo.*
E: *Sí... Por ejemplo, ahí tienes dos opciones, o María aprueba o María reprueba. Pero tú le das más peso a que María aprueba el examen [asiente el alumno]. Si tuvieras que darle algún valor, ¿qué valor le darías?*
A: *¿Del cero al diez? ¿Cómo?*
E: *El que tú quieras, el que tú creas que es adecuado.*
A: *No, es que no, no entiendo qué valor, qué... No, no entiendo esa pregunta.*
E: *Si mira, es lo que te digo, tú tienes 'aprueba o no aprueba'. En cierta forma tú te estás recargando más a que sí aprueba, o sea, que le estás dando más peso. ¿Tú qué valor le darías?*
A: *No, no sé... siete [titubea].*

Se puede observar que el estudiante se resiste a asignar un número a su creencia de que "María pasa el examen", a pesar de que él mismo propuso un procedimiento cuantitativo en la explicación de su creencia. El entrevistador esperaba que Miguel de algún modo utilizara el "uno de cada tres" que expresó en su explicación; pero acertadamente no lo hace. La probabilidad de acertar al menos a 4 preguntas de 12, si se tienen una probabilidad de ½ de responder correctamente cada pregunta (que es el supuesto que hizo el sujeto), es aproximadamente 0.927 (es el resultado de calcular B(X>3, n=12, p=0.5), de donde la probabilidad 7 de 10 que propone el estudiante es algo lejano a ese valor pero es aún coherente con su creencia de que "María pasa el examen".

En este episodio se muestra que para el sujeto no hay razones para hacer una asignación subjetiva de una probabilidad, por tanto, a sus ojos no se justifica. Éste ofrece un número solamente a petición del entrevistador. No obstante, su estimación refleja su creencia de que "María aprueba el examen", es notable que no utiliza la fracción "uno de cada tres" obtenida de observar el número de respuestas con la que pasa María entre el número de preguntas que le falta responder. El estudiante hizo un intento genuino por asignar un número que reflejara su creencia acerca de la ocurrencia del evento, evitando caer en utilizar una combinación ciega de los números presentes en la situación; por esto se considera que su respuesta se ubica en un nivel transicional. El siguiente paso fue buscar que desarrollara la habilidad o algún criterio que le permita calibrar o refinar sus asignaciones subjetivas.

Segundo episodio. Con el objetivo de evitar las complicaciones de cálculo presentes en el problema 1, pasamos a un problema de comparación de probabilidades en situaciones de urnas (Cuadro 2); en este problema las probabilidades en juego se pueden obtener directamente de la proporción de bolas en cada urna. El problema fue diseñado teniendo en cuenta que Miguel comentó en una charla incidental lo que en el problema opina Juan. Se consideró, entonces, que la situación podía favorecer nuevamente que el sujeto hiciera una valoración subjetiva de la probabilidad. En efecto, Miguel estuvo de acuerdo con Juan: "creo que si es mejor [elegir la urna B], por la [mayor] cantidad [de fichas negras respecto a la urna A]". La creencia del estudiante se apoya en la mayor cantidad de bolas negras en términos absolutos, ignorando la proporcionalidad. Hay que hacer notar que el enfoque hacia las bolas de un color no obedece a la falta de habilidad para manejar la proporcionalidad, como se pone de manifiesto más adelante.

Nuevamente, la primera reacción de Miguel a la pregunta ¿Qué valor le asignarías [al evento A]? refleja que no le encuentra el sentido a una tal asignación, ya que responde: "¿Cómo un valor?... Es lo que no entiendo, qué valor. Son valores de qué o qué...". Hay que notar que sus evaluaciones subjetivas se basan en consideraciones cuantitativas: "uno de cada tres" en el problema 1, y "por la cantidad de fichas [negras]" en el problema 2; es decir, la observación de las características cuantitativas de la situación le permiten formar sus creencias, sin embargo, no comprende aún la posibilidad de la asignación de un valor a un evento, en otras palabras no acepta la posibilidad de medir a los eventos de azar. Posterior a una breve intervención del entrevistador, el alumno muestra que percibe la igualdad de las proporciones de fichas negras en las urnas. Responde que hay "75% para que salga [ficha] negra [de la urna A]" y "75% [de que salga ficha negra de la urna B]". A pesar de que aparentemente ha calculado la probabilidad de fichas negras en cada urna y visto que son iguales, mantiene su apreciación subjetiva de la situación: "Creo que tiene razón Juan".

En este episodio se revela que para llegar a entender que la probabilidad es una medida del azar o grado de certidumbre de un evento, no es suficiente la percepción de las cantidades involucradas. Miguel no tiene problemas para ver que la "probabilidad clásica" (sin que se le haya llamado así) de obtener ficha negra en cada urna es 75%, no obstante, mantiene su creencia subjetiva de que es más fácil obtener ficha negra de la urna que tiene más fichas negras. ¿Qué hace falta para que el sujeto establezca una conexión entre la proporcionalidad de bolas negras en las urnas (75%) y su creencia sobre la urna más favorable al evento de obtener una ficha negra? Lo que el sujeto no concibe es que se puedan medir, en algún sentido, los eventos de azar; esto se refleja en su rechazo a asignar un número a los eventos aleatorios; éste podría estar motivado por la imposibilidad de imaginar cualquier consecuencia ¿Qué sentido puede tener hacer una asignación si no trae ninguna consecuencia? Sin resolver esta duda, la asignación de una probabilidad es sólo un adorno.

En este punto se puede introducir la experimentación como un elemento más que se relaciona con la asignación de probabilidades. Al corto plazo, este elemento vuelve más complejo el cuadro e introduce nuevas dificultades, no obstante, consideramos que es imprescindible para completar un marco coherente para el significado de concepto de probabilidad. En particular, la única evidencia empírica de que una asignación de probabilidad es adecuada es mediante la observación de las frecuencias relativas de experiencias repetidas. La incorporación del enfoque frecuencial cuando aún no se ha consolidado la relación entre probabilidad subjetiva y probabilidad clásica tiene el objetivo de contribuir a que se realice su articulación. Con la idea del enfoque frecuencial se puede decir que una asignación correcta de una probabilidad trae como consecuencia la posibilidad de predecir las frecuencias relativas; quizá este es el eslabón que hace falta para que una asignación cobre sentido.

Tercer episodio. Ahora de lo que se trata es que el sujeto extraiga aleatoriamente muestras de tamaño 10, con remplazo, una de la urna A (con 3 negras y una blanca) y otra de la urna B (con 6 negras y 2 blancas) y responda los cuestionamientos del entrevistador. El objetivo de éste es observar la manera en que modifica sus creencias con base en los resultados de la simulación. En el primer par de muestras Miguel obtuvo y escribió lo que se presenta en la Tabla 1.

Tabla 1 — Resultados de 10 extracciones hechas de cada urna
(N = ficha negra, B = ficha blanca)

# de extracciones	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Urna A	N	N	N	N	N	N	B	B	N	N
Urna B	B	N	N	N	B	N	N	N	N	N

Una vez obtenida la muestra y registrados los resultados, se preguntó ¿Qué urna elegirías si quieres obtener bolas negras? Miguel responde que elegiría la urna A, y explica que: "las primeras extracciones resultaron bolas negras", al parecer, su criterio de decisión es que las primeras extracciones señalan la tendencia de la urna a producir un determinado color de bolas. Enseguida se le pide que extraiga otra muestra; como resultado se obtiene la Tabla 2.

Tabla 2 — Resultado de 10 extracciones hechas de cada urna

# de extracciones	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Urna A	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Urna B	N	B	B	N	N	N	N	B	N	N

Los resultados de la Tabla 2, refuerzan su creencia de que: "salen más seguido bolas negras [de la urna A]". Una vez hecho el experimento y registrados los resultados, se le pide a Miguel que prediga frecuencias de extracciones de bolas negras y blancas en 100 y 1000 experimentos, en cada una de las urnas. Sus predicciones (Tablas 3 y 4) muestran su creencia de que hay más posibilidades de obtener bola negra en la urna A.

Tabla 3 — Predicción de la distribución de 100 extracciones

	# de fichas blancas	# de fichas negras
Urna A	25	75
Urna B	35	65
Total	60	140

Tabla 4 — Predicción de la distribución de 1000 extracciones

	# de fichas blancas	# de fichas negras
Urna A	250	750
Urna B	380	620
Total	630	1370

En ambas predicciones (Tabla 3 y la Tabla 4), la cantidad de fichas negras y blancas que resultan de la urna A es proporcional al contenido de esta (3 fichas negras y 1 blanca). Situación que no se presenta respecto a la urna B, pues probablemente Miguel pone menos bolas negras que las puestas en la urna A con el fin de que correspondan con su creencia de que en la urna A es más fácil que ocurra bola negra.

La confusión ha aumentado debido a que se han hecho intervenir varios elementos que el sujeto trata de conciliar: el contenido de las urnas, en cuya consideración compiten el número absoluto de fichas negras y la proporción de fichas negras; el contenido de las muestras, que por ser de tamaño reducido tienen mucha variación, la cual el estudiante está muy lejos de poder considerar. En sus predicciones negocia las contradicciones que emergen de tales consideraciones: respecto al contenido de la urna, acepta la relevancia de la proporcionalidad del contenido de la urna A al prever 75% de fichas negras en ambas series de experiencias (100 y 1000); respecto a su percepción basada en las muestras de que la urna A produce más frecuencia de fichas negras, decide mantenerla proponiendo un rezago de las frecuencias en la urna B respecto a las que podrían deducirse de la proporcionalidad. Aparentemente la confusión ha aumentado porque se han puesto en juego los elementos necesarios que constituyen el marco básico de la probabilidad, es decir, aquellos que permiten darle sentido a la asignación de un número a los eventos de azar. Falta que esos elementos se articulen de una manera apropiada. Con este fin, el software y la simulación computacional prestan una ayuda determinante.

Cuarto episodio. Ya que Miguel había hecho simulaciones físicas y tratado de anticipar lo que ocurriría en un gran número de repeticiones del experimento, se le pidió que representara la situación en Fathom e hiciera simulaciones computacionales; los resultados obtenidos los podría contrastar con sus predicciones y con ello, crear condiciones para favorecer la modificación de sus creencias en un sentido que se acercaran más al modelo normativo. En este episodio se describen algunos intercambios entre el sujeto y el entrevistador que muestran dicho proceso. En la tabla 5 y 6 se muestran los resultados de la simulación de 100 y 1000 extracciones:

Tabla 5 — Resultados de la simulación computacional de 100 extracciones

	# de fichas blancas	# de fichas negras
Urna A	23	77
Urna B	29	71
Total	52	148

Tabla 6 — Resultados de la simulación computacional de 1000 extracciones

	# de fichas blancas	# de fichas negras
Urna A	248	752
Urna B	246	754
Total	494	1506

Sobre los resultados de la Tabla 5 (100 extracciones), al comparar la cantidad de fichas blancas y negras contenidas en la urna A con el número de fichas blancas y negras que resulta de la simulación, lo mismo para el caso de la urna B, el alumno, en principio, identifica una relación puramente circunstancial (inversa): "Entre mayor cantidad de fichas negras haya [en las urnas] [...] menos [fichas negras] salen [en la simulación]".

Como se puede observar, el alumno determina una relación entre los resultados de la simulación con base en el contenido de las urnas A y B, y no entre el contenido de cada una de estas urnas y los resultados de sus respectivas simulaciones. No obstante, mediante una breve intervención del entrevistador, logra identificar la relación proporcional pretendida; no como exacta, sino como una aproximación: "Pues es que, lo que yo noto es que la urna A de las 4 [Fichas] una es [...] blanca, un cuarto es una bola blanca. Y aquí [Tabla 5], en el resultado, es menor un cuarto de las fichas blancas [...] Y en el otro caso... pues la misma relación, un cuarto de las bolas son blancas [urna], pero aquí [Tabla 5] en cambio es mayor la cantidad de bolas blancas que salen [...] a un cuarto".

Este comportamiento se vuelve a presentar tanto para el caso de 1000 extracciones (Tabla 6), como para el caso de 10000 extracciones (simulado en el software). A saber, que la cantidad de fichas que resultan de la simulación es proporcional al número de fichas contenidas en las urnas. Sin embargo, el alumno continúa prestando bastante atención, e importancia, a las pequeñas diferencias entre la cantidad de fichas negras para determinar cuál urna (A o B) da las mejores posibilidades de extraer una ficha de este color: "La urna A [...] Salen con mayor frecuencia bolas negras de la urna A que de la urna B. Aquí [Tabla 6] [...] salen dos [fichas] menos, pero aquí [Tabla 5] [...] salen seis veces más". Esta conducta se ve reflejada por el alumno al asignar un valor al evento 'obtener una ficha negra de la urna A (B)': "%77 [de sacar una ficha negra de la urna A]" y "%71 [de sacar una ficha negra de la urna B]". Esto obedece a que sólo pone en juego la estabilidad de los resultados a largo plazo, pero no la relación proporcional que existe entre la cantidad de fichas que resultan de la simulación y al número de fichas contenidas en las urnas. Además, por facilidad de cálculos, el alumno sólo utiliza los datos de la Tabla 5 (100 extracciones); no considera los resultados de 1000 (Tabla 6) y 10000 (software) extracciones. Frente a esto el entrevistador interviene:

> **E**: *¿Y crees que eso coincide cuando son 1000?... Te pregunto, más que nada, porque aquí dices que son 77%... porque aquí son 77 [Tabla 5, urna A].*
> **A**: *Sí.*
> **E**: *Y aquí 71 [%] porque aquí son 71 [Tabla 5, urna B]. ¿Y qué ocurriría en este caso [1000 extracciones, Tabla 6]?*
> **A**: *Varía un poco.*
> **E**: *Y ahora ubiquémonos en el otro caso que hicimos acá [software] que son de 10,000... ¿Qué observas?*
> **A**: *Que es casi un cuarto de fichas blancas y tres cuartos de fichas negras de 10,000... Son iguales, creo que da igual la urna.*
> **E**: *¿Y si fueran 100,000?*
> **A**: [*Inaudible*]...
> **E**: *¿Entonces crees [...] que daría igual cuál urna elegir?*
> **A**: *Creo que sí. Ya viéndolo bien, creo que si da igual la urna*.
> **E**: *Entonces, ¿qué opinarías respecto a estas dos preguntas? ¿Qué valor le asignarías a la posibilidad de extraer una [...] ficha negra?*
> **A**: *75%.*

En principio, en este episodio se muestra cómo el alumno, a pesar de identificar la relación proporcional que existe entre los contenidos de las urnas y los resultados de la simulación a largo plazo, se ubica en el nivel transicional, ya que no es capaz de integrar esta relación en su razonamiento. No obstante, es esta misma relación, una vez integrada, la que le permite asimilar, parcialmente, la idea de la medición del azar. Esto ubica al alumno en el nivel cuantitativo informal de razonamiento.

5. Discusión y conclusiones

Los grados de certeza o creencia acerca de una proposición o un evento y la noción de frecuencia con la que se presentan ciertos eventos son nociones presentes en las personas desde más o menos 11 años (Piaget e Inhelder, 1975; Fischbein, 1975). No obstante, concebir la posibilidad de cuantificar cualquiera de esos sentidos de la probabilidad de manera significativa puede ser un proceso cuyos resultados se obtengan mucho más tarde. En particular, en el caso presente, se puede constatar que a pesar de poder manifestar sus creencias acerca de la propensión de los eventos, a Miguel le resultaba extraño asignarles un número. No es que le hiciera falta un procedimiento, no se trataba de escases de recursos matemáticos, sino de la ausencia de una organización conceptual. En particular, lo que a Miguel le parece insustancial de cualquier asignación es que no percibe procedimientos que le permitan hacer inferencias que aumenten sus conocimientos y muestren la potencia de dicha asignación.

El enfoque frecuencial y la experimentación pueden proporcionar esos procedimientos inferenciales que hacen falta, no obstante, el sujeto se encuentra con recursos espurios. Al parecer, es en la búsqueda de tales procedimientos que emergen las concepciones erróneas y los sesgos; en el caso que aquí se estudia y, como consecuencia del protocolo de la entrevista, surgió de manera clara la ley de los pequeños números: Miguel buscaba en las muestras de tamaño 10 la información para hacer predicciones. Es previsible que siguiendo otros protocolos se presenten diferentes concepciones erróneas o sesgos, pero estarían motivados por la misma búsqueda de sentido. Finalmente, la simulación de la experiencia aumentando el número de repeticiones permite hacer, con grandes dificultades, la conexión entre el contenido de la urna y los porcentajes a los que tiende la frecuencia relativa. Para llegar a este punto el sujeto ha tenido que aceptar que las pequeñas variaciones son inevitables y que en un momento dado pueden ser ignoradas.

Un problema fundamental en el aprendizaje del concepto de probabilidad es darle significado de la asignación de un número a un evento aleatorio; éste se asocia a la conexión entre la medición de grados de creencia sobre la ocurrencia de eventos aleatorios y la frecuencia con la que se espera que ocurran en las repeticiones a largo plazo; dicha conexión se refuerza y encuentra una forma clara de manifestarse en los juegos de azar y con el enfoque clásico de probabilidad. Es en la articulación de los tres enfoques de la probabilidad que se produce un significado profundo al proceso de cuantificación del azar; pareciera que tiene más sentido concebir al enfoque clásico como un punto de llegada y no como uno de partida en el proceso de entender la probabilidad. El proceso que lleva a la articulación de los diferentes enfoques de probabilidad puede ser descrito mediante una trayectoria que parte de ideas subjetivas para llegar a la cuantificación, el cual puede segmentarse en los cuatro niveles propuestos por Jones y sus colegas, y que nosotros hemos adaptado para dar seguimiento al proceso de cuantificación de probabilidades de nuestro sujeto de estudio.

Referencias

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Batanero. C. y Sánchez, E. (2005). What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions of probability? En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 241-266). New York: Springer.

Borovcnik, M., y Peard, R. (1996). Probability. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 239-287). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

De Finetti, B. (1974). *Theory of probability.* London: John Wiley.

Falk, R. (1983). Children's choice behavior in probabilistic situations. En D. Grey, P. Holmes, V. Barnett y G. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 714-716). Sheffield, England: Teaching Statistics Trust.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Dordrdcht, the Netherlands: Reidel.

Garfield y Alhgren, (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education,* 19(1), 44-63.

Gigerenzer, G., Swijtink, Z., Porter, T., Daston, L., Beatty, J., Krüger, L. (1989). *The Empire of Chance: How probability changed science and everyday life.* Cambridge: Cambridge University Press.

Hacking, I. (1975). *The Emergence of Probability*. Cambridge University Press.
Hawkins, A. y Kapadia, R. (1984). Children's conceptions of probability – A psychological and pedagogical review. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 349-377.
Horvath, J.K. y Lehrer, R. (1998). A model-based perspective on the development of childtren's undertanding of chance and uncertainty. En S.P. Lajoie (Ed.), Reflections in Statisitics: Learning, teaching and assessment in grades K-12 (121-148). Mahwah, NJ.:Erlbaum.
Jones, G., Langrall, C., Thornton, C. y Mogill, T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 101-125.
Kapadia, R. (2008). Chance Encounters - 20 years later. Fundamental ideas in teaching probability at school level. *Eleventh International Comission of Mathematics Education 11, ICME-11, TSG 13*, Monterrey, Mexico.
Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 139-156). The Netherlands: Kluwer.
Langrall, C. y Mooney, E.S. (2005). Characteristics of elementary school students' probabilistic thinking. En G.A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 95-119). New York: Springer.
Lecoutre, M.-P. (1992). Cognitive models and problem spaces in 'purely random' situations. *Educational Studies in Mathematics,* 19, 557-568.
Lecoutre, M.P. y Cordier, J. (1990). Effet du mode de présentation d'un problem aléatoire sur les modèles développés par les élèves", *Bulletin de l'APMEP*, 372, 9-22.
Lee, H. S., Angotti, R. L., y Tarr, J. E. (2010). Comparing observed empirical data and expected results: Students' generation and analysis of data in a technological environment. *Statistics Education Research Journal*, 9(1), 68-96. Disponible en: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj
Ortiz, J. J., Cañizares, M. J., Batanero, C., y Serrano, L. (2002), "An experimental study of probabilistic language in secondary school textbooks," contributed paper to the International Conference On Teaching Statistics 6 (ICOTS 6), Cape Town, July 2002.
Piaget J. e Inhelder, B. (1975). *The Origin of the Idea of Chance in Children.* New York: Norton.
Pratt, D. (1998). The co-ordination of meanings for randomness. *For the Learning of Mathematics,* 18(3), 2-11.
Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education,* 31*,* 602-625.
Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J. y Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria*. Educación Matemática*, 10(1), 7-26.
Shaughnessy, J.M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. A. Grows (Ed.), *Hanbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 465-494). Reston, VA: NCTM.
Stohl. H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (pp. 345-366). New York, USA: Springer.
Tversky, A. y Kahneman, D. (1982a). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. En D. Kahneman, P. Slovic, A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 3-20). New York: Cambridge University Press.
Tversky, A. y Kahneman, D. (1982b). Belief in the law of small numbers. En D. Kahneman, P. Slovic, A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 24-31). New York: Cambridge University Press.

FERNANDES, J. A., VISEU, F., MARTINHO, M. H. & CORREIA, P. F. (ORGS.) (2013). *ATAS DO III ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA*. BRAGA: CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DO MINHO.

DILEMAS HISTÓRICOS: VALOR DE LAS PARADOJAS EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS

José M. Contreras y Pedro Arteaga
Universidad de Granada,
jmcontreras@ugr.es; parteaga@ugr.es

Resumen. En estadística y probabilidad encontramos diferentes paradojas, de solución asequible a los estudiantes, que permiten organizar actividades didácticas en la enseñanza secundaria y bachillerato. En este trabajo describimos dos paradojas; el dilema de los tres prisioneros y el dilema de Condorcet, proponiendo algunas formulaciones y soluciones. También analizamos los contenidos estadísticos trabajados en su solución, así como los posibles razonamientos erróneos de los estudiantes. Finalizamos con unas reflexiones para la clase de estadística.

Introducción

Aunque la enseñanza de la probabilidad tiene ya una gran tradición en la educación secundaria y el bachillerato, algunos profesores, cuya formación inicial se centró sólo en las competencias matemáticas, pudieran sentirse inseguros con los nuevos enfoques recomendados en los Decretos de Enseñanzas Mínimas (MEC 2006, 2007). En estos documentos se recomienda reforzar las intuiciones de los estudiantes y el razonamiento estadístico, que van más allá de la comprensión de los conceptos y procedimientos. Es importante apoyar a estos profesores y proporcionarles actividades que les sirvan para motivar a sus alumnos y ayudarles a enfrentarse con algunas de sus intuiciones erróneas, al tiempo que les informamos de las posibles dificultades de los alumnos (Stohl, 2005).

Además de la formación científica, el profesor requiere formación en el conocimiento didáctico relacionado con el tema específico que enseña. Diversos autores se refieren a este conocimiento con diferentes nombres. Ball, Lubienski y Mewborn (2001) hablan del conocimiento matemático para la enseñanza, que se describe en Hill, Ball, y Schilling (2008) como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno" (p. 374) y lo dividen en dos grandes categorías: conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido. Para el conocimiento pedagógico del contenido Hill, Ball, y Schilling (2008) proponen tener en cuenta, el conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS), el conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT), y el conocimiento del currículo. El conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS) "es el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular" (p. 375). Incluye el conocimiento de los errores y dificultades comunes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas, el ser capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona su razonamiento matemático. Respecto al conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT) resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de dicho contenido. Incluye saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, situaciones didácticas pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas.

La finalidad de este trabajo es contribuir a reforzar este conocimiento pedagógico, para el tema de la probabilidad. Más concretamente, presentamos un análisis del valor didáctico que el uso de las paradojas puede tener en la clase de probabilidad, analizando con detalle dos de estas paradojas: el dilema del prisionero y la paradoja de Condorcet.

1. ¿Por qué usar paradojas en la enseñanza de la probabilidad?

Las paradojas de probabilidad pueden servir para plantear situaciones motivadoras en el aula. Su uso apoya una pedagogía constructivista, promoviendo un aprendizaje profundo a partir de las creencias previas y dando al profesor el papel de facilitador del aprendizaje (Lesser, 1998). No es difícil encontrar ejemplos sencillos para usar en el aula, pero que tienen soluciones contra-intuitivas, ya que la historia de la probabilidad y estadística está repleta de episodios y problemas que resultaron en su tiempo desafiantes y que muestran que la intuición estocástica con frecuencia nos engaña (Székely, 1986).

La construcción de la teoría de la probabilidad estuvo llena de contradicciones, que, a veces, se reproducen en el aprendizaje de los estudiantes, quienes se pueden beneficiar al desarrollar su motivación y meta-cognición, descubriendo las conexiones entre la historia y la vida cotidiana (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). Esto es importante, pues en algunas comunidades autónomas en España, se incluye el componente histórico como bloque transversal en el currículo de matemáticas, tanto en la educación secundaria obligatoria como en el bachillerato (Consejería de Educación, 2007, 2008).

Por otro lado, Falk y Konold (1992) afirman que el análisis de paradojas requiere, por parte del que analiza, una conciencia de sus propios pensamientos, lo que es tan importante como el aprendizaje de la solución correcta y es un paso vital para alcanzar la capacidad matemática abstracta. Konold (1994) destaca el efecto motivador al obtener resultados sorprendentes en la resolución de paradojas, que anima a los estudiantes a explorar el problema más formalmente. León (2009) indica que la historia de la probabilidad presenta situaciones muy atractivas que pueden conducir a reflexionar sobre la presencia del azar en la cotidianidad, además de servir de motivación hacia el estudio por parte de los alumnos.

En lo que sigue describimos dos paradojas históricas: el dilema de los tres prisioneros y el dilema de Condorcet, mostrando una formulación intuitiva de las soluciones correctas y analizando los objetos matemáticos que se trabajan en la solución de esta paradoja. Mostramos también algunas formulaciones diferentes y posibles soluciones a las mismas. Analizamos las posibles dificultades de los estudiantes al trabajar con este problema y finalizamos con algunas implicaciones didácticas.

2. El dilema de los prisioneros

Joseph Bertrand (1822-1900) fue un matemático francés del siglo XIX, que trabajó en Teoría de los Números, Geometría Diferencial, Economía, Termodinámica y Probabilidades. En su libro "Cálcul des probabilités", publicado en 1888, describe numerosos ejemplos de problemas de probabilidades contra intuitivos, entre otros, el siguiente, que es ahora conocido como la "Paradoja de la caja de Bertrand":

> Tenemos tres cajas y cada caja tiene dos cajones con una moneda cada una: una caja contiene dos monedas de oro, otra caja dos monedas de plata, y la caja final con una de cada tipo. Después de elegir una caja al azar se toma un cajón al azar, y resulta por ejemplo que contiene una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra también sea de oro?

Una de las muchas variantes de la paradoja de la caja de Bertrand es el denominado "dilema del prisionero". Hardin (1968) presenta el siguiente enunciado:

> Tres prisioneros esperan encarcelados su juicio. Se les informa que a uno de ellos se les condenará a muerte y que a los otros dos se les liberará. Cuando cada prisionero piensa en las posibilidades que tiene de salvarse, el juez le dice al primer prisionero que el tercero será liberado, preguntándole si quiere intercambiar su suerte con el segundo. ¿Qué debe hacer el prisionero?

Cuando se propone este problema a los alumnos, muchos estudiantes crean el espacio muestral de las posibilidades sin considerar la forma en que la información proporcionada por el juez afecta a las probabilidades. Antes de conocer que el tercer prisionero se salva, las posibilidades de vida y muerte de los prisioneros serían las indicadas en la Tabla 1. Por lo tanto, un razonamiento elemental indica que la probabilidad de que el primer prisionero muera es de 1/3 ya que sólo moriría en el supuesto 1. Como el juez indica al prisionero A que el tercer prisionero se salva, aparentemente sólo quedan dos supuestos (1 y 2), por lo que la respuesta más usual sería decir que A y B tienen la misma probabilidad (1/2) de morir, y no merece la pena intercambiar el futuro del primer prisionero con el del segundo. Sin embargo, este razonamiento es incorrecto.

Tabla 1 – Supuestos posibles en el dilema de los tres prisioneros

	Prisionero A	Prisionero B	Prisionero C
Supuesto 1	Muere	Libre	Libre
Supuesto 2	Libre	Muere	Libre
Supuesto 3	Libre	Libre	Muere

2.1. Solución correcta y objetos matemáticos que se trabajan

Una solución correcta se obtendría comparando las probabilidades de que mueran A y B, sabiendo que se salva C. Sean MA, MB y MC los sucesos de que mueran, respectivamente A, B y C y SA, SB y SC los sucesos consistentes en que se salven. Para calcular $P(MA/SC)$ habría que aplicar la fórmula de la probabilidad condicional, es decir: $P(MA/SC)=\frac{P(MA\cap SC)}{P(SC)}$.

Como sabemos que C se salva, $P(SC)=1$, y la probabilidad pedida es igual a la del numerador, $P(MA\cap SC)$. Utilizando la fórmula de la probabilidad compuesta: $P(MA\cap SC)=P(MA)\times P(SC/MA)$. Al salvarse siempre C, $P(SC/MA)=P(SC)=1$, por tanto, $P(MA\cap SC)=P(MA)=1/3$, de donde:

$$P(MA/SC)=\frac{P(MA\cap SC)}{P(SC)}=\frac{1/3}{1}=1/3$$

La probabilidad de que muera B, sabiendo que se salva C, sería la complementaria de la anterior, pues sabemos que o bien el segundo o el tercero han de morir, por lo que dicha probabilidad sería: $P(MB/SA)=1-P(MC/SA)=2/3$. Luego al primer prisionero no le conviene intercambiar su suerte con el segundo, ya que así tendría el doble de posibilidades de morir, lo cual es paradójico.

En el trabajo en el aula con esta paradoja se usarán implícita o explícitamente los siguientes objetos matemáticos (en la clasificación de Godino, Font y Wilhelmi, 2008):

Lenguaje matemático: Se utilizan expresiones verbales y numéricas de las probabilidades de los sucesos implicados, así como lenguaje simbólico para calcular dichas probabilidades. Podría también utilizarse un diagrama en árbol para visualizar la situación.

Conceptos: En esta paradoja los alumnos trabajan la idea de experimento aleatorio, suceso, espacio muestral, complementario, probabilidad simple, compuesta y condicional, dependencia e independencia.

Propiedades: Algunas propiedades que aparecen en la resolución de estos problemas son: diferencia entre probabilidad condicionada y simple, relación entre probabilidad condicionada, conjunta y simple, complementario, regla de la unión, del producto.

Procedimientos: Algunos procedimientos que podemos encontrar en la resolución de estas paradojas son: cálculo de probabilidades simples, compuestas y condicionadas.

Argumentos: La actividad permite usar el razonamiento deductivo y la realización de conjeturas y refutaciones.

Como se muestra en la Tabla 2 la resolución es bastante compleja, debido a la gran cantidad de objetos matemáticos que se manejan, incluyendo varias fórmulas de cálculo de probabilidad compuesta y condicional.

Tabla 2 – Objetos matemáticos implícitos en la solución

Tipo	Objetos matemáticos	Significado en la situación
Problema	Intercambiarse o no por el segundo prisionero	Determinar la mayor probabilidad de supervivencia
Lenguajes	Verbal	Explicación de la situación
	Gráfico	Diagrama en árbol, tabla de posibles resultados
	Simbólico	Expresar sucesos, probabilidades
	Numérico	Calculo de las diferentes probabilidades
Conceptos	Experimento aleatorio	Elegir el prisionero que se salva Salvar la vida
	Sucesos; espacio muestral	Prisionero A, B, C Morir/Salvarse
	Experimento compuesto	Composición de los experimentos anteriores
	Sucesos en el experimento compuesto	Producto cartesiano de los espacios muestrales anteriores (MA, SB, SC), etc.
	Intersección de sucesos	Conjunto común de sucesos
	Probabilidad clásica	Proporción de casos favorables a posibles
	Probabilidad condicional	Proporción de ocurrencia de un suceso respecto a la ocurrencia de otro
	Complementario	Suceso contrario a otro
Procedimientos	Cálculo de la probabilidad condicionada	$P(MA/SC)=\dfrac{P(MA\cap SC)}{P(SC)}$
	Cálculo de probabilidad compuesta	$P(MA\cap SC)=P(MA)\times P(SC/MA)$
	Cálculo del complementario	$P(MB/SA)=1-P(MC/SA)$
Propiedades	Diferencia probabilidad condicionada y simple	Restricción del espacio muestral
	Regla de la independencia	$P(SC/MA)=P(SC)$
Argumento	Razonamiento deductivo	Demostración de la solución
	Conjeturas y refutaciones	Contrastar las intuiciones con las soluciones

2.2. Posibles dificultades en la actividad

Aunque el problema es aparentemente simple, su complejidad se muestra en el análisis realizado de los objetos matemáticos y de los procesos que se analizan en la Tabla 2, así como en las diversas formulaciones, en las que pequeños cambios afectan al razonamiento correcto. También en la forma en que pequeñas variantes del enunciado llevan a una solución diferente.

Es interesante resaltar que, si la pregunta efectuada por el prisionero A hubiese sido "¿Se ejecutará al prisionero B?", entonces la respuesta, "Sí, B será ejecutado" de daría lugar a una probabilidad de $1/2$ de salvarse a A. Pearl (1988) utilizó una variante de este ejemplo para mostrar que las actualizaciones de los grados de creencia deben depender no sólo en los hechos observados, sino también de la información a priori sobre las condiciones del experimento (en el ejemplo, la consulta que se hace). También en la literatura relacionada con este problema se han descrito las siguientes dificultades:

Percepción de la independencia

El primer problema se produce cuando no se percibe la dependencia de los sucesivos experimentos (morir o salvarse) y nombre dado por el informante. Es decir, o bien no se visualiza la estructura del experimento compuesto o se suponen los sucesivos experimentos como independientes, atribuyendo una propiedad (independencia) que no tienen los experimentos.

A primera vista parece obvio que da igual cambiar o no, pues no se percibe la forma en que la información proporcionada afecta a la probabilidad inicial de salvarse que, sin esta información, es $1/3$. Hay un fallo en percibir que se puede condicionar un suceso por otro que aparece después de él y que puede cambiar la probabilidad inicial del suceso. Este error de razonamiento es explicado por Falk (1986), mediante la "falacia del eje temporal" que consiste en que las personas creen erróneamente que una información actual (información sobre un prisionero que se salva) no puede afectar a la probabilidad de un suceso que ocurrió con anterioridad a la misma (si el prisionero A había sido indultado). Sin embargo, hemos visto en las soluciones como esta información repercute sobre la probabilidad dada, lo mismo que ocurre en las pruebas diagnósticas, en que el resultado de un análisis clínico (que es posterior) afecta a la probabilidad de tener una enfermedad (anterior al análisis). Esta falacia puede estar causada, en parte, por la confusión entre condicionamiento y causalidad.

Desde el punto de vista de la probabilidad, si un suceso A es la causa estricta de un suceso B, siempre que suceda A, sucederá B, por lo que $P(B/A)=1$, es decir, si un suceso A es causa de otro suceso B, entonces A es dependiente de B. Pero el contrario no siempre se cumple según Falk (1986), pues un suceso A puede ser dependiente de otro suceso B sin que uno sea la causa del otro. Por ejemplo, se sabe que el cáncer de pulmón depende del hábito de fumar; pero fumar en sí mismo no es siempre la causa del cáncer.

Incorrecta percepción del espacio muestral

Otra posibilidad de error en este problema es una incorrecta enumeración del espacio muestral en uno o varios de los experimentos que intervienen. La intuición nos dice que, una vez salvado un prisionero, sólo quedan dos posibilidades equiprobables. Por tanto, tenemos 50% de probabilidad de salvarnos y da igual cambiar qué no hacerlo. En este razonamiento se está realizando una incorrecta enumeración del espacio muestral, pues todavía el prisionero que sabemos se salva interviene en el cálculo final. Esta dificultad de enumerar el espacio muestral al calcular la probabilidad condicionada, fue descrita por Gras y Totohasina (1995).

3. Paradoja de Condorcet

Otra paradoja célebre se refiere al análisis de los métodos de votación, para conseguir una forma de elección lo más cercana posible al sentir de la mayoría del cuerpo electoral. El problema trata de analizar la existencia o no de consistencia lógica en diferentes procedimientos que adopta una institución para resolver un tema, entre varias posibles soluciones. Por ejemplo, si se aceptase el resultado obtenido por mayoría simple de los votos emitidos (Piffano, 2009).

El problema de elegir un buen método de asignación de escaños, se puso de manifiesto por Antoine de Caritat, un miembro de la nobleza francesa en la épica de la revolución, más conocido como Condorcet. Dicho autor propuso este problema sobre 1780, en uno de sus principales trabajos: el "Ensayo sobre la aplicación del análisis a la probabilidad de las decisiones sometidas a la pluralidad de voces". En dicho trabajo, que fue elaborado por su autor para intentar hallar el número óptimo de miembros de un jurado en los Tribunales Populares de Justicia, instaurados por la Revolución Francesa. Condorcet demostró que los sistemas de votación que aplican la regla de aceptar simplemente la opinión de la mayoría, podrían no llegar a una situación concluyente y podría darse la intransitividad.

El problema es retomado por Duncan Black a mediados del pasado siglo, probando que es posible obtener resultados circulares e indefinidos en una votación si se sigue la regla de la mayoría simple.

La paradoja advierte que, aunque las preferencias individuales en las votaciones tienen propiedad transitiva (si una persona prefiere al candidato A frente al B y prefiere al B frente al C, entonces prefiere al A frente al C), no tiene por qué haber transitividad en las preferencias colectivas (si la mayoría de un grupo de personas prefiere al candidato A frente al B y también la mayoría del mismo grupo prefiere a B frente a C, esto no implica que la mayoría del grupo prefiera a A frente a C). Esta es una de las situaciones, aunque no la única, en que la propiedad transitiva no se aplica en el cálculo de probabilidades (Székely. 1986).

3.1. Solución correcta y objetos matemáticos que se trabajan

Para dar una solución intuitiva a esta paradoja usaremos el ejemplo presentado en el servidor “Matemáticas Educativas”. Supongamos que tenemos 49 votantes que tienen que elegir entre tres candidatos X, Y y Z. Como es normal, cada votante tiene sus propias preferencias, por tanto es posible que un votante prefiera al candidato X antes que al Y y al Y antes que al candidato Z, por lo tanto también preferirá a X antes que al candidato Z. Es decir existe una transitividad entre las preferencias y ello nos permite asociar a cada votante con un orden de preferencias ($X > Y > Z$). En la Tabla 3 hemos presentado todos los posibles órdenes de preferencia que se pueden dar entre tres candidatos y unas frecuencias posibles, dentro de la muestra de 49 personas.

Tabla 3 – Posibles frecuencias de las preferencias entre tres candidatos

$X > Z > Y$	$Z > X > Y$	$Z > Y > X$	$Y > Z > X$	$Y > X > Z$	$X > Y > Z$
21	3	4	16	5	0

Si se tienen en cuenta estas preferencias, en una primera vuelta de las elecciones, se elegiría el candidato preferido por más personas, y por tanto los resultados serían los siguientes: El candidato X tiene 21 (21+0) votos, el Y 21 votos (16+5), y el candidato Z tiene 7 votos (3+4) y se produce un empate.

Supongamos que para romper el empate entre X e Y se realiza una nueva votación, en la que sólo se puede votar a los candidatos que empataron en la primera vuelta, lo que es habitual en muchos sistemas de votación. En este supuesto, los votos del candidato Z pasan al resto de candidatos según la segunda preferencia. Los resultados entonces son: X, 24 votos (21+3) e Y, 25 votos (4+16+5) y por tanto ganaría el candidato Y con 25 votos frente a los 24 de X.

Aparentemente esto resuelve el problema y habría que dar el puesto a Y. Sin embargo, si analizamos el número de personas que prefieren a Z antes que a Y, se observaría que hay 21 personas que prefieren a Y y 28 que prefieren a Z, por lo que debiera elegirse a Z. Por otro lado 26 personas prefieren a candidato X antes que a Z mientras que sólo 23 prefieren a Z antes que al X.

El resultado es paradójico porque implica que la voluntad de mayorías parciales entra en conflicto entre sí. En otras palabras es posible que un procedimiento de elección falle el criterio de que siempre hay un ganador. El hecho de que una mayoría prefiera a X antes que a Z y a Z antes que a Y, no conduce necesariamente a que prefieran a X antes que a Y. Se produce un proceso cíclico. En la Tabla 4 se presenta el análisis semiótico de esta solución.

Tabla 4 – Objetos matemáticos implícitos en la solución

Tipo	Objetos matemáticos	Significado en la situación
Problema	Elegir al candidato	Determinar el candidato ganador
Lenguajes	Verbal	Explicación de la situación
	Simbólico	Expresar sucesos, probabilidades
	Numérico	Número de personas que prefieren a cada candidato
Conceptos	Experimento aleatorio	Candidato preferido por cada persona Orden de preferencia de cada persona entre tres candidatos
	Sucesos; espacio muestral	Candidato ganador. Posibles permutaciones del orden de preferencia
	Orden	Orden de preferencia de candidatos
	Comparación de probabilidades	Comparación de preferencias de los tres candidatos
	Unión de sucesos	Preferir a un candidato antes que a otro
Procedimientos	Cálculo de probabilidades	Aplicar reglas de cálculo intuitivo
Propiedades	Regla de Laplace	Casos favorables/casos posibles
	No transitividad de la probabilidad	La probabilidad no tiene propiedad transitiva
Argumentos	Razonamiento deductivo	Demostración de la solución
	Razonamiento empírico	Comparar preferencias individuales

3.2. Posibles dificultades en la actividad

El principal razonamiento erróneo que puede darse en este problema es pensar que la propiedad transitiva se aplica a la probabilidad. Este error se presenta por un fallo en el proceso de generalización, ya que se aplica una propiedad (transitiva) a un caso inapropiado. El error es lógico porque los alumnos encuentran la propiedad transitiva en otras situaciones, por ejemplo, la ordenación numérica y por ello se puede crear un obstáculo cuando trabajan problemas de probabilidad. Como en otros obstáculos, el error aparece no por falta de conocimiento, sino por un conocimiento anterior que no es válido en la situación propuesta. Aunque no se ha investigado específicamente este error si se observaron en los mismos casos de participantes que realizaban un proceso incorrecto de generalización.

4. Procesos matemáticos en el trabajo con las paradojas

Además de los objetos matemáticos ya descritos, Godino, Font y Wilhelmi (2008) consideran procesos de materialización – idealización, particularización – generalización, descomposición – reificación, representación – significación, personalización – institucionalización. En el trabajo con estas paradojas podemos observar los siguientes procesos:

1. *Procesos de materialización – idealización* (pasar de algo que se percibe a algo que no se percibe): Por ejemplo, los prisioneros y situación de supervivencia a los que hacen referencia la paradoja son objetos imaginarios, que podemos materializar, si por ejemplo, llevamos a cabo una simulación del experimento. O los diferentes símbolos representan propiedades, conceptos u operaciones. Por ejemplo, Z>X>Y representa en forma visible un orden.

2. *Procesos de particularización – generalización*: Es cuando pasamos de un caso particular, generalizando a una propiedad de un conjunto o viceversa, cuando una propiedad que sabemos es general, la aplicamos a un caso particular. Por ejemplo, sabemos que la suma total de todas las probabilidades de los sucesos en un experimento es la unidad. En cada ejemplo, particularizando llegamos a las probabilidades de los sucesos dados. Así sabemos que la suma de la probabilidad de supervivencia y muerte ha de ser una en cada caso sin tener que calcularla.

3. *Procesos de representación – significación*. Los procesos de representación y significación aparecen continuamente en el trabajo matemático, pues como no podemos operar directamente con objetos ideales, representamos las operaciones sobre los mismos por medio de símbolos u otros objetos. Por ejemplo, el objeto "probabilidad" lo representamos por la letra P, la probabilidad de un suceso que denominamos A lo representamos mediante $P(A)$.

4. *Procesos de descomposición – reificación*: El alumno que trata de resolver el problema tiene que pasar constantemente de considerar objetos elementales (unitarios) a considerar objetos compuestos de varios objetos elementales (sistémico): Por ejemplo, cada suceso de un experimento aleatorio es elemental, pero el espacio muestral del experimento es sistémico.

5. Implicaciones para la enseñanza

En la clase de matemáticas dejaremos a los estudiantes que encuentren sus soluciones (correctas e incorrectas) y organizaremos finalmente un debate, para que ellos mismos lleguen a la solución correcta y perciban los puntos en que cometieron un error. Todo ello les llevará a una mayor comprensión y también a aceptar el papel del error en el proceso de aprendizaje.

El profesor puede completar las actividades describiendo los supuestos que subyacen en la lista de Ideas Estocásticas Fundamentales descritas por Heitele (1975), quien indica que, además de la ideas básicas de aleatoriedad, hay una serie de conceptos sobre los cuáles se apoya todo el cálculo de probabilidades, que son los que debemos enseñar en los niveles no universitarios. Para elaborar una lista de ideas estocásticas fundamentales, Heitele (1975), quien toma de Bruner las tesis siguientes:

a. El principio decisivo de instrucción en un tema es la transmisión de las ideas fundamentales.

b. Cualquier tema puede ser enseñado efectivamente en alguna forma correcta a cualquier niño en cualquier estado de desarrollo, lo que implica que las ideas fundamentales son una guía necesaria desde la escuela primaria a la universidad para garantizar una cierta continuidad.

c. La ideas fundamentales son aquellas que se usarán en diferentes niveles cognitivos y lingüísticos en una "espiral curricular".

d. La transición a un nivel cognitivo superior se facilita si el tema subyacente ha sido preparado en una representación conveniente en etapas cognitivas anteriores.

Las ideas fundamentales proporcionan al alumno modelos explicativos eficientes en cada etapa de su desarrollo, que difieren en los distintos niveles cognitivos, no de una forma estructural, sino sólo de una forma lingüística y en su nivel de profundización. En el campo de la probabilidad la intuición juega un papel muy importante. Los modelos intuitivos explicatorios tienen dos funciones: En una edad temprana ayudan al niño a entender su entorno por sus propios medios, mucho antes de que sea capaz de comprender la complejidad del modelo matemático subyacente. Por otro lado, preparan el conocimiento analítico posterior.

El gran número de paradojas estocásticas puede confundir incluso a los expertos. Por ello, es más importante construir intuiciones correctas en este campo que en ningún otro. Por ello parece necesario ofrecer a los alumnos actividades estocásticas, en forma de juegos y experimentos. Sin embargo, las actividades a desarrollar no deben escogerse al azar. Es preciso un principio de organización, en la forma de la espiral curricular, escalonada por las ideas fundamentales.

6. Conclusiones

En estas paradojas se muestran la influencia de las creencias subjetivas en la asignación de probabilidades. El azar está presente en la vida cotidiana en muchos contextos en los que aparecen nociones de incertidumbre, riesgo y probabilidad, como los mostrados en las paradojas. En estas situaciones, cualquier persona ha de reaccionar a la información disponible, para tomar decisiones que le pueden afectar, emitir juicios sobre relación entre sucesos o efectuar inferencias y predicciones (Gigerenzer, 2002).

En estos contextos, la probabilidad no es una propiedad objetiva de los sucesos que nos afectan (como sería el peso, color, superficie, temperatura) sino una percepción o grado de creencia en la verosimilitud de la persona que asigna la probabilidad sobre la plausibilidad de ocurrencia del suceso (que ocurrirá o no). Por ello la visión subjetiva de la probabilidad sería más apropiada que la frecuencial o clásica. Sin embargo, aunque las concepciones clásicas y frecuencial se contemplan en la enseñanza, apenas se tiene en cuenta la concepción subjetiva o los contextos en que esta concepción podría aplicarse.

Las paradojas analizadas sugieren la importancia de que la enseñanza de la probabilidad sirva para educar el razonamiento probabilístico necesario para enfrentarse al azar en la vida cotidiana y mejorar las intuiciones de los estudiantes. El estado actual de la tecnología permite las simulaciones y los experimentos, que ayudan a los estudiantes a resolver las paradojas que se presentan incluso en problemas de probabilidad aparentemente sencillos y podrían servir para explorar situaciones probabilísticas de la vida real, sin necesidad de un gran nivel de formalización (Fernandes, Batanero, Contreras, y Díaz, 2009).

El cambio metodológico en la enseñanza de la probabilidad y en general de las matemáticas sigue a las posiciones constructivistas sobre el aprendizaje y sobre la construcción del conocimiento. Estas concepciones consideran que, además de la formación científica, el profesor requiere lo que se denomina "conocimiento profesional, en el cual Ball, Thames y Phelps (2005) incluyen cuatro componentes: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del contenido y los estudiantes. Es también importante buscar actividades adecuadas para llevar a cabo esta formación, En particular, estas situaciones deberían permitir la reflexión epistemológica sobre la estadística, el estudio de las investigaciones didácticas sobre errores y dificultades de aprendizaje, y el análisis y experimentación de métodos y recursos de enseñanza.

Las paradojas presentadas, junto con las actividades de análisis didáctico pueden contribuir a la adquisición de los diferentes componentes del conocimiento profesional, en el caso de la probabilidad. Asimismo ayuda a mejorar la formación del profesor para llevar a cabo estos tipos de análisis, que puede aplicar al diseño de secuencias de enseñanza y el análisis reflexivo sobre la propia práctica docente, con la finalidad de favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

Para finalizar, recordamos que González (2004) señala que el uso de la historia con fines didácticos depende del conocimiento histórico del profesor y su iniciativa para adaptar este saber a los intereses y necesidades del grupo, por lo que ha de exponer los avances de la disciplina junto con su estado actual teórico y de aplicabilidad. El estudio de la historia de la probabilidad y de las paradojas asociadas a la misma será entonces un componente importante en la preparación de formadores.

Agradecimientos: Proyecto EDU2010-14947 (MCINN-FEDER) y al grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2005). *Articulating domains of mathematical knowledge for teaching* .Online: www-personal.umich.edu/~dball/.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005): The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Nueva York: Springer.

Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2007). *ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía*.

Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2008). *ORDEN de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía*.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292-297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Falk, R y Konold, C. (1992): The psychology of learning probability. En F. Gordon y S. Gordon (eds.), *Statistics for the twenty-first century,* MAA Notes 26 (pp. 151-164). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Fernandes, J. A., Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante,* Número monográfico. As novas tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática, *XVIII* (1-2), 161-183.

Gigerenzer, G. (2002). *Reckoning with risk.* Londres: Penguin Books.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico, *Publicaciones*, 38, 25-48.

González, P., (2004). La historia de la matemática como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *SUMA*, 45, 17-28.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.

Hardin, G. (1968). The tragedy of commons. *Science, 162*, 1243-1248.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 39, 372-400.

Konold, C. (1994): Teaching probability through modeling real problems. *The Mathematics Teacher*, 87(4), 232-235.

León, N. (2009): La historia como elemento motivador hacia el estudio de la probabilidad: el problema de la apuesta interrumpida. *Sapiens: Revista Universitaria de Investigación*, 1, 69-88.

Lesser, L. (1998): Countering indifference – Using counterintuitive examples. *Teaching Statistics*, 20(1), 10-12.

MEC (2006). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*.

MEC (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*.

Pearl, J. (1988). *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*. San Mateo, California.

Piffano, H. (2009). *El dilema de Condorcet – el problema de la votación por mayoría simple de Duncan Black – la paradoja de Kenneth Arrow – y el manejo de agenda*. Universidad Nacional de la Plata, Argentina.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (pp. 345-366). Nueva York: Springer.

Székely, G. J. (1986). *Paradoxes in probability theory and in mathematical statistics*. Dordrech: Reidel.

FERNANDES, J. A., VISEU, F., MARTINHO, M. H. & CORREIA, P. F. (ORGS.) (2013). *ATAS DO III ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA*. BRAGA: CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DO MINHO.

CARACTERIZAÇÃO DAS INTUIÇÕES DE ALUNOS DO 9º ANO EM INDEPENDÊNCIA E PROBABILIDADE CONDICIONADA

Paulo Ferreira Correia
Escola Secundária/3 de Barcelos, ferreiracorreiapaulo@gmail.com
José António Fernandes
Universidade do Minho, jfernandes@ie.uminho.pt

Resumo. Neste estudo caracterizam-se as intuições de alunos nos conteúdos de probabilidade condicionada e independência, considerando as respostas dos alunos (corretas e erradas), as justificações por eles apresentadas e relações entre o desempenho na disciplina de Matemática e as respostas. Participaram no estudo 310 alunos do 9° ano de escolaridade, a quem foi aplicado um questionário com várias tarefas sobre probabilidade condicionada e independência. Em termos de resultados, salienta-se que mais de metade dos alunos apresentaram respostas corretas em mais de dois terços dos itens, a considerável redução da percentagem de alunos que apresentaram justificações adequadas às respostas corretas e, em geral, o aumento da percentagem de respostas corretas com o desempenho em Matemática.

Palavras-chave: Probabilidade condicionada; Independência; Intuições dos alunos; Alunos do 9° ano.

Introdução

Atualmente, o ensino das Probabilidades e da Estatística tem sido aprofundado nos programas escolares e nas salas de aula de muitos países. No caso português, após a introdução destes temas nos anos sessenta do século passado nos programas do ensino secundário, na sequência da reforma do ensino da matemática, eles foram também incluídos nos programas escolares do ensino básico no início dos anos noventa, que resultaram da Reforma do Sistema Educativo de 1986. Finalmente, com o reajustamento deste último programa (Ministério da Educação, 2007), estes temas, sob a designação de Organização e Tratamento de Dados, passaram a fazer parte de todos os três ciclos do ensino básico, incluindo o 1° ciclo do ensino básico, o que antes não acontecia.

No caso das Probabilidades, o seu ensino logo nos primeiros anos de escolaridade tem sido preconizado por alguns investigadores (e.g., Batanero, 2013; Fischbein, 1975) com o fundamento de que se trata de uma temática em que proliferam muitas intuições erradas e a ausência de ensino formal contribui para a consolidação dessas intuições. Fischbein (1975) argumenta que a ausência no currículo escolar dos fenómenos aleatórios implica consolidar a visão determinista do mundo que a escola amplamente tem transmitido.

Em situações contraintuitivas, Fernandes (1990) observou uma forte adesão a ideias intuitivas erradas por alunos do 11° ano (sem ensino de Probabilidades). Também em situações não contraintuitivas, Fernandes (2001) observou ganhos relativamente limitados dos alunos do 11° ano (sem ensino de Probabilidades) relativamente a alunos do 8° ano, especialmente no caso de acontecimentos de experiências compostas.

Ora, encontrando-se os conteúdos de probabilidade condicionada e independência entre aqueles que mais revelam ideias intuitivas erradas dos alunos (e não só) importa conhecer mais profundamente as ideias intuitivas dos alunos em fases etárias mais novas, tendo em vista avaliar das possibilidades do ensino formal de tais conceitos de modo a evitar a consolidação dessas intuições erradas.

Embora, tradicionalmente, os conteúdos de probabilidade condicionada e independência sejam abordados apenas no ensino secundário, são vários os estudos (e.g., Tarr & Lannin, 2005; Tarr, 1997; Tarr & Jones, 1997) que referem que ele é de facto apropriado para o currículo de matemática do ensino básico. Segundo Tarr (1997), a aprendizagem dos conceitos de probabilidade condicionada e independência não precisa de ser adiada até que os estudantes tenham desenvolvido destrezas robustas na comparação de frações, devendo a abordagem destes conceitos ser efetuada de uma forma intuitiva.

No caso português, os resultados referidos por Correia, Fernandes e Contreras (2011) e Correia e Fernandes (2012), sobre as intuições em probabilidade condicionada de alunos do 9° ano de escolaridade, revelam-se encorajadores quanto à possibilidade de introduzir o estudo deste conceito no 9° ano, pelo menos nos contextos de tabelas simples, tabelas de dupla entrada e de sacos com bolas, como aconteceu nesses trabalhos.

Embora exista investigação substancial sobre o pensamento probabilístico de alunos do 3° ciclo, pouca dessa investigação se tem centrado no pensamento de estudantes em probabilidade condicionada e independência. Esta ausência de investigação sobre o pensamento dos estudantes nestes conceitos e a importância crescente que lhe é atribuída no ensino de Probabilidades no 3° ciclo (Tarr & Jones, 1997) destacam o seu interesse.

1. Investigação prévia

Na perspetiva de Borovcnik e Kapadia (2010) as pessoas usam a sua experiência para efetuar julgamentos probabilísticos de forma imperfeita, pior ainda, de uma forma desorganizada; têm dificuldades em efetuar julgamentos envolvendo valores muito pequenos e muito grandes de probabilidade, especialmente se elas estão associadas a consequências desfavoráveis; estão inclinadas para atribuir igual *chance* às diferentes possibilidades, especialmente se são apenas duas; atribuem probabilidades e processam-nas em novas situações negligenciando as regras mais básicas, como por exemplo, que a soma de todas as probabilidades é igual a 1.

Ainda segundo estes autores, algumas particularidades do pensamento estocástico tornam-no muito diferente daquele que é mobilizado em outras situações, pois não há um controlo direto do sucesso em probabilidades – o acontecimento mais raro pode ocorrer e *destruir* a melhor estratégia, a interferência das reinterpretações causais pode deixar uma pessoa completamente perdida, os nossos critérios em situações de incerteza podem ter a sua base *em qualquer parte* e podem estar carregados de emoções – a probabilidade e a divindade tiveram uma origem comum na Grécia antiga.

Estimativas informais de probabilidade apoiadas na experiência são muitas vezes fortemente influenciadas por aspetos não científicos. Por exemplo, as pessoas recorrem ao que é mais fácil de lembrar, à informação fornecida pelas suas preconceções, ao que parece especial em circunstâncias atuais e à preferência por um certo resultado, o que as leva a ignorar influências contraditórias e a exagerar outras (Ahlgren & Garfield, 1991).

Segundo Garfield e Ahlgren (1988), de uma maneira geral, as dificuldades dos estudantes no desenvolvimento correto de intuições sobre ideias probabilísticas fundamentais deve-se essencialmente a três aspetos: muitos estudantes têm dificuldades associadas ao conceito de número racional e ao nível do raciocínio proporcional, aspetos usados no cálculo, descrição e interpretação de probabilidades; as ideias probabilísticas conflituam muitas vezes com as experiências dos estudantes e com a forma como eles veem o mundo; e muitos estudantes desenvolvem aversão às probabilidades ao serem expostos a um ensino muito abstrato e formal do tema.

1.1. Probabilidade condicionada

Segundo Spinillo (2002), o raciocínio proporcional envolve basicamente relações de primeira ordem, em que se comparam os elementos de uma razão, e relações de segunda ordem, em que se comparam duas razões. Por exemplo, no caso de um saco com bolas de duas cores, uma relação de primeira ordem traduz-se na comparação do número de bolas de cada uma das cores, o que dá origem a uma relação *parte-parte*, ou na comparação do número de bolas de uma das cores com o número total de bolas, o que dá origem a uma relação *parte-todo*. Já no caso de termos dois sacos com bolas de duas cores, a identificação do saco em que é mais provável obter uma bola de uma das cores implica a comparação das razões relativas a cada um dos sacos.

Além das razões parte-parte e parte-todo, no presente estudo introduzimos a relação de primeira ordem *todo-todo* para designar as comparações entre o número total de elementos de cada um dos sacos, a que Cañizares (1997) chama comparação do número de casos possíveis, e entre o número total de elementos de um conjunto antes e após a extração, com ou sem reposição, de um elemento desse conjunto.

Na opinião de Tarr e Lannin (2005) os julgamentos em probabilidade condicionada requerem a habilidade de estabelecer comparações probabilísticas, havendo evidências contraditórias que documentam as destrezas de alunos do ensino básico para efetuarem corretamente tais comparações. Piaget e Inhelder (1951) concluíram que as crianças que não compreendem as relações parte-todo revelam dificuldades na comparação de probabilidades de acontecimentos, enquanto outros autores identificaram outras estratégias que permitem aos alunos efetuar essas comparações. Recorrendo a vantagens (*odds*) ou outra comparação do tipo parte-parte, os alunos dos estudos de Falk (1993) e Green (1983) foram capazes de comparar probabilidades de dois acontecimentos, sugerindo que os alunos não precisam de atingir o estádio das operações formais para efetuarem com sucesso comparações probabilísticas (Tarr & Lannin, 2005).

Tarr (1997), num estudo com 26 alunos do 5º ano, observou que, antes de um programa de instrução em probabilidade condicionada e independência, os alunos começaram por utilizar mais comparações parte-parte do que comparações parte-todo quando faziam julgamentos sobre probabilidade condicionada. Segundo o autor, se bem que as comparações parte-parte permitem a muitos alunos perceberem que a probabilidade condicionada de alguns acontecimentos se altera em situações de não reposição, estas estratégias limitam, muitas vezes, os alunos no reconhecimento de que a probabilidade de todos os acontecimentos se altera nas situações em que não há reposição. Mesmo depois da instrução, na ausência de uma forma de representação formal da probabilidade de um acontecimento, os alunos continuaram a usar formas alternativas para determinar e comparar probabilidades, incluindo representações inventadas associadas a comparações parte-parte e parte-todo e outras idiossincráticas.

Fischbein e Gazit (1984), numa experiência de ensino sobre probabilidade condicionada, envolvendo 285 alunos dos 5º, 6º e 7º anos de escolaridade, concluíram que a percentagem de respostas corretas na determinação de probabilidades condicionadas em situações sem reposição, em geral, foi mais baixa do que nas situações com reposição.

No caso específico da probabilidade condicionada, Pollatsek, Well, Konold e Hardiman (1987) verificaram que os alunos confundem $P(A|B)$ com $P(A \cap B)$, isto é, não distinguem claramente os significados da condicional e da conjunta, confusão que se tornou particularmente evidente aquando da interpretação de enunciados de problemas que implicavam a identificação destas probabilidades. Esta dificuldade também foi observada em futuros professores do ensino primário (Contreras, Batanero, Díaz & Fernandes, 2011; Estrada & Díaz, 2006) e em alunos do 9º ano de escolaridade (Correia et al., 2011) na resolução de uma tarefa envolvendo frequências de dois acontecimentos numa tabela de dupla entrada.

Falk (1986) verificou que muitos alunos não discriminam entre uma probabilidade condicionada e a sua transposta, isto é, entre as duas probabilidades $P(A|B)$ e $P(B|A)$, erro que designou por *falácia da condicional transposta*. No estudo de Correia et al. (2011), antes referido, verificou-se que alguns alunos do 9º ano também aderiram a este erro.

No estudo desenvolvido por Lecoutre e Durand (1988), em que participaram 342 alunos dos 14 aos 18 anos de idade, os autores concluíram que os alunos tendem a admitir que acontecimentos de caráter aleatório são por natureza equiprováveis. Esta ideia, designada por *enviesamento de* *equiprobabilidade*, mostrou-se extremamente resistente a variações de fatores relacionados com a situação experimental (informação de natureza combinatória, de natureza frequencista, modificações ao nível da formulação, etc.) e com fatores de caracterização dos sujeitos (nível de formação, tipo de estudos secundários, sexo, etc.), que foram manipulados no estudo.

Watson (2005), com base numa ampla revisão de literatura sobre a compreensão de conceitos probabilísticos, concluiu que, geralmente, os alunos são capazes de apreciar a incerteza e o propósito das tarefas que lhe são propostas, enquanto raciocínios sofisticados envolvendo raciocínio proporcional, independência e espaços amostrais são difíceis para a maioria dos alunos. Contudo, a autora conjetura que a situação pode melhorar com a introdução, em muitos países, do ensino de Probabilidades no ensino básico, o que não acontecia aquando das investigações analisados no seu estudo.

1.2. Independência

Fischbein, Nello e Marino (1991), num estudo em que participaram 618 alunos do 4° ano ao 8° ano de escolaridade, sem instrução em probabilidades, questionaram os alunos sobre se o acontecimento *obter três faces europeias* é mais provável em três lançamentos consecutivos de uma moeda ou no lançamento simultâneo de três moedas. Os autores verificaram que cerca de um terço dos alunos responderam que a probabilidade não era a mesma, sendo predominante, em todos os anos de escolaridade, a crença de que é mais provável obter três faces europeias em três lançamentos consecutivos de uma moeda do que no lançamento simultâneo de três moedas. Apoiados nas entrevistas realizadas, os autores concluíram que os alunos acreditavam fortemente que os resultados obtidos no lançamento da moeda podiam ser controlados pelo indivíduo, crença esta que é incompatível com a independência dos acontecimentos uma vez que a probabilidade de obter face europeia em cada experiência mantém-se constante e igual a $1/2$.

Resultados ligeiramente melhores foram obtidos por Green (1983) em alunos dos 11 aos 16 anos de idade, com um quarto de respostas incorretas, quanto estes foram questionados sobre a face mais provável de obter no quinto lançamento de uma moeda ao ar, depois de ter saído a face europeia nos quatro lançamentos anteriores.

Já no estudo de Konold, Pollatsek, Well, Lohmeier e Lipson (1993), em que foi pedido a estudantes universitários de um curso de remediação matemática para indicarem qual das sequências seguintes é mais provável e menos provável de ocorrer, respetivamente, quando é lançada cinco vezes uma moeda equilibrada: a) $EEENN$; b) $NEENE$; c) $NENNN$; d) $ENENE$; e) as quatro sequências são igualmente prováveis (E representa a face europeia e N a face nacional), verificou-se que quase dois terços dos alunos responderam corretamente relativamente à sequência mais provável, mas apenas cerca de um terço dos alunos responderam corretamente em relação à sequência menos provável. Fernandes (1990), num item muito semelhante ao usado por Konold et al. (1993), obteve resultados muito semelhantes em alunos do 11° ano e futuros professores de Matemática. Face aos resultados obtidos, os autores concluíram existir um conflito entre a crença da equiprobabilidade de obter cada face da moeda e a crença de que em vários lançamentos da moeda obtém-se sensivelmente o mesmo número de cada uma das faces.

No estudo já antes referido, de Fischbein, Nello e Marino (1991), questionaram-se também os alunos acerca da probabilidade dos acontecimentos A: "obter face 5 num dado e face 6 no outro" e B: "obter face 6 em ambos os dados", na experiência aleatória de lançamento de dois dados equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6 e anotar o número da face que fica voltada para cima. Nesta situação foram muito poucos os alunos que responderam corretamente e a instrução não se revelou eficaz para vencerem as ideias erradas. Os alunos que tinham recebido instrução em Probabilidades apresentaram justificações que envolvem o conceito de independência e a equiprobabilidade das seis faces do dado: "Cada dado é independente do outro. A probabilidade de obter um certo número de um dado é $1/6$ e a probabilidade de obter o mesmo número com outro dado é a mesma" (p. 535). Neste caso, a justificação de que os pares $(5,6)$ e $(6,6)$ têm igual probabilidade resulta da combinação entre as ideias de independência e de equiprobabilidade e de considerar os resultados possíveis 5 e 6 separadamente.

Outra dificuldade dos alunos resulta da tendência de negligenciarem a influência da dimensão da amostra quando efetuam estimativas de probabilidade, atribuindo às pequenas amostras propriedades apenas válidas na população ou em grandes amostras (Kahneman & Tversky, 1982). Na situação seguinte, apresentada por Fischbein e Schnarch (1997), muitos alunos revelaram essa tendência.

> A probabilidade de obter face europeia pelo menos duas vezes quando se lançam três moedas é:
> a) Menor do que a probabilidade de obter face europeia pelo menos 200 vezes quando se lançam 300 moedas.
> b) É igual à probabilidade de obter face europeia pelo menos 200 vezes quando se lançam 300 moedas.
> c) É maior do que a probabilidade de obter face europeia pelo menos 200 vezes quando se lançam 300 moedas. (p. 99)

Nesta questão, cerca de um terço dos alunos do 5º ano e três quartos dos alunos do 11º ano aderiram à ideia errada de que a probabilidade de obter face europeia pelo menos 2 vezes quando se lançam 3 moedas é igual à probabilidade de obter face europeia pelo menos 200 vezes quando se lançam 300 moedas, revelando que, de uma maneira geral, a utilização da estratégia efeito do tamanho da amostra aumentou com a idade. Esta é uma crença tão forte que disfarça uma ideia mais subtil, especificamente a ideia de que se a amostra se torna maior, a probabilidade de obter um certo resultado empírico tende a aproximar melhor a predição teórica. Por outro lado, os estudantes poderão não compreender a influência do tamanho da amostra porque invocam raciocínio proporcional e assumem que toda a amostra deve ser proporcional ou refletir o comportamento da população.

Tarr (1997) concluiu que, antes da instrução, alunos do 5º ano sentiram mais dificuldades no conteúdo independência do que nos conteúdos probabilidade condicionada e probabilidade geral, em consequência da sua predisposição para adotarem a estratégia da representatividade (Kahneman & Tversky, 1982) quando faziam julgamentos probabilísticos. Já depois de uma experiência de ensino centrada na compreensão dos conceitos de probabilidade condicionada e independência, verificou-se que os estudantes foram, de uma maneira geral, bem-sucedidos na aprendizagem dos dois conceitos. Quanto às alterações qualitativas no pensamento probabilístico dos estudantes, Tarr (1997) concluiu que, comparando com as avaliações iniciais em independência, os estudantes após a instrução estavam mais inclinados para usar números para rejeitar a estratégia da representatividade e reconhecer que o espaço amostral é conservado nas situações com reposição e que nenhum número finito de experiências garante a realização do acontecimento pretendido numa experiência aleatória.

Para além da influência das "conceções erradas do acaso", a heurística da representatividade (Kahneman & Tversky, 1982) é também influenciada pela "insensibilidade às probabilidades prévias ou *a priori* dos resultados", neste caso por ignorar o impacto da informação prévia na probabilidade, e pela "insensibilidade à dimensão da amostra", fenómeno que os autores designam por "lei dos pequenos números", já antes referido. O problema seguinte, apresentado por Fischbein e Schnarch (1997) a alunos do 5º ano, 7º ano, 9º ano, 11º ano e a estudantes universitários, despoletou a adesão dos alunos a esta heurística.

> No jogo do loto escolhem-se 6 números de um total de 49. O João escolheu os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e a Ana escolheu os números 39, 1, 17, 49, 8 e 27. Qual deles tem maior chance de ganhar?
> a) O João tem mais chances de ganhar.
> b) A Ana tem mais chances de ganhar.
> c) O João e a Ana têm as mesmas chances de acertar nos 6 números. (p. 98)

Nas justificações dos alunos que responderem que a Ana tem mais chances de ganhar está implícita a adesão à heurística da representatividade se a justificação do aluno evoca argumentos de aleatoriedade (por exemplo, referir que a chave da Ana reflete maior aleatoriedade do que a chave do João), tendo os autores concluído que a adesão à estratégia da representatividade diminuiu com a idade, variando entre cerca de um quinto dos estudantes universitários e dois terços dos alunos do 5º ano.

O *efeito recente negativo* e *efeito recente positivo* (Fischbein, 1975) são ideias que ilustram a heurística da representatividade. No primeiro caso, verifica-se uma tendência para acreditar que, após a obtenção de uma sequência de faces nacional no lançamento de uma moeda equilibrada, seria mais provável sair a face europeia. Já no segundo caso, há uma tendência para acreditar que, após a obtenção de uma sequência de faces nacional no lançamento de uma moeda, seria mais provável sair novamente a face nacional.

No caso do estudo de Fischbein e Schnarch (1997), a adesão à estratégia *efeito recente negativo* diminuiu com a idade, tendo sido adotada por cerca de um terço dos alunos do 5º ano e por nenhum aluno universitário. Quanto à estratégia *efeito recente positivo*, ela ocorreu residualmente. Já no estudo de Green (1983), já antes referido, observou-se um equilíbrio entre a percentagem de alunos a aderirem ao efeito recente positivo e ao efeito recente negativo (ligeiramente superior a 10%), aumentando a percentagem de respostas corretas com a idade (entre 67% e 80%).

2. Metodologia

No presente estudo pretendeu-se, fundamentalmente, caracterizar as ideias intuitivas de alunos do 9º ano de escolaridade acerca da probabilidade condicionada e independência em diferentes contextos. Para tal, foi realizado um estudo, fundamentalmente, de tipo quantitativo e de natureza descritiva e comparativa.

Participaram no estudo 310 alunos do 9º ano de escolaridade, designados por A_i, com $1 \leq i \leq 310$, pertencentes a quatro escolas do Litoral Norte de Portugal, duas inseridas em meio urbano e duas em meio rural. As idades dos alunos variavam entre os 13 e os 17 anos, com 14 anos de média de idades (que é a idade normal de frequência do 9º ano); 51% dos alunos eram do sexo feminino e 49% do sexo masculino; as suas classificações na disciplina de Matemática, no final do 8º ano, numa escala de 1 a 5, variavam entre 2 e 5, com uma média de 3,1; e 79% dos alunos não tinham qualquer repetência.

A recolha de dados foi efetuada através de um questionário que, para além de algumas questões centradas na aquisição de informação pessoal, incluía nove questões, quase todas com vários itens, sobre independência, probabilidade condicionada e probabilidade geral (ver Anexo). Na Tabela 1 apresenta-se a distribuição dos itens segundo o conteúdo que avaliam e o contexto em que são apresentados.

Tabela 1 — Distribuição dos itens do questionário segundo o conteúdo e o contexto

	Contexto						
Conteúdo	Moeda	Roleta	Saco de bolas	Fichas	Gráfico de barras	Tabela simples	Tabela de dupla entrada
Independência	1	2					
Probabilidade condicionada			3a, 3b, 4a, 4b, 8a1, 8b1	9b, 9c	5b	6b	7b2, 7b3
Probabilidade geral			8a2, 8b2	9a	5a	6a	7a1, 7a2, 7a3, 7b1

O questionário estrutura-se em duas partes: a parte I englobando quatro questões de escolha múltipla em que se pedia aos alunos para justificarem a opção selecionada e a parte II englobando as restantes cinco questões de desenvolvimento, envolvendo o cálculo de probabilidades. No conteúdo independência incluem-se 2 itens (1 e 2), no conteúdo probabilidade condicionada incluem-se 12 itens (3a, 3b, 4a, 4b, 5b, 6b, 7b2, 7b3, 8a1 e 8b1, 9b, 9c) e no conteúdo probabilidade geral incluem-se 9 itens (5a, 6a, 7a1, 7a2, 7a3, 7b1, 8a2, 8b), 9a). Na Tabela 2 apresenta-se a distribuição das questões e itens segundo o conteúdo que avaliam e tipo de item.

Tabela 2 — Distribuição dos itens segundo o seu conteúdo e a sua tipologia

Conteúdo	Tipo de item	
	Escolha múltipla	Desenvolvimento (cálculo de probabilidades)
Independência	1, 2	
Probabilidade condicionada	3a, 3b, 4a, 4b	5b, 6b, 7b2, 7b3, 8a1, 8b1, 9b, 9c
Probabilidade geral		5a, 6a, 8a2, 8b2, 9a, 7a1, 7a2, 7a3, 7b1

Nos itens das questões de probabilidade geral, as questões 7a1, 7a2, 7a3 referem-se ao significado de valores fornecidos numa tabela de dupla entrada; a questão 9a) refere-se à obtenção do espaço amostral; as questões 7b1, 8a2 e 8b2 referem-se à probabilidade conjunta, embora o cálculo da probabilidade conjunta, por definição, envolva a probabilidade condicionada, uma vez que $P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$; e as questões 5a) e 6a) referem-se à probabilidade da união de acontecimentos disjuntos.

O questionário foi aplicado em aulas dos alunos, de 90 minutos, no início do 2° período escolar do ano letivo 2011/2012 e os alunos tinham estudado os conteúdos de Probabilidades, previstos no programa da disciplina de Matemática do 9° ano no início do ano letivo — aspetos de linguagem e definições clássica e frequencista de probabilidade, dos quais não fazem parte a probabilidade condicionada e a independência.

Em termos de análise de dados, estudaram-se as respostas, as justificações e os erros cometidos pelos alunos nos vários itens individuais do questionário e em diferentes conjuntos de itens, incluindo os diferentes conteúdos (independência, probabilidade condicionada e probabilidade geral), o tipo de item (escolha múltipla e de desenvolvimento) e os diferentes contextos (moeda, roleta, saco de bolas, fichas, tabela simples, tabela de dupla entrada e gráfico), determinando-se frequências e recorrendo-se a tabelas como forma de sintetizar os resultados.

Além da análise ao nível da estatística descritiva, acima referida, aplicou-se o teste de independência de qui-quadrado (χ^2) para comparar as percentagens de respostas corretas e erradas em cada um dos itens do questionário e o teste de Kruskal-Wallis para comparar a realização dos alunos em cada um dos conteúdos (independência, probabilidade condicionada e probabilidade geral) e no questionário com o seu desempenho em Matemática (fraco, médio e bom).

Na codificação do desempenho dos alunos em Matemática recorreu-se à classificação do aluno no final do 8° ano, numa escala de 1 a 5, de acordo com o seguinte critério: desempenho fraco correspondente aos níveis 1 ou 2; desempenho médio correspondente ao nível 3; e desempenho bom correspondente aos níveis 4 ou 5. Em termos de análise estatística, usou-se o programa *SPAW Statistics 18*, adotou-se o nível de significância estatística de 0,05 e consideraram-se as não respostas como sendo respostas erradas.

3. Apresentação de resultados

A apresentação dos resultados do estudo estrutura-se em três secções: a primeira centrada na análise das respostas (corretas e erradas); a segunda focada na análise das justificações que os alunos apresentaram para explicarem as suas respostas; e a terceira centrada na comparação entre o desempenho em Matemática e as respostas (corretas e erradas) em cada um dos itens, nos três conteúdos considerados e na totalidade do questionário. Seguidamente, apresentam-se os resultados obtidos em cada uma destas análises.

3.1. Análise das respostas

Relativamente às respostas dos alunos, na Figura 1 podemos observar a percentagem de respostas corretas em cada um dos 23 itens do questionário, que foram apresentadas pelos 310 alunos que participaram no estudo.

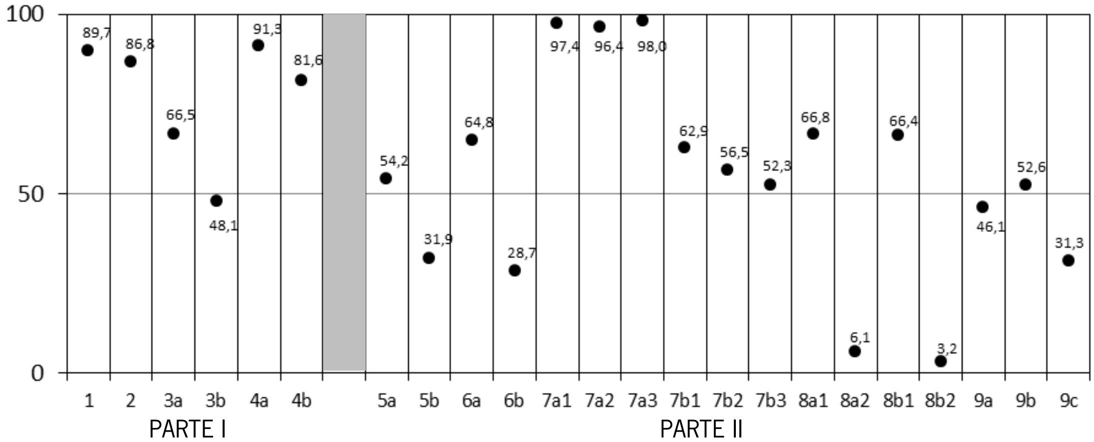


Figura 1. Percentagem de respostas corretas em cada um dos 23 itens do questionário.

Globalmente, verifica-se que a percentagem de respostas corretas varia entre o mínimo de 3,2% e o máximo de 98,0%, com uma média de respostas corretas de 60,0% e um desvio padrão de 27,5% no conjunto de todos os itens do questionário, o que leva a concluir que o grupo de alunos envolvidos no estudo revelou uma razoável realização no conteúdo estudado.

Da Figura 1 conclui-se que os itens de significado de valores de uma tabela de dupla entrada (itens 7a1, 7a2, 7a3), consideradas no conteúdo probabilidade geral, foram os que se revelaram mais fáceis para os alunos, com percentagens de respostas corretas acima de 96%. Já os itens 8a2 e 8b2, sobre probabilidade conjunta e inseridas no mesmo conteúdo, foram os que se revelaram mais difíceis para os alunos, com percentagens de respostas corretas igual ou inferior a 6%.

Nas duas questões de independência (itens 1 e 2), a percentagem de alunos a apresentarem como resposta a opção correta manteve-se acima de 86%.

Nas questões de probabilidade condicionada, a percentagem de respostas corretas variou entre 28,7% e 91,3%: nas questões de escolha múltipla (itens 3a, 3b, 4a e 4b) a percentagem de respostas corretas variou entre 48,1% e 91,3%; nas questões em que se pedia para calcular a probabilidade (itens 5b, 6b, 7b2, 7b3, 8a1, 8b1, 9b e 9c) a percentagem de respostas corretas variou entre 28,7% e 66,8%.

Na Figura 2 podemos observar a percentagem de respostas corretas em cada um dos itens segundo os conteúdos contemplados no questionário.

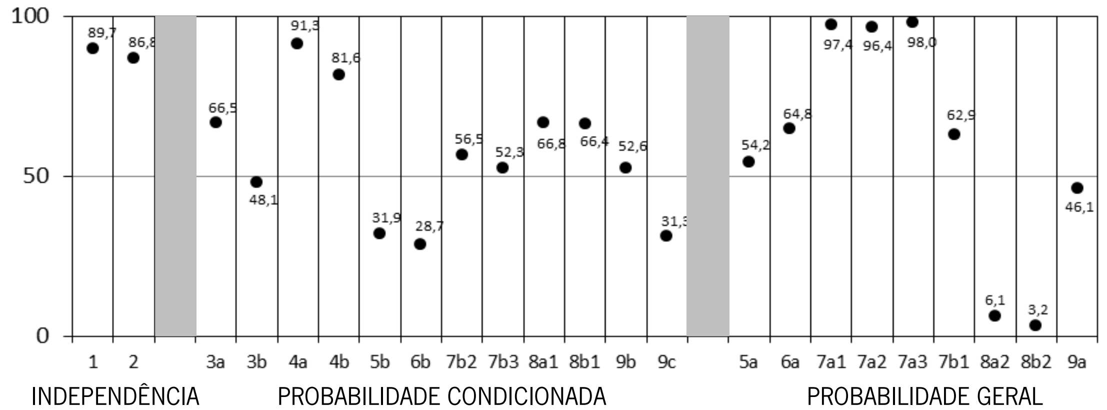


Figura 2. Percentagem de respostas corretas em cada um dos conteúdos.

Pela Figura 2 observa-se, em geral, um melhor desempenho dos alunos no conteúdo independência e análogo em probabilidade condicionada e probabilidade geral. Estes resultados precisam-se na Tabela 3, onde se apresenta a distribuição das percentagens de respostas (corretas e erradas) dos alunos segundo os três conteúdos contemplados no questionário: independência; probabilidade condicionada e probabilidade geral.

Tabela 3 — Distribuição (em %) das respostas dos 310 alunos segundo o conteúdo

Conteúdo (n° de itens)	Respostas Corretas	Respostas Erradas	Não respostas
Independência (2)	88,2	11,3	0,5
Probabilidade condicionada (12)	56,1	38,3	5,6
Probabilidade geral (9)	58,8	34,6	6,6

Da leitura da Tabela 3 confirma-se que o conteúdo em que os alunos revelaram melhor desempenho foi o de independência. Neste caso, poderão ter contribuído para essa superior realização dos alunos os seguintes aspetos relativos aos itens do questionário:

– As duas questões de independência são de escolha múltipla, enquanto na maior parte das questões de probabilidade condicionada é pedido o valor numérico da probabilidade. Nas questões de escolha múltipla (os 6 itens da parte I do questionário) a percentagem de respostas corretas é de 77,3% (88,2% de respostas corretas em independência e 71,7% de respostas corretas em probabilidade condicionada) e nas questões de resposta curta, em que é pedido o cálculo de uma probabilidade condicionada (8 itens da parte II do questionário, os itens 5b, 6b, 7b2, 7b3, 8a1, 8b1, 9b e 9c), a percentagem de respostas corretas é de 48,3%;

– O questionário contemplava um número muito inferior de questões de independência, comparativamente com os outros dois conteúdos;

– As justificações apresentadas pelos alunos, nas questões de escolha múltipla (parte I), nem sempre justificavam adequadamente a opção correta.

Quanto aos conteúdos probabilidade condicionada e probabilidade geral, estes reúnem uma percentagem bastante próxima de respostas corretas, embora muito inferior à percentagem de respostas corretas no conteúdo independência.

Do exposto, conclui-se que o tipo de questão (escolha múltipla e resposta curta) influenciou o desempenho dos alunos nos vários conteúdos de probabilidades, uma vez que as questões de escolha múltipla reúnem uma maior percentagem de respostas corretas do que as questões de resposta curta. Assim, as questões de resposta curta, incluídas apenas nos conteúdos probabilidade condicionada e probabilidade geral, explicam as menores percentagens de respostas corretas nesses conteúdos.

No conteúdo probabilidade geral, apresenta-se na Tabela 4 a distribuição das percentagens de respostas (corretas e erradas) dos alunos segundo os vários conceitos contemplados nos itens desse conteúdo.

Tabela 4 — Distribuição (em %) das respostas dos 310 alunos no conteúdo probabilidade geral

Conceito (n° de itens)	Respostas: Corretas	Respostas: Erradas	Não respostas
Frequências (3)	97,3	1,6	1,1
Probabilidade da união (2)	59,5	36,1	4,4
Espaço amostral (1)	46,1	45,8	8,1
Probabilidade conjunta (3)	24,1	62,9	13,0

Da Tabela 4 destaca-se a percentagem de respostas corretas abaixo dos 50% nas questões de probabilidade conjunta e espaço amostral. No caso da probabilidade conjunta, embora a percentagem de respostas corretas seja muito inferior à percentagem de respostas corretas dos outros conceitos do conteúdo probabilidade geral, tal como se pode observar no gráfico da Figura 1, no item 7b1 a percentagem de respostas corretas foi de 62,9%.

Na Tabela 5 apresenta-se a distribuição das percentagens de respostas (corretas e erradas) dos alunos nas questões que envolvem situações de extração de objetos (bolas ou fichas) com reposição (itens 3a, 4a e 8a1) e sem reposição (itens 3b, 4b, 8b1, 9b e 9c) no conteúdo de probabilidade condicionada.

Tabela 5 — Distribuição (em %) das respostas dos 310 alunos nas questões com e sem reposição

Tipo de extração (n° de itens)	Respostas: Corretas	Respostas: Erradas	Não respostas
Probabilidade condicionada em situações com reposição (3)	74,7	22,4	2,9
Probabilidade condicionada em situações sem reposição (5)	56,0	37,0	7,0

Dos dados da Tabela 5 conclui-se que foram mais fáceis para os alunos as questões que envolviam a probabilidade condicionada em situações com reposição do que em situações sem reposição. Além disso, repare-se também que foi nas situações sem reposição que mais alunos não responderam às questões.

Na Tabela 6 apresenta-se a distribuição das percentagens de respostas (corretas e erradas) dos alunos segundo o contexto em que se insere cada uma das questões do questionário.

Da leitura da tabela 6 concluímos que foi mais difícil para os alunos resolverem as questões de probabilidades em contexto gráfico, de extração sem reposição de fichas e de tabela de frequências simples do que em contexto de tabela de dupla entrada, roleta ou moeda.

No caso específico da tabela de dupla entrada, foram considerados dois tipos de questões: significado de dados da tabela, cuja percentagem média das respostas corretas é 97,3%; e cálculo de probabilidades, cuja percentagem média de respostas corretas é de 57,2%. Consequentemente, quase todos os alunos foram capazes de ler o significado de dados da tabela, enquanto apenas pouco mais de metade foram capazes de calcular as probabilidades pedidas.

Tabela 6 — Distribuição (em %) das respostas dos 310 alunos segundo o contexto das questões

Contexto (nº de itens)	Respostas: Corretas	Respostas: Erradas	Não respostas
Moeda (1)	89,7	9,6	0,7
Roleta (1)	86,8	12,9	0,3
Tabela de dupla entrada (6)	77,3	19,2	3,5
Saco de bolas (8)	53,7	38,9	7,4
Tabela simples (2)	46,8	47,4	5,8
Fichas (3)	43,3	47,9	8,8
Gráfico (2)	43,1	53,5	3,4

Quanto à situação em contexto de extração sem reposição de fichas de um saco, também foram considerados dois tipos de questões: obtenção do espaço amostral, cuja percentagem média de respostas corretas é de 46,1%; e cálculo de probabilidades, cuja percentagem média de respostas corretas é de 41,9%. No contexto de extração de bolas, foram também considerados dois tipos de questões: os itens 3a, 3b, 4a e 4b de comparação de probabilidades, cuja percentagem média de respostas corretas é de 71,7%; e as questões 8a1, 8a2, 8b1 e 8b2 de cálculo de probabilidades, cuja percentagem média de respostas corretas é de 35,6%. Neste último caso salienta-se uma grande diminuição da percentagem de respostas corretas quando passamos da comparação de probabilidades para o cálculo de probabilidades, o que se deve fundamentalmente a estarem aí incluídas as duas questões de probabilidade conjunta (itens 81b e 82b), que foram as questões em que os alunos sentiram maior dificuldade.

3.2. Análise das justificações e estratégias

Na Tabela 7 apresenta-se a distribuição das resoluções dos alunos segundo as estratégias de contagem utilizadas nos 4 itens da questão 8 (utilizadas em 9,8% das resoluções), no item 9a de escrita do espaço amostral (utilizadas em 83% das resoluções) e nos itens 9b e 9c (utilizadas em 14,7% das resoluções).

Tabela 7 — Distribuição das resoluções dos alunos segundo as estratégias de contagem utilizadas nas questões 8 e 9

Estratégias	Percentagem de utilização
Configurações	41,0
Diagrama de árvore	29,8
Tabela de dupla entrada	16,0
Enumeração não sistemática	4,2
Diagrama de árvore e regra do produto	3,6
Regra do produto	3,1
Desenhos	1,1
Regrada soma	0,7
Diagrama de árvore, regra do produto e regra da soma	0,5

A informação fornecida na Tabela 7 permite concluir que as estratégias de contagem mais utilizadas pelos alunos incidiram na determinação de configurações, na construção de um diagrama de árvore e na construção de uma tabela de dupla entrada, sendo a estratégia *configurações* claramente a preferida dos alunos. No entanto, estas estratégias foram utilizadas essencialmente quando se solicitava a determinação do espaço amostral (item 9a), sendo muito pouco utilizadas por iniciativa do aluno nas restantes questões envolvendo experiências compostas.

Na Tabela 8 apresenta-se a distribuição das justificações dos alunos segundo o tipo de relação estabelecida (todo-todo, parte-parte e parte-todo) para compararem probabilidades condicionadas nas questões 3 e 4 (itens 3a, 3b, 4a e 4b). Nestas questões observaram-se 938 justificações destes tipos, num universo de 1104 justificações (85,0% das justificações): 414 nos dois itens da questão 3 e 524 nos dois itens da questão 4.

Tabela 8 — Distribuição das justificações utilizadas pelos alunos nas questões 3 e 4 segundo o tipo de relação estabelecida

Tipo de relação	Percentagem
Todo - Todo	4,7
Parte - Parte	71,2
Parte - Todo	24,1

Da leitura da Tabela 8 conclui-se que aquando da comparação de probabilidades condicionadas predominaram as relações do tipo parte-parte. Mesmo tendo sido lecionada a regra de Laplace (que envolve uma relação do tipo parte-todo) os alunos não deram preferência a este tipo de relação, tal como era de esperar.

Na tabela 9 apresenta-se a distribuição das justificações apresentadas pelos alunos na Parte I do questionário, que foram codificadas em três categorias: justificações de natureza tautológica, justificações que revelam a adesão ao enviesamento de equiprobabilidade e justificações que revelam a adesão à heurística de representatividade. A informação apresentada na Tabela 9 refere-se às justificações dos alunos que envolvem apenas essas estratégias, pois essas estratégias ocorreram, por vezes, associadas a outras estratégias que não as referidas na tabela. Nestes itens (1, 2, 3a, 3b, 4a e 4b) observaram-se 267 justificações desta natureza num universo de 1686 justificações (15,8% das justificações): 100 no item 1; 60 no item 2; 91 nos dois itens da questão 3; e 16 nos dois itens da questão 4.

Tabela 9 — Distribuição de justificações apresentadas pelos alunos nos itens da parte I do questionário (itens de escolha múltipla)

Natureza da justificação	Percentagem
Tautológica	30,7
Heurística da representatividade	16,5
Enviesamento de equiprobabilidade	52,8

Quanto à heurística da representatividade, as estratégias repartiram-se entre o *efeito recente negativo* e o *efeito recente positivo* nas questões de independência, isto é, nas questões 1 e 2.

Pela Tabela 9 conclui-se sobre a forte adesão à estratégia de enviesamento de equiprobabilidade (se um acontecimento é possível, ele é equiprovável) para justificar que dois acontecimentos são equiprováveis e a afirmações tautológicas que não justificam a opção selecionada uma vez que se limitam a repetir, em parte ou no todo, o enunciado da questão.

Na Tabela 10 apresenta-se a distribuição de justificações com potencial para justificar a opção correta apresentada pelos alunos nas questões da Parte I do questionário. As justificações foram classificadas em dois grandes grupos: justificações específicas (utilizadas em 605 de 1686 justificações) e justificações gerais (utilizadas em 420 de 1686 justificações), conforme reunissem potencial para responder corretamente apenas à situação específica do questionário ou reunissem potencial para responder corretamente a situações similares às apresentadas no questionário, respetivamente.

Tabela 10 — Distribuição das justificações dos alunos para a escolha da resposta correta nos itens da parte I do questionário (itens de escolha múltipla)

Justificações	Percentagem
Gerais	**41,0**
Razões de probabilidade	82,6
Razão bolas pretas (brancas) / bolas brancas (pretas)	14,0
Os sacos têm quantidades proporcionais de bolas	3,4
Específicas	**59,0**
No saco há tantas bolas brancas como pretas	35,2
Há menos bolas pretas do que brancas no saco	30,0
A região preta da roleta é maior que a região branca	21,3
O saco B tem mais bolas brancas do que o saco A	11,2
O saco B tem mais bolas do que o saco A	2,3

Entre as duas categorias de justificações, salienta-se uma maior percentagem de justificações específicas em relação às justificações gerais. No caso da justificação *razão bolas pretas (brancas)/bolas brancas (pretas)*, ela integra o conjunto das justificações gerais, enquanto vantagem (quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos desfavoráveis), porque os sacos continham apenas dois tipos de objetos (bolas brancas e bolas pretas). Contudo, tal não é garantia de que os alunos recorressem a estra estratégia caso a situação envolvesse mais tipos de objetos.

Quanto às justificações específicas, salientam-se as justificações *no saco há tantas bolas brancas como pretas* e *há menos bolas pretas do que brancas no saco,* alicerçadas na comparação do número de casos favoráveis e desfavoráveis.

Na Tabela 11 apresenta-se a distribuição dos erros dos alunos nas questões de resposta curta de determinação de uma probabilidade, excetuando as questões de resposta curta 7a1, 7a2, 7a3 e 9a por não envolverem o cálculo de uma probabilidade.

Da observação da Tabela 11, conclui-se que o erro predominante, com uma percentagem bastante expressiva comparativamente com os restantes erros, foi o erro *probabilidade diferente da probabilidade pedida*. Este erro consiste na apresentação de uma razão que, embora não sendo a probabilidade solicitada, é a razão de probabilidade de um acontecimento com significado no contexto da situação apresentada.

Dada a diversidade de erros que esta categoria envolve, efetua-se de seguida uma análise mais pormenorizada desta situação. Este erro resulta de o aluno: confundir as relações de ordem *maior*, *maior ou igual*, *menor* ou *menor ou igual* (36); ignorar o acontecimento condicionado (29); ignorar o acontecimento condicionante (222); considerar o acontecimento complementar (38); reduzir despropositadamente o espaço amostral (6); interpretar incorretamente a informação fornecida no enunciado (29); confundir probabilidade condicionada e probabilidade conjunta (236); confundir uma probabilidade condicionada com e a sua transposta (37); ignorar um dos acontecimentos da conjunção (15); confundir as probabilidades associadas às situações "sabendo que a primeira ficha tem uma letra, determina a probabilidade de a segunda ficha ter um número" e "sabendo que a segunda ficha tem um número, determina a probabilidade de a primeira ficha ter também um número" (139); outras probabilidades (130).

Tabela 11 — Distribuição dos erros cometidos pelos 310 alunos nas questões de resposta curta que envolviam o cálculo de uma probabilidade

Erros	Percentagem (Frequência)
Probabilidade diferente da probabilidade pedida	48,0 (917)
Considerar valores que a variável pode tomar em vez da frequência que lhe está associada	12,5 (239)
Valor maior que 1 sem que seja o inverso de uma probabilidade	6,8 (130)
Inverso de uma razão de probabilidade	5,8 (110)
Cálculo de duas probabilidades em vez de uma	4,0 (76)
Razão bolas brancas (pretas) / bolas pretas (brancas)	3,8 (72)
Centrar a atenção na cor das bolas	3,6 (69)
Admitir que a probabilidade conjunta é igual à soma ou diferença de probabilidades	3,4 (64)
Não considerar a reposição quando é devida	2,3 (44)
Considerar a reposição quando não é devida	1,4 (27)
Probabilidade igual a 1	1,4 (27)
A razão é menor que 1 e envolve o número de linhas da tabela	0,9 (18)
Não considerar a ordem	0,4 (8)
Outros valores	5,7 (108)
Total	**100 (1909**)

O erro *considerar valores que a variável pode tomar* na obtenção de uma razão de probabilidade resulta de o aluno: considerar o valor da variável *idade* do eixo horizontal do gráfico da questão 5, considerar o valor da variável *número de irmãos* da questão 6 e considerar o valor da variável *número de bolas* na questão 8. Nesta categoria incluíram-se também os erros resultantes de considerar o número de barras do gráfico da questão 5, isto é, um número de valores que a variável *idade* pode tomar e de considerar o *número de linhas da tabela* na questão 6, isto é, um número de valores que a variável *número de irmãos* pode tomar.

Já o erro *inverso de uma razão de probabilidade* consiste em obter o inverso da probabilidade pedida ou o inverso de uma razão de probabilidade que, embora não sendo a probabilidade solicitada, representa a probabilidade de um acontecimento com significado no contexto da situação apresentada.

O erro *valor maior que 1 sem que seja o inverso de uma probabilidade* consiste na obtenção de uma razão maior que 1 ou em considerar para probabilidade um número inteiro maior do que 1. Embora quase todos os valores inteiros considerados pelos alunos tenham um significado no contexto do problema, a realidade é que o valor apresentado para a probabilidade pedida não tem qualquer significado no contexto de Probabilidades.

O erro *cálculo de duas probabilidades* consiste em considerar duas razões de probabilidade, quando a resposta correta envolve apenas uma.

O erro *razão bolas brancas (pretas)/bolas pretas (brancas)* consiste em identificar a probabilidade com uma espécie de *vantagem*, isto é, a razão entre o número de bolas brancas (pretas) e o número de bolas pretas (brancas) existentes no saco ou a razão do número de bolas brancas existentes no saco antes e depois da primeira extração.

O erro *centrar a atenção na cor* consiste em centrar a atenção na cor dos objetos em vez do número de configurações possíveis, tomando para acontecimentos elementares pares do tipo BB, BP, PB e PP quando há vários objetos de cada tipo e considerando-os acontecimentos elementares equiprováveis.

O erro *admitir que a probabilidade conjunta é igual à soma ou diferença de probabilidades* consiste em adicionar ou subtrair probabilidades, muitas das quais estão envolvidas no erro *cálculo de duas probabilidades*. No caso da soma de probabilidades, o aluno admite que $P(A \cap B) = P(A|B) + P(B)$ em vez de considerar que $P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$.

Por oposição às categorias antes referidas, incluíram-se na categoria *outros valores* as respostas desprovidas de sentido na situação apresentada.

3.3. Desempenho em matemática e respostas

Efetuou-se uma análise das respostas por item, por grupos de itens correspondentes aos diferentes conteúdos — independência, probabilidade condicionada e probabilidade geral, e na totalidade do questionário segundo os níveis de desempenho em matemática, codificado em fraco, médio e bom.

Na análise de cada uma das questões do questionário utilizámos o teste de qui-quadrado para testar a independência entre as variáveis desempenho em matemática (fraco, médio e bom) e o tipo de resposta (correta e errada). Na Tabela 12 apresenta-se a distribuição das respostas corretas nos 23 itens do questionário, segundo o nível de desempenho em matemática dos alunos envolvidos no estudo.

Tabela 12 — Distribuição das respostas corretas segundo o desempenho dos alunos em matemática

Item	Percentagem de respostas corretas segundo o desempenho em Matemática			Valor da estatística χ^2	Valor de p
	Fraco	Médio	Bom		
1	87,5	86,4	97,7	8,022*	0,018
2	83,3	83,2	96,5	9,598**	0,008
3a	54,2	65,6	83,7	18,164**	0,000
3b	41,7	46,4	55,8	3,764	0,153
4a	88,5	90,4	95,3	2,791	0,248
4b	71,9	84,0	89,5	10,196**	0,006
5a	39,6	48,8	79,1	31,176**	0,000
5b	14,6	28,8	55,8	36,430**	0,000
6a	49,0	61,6	88,4	32,203**	0,000
6b	16,7	23,2	51,2	29,656**	0,000
7a1	92,7	100,0	100,0	— ***	—
7a2	92,7	98,4	97,7	— ***	—
7a3	93,8	100,0	100,0	— ***	—
7b1	50,0	60,8	81,4	19,742**	0,000
7b2	44,8	53,6	74,4	17,029**	0,000
7b3	38,5	48,0	73,3	23,338**	0,000
8a1	58,3	64,0	82,6	13,248**	0,001
8a2	1,0	2,4	17,4	26,229**	0,000
8b1	49,0	67,2	83,7	24,581**	0,000
8b2	1,0	0,0	10,5	— ***	—
9a	35,4	48,0	54,7	7,122*	0,028
9b)	34,4	57,6	65,1	19,437**	0,000
9c	25,0	32,0	36,0	2,700	0,259

* Diferenças estatisticamente significativas a menos de 0,05.

** Diferenças estatisticamente significativas a menos de 0,01.

*** Não foi possível aplicar o teste de qui-quadrado por existir 3 células com frequência esperada inferior a 5.

Pela tabela 12 observa-se, em geral, um aumento da percentagem de respostas corretas quando passamos de um desempenho em matemática fraco para um desempenho médio e deste para um desempenho bom. Nos itens 1 e 2 (itens de independência) e no item 8b2 (item de probabilidade geral) observam-se percentagens semelhantes de respostas corretas nos níveis de desempenho fraco e médio e um aumento considerável destas respostas no nível de desempenho bom. De entre estas questões, não foi possível aplicar o teste de qui-quadrado à questão 8b2, por existir um número excessivo de células (3 células) com frequência esperada inferior a 5.

Nos itens 7a1, 7a2 e 7a3 (itens de probabilidade geral), em que se avaliava a capacidade de atribuir significado a dados de uma tabela de dupla entrada, observam-se percentagens semelhantes de respostas corretas nos três níveis de desempenho em matemática, muito próximas ou mesmo de 100%. Em todas estas questões não foi possível aplicar o teste de qui-quadrado pelas mesmas razões que as referidas para a questão 8b2.

Dos restantes 19 itens, em 16 a aplicação do teste de qui-quadrado determinou diferenças estatisticamente significativas a menos de 5% e nos 3 restantes itens (3b, 4a e 9c, de probabilidade condicionada) não se verificaram diferenças estatisticamente significativas.

Para cada um dos conjuntos de itens considerados, correspondentes aos três conteúdos considerados e à totalidade do questionário, aplicámos o teste bilateral não paramétrico de Kruskal-Wallis para comparar o desempenho dos alunos nesses conteúdos e no questionário com o desempenho em matemática. Na Tabela 13 apresentam-se os resultados dessa análise, incluindo os valores da média, do desvio padrão e da estatística do teste e correspondente valor de prova.

Tabela 13 — Análise das respostas corretas por desempenho em matemática nos três conteúdos considerados e no questionário

Dimensões	Média (desvio padrão) do número de respostas corretas segundo o desempenho em matemática						Valor da estatística H_E	Valor de p
	Fraco		Médio		Bom			
Independência	1,7	(0,54)	1,7	(0,53)	1,9	(0,24)	16,150**	0,000
Probabilidade condicionada	5,4	(2,61)	6,6	(2,59)	8,5	(2,45)	54,148**	0,000
Probabilidade geral	4,6	(1,39)	5,2	(1,17)	6,3	(1,16)	70,188**	0,000
Questionário total	11,6	(3,79)	13,5	(3,29)	16,7	(2,96)	79,836**	0,000

** Diferenças estatisticamente significativas a menos de 0,01.

Pela Tabela 13 verifica-se que o teste de Kruskal-Wallis determinou diferenças estatisticamente significativas em todos os três conteúdos estudados e na totalidade do questionário.

Em síntese, podemos concluir que ao maior nível de desempenho em matemática corresponde, em geral, uma melhor realização dos alunos nas diversas dimensões estudadas no questionário, tendo-se obtido diferenças estatisticamente significativas na grande maioria dos itens considerados individualmente, em todos os conteúdos considerados (independência, probabilidade condicionada e probabilidade geral) e na totalidade do questionário.

4. Conclusão

Na globalidade do questionário verificou-se que, em média, os alunos responderam corretamente a quase dois terços dos itens. O facto de se ter obtido uma maior percentagem de respostas corretas no caso do conteúdo independência e percentagens semelhantes nos conteúdos probabilidade condicionada e probabilidades geral, leva-nos a concluir que a independência e a probabilidade condicionada não se revelaram conteúdos mais difíceis do que a probabilidade geral. Por outro lado, tal como verificou Fischbein (1984), também foi consideravelmente maior a percentagem de respostas corretas na globalidade dos itens envolvendo extração com reposição relativamente aos que envolvem extração sem reposição.

Em termos das justificações e estratégias avançadas pelos alunos para as suas respostas nos itens de escolha múltipla saliente-se o recurso a relações parte-parte, como é referido em Correia e Fernandes (2012) e a adesão ao enviesamento de equiprobabilidade, a justificações tautológicas e à heurística da representatividade a partir dos efeitos recentes positivo e negativo. Em termos de estratégias de contagem foram mais utilizadas pelos alunos a determinação das diferentes configurações, a construção de um diagrama de árvore e a construção de uma tabela de dupla entrada, as quais foram utilizadas principalmente quando se solicitava a determinação do espaço amostral e muito pouco usadas nas outras questões, particularmente no cálculo de probabilidades em experiências compostas onde a construção de um diagrama de árvore ou de uma tabela de dupla entrada se poderia revelar uma estratégia muito promissora.

No caso das respostas corretas, observou-se que, em pouco menos de metade dos casos, os alunos apresentaram justificações gerais, que garantem a seleção das respostas corretas nas situações apresentadas e em situações similares, e em pouco mais de metade dos casos, os alunos apresentaram justificações específicas, que garantem a resposta correta apenas nas situações específicas do questionário. Relativamente ao estudo de Fernandes (2001), este resultado representa um aumento significativo da adesão a raciocínios gerais no caso dos alunos do 8° ano, que não tinham tido ensino prévio de probabilidades.

No caso dos itens envolvendo o cálculo de probabilidades observaram-se vários tipos de erros, salientando-se a determinação de uma probabilidade diferente da probabilidade pedida, com cerca de metade dos erros, seguindo-se considerar valores da variável em vez das frequências no caso dos gráficos, um valor maior do que 1 sem que seja o inverso de uma probabilidade, o inverso de uma razão de probabilidade e calcular duas probabilidades em vez de uma, entre outros. No caso da determinação de uma probabilidade diferente da pedida, destacou-se o facto de os alunos ignorarem o acontecimento condicionante, também observado em Correia et al. (2011), confundirem a probabilidade condicionada com a probabilidade conjunta, também observado em Correia et al. (2011) e Pollatsek et al. (1987) e dificuldades na interpretação dos enunciados.

Ao aumento de desempenho em matemática correspondeu, em geral, um aumento da percentagem de respostas corretas dos alunos em qualquer dos conteúdos avaliados (independência, probabilidade condicionada e probabilidade geral), tal como se verificou no estudo de Fernandes (2001) no caso da probabilidade geral.

Globalmente, os resultados obtidos no presente estudo, enfatizando a percentagem de respostas corretas, os raciocínios e o aumento da percentagem de respostas corretas com o maior desempenho em matemática, constituem evidências que corroboram a possibilidade de introduzir o ensino da independência e da probabilidade condicionada na escolaridade básica.

Referências

Ahlgren, A., & Garfield, J. (1991). Analysis of the Probability Curriculum. In R. Kapadia, & M. G. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: probability in education* (pp. 107-134). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación? In J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho, & F. Viseu (Orgs.), *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 9-21). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Borovcnik, M. G., & Kapadia, R. (2010). Research and developments in probability education internationally. In M. Joubert, & P. Andrews (Eds.), *Proceedings of the British Congress for Mathematics Education* (pp. 41-48). Acedido em: www.bsrlm.org.uk/IPs/ip30-1/BSRLM-IP-30-1-06.pdf4.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

Contreras, J. M., Batanero, C., Díaz, C., & Fernandes, J. A. (2011). Prospective teachers' common and specialized knowledge in a probability task. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Rzeszów, Poland, 9th to 13th February 2011.

Correia, P. F., Fernandes, J. A., & Contreras, J. M. (2011). Intuições de alunos do 9° ano de escolaridade sobre probabilidade condicionada. In C. Nunes, A. Henriques, A. Caseiro, A. Silvestre, H. Pinto, H. Jacinto & J. Ponte (Orgs.), *Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Correia, P. F. & Fernandes, J. A. (2012). Comparação de probabilidades condicionadas no contexto de extração de bolas de um saco. In H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre & C. Nunes (Orgs.), *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 429-442). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Estrada, A., & Díaz, C. (2006). Computing probabilities from two way tables: an exploration study with future teachers. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education.

Falk, R. (1993). *Understanding probability and statistics: a book of problems*. Wellesley, Massachusetts: A K Petrers.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of Second International Conference on Teaching Statistic* (pp. 292-297). Victoria, BC: University of Victoria.

Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Fernandes, J. A. (2001). Intuições probabilísticas em alunos do 8.° e 11.° anos de escolaridade. *Quadrante*, *10*(2), 3-32.

Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 1-24.

Green., D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (vol. 2, pp. 766-783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1982). Subjective probability: A judgment of representativeness. In D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 32-47). Cambridge: Cambridge University Press.

Konold, C., Pollatsek, A., Well, A., Lohmeier, J., & Lipson, A. (1993). Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education,* 24(5), 392-414.

Lecoutre, M.; Durand, J. (1988). Jugements probabilistes et modeles cognitifs: etude d'une situation aleatoire. *Educational Studies in Mathematics,* 19(3), 357-368.

Ministério da Educação (2007). *Programa Ajustado de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C., & Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organitation, Behavior and Human Decision Processes*, *40*, 255-269.

Spinillo, A. G. (2002). O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção. *Psicologia: Reflexão e Crítica, 15*(3), 475-487.

Tarr, J. E. (1997). Using middle school students' thinking in conditional probability and independence to inform instruction. (Doctoral dissertation, Illinois State University, 1997). *Dissertation Abstracts International, 49*,Z5055.

Tarr, J. E., & Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal, 9*(1), 39-59.

Tarr, J. E., & Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 215-238). New York, NY: Springer.

Watson, J. (2005). The probabilistic reasoning of middle school students. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 145-169). New York, NY: Springer.

ANEXO

Parte I

Esta parte do questionário é constituída apenas por questões de escolha múltipla. Das três alternativas que te são apresentadas escolhe **apenas uma** e assinala-a com um ✕. Não te esqueças de justificar a tua escolha.

1. Quando se lança uma moeda há dois resultados possíveis: obter a face Euro (E) ou obter a face Nacional (N). Lançou-se **cinco** vezes consecutivas uma moeda equilibrada ao ar e obteve-se sempre a face Euro, isto é, a sequência $E\,E\,E\,E\,E$.

Algum dos seguintes resultados é mais provável?

☐ Obter novamente a face Euro no sexto lançamento.
☐ Obter a face Nacional no sexto lançamento.
☐ É igualmente provável obter qualquer uma das faces da moeda no sexto lançamento.

Justifica a tua resposta.

2. Quando se gira a roleta da Figura 1, há dois resultados possíveis para o ponteiro quando a roleta parar: o ponteiro assinala a cor branca (B) ou o ponteiro assinala a cor preta (P). Girou-se **cinco** vezes a roleta e obteve-se a sequência $B\,P\,P\,B\,P$.

Gira-se novamente a roleta pela **sexta** vez. Algum dos seguintes resultados é mais provável?

☐ O ponteiro assinala a cor **Branca** quando a roleta para.
☐ O ponteiro assinala a cor **Preta** quando a roleta para.
☐ É igualmente provável o ponteiro assinalar qualquer uma das cores, branca ou preta, quando a roleta para.

Justifica a tua resposta.

Figura 1

3. Considera dois sacos A e B com bolas brancas e bolas pretas.

O saco A tem 10 bolas brancas e 20 bolas pretas.

O saco B tem 100 bolas brancas e 200 bolas pretas.

a) Retira-se, ao acaso, uma bola do saco **A** e uma bola do saco **B** e verifica-se que são ambas brancas. Depois de se **colocar** de novo estas bolas nos respetivos sacos, retira-se novamente uma bola de cada um dos sacos.

Algum dos seguintes resultados é mais provável?

☐ Obter uma bola branca do saco **A**.
☐ Obter uma bola branca do saco **B**.
☐ É igualmente provável obter uma bola branca do saco **A** e do saco **B**.

Justifica a tua resposta.

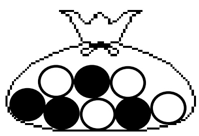
b) Retira-se, ao acaso, uma bola do saco **A** e uma bola do saco **B** e verifica–se que são ambas brancas. **Sem colocar** de novo estas bolas nos respetivos sacos, retira-se novamente uma bola de cada um dos sacos.

Algum dos seguintes resultados é mais provável?

☐ Obter uma bola branca do saco **A**.
☐ Obter uma bola branca do saco **B**.
☐ É igualmente provável obter uma bola branca do saco **A** e do saco **B**.

Justifica a tua resposta.

4. Num saco há 4 bolas brancas e 4 bolas pretas, conforme se mostra na figura seguinte. As bolas são todas iguais exceto na cor. Sem ver, tiram-se sucessivamente (uma a seguir à outra) **duas** bolas do saco.



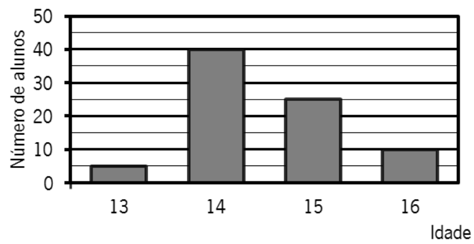
a) Extrai-se uma 1ª bola do saco e **coloca-se** essa bola no saco antes de se extrair uma 2ª bola.
Comparativamente com a probabilidade da 1ª bola ser preta, a probabilidade de a 2ª bola ser branca:
☐ Aumenta.
☐ Diminui.
☐ Mantém-se.
Justifica a tua resposta.

b) Extrai-se uma 1ª bola do saco e **não se coloca** essa bola no saco antes de se extrair uma 2ª bola.
Comparativamente com a probabilidade da 1ª bola ser preta, a probabilidade de a 2ª bola ser branca:
☐ Aumenta.
☐ Diminui.
☐ Mantém-se.
Justifica a tua resposta:

Parte II

Nas questões desta parte do questionário deves indicar todos os cálculos e raciocínios que realizaste para obter as respostas apresentadas.

5. Um dos trabalhos realizados pelo João para a disciplina de Matemática consistiu em fazer o registo das idades dos alunos do 9.º ano da sua escola e em elaborar um gráfico da distribuição dos alunos por idades. O gráfico que o João elaborou, apresentado ao lado, está correto. Escolheu-se, ao acaso, um aluno do 9.º ano da escola do João.



a) Qual a probabilidade de o aluno ter <u>mais</u> de 14 anos?
b) Esse aluno tem <u>menos</u> de 15 anos. Qual a probabilidade de ele ter 13 anos?

6. Escolheram-se, ao acaso, 60 estudantes de uma escola e perguntou-se a cada um deles o seu número de irmãos. A partir das respostas dadas, obtiveram-se os dados do quadro seguinte:

Nº de irmãos	**Nº de estudantes**
0	8
1	25
2	15
3 ou mais	12

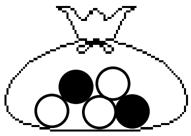
Escolhe-se, novamente ao acaso, um estudante do grupo dos 60 estudantes.
a) Qual a probabilidade de o estudante escolhido ter <u>mais</u> que 1 irmão?
b) Sabe-se que o estudante escolhido tem <u>menos</u> que 2 irmãos. Qual a probabilidade de ter <u>exatamente</u> 1 irmão?

7. Escolheram-se, ao acaso, 25 estudantes de uma escola e perguntou-se a cada um deles se praticava ou não desporto. Os dados obtidos foram registados, segundo o sexo dos estudantes, no quadro seguinte.

	Rapariga	Rapaz	Total
Pratica desporto	8	6	14
Não pratica desporto	7	4	11
Total	15	10	25

a) No quadro anterior, o que representa: **1)** O número 14; **2)** O número 10; **3)** O número 6.
b) Escolhe-se, ao acaso, um estudante do grupo dos 25 estudantes.
1) Qual a probabilidade de o estudante ser rapaz e praticar desporto?
2) Sabe-se que o estudante escolhido pratica desporto. Qual a probabilidade de ser rapaz?
3) Sabe-se que o estudante escolhido é rapaz. Qual a probabilidade de praticar desporto?

8. Num saco há 3 bolas brancas e 2 bolas pretas, conforme se mostra na figura seguinte. As bolas são todas iguais exceto na cor. Sem ver, tiram-se sucessivamente **duas** bolas do saco.



a) Considera que a **1ª** bola extraída **é colocada** de novo no saco antes de se extrair a **2ª** bola.

1) Sabe-se que a **1ª** bola extraída é branca. Qual a probabilidade de a **2ª** bola ser branca?

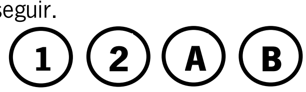
2) Qual a probabilidade de obter **duas** bolas brancas?

b) Considera que a **1ª** bola extraída **não é colocada** de novo no saco antes de se extrair a **2ª** bola.

1) Sabe-se que a **1ª** bola extraída é branca. Qual a probabilidade de a **2ª** bola ser preta?

2) Qual a probabilidade de obter **uma** bola branca e **uma** bola preta (por qualquer ordem)?

9. Num saco há 4 fichas todas iguais, em duas estão inscritos os números 1 e 2 e nas restantes duas estão inscritas as letras A e B, como se mostra a seguir.



Considera que a Ana tirou, ao acaso, duas fichas do saco **sem repor** a 1ª ficha no saco antes de retirar a 2ª ficha.

a) Escreve todas as sequências possíveis para as duas fichas extraídas pela Ana.

b) Sabendo que a **primeira** ficha tem uma letra, determina a probabilidade de a **segunda** ficha ter um número.

c) Sabendo que a **segunda** ficha tem um número, determina a probabilidade de a **primeira** ficha ter também um número.

ESTATÍSTICA

COMUNICAÇÕES

FERNANDES, J. A., VISEU, F., MARTINHO, M. H. & CORREIA, P. F. (ORGS.) (2013). *ATAS DO III ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA*. BRAGA: CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DO MINHO.

UN ESTUDIO EMPÍRICO DE LOS PROBLEMA DE CORRELACIÓN Y REGRESIÓN EN LIBROS DE TEXTO DE BACHILLERATO

M. Magdalena Gea, Carmen Batanero y Gustavo Cañadas
Universidad de Granada
mmgea@ugr.es, batanero@ugr.es, grcanadas@ugr.es

Resumen. Presentamos un estudio sobre las situaciones que se plantean en el tema de correlación y regresión en dos libros de texto de Bachillerato. Éstas son clasificadas atendiendo a la finalidad para la que diseñan, según tres campos de problemas principales. Todo ello se complementa con un análisis detallado del tipo de dependencia en que cada una se fundamenta y de la variedad de contextos que se utilizan para cada una de las situaciones propuestas.

Palabras clave: Situación-problema; Libros de textos; Regresión y correlación; Bachillerato.

Abstract. We present a study on the situations that arise in the topic of correlation and regression in two high school textbooks. These are classified according to the purpose for which designed according to three main problem areas. All this is complemented by a detailed analysis of the type of dependency in which each is based and the variety of contexts that are used for each of the scenarios presented.

Key words: Problem-situation; Textbooks; Regression and correlation; High school.

Introducción

La justificación principal de inclusión del tema de correlación y regresión en la enseñanza de nuestros estudiantes es que amplía el de dependencia funcional: mientras que en una dependencia de tipo funcional a cada valor de una variable X (independiente) corresponde un solo valor de otra variable Y (dependiente), en el estudio de la correlación y regresión a cada valor de X corresponde una distribución de valores de Y. Además, se puede definir una medida de la intensidad de la relación mediante el coeficiente de correlación, que varía en valor absoluto entre 0 (independencia total) y 1 (correlación perfecta). El signo del coeficiente indica si la dependencia es directa o inversa.

El tema se incluye en España en el primer curso de Bachillerato de las modalidades de Ciencias y Tecnología y Humanidades y Ciencias Sociales (MEC, 2007). Concretamente, para la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales se concreta del modo siguiente:

> Distribuciones bidimensionales. Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervienen dos variables a partir de la representación grafica de una nube de puntos. Grado de relación entre dos variables estadísticas. Regresión lineal. Extrapolación de resultados. (MEC, 2007, p. 45475)
>
> Igualmente, se especifican, para dichos contenidos, los siguientes criterios de evaluación:
>
> 5. Utilizar las Tablas y gráficas como instrumento para el estudio de situaciones empíricas relacionadas con fenómenos sociales y analizar funciones que no se ajusten a ninguna fórmula algebraica, propiciando la utilización de métodos numéricos para la obtención de valores no conocidos. Este criterio está relacionado con el manejo de datos numéricos y en general de relaciones no expresadas en forma algebraica. Se dirige a comprobar la capacidad para ajustar a una función conocida los datos extraídos de experimentos concretos y obtener información suplementaria mediante técnicas numéricas.

> 6. Distinguir si la relación entre los elementos de un conjunto de datos de una distribución bidimensional es de carácter funcional o aleatorio e interpretar la posible relación entre variables utilizando el coeficiente de correlación y la recta de regresión. Se pretende comprobar la capacidad de apreciar el grado y tipo de relación existente entre dos variables, a partir de la información grafica aportada por una nube de puntos; así como la competencia para extraer conclusiones apropiadas, asociando los parámetros relacionados con la correlación y la regresión con las situaciones y relaciones que miden. En este sentido, más importante que su mero cálculo es la interpretación del coeficiente de correlación y la recta de regresión en un contexto determinado. (MEC, 2007, pp. 45475-45476)

La importancia del razonamiento sobre la correlación y regresión se vincula principalmente a la toma de decisiones en ambiente de incertidumbre. La investigación, desarrollada mayoritariamente en psicología, muestra que los adultos no suelen emplear las reglas matemáticas, sino estrategias intuitivas, con frecuencia incorrectas, al estimar la correlación. Por ejemplo Chapman y Chapman (1969) denominaron "correlación ilusoria" a la inexactitud en los juicios sobre covariación debidos a las expectativas y creencias sobre las variables, que producen la impresión de contingencias empíricas. La creencia infundada en la transitividad del coeficiente de correlación es también descrita por Castro-Sotos et al. (2009).

Tampoco la enseñanza del tema es simple. La investigación ha descrito sesgos de razonamiento y dificultades de comprensión como no apreciar la correlación inversa, tener un sentido determinista o local de la correlación o identificar correlación con causalidad (Estepa y Batanero, 1995; Estepa, 2008; Zieffler y Garfield, 2009). Y en algunos casos, se resisten al cambio incluso después de la enseñanza (Batanero, Estepa y Godino, 1997). También se han observado errores al interpretar los coeficientes de correlación y regresión (Truran 1995, Sánchez Cobo, 1998; Sánchez Cobo, Estepa y Batanero, 2000).

Este trabajo completa los anteriores, analizando los campos de problemas que en los libros de texto se presentan para las nociones de correlación y regresión en el nivel de bachillerato. Ponemos atención en el libro de texto ya que constituye un recurso didáctico fundamental que puede influir en la enseñanza recibida por estos estudiantes. En lo que sigue analizamos los fundamentos, métodos y resultados del estudio, finalizando con algunas conclusiones e implicaciones para la enseñanza.

1. Fundamentos

1.1. Marco teórico

Nuestro análisis pretende observar algunos resultados de la transposición didáctica (Chevallard, 1991), esto es, los cambios del conocimiento matemático cuando es adaptado para la enseñanza. Desde el currículo pretendido al implementado en el aula, una fase importante es el currículo escrito y la forma en que lo interpretan los profesores, a través de los libros de texto (Herbel, 2007).

Nos apoyamos en el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), que postula que los objetos matemático emergen de las prácticas de un sujeto (persona o institución) al resolver problemas, y que estas prácticas están mediadas por el lenguaje, que es, a la vez, instrumento representacional y operativo en una determinada institución. Godino (2003) concibe las matemáticas como un quehacer humano, respuesta o solución de cierta clase de situaciones problemáticas del mundo real, social o de la propia matemática y una entidad cultural, en la que los objetos matemáticos dan solución a problemas compartidos en el seno de instituciones específicas. De este modo evidencia el papel determinante de la situación-problema a la que el alumno se enfrenta.

Godino y Batanero (1994) indican que, asociado a un campo de problemas, existe un sistema de prácticas prototípicas que son determinadas por la institución y se caracterizan por ser: "invariantes operatorios puestos de manifiesto por las personas en su actuación ante situaciones problemáticas". De este modo, diferencian entre práctica institucional, "compartidas en el seno de la institución", condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento; y personal "que desempeña el sujeto para alcanzar la solución a la tarea propuesta" (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007). El significado institucional (personal) de un objeto sería el conjunto de prácticas significativas asociadas al campo de problemas de donde surge el objeto.

Dentro de este marco, la situación-problema es vista como la tarea, ejercicio ó actividad planteada al alumno y es parte integrante de su significado y suelen estar agrupados en tipos o clases y "el paso de un tipo puntual a otro más amplio es el determinante del progreso o avance del conocimiento matemático, tanto individual como institucional" (Godino, 2003). Las situaciones-problemas deben, por un lado, ser representativas de las incluidas en el significado institucional del concepto y, por otro lado, permitir contextualizar los conocimientos pretendidos, ejercitarlos y aplicarlos a situaciones relacionadas. (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006).

1.2. Antecedentes

Aunque hay una amplia investigación sobre los libros de texto de matemáticas, esta tradición es mucho menor en el caso de la estadística y probabilidad, donde encontramos algunos ejemplos como los de Ortiz (1999), Ortiz, Batanero y Serrano (2001), Azcárate y Serradó (2006) y Cobo y Batanero (2004).

El primer antecedente relacionado con la correlación y regresión es el de Sánchez Cobo (1998) quien analiza once libros de texto de tercer curso de Bachillerato publicados desde 1987 hasta 1990. Como consecuencia, ofrece una taxonomía de definiciones y un análisis de las demostraciones, desde el punto de vista de la función que realizan y las componentes que la integran. Muestra una tendencia formalista en la presentación del tema, un uso mayoritario de ejemplos basados en representaciones gráficas, y un fuerte sesgo en los ejemplos presentados hacia la correlación positiva. En su estudio, Sánchez Cobo (1998) analiza el contenido matemático, centrándose en los aspectos procedimentales (construcción de la Tabla de frecuencias, cálculo de distribuciones marginales o condicionales, cálculo de momentos, cálculo del coeficiente de correlación, representación gráfica y cálculo de los coeficientes de regresión). No clasifica específicamente los campos de problemas, por lo que este será un punto original de nuestro trabajo.

Más recientemente Lavalle et al. (2006) analizan la correlación y regresión en siete libros de texto argentinos de Bachillerato, observando un enfoque mayoritariamente socio-constructivista, con un nivel de profundidad adecuado, donde se plantean más actividades bajo una asociación directa que inversa.

Para complementar los citados trabajos, analizaremos las situaciones problemas propuestas para el estudio de la regresión-correlación en los textos, siguiendo el modelo de Ortiz (1999) para el caso de la probabilidad. En lo que sigue se presentan el método y resultados del estudio.

2. Metodología

Se analizaron dos libros de textos, publicados recién implantado el currículo de Bachillerato (MEC, 2007). Son los más utilizados en la enseñanza pública en Andalucía, y corresponden a las editoriales de mayor tradición y prestigio en esta comunidad (ver Anexo 1).

El primer paso en el estudio de los problemas en los textos fue clasificar teóricamente los principales campos de problemas que dotan de sentido a la correlación y regresión. Este estudio se realiza analizando el significado de la correlación y regresión en la historia (Estepa, Gea et al., 2012) en un estudio previo, donde se observó que las principales preguntas que dieron origen a estos conceptos fueron las siguientes: ¿Hay alguna relación entre las variables? ¿Es intensa o moderada? ¿Directa o inversa? ¿Puedo usar una variable para predecir la otra? De las anteriores preguntas se derivan los campos de problemas analizados en los libros de texto, añadiendo el primero de ellos (que denominamos P0), relacionado con la organización/reducción de los datos.

En segundo lugar, se estudia el tipo de actividad pedido al estudiante respecto a dichos problemas, siguiendo a Ortiz (1999), y diferenciando entre ejemplos, ejercicios resueltos o a resolver por el estudiante. Se continúa analizando los contextos en que se plantean los problemas, que permiten mostrar al estudiante la aplicación de los conceptos estadísticos y finalmente se analizan las características de la correlación (intensidad, signo, tipo) de los datos utilizados, pues ésta fue una variable relevante en el estudio de Sánchez Cobo (1998).

3. Resultados y discusión

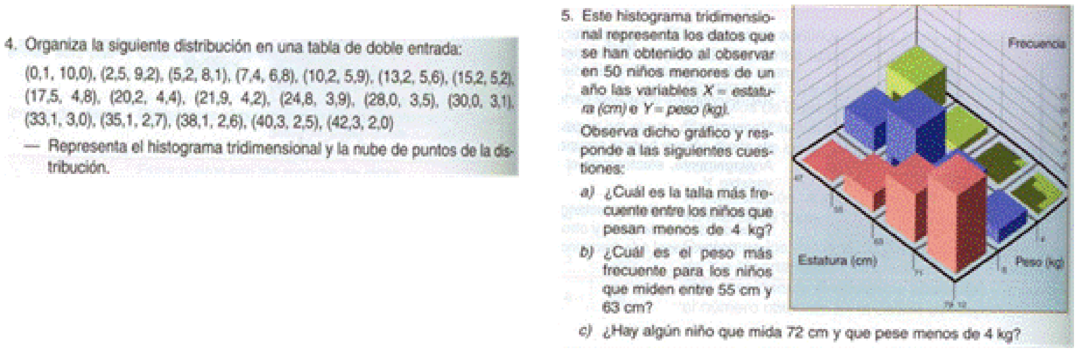
A continuación se describen los resultados para cada una de las variables consideradas en nuestro estudio.

3.1. Campos de problemas

Se encontraron los dos campos principales de problemas considerados teóricamente que denotamos como P1 (Analizar la existencia de relación entre variable) y P2 (Predecir una variable en función de otra). Además, se incluye otro inicial que denotamos por P0, consistente en la organización/reducción de los datos dada la relevancia que adquiere en el tema. Cada uno de estos campos se describe a continuación.

P0. Organización/Reducción de datos. Este campo de problemas incluye ejercicios o ejemplos cuya finalidad es organizar y/o concretar la información que aportan los datos desde un registro gráfico, tabular y/o numérico, así como a la lectura de dichas representaciones (ver ejemplo en Figura 1). La organización y representación de datos, así como la síntesis de la información es un primer requisito para el estudio de la correlación y regresión, y constituye en sí mismo una situación problemática ya que hay más de una solución posible. Esta categoría se puede relacionar con los contenidos "construir la Tabla de frecuencias de la distribución bidimensional" y "representación gráfica del diagrama de dispersión" de Sánchez Cobo (1998), quien no considera otros tipos de representaciones tenidas en cuenta por nosotros.

Desde el análisis realizado advertimos una intención de ejercitar al alumno en la representación/reducción de los datos. Creemos que esto se debe, principalmente, porque las nociones de correlación y regresión se introducen en este nivel. Aun así, el tratamiento de este campo de problemas es diferente en los textos analizados ya que el texto [T1] describe a grandes rasgos cómo es una Tabla de doble entrada, así como su representación en un diagrama de dispersión, mientras que el texto [T2] se detiene mucho más en este aspecto, como se desataca en la Figura 1, siendo utilizada esta representación en el desarrollo del tema, además se presentan otras representaciones gráficas distintas del histograma y el diagrama de dispersión.


4. Organiza la siguiente distribución en una tabla de doble entrada:
(0,1, 10,0), (2,5, 9,2), (5,2, 8,1), (7,4, 6,8), (10,2, 5,9), (13,2, 5,6), (15,2, 5,2), (17,5, 4,8), (20,2, 4,4), (21,9, 4,2), (24,8, 3,9), (28,0, 3,5), (30,0, 3,1), (33,1, 3,0), (35,1, 2,7), (38,1, 2,6), (40,3, 2,5), (42,3, 2,0)
— Representa el histograma tridimensional y la nube de puntos de la distribución.

5. Este histograma tridimensional representa los datos que se han obtenido al observar en 50 niños menores de un año las variables *X* = *estatura (cm)* e *Y* = *peso (kg)*.
Observa dicho gráfico y responde a las siguientes cuestiones:
a) ¿Cuál es la talla más frecuente entre los niños que pesan menos de 4 kg?
b) ¿Cuál es el peso más frecuente para los niños que miden entre 55 cm y 63 cm?
c) ¿Hay algún niño que mida 72 cm y que pese menos de 4 kg?

Figura 1. Representación tabular y gráfica de datos bidimensionales ([T2], p.220).

P1. Analizar la existencia de relación entre variables. Como se expuso en Estepa, Gea et al. (2012), la correlación y regresión surgen del trabajo de Galton para tratar de medir la relación entre características físicas de sucesivas generaciones de la misma especie, problema que se extiende poco a poco al análisis de relación entre diversas variables estadísticas (Hald, 1998). Este campo de problemas aparece con frecuencia en los textos analizados, y fue también considerado por Lavalle et al. (2006), pudiendo además asimilarlo al tipo de tarea "interpretación" en Sánchez Cobo (1998). Las tareas que principalmente se incluyen en este campo siguen un propósito común, y es que se estudie la dependencia entre las variables, así como la intensidad y sentido de ésta. Una vez organizados los datos y calculados los estadísticos que sean necesarios, en algunos casos interesa reflexionar sobre la dependencia funcional o estadística de dichos datos, así como si se ajustan a un modelo lineal. Podemos subdividir este problema en los que se exponen a continuación.

P1.1. Definir las variables que aparecen en un estudio estadístico bidimensional. Este problema fue considerado en el estudio de Lavalle y cols. (2006) pero no por Sánchez Cobo (1998). En el texto [T2] se propone una colección de ejercicios en que se describe un supuesto estudio y se pide a los estudiantes indicar cuáles son las variables estadísticas consideradas. Por ejemplo, "*Duración e importe de las llamadas telefónicas urbanas efectuadas en una ciudad durante 24 horas*" ([T2], p. 216).

P1.2. Deducir la existencia de una dependencia funcional o estadística. Otro problema es estudiar el ajuste de una función a los datos del problema, esto es, decidir si a cada valor de la variable independiente corresponde un único valor de la variable dependiente (relación determinista o funcional) o varios (relación estadística o aleatoria). Por ejemplo, en el texto [T1] encontramos un problema donde se pide, además de distinguir las variables de estudio, su posible dependencia, y que se reflexione sobre si conforman una distribución bidimensional ([T1], p. 234).

P1.3. Determinar la intensidad de la relación entre variables. Un segundo paso, una vez detectada la relación, es estudiar su intensidad, que variará desde el caso de independencia hasta la dependencia funcional. El objeto matemático que permitirá deducir esta intensidad puede ser el diagrama de dispersión, y de forma más precisa, la covarianza y el coeficiente de correlación lineal.

Las tareas planteadas sobre este punto se orientan preferentemente al cálculo del coeficiente de correlación, y se expone también un procedimiento detallado para dicho cálculo mediante una calculadora. En ocasiones se plantea la estimación de la correlación a partir de varios registros como el gráfico o tabular (Figura 2).

10. Considera la distribución de la siguiente tabla:

a) Dibuja el diagrama de dispersión de la distribución y describe el grado, el sentido y el tipo de la correlación que se observa.

b) Calcula el coeficiente de Pearson.

X	–2	–2	2	2	2	–2
Y	2	0	2	–2	0	–2
X	–1	1	0	1	0	–1
Y	1	–1	–2	1	2	–1

c) Relaciona los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

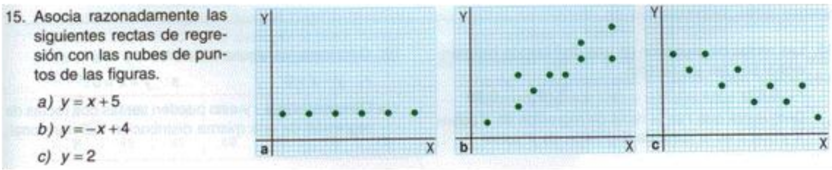
Figura 2. Estimación de la intensidad de la dependencia estadística ([T2], p. 225).

P1.4. Determinar la dirección de la relación entre variables. Un tercer problema consistiría en estudiar el sentido de la dependencia determinando si la relación es directa (al crecer/decrecer una variable crece/decrece la otra) o inversa (al crecer/decrecer una la otra disminuye/aumenta). Hacemos notar que, en caso de relación curvilínea (exponencial o cuadrática, por ejemplo), este problema no tendría sentido.

P2. Predecir una variable en función de otra. Una vez detectada la existencia de una relación entre las dos variables de estudio (problema de correlación), interesa encontrar alguna función que nos permita obtener una de las variables a partir de la otra (problema de regresión), problema que también aparece en los libros de texto y que se puede asimilar a la categoría "predicción" del tipo de tarea de Sánchez Cobo (1998). En los textos analizados se plantean estos ejercicios principalmente a través del modelo lineal (únicamente el texto [T2] es el que plantea situaciones desde modelos no lineales). Se expresa la ventaja de disponer de las rectas de regresión para obtener estimaciones, se introduce la nomenclatura para su determinación y las propiedades de las rectas de regresión y los coeficientes de regresión. También este problema se suele descomponer en varios subproblemas en los libros de texto en la forma que sigue.

P2.1. Analizar el ajuste lineal entre variables. La enseñanza de la regresión en los textos analizados se basa principalmente en el estudio del modelo de regresión lineal. Tanto es, que el texto [T1] ni siquiera plantea situaciones en que se presente otra función de ajuste a los datos del problema, problemática que sí es considerada en el texto [T2]. Las tareas que inicialmente se plantean es trazar a ojo las rectas, o representarlas una vez calculadas. Se persigue generar una idea intuitiva de la recta como "mejor" ajuste a los datos del diagrama de dispersión, sin detenerse demasiado en la deducción matemática de dicha recta, dado que aplicar el criterio de mínimos cuadrados requeriría del uso de derivadas parciales, que los estudiantes de este nivel educativo no conocen. Sánchez Cobo (1998) no menciona esta actividad.

Aunque en ambos textos se presentan variedad de situaciones con correlación positiva y negativa, más o menos intensa, así como correlación nula. Hay que decir que la calidad que el texto [T2] aporta a este campo de problemas es más difícil de alcanzar con el uso del texto [T1], no sólo por advertir de otros posibles modelos de ajuste, sino por su riqueza de actividades como es la asignación de una recta de regresión a un diagrama de dispersión (Figura 3) o la mayor cantidad de ejercicios puramente algebraicos (Figura 4) (2 ejercicios resueltos y 8 propuestos, frente a 3 ejercicios propuestos del texto [T1]).



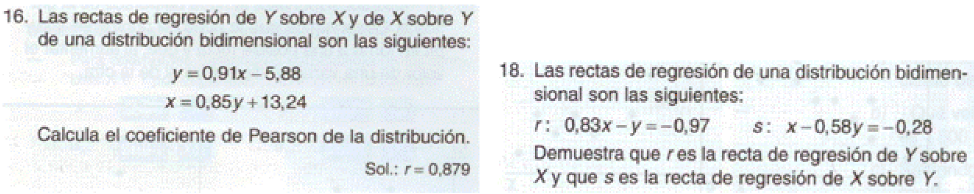
15. Asocia razonadamente las siguientes rectas de regresión con las nubes de puntos de las figuras.

a) $y = x + 5$

b) $y = -x + 4$

c) $y = 2$

Figura 3. Análisis de regresión lineal ([T2], p. 229).



16. Las rectas de regresión de Y sobre X y de X sobre Y de una distribución bidimensional son las siguientes:

$$y = 0{,}91x - 5{,}88$$
$$x = 0{,}85y + 13{,}24$$

Calcula el coeficiente de Pearson de la distribución.

Sol.: $r = 0{,}879$

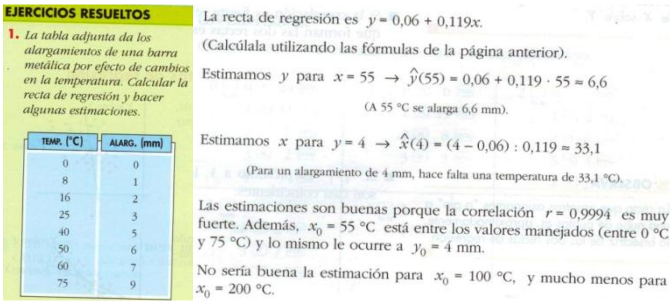
18. Las rectas de regresión de una distribución bidimensional son las siguientes:

$r:\ 0{,}83x - y = -0{,}97 \qquad s:\ x - 0{,}58y = -0{,}28$

Demuestra que r es la recta de regresión de Y sobre X y que s es la recta de regresión de X sobre Y.

Figura 4. Análisis de regresión lineal ([T2], p.230).

P2.2. Hacer estimaciones mediante el ajuste lineal entre variables. Una vez calculada la recta de regresión, se evidencia su utilidad planteando ejercicios de estimación (Figura 5). Al igual que es sugerido en Lavalle y cols. (2006), el cálculo de la estimación lleva asociado una reflexión en torno al valor esperado o promedio y el valor real, ya que puede haber diferentes valores observados ([T1], pp. 231 y 236).



EJERCICIOS RESUELTOS

1. *La tabla adjunta da los alargamientos de una barra metálica por efecto de cambios en la temperatura. Calcular la recta de regresión y hacer algunas estimaciones.*

TEMP. (°C)	ALARG. (mm)
0	0
8	1
16	2
25	3
40	5
50	6
60	7
75	9

La recta de regresión es $y = 0{,}06 + 0{,}119x$.

(Calcúlala utilizando las fórmulas de la página anterior).

Estimamos y para $x = 55 \rightarrow \hat{y}(55) = 0{,}06 + 0{,}119 \cdot 55 \approx 6{,}6$

(A 55 °C se alarga 6,6 mm).

Estimamos x para $y = 4 \rightarrow \hat{x}(4) = (4 - 0{,}06) : 0{,}119 \approx 33{,}1$

(Para un alargamiento de 4 mm, hace falta una temperatura de 33,1 °C).

Las estimaciones son buenas porque la correlación $r = 0{,}9994$ es muy fuerte. Además, $x_0 = 55$ °C está entre los valores manejados (entre 0 °C y 75 °C) y lo mismo le ocurre a $y_0 = 4$ mm.

No sería buena la estimación para $x_0 = 100$ °C, y mucho menos para $x_0 = 200$ °C.

Figura 5. Estimación mediante el ajuste lineal ([T1], p.231).

En la Tabla 1 presentamos una clasificación de las situaciones problemáticas planteadas en los textos analizados, atendiendo a los campos de problemas descritos y la tipología de tarea. Al igual que en el estudio de Ortiz (1999), se diferencia entre ejemplos y ejercicios, resueltos o no. Como el autor, consideramos como ejemplo las descripciones de situaciones en que se aclara el significado de los conceptos introducidos teóricamente; y ejercicios todas aquellas actividades, resueltas o no, que se presentan al estudiante para adquirir o reforzar el aprendizaje de un objeto matemático (independientemente de que en el libro su título sea problema, actividad, ejercicio o ejemplo). Detallamos además si los ejercicios que se plantean al alumno para que resuelva se encuentran en el desarrollo del tema o al final pues si se presentan al comienzo se puede suponer que es un verdadero problema para el estudiante, mientras que si se presenta al final sería únicamente un ejercicio de refuerzo del aprendizaje. Sánchez Cobo (1998) no realiza esta clasificación en su estudio.

En el análisis realizado hemos advertido una diferencia en cuanto al tratamiento de la calculadora como recurso tecnológico. Así, el texto [T2] no incluye ejemplos o ejercicios (resueltos o no) que impliquen el uso de la calculadora. Aunque describe someramente su uso para la variable estadística bidimensional, no presenta al estudiante situaciones prácticas en que se haga ó plantee uso de ella como sí ocurre con el texto [T1]. Un resumen de este hecho se presenta en la Tabla 2. No hemos incluido en la Tabla 1 las tareas que requieren el uso de la calculadora para no afectar a la frecuencia de las modalidades representadas pues estas actividades ya se encuentran contabilizadas en la Tabla 2.

Todos los campos de problemas descritos se encuentran representados en cada uno de los textos analizados aunque con diferente frecuencia.

Tabla 1 — Frecuencias de categorías de problemas en los libros de texto analizados

Campo de problema	Tipo de actividad								Total (%)	
	Ejemplos		Ejercicios resueltos		Ejercicios propuestos					
					En el tema		Final del tema			
	T1	T2	T1	T2	T1	T2	T1	T2	T1	T2
P0	2	8		2	3	11	10	18	15(7.6)	39(16.6)
P1 – P1.1	5	5	1	1		7	6	1	12(6.1)	14(5.9)
P2 – P1.2	10	9	4		10	4	6	15	30(15.2)	28(11.9)
– P1.3	8		6	8	3	21	27	25	44(22.2)	54(22.9)
– P1.4	7	2	3	7	9	18	27	21	46(23.2)	48(20.4)
P2 – P2.1	11	2	4	10	2	17	21	8	38(19.2)	37(15.7)
– P2.2		1	2	2		4	11	8	13(6.6)	15(6.4)
Total (%)	43(21.7)	27(11.5)	20(10.1)	30(12.8)	27(13.6)	82(34.9)	108(54.5)	96(40.9)	198	235

Tabla 2 — Problemas o ejercicios que requieren el uso de la calculadora en el texto T1

Campo de problema		Tipo de actividad		Frecuencia
P0.		Ejemplos calculadora		1
P1.	P1.3	Ejercicios	En el tema	1
			Final tema	1
		Ejercicios resueltos		2
P2.	P2.1	Ejercicios resueltos		2
Total				7

Las diferencias más significativas en las modalidades de tareas se encuentran en los ejemplos que casi duplican el número en [T1] y los ejercicios propuestos en el desarrollo del tema, que son mucho más frecuentes en [T2], que aparentemente da más peso a la ejercitación. Como señala Ortiz (1999), la presentación de ejemplos influye positivamente en la enseñanza de los conceptos que sean tratados. Aparentemente no son muchos, pero si añadimos a los ejemplos los ejercicios resueltos, la diferencia se hace menos acusada: de 63 en [T1] a 56 [T2].

Teniendo en cuenta el campo de problemas, para el caso de los ejercicios propuestos en el desarrollo del tema, observamos en los dos textos mayor presencia del estudio de la correlación, sobre todo determinar la intensidad y el signo. Cabe también destacar el tratamiento que el texto [T2] lleva a cabo de P0, es decir, de la representación y reducción de datos bivariantes, duplicando en número las situaciones planteadas al estudiante por [T1]. Esta diferencia es menos acusada en el caso de ejercicios propuestos al final del tema. Un atenuante de esta diferencia es que el texto [T2] presenta mayor variedad de representaciones (pictograma tridimensional, diagrama de barras tridimensional) que el texto [T1] y desarrolla su enseñanza en base a la tabla de doble entrada.

3.2. Contextos utilizados

Chevallard (1991) indica que, en el proceso de transposición didáctica, una vez introducido un tema en el sistema de enseñanza, el dispositivo didáctico pretende, progresivamente, buscarle aplicaciones, que pueden no tener relación con aquellas en que originariamente se inició el concepto. La función que tienen es permitir finalmente la recontextualización del saber.

Suydam y Weaver (1977) mostraron que los alumnos tienen mejores resultados cuando el contexto del problema les resulta familiar que si se trata de un nuevo contexto. Aunque los estudiantes muestran diferentes preferencias respecto a los problemas, parece claro que sus preferencias no influyen en su capacidad de resolver los problemas y que en general los problemas verbales referidos a situaciones no familiares o a situaciones abstractas son más difíciles que si el contexto es familiar.

Con objeto de analizar este aspecto, también tenido en cuenta en el análisis efectuado por Sánchez Cobo (1998), se han estudiado los contextos de aplicación en los libros, encontrando una gran variedad, tanto para el desarrollo del tema como para el planteamiento de ejercicios. Los hemos clasificado en seis categorías: (a) *fenómenos biológicos* (como la estatura de hijos – estatura de padres, precisamente el problema que históricamente dio origen a la idea de regresión); (b) *educativos* (notas de exámenes: física-matemáticas; matemáticas-filosofía); (c) *deportivos* (distancia del jugador – número de encestes al jugar al baloncesto); (d) *estudios en ciencias* (aumento de peso de un animal – mg diarios de un fármaco; alargamiento de una barra metálica – temperatura a la que se expone; altura que alcanza una piedra y la fuerza con que se lanza); (e) *sociología y demografía* (renta per cápita – índice de natalidad); (f) *economía* (consumo de energía per cápita y renta per cápita; kg de capturas de pescado y precio de subasta en la lonja). Hemos encontrado también una séptima categoría (g) "sin contexto". Un resumen se presenta en la Tabla 3.

Tabla 3 — Contextos utilizados en los textos analizados

	Tipo de actividad									
	Ejemplos		Ejercicios resueltos		Ejercicios propuestos					
					En el tema		Fin del tema		Total (%)	
Contextos	T1	T2	T1	T2	T1	T2	T1	T2	T1	T2
Biológico	5	2			4	6	10	3	19(9.6)	11(4.7)
Ciencias	14	4	4	5	5	5	9	20	32(16.1)	34(14.5)
Deportes	7	2			5	1		10	12(6.1)	13(5.5)
Economía		7	4	5	6	5	24	14	34(17.2)	31(13.2)
Educativos	7	3	12		1	2			20(10.1)	5(2.1)
Sociología		1			6	1	8	22	14(7.1)	24(10.2)
Sin contexto	10	8		20		62	57	27	67(33.8)	117(49.8)
Total (%)	43(21.7)	27(11.5)	20(10.1)	30(12.8)	27(13.6)	82(34.9)	108(54.5)	96(40.9)	198	235

Observamos un alto número de ejercicios descontextualizados, siendo mayor su frecuencia en el [T2] (49%) que en el [T1] (34%). En ambos textos es demasiado abundante, lo que indica una orientación demasiado teórica del tema. En el estudio de Sánchez Cobo (1998), el conjunto de actividades descontextualizadas estaba en un 31,7%. Destacamos además que los contextos mayormente utilizados son el económico y el estudio en ciencias seguidos del biológico en el [T1] y el sociológico/demográfico en el [T2].

3.3. Tipo de dependencia considerado

Al igual que en el estudio de Sánchez-Cobo (1998), hemos analizado la intensidad, el sentido y el tipo de dependencia con que se presentan las tareas en los textos analizados (Tabla 4). Caracterizamos la intensidad atendiendo al valor absoluto del coeficiente de correlación lineal en alta (A) si corresponde al intervalo [0,8; 1), media (M) si corresponde al intervalo [0,5; 0,8) y baja (B) si corresponde al intervalo [0,2; 0,5). El sentido de éste se caracteriza por su signo siendo directa (inversa) si el signo es positivo (negativo). Se ha considerado independencia para el caso de tareas bajo un coeficiente de correlación con intensidad, en valor absoluto, comprendida entre 0 y 0,2. Y la tipología de dependencia atiende a la consideración de otros modelos de ajuste distintos del modelo lineal. Se presenta además un gráfico (Figura 6), para visualizar mejor los resultados. Hacemos notar que en la Tabla 4, algunos problemas podrían aparecer contados dos veces, si, por ejemplo, corresponde a dependencia funcional no lineal.

Tabla 4 — Intensidad, sentido y tipo de dependencia utilizados en los textos

Tipo de dependencia		Tipo de actividad								Total (%)	
		Ejemplos		Ejercicios resueltos		Ejercicios propuestos					
						En el tema		Fin del tema			
		T1	T2	T1	T2	T1	T2	T1	T2	T1	T2
Independencia		4	3	3	3		8		9	7(3.5)	23(9.8)
Directa	A	13	2	13	12		9	38	24	64(32.3)	47(20)
	M	5	6	1		3	6	13	9	22(11.1)	21(8.9)
	B						7	7	12	7(3.5)	19(8.1)
Inversa	A	11		3	5	1	19	9	18	24(12.1)	42(17.9)
	M		1		3	4		11	4	15(7.6)	8(3.4)
	B						4	7		7(3.5)	4(1.7)
Funcional		2	3		3	3	3	5	4	10(5.1)	13(5.5)
No lineal			2				12		6		20(8.5)
D. Verbal		8	10		4	16	14	18	10	42(21.2)	38(16.2)
Total (%)		43(21.7)	27(11.5)	20(10.1)	30(12.8)	27(13.6)	82(34.9)	108(54.5)	96(40.9)	198	235

La principal diferencia es que el texto [T1] no presenta al alumno modelos de ajuste distintos al lineal, mientras que la enseñanza de la regresión en el texto [T2] es de mayor calidad en cuanto a este aspecto. Por otra parte, destacamos la presentación mayoritaria de situaciones con correlación directa e intensidad alta en el texto [T1]. Además, las situaciones presentadas bajo asociación directa: 47% en [T1] y 37% en [T2], en comparación con las de asociación inversa: 24% en [T1] y 23% en [T2] muestran una posible tendencia, que puede inducir al alumno a creer que para que exista asociación estadística, el valor absoluto del coeficiente de correlación deberá ser alto, situación poco frecuente cuando se trabaja con datos reales (Sánchez Cobo, 1998).

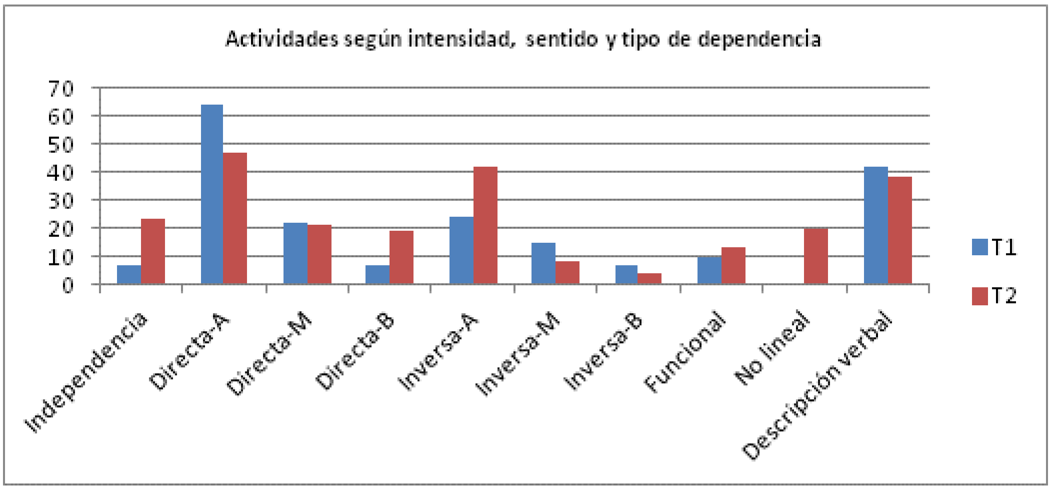


Figura 6. Actividades según tipología de dependencia.

4. Conclusiones

En este estudio presentamos un análisis detallado de dos libros de texto de bachillerato en el tema de correlación y regresión donde se advierten de diferencias significativas en las situaciones problemáticas que se plantean a los estudiantes. Destacamos así, el distinto tratamiento que estos textos realizan en cuanto al campo de problemas P0, lo cual podría conducir a un uso sesgado de diferentes representaciones (tabular, verbal, gráfica y numérica), con tendencia hacia el registro gráfico, principalmente al diagrama de dispersión, y sin prestar atención al proceso de construcción de estos gráficos como ocurre con el texto [T1], caso que también se presenta en el tratamiento de la tabla de doble entrada. Destacamos igualmente la necesidad de un uso equilibrado de situaciones en cuanto al sentido, intensidad y tipo de dependencia ya que es importante presentar al estudiante variedad de situaciones en que se problematice el modelo de mejor ajuste a los datos, creando el hábito de cuestionar si el modelo lineal sería el que más se ajustase a los datos del problema (Batanero, Díaz y Gea, 2011).

Todos estos resultados han de interpretarse con precaución, pues, de acuerdo a Lowe y Pimm (1996) el impacto del libro de texto depende no sólo del mismo libro, sino del lector, y del profesor, así como de las interacciones que determinan su uso en el aula. Actualmente, este estudio se encuentra en desarrollo, ampliando el tamaño de la muestra de textos en el análisis.

Agradecimientos

Proyecto EDU2010-14947, FPI-BES-2011-044684, FPU-AP2009-2807 (MICINN-FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la Eso. *Revista de Educación, 340*, 341-378.

Batanero, C., Díaz, C. y Gea, M. M. (2011). Estadísticas de la pobreza y desigualdad. En C. Batanero y C. Díaz (eds.), *Estadística con Proyectos* (pp. 97-124). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1997). Evolution of students' understanding of statistical association in a computer based teaching environment. En J. B. Garfield y G. Burrill, (eds.), *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics. IASE Round Table Conference Papers* (pp. 191-205). Voorburg, The Netherlands: Internacional Statistical Institute.

Castro-Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van Den Noortgate, W. y Onghena, P. (2009). The transitivity misconception of Pearson's correlation coefficient. *Statistics Education Research Journal 8* (2), 33-55. Disponible en: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/.

Chapman, L. J. y Chapman, J. P. (1969). Illusory correlation as an obstacle to the use of valid psychodiagnostic signs. *Journal of Abnormal Psychology, 74* (3), 271-280.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 22* (1), 5-18.

Estepa, A. (2008). Interpretación de los diagramas de dispersión por estudiantes de Bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias 26* (2), 257-270.

Estepa, A. y Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias, 13* (2), 155-170.

Estepa, A., Gea, M. M., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2012). Algunas notas históricas sobre la correlación y regresión y su uso en el aula. *Números, 81*, 5-14.

Godino, J. D. y Batanero, C (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14* (3), 325-355.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9* (1), 117-150.

Hald, A. (1998). *A history of mathematical statistics. From 1750 to 1930.* New York: John Wiley.

Herbel, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the'' voice'' of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education, 38* (4), 344-369.

Lavalle, A. L., Micheli, E. B. y Rubio, N. (2006). Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9* (3), 383-406.

Lowe, E. y Pimm, D. (1996). 'This is so': a text on texts. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 371-410). Dordrecht: Kluwer.

M.E.C. (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura de bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Autor.

Ortiz, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de Bachillerato.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Granada.

Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma*, *38*, 5-14.

Sánchez Cobo, F. T. (1998). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada, Granada.

Sánchez Cobo, F. T., Estepa, A. y Batanero, C. (2000). Un estudio experimental de la estimación de la correlación a partir de diferentes representaciones. *Enseñanza de las Ciencias. 18* (2), 297-310.

Suydam, M. y Weaver, J. F. (1977). Research on problem solving: Implications for elementary school classroom. *Journal of Experimental Psychology General, 112*, 634-656.

Truran (1995). Some undergraduates' understanding of the meaning of a correlation coefficient, en B. Atweh, y S. Clavel, (eds.). *Proceedings of the Eigteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA)*, pp. 524-529. Darwin, Australia: Northern Territory University.

Zieffler, A, y Garfield, J. (2009). Modeling the growth of students' covariational reasoning during an introductory statistics course. *Statistics Education Research Journal, 8* (1), 7-31.

Anexo 1: Textos utilizados en el análisis

[T1]. Colera, J., Oliveira, M.J., García, R. y Santaella, E. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: Grupo Anaya.

[T2]. Anguera, J., Biosca, A., Espinet, M. J., Fandos, M.J., Gimeno, M. y Rey, J. (2008). *Matemáticas I aplicadas a las Ciencias Sociales*. Barcelona: Guadiel.

FERNANDES, J. A., VISEU, F., MARTINHO, M. H. & CORREIA, P. F. (ORGS.) (2013). *ATAS DO III ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA*. BRAGA: CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DO MINHO.

A INVESTIGAÇÃO E A TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO CONTRIBUINDO PARA O ENSINO DE ESTATÍSTICA

Ailton Paulo de Oliveira Júnior
Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba – Minas Gerais – Brasil
Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID/UFTM
ailtonpaulo@matematica.uftm.edu.br

Resumo. A Estatística só adquire funcionalidade social quando utilizada na prática da pesquisa. O próprio nascimento e evolução dessa ciência foram impulsionados pelas necessidades de pesquisas nas mais diversas áreas do conhecimento humano. Coerentemente com isso, a metodologia didática que responda aos anseios dos estudantes deve se basear na aplicação da teoria à análise de casos reais de pesquisas. Nesta perspectiva, a atividade que descrevemos foi desenvolvida no ano de 2011 e teve como objetivo possibilitar aos alunos bolsistas e professores supervisores do PIBID/Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM em Uberaba, a prática da estatística através de atividades de ensino utilizando projetos (investigação) e a tecnologia da informação (planilha eletrônica e software estatístico). Observamos a partir do desenvolvimento da atividade que a participação do trabalho feito em grupo aumentou o interesse pelo assunto abordado e a experiência possibilitou agregar valores que modificaram atitudes através da mobilização para que o conhecimento tivesse significado dentro de uma situação vivenciada no dia-a-dia.

Palavras-chave: Ensino; Estatística; Investigação; Tecnologia da informação; Formação de professores.

Abstract. The statistic acquires functionality only when used in social research practice. The very birth and evolution of this science were driven by the needs of research in various areas of human knowledge. Consistent with this, the teaching methodology that responds to the concerns of students should be based on the application of theory to the analysis of actual research. In this perspective, we describe the activity that was developed in 2011 and aimed to enable students and faculty fellows supervisors PIBID/Mathematics of Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM in Uberaba, the practice of using statistical learning activities using projects (research) and information technology (spreadsheet and statistical software). We observe from the development activity that participation in group work done increased interest in subject matter and experience enabled aggregate values that changed attitudes by mobilizing the knowledge that had meaning within a situation experienced in day-to-day.

Keywords: Teaching; Statistics; Research; Information technology; Training teachers.

Introdução

Uma das maiores dificuldades enfrentadas pelos professores da Educação Básica é trabalhar na sala de aula com os conteúdos estatísticos sugeridos pelos PCN (Brasil, 1998), onde devem desenvolver nos alunos o saber coletar, organizar e interpretar estatisticamente informações e valorizar estes procedimentos para tomada de decisões.

Tais dificuldades, de acordo com Mendes e Brumatti (2003), talvez sejam resultados de: (1) concepções errôneas do professor sobre projetos estatísticos — acreditam que estes se resumem à coleta sem critérios de alguns dados e depois a uma apresentação com representações gráficas; (2) falhas na sua formação profissional — o professor imita as estratégias com que lhe foram transmitidos os conceitos estatísticos; (3) não familiaridade com estratégias de ação didática quando estas requerem o desenvolvimento de projetos; (4) conhecimento insuficiente ou inadequado do conteúdo estatístico.

Gnanadesikan et al. (1997) afirmam que, para que os estudantes possam adquirir um entendimento conceitual de Estatística Básica, o ensino desta disciplina deve deixar de ser através de aulas expositivas, passando para o engajamento dos alunos em atividades diferenciadas de ensino. Sua preocupação se concentra na questão: Como fazer para que os alunos visualizem os conceitos importantes? Através de atividades especiais, o autor concluiu que houve melhoria da atitude do professor em sala de aula, onde foram discutidos assuntos importantes do cotidiano e onde foram desenvolvidos e entendidos conceitos chave. O autor ainda afirma que as atividades, quando cuidadosamente selecionadas, podem focar a atenção dos alunos em questões importantes, antes não valorizadas.

Acreditamos que o estudo "teoricamente puro" da Estatística deve ser descartado, da mesma forma que o fornecimento de "receitas de bolo" para serem aplicadas sem qualquer senso crítico. O professor deve contextualizar a Estatística no campo do conhecimento de seus estudantes sem negar a importância da formalização matemática dos conceitos.

A Estatística só adquire funcionalidade social quando utilizada na prática da pesquisa. O próprio nascimento e evolução dessa ciência foram impulsionados pelas necessidades de pesquisas nas mais diversas áreas do conhecimento humano.

Outra característica encontrada nesses estudos é o trabalho com projetos. As tecnologias favorecem esse tipo de abordagem, a qual promove o engajamento dos alunos, embora existam outras formas de se usar tecnologias na educação.

No trabalho com projetos de aprendizagem usando tecnologias é importante o professor não perder de vista seu compromisso em aprofundar os conteúdos específicos. De certa forma isso é paradoxal, pois ao se trabalhar com projetos abre-se a possibilidade de o aluno enveredar por temas imprevistos, por vezes difíceis de serem relacionados com os conteúdos específicos de interesse da disciplina.

1. A Investigação no ensino de Estatística

A noção de ciclo investigativo emerge de uma estrutura para o pensamento estatístico proposta por Wild e Pfannkuch (1999), apresentada na Figura 1. De acordo com os autores, eles construíram, com base na literatura, na experiência própria e em entrevistas realizadas com estudantes de estatística envolvidos em projetos de pesquisa e com estatísticos profissionais em exercício uma estrutura para o pensamento estatístico envolvido nas investigações empíricas composta por quatro dimensões, a saber: o ciclo investigativo, tipos de pensamento, o ciclo interrogativo e as disposições.

De acordo com Wild e Pfannkuch (1999), a primeira dimensão da estrutura proposta é uma adaptação do modelo PPDAC (Problem, Plan, Data, Analysis, Conclusions) de Hand (1994) e se relaciona com a forma como uma pessoa atua e o que pensa durante o curso de uma investigação estatística. Essa dimensão evidencia a importância da formulação do problema, inserido em um dado contexto, e do planejamento do sistema de medição, plano amostral etc., etapas iniciais do modelo. Além disso, o conhecimento obtido e as necessidades identificadas dentro do ciclo podem originar novos ciclos investigativos.

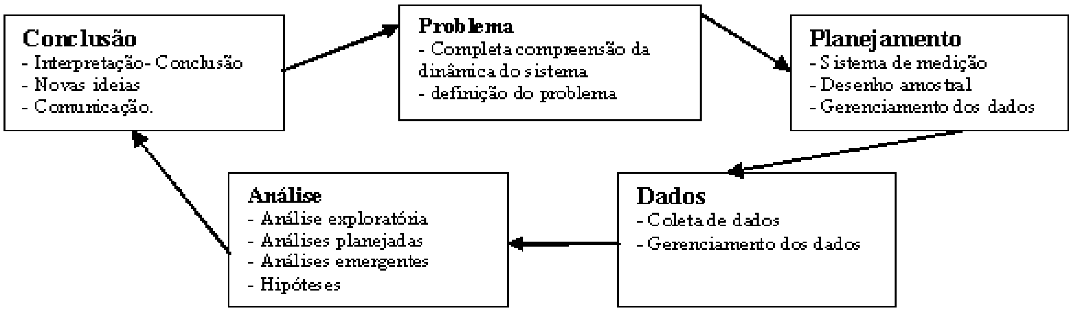


Figura 1. Esquema do ciclo investigativo.

Para Silva (2007), este modelo objetiva que o estudante sinta necessidade de resolver um problema, o que poderá garantir seu envolvimento. Dessa forma, o problema deixaria de ser resolvido apenas porque o professor o pede, pois o estudante estando envolvido passaria a desejar a solução e buscaria ferramentas necessárias para isso. Concordamos em grande medida com essa afirmação já que, como veremos mais adiante, o compromisso e o envolvimento com o problema são condições importantes para que o pensamento estatístico se desenvolva.

Em Souza (2002) pode-se acompanhar uma atividade pautada no ciclo de investigação pela qual os estudantes foram conduzidos a formular questões ('*Problema*') e planejar estudos que lhes permitissem responder a essas mesmas questões ('*Planejamento*'). Segundo a autora, tais estudos englobaram a tomada de decisões quanto ao tipo de dados que necessitam, ao modo de recolhê-los (coleta de '*Dados*') e à interpretação dos dados recolhidos ('*Análises*'); uma vez terminado o estudo, os alunos comunicaram os resultados da sua investigação tendo o cuidado de preparar argumentos para defenderem as opções que tomaram e as interpretações que fizeram ao longo do processo de investigação ('*Conclusões*'). Para alcançar esses objetivos a autora dividiu a atividade em sessões, cada uma com questionamentos para auxiliar e motivar os estudantes: 1ª) Preparação das questões de investigação; 2ª) A coleta dos dados; 3ª) Análise Exploratória dos dados; 4ª) Balanço do trabalho desenvolvido; 5ª) Preparação dos relatórios; 6ª) Apresentação dos trabalhos.

Pode-se citar também o trabalho desenvolvido por Mendonça (2008), onde os resultados evidenciam a importância de se proporcionar condições para que os alunos se desenvolvam de forma autônoma e cooperativa, a fim de construir o próprio conhecimento, e se dão indícios de que um Ambiente de Modelagem Matemática pode contribuir, de fato, para envolver os estudantes no processo de ensino e aprendizagem, visto que colabora para que os conceitos científicos tenham significado para o aluno e para que este tenha interesse em compreendê-los.

Citamos, ainda, as sequências didáticas propostas por Kataoka e Hernandez (2010) e Nagamine, Silva e Santana (2010), entre outras relatadas em Cazorla e Santana (2010).

Biajone (2010) apresenta em detalhes as fases de um Projeto Estatístico em um curso de Pedagogia cujas fases abarcam todas as etapas do ciclo investigativo e vice-versa. Seu trabalho, conforme o autor, guiou-se pelas seguintes fases de um projeto estatístico: Definição do tema; Planejamento das ações; Realização das ações; Elaboração das análises e conclusões; Divulgação e comunicação dos resultados.

Para Lopes (2003) as atividades de ensino devem percorrer todo o caminho do processo de tratamento da informação partindo de um problema a ser investigado e percorrendo as fases do ciclo investigativo. A autora propõe então um esquema, apresentado na Figura 2, que contempla esse processo, similar ao ciclo do modelo PPDAC (Problem, Plan, Data, Analysis, Conclusions) de Hand (1994).

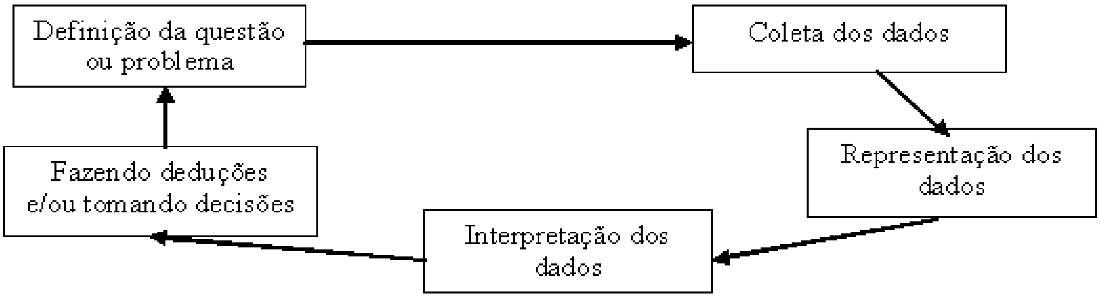


Figura 2. O processo do tratamento de dados.

Almeida (1999) atribui à Pedagogia de Projetos a capacidade de melhorar significativamente a aprendizagem dos conceitos científicos, destacando que esta perspectiva pedagógica é capaz de:

1. Atender às demandas da sociedade;
2. Considerar as expectativas, potencialidades e necessidades dos alunos;
3. Criar espaço para que professores e alunos tenham autonomia para desenvolver o processo de aprendizagem de forma cooperativa, com trocas recíprocas, solidariedade e liberdade responsável;
4. Desenvolver as capacidades de trabalhar em equipe, tomar decisões, comunicar-se com desenvoltura, formular e resolver problemas relacionados com situações contextuais;
5. Desenvolver a habilidade de aprender a aprender, de forma que cada um possa reconstruir o conhecimento, integrando conteúdo e habilidades segundo o seu universo de conceitos, estratégias, crenças e valores;
6. Incorporar as novas tecnologias não apenas para expandir o acesso à informação atualizada, mas principalmente para promover uma nova cultura do aprendizado por meio da criação de ambientes que privilegiem a construção do conhecimento e a comunicação.

2. A Tecnologia da Informação no Ensino de Estatística

As Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação do professor da Educação Básica atribuem ao professor a função de:

> Orientar e medir o ensino para aprendizagem do aluno comprometer-se com o sucesso da aprendizagem dos alunos; assumir e saber lidar com a diversidade existente entre os alunos; incentivar atividades de enriquecimento cultural; desenvolver práticas investigativas; elaborar e executar projetos para desenvolver conteúdos curriculares; utilizar novas tecnologias, estratégias e materiais de apoio; desenvolver hábitos de colaboração e trabalho em equipe (Brasil, 2001 apud Brasil, 2002, p. 140).

Mendonça (2008) diz que ensinar Matemática deve ser muito mais que simplesmente promover o reconhecimento de símbolos, o manejo de fórmulas e a utilização de regras e técnicas para resolver problemas-modelo. Deve contemplar, principalmente, situações de aprendizagem que possibilitem aos estudantes construir competências para saber lidar com os conceitos matemáticos, utilizando-os para resolver problemas, avaliar resultados encontrados, questionar informações, desenvolver atitudes criativas que contribuam para o exercício de uma profissão e que levem o estudante a exercer sua cidadania de forma crítica e participativa.

Segundo Maltempi (2008) toda inserção de tecnologia no ambiente de ensino e aprendizagem requer um repensar da prática docente, pois ela não é neutra e transforma a relação ensino-aprendizagem. Isso é muito importante para que possíveis decepções ou resultados negativos não sejam, de forma simplista, atribuídos à tecnologia.

A sociedade impõe o uso da tecnologia na educação porque grande parte da população está em um crescente contato com ela no seu dia-a-dia. Dessa forma, cada vez mais as escolas recebem alunos usuários de tecnologias, habituados a elas, os quais naturalmente pressionam pelo seu uso na educação ao trazerem tecnologias para a sala de aula ou ao relacionarem as atividades realizadas na escola com a possibilidade de serem elaboradas com o apoio de tecnologias.

As transformações ocorridas nas últimas décadas representam as necessidades da atual conjuntura social, isto é, tais mudanças acompanham as demandas das necessidades de uma época e sua sociedade. O eixo maior destas mudanças tem como símbolo maior a informática. Dispositivos informáticos dão suporte a tecnologias intelectuais e que Lévy (1999) designa como Memória (banco de dados, hiperdocumentos, arquivos digitais de todos os tipos), Imaginação (simulações), Percepção (sensores digitais, tele presença, realidades virtuais) e Raciocínios (Inteligência artificial, modelização de fenômenos complexos). Segundo Bisquerra, Sarriera e Martinez (2004) a informática é o conjunto de atividades, procedimentos, de técnicas e de ferramentas, ajudadas pelo computador, são utilizadas para tratar a informação.

A estatística está presente no cotidiano dos alunos e seus ensinamentos trazem grandes benefícios para sua formação, sendo de extrema importância colocar o futuro professor em contato com a pesquisa existente em seu campo de estudos, possibilitando assim, uma melhor compreensão de sua ciência e dos fenômenos educativos (Jung apud Pavanello, 2003).

A estatística na formação do professor é considerada um requisito indispensável, visto que a rotina do professor envolve muitos aspectos da estatística, pois esta é utilizada na organização das turmas, através de técnicas estatísticas que o professor utiliza no gerenciamento de suas turmas, como, por exemplo, cálculo das médias, percentual de frequência de aprovação e reprovação, etc. (Cuore, 2009).

3. Metodologia

Participaram da atividade aqui relatada, todos os 23 integrantes do subprojeto PIBID Matemática, Edital 2009 da Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM, quais sejam, 20 (vinte) alunos bolsistas de iniciação à docência, os dois Professores Supervisores de cada uma das escolas em que o projeto Matemática está inserido e o coordenador de área.

Além disso, a proposta desenvolvida neste trabalho se desenvolveu a partir de atividades desenvolvidas no ano de 2011 da seguinte maneira: (1) escolha do tema a ser abordado; (2) elaboração do instrumento de pesquisa; (3) aplicação do instrumento de pesquisa junto aos sujeitos da pesquisa; (4) montagem do banco de dados a partir dos dados coletados; (5) tabulação dos dados; (6) análise dos dados que permitirá o desenvolvimento das ferramentas estatísticas e também o desenvolvimento da argumentação a partir dos dados obtidos; (7) divulgação dos resultados.

Esta metodologia de ensino tem por objetivo o desenvolvimento dos conceitos de estatística básica através da construção de uma pesquisa científica. Neste caso, a estatística se dará no ambiente real de sua aplicação e estará inserida no contexto da pesquisa científica.

Para Moore (1997) esta abordagem de conteúdos vem ao encontro do que o autor denomina de “nova pedagogia”. Segundo o autor, a ideia central é o abandono de um modelo de “transferência de informações” a favor de uma visão “construtivista” de entendimento: estudantes não desejam ser uma vasilha preenchida com o conhecimento despejado pelos professores; eles inevitavelmente constroem seus próprios conhecimentos através da combinação de suas experiências presentes com seus conceitos já existentes. De acordo com Gonçalves et al. (1999), com este tipo de atividade a liberdade que o aluno recebe deixa aflorar em si o pesquisador, o ser crítico que existe dentro dele.

Os conteúdos estatísticos abordados, considerando que a maioria dos alunos bolsistas do subprojeto ainda não cursaram a disciplina de Probabilidade e Estatística I, tendo os conhecimentos de Estatística do que lhes foi passado, ou não, na Educação Básica, são os seguintes: (1) variáveis qualitativas e quantitativas que compõem o instrumento de pesquisa; (2) construção de tabelas; (3) estatísticas básicas como: média, mediana e desvio-padrão; (4) noção de amostra e população.

Pretendeu-se com estas atividades auxiliar na formação dos alunos do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro no que tange a conteúdos básicos de Estatística utilizando o ensino via projetos (investigação) e a tecnologia da informação (planilha eletrônica e software estatístico).

4. Resultados

Para apresentar os resultados serão consideradas as etapas do processo de Investigação Estatística indicadas por Lopes (2003), cujo juízo a respeito do ensino de Estatística está em consonância com as tendências da Didática desta disciplina e com o trabalho com projetos, conforme esclarecem Batanero e Díaz (2004).

Pode-se conferir cada uma das sucessivas etapas dos referidos processos. As duas primeiras etapas referem-se à: (1) escolha do tema e a formação dos grupos por tema de interesse; e (2) interação com o tema ou estudo do fenômeno e período de interação nos grupos, possibilitando as negociações dos interesses envolvidos e discussões sobre o tema.

Assim, o desenvolvimento da atividade iniciou-se em abril de 2011 quando o PIBID/UFTM, Edital 2009, completava um ano de atividade, com a problematização dos assuntos a serem pesquisados e consistiu em estabelecer e delimitar o tema a ser tratado com o intuito de definir o contexto e os aspectos que seriam trabalhados ao longo das outras etapas da atividade.

Segundo Ponte (1990), ao se trabalhar com projetos o ponto de partida inicial é o gosto do aluno. Desta forma foi solicitado aos alunos bolsistas e professores supervisores do PIBID/Matemática/UFTM que sugerissem temas de seu interesse investigativo onde a Estatística lhes pudesse servir de auxílio para um melhor esclarecimento e compreensão.

Como o subprojeto trabalha junto aos alunos das séries finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, pensou-se em desenvolver temas diferenciados para cada um dos ciclos da Educação Básica e também atingir a todos os alunos da escola. Desta forma, o trabalho de ensino pretendeu mostrar: (1) A visão dos alunos das Séries Finais do Ensino Fundamental das escolas acima citadas em relação ao processo ensino e aprendizagem da Matemática e perfil do grupo; e (2) A motivação dos alunos do Ensino Médio destas mesmas escolas quanto à continuidade de sua formação e perfil do grupo.

Na terceira etapa pretende-se definir a questão ou problema como a escolha do(s) aspecto(s) do tema, o estabelecimento de hipóteses e a elaboração da(s) questão(ões) para a verificação da(s) hipótese(s).

Portanto, nesta etapa foram planejados, elaborados e aplicados questionários a todos os participantes do subprojeto em reuniões na Universidade. Os instrumentos foram divididos nos seguintes blocos: (1) Ensino Fundamental: I — Estabeleça seu perfil; II — Sobre a formação de seus pais; III — Sobre seus estudos; IV — Atitudes em relação à Matemática; e V — Você e a Matemática; (2) Ensino Médio: I — Estabeleça seu perfil; II — Sobre a sua formação e a de seus pais; III — Sobre seus estudos e continuidade; IV — Você e a Matemática; e V — Sobre seu trabalho e escolha profissional.

Fez-se necessária a utilização de outro preceito da abordagem de projetos — o trabalho em grupo. A promoção deste preceito não somente facilitou o levantamento das temáticas, mas também promoveu o exercício da cooperação, da expressão dos pontos de vistas, da divisão de tarefas e do consenso na tomada de decisões, habilidades e atitudes tão preciosas para a realização das demais fases do projeto estatístico.

Assim, a aplicação dos instrumentos de pesquisa foi feita junto a alunos do Ensino Fundamental, sendo: 429 alunos (90,89% do total) da Escola Professora Corina de Oliveira e 185 alunos (77,08% do total) da Escola Santa Terezinha, e do Ensino Médio, sendo: 644 alunos (79,60% do total) da Escola

Professora Corina de Oliveira e 229 alunos (77,10% do total) da Escola Santa Terezinha, ambas localizadas na cidade de Uberaba na região do Triângulo Mineiro.

Na quarta etapa buscou-se a compreensão do problema a partir da pesquisa de campo e da análise exploratória de dados. Nesta fase os alunos são convidados a utilizar os conceitos e modelos estatísticos e matemáticos para calcular índices e medidas estatísticas com os quais poderão estabelecer relações e tirar conclusões, além de construir os modelos representativos dos resultados encontrados.

Os alunos bolsistas do subprojeto PIBID/Matemática da UFTM, juntamente com os professores supervisores, ficaram responsáveis pela aplicação do instrumento de pesquisa, sempre sob a orientação do professor coordenador da área de Matemática. Os alunos foram divididos em duplas, ou seja, em cada uma das escolas havia cinco grupos responsáveis em aplicar os questionários a todas as turmas das escolas. Os questionários foram aplicados nos períodos: diurno, vespertino e noturno onde eram oferecidas turmas de Ensino Fundamental e Médio.

Durante a aplicação dos questionários, a escola foi bem receptiva quanto ao desenvolvimento da atividade sendo que os professores das diversas turmas das escolas auxiliaram bastante no sentido de organizar a sala quando havia algum barulho e em esclarecer as dúvidas e algumas perguntas que os alunos não sabiam responder.

Trazemos depoimentos de um aluno bolsista e de uma professora supervisora durante a aplicação dos instrumentos:

> Em geral foi bom nosso trabalho na Escola, em um 1° ano do ensino médio, o primeiro D, a professora Kelly (Artes) não permitiu nossa entrada, alegando estar tirando dúvidas para a prova que seria no próximo horário. Então esta turma ficou para um segundo momento. Alguns professores desgostam da interrupção, outros são totalmente solidários. (Aluno Bolsista)
>
> No período noturno, tivemos muita dificuldade no dia 07/04, pois como fomos só eu e um aluno bolsista, não conseguimos fazer nem com a metade das turmas. E para dificultar ainda mais, a maioria das turmas está realizando avaliações, pois estamos no final do bimestre. Amanhã (12/04) irei na escola para tentar fazer mais algumas turmas, mas não sei se os professores liberarão. Caso eu não consiga, vou deixar para ir somente depois da semana santa, pois na semana que vem só tem aula até na terça-feira, pois na quarta-feira, teremos a comemoração da Páscoa, e então muitos alunos não vão à escola. (Professor Supervisor)

Após a aplicação de todos os questionários os alunos com a orientação dos professores supervisores e professor coordenador de área, fizeram a organização dos pacotes com os instrumentos de pesquisa de mais de 60 turmas das duas escolas. De volta à Universidade, foi feita a divisão dos pacotes segundo os quais os alunos haviam aplicado nas turmas e respectivas escolas.

Juntamente com a divisão dos pacotes aos alunos bolsistas, foi desenvolvida uma oficina que os orientou como deveriam proceder quanto à tabulação dos dados. Para tanto, foi feita uma codificação de cada um dos questionários de cada um dos pacotes para que se tornasse facilitado o trabalho de tabulação e da análise crítica dos dados após o término desta etapa e na fase de apresentação, análise e interpretação dos dados utilizando a seguinte nomenclatura: "Escola e aluno-Ano e Turma", por exemplo, S1.6A (Aluno 1 do 6° Ano do Ensino Fundamental da E.E. Santa Terezinha) ou C7-1B (Aluno 7 do 1° Ano do Ensino Médio da E.E. Professora Corina de Oliveira).

Além disso, montou-se no software Microsoft Excel, planilhas segundo cada um dos pacotes seguindo a codificação "Escola-Ano e Turma", o que permitiu análises individuais das turmas, por ano, por ciclo, por escolas e caso houvesse interesse a comparação de todos estes agrupamentos, (ver Figura 1).

QUEST	ESCOLA	SEXO	IDADE	SÉRIE	COR	EST_NASC	BAIRRO_RES	Q_RESIDE	O_RESIDE	IMOV_RES	TRANSP_ESC	N_PESS	IRMAOS	Q_IRMAOS	REND_BRUTA	ESCOL_PAI	ESC_MAE	GOSTA_EST
C61A	1	2	10	1	1	MG	SERRA DOURADA	3	2	1	4	6	2	1		2	5	2
C62A	1	1	11	1	3	MG	MERCES	1	1	1	1	3	2	6	2	2	2	2
C63A	1	1	11	1	1	MG	SERRA DOURADA	1	1	1	2	3	1			6	3	2
C64A	1	2	11	1	1	MG	TUTUNAS	1	1	1	4	2	2	2		3	3	2
C65A	1	1	11	1	2	MG	RECANTO DA TERRA	4	1	1	5	5	1			2	7	2
C66A	1	2	11	1	3	MG	MERCES	1	1	1	1	4	2	4	5	3	9	2
C67A	1	2	11	1	2	MG	SANTA MARTA	2	1	3	1	5	2	6	2	3	3	2
C68A	1	1	11	1	2	MG	TUTUNAS	2	1	1	3	4	2	1	3	5		2
C69A	1	1	11	1	2	MG	RECANTO DA TERRA	1	1	2	2	6	1		2	8	6	2
C610A	1	1	13	1	1	MG	MERCES	1	1	1	1	7	2	1	8	2	6	2
C611A	1	1	11	1	1	MG	SANTA MARTA	2	1	3	1	2	2	1	2	7	5	2
C612A	1	2	11	1	1	MG	UNIVERSITARIO	2	1	1	7	7	2	2	8	3	5	2
C613A	1	2	11	1	3	MG	OLINDA	4	1	3	4	5	2	3	2	5	5	2
C614A	1	2	11	1	3	MG	MERCES	2	1	1	1	6	2	3		6	2	1
C615A	1	2	1	1	1	MG	SANTA MARTA	1	1	1	1	2	4	2			7	2
C616A	1	1	11	1	2	MG	BEIJA FLOR II	5	1	1	6	3	1		4	2	6	2
C617A	1	2	12	1	3	MG	SANTA MARTA	1	1	1	1	7	2	5				2
C618A	1	2	10	1	2	SP	PONTAL	2	1	1	5	5	2	2		4	5	2
C619A	1	2	11	1	1	PE	MERCES	2	1	4	5	5	2	2	2	2	3	2
C620A	1	2	10	1	2	MG	PACAEMBU	1	1	1	7	3	1		6	6	6	2
C621A	1	1	11	1	1	MG	MORUMBI	1	1	1	4	3	2	2		7	8	2
C622A	1	1	11	1	1	MG	RES. DOM EDUARDO	1	1	1	4	3	1		4	4	4	2
C623A	1	1	10	1	2	MG	OLINDA	1	1	1	7	3	1		3	8	3	2
C624A	1	2	11	1	1	MG	VOLTA GRANDE	1	2	3	4	3	1		3	4	2	2
C625A	1	1	11	1	1	MG	BEIJA FLOR II	2	1	1	4	4	1			3	3	2
C626A	1	2	10	1	1	SP	PONTAL	2	1	1	5	5	2	2		4	5	2
C627A	1	1	10	1	1	SP	PONTAL	2	1	1	5	5	2	2		4	5	2
C628A	1	1	10	1	2	SP	TUTUNAS	1	1	1	4	3	1				5	1
C629A	1	2	11	1	2	GO	GRANDE HORIZONTE	2	2	3	4	2	2	2		8	8	2
C630A	1	2	11	1	1	MG	BEIJA FLOR II	1	1	1	5	3	1		4	2	2	2
C631A	1	2	11	1	1	MG	SANTA MARTA	4	1	1	4	5	2	1	2	3	4	2
C632A	1	1	12	1	2	MG	MERCES	4	1	1	1	6	2	5	2	3	3	2
C633A	1	1	13	1	1	SP	MERCES	2	1	1	1	6	2	2		9	7	2
C634A	1	1	12	1	1	MG	PALMEIRAS	2	1	1	3	5	2	3	4	4	3	2
C635A	1	1	10	1	2	MG	SANTA MARIA	2	1	3	4	4	2	1	3	5	5	2
C636A	1	1	11	1	1	MG	MERCES	1	1	3	1	5	2	2	2	3	3	2
C637A	1	1	11	1	1	MG	MERCES	1	1	1	1	4	2	2	8	7	6	2
C638A	1	1	13	1	5	MG	BEIJA FLOR II	1	1	1	4	3	1			6	2	2
C639A	1	1	11	1	1	MG	MERCES	1	1	1	1	2	1		5	7	2	2

Figura 1. Parte do banco de dados gerado pelo grupo do trabalho referente à turma “A” do Sexto ano do Ensino Fundamental da Escola Professora Corina de Oliveira.

Após a fase de tabulação dos dados e análise crítica dos mesmos, iniciou-se a etapa de análise conjugada a apresentação dos dados de acordo com os objetivos traçados pelas atividades e/ou interesses que os alunos demostravam.

Para o análise dos dados foi utilizado o *Microsoft Excel* para a montagem do banco de dados e construção de gráficos estatísticos; para as análises estatísticas foi usado o software estatístico livre *WinStat* 3.1 (*Statistics for Windows*) que se mostrou de grande ajuda na medida em que reduziu em muito o tempo de análise e, mais importante, possibilitou aos alunos bolsistas utilizar a tecnologia no auxilio à atividade desenvolvida. Além disso, foi utilizado o software *Microsoft Word* para a elaboração das tabelas e dos textos científicos.

Alguns alunos declararam o seguinte em relação à utilização do software *Microsoft Excel* para a montagem do banco de dados de todas as variáveis que compunham o instrumento de pesquisa:

> O Excel foi muito importante durante a pesquisa, pois facilitou na organização dos dados obtidos. Eu tabulei os dados do terceiro ano do ensino médio da Escola Corina referente às turmas “A”, “B” e “C”.

> A utilização do Excel foi bastante tranquila para mim. Tive que fazer poucas adaptações na estrutura do banco de dados que foi pré-estabelecida. O processo de digitação não foi difícil, porém bastante demorado e necessitou de bastante atenção.

> A utilização da planilha foi, inicialmente, difícil, pois tínhamos que dividir as questões (variáveis do instrumento de pesquisa) em colunas, organizando-as de forma que facilitasse a visualização e entendimento dos dados.

> A planilha montada no Excel foi bastante prática para a tabulação dos dados no Winstat, pois quando os resultados gerados no software apresentavam algum resultado que se apresentava duvidoso, bastava procurar na planilha e se ainda fosse preciso era possível visualizar qual questionário apresentava erro através do código que cada um tinha.

> O Excel é um programa completo e repleto de recursos. Mesmo sendo complexa a montagem e tabulação dos dados, a facilidade que tal software proporcionou compensou as dificuldades encontradas em sua execução.

A planilha eletrônica, não obstante, é um recurso que está disponível na maioria dos computadores e é uma ferramenta que pode auxiliar na construção dos conhecimentos matemáticos.

Segundo Viali (2004) as planilhas, notadamente o Excel, vão se firmando cada vez mais como um recurso instrucional em laboratórios de Estatística. Além dos recursos típicos, elas oferecem um grande número de funções estatísticas e probabilísticas, etc. Duas vantagens da planilha são a sua grande base instalada e seu preço relativamente barato, aliado ao fato de ser possível programá-la e, desta forma, realizar tarefas não previstas inicialmente. Além disso, o paradigma da planilha é conhecido por boa parte dos alunos, desta forma, diminuindo o tempo gasto na aprendizagem da mecânica de uma nova ferramenta de software.

Alguns alunos declararam o seguinte em relação à utilização do software estatístico para geração das estatísticas referentes aos dados coletados:

> Aprendemos a tabular no software *Winstat*, ele é prático e de fácil entendimento. Depois, analisamos os dados para enviarmos o resumo ao evento. Já em relação à análise de dados, não podemos dizer que é simples assim, pelo contrário, é mais trabalhoso do que imaginamos.
>
> No começo eu achei difícil, mas depois foi muito fácil, pois tínhamos apenas de juntar e somar alguns dados. Ao final eu tive que conferir todos os resultados gerados porque somente no meu notebook o software abria. Mas o software nos auxilia na montagem, geração de resultados, sendo que manualmente demora muito.
>
> Tive um pouco de dificuldade na utilização do software, mas depois da explicação do professor ficou mais fácil o manuseio. Foi necessário fazer alguns ajustes antes no Excel, porém estando tudo nos conformes o software gera os dados que precisamos automaticamente.
>
> Inicialmente foi difícil trabalhar com esse software por estar em inglês. Porém, rapidamente fui me habituando e o utilizei para gerar dados percentuais, calcular médias, desvio padrão, máximo, mínimo, dentre outras estatísticas. Estes foram utilizados posteriormente na elaboração de tabelas e textos.
>
> Utilizamos o software *Winstat* para gerar os dados dos alunos do segundo ano do ensino médio das duas escolas participantes. Fomos para o Laboratório de Informática da Universidade e o professor nos auxiliou já que eu nunca havia trabalhado com este software.

É necessário avançar para além do uso do papel e lápis para realizar cálculos e desenhar gráficos e tabelas, sendo desejável o uso das novas tecnologias em situações de ensino, incluindo as calculadoras científicas e *softwares* específicos. Deste modo, o *software* estatístico é visto como uma ferramenta pedagógica sendo frequentemente recomendado (Batanero, Godino & Flores, 2001; Cobo, 2003).

Neste trabalho foi observado pelas falas dos alunos que estes perceberam a importância da inserção de uma ferramenta computacional no processo de geração de dados, o que veio a facilitar em muito o trabalho apesar de inicialmente terem tido dificuldades em gerar as estatísticas necessárias para a apresentação dos dados coletados.

Os alunos, no período de elaboração dos textos, frequentaram o Laboratório de Informática. Neste espaço, os alunos passaram a organizar e analisar os dados coletados, além de elaborar tabelas relativas às informações obtidas, tal como se mostra nas Figuras 2 e 3.

Tabela 3 – Qual item importante para a escolha profissional que o aluno teve a oportunidade de discutir na escola

Fatores importantes para a escolha profissional	Escola I		Escola II	
	n° de alunos	%	n° de alunos	%
Mercado de Trabalho	13	12,26	6	12
Trabalhar com o que gosta	5	4,71	2	4
Ótimo salário	4	3,77	2	4
Fazer um bom curso técnico	5	4,71	5	10
Fazer uma boa faculdade	6	5,66	9	18
Relação entre a família e a profissão	2	1,89	1	2
Incluir atividades artísticas na profissão	2	1,89	1	2
Ambiente de trabalho	3	2,83	1	2
Profissão sem rotina ou rotineira	3	2,83	1	2
Ter vocação para uma atividade	3	2,83	1	2
Fazer de seu hobby uma profissão	3	2,83	1	2
Nenhuma questão é abordada	-	0,00	7	14

Figura 2. Tabela gerada pelo grupo de trabalho referente ao segundo ano do Ensino Médio.

Ao vivenciar a construção das tabelas, presenciando os dados numéricos coletados, observou-se que apesar destes alunos estarem no ensino superior e se preparando para ensinar este conteúdo na Educação Básica era a primeira vez que muitos deles tiveram a oportunidade de realizar tal atividade. Esta atividade tornou possível que os alunos demonstrassem criatividade, mudando várias vezes o tipo de tabela de forma que os dados fossem apresentados de forma clara e objetiva.

Tabela 1 – Motivos dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental das Escolas I e II GOSTAREM de Matemática.

Motivos gostar de Matemática	Escola I		Escola II	
	n° de alunos	%	n° de alunos	%
Tenho facilidade na aprendizagem do conteúdo	26	29,21	05	19,23
Acho a matemática útil no dia-a-dia	22	24,72	06	23,08
Pela maneira que o professor dá sua aula	13	14,61	05	19,23
Acho bom o livro e o material usado pelo professor	13	14,61	04	15,38
Por considerar a matemática útil no futuro	11	12,36	05	19,23
Pela maneira que me relaciono com o professor	03	3,37	01	3,85
Acho a matemática importante para se aprender	01	1,12	-	0,00

Figura 3. Tabela gerada pelo grupo do trabalho do nono ano do Ensino Fundamental.

Os conteúdos de estatística, média, mediana e desvio padrão foram abordados utilizando as variáveis quantitativas que constavam do instrumento de pesquisa, tais como, "idade", "número de pessoas que moravam na residência dos alunos", dentre outras, como apresentado na Figura 4. Para a determinação destas estatísticas, foi utilizado o software estatístico livre que facilita o tratamento de dados de forma rápida, possibilitando trazer em paralelo os conceitos destas medidas.

Ressalta-se que os alunos apresentaram facilidade em utilizar as ferramentas disponíveis e motivação para aventurar-se pelos canais de comunicação e pesquisa disponíveis, conforme verificado nos estudos de Tajra (2002).

Nesta etapa os bolsistas foram estimulados a fazerem o levantamento bibliográfico dos assuntos abordados com a finalidade de proporcionar aos alunos bolsistas e professores supervisores conhecimento dos principais conceitos e técnicas que foram abordados nas etapas anteriores da atividade e também para dar suporte à elaboração de textos que seriam construídos para o envio para submissão a eventos e periódicos científicos. A partir deste embasamento teórico pode-se, de maneira mais consistente, aferir sobre os resultados e conclusões apresentadas. Este levantamento apoiou os pibidianos a realizar a análise dos dados para que resultados e conclusões pudessem ser obtidos.

Tabela 1 – Perfil sócio e econômico dos alunos do 6º ano das Escolas I e II.

Variável	Escola I		Escola II	
Idade	**nº de alunos**	**%**	**nº de alunos**	**%**
9 anos	1	0,87	-	0,00
10 anos	23	20,00	2	6,45
11 anos	72	62,61	13	41,94
12 anos	12	10,43	11	35,48
13 anos	7	6,09	1	3,23
14 anos	-	0,00	4	12,90
Média: 11,01 anos (desvio padrão = 0,77 anos)		Mediana: 11 anos	Média: 11,74 anos (desvio padrão = 1,09 anos)	Mediana: 12 anos
Min-Máx: 9-13 anos			Min-Máx: 10-14 anos	
Nº pessoas residência	**nº de alunos**	**%**	**nº de alunos**	**%**
1	2	1,73	-	0,00
2	14	12,17	1	3,23
3	34	29,57	6	19,35
4	24	25,22	10	32,26
5	21	18,26	3	9,67
6	8	6,96	5	16,13
7	5	4,35	-	0,00
8	1	0,87	-	0,00
9	-	0,00	1	3,23
12	-	0,00	1	3,23
Não responderam	1	0,87	4	12,90
Média: 3,89 pessoas (desvio padrão = 1,40 pessoas)		Mediana: 4 pessoas	Média: 4,67 pessoas (desvio padrão = 2,06 pessoas)	Mediana: 4 pessoas
Min-Máx: 1-8 pessoas			Min-Máx: 2-12 pessoas	

Figura 4. Tabela gerada pelo grupo do trabalho do primeiro ano do Ensino Médio.

Assim, para fechar o processo, os alunos e professores supervisores foram divididos em grupos focados no desenvolvimento dos objetivos já descritos anteriormente, do 6° ao 9° ano do Ensino Fundamental e do 1° ao 3° ano do Ensino Médio, e participaram da XXVI Reunião Latino Americana de Matemática Educativa – RELME, em Belo Horizonte no período de 22 a 28 de julho de 2012, onde foram apresentadas 7 (sete) comunicações orais de trabalhos resultantes do projeto aqui relatado e a elaboração de sete trabalhos completos para avaliação e publicação nos anais do evento.

Trazemos a seguir parte da conclusão de dois destes trabalhos, um do oitavo ano do Ensino Fundamental e outro do terceiro ano do Ensino Médio:

> Foi possível com a pesquisa junto aos alunos perceber que estes querem cada vez mais aulas diferenciadas, fora da sala, aulas de informática, aulas com jogos, por acreditarem que estes recursos tornam as aulas mais atrativas, e que assim eles possam compreender melhor a matéria, mas é importante refletirmos se estes alunos possuem maturidade suficiente para perceber estes recursos como caminhos para aprendizagem, ou apenas como recreações e diversão. (Oitavo ano do Ensino Fundamental)

> Percebe-se com esta pesquisa que a maioria dos entrevistados que frequentam o 3º ano do Ensino Médio das duas escolas estaduais de Uberaba-MG, pretendem dar continuidade aos estudos sendo por meio de cursos técnicos ou cursos superiores, e o que dificultaria a continuidade de seus estudos seria: condições financeiras e disponibilidade de tempo. E que a maioria que optou pelos cursos técnicos pertence à Escola II, são os alunos que possuem uma renda familiar mais baixa, e que seus pais apresentam um nível menor de escolaridade (a maioria possui apenas o Ensino Fundamental incompleto). (Terceiro ano do Ensino Médio)

A elaboração dos textos científicos, além de apresentar os dados quantitativamente e qualitativamente, possibilitou aos alunos a formulação de hipóteses e sugestões acerca das problemáticas discutidas, enriquecendo os trabalhos e evidenciando o papel social das instituições de ensino superior e do subprojeto PIBID/Matemática/UFTM.

5. Conclusão

A possibilidade dos estudantes dos cursos de Licenciatura permanecerem por mais tempo em experiências de observação e ação no cotidiano das Escolas Públicas, possibilita melhor qualificação na formação docente, oferecendo condições de intercâmbios, ações conjuntas, análises, confrontação entre teoria e prática, experiências de ensino e de resolução de problemas na sala de aula e dos processos de ensino e aprendizagem.

Observamos a partir do desenvolvimento da atividade que a participação do trabalho feito em grupo aumentou o interesse pelo assunto abordado e a experiência possibilitou agregar valores que modificaram atitudes. O objetivo principal foi a mobilização para que o conhecimento tivesse significado dentro de uma situação vivenciada no dia-a-dia para contextualizar, e ser ampliado para outras situações.

Notou-se que além de ser fundamental que o professor de matemática conheça amplamente o conteúdo de estatística, deve também ter um amplo conhecimento das ferramentas que compõem a planilha de cálculo para que possa interagir, orientar e desafiar os alunos.

Podem-se trabalhar os conteúdos estatísticos básicos como: (1) conceitos de amostra e população, pois se partiu da ideia de aplicar o instrumento de pesquisa a todos os alunos, mas conseguiu-se a aplicação a aqueles alunos que estavam presentes no momento em que os alunos foram às salas de aula e estes estavam presentes, ou não; (2) construção de tabelas para apresentação dos dados qualitativos e quantitativos como idade dos alunos (em anos), onde se pode desenvolver os conceitos de média, mediana e desvio-padrão; (3) utilização de planilha eletrônica para organizar os dados, trazendo a estes alunos momentos para poderem aprender a montar um banco de dados que pudesse facilitar a tabulação dos dados; (4) utilização de software estatístico para facilitar o tratamento de uma grande massa de dados; (5) elaboração de textos científicos onde pode-se vincular referencial teórico ao objetivo do trabalho, permitindo ainda que os alunos pudessem refletir sobre os dados coletados e não somente fazer uma apresentação simplesmente descritiva dos dados.

Julgamos que levará algum tempo para que essa geração de professores de matemática preencha a lacuna de usar a informática e se capacite para lançar mão desta ferramenta que facilita o ensino e a aprendizagem na Educação Básica.

Evidenciamos que as atividades de organização de pesquisa de campo, coleta, tabulação de dados, interpretação e análise dos dados não foi tarefa fácil para estes alunos exigindo a retomada de conteúdos, um constante repensar dos resultados descritos e uma atitude questionadora do professor, refazendo perguntas objetivando despertar o espírito investigativo nos alunos.

Para Mendonça e Lopes (2010) a implementação da educação estatística deve acontecer de uma forma investigativa, na qual o grupo de alunos tenha vivência com a geração e análise de dados. Acredita-se que no momento em que a turma tenha participação ativa no processo, todas as habilidades serão favorecidas em seu desenvolvimento.

Assim, concluímos que com o ensino vinculado à pesquisa é possível se vislumbrar a possibilidade de se compreender a sala de aula e o espaço escolar em geral, como um local permeado pelas mais diversas dimensões culturais, bem como pelas representações e imaginários sociais. Portanto, é um espaço em que as construções simbólicas, valores e crenças se fazem presentes e orientam as relações entre os sujeitos e, por isso, a necessidade de serem investigadas e compreendidas pelos professores, a fim de tornar as pesquisas mais compreensíveis e com maior credibilidade.

Referências

Almeida, M. E. B. (1999). *Projeto: uma nova cultura de aprendizagem*. São Paulo: PUC. Acedido em 08 dez. 2012, em: <http://www.educacaopublica.rj.gov.br/ biblioteca/educacao/educ30.htm>

Batanero, C., & Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. In J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp.125-163). Zaragoza: ICE.

Batanero, C., Godino, J. D., & Flores, P. (2001). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores de Matemáticas. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, v. 22, Stellenbosch. *Proceedings...* Stellenbosch, África do Sul: Universidade de Stellenbosch. Acedido em 21 nov. 2012, em: <http://www.ugr.es/local/batanero>

Biajone, J. (2010). Projeto estatístico na pedagogia. In C. E.Lopes, C. Q. S.Coutinho & S. A. Almouloud (Orgs.), *Estudos e reflexões em Educação Estatística* (pp. 173-192). Campinas, SP: Mercado de Letras. (Série Educação Estatística em Foco).

Bisquerrra, R, Sarriera, J. C & Martinez, F. (2004). *Introdução à estatística: enfoque informático com o pacote estatístico SPSS*. Porto Alegre: Artmed.

Brasil (2002). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC.

Brasil (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: *Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF.

Carzola, I. M. & Santana, E. (Org) (2010). *Do tratamento da informação ao letramento estatístico*. Itabuna: Via Litterarum. (Alfabetização Matemática, Estatística e Científica).

Cobo, B. (2003). *Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tese de Doutorado em Didáctica de la Matemática, Universidade de Granada, Granada, Espanha,. Acedido em 15 nov. 2012, em: <http://www.ugr.es/-batanero/proyecto.html>

Cuore, R. E. (2009). *A estatística no cotidiano escolar*. Acedido em 08 dez. 2012, em: <http://www.soartigos.com/articles/1959/1/A-ESTATISTICA-NO-COTIDIANO-ESCOLAR-/Invalid-Language-Variable1.html>

Gnanadesikan, M., Scheaffer, R. L., Watkins, A. E. & Witmer, J. A. (1997). An Activity-Based Statistics Course. *Journal of Statistics Education*, v. 5, n. 2.

Gonçalves, C. F. F., Matsuo, T., Strapassan, E. et al. (1999). Uma metodologia de Ensino da Estatística Baseada em Pesquisa, Aplicada para a 5ª série do Ensino Fundamental. In *Atas da Conferência Internacional Experiências e Expectativas do Ensino de Estatística — Desafios para o Século XXI*, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil.

Jung, K. M. (2003). *A pesquisa na formação do professor*. Acedido em 05 dez. 2012, em: <http://euler.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/pesquisa/texto_Jung.pdf>

Kataoka, V. Y. & Hernandes, H. (2010). Perfil da turma. In I. M. Carzola & E. Santana (Orgs.), *Do tratamento da informação ao letramento estatístico* (pp. 23-44). Itabuna: Via Litterarum. (Alfabetização Matemática, Estatística e Científica)

Lévy, P. (1999). *Cibercultura*. São Paulo: Editora 34.

Lopes, C. E. (2003). O conhecimento matemático adquirido através dos projetos (pp. 23-27). In Lopes, C. E. *Matemática em projetos*: uma possibilidade. Campinas, São Paulo: Faculdade de Educação.

Hand, D. J. (1994). Deconstructing statistical questions. *Journal of the Royal Statistical Society,* Series A. Vol. 157, n. 3: 317-356.

Maltempi, M. V. (2008). Prática pedagógica e as tecnologias de informação e comunicação (TIC). In S. Z. Pinho (Org.), *Oficinas de Estudos Pedagógicos: reflexões sobre a prática do ensino superior* (pp.157-169). São Paulo: Cultura Acadêmica.

Mendes, C. R.; Brumatti, R. N. M. (2003). Parâmetros Curriculares e Acadêmicos em Ação: uma proposta para o ensino de estatística através de projetos. In *Anais da XI Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM – Educação Matemática & Desafios e Perspectivas*. Blumenau, Santa Catarina, Brasil.

Mendonça, L. O. (2008). *A educação estatística em um ambiente de modelagem matemática no Ensino Médio.* Dissertação Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

Mendonça, L. O.; Lopes, C. E. O. (2010). Trabalho com educação estatística no Ensino Médio em um ambiente de Modelagem Matemática. In *Estudos e Reflexões em Educação Estatística* (pp 157-162). Campinas, SP: Mercado de Letras.

Moore, D. S. (1997). *Statistics: Concepts and Controversies*. New York: Freeman.

Nagamine, C. M. L., Silva, C. B. & Santana, E. (2010). Planeta Água. In I. M. Carzola & E. Santana (Orgs.), *Do tratamento da informação ao letramento estatístico* (pp. 45.-64). Itabuna: Via Litterarum. (Alfabetização Matemática, Estatística e Científica).

Pavanello, R. M. (2003). A Pesquisa na Formação de Professores de Matemática para a Escola Básica. *Educação Matemática em Revista*, v. 10, n. 15, 8-13.

Ponte, J. P. (1990). *Computador, um instrumento da educação*. Lisboa: Texto Editora.

Silva, C. B. (2007). *Pensamento estatístico e raciocínio sobre variação:* um estudo com professores de matemática. Tese Doutorado, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

Sousa, O. (2002). Investigações estatísticas no 6º ano. In GTI (Ed.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 75-97). Lisboa: APM.

Tajra, S. F. (2002). *Internet na educação/o professor na Era Digital*. São Paulo: Érica.

Viali, L. (2004). Uma avaliação do recurso planilha para o ensino de probabilidade. In *Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática – GT 12 – Ensino de Probabilidade e Estatística*, Recife, Brasil. Acedido em 13 dez. 2012, em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/12/CC11851686053.pdf>

Wild, C.; Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67, 223-265, 1999. Acedido em 05 dez, em: <http://www.stat.aucland.ac.nz/~iase/publications/isr/99.wild. pfannkuch.pdf>

FERNANDES, J. A., VISEU, F., MARTINHO, M. H. & CORREIA, P. F. (ORGS.) (2013). *ATAS DO III ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA*. BRAGA: CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DO MINHO.

O CONHECIMENTO DE FUTUROS PROFESSORES SOBRE AS INVESTIGAÇÕES ESTATÍSTICAS A PARTIR DA ANÁLISE DE EPISÓDIOS DE SALA DE AULA

Ana Henriques & *Hélia Oliveira*
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
achenriques@ie.ul.pt; hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo. Este artigo apresenta os resultados preliminares de um estudo que pretende analisar o conhecimento de futuros professores do 3.º ciclo e do ensino secundário para ensinar estatística através de investigações. Esse conhecimento é analisado a partir de uma reflexão escrita de uma das futuras professoras que incide sobre a análise de episódios de sala de aula que lhe foram apresentados, tendo por base um quadro teórico que articula dois domínios: o conhecimento estatístico do professor para ensinar e o pensamento estatístico. A análise de dados evidencia diversos aspetos do conhecimento estatístico para ensinar da futura professora, nas diferentes dimensões do modelo, sendo as categorias relativas à variação e à integração da estatística e do contexto as que estão menos presentes. Apesar das limitações decorrentes das características da tarefa e da situação em que esta é realizada, esta proposta permite perceber a potencialidade da discussão de casos de sala de aula para promover o conhecimento dos futuros professores para ensinar as investigações estatísticas.

Palavras-chave: Conhecimento estatístico para ensinar; Formação inicial de professores; Investigações estatísticas; Pensamento estatístico.

Introdução

As mudanças curriculares têm tentado acompanhar a crescente importância atribuída à estatística e, neste sentido, um pouco por todo o mundo, as recomendações vão no sentido de valorizar um ensino através de investigações estatísticas, que vá mais além do conhecimento matemático e da compreensão dos conceitos e procedimentos e que permita desenvolver o pensamento estatístico dos alunos (Ben-Zvi & Garfield, 2004; GAISE, 2005; NCTM, 2007; Groth & Bargagliotti, 2012).

No panorama nacional, o atual Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) atribui um maior destaque à estatística e apresenta objetivos de aprendizagem mais exigentes, desde os níveis mais elementares, colocando a ênfase na "análise exploratória de dados e no envolvimento progressivo dos alunos em experiências de natureza investigativa desde os primeiros anos de escolaridade" (Martins & Ponte, 2010, p. 12).

Esta alteração de perspetivas revela-se bastante desafiadora para os professores dado que no ensino da estatística têm sido, principalmente, valorizados "a aprendizagem da representação de dados em tabelas e gráficos e o cálculo de medidas estatísticas como médias e medianas" (Martins & Ponte, 2010, p. 11), sendo menos abordados alguns aspetos fundamentais inerentes ao método estatístico, mais complexos, como a formulação de questões ou o planeamento e recolha de dados (Shaughnessy, 2007).

Estas dificuldades evidenciam a necessidade de dar atenção à formação inicial dos professores, ajudando-os a desenvolver um conhecimento estatístico para ensinar este tema (Burgess, 2010). Vários estudos têm-se debruçado sobre o conhecimento do professor em tópicos específicos da estatística, tais como a média e/ou mediana (Jacobbe & Carvalho, 2011), no entanto, com a ênfase do desenvolvimento de capacidades de raciocínio e pensamento estatístico, para além de compreender vários conceitos estatísticos, os futuros professores precisam de ter experiência e desenvolver uma compreensão aprofundada do próprio processo estatístico.

Nesta comunicação apresentamos um estudo que pretende analisar os aspetos que se evidenciam do conhecimento de futuros professores para ensinar estatística através de investigações, num módulo de uma disciplina de Didática da formação inicial de professores para o 3.º ciclo e ensino secundário, onde este tópico foi trabalhado. Na presente comunicação centramo-nos apenas no caso de uma das futuras professoras envolvidas no estudo.

1. Conhecimento estatístico para ensinar

Diversos modelos têm vindo a ser desenvolvidos relativamente ao conhecimento que o professor necessita para ensinar Matemática e, em particular, Estatística. Um dos modelos sobre o conhecimento matemático do professor para ensinar foi desenvolvido por Ball, Thames e Phelps (2005) e que assenta em duas grandes dimensões: conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo. Relativamente à primeira destas, ao apresentarem duas componentes distintas (conhecimento comum do conteúdo e conhecimento especializado do conteúdo), os autores enfatizam a especificidade do conhecimento matemático que o professor precisa desenvolver, nomeadamente para dar significado e avaliar os métodos pouco convencionais dos alunos, e que vai para além daquele que qualquer pessoa com formação matemática em determinada área possui.

Para Shulman (1986) o conhecimento do professor deve ser estudado em função da disciplina que ensina, uma vez que cada área de conhecimento possui especificidades próprias. Embora a estatística esteja integrada nos currículos de Matemática, vários investigadores têm argumentado a favor da sua especificidade, dadas as reconhecidas diferenças entre o pensamento estatístico e o raciocínio matemático (Pereira-Mendoza, 2002; delMas, 2004). Neste sentido, Groth (2007) argumenta que essas diferenças, habitualmente, não são contempladas na investigação sobre o conhecimento do professor, mas reconhece as potencialidades dos modelos sobre o conhecimento para ensinar matemática na definição de um modelo de conhecimento para ensinar estatística. Estas diferenças servem também de justificação a Burgess (2007) para afirmar que os modelos utilizados para analisar o conhecimento matemático do professor são inadequados para examinar o conhecimento do professor para ensinar estatística e para desenvolver *um quadro teórico* para examinar o conhecimento profissional do professor que tem em conta as necessidades específicas do ensino e aprendizagem da estatística.

Burgess (2007) parte das dimensões de conhecimento matemático para ensinar descritas por Hill, Schilling e Ball (2004) e Ball, Thames e Phelps (2005), anteriormente referidas, e cruza-as com as dimensões do pensamento estatístico incluídas no modelo de Wild e Pfankuch (1999), propondo uma matriz para analisar o conhecimento estatístico para ensinar no domínio das investigações estatísticas (Figura 1). Nas colunas da matriz, Burgess considera quatro dimensões que correspondem ao tipo de conhecimento que considera necessário para ensinar: conhecimento comum do conteúdo, conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento do conteúdo e dos alunos e conhecimento do conteúdo para ensinar. O *conhecimento comum do conteúdo* refere-se a um tipo de conhecimento que não é característico apenas do professor mas comum às profissões que fazem e utilizam a Matemática (Hill et al., 2004; Ball et al., 2005). Este tipo de conhecimento inclui a capacidade de o professor realizar o trabalho proposto aos alunos e de usar conceitos e notações corretamente, assim como de identificar as respostas erradas dos alunos ou as definições imprecisas nos manuais escolares. O *conhecimento especializado do conteúdo* refere-se à capacidade do professor de analisar a adequabilidade das produções dos alunos às situações, particularmente se o aluno fez alguma coisa não habitual e de um modo não expectável. Inclui a capacidade de justificar os processos e representações utilizadas, por exemplo, a escolha da medida mais apropriada para um dado conjunto de dados e de compreender a razão dos erros dos alunos, do ponto de vista dos conhecimentos estatísticos. O *conhecimento do conteúdo para ensinar* concilia o conhecimento do conteúdo matemático com as metodologias adequadas para ensinar cada tópico, permitindo ao professor, por exemplo, saber como iniciar determinado tópico matemático e como desenvolvê-lo em sala de aula de modo a promover a aprendizagem dos alunos. Refere-se também à capacidade do professor de selecionar tarefas apropriadas aos objetivos definidos e de as sequenciar, assim como de reconhecer as vantagens e desvantagens no uso de diferentes representações. No que se refere ao *conhecimento do conteúdo e dos alunos*, combinando o conhecimento dos seus alunos com o conhecimento sobre estatística, os professores são capazes de antecipar o que os alunos pensam sobre um determinado aspeto dum conteúdo, as dificuldades que podem sentir e as suas motivações. Esta componente relaciona-se também com o conhecimento do professor acerca do pensamento matemático dos alunos, incluindo o conhecimento das conceções adequadas ou erróneas que possam apresentar.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3"></td><td colspan="4">Conhecimento estatístico para ensinar</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conhecimento do conteúdo</td><td colspan="2">Conhecimento pedagógico do conteúdo</td></tr>
<tr><td>Conhecimento comum do conteúdo</td><td>Conhecimento específico do conteúdo</td><td>Conhecimento do conteúdo e dos alunos</td><td>Conhecimento do conteúdo para ensinar</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Tipos de Pensamento</td><td>Necessidade dos dados</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Transnumeração</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Variação</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Raciocínio com modelos</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Integração da estatística e contexto</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ciclo Investigativo</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ciclo interrogativo</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Disposições</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Figura 1. Quadro conceptual para o conhecimento do professor para ensinar estatística através de investigações (Burgess, 2007).

Estas dimensões são depois examinadas em relação aos seguintes aspetos fundamentais do pensamento estatístico (Wild & PfannKuch, 1999): pensamento estatístico fundamental (tipos de pensamento); duas componentes do processo de investigação estatística (ciclos investigativo e interrogativo) e disposições relativamente à estatística. As componentes do seu modelo, no que diz respeito aos tipos de pensamento, incluem, nomeadamente: (1) o reconhecimento da necessidade de dados e perceber que quanto mais dados se tiver melhores conclusões podem ser retiradas; (2) transnumeração – ser capaz de representar os dados de várias formas de modo a ganhar mais significado dos dados; (3) consideração da variação – que influencia a realização de julgamentos a partir dos dados e envolve procura e descrição de parâmetros na variação e tentar compreendê-los em relação ao contexto (reconhecendo e compreendendo a variação nos dados); (4) raciocínio com modelos – desde os mais simples (como gráficos ou tabelas) até aos mais complexos, pois permitem encontrar padrões e sumariar dados de formas múltiplas e usar ‘modelos’ para raciocinar mais aprofundadamente sobre o problema; e (5) integrar a estatística e o contexto – fazer ligações entre os dois, como uma componente essencial do pensamento estatístico, considerando o contexto do problema e como esse contexto se articula com o conhecimento estatístico.

Juntamente com estes tipos de pensamento fundamentais há outros mais gerais que podem ser considerados parte da resolução de problemas (mas não exclusivamente da resolução de problemas estatísticos): o ciclo investigativo (problema, plano, dados, análise e conclusões) – os "procedimentos com que o estatístico trabalha e o que o estatístico pensa de modo a aprender mais da esfera do contexto" (PfannKuch & Wild, 2004, p. 41); o ciclo interrogativo (gerar, procurar, interpretar, criticar e julgar) – "...um processo de pensamento genérico que está em constante uso pelos estatísticos quando levam a cabo um diálogo constante com o problema, os dados e eles próprios" (idem); e disposições – tais como ceticismo e imaginação (para nomear apenas dois) (Wild & PfannKuch, 1999).

A integração destes dois domínios revela a singularidade deste quadro de análise, descrito detalhadamente em Burgess (2009), que vai mais além dos quadros existentes para o domínio da Matemática abordando o trabalho especificamente estatístico. Cada célula da matriz descreve a categoria do conhecimento do professor para ensinar estatística em relação a um aspeto do pensamento estatístico e, deste modo, ajuda a identificar e descrever qual o conhecimento necessário na sala de aula e tem sido utilizado para examinar a competência em lidar com investigações estatísticas.

Diversos estudos com professores de diferentes níveis de escolaridade revelam as dificuldades destes na realização de investigações estatísticas com os seus alunos, apontando a necessidade de desenvolverem um conhecimento robusto nesta área (Heaton & Mickelson, 2002; Lee & Mojica, 2008). Estes autores referem que os professores tendem a centrar-se nos aspetos mais procedimentais do trabalho, perdendo oportunidades para aprofundar o raciocínio estatístico dos alunos, o que evidencia a importância de a formação inicial de professores dar atenção ao desenvolvimento do conhecimento estatístico para ensinar (Burgess, 2010).

2. Contexto e métodos

O estudo exploratório que apresentamos, de natureza qualitativa e interpretativa, encontra-se em fase de desenvolvimento e foca-se, nesta comunicação, no conhecimento estatístico para ensinar que uma futura professora do 3.º ciclo e do ensino secundário evidencia, através de uma reflexão escrita, no final de um módulo da unidade curricular de Metodologia do Ensino da Matemática (MEM) onde o tema foi abordado.

Esta unidade curricular, de caráter marcadamente didático, tem como propósito criar um espaço de reflexão, discussão e problematização em torno de temas e questões fundamentais do currículo de Matemática e da prática letiva do professor, no âmbito do ensino e da aprendizagem dos seus principais tópicos no 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário. Em particular, e no que respeita ao tema da Estatística, pretende proporcionar aos futuros professores oportunidades para desenvolverem um conhecimento sobre como ensinar investigações estatísticas. Neste sentido, os futuros professores puderam experienciar o processo investigativo através da realização de uma investigação e discutir as principais orientações didáticas para a exploração de tarefas, em sala de aula, que permitem desenvolver um conjunto de capacidades fundamentais ao raciocínio estatístico, como formular questões de natureza estatística, planear e recolher dados, escolher apropriada e intencionalmente representações e medidas estatísticas para a análise de dados e comparar diferentes conjuntos de dados.

A análise de casos de sala de aula é um método de ensino usado na formação de professores com grandes potencialidades para preparar os professores na tomada de decisões pedagógicas em ambientes complexos de sala de aula (Groth & Xu, 2011). Deste modo, foi proposta aos futuros professores a análise de um caso constituído por episódios de sala de aula que fornecem uma visão das tentativas de um professor para aprofundar o raciocínio estatístico dos seus alunos, em diferentes fases de uma investigação estatística, através de excertos dos diálogos entre eles (retirados de Shaughnessy, Chance & Kranendonk, 2009). Os episódios propostos para análise dizem respeito a uma investigação que envolve a análise de dados de censos da população de três países (Estados Unidos da América, Quénia e Japão). Os alunos usam ali uma variedade de representações dos dados das populações, como tabelas, histogramas e diagrama de extremos e quartis e algumas medidas estatísticas, como percentagens, medianas e quartis e focam-se na descoberta e explicação de padrões nos dados e nas diferenças ou semelhanças entre as distribuições das idades da população dos três países. O objetivo do questionamento do professor, nas discussões relatadas nestes episódios, é levar os alunos a desenvolver o seu raciocínio estatístico, para lá da simples capacidade computacional que devem ter, interpretando dados no processo de exploração e a aperceberem-se da constante ação recíproca entre dados e contexto.

Neste âmbito, os alunos (10 futuros professores) foram solicitados a realizar uma reflexão escrita tendo por base a análise de episódios de sala de aula, com o objetivo de avaliar em que medida evidenciavam: (a) compreender e caracterizar as principais fases de uma investigação estatística, como se relacionam e a importância de cada uma delas no desenvolvimento do raciocínio estatístico dos alunos; (b) compreender as principais ações do professor no que diz respeito ao ensino e aprendizagem de investigações estatísticas; (c) reconhecer as principais dificuldades dos alunos na realização de investigações estatísticas e de propor formas de as ultrapassar; e (d) ser capazes de analisar as potencialidades das investigações estatísticas no ensino da Estatística.

As reflexões escritas dos futuros professores serviram de base a este estudo e foram analisadas de forma descritiva e interpretativa, tendo como referência o quadro conceptual que Burgess (2007, 2009) apresenta para caracterizar o conhecimento estatístico para ensinar. No entanto, uma vez que o estudo incide sobre a análise que os futuros professores fazem de situações de sala de aula, e não sobre a sua prática letiva, a dimensão das *disposições* não foi contemplada na análise. De facto, segundo Burgess (2009) as disposições não se evidenciam tanto no que o professor diz mas mais no modo como o diz. Além disso, considerando os objetivos da tarefa proposta aos futuros professores, centrados no processo de ensino e aprendizagem das investigações estatísticas, também o conhecimento comum do conteúdo não é explicitado na análise realizada. Assim, os segmentos das reflexões foram codificados em relação a uma das três dimensões do conhecimento do professor (conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento do conteúdo e dos alunos e conhecimento do conteúdo para ensinar) e, simultaneamente, em relação a uma das categorias do pensamento estatístico (tipos de pensamento e respetivas componentes, ciclo investigativo e ciclo interrogativo). Alguns segmentos têm múltiplos códigos 'anexados' sempre que mais de uma dimensão do conhecimento se evidencia.

Na secção seguinte apresentamos uma caracterização de uma futura professora, Maria (pseudónimo), e do seu conhecimento estatístico para ensinar, ilustrada através de excertos da sua reflexão.

3. O caso Maria

3.1. A futura professora

Maria é uma aluna do 2.º ano do curso de mestrado em ensino da Matemática. Durante as aulas, mostrou-se sempre bem-disposta, comunicativa, direta nas suas opiniões e empenhada em aprender e em refletir sobre essas aprendizagens. As suas motivações para a escolha deste curso estão relacionadas com a importância que atribui a uma boa preparação dos professores, nas diversas dimensões do conhecimento, na melhoria das aprendizagens dos alunos, como refere: "Um dos meus objetivos ao vir aqui para o mestrado em ensino era perceber a melhor maneira de abordar determinados assuntos e perceber também algumas dúvidas que os alunos tivessem e como contornar essas dúvidas".

No que diz respeito à unidade curricular de MEM, em particular as aulas que foram dedicadas ao tema da Estatística e às abordagens de ensino utilizadas, Maria reconhece que a ajudaram a colmatar algumas fragilidades que julga ter na sua formação em relação a este tema que considera ter especificidades próprias:

> As aulas de Metodologia foram muito importantes e muito interessantes e despertaram-me para determinadas coisas. O professor de Matemática não é propriamente a pessoa, se

> calhar, mais preparada para dar Estatística porque há aqui coisas diferentes, linguagens diferentes, maneiras de pensar diferentes e as aulas de Metodologia foram muito úteis para nos despertar para a maneira de como devemos abordar a Estatística. Não estou a dizer que estou preparada mas ajudou-me muito. O trabalho também, porque (...) estes trabalhos ajudam-nos a pensar como se deve fazer e a consolidar os conhecimentos.

Realça assim também o papel da reflexão escrita ("o trabalho") na sua aprendizagem.

3.2. O conhecimento estatístico para ensinar

Com base na reflexão escrita de Maria, foi possível caracterizar alguns aspetos do seu conhecimento estatístico para ensinar em relação a cada uma das categorias do pensamento estatístico.

Necessidade de dados. No episódio de sala de aula fornecido para análise, a investigação começa com a formulação de questões a investigar a partir de um conjunto de dados já disponíveis. No entanto, durante o ciclo investigativo, surgiram novas questões que conduziram à necessidade de obter mais dados, situação que foi aproveitada pelo professor para substituir o momento inicial de recolha de dados.

Na sua reflexão escrita, Maria compreende que os dados disponíveis não são adequados nem suficientes para responder às questões entretanto formuladas pelos alunos e concorda com a necessidade de levá-los a procurar dados que fundamentem o seu raciocínio estatístico. A este propósito, salienta uma passagem no episódio de sala de aula em que "o professor (...) está a mostrar aos alunos que por vezes são necessários mais dados para se chegar a melhores conclusões" e acrescenta que "deve discutir-se com os alunos a informação que é necessária para tomar uma decisão válida ou tirar uma conclusão fundamentada". Deste modo, a futura professora evidencia *conhecimento especializado do conteúdo* e concilia-o com o *conhecimento do conteúdo para ensinar*, reconhecendo a necessidade e a importância das discussões para desenvolver nos alunos essa mesma compreensão sobre os dados.

Transnumeração. Maria evidencia *conhecimento especializado do conteúdo*, relativamente a esta categoria, em vários momentos da sua reflexão. Quando a futura professora refere que podem ser usadas "outras medidas, os quartis, que localizam outros pontos da distribuição dos dados e que servem para definir a variabilidade existente entre os dados" mostra que é capaz de reconhecer a adequabilidade de certas medidas para sumariar os dados, evidenciando *conhecimento especializado do conteúdo*. Este conhecimento também se manifesta ao se mostrar capaz de avaliar se as medidas, as representações e as articulações entre elas são usadas de forma apropriada pelos alunos, como mostram os exemplos seguintes:

> Os alunos fazem uma correta interpretação da mediana e conseguem, com sucesso, relacioná-la com o histograma e o diagrama de extremos e quartis.

> Os alunos fazem uma boa articulação entre os histogramas e as tabelas conseguindo, deste modo, chegar com sucesso ao histograma que corresponde a cada país.

Num outro exemplo, em relação às frequências relativas, a futura professora também evidencia este tipo de conhecimento quando explica porque é que o uso desta medida é mais adequada que as frequências absolutas: "Se [os alunos] olhassem os números em valores absolutos poderiam cometer erros porque os valores dos Estados Unidos estão em milhares e os do Quénia e do Japão estão em milhões".

Apesar de ser capaz de justificar a escolha de uma representação ou medida, na sua reflexão, refere que "como professora sinto alguma dificuldade no sentido de os levar à escolha certa", reconhecendo que ainda tem algumas fragilidades no seu *conhecimento do conteúdo para ensinar*. No entanto, Maria evidencia este tipo de conhecimento quando identifica o nível de escolaridade dos alunos de um episódio em sala de aula, com base nas representações e medidas que aí são abordadas e no conhecimento que tem do currículo: "Tendo em conta as medidas de tendência central e de dispersão abordadas nesta investigação e também as representações, parece-me que estes alunos frequentam o 3.º ciclo do ensino básico". Num outro exemplo, reconhece que a representação usada pelos alunos ajudou-os a darem sentido à informação disponibilizada: "O professor diz que vão acrescentar algumas colunas (...). Ao acrescentarem as percentagens nas tabelas os alunos fazem uma análise mais detalhada, notando-se que estabelecem relações e comparações entre os dados assim como fazem também interpretações levando a conjeturas". Quando questionada sobre o que faria de diferente em relação ao professor do episódio de sala de aula, dá sugestões para levar os alunos a desenvolver capacidades de transnumeração e para abordar outros tópicos programáticos em articulação com as representações:

> Perguntar aos alunos se achavam que fazia sentido os dados estarem organizados em classes. Em que circunstâncias se organizam dados em classes? Deste modo iria recordar conceitos relativos ao tipo de variáveis.
>
> Dependendo do ano de escolaridade dos alunos poderíamos também analisar a amplitude interquartil e o desvio padrão. Com base no histograma poderíamos abordar diferentes formas de distribuição da população.

Maria é capaz de antecipar dificuldades e conceções erradas que os alunos podem apresentar na utilização de diversas representações e na seleção da mais adequada para representar os dados, quando faz as seguintes afirmações, na sua reflexão, indicando que tem *conhecimento do conteúdo e dos alunos*:

> Para muitos alunos não é fácil perceber que o histograma representa os dados através das áreas das barras e não das alturas.
>
> [O diagrama de extremos e quartis] é mais difícil (...). Parece-me uma representação menos intuitiva.
>
> Parece-me difícil para os alunos chegarem às representações mais adequadas.

Esta categoria do conhecimento também está presente quando Maria reconhece as dificuldades que os alunos poderiam ter na utilização das percentagens na comparação de dois conjuntos de dados, evidenciando um conhecimento acerca do pensamento matemático dos alunos: "Achei interessante os alunos fazerem comparações continuando a olhar para as percentagens, o que mostra já uma certa maturidade na análise dos dados".

Variação. O conhecimento estatístico para ensinar nesta categoria não está muito presente na reflexão de Maria. A única dimensão do conhecimento identificada é o c*onhecimento do conteúdo e dos alunos*, quando a futura professora prevê as dificuldades dos alunos ao lidarem com a variação dos dados e refere: "Com um tão grande volume de dados é possível que os alunos tenham alguma dificuldade, nomeadamente na procura de regularidade entre os dados e a identificação de diferenças no sentido de descrever (...) a [sua] variabilidade".

O facto de, no episódio de sala de aula analisado, os dados serem referentes a populações, em vez de amostras, poderá limitar o surgimento de situações onde os alunos façam uso deste importante aspeto do pensamento estatístico, nomeadamente ajuizando sobre os dados e fazendo generalizações.

Raciocínio com modelos. Maria compreende a importância da utilização de modelos apropriados (gráficos, tabelas, medidas sumárias e uso da tecnologia) para dar sentido aos dados e ajudar os alunos no desenvolvimento do seu raciocínio. No excerto seguinte da sua reflexão, evidencia c*onhecimento do conteúdo para ensinar* ao concordar com a abordagem adotada pelo professor do episódio de sala de aula em análise, quando apresenta em paralelo os diagramas de extremos e quartis relativamente a três populações que estavam a ser comparadas. Maria considera-a adequada (porque "mais fácil") para incentivar os alunos a focarem-se nos aspetos fundamentais que permitem fazer essa comparação:

> O professor apresentou os diagramas de extremos e quartis em paralelo o que permite de uma forma mais fácil comparar estas três amostras, fazendo sobressair as semelhanças e diferenças entre a forma como os dados se distribuem, permitindo comparar a localização da mediana e dos quartis para as diferentes amostras, assim como a maior ou menor dispersão dos dados. Os alunos, também neste caso, conseguiram fazer uma correta articulação entre as tabelas e estes diagramas.

Além disso, quando identifica e argumenta sobre o uso apropriado que os alunos fazem de modelos está também, de forma indireta, a evidenciar c*onhecimento especializado do conteúdo*.

Este conhecimento parece estar relacionado com a capacidade de Maria interpretar o discurso dos alunos, levando-a a tirar ilações e a antecipar as dificuldades que apresentam no raciocínio com modelos, isto é, do seu c*onhecimento do conteúdo e dos alunos*, como evidenciado no exemplo seguinte da sua reflexão:

> Em relação ao diagrama de extremos e quartis um aluno diz explicitamente que "*fornecem um modelo eficiente para se ver a variabilidade da população. Acho que visualmente é a forma mais forte de se representar os dados*".

O *conhecimento do conteúdo para ensinar* nesta categoria volta a evidenciar-se em outros momentos da reflexão da futura professora, quando defende e justifica o uso da tecnologia para facilitar a construção de representações gráficas e o cálculo de medidas, permitindo que os alunos se foquem na aprendizagem dos conceitos:

> O professor fez bem em apresentar o histograma e o diagrama [de extremos e quartis] já feitos. Deste modo a discussão foi mais viva e sem interrupções. Com o desenvolvimento dos meios tecnológicos, cada vez faz mais sentido ensinar Estatística, centrando a atenção nos conceitos e não na forma de os calcular.
>
> Antes de iniciar o momento 2, recorrendo às novas tecnologias, nomeadamente uma folha Excel, os alunos poderiam calcular a média e a mediana, compará-las e explorar o seu comportamento quando se modificassem alguns dados.

Integração da estatística e contexto. Na sua reflexão, Maria é capaz de identificar várias situações no episódio de sala de aula em que os alunos se apoiam no que as estatísticas revelam e no contexto para formular conjeturas. No excerto seguinte refere-se a um exemplo em que, através do cálculo de percentagens, os alunos identificam um padrão nos dados que os leva a formular conjeturas sobre o contexto que o originou:

> Ao acrescentarem as percentagens nas tabelas, os alunos (...) estabelecem relações e comparações entre os dados assim como fazem também interpretações levantando conjeturas em relação ao passado. (...) A análise e interpretação dos dados levou estes alunos a estabelecer novas relações e conjeturas – um aluno refere que "*O Quénia provavelmente tem um maior desafio no cuidar dos jovens. O Japão tem também um desafio semelhante no cuidar dos mais idosos".*

O *conhecimento especializado do conteúdo* é, assim, necessário para Maria fazer esta interpretação da atividade dos alunos. Embora reconheça, por diversas vezes, a importância de levar os alunos a compreender o papel do contexto na análise de dados e saliente que "deste modo [através das investigações] poderia aproveitar para os [alunos] lembrar que os dados são mais que números, são números num contexto", não é evidente como o faria e, portanto, não se identificam na sua reflexão outras categorias do conhecimento.

Ciclo investigativo. Embora não seja possível avaliar a capacidade de Maria de realizar a sua própria investigação estatística, nomeadamente na formulação de questões, no planeamento e recolha de dados e sua análise para responder às questões, esta evidencia saber identificar e caracterizar as fases de uma investigação estatística e reconhecer a sua presença no trabalho desenvolvido pelos alunos no episódio de sala de aula, como se pode observar nos excertos seguintes da sua reflexão:

> Penso estar-se na fase final da investigação. Uma investigação estatística (...), tendo duas fases iniciais que neste texto são pouco desenvolvidas. Estou a referir-me à "definição do problema e formulação de questões a investigar" e "Planificação e realização da recolha de dados". Estas etapas parecem-me muito importantes, mas também com um grau de dificuldade elevado para mim como professora.
>
> Como já referido atrás, nesta investigação os alunos passaram por todas estas etapas, o que revela terem adquirido algum raciocínio estatístico.

Deste modo revela c*onhecimento especializado do conteúdo.* Maria mobiliza-o também para avaliar o trabalho desenvolvido em cada uma das fases de uma investigação, nomeadamente a correção dos problemas/questões formuladas e a adequabilidade dos métodos de recolha de dados, explicando as suas características. Por exemplo, a futura professora alerta para a necessidade de as questões terem uma natureza estatística e de um planeamento e recolha de dados adequados para uma análise posterior:

> Esta investigação pareceu-me bem conduzida. (...) Na primeira etapa terá que haver cuidado com as questões a colocar e verificar se têm natureza estatística. A segunda, que envolve a recolha de dados, obriga a que exista um plano bem definido e com técnicas de recolha de dados apropriadas.

A futura professora afirma-se surpreendida com o trabalho desenvolvido pelos alunos no episódio de sala de aula, uma vez que está consciente das dificuldades que estes também enfrentam, habitualmente, neste tipo de tarefa: "Não tenho qualquer experiência de trabalhar com alunos no âmbito da [investigação] estatística, mas de qualquer modo fiquei surpreendida com estas intervenções na sala de aula". Acrescenta ainda, em relação ao planeamento e recolha de dados, que a considera uma etapa fácil do ciclo investigativo para trabalhar com os alunos mas que é possível concretizar desde que eles se mostrem interessados no tema a investigar: "Esta segunda etapa parece-me mais fácil mas de grande dificuldade de acordo com o empenhamento dos alunos". Nestes exemplos, a futura professora mostra *conhecimento do conteúdo e dos alunos*, identificando os aspetos de uma investigação estatística que são problemáticos ou desafiantes para os alunos.

Para além disso, Maria associa o sucesso dos alunos (que a surpreendeu) a um trabalho regular e específico realizado pelo professor na sala de aula, usando um conjunto de estratégias didáticas que descreve e parece conhecer, revelando *conhecimento do conteúdo para ensinar*: "Suponho que, da parte deste professor, tem havido um trabalho continuado, nomeadamente realizando atividades de investigação e tarefas que enfatizam o raciocínio, o pensamento estatístico, a interpretação e a capacidade crítica de reflexão".

Ciclo interrogativo. Num momento do episódio de sala de aula é evidenciado o envolvimento dos intervenientes no ciclo interrogativo e Maria comenta, da seguinte forma, a ação do professor perante a sugestão de um aluno de usar percentagens:

> O professor intervém [aproveitando a sugestão do aluno], e com o seu questionamento levou os alunos a passarem das frequências absolutas para as percentagens. Ao acrescentarem as percentagens nas tabelas os alunos (...) estabelecem relações e comparações entre os dados assim como fazem também interpretações levantando conjeturas em relação ao passado.

Deste modo, a futura professora mostra *conhecimento especializado do conteúdo*, embora de forma indireta, e *conhecimento do conteúdo para ensinar*, referindo "a forma de intervir do professor pareceu-me correta" na medida em que identifica que a abordagem sugerida pelo aluno para lidar com os dados é mais útil para permitir a procura de padrões nos dados e a interpretação posterior dos resultados e que “neste diálogo existe um envolvimento do aluno e do professor mostrando este que procura compreender as ideias dos alunos e ajudá-los a progredir”.

3.3. Síntese do perfil de Maria

O quadro da figura 2 apresenta o ‘perfil’ de Maria, que resume os aspetos do conhecimento estatístico para ensinar que foram identificados na sua reflexão escrita (células sombreadas).

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3"></td><td colspan="3">Conhecimento estatístico para ensinar</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Conhecimento especializado do conteúdo</td><td colspan="2">Conhecimento pedagógico do conteúdo</td></tr>
<tr><td>Conhecimento do conteúdo e dos alunos</td><td>Conhecimento do conteúdo para ensinar</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Tipos de Pensamento</td><td>Necessidade de dados</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Transnumeração</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Variação</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Raciocínio com modelos</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Integração da estatística e contexto</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Ciclo Investigativo</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Ciclo interrogativo</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Figura 2. Perfil de Maria identificado na reflexão final.

Associada a cada uma das células existe, frequentemente, uma diversidade de conhecimentos pertinentes para o pensamento estatístico. Consequentemente, pelo facto de uma célula evidenciar a presença de conhecimento em relação a uma categoria do pensamento estatístico, não se pode assumir que a futura professora tenha um conhecimento completo de todos os seus aspetos. Da mesma forma, uma célula em branco não significa, necessariamente, que Maria não tenha conhecimento em relação a uma dimensão do pensamento estatístico, apenas que não o evidenciou na sua reflexão. Além disso, no processo investigativo em análise (nos episódios de sala de aula), estão presentes vários conceitos associados a uma mesma categoria do pensamento (desde a formulação de questões, recolha de dados, análise através de processos de transnumeração e conclusões). A apresentação de todos os excertos onde a futura professora evidencia conhecimento estatístico para ensinar em relação a cada uma das categorias tornaria o texto muito extenso, pelo que os exemplos apresentados não pretendem ser exaustivos.

4. A concluir

Neste estudo, o modelo conceptual adotado revelou-se útil para descrever parte das dimensões do conhecimento estatístico para ensinar de Maria. O ‘perfil’ da futura professora evidencia que a maioria das dimensões do conhecimento do professor, em relação às diversas categorias do pensamento estatístico, está presente na sua reflexão escrita resultante da análise de episódios de sala de aula. O *conhecimento especializado do conteúdo* foi o que mais se evidenciou, indicando que a futura professora tem capacidade de analisar as ideias dos alunos e avaliar se são adequadas em relação ao seu conhecimento estatístico nas várias categorias do pensamento. Este apenas não surgiu em relação à variação, o que pode indiciar, por um lado, que este conceito é novo para Maria e, por isso, ainda não está suficientemente desperta para a sua importância no desenvolvimento do pensamento dos alunos e, por outro lado, que as características dos episódios de sala de aula analisados, onde as situações em que os alunos lidam com variação são limitados porque os dados são referentes a populações em vez de amostras, podem ter limitado a possibilidade de a futura professora mobilizar tal tipo de conhecimento.

As dimensões *conhecimento do conteúdo e dos alunos* e *conhecimento do conteúdo para ensinar* são as que estão menos presentes na reflexão de Maria. No que diz respeito ao *conhecimento do conteúdo e dos alunos*, a futura professora é capaz de identificar vários desafios e reconhecer as principais dificuldades dos alunos na realização de investigações estatísticas, sobretudo em relação às categorias do pensamento que não exijam um diálogo entre dados e contexto (necessidade dos dados, integração da estatística e contexto e ciclo interrogativo). Em relação ao *conhecimento do conteúdo para ensinar*, a futura professora também é capaz de reconhecer as vantagens de diferentes abordagens metodológicas para ajudar os alunos a desenvolver o seu pensamento estatístico em várias categorias. A ausência de evidências desta dimensão do conhecimento em relação à variação e integração da estatística e contexto podem estar relacionadas com as características da tarefa e as dificuldades, já referidas acima, que foram observadas no seu conhecimento especializado do conteúdo, assim como com um ainda muito reduzido contacto com os alunos em sala de aula.

Os elementos que emergem dão, no geral, boas indicações relativamente à natureza do conhecimento que a futura professora está a desenvolver, no que diz respeito à realização de investigações estatísticas com os alunos. No entanto, o grau de profundidade e a abrangência dos aspetos do conhecimento estatístico para ensinar que emergem na sua reflexão são ainda um pouco limitados. De facto, possivelmente decorrendo das limitações do conteúdo das questões orientadoras para a reflexão e da falta de um interlocutor, a futura professora faz afirmações que se relacionam com aspetos do modelo do conhecimento adotado mas que são, por vezes, demasiado gerais e pouco concretizadas, mostrando-se ainda pouco eficazes para apoiar o raciocínio dos alunos na realização de uma investigação estatística. Como referem Groth & Xu (2011), o que se exige do professor, nesse contexto, são argumentos viáveis e defensáveis, o que remete para um outro nível e natureza da argumentação.

O ensino da estatística através de investigações é um aspeto recente nas orientações curriculares e, como tal, os futuros professores não o experienciaram na sua aprendizagem. É, pois, importante que durante a sua formação inicial sejam confrontados com situações em que tenham que realizar as suas próprias investigações, ampliando o seu próprio *conhecimento comum do conteúdo* e, consequentemente, o seu *conhecimento especializado do conteúdo* (Burgess, 2009). Esta abordagem é, aliás, recomendada e usada por vários investigadores (Heaton & Mickelson, 2002). Além disso, a formação inicial de professores deve propor situações aos futuros professores que permitam abranger, articuladamente, as várias dimensões do conhecimento estatístico para ensinar. Apesar das limitações decorrentes das características da tarefa proposta e da situação em que esta é realizada pela futura professora, evidencia-se a potencialidade da discussão de casos de sala de aula (Groth & Xu, 2011) para promover o conhecimento dos futuros professores para ensinar os seus alunos a realizar investigações estatísticas.

Este estudo exploratório constitui, contudo, apenas uma primeira etapa para compreendermos tais potencialidades na formação inicial de professores. Incidindo sobre o caso de uma única futura professora, ele é necessariamente limitado, pelo que a análise do conhecimento evidenciado pelos outros elementos da turma pode vir ajudar a compreender esta realidade. Também o facto de os futuros professores terem neste momento uma reduzida experiência de lecionação, em particular, no tema da estatística, limita bastante o desenvolvimento de dimensões importantes do seu conhecimento, pelo que será a sua prática, ancorada em experiências significativas na formação inicial, que irá ampliar e enriquecer o seu conhecimento estatístico para ensinar.

Agradecimento

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Desenvolver a literacia estatística: Aprendizagem do aluno e formação do professor* (contrato PTDC/CPE-CED/117933/2010).

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2005). Articulating domains of mathematical knowledge for teaching. Retirado a 15 dezembro de 2012 de http://wwwpersonal.umich.edu/~dball/Presentations/RecentPresentations/041405_MKT_AERA.pdf

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. B. (2004). Statistical literacy, reasoning and thinking: Goals, definitions, and challenges. In D. Ben-Zvi & J. B. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 3-16). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Burgess, T. A. (2007). *Investigating the nature of teacher knowledge needed and used in teaching statistics.* (PhD thesis, Massey University, Palmerston North, New Zealand). Disponível em: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications

Burgess, T. A. (2009). Teacher knowledge and statistics: What types of knowledge are used in the primary classroom? *The Montana Mathematics Enthusiast, 6*(1&2), 3–24.

Burgess, T. A. (2010). Using classroom video to identify development of teacher knowledge. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of 8th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8)*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

delMas, R. C. (2004). A comparison of mathematical and statistical reasoning. In D. Ben-Zvi & J. B. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 79-96). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

GAISE Report (2005). Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education. In (GAISE) Report, *A curriculum framework forPrek-12 Statistics Education*. Retirado a 13 de junho de 2010 de http://it.stlawu.edu/~rlock/gaise/

Groth, R. E. (2007). Towards a conceptualization of statistical knowledge for teaching. *Journal for research in Mathematics Education, 38*(5), 427-437.

Groth, R. E., & Xu, S. (2011). Preparing teachers through case analyses. In C. Batanero, G. Burrill, and C. Reading (eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 371-382). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Groth, R., & Bargagliotti, A. E. (2012). GAISEing into the Statistics Common Core. *Mathematics Teaching in Middle Schools*, *18*, 38-45.

Heaton, R. M., & Mickelson, W. T. (2002). The learning and teaching of statistical investigation in teaching and teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(1), 35-59.

Hill, H. C., Schilling, S., & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal, 105*(1), 11-30.

Jacobbe, T., & Carvalho, C. (2011). Teachers' understanding of averages. In C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 199-209). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Lee, H., & Mojica, G. (2008). Examining how teachers' practices support statistical investigation. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study.* Disponível em: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Martins, M. E., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa: ME-DGIDC.

ME (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: ME-DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa do original de 1998).

Pereira-Mendoza, L. (2002). Would you allow your accountant to perform surgery? Implications for education of primary teachers. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of 6th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 6)*. Voorburg, The Netherlands: International Association for Statistical Education.

Pfannkuch, M., & Wild, C. J. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. In D. Ben-Zvi & J. B. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 17-46). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. Lester (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1009). Greenwich, CT: Information Age Publishing and NCTM.

Shaughnessy, J. M., Chance, B., & Kranendonk, H. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and Sense Making in Statistics and Probability*. Reston, VA: NCTM.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

FERNANDES, J. A., VISEU, F., MARTINHO, M. H. & CORREIA, P. F. (ORGS.) (2013). *ATAS DO III ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA*. BRAGA: CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DO MINHO.

A VIDA É FEITA DE PEQUENOS NADAS!
Primeira Análise Qualitativa das Atitudes sobre a Estatística de Professores Portugueses[1]

José Alexandre Martins
Unidade de Investigação para o Desenvolvimento do Interior – UDI/IPG, CM-UTAD
jasvm@ipg.pt
Maria Manuel Nascimento
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Portugal, Centro de Matemática da UTAD (CM-UTAD)
mmsn@utad.pt
Assumpta Estrada
Universitat de Lleida, Spain
aestrada@matematica.udl.cat

Resumo. As atitudes dos professores em relação à Estatística podem ter um impacto significativo na sua formação, na sua prática letiva no que se refere ao ensino da Estatística, bem como na atitude dos futuros seus alunos. A influência das atitudes no ensino da Estatística em diferentes contextos já foi abordada em estudos prévios de Estrada et al. (2004, 2010a, 2010b) e Martins et al. (2011). O trabalho aqui apresentado é uma parte de um estudo mais alargado sobre as atitudes em relação à Estatística de professores do primeiro e segundo ciclo do ensino básico em Portugal. Neste estudo é feita uma análise qualitativa de conteúdo das razões dadas pelos professores em relação à pontuações por eles atribuídas em nove dos itens da escala usada, a Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada – EAEE (Estrada, 2002). Os resultados indicam a necessidade de continuar a trabalhar para e pelos professores, potenciando a sua formação estatística sem nunca esquecer a respetiva componente afetiva.

Palavras-chave: Investigação em educação estatística; Atitudes em relação à Estatística; Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada - EAEE; Formação de professores.

Introdução

O total empenhamento e comprometimento dos professores no processo de ensino e aprendizagem é fundamental para a implementação de qualquer mudança significativa nas formas de ensinar Estatística. Complementarmente, e para além da melhoria dos aspetos relativos aos conhecimentos estatísticos na formação, é necessário dar maior ênfase e importância a outros fatores como a motivação e as atitudes dos alunos, o que é realçado por Gal e Ginsburg (1994). Estamos plenamente convencidos de que esta afirmação é válida, não só para os alunos, incluindo os futuros professores, mas também para os professores em exercício. Assim, neste estudo analisaremos as atitudes dos professores em relação à Estatística com destaque para as razões e motivações patentes nas explicações apresentadas para a pontuação atribuída a nove dos itens da escala EAEE (Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada; Estrada, 2002). É nossa opinião que estas atitudes têm um

[1] Este texto é uma tradução livre do artigo dos mesmos autores intitulado "Looking back over their shoulders: A Qualitative Analysis of Portuguese Teachers' Attitudes Towards Statistics", publicado no *Statistics Education Research Journal* (SERJ), 11(2), 26-44, http://www.stat.auckland.ac.nz/serj, November, 2012.

papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem, pelo que julgamos ser importante estudar as razões e motivações das atitudes que lhes estão subjacentes.

Neste trabalho, começamos por apresentar um breve enquadramento sobre as atitudes em relação à Estatística e sobre a escala EAEE. De seguida é apresentada a análise dos dados qualitativos referentes às justificações relativas às pontuações atribuídas a nove itens do inquérito realizado a professores do primeiro ciclo do ensino básico português. Nesse sentido, apresentam-se as categorias para as explicações definidas, uma análise elementar e exploratória dos dados obtidos com base nas referidas categorias, bem como nas ideias sintetizadas dessa análise por forma a obter uma visão inicial das atitudes destes professores em relação à Estatística.

1. Atitudes em relação à Estatística

O processo de aprendizagem da Matemática e da Estatística envolve uma grande complexidade, na qual os fatores cognitivo e afetivo convergem. Neste último fator, as atitudes sobressaem como uma variável que exerce uma grande influência na estrutura, organização e aquisição de informação através do processo de interesse, construção de significados e armazenamento de informação na memória. Assim, as atitudes surgem como elemento chave para melhorar o processo de aprendizagem (Estrada, 2009).

Alguns aspetos teóricos e empíricos relacionados com atitudes têm sido alvo de atenção ao longo dos últimos anos, tendo surgido várias perspetivas. Para conceptualizar o domínio afetivo na educação matemática e estatística consideramos a descrição de atitudes de Philipp (2007) como sendo as formas de agir, sentir ou pensar que revelam a disposição (para agir) ou a opinião de alguém sobre o objeto de atitude. Esta abordagem sugere que as atitudes são mais cognitivas e que se alteram mais lentamente do que as emoções. Além disso, as atitudes envolvem sentimentos negativos ou positivos, que resultam de experiências vivenciadas, negativas ou positivas, ao longo da aprendizagem de um determinado tema, como é o caso da Estatística, por exemplo.

Ao longo das últimas décadas foram desenvolvidos vários instrumentos para medir atitudes em relação à Estatística. Estes estão compilados em Carmona (2004) e Estrada (2002, 2009), sendo referido por ambas as autoras que estas escalas foram validadas com amostras de alunos pré-universitários ou universitários, mas não com professores em exercício ou em formação. No entanto, Estrada (2002) propôs uma escala de atitudes em relação à Estatística – EAEE – concebida especificamente para ser aplicada a professores. Esta escala foi construída através da combinação de três escalas, nomeadamente a SAS (Roberts & Bilderback, 1980) e a ATS (Wise, 1985), ambas consideradas como das mais usuais e aceites internacionalmente, e a escala espanhola de Auzmendi (1992). Desta maneira foi criada uma lista de 36 itens, incluindo itens expressos na forma negativa e outros na forma positiva para evitar o problema da aquiescência. Estes itens foram submetidos a um painel de especialistas de cuja avaliação resultou a escala de EAEE, que é uma escala de Likert composta por 25 itens. Estes itens estão distribuídos segundo os domínios pedagógico e antropológico.

Genericamente são aceites três componentes pedagógicas do conceito de atitude (Aiken, 1970; Auzmendi, 1992; Gómez-Chacón, 2000; Olson & Zanna, 1993):

(a) Afetiva: sentimentos em relação ao objeto em questão;
(b) Cognitiva: a auto perceção da pessoa em relação ao objeto de atitude;
(c) Comportamental: a predisposição da pessoa para agir de uma determinada maneira em relação ao objeto em causa.

Estrada complementou este domínio clássico de três componentes das atitudes com outras três componentes no domínio antropológico:

(d) Social: perceção do valor da Estatística na sociedade;
(e) Educacional: interesse em aprender e ensinar Estatística;
(f) Instrumental: perceção do uso da Estatística noutras áreas.

A distribuição dos itens da EAEE segundo as componentes referidas em Estrada *et al.* (2002) é apresentada na Tabela 1.

Tabela 1 — Componentes das atitudes medidas pela escala EAEE (Estrada, 2002)

Componentes Pedagógicas	Componentes Antropológicas		
	Social	Educacional	Instrumental
Afetiva	1, 11, 25	7, 12, 23	10, 13, 16, 20
Cognitiva	2, 19, 21	4, 6, 17	3, 24
Comportamental	9, 18	8, 15, 22	5, 14

No seu estudo, Estrada (2002) comparou as atitudes em relação à Estatística de professores do ensino primário e de futuros professores primários e relacionou as suas atitudes com o género, número de disciplinas de Estatística já tidas, especialidade e número de anos de experiência de ensino em Matemática (no caso dos professores em exercício). A análise realizada indicou que os professores com maior experiência tendiam a excluir a Estatística das suas aulas, pois consideravam a Estatística mais difícil que os seus colegas mais novos. Além disso, os resultados indicaram também que os professores que nunca ou raramente usavam Estatística, na sua vida profissional, tendiam a presentar atitudes mais negativas em relação à Estatística.

Os resultados de estudos posteriores de Estrada *et al.* (2004, 2011) apresentaram atitudes neutras em relação à Estatística destes dois grupos de professores, mas com melhores pontuações nos itens relacionados com o papel instrumental da Estatística (por exemplo, no item "Percebo melhor os resultados eleitorais quando aparecem com representações gráficas") e com o valor educacional da Estatística (por exemplo, no item "Não se deveria ensinar estatística na escola"). As menores pontuações foram encontradas em itens que relacionados com a confiança na Estatística (por exemplo, no item "Pode-se manipular a realidade usando a estatística") e com o afeto (por exemplo, no item "Divirto-me nas aulas em que se ensina estatística").

Em Estrada *et al.* (2010a, 2010b) foram comparadas as atitudes em relação à Estatística de professores primários espanhóis e peruanos. Os resultados aí obtidos indicam diferentes atitudes considerando a pontuação global. Além disso, foram encontradas outras diferenças em itens específicos que sugerem a necessidade verificar o papel da Estatística na formação inicial e contínua dos professores nos dois países.

As características psicométricas desta escala foram testadas em vários contextos e através da análise de itens na perspetiva clássica, bem como do modelo de Rasch (Andrich, 1978). Complementarmente, nos estudos referidos a escala foi considerada como tendo um alto nível de consistência interna, tanto na perspetiva clássica, com um alfa de Cronbach de 0,826, como com o modelo de Rasch, com consistência por item de 0,97 e consistência por pessoa de 0,79.

2. Instrumento e amostra

Nesta secção apresentaremos com detalhe o instrumento de medida usado para a recolha de dados, bem como as principais informações sobre a amostra.

2.1. Instrumento

O questionário usado era constituído pelos itens da EAEE (Estrada, 2002) traduzidos para português. Esta tradução foi validada por um painel de especialistas (matemáticos, estatísticos, psicólogos e educadores de Matemática/Estatística). Todos os itens são compostos por afirmações a que os respondentes teriam que atribuir uma pontuação consoante o seu nível de concordância ou discordância numa escala de Likert de cinco pontos (de 1 – totalmente em desacordo; 2 – em desacordo; 3 – nem de acordo nem em desacordo; 4 – de acordo; até 5 – totalmente de acordo). Para evitar a aquiescência, dos 25 itens 14 estão expressos de forma positiva e os restantes 11 são expressos negativamente, sendo a escala revertida para estes itens para o tratamento estatístico destes dados. No sentido de discutir as atitudes dos professores em relação à Estatística e as razões e motivações subjacentes a essas atitudes, foram também incluídas perguntas abertas associadas a 9 dos itens da EAEE (Estrada, 2002) para que os respondentes pudessem explicar as suas opções de pontuação. Esses itens – 1, 3, 7, 14, 16, 19, 21, 22 e 23 – foram escolhidos pois foram os que apresentaram as médias de pontuação mais baixas nos estudos de Estrada (2002) e Estrada *et al.* (2004, 2010a, 2010b) e porque julgamos que os itens de menor pontuação permitirão obter uma melhor ideia de como planear a formação dos professores no sentido de melhorar as suas atitudes em relação à Estatística. De uma forma geral, os referidos itens abrangem as várias componentes pedagógicas e antropológicas mencionadas.

Dado que o principal objetivo das respostas abertas para explicação das pontuações atribuídas é o da análise qualitativa das componentes das atitudes em relação à Estatística dos professores, usámos a análise de conteúdo para obter um conjunto mais detalhado e organizado de explicações e analisar as suas frequências entre os professores. Dois dos autores realizaram a categorização, para cada item, baseados nas razões e motivações e nas palavras, frases e/ou parágrafos comuns dos textos apresentados nas explicações (Bardin, 2004, Krippendorff, 2004). Posteriormente, o terceiro autor, de forma independente, realizou outra categorização que depois de cruzada com a primeira deu origem às categorias principais, não tendo havido diferenças significativas entre as duas categorizações. Em cada item, e para cada tipo de atitude, positiva ou negativa, obtiveram-se entre uma a quatro categorias.

2.2. Participantes

O inquérito foi realizado entre setembro e outubro de 2010 a professores do primeiro ciclo do ensino básico a exercer no norte e centro de Portugal. Foram recolhidos e validados 493 questionários, que tinham sido distribuídos em versão impressa, e que tinham os 25 itens da EAEE pontuados. Apesar de todos terem tido oportunidade de apresentar as razões ou motivações para a pontuação atribuída nos nove itens já mencionados, apenas 175 (35%) o fizeram a pelo menos uma delas. Assim, só foram tratados estes 175 questionários, e apresentam-se de seguida algumas das características desses respondentes. Estes professores tinham idades compreendidas entre os 26 e os 62 anos, com média 46 anos e desvio padrão de 7,3, e eram maioritariamente mulheres (79%). Destes 175 professores, 41% indicaram não ter tido qualquer formação em Estatística ou que fizeram uma autoaprendizagem, enquanto os restantes indicaram ter aprendido alguma Estatística na escola.

As pontuações obtidas através da EAEE estão compreendidas entre um mínimo de 25 pontos e um máximo de 125 pontos, com um valor intermédio de 75 pontos. Os 175 professores apresentaram uma média de pontuação de 82, com desvio padrão de 11.1, e uma mediana de 83, ligeiramente acima da pontuação intermédia, correspondente a uma posição neutral. Os valores das pontuações ficaram compreendidos entre o mínimo de 50 pontos e o máximo de 111 pontos, apresentando um intervalo interquartil de 17 pontos, em que $Q_1 = 74$ e $Q_3 = 91$ pontos.

Apresentamos na Tabela 2 os resultados item por item para os 9 itens estudados. Uma vez que pretendemos apresentar as razões que distinguem as pontuações positivas das negativas, decidimos analisar apenas as explicações das pontuações que denotam uma atitude positiva (4 ou 5) ou uma atitude negativa (1 ou 2), tal como em Estrada (2007). Apesar desta análise ser exploratória, realizou-se, e apresenta-se de seguida, a categorização das razões dos professores associadas, tanto às atitudes positivas como às negativas. Parece-nos que esta abordagem para os dois tipos de atitude poderá vir a ser relevante para o desenvolvimento de estratégias para melhorar as atitudes em relação à Estatística nos professores e, consequentemente, nos seus alunos. Finalmente, apresentaremos alguns resultados da análise de conteúdo qualitativa, tendo por base as componentes apresentadas por Estrada (2002).

3. Resultados e discussão

Uma vez que os trabalhos prévios com a EAEE (Estrada, 2002) usaram essencialmente uma abordagem quantitativa, apresenta-se na Tabela 2 um resumo com a pontuação média por item, o respetivo desvio padrão, e o número de professores que atribuíram uma pontuação positiva (4 ou 5), neutral (3), ou negativa (1 ou 2) por cada um dos nove itens em análise, tal como foi feito em Estrada e Batanero (2008).

Tabela 2 — Análise geral para cada item

Item	Pontuação média	DP	Positiva	Neutra	Negativa
1*	2.80	1.06	37 (21%)	64 (37%)	74 (42%)
3*	1.97	0.98	13 (7%)	17 (10%)	145 (83%)
7	3.11	1.01	64 (36%)	73 (42%)	38 (22%)
14*	2.55	1.05	39 (22%)	42 (24%)	94 (54%)
16	2.95	1.04	49 (28%)	78 (45%)	48 (27%)
19*	4.23	0.97	144 (82%)	19 (11%)	12 (7%)
21*	4.41	0.92	152 (87%)	14 (8%)	9 (5%)
22	2.47	0.97	23 (13%)	70 (40%)	82 (47%)
23*	4.10	0.96	125 (71%)	43 (25%)	7 (4%)

* Item na forma negativa, sendo apresentadas aqui as pontuações já invertidas.

De seguida apresentamos a análise dos itens e as categorias respetivas acompanhadas de exemplos. Em cada item, se o professor não indicou qualquer razão ou explicação, nem positiva nem negativa, foi incluído na contabilização da Categoria 0 – Ausência de informação válida.

3.1. Item 1 – "Incomoda-me a informação estatística que aparece nalguns programas da TV"

Uma vez que este item está escrito na forma negativa, inverteu-se a pontuação da escala[2]. Dos 175 inquéritos validados, 64 (37%) deles não foram considerados para a análise deste item neste estudo por apresentarem pontuações neutras. Dos restantes, 37 (21% dos 175) tiveram pontuações associadas a uma atitude positiva, ou seja, indicaram estar em desacordo ou em total desacordo com a afirmação do item. Assim, 74 (42%) apresentaram pontuações associadas a uma atitude negativa e, portanto, estavam de acordo ou em total acordo com a afirmação. A Tabela 3 mostra as categorias definidas para estes dois grupos neste item, bem como as respetivas frequências.

Na análise de conteúdo realizada estabeleceu-se, para todos os itens e tanto para o grupo associado às atitudes positivas como para o associado às atitudes negativas, uma categoria 0, designada por ausência de informação, que inclui as respostas sem valor informativo e as não respostas. Ou seja, quando os professores, atribuindo pontuação ao item, indicaram uma razão ou explicação incompreensível ou descontextualizada ou não indicaram qualquer razão ou explicação para essa mesma pontuação.

[2] Por exemplo, se o professor atribuiu pontuação 5 a este item, para o tratamento estatístico, a sua inversão resultou numa pontuação de 1.

Tabela 3 — Análise de conteúdo relativo ao item 1 para as atitudes positivas e negativas

Atitudes positivas			Atitudes negativas		
Categorias	*n*	%	Categorias	*n*	%
0 – Ausência de informação	11	30	0 – Ausência de informação	12	1
1 – Sem interesse na informação televisiva	3	8	1 – Sem interesse na informação televisiva	3	4
2 – Sem confiança na informação televisiva	11	30	2 – Sem confiança na informação televisiva	19	26
3 – Com confiança na informação televisiva	12	32	3 – Com confiança na informação televisiva	40	54
	37			74	

A categoria 1 referente a atitudes positivas, na qual os professores não mostraram interesse pela informação televisiva, inclui afirmações como: *"Não estou atenta à estatística apresentada na TV"*. Na categoria 2 as respostas denotaramm falta de confiança na informação prestada pela televisão, mas não na Estatística em si, por exemplo: *"Nem sempre é fiável. Muitas vezes a amostra não é recolhida da forma mais correta"*. Em relação à categoria 3 pôde identificar-se alguma confiança na informação estatística transmitida na televisão em afirmações como: *"Não me incomoda particularmente, há dados muito interessantes e conclusões que se podem tirar deles"*.

Na categoria 0 referente a atitudes negativas foram incluídas respostas que não são elucidativas, por exemplo: *"Não me incomoda"*. Na categoria 1 agruparam-se expressões que explicam a falta de interesse na informação prestada pela televisão, tal como: *"É muita informação transmitida ao mesmo tempo"*. Na categoria 2 incluíram-se demonstrações de falta de confiança na apresentação da informação por parte da televisão, como por exemplo: *"Devido ao facto de serem impercetíveis, de não ser conhecido o público participante e de serem realizadas em áreas urbanas e não abrangerem as áreas rurais".* A categoria 3 congregou afirmações como: *"Nem sempre correspondem à realidade. Há dados estatísticos que esquecem a componente humana"*; *"Muitas vezes é manipuladora, em situações eleitorais"*.

Dado surgirem categorias com o mesmo título associadas tanto a atitudes negativas como positivas, julgamos pertinente tentar esclarecer e clarificar esta opção na análise realizada. Assim, na nossa perspetiva, neste item os professores com atitude positiva não se sentem incomodados pela eventual má utilização da Estatística nos programas da televisão pois assumem que isso é já expectável e que, à partida, essa informação será apenas parcialmente confiável. Por outro lado, no caso dos professores com atitudes negativas neste item houve a indicação de sentirem especificamente incomodados sobre o uso aí feito dos dados estatísticos. Em todo o caso, acreditamos que a televisão, bem como outros meios de comunicação, podem ser bons recursos de estudo tanto para alunos como para professores que desejem familiarizar-se com a Estatística numa tentativa de elevar o seu nível de consciência e participação cívica.

3.2. Item 3 – "Pode-se manipular a realidade usando a estatística"

O item 3 também está na forma negativa pelo que também se inverteu a pontuação. Dos 175 inquéritos validados foram eliminados da análise deste item 17 (10%) deles por apresentarem pontuações neutras. Dos outros, 13 (7%) tiveram pontuações associadas a atitudes positivas, e 145 (83%) apresentaram pontuações associadas a atitudes negativas, estando de acordo ou em total acordo com a afirmação. A Tabela 4 mostra as categorias definidas para este item, bem como as respetivas frequências.

Tabela 4 — Análise de conteúdo relativo ao item 3 para as atitudes positivas e negativas

Atitudes positivas			Atitudes negativas		
Categorias	*n*	%	Categorias	*n*	%
0 – Ausência de informação	3	23	0 – Ausência de informação	62	43
1 – Estatística como ciência	5	39	1 – Manipulação sem interesse do próprio	38	26
2 – Manipulação/desonestidade	5	38	2 – Manipulação intencional ou enviesada	37	25
			3 – Vulnerabilidade dos recetores	8	6
	13			145	

A categoria 0 para atitudes positivas incluiu não respostas e respostas sem informação válida ou que não acrescentaram qualquer informação com significado, como por exemplo: *"Não"*. A categoria 1 incluiu expressões basedas na ideia de que a Estatística implica rigor, que excluiu a manipulação, de que é exemplo: *"A estatística apresenta dados exatos"*. A categoria 2 agregou afirmações relacionadas com manipulação ou desonestidade centrada nas pessoas que utilizam a Estatística e não na Estatística em si, sendo exemplo disso a seguinte justificação: *"A realidade não se pode manipular, poderão é manipular-se os dados para que a interpretação da realidade seja outra"*.

Em termos das atitudes negativas neste item, a categoria 0, para além das ausências de explicação, englobou expressões como: *"É absurdo tudo o que Homem publica, manipula, quem lê ou estuda"*. Na categoria 1 foram enquadradas as afirmações relacionadas com a existência ou manipulação dos dados estatísticos, com especial destaque nos interesses políticos envolvidos, como está no exemplo *"Principalmente na política, antes das eleições"*. A categoria 2 englobou as afirmações que estavam relacionadas com a manipulação intencional, tanto ao nível do tratamento dos dados, como da manipulação das repostas obtidas, de que é exemplo: *"Dependendo da amostra escolhida e do tipo de perguntas efetuadas"*. As respostas que invocaram uma clara vulnerabilidade dos recetores da informação estatística para a existência da manipulação referida no item agregaram-se na categoria 3, e um exemplo é a afirmação: *"Em parte condiciona as pessoas, sobretudo as mais mal informadas e que facilmente se deixam manipular"*.

Como explicação possível para as atitudes negativas neste item surge principalmente a consideração, por parte dos professores, de que a Estatística pode ser manipulada a vários níveis, tendo por motivação os interesses, tanto de quem promove e elabora os questionários, como de quem interpreta, seleciona e transmite os resultados estatísticos finais.

3.3. Item 7 – "Divirto-me nas aulas em que se ensina estatística"

Neste item houve 73 (42%) questionários com pontuações neutras, 64 (37%) com pontuações associadas a atitudes positivas e 38 (22%) com pontuações associadas a atitudes negativas. Na Tabela 5 apresentam-se as categorias definidas para as respostas obtidas neste item e as frequências respetivas.

Tabela 5 — Análise de conteúdo relativo ao item 7 para as atitudes positivas e negativas

Atitudes positivas			Atitudes negativas		
Categorias	*n*	%	Categorias	*n*	%
0 – Ausência de informação	18	28	0 – Ausência de informação	17	45
1 – Aulas interessantes e desafiantes para o professor	22	34	1 – Falta de motivação	10	26
2 – Aulas interessantes e desafiantes para o aluno (do ponto de vista do professor)	24	38	2 – Falta de conhecimentos estatísticos	3	8
			3 – Aulas são um assunto sério	8	21
	64			38	

No grupo das atitudes positivas, a categoria 0, para além das ausências de resposta, incluíram-se respostas sem informação útil, como no exemplo: *"Não sendo em relação à economia"*. A categoria 1 agrupou respostas que refletem as opiniões dos professores sobre as aulas, sugerindo que estas são desafiantes, como por exemplo: *"Acho importante trabalhar com dados estatísticos"*. Na categoria 2 foram identificadas explicações que apresentam as aulas de Estatística como agradáveis, fáceis, importantes e motivadoras, em afirmações como: *"As aulas de estatística proporcionam trabalho interdisciplinar (germinação de sementes, hábitos alimentares, etc.)"*.

No âmbito das atitudes negativas, a categoria 0 incluíram também respostas sem informação relevante, por exemplo: *"Utilizo sempre que necessário"*. As categorias 1 e 2 abrangeram a falta de motivação ou de formação dos professores em relação à Estatística, que não lhes permitia encarar essas aulas com satisfação e prazer, ficando isto patente em frases como: *"Considero que ainda não consegui motivar-me o suficiente"*; *"Não tenho formação adequada nesta área"*. Na categoria 3 representaram-se as opiniões de que as aulas são um espaço sério, onde o divertimento não tem lugar, como por exemplo: *"Não tenho que me divertir, pois se são aulas é para aprender"*.

Neste item, os professores que expressaram uma atitude positiva demonstraram encarar de forma promissora as suas práticas letivas, em contraste com os que apresentaram uma atitude negativa, que aparentam não ter motivação e/ou de conhecimentos ao nível da Estatística e do seu ensino. Assim, no sentido de melhorar as suas atitudes parece-nos importante e necessária formação estatística para estes professores e que esta tenha por base o uso de dados reais, bem como o trabalho de projeto.

3.4. Item 14 – "Fora da escola utilizo pouco a estatística"

O item 14 também está na forma negativa pelo que a pontuação da escala também foi invertida. Neste caso foram eliminados da análise 42 (24%) questionários com pontuações neutras neste item, restando 39 (22%) associados a atitudes positivas e 94 (54%) associados a atitudes negativas. A Tabela 6 apresenta as categorias definidas, bem como as suas frequências.

Tabela 6 — Análise de conteúdo relativo ao item 14 para as atitudes positivas e negativas

Atitudes positivas			Atitudes negativas		
Categorias	*n*	%	Categorias	*n*	%
0 – Ausência de informação	17	44	0 – Ausência de informação	54	57
1 – Uso de acordo com as situações do dia a dia	9	23	1 – Não usa a Estatística (porque...)	30	32
2 – A Estatística está presente em quase todas as situações quotidinanas	12	31	2 – Só usa informação indireta	2	2
3 – Usa Estatística no trabalho mas não a reconhece presente no quotidiano	1	3	3 – Por vezes usa Estatística no quotidiano	7	7
			4 – Não tem formação estatística	1	1
	39			94	

Para o caso das atitudes positivas, a categoria 1 agregou as respostas apresentadas que estão relacionadas com o uso ou a necessidade da Estatística nas situações do dia a dia, como por exemplo: *"Utilizo na aula, no dia a dia"*. Na categoria 2 foram incluídas as afirmações que expressavam um uso habitual e regular da Estatística, tal como: *"A estatística é usada no dia a dia sem darmos por isso"*. A categoria 3 apenas incluiu a resposta: *"Na vida privada pouco preciso, mas já trabalhei noutras áreas profissionais"*.

Nas atitudes negativas neste item incluíram-se na categoria 0 respostas sem informação útil neste âmbito, como é o caso da frase: *"Não vivo de estatísticas, mas de resultados"*. Na categoria 1 agruparam-se as respostas que refletem as opiniões dos professores baseadas na ausência de necessidade, de hábito, de vontade, de tempo ou de interesse em usar Estatística, como por exemplo: *"Nunca a utilizo fora da escola. Não necessito de estatística para saber os aspetos positivos e negativos do mercado português"*. Na categoria 2 referiram-se as justificaçãoes do uso da Estatística apenas com base em informação indireta dos meios de comunicação ou do trabalho. Na categoria 3 incluíram-se afirmações como: *"Há algumas situações do dia a dia em que utilizo"*. Finalmente, a categoria 4 é constituída apenas pela única justificação: *"Não tenho formação adequada nesta área"*.

O problema da (i)literacia estatística existente em alguns professores emergiu neste item, ficando claro em muitas das suas explicações, onde é feita uma vincada distinção entre o ensino da Estatística e o seu uso no quotidiano. Como consequência do facto destes professores não terem geralmente consciência da importância da Estatística, nem do seu uso potencial no trabalho em sala de aula, é fundamental reforçar a presença da literacia estatística na formação, tanto inicial como contínua, dos professores.

3.5. Item 16 – "A estatística apaixona-me porque ajuda a ver os problemas objetivamente"

Para este item houve 78 (45%) questionários com pontuações neutras, que não foram considerados para análise, e também 49 (28%) associados a atitudes positivas e 48 (27%) relacionados com atitudes negativas. A Tabela 7 mostra as categorias e as respetivas frequências.

Tabela 7 — Análise de conteúdo relativo ao item 16 para as atitudes positivas e negativas

Atitudes positivas			Atitudes negativas		
Categorias	*n*	%	Categorias	*n*	%
0 – Ausência de informação	21	43	0 – Ausência de informação	24	50
1 – Gosto de Matemática/Estatística	4	8	1 – Não gosto de Matemática/Estatística	14	29
2 – Não é enviesada	13	27	2 – É enviesada	7	15
3 – Ajuda e é útil	11	22	3 – Manipulação	3	6
	49			48	

No âmbito das atitudes positivas neste item, a categoria 0, para além das não respostas, incluiu as justificações que não acrescentam qualquer informação, como: *"Não é bem assim"*. Na categoria 1 representaram-se os professores que revelaram a sua paixão e gosto, tanto pela Matemática como pela Estatística, como por exemplo: *"Gosto de analisar informação pela estatística"*. A categoria 2 agrupa respostas que evidenciam a objetividade e entendimento da realidade tornada possível pela Estatística: *"É uma ferramenta para analisar os assuntos com maior objetividade"*. Na categoria 3 englobaram-se justificações que referem como razão a utilidade da Estatística, como por exemplo: *"Utilizada de modo verdadeiro, sério, é uma grande maneira de trabalhar dados que de outro modo se tornariam incomportáveis de tratar"*.

No âmbito das atitudes negativas neste item, a categoria 0, para além das não respostas, incluiu respostas sem informação justificativa, como em: *"Não entendo assim"*. Na categoria 1 congregaram-se as justificações em que os professores mostraram não gostar de Estatística, como por exemplo: *"Não sinto grande paixão, pois no dia a dia não me identifico com alguns resultados apresentados"*. Na categoria 2 englobaram-se as afirmações em que os professores focam o seu desacordo com a afirmação do item na relatividade e subjetividade que encontram na Estatística, de que é exemplo a justificação seguinte: *"Nem sempre permite objetividade, pois existem informações contidas em intervalos grandes,* *limitando assim a objetividade"*. Na categoria 3 foram incluídas as justificações baseadas na manipulação dos dados estatísticos, como por exemplo: *"Nem sempre os resultados correspondem à realidade. Não se pode crer em estatísticas baseadas apenas em inquéritos realizados em zonas restritas"*.

Os professores com atitudes positivas em relação à Estatística neste item revelaram que gostam de Matemática e de Estatística, e que a entendem como uma disciplina objetiva e útil para a compreensão da realidade. Apesar disso, admitiram não a usar com frequência no seu dia a dia. Por outro lado, aqueles que apresentaram atitudes negativas mostraram não gostar de Matemática nem de Estatística, e explicam essa aversão também por aquilo que consideram ser a sua natureza subjetiva e a incerteza da informação estatística, sendo a manipulação dos dados estatísticos a razão das suas suspeições.

3.6. Item 19 – "A estatística só serve para as pessoas das ciências"

A afirmação do item 19 foi pontuada de forma neutra por 19 (11%) professores, de forma positiva por 144 (82%) professores e de forma negativa por 12 (7%) professores. Na Tabela 8 são apresentadas as categorias definidas em função das justificações obtidas e as respetivas frequências.

Tabela 8 — Análise de conteúdo relativo ao item 19 para as atitudes positivas e negativas

Atitudes positivas			Atitudes negativas		
Categorias	*n*	%	Categorias	*n*	%
0 – Ausência de informação	63	44	0 – Ausência de informação	9	75
1 – Todos precisam dela	36	25	1 – Desnecessária no dia a dia	1	8
2 – Está presente em várias áreas ou no ensino	28	19	2 – Só é válida para a ciência	2	17
3 – Está presente no dia a dia	17	12			
	144			12	

Neste item a categoria 0 inclui respostas que não fornecem qualquer informação: *"Não"*. A categoria 1 engloba razões genéricas baseadas na necessidade e na importância da estatística para todos, e não apenas para cientistas, tal como: *"A estatística serve para qualquer um. Até para mim que não sou de ciências. Serve para quem sabe ler"*. Na categoria 2 integraram-se as justificações que realçam a presença da Estatística em várias áreas, e não apenas nas científicas, como por exemplo: *"A estatística serve para todas as áreas"*. Na categoria 3 congregaram-se as afirmações baseadas no uso da Estatística no dia a dia, como está patente na justificação: *"É útil para resolver assuntos do quotidiano"*.

No caso das pontuações associadas a atitudes negativas neste item, a categoria 0 incluiu apenas ausência de justificações. A categoria 1 incluiu apenas a justificação: *"No dia a dia ninguém se vai dar ao trabalho de estudar estatística apenas para compreender melhor a realidade económica e social"*. A categoria 2 contém só duas justificações baseadas na ideia de que a Estatística só se aplica aos campos científicos, de que é exemplo: *"Serve principalmente nessa área"*.

3.7. Item 21 – "A estatística não serve para nada"

No item 21 inverteu-se a pontuação, pois a expressão também está na forma negativa. Foram excluídos da análise das justificações neste item 14 (8%) inquéritos com pontuação neutral, e considerados na análise 152 (87%) com pontuação relacionada com atitudes positivas e 9 (5%) com atitudes negativas, nenhum dos quais apresenta qualquer comentário. Na Tabela 9 apresentam-se as categorias estabelecidas para este item, bem como as suas frequências.

Tabela 9 — Análise de conteúdo relativo ao item 21 para as atitudes positivas e negativas

Atitudes positivas			Atitudes negativas		
Categorias	*n*	%	Categorias	*n*	%
0 – Ausência de informação	80	52	0 – Ausência de informação	9	100
1 – Útil e relevante	45	30			
2 – Se existe é porque é útil	12	8			
3 – Útil para o dia a dia	15	10			
	152			9	

Neste item a categoria 0 consiste na ausência de justificação e nas respostas que não acrescentam qualquer informação, tal como: *"Poderá servir"*. Na categoria 1 as justificações referiram-se à utilidade e importância da Estatística na leitura da realidade, embora, por vezes, mencionem a necessidade de assegurar o rigor técnico e o uso adequado de Estatística, como por exemplo: *"Embora eu não seja 'apaixonada' pela estatística, concordo com o papel importante que ela tem na perceção da realidade"*. A categoria 2 incluiu as justificações baseadas na ideia de que se a Estatística existe é porque é útil, de que é exemplo: *"Discordo, porque se não servisse para nada, não teria razão de existir"*. Na categoria 3 engloba as razões que salientam a utilidade da Estatística no dia a dia, como é o caso: *"Está sempre presente no quotidiano"*.

Nos itens 19 e 21, e de uma forma geral, os professores afirmaram claramente que a Estatística é útil para todos e não só para os que estão envolvidos na ciência. Estes inquiridos também a consideram como uma ciência rigorosa, desde que usadas as técnicas e teorias adequadas, e como uma disciplina importante e útil para as pessoas em muitas áreas da vida do dia-a-dos. No entanto, e ainda que relativamente poucos, existem alguns professores que acreditam que a Estatística não pode ser considerada como algo útil no dia a dia.

3.8. Item 22 – "É frequente explicar aos meus colegas problemas de estatística que eles não entenderam"

No item 22 foram obtidas 70 (40%) respostas com pontuações neutras, pelo que estas não foram analisadas. Além disso, para este item obtiveram-se 23 (13%) respostas relacionadas com atitudes positivas e 82 (47%) com atitudes negativas. A Tabela 10 apresenta as categorias estabelecidas, bem como as respetivas frequências.

Tabela 10 — Análise de conteúdo relativo ao item 22 para as atitudes positivas e negativas

Atitudes positivas			Atitudes negativas		
Categorias	*n*	%	Categorias	*n*	%
0 – Ausência de informação	12	52	0 – Ausência de informação	48	59
1 – Tento ajudar tanto quanto posso ou sempre que solicitado	3	13	1 – Acontece por acaso porque...	21	26
2 – Tento partilhar sempre que necessário	7	30	2 – Não obtive formação estatística suficiente na minha formação	10	12
3 – Só o fiz enquanto fui aluno	1	4	3 – Só uso estatística nas minhas aulas	1	1
			4 – Todos (ou quase todos) percebem de estatística	2	2
	23			82	

Para das atitudes positivas neste item, a categoria 0, para além das ausências de justificação, inclui também respostas sem informação significativa para esta análise, como por exemplo: *"A estatística também pode ser útil"*. Para a categoria 1 foram consideradas as razões invocadas pelos professores que expressaram tentar ajudar os colegas tanto quanto podem ou sempre que solicitados: *"Sempre que posso"*. Na categoria 2 incluíram-se afirmações dos professores que mostram disponibilidade, mas apenas quando é necessário, como por exemplo: *"Quando há dificuldades utilizo a interajuda para resolução de problemas"*. A categoria 3, foi criada para a única justificação referente à ajuda na resolução de problemas estatísticos apenas enquanto aluno, nomeadamente: *"Aconteceu quando estudava estatística"*.

Relativamente ao grupo associado às atitudes negativas, a categoria 0 inclui as não respostas e as respostas sem significado útil no âmbito desta análise, tal como: *"Só liga às estatísticas quem quer"*. A categoria 1 foi estabelecida com base nas razões que indicaram que não ajudavam ou que apenas o fariam esporadicamente, nomeadamente por não serem solicitados, como por exemplo: *"Nunca me pediram"*. Na categoria 2 agruparam-se as justificações para a não ajuda aos colegas que tinham por base a falta de conhecimentos estatísticos: *"Os meus colegas sabem mais de estatística que eu, são mais novos e tiveram essa formação"*. A categoria 3 apenas incluiu a justificação: *"No meu grau de ensino não se discutem problemas de estatística a não ser ao nível do 1º ciclo"*. Finalmente, a categoria 4 definiu-se para congregar as justificações que têm como princípio para o professor não explicar problemas estatísticos aos colegas a consideração de que todos (ou quase todos) dominam a Estatística, como é o exemplo: *"Todos os colegas estão dentro do assunto"*.

Dos poucos professores cuja pontuação neste item está associada a uma atitude positiva, ficámos com a impressão de que estariam disponíveis para um trabalho colaborativo em Matemática e, por conseguinte, em Estatística. No entanto, os professores parecem demonstrar maioritariamanete atitudes negativas em relação a este item, o que indica a consciência das suas lacunas ao nível dos conhecimentos e da formação estatística.

3.9. Item 23 – "Se pudesse eliminar algum conteúdo seria a estatística"

No que diz respeito ao item 23 também as pontuações da escala foram invertidas uma vez que a afirmação está na negativa. Houve 43 (25%) respostas com pontuações neutras, e por isso não analisadas neste item. Além disso, verificaram-se 125 (71%) respostas associadas a atitudes positivas e 7 (4%) respostas associadas a atitudes negativas. Na Tabela 11 são apresentadas as categorias estabelecidas, bem como as suas frequências.

Tabela 11 — Análise de conteúdo relativo ao item 22 para as atitudes positivas e negativas

Atitudes positivas			Atitudes negativas		
Categorias	*n*	%	Categorias	*n*	%
0 – Ausência de informação	4	3	0 – Ausência de informação	5	7
1 – Utilidade	5	4	1 – Não querem que os alunos tenham a mesma frustração que o professor teve enquanto aluno	1	1
2 – Não é importante, mas deve ser ensinada	4	3	2 – Cedo demais para ser ensinado (a alunos dos primeiros anos de escola)	1	1
3 –Gosto pela Estatística	1	1			
	14			7	

No âmbito deste item e das pontuações associadas a atitudes positivas, a categoria 0 incluiu as faltas de justificação e as justificações sem informação relevante, como por exemplo: *"Não eliminaria a* *estatística dos programas"*. Na categoria 1 agruparam-se as justificações em que se defende a não eliminação da Estatística do currículo, relacionadas com o reconhecimento da necessidade, da utilidade ou do desejo de saber mais sobre Estatística, e entre as quais destacamos: *"Bem pelo contrário, gostaria de aprofundar e aprender a gostar"*; *"É importante o estudo e domínio de conhecimentos estatísticos, pois a estatística está presente nos diferentes domínios do conhecimento e não podemos ser analfabetos na leitura e entendimento da leitura e interpretação de dados estatísticos"*. Na categoria 2 incluíram-se as justificações com base na ideia de que, apesar de a Estatística não ser necessariamente importante para todos, esta deve ser ensinada pois alguns poderão vir a precisar dela, como por exemplo: *"Para alguns será fundamental"*. Nas justificações incluídas na categoria 3 os professores salientaram o gosto pela Estatística, tanto por parte dos alunos como por parte do professor e dos alunos, como por exemplo: *"Gosto do tema e os meus alunos também"*.

Para o grupo associado a atitudes negativas salientamos o pequeno número de casos, apenas 7. A categoria 0, com 5 casos dos 7, incluiu não respostas e justificações sem informação, como: *"Não"*. À categoria 1 apenas corresponde a justificação: *"Acho que a minha indiferença se deve à pouca formação que tenho e por isso gostaria que outros não sentissem o mesmo que eu sinto"*. À categoria 2 só está associada a justificação: *"No meu ciclo ainda será cedo para trabalhar esta área"*.

Neste item pareceu-nos que os professores sentem a necessidade da Estatística para o ensino e aprendizagem na escola. Contudo, perante estes resultados parciais não é ainda possível percecionar as principais razões que estarão na base de uma tendência atitudinal negativa em relação a este item.

3.10. Componentes das atitudes

Em termos das componentes das atitudes constantes da Tabela 1, e no que diz respeito ao domínio pedagógico, particularmente à componente relacionada com a área afetiva, pôde verificar-se que os respondentes estavam conscientes da importância e utilidade da aprendizagem da Estatística, e estavam de acordo com a sua inclusão no currículo (item 23). Contudo, os seus sentimentos pessoais sugerem que o papel da Estatística ao nível social e cultural é subestimado no que se refere à informação veiculada na televisão (item 1). Há também uma atitude neutral predominante no que se refere ao que as pessoas sentem em relação ao ensino da Estatística (item 7), e ao seu uso no processo de raciocínio ou como aspeto cultural (item 16). No que diz respeito à componente cognitiva, observou-se por parte dos professores uma forte consciência da importância da Estatística no mundo atual, dado terem-na pontuado positivamente (itens 19 e 21), apesar de admitirem que a Estatística é, por vezes, manipulada (item 3). Na componente comportamental, os resultados mostraram a existência de uma atitude negativa tanto no contexto escolar (item 22) como no uso da Estatística fora da escola (item 14).

Do ponto de vista do domínio antropológico, e em especial na sua componente social, os professores apresentaram ideias claras e positivas sobre a presença, a importância e a utilidade da Estatística nas várias áreas do nosso mundo atual (itens 19 e 21), ainda que mostrem de alguma forma sentimentos pessoais contraditórios e desinteresse, em especial quando se refere à informação apresentada na televisão (item 1). Na componente educacional existe um sentimento positivo em relação à inclusão da Estatística no currículo (item 23), apesar dos professores não estarem muito seguros acerca do seu próprio interesse e preparação para o seu ensino (item 7). Existe também alguma relutância em colaborar com os colegas no ensino e no uso da Estatística, e em admitir as suas próprias dificuldades (item 22). No que diz respeito à componente instrumental, os professores indicam que, em geral, não usam a estatística no seu quotidiano (item 14). Consequentemente, surge também uma visão negativa da utilidade da Estatística enquanto ferramenta para interpretar o mundo envolvente, uma vez que existe a perceção de que os dados estatísticos podem ser manipulados (item 3). Há ainda uma attitude de indiferença em termos da objetividade e utilidade da Estatística como instrumento multidisciplinar (item 16).

4. Comentários finais

Tendo presente que este estudo é parte de um estudo mais alargado e abrangente sobre as atitudes em relação à Estatística dos professores do primeiro e segundo ciclo de ensino básico português, o objetivo não era o de generalizar os resultados obtidos, mas sim o de analisar as justificações que os professores dão para as suas atitudes em relação à Estatística. Enquanto estudo exploratório, podem-se discutir os resultados e desses *"pequenos nadas"* podem-se planificar ações futuras no sentido de melhorar a formação inicial e contínua dos professores. Melhorar no sentido de já ter em conta os aspetos afetivos/emocionais, em articulação com os aspetos do conhecimento estatístico, da didática da Estatística e do desenvolvimento profissional do professor.

Relativamente às pontuações médias globais, os resultados obtidos nesta investigação não parecem muito diferentes dos obtidos em Estrada (2002) e Estrada *et al.* (2010a, 2010b) relativos a professores espanhóis e peruanos. No entanto, a comparação da média das pontuações incluídas na Tabela 2 e a média das pontuações dos três estudos referidos mostram que: nos itens 1, 3, 14, 16 e 22 a média é ligeiramente inferior no nosso estudo; que no item 7 a média neste estudo está entre a dos professores espanhóis e a dos professores peruanos; e nos itens 19, 21 e 23 a média é ligeiramente superior à deste estudo. No sentido de contextualizar estas diferenças, devemos ter presente que Estrada (2002) e Estrada *et al.* (2010a, 2010b) focaram a sua investigação em futuros professores, enquanto neste estudo só foram incluídos professores em exercício.

Uma vez que as pontuações da escala de Likert não revelam, por si só, as razões dos professores para as suas opções, sentimos necessidade de incluir uma abordagem qualitativa para tentar suprir essa necessidade e fizemo-lo com base nos trabalhos de Estrada (2007), Estrada e Batanero (2008) e Estrada *et al.* (2011), mas de uma forma mais detalhada. De acordo com estes trabalhos, relativamente às explicações dos professores com pontuações correspondentes a atitudes positivas nos itens considerados, pode-se destacar a sua consciência da necessidade e do interesse do ensino da Estatística. Estas atitudes reforçam a ideia de que "a Estatística não é só válida para cientistas", a Estatística é útil para todos. Neste trabalho, estes professores em exercício do primeiro ciclo do ensino básico revelaram que, de uma forma genérica, gostam de aprender e de ensinar Estatística, e que a veem como uma ferramenta para enfrentar os problemas do mundo real. Tal como já foi referido, tais atitudes interligam as componentes cognitiva e social, bem como as componentes afetiva e educacional.

No que diz respeito às explicações dos professores com pontuações correspondentes a atitudes negativas no item "Incomoda-me a informação estatística que aparece nalguns programas da TV", elas denotam falta de confiança na informação (estatística) apresentada na televisão e nas metodologias usadas e/ou nas análises feitas, invocando eventuais manipulações nas mesmas. Uma vez mais, e de acordo com Estrada (2007), Estrada e Batanero (2008) e Estrada *et al.* (2011), as outras atitudes negativas descritas sugerem que estes professores em exercício não utilizam a Estatística no seu dia a dia, tanto porque a consideram como algo de que não necessitam como porque não é um tema que lhes interesse. Parece-nos que esta situação resulta da sua falta de formação inicial em Estatística e na sua didática e, ainda, o facto de eles não terem o hábito de partilharem com os colegas a resolução e abordagem de problemas estatísticos. Estas atitudes estão, essencialmente, distribuídas entre as componentes comportamental e instrumental.

Julgamos que estes *"pequenos nadas"*, de que também é feita a vida, e, em particular, a visão dos professores (em exercício) expressa nas respostas abertas associadas aos nove itens referidos alertam-nos para a importância de se avaliarem as atitudes em relação à Estatística e levantar o véu em relação às razões e motivações dessas mesmas atitudes. À medida que essas explicações forem cada vez melhor conhecidas e compreendidas, elas poderão dar-nos mais pistas para reforçar e melhorar a formação inicial e contínua dos professores. Baseados na análise realizada, e no sentido de contribuir para melhorar a formação dos professores, julgamos que, de futuro, a informação estatística veiculada na televisão (e noutros meios de comunicação) pode e deve ser mais usada como meio de ensinar e aprender a Estatística, bem como deve ser usada para realçar as componentes do pensamento estatístico e as fases de um estudo estatístico. Casos de estudo do quotidiano e trabalhos de projeto devem também ser usados para dar ênfase à aplicabilidade da Estatística, realçando a abordagem da Estatística através da resolução de problemas. Além disso, como tem vindo a acontecer nas escolas portuguesesa, deve-se continuar e reforçar o trabalho colaborativo entre os professores.

Existem neste estudo exploratório alguns aspetos que poderão ser melhorados em trabalhos futuros. Na nossa investigação futura pretendemos analisar por este método as explicações dos professores com pontuação neutra (3). Adicionalmente, pode-se estender o âmbito desta análise qualitativa cruzando os dados com algumas das variáveis pessoais, como o género, a idade, o número de anos de experiência letiva e a formação estatística. Também nos parece que, de futuro, outras investigações deverão envolver mais professores e outros níveis de ensino. Também deverá ser delineada uma forma de aumentar a proporção de respostas abertas obtidas e, eventualmente, aumentar o número de itens contemplando as razões pelas quais os professores atribuíram a respetiva pontuação a esse item ou até entrevistando alguns desses professores.

O esforço de concretização desta análise qualitativa, relativa a alguns dos itens da EAEE (Estrada, 2002), permitiu-nos compreender as atitudes dos professores em relação à Estatística de uma forma mais detalhada, e dessa forma confirmar e complementar ideias concebidas em trabalhos prévios (Estrada, 2007; Estrada & Batanero, 2008; Estrada *et al*. 2010a, 2010b; Estrada *et al*., 2011), na nossa própria investigação (Martins *et al*., 2011) e na nossa experiência de ensino.

Agradecimentos

Investigação financiada pelo projeto EDU2010-14947 (MICIIN, Espanha), pelo Centro de Matemática da UTAD (CM-UTAD) e pelo projeto PEst-OE/EGE/UI4056/2011 financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT, MCTES, Portugal).

Referências

Aiken, L. R. Jr. (1970). Affective factors in mathematics learning: Comments on a paper by Neale and a plan for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *1*, 251-255.

Andrich, D. (1978). A rating formulation for ordered response categories. *Psychometrika*, *43*(4), 561-574.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Bilbao: Mensagero.

Bardin, L. (2004). *Análise de conteúdo* (3ª edição). Lisboa: Edições 70.

Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística. *Statistics Education Research Journal*, *3*(1), 5-28. [Online: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ3(1)_marquez.pdf]

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Tese de Doutoramento, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona. [Online: http://www.tesisenxarxa.net/TDX-0502103-191818/]

Estrada, A. (2007). Actitudes hacia la estadística: un estudio con profesores de educación primaria en formación y en ejercicio. In M. Camacho, P. Flores, & M. Pilar Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemáti*ca (pp. 121-140). Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Estrada, A. (2009). *Las actitudes hacia la estadística en la formación de los profesores*. Milenio: Lleida.

Estrada, A., Batanero, C., & Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias*, *22*(2), 263-274.

Estrada, A., & Batanero, C. (2008). Explaining teachers' attitudes towards statistics. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (Eds.), *A Joint ICMI/IASE Study: Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. Proceedings of the ICMI Study 18*

Conference and IASE 2008 Round Table Conference. Monterrey, México: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education.

Estrada, A., Bazán, J., & Aparicio, A. (2010a). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores españoles y peruanos. *UNIÓN*, 24.
[Online: http://www.fisem.org/paginas/union/info.php?id=96]

Estrada, A., Bazán, J. L., & Aparicio, A. (2010b). A cross-cultural psychometric evaluation of the attitude statistic scale Estrada's in teachers. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of Eigth International Conference on Teaching of Statistics (ICOTS 8)*. Ljubljana. Slovenia, Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Estrada, A., Batanero, C., & Lancaster, S. (2011). Teachers' attitudes towards statistics. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics – Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 163-174). New York: Springer.

Gal, I., & Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: Towards an assessment framework. *Journal of Statistics Education*, *2*(2).
[Online: http://www.amstat.org/publications/jse/v2n2/gal.html]

Gómez-Chacón, I. (2000). Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 43*(2), 149-168.

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology* (2ª edição). Charlotte, NC: Sage Publications.

Martins, J., Nascimento, M., & Estrada, A. (2011). Attitudes of teachers towards statistics: A preliminary study with Portuguese teachers. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7)*. Rzeszow, Polónia: Universidade de Rzeszow e ESRM. [Online: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/5/CERME_Martins-Nascime nto-Estrada.pdf]

Olson, J. M., & Zanna, M. P. (1993). Attitude and attitude change. *Annual Review of Psychology, 44*, 117–154.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affects. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age Publishing & NCTM.

Roberts, D. M., & Bilderback, E. W. (1980). Reliability and validity of a statistics attitude survey. *Educational and Psychological Measurement*, *40*, 235-238.

Wise, S. L. (1985). The development and validation of a scale measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, *45*(2), 401-405.

FERNANDES, J. A., VISEU, F., MARTINHO, M. H. & CORREIA, P. F. (ORGS.) (2013). *ATAS DO III ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA*. BRAGA: CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DO MINHO.

O USO DA FOLHA DE CÁLCULO NA CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS ESTATÍSTICOS POR ALUNOS DO 7º ANO

António Pereira de Vasconcelos
Escola Básica de Vila Verde, antvasconce@sapo.pt
José António Fernandes
Universidade do Minho, jfernandes@ie.uminho.pt

Resumo. Este estudo teve como principal objetivo investigar a utilização da folha de cálculo por alunos do 7° ano na construção de gráficos estatísticos, nomeadamente os aspetos que devem ser considerados na sua integração no ensino da construção de gráficos estatísticos, as potencialidades e limitações do seu uso na aprendizagem da construção de gráficos estatísticos. Para tal foi realizado um estudo de natureza qualitativa, em que foi implementada uma intervenção de ensino sobre construção de tabelas de frequências e gráficos estatísticos, privilegiando o trabalho dos alunos em pares e com recurso à folha de cálculo. De entre as razões que favorecem a introdução da folha de cálculo na sala de aula, neste estudo destaca-se a posibilidade de tratar grandes quantidades de informação com ganhos de tempo, a relativa simplicidade do seu manuseamento expressa num conjunto de soluções prontas a usar e a grande apetência dos alunos para explorarem as tecnologias.

Palavras-chave: Construção de gráficos estatísticos, Folha de cálculo; Alunos do 7° ano.

Introdução

Na Educação Estatística a representação de dados, entendida como a capacidade de organização, leitura e interpretação de informações expressas em gráficos e tabelas, tem um lugar relevante na atualidade, sendo que, para Wainer (1992), os gráficos fazem parte integrante do nosso dia-a-dia.

Muitos dos trabalhos desenvolvidos na área da Educação Estatística abordam a leitura e interpretação de gráficos (e.g., Jugkenn & Del Pino, 2009; Morais, 2011; Ribeiro, 2007). Wainer (1992) tece uma crítica pertinente quanto à priorização da leitura e interpretação de gráficos nas pesquisas que vêm sendo realizadas, uma vez que muitas das dificuldades e equívocos relacionados com a capacidade de retirar informações das representações gráficas podem decorrer de uma construção defeituosa. Segundo o autor, caracterizar a capacidade de compreensão de informações apresentadas num gráfico defeituoso é semelhante a caracterizar a capacidade de alguém ler por meio de questões repletas de erros ortográficos.

Há evidências de que a capacidade de compreender gráficos apresenta dificuldades e alguns estudos sugerem que parte dessas dificuldades está relacionada com deficiências na construção de gráficos (Wainer, 1992). Donde, devemos considerar a capacidade de construção de gráficos. Além de tornar os alunos capazes de organizar os dados por meio de gráficos e tabelas, com a construção de gráficos, eles podem tomar consciência das relações existentes, explícita e implicitamente, em cada representação de forma a perceber erros noutras construções.

Por outro lado, o melhor conhecimento dos alunos sobre gráficos contribui para o desenvolvimento da literacia estatística que, em síntese, pode ser entendida como a capacidade de interpretar, avaliar, argumentar e validar informação utilizando corretamente terminologias e conceitos estatísticos, incluindo também crenças, hábitos e atitudes. Nesta perspetiva, para Gal (2002), a literacia estatística envolve duas componentes principais inter-relacionadas: (a) a capacidade de interpretar e avaliar criticamente informação Estatística, argumentos relacionados com dados ou fenómenos estocásticos, e (b) a capacidade de discutir ou comunicar as suas reações a essa informação estatística, as suas opiniões sobre as implicações desta informação ou as suas preocupações relativamente à razoabilidade das conclusões apresentadas.

Assim, no presente texto investiga-se a utilização da folha de cálculo, por alunos do 7° ano, na construção de gráficos estatísticos, indagando-se acerca da sua integração no ensino, das suas potencialidades e limitações.

1. O uso da tecnologia na aula de Matemática e em Estatística

A rápida evolução da computação nos últimos anos foi um aspeto muito relevante no desenvolvimento da Estatística. O surgimento de computadores cada vez mais potentes resultou no desenvolvimento de novos métodos de análise estatística, particularmente na construção de gráficos e na análise multivariada. Simultaneamente, sendo o computador cada vez mais pequeno e acessível a todos, cada vez mais ele pode ser usado como parte do método de ensino, permitindo aos alunos explorar e estudar dados reais (Hawkins, Jolliffe & Glickman,1992).

O domínio, pelos alunos, de capacidades em Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) poderá contribuir para uma formação mais sólida. Sendo a escola o lugar privilegiado para a divulgação e a utilização didática e crítica das TIC, torna-se fundamental que os docentes sejam formados e motivados para o uso dessas tecnologias, concebendo-as como instrumentos que devem interagir com os projetos pedagógicos a desenvolver com os alunos.

A utilização das TIC no ensino da Estatística permite uma abordagem com mais significado para os alunos. Para Fernandes e Vaz (1998), o desenvolvimento das novas tecnologias e o aprofundamento da sua utilização na sociedade têm tido ressonância na escola, e concretamente na disciplina de Matemática, sendo as calculadoras científicas, mais utilizadas no ensino básico, as calculadoras gráficas, mais utilizadas no ensino secundário, os computadores, o *software* educativo e a internet as tecnologias mais utilizadas.

Ponte (1997) refere a importância da utilização das novas tecnologias na matemática e no seu ensino, considerando que, embora os professores e os matemáticos tenham demorado a perceber como tirar partido da tecnologia enquanto ferramenta de trabalho, o grande desafio que elas colocam hoje em dia à disciplina de Matemática é saber se esta conseguirá dar um contributo significativo para a emergência de um novo papel da escola ou se continuará a ser a parte mais odiosa do percurso escolar da maioria dos alunos.

Os estudos realizados em Educação Matemática evidenciam vantagens na utilização de tecnologia nas aulas de Matemática e de Estatística em particular. Podem ser destacadas muitas razões para usar as TIC na sala de aula de Matemática. Nesse sentido, Fernandes e Vaz (1998) consideram que promover uma aprendizagem mais profunda e significativa, favorecer uma abordagem mais indutiva e experimental da matemática e desenvolver as aplicações da matemática são vantagens importantes que jogam a favor da utilização das TIC na sala de aula de matemática. Por outro lado, segundo os mesmos autores, a menor ênfase no cálculo e a sua simplificação permitem explorar atividades matemáticas mais profundas e significativas através da abordagem na sala de aula de uma matemática mais realista. Assim, enfatizando múltiplas abordagens e diferentes formas de representação matemática, concretamente no caso da Estatística, o seu uso permite a abordagem de projetos ligados à realidade dos alunos e o tratamento de grandes quantidades de dados, que de outro modo constituiria um trabalho pouco motivador, por ser repetitivo e demorado.

Tradicionalmente, o ensino da Estatística foca-se no domínio de técnicas, como a construção de tabelas de frequência, a construção de gráficos de barras e de setores e o cálculo de índices, como médias e medianas (Ponte & Canavarro, 1997). Segundo estes autores, essas operações são de execução lenta e permitem a realização de um número reduzido de exemplos e, consequentemente, a atenção do aluno acaba por se concentrar mais nos aspetos do como fazer do que na interpretação dos dados. O uso da tecnologia poderá resolver ou atenuar este problema, permitindo uma abordagem da Estatística mais centrada nos aspetos interpretativos.

A importância do uso da tecnologia pelos alunos é reforçada por Ponte (1995), ao elencar várias vantagens, designadamente: relativizar o cálculo e a manipulação simbólica; reforçar a importância da linguagem gráfica e novas formas de representação; facilitar uma maior ênfase, por parte do professor, nas capacidades de ordem superior; e valorizar as possibilidades de realização, na sala de aula, de projetos e atividades de modelação, exploração e investigação.

Também no *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ministério da Educação, 2007) se preconiza que os alunos devem usar recursos tecnológicos – por exemplo, calculadora gráfica ou folha de cálculo – para tratar, organizar e apresentar a informação recolhida.

Ponte (2000) refere que a internet mantém uma presença cada vez mais forte na nossa vida quotidiana. A *World Wide Web* constitui uma "rede de redes", ligando entre si computadores espalhados pelo mundo, disponibilizando um manancial inesgotável de informações e possibilidades de interação sobre os mais variados assuntos. Entre estes contam-se, naturalmente, muitos com relevância direta para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Numa sociedade baseada cada vez mais na comunicação e na tecnologia, coligir, organizar, descrever, exibir, interpretar dados e tomar decisões ou fazer previsões com base nessa informação são capacidades importantes a desenvolver (Brocardo & Mendes, 2001).

Seguindo o pensamento de Almeida (2002), tratando-se de um domínio para descrever o real, a Estatística não pode ser ensinada de modo convencional, uma vez que não prepara os alunos para o mundo que os rodeia. A este propósito, Fernandes, Alves, Machado, Correia e Rosário (2009) referem que os educadores acreditam que o uso de dados reais em tópicos de interesse dos alunos (o que não acontece apenas em Estatística) contribui para a sua motivação para aprenderem Estatística.

Salientando várias etapas do desenvolvimento de um projeto estatístico, Machado (2000) defende que para que o aluno seja ele próprio a construir o seu conhecimento, o professor deve: propiciar situações didáticas que permitam a discussão e reflexão sobre os problemas e desenvolver aptidões para construir, ler e interpretar diferentes formas de apresentar os dados; recolher e organizar dados de problemas simples, relacionados com as vivências e interesses dos alunos; e analisar e interpretar os dados estatísticos.

Para além do domínio cognitivo, também no domínio afetivo são reconhecidas vantagens no uso das tecnologias, destacando-se o desenvolvimento do interesse, da persistência, da motivação e de atitudes favoráveis à Matemática e à Estatística. Vários são os estudos que atestam essas vantagens, seja na perceção dos professores (Fernandes, Almeida, Viseu & Rodrigues, 1999), seja na perceção dos próprios alunos (Gonçalves, 2011; Ferreira, 2006).

2. A construção e a complexidade semiótica de gráficos estatísticos

Ao questionar os alunos sobre o que é a Estatística, provavelmente referirão que está relacionada com gráficos e tabelas. Ou seja, a Estatística é percecionada como sendo a organização, leitura e interpretação de informação expressa em gráficos e tabelas. Para Wainer (1992), o uso de gráficos está tão presente no nosso quotidiano que não é possível imaginar o mundo sem eles, sendo que o poder de síntese dos gráficos tem vindo a ser valorizado numa sociedade cada vez mais dependente das imagens e com menos tempo para ler e analisar informação escrita (Silva, 2006). Deste modo vem reforçada a necessidade de desenvolvimento do domínio da linguagem gráfica, até mesmo como fator de inserção social e de cidadania. Ora, tal domínio contribui para a melhoria da capacidade de leitura dos dados representados em gráficos e tabelas, permitindo assim que o leitor consiga interpretar e generalizar as informações neles presentes. O desenvolvimento dessa capacidade a partir de diferentes tipos de gráficos, bem como o estabelecimento de relações entre a linguagem gráfica e as demais formas de representação de dados, proporciona uma evolução da compreensão das pessoas sobre as diferentes formas de representação (Lopes, 2004).

A construção de gráficos está hoje muito facilitada pelo acesso a *software* específico. A facilidade com que é construído um gráfico, ao invés de potenciar um futuro risonho para a representação gráfica, pode antes contribuir para algumas névoas no horizonte da construção gráfica vindoura. Para Silva (2006) é urgente meditar sobre todo este processo e ter presente que os bons gráficos encorajam o questionamento, mas os maus gráficos escondem mais do que mostram. A opção por uma determinada representação gráfica envolve muitas questões e, de acordo com esta autora, devemos optar não pela escolha que sistematicamente nos pareça melhor mas por aquela que num determinado contexto é a mais conveniente.

Ainda para esta autora, a grande vantagem dos gráficos reside na sua capacidade de contar uma história de forma interessante e atrativa, permitindo compreender rapidamente fenómenos que só com maior dificuldade seriam percebidos de outra maneira.

Encontramos gráficos na imprensa, na internet, em textos, em relatórios, nos manuais escolares, pelo que uma pessoa culta deve ser capaz de compreender a informação expressa nesses gráficos. Para tal, é necessário conhecer os elementos estruturais dos mesmos.

A investigação tem mostrado que a leitura e interpretação da linguagem de um gráfico é uma capacidade complexa, que não se adquire espontaneamente e tão pouco parece alcançar-se facilmente com o ensino (Arteaga, 2011). Para este autor, isto pode ser explicado pelo facto da simplicidade dos gráficos ser só aparente, pois o mais simples dos gráficos pode considerar-se um modelo matemático complexo.

Para Watson (2006), o desenvolvimento de uma boa competência gráfica depende do domínio de diferentes elementos do currículo de matemática, nomeadamente percentagens, frações, proporcionalidade e geometria. Também Ruiz, Arteaga e Batanero (2009) consideram que quando os alunos constroem um gráfico realizam uma série de ações e usam conceitos e propriedades que variam mediante o tipo de gráfico. Daí que a construção de um gráfico acarrete dificuldades específicas ao estar associada à construção de tabelas e ao envolver conceitos matemáticos diversificados, como escalas, origem dos eixos, variável independente e dependente, coordenadas, variáveis discretas e contínuas e distribuição de frequências (Espinel, González, Bruno & Pinto, 2009).

Seguindo Kossilyn (1985), um gráfico é constituído pelos seguintes elementos: plano de fundo, que serve de suporte ao gráfico e geralmente é branco; estrutura do gráfico, geralmente constituída pelos eixos cartesianos (mas nem sempre, como acontece nos gráficos circulares), que fornece a informação das variáveis apresentadas e relacionadas; conteúdos pictóricos, que consiste na forma como os dados aparecem representados e transmitidos através do gráfico (linhas, barras, setores circulares,...); e legendas. Já segundo Curcio (1987), um gráfico fica definido pelos seguintes elementos: as palavras que aparecem no gráfico (por exemplo título e legendas, que fornecem a chave para compreender o contexto, as variáveis e as relações expressas no gráfico); o conteúdo matemático subjacente, como conceito de área no gráfico de setores; e os contextos específicos usados em cada tipo de gráfico (por exemplo, o aluno deve saber que num diagrama circular a amplitude do setor é proporcional à frequência).

Um gráfico é mais eficaz quando para obter uma resposta correta a uma questão, o tempo despendido na inspeção do dito gráfico é menor que para outro que represente a mesma informação (Bertin, 1967, citado em Arteaga, 2011). Deste modo, a eficácia de um gráfico está relacionada com a facilidade de obter informação em qualquer das etapas da sua leitura.

Embora sejam vários os autores que analisaram a atividade semiótica na construção e interpretação de gráficos, iremos referir-nos apenas a Arteaga (2011). Este autor observa que em cada um dos passos descritos por Bertin na leitura do gráfico pode identificar-se uma ou várias funções semióticas, definindo-as como uma correspondência entre um antecedente (expressão ou significante) e um consequente (conteúdo ou significado) estabelecido por um sujeito. Assim, para ler um gráfico, os alunos têm de realizar várias atividades de tradução entre o gráfico no seu conjunto ou numa parte e o que nele é representado.

Arteaga (2011) define quatro níveis de complexidade semiótica para analisar as produções gráficas, estabelecidos a partir das produções gráficas de futuros professores primários.

Nível 1. Representa apenas valores individuais. Os alunos são incapazes de elaborar análises globais dos dados. Uma análise semiótica deste tipo de gráficos mostra que os conceitos, proposições e procedimentos postos em prática são de menor complexidade do que nas representações que entram com o conjunto de dados da amostra ou população. Este tipo de gráficos só permite um nível de leitura de *extração de dados* ou *ler os dados* (Curcio, 1989), uma vez que trata apenas de valores da variável para um caso particular.

Nível 2. Representa valores individuais da variável. O gráfico permite responder a questões ao nível da *extração de dados*, mas não ao nível da extração de tendências. Este nível de leitura dos gráficos é superior ao nível 1 dado que permite visualizar todos os valores obtidos da variável, chegando-se a perceber a estrutura ou tendência dos dados.

Nível 3. Produz gráficos separados para cada distribuição. Para cada par de variáveis são apresentados dois gráficos. No estudo comparativo de cada par de variáveis, o aluno constrói duas tabelas de frequências e a partir de cada tabela constrói gráficos que representam separadamente cada distribuição. Para cada par de variáveis representa dois gráficos e ao construir os gráficos separados dificulta-se a comparação das variáveis, sobretudo se não usar a mesma escala de representação nos dois gráficos ou se utilizar gráficos de diferentes tipos para cada distribuição.

Nível 4. Produz um gráfico conjunto para cada par de distribuições. O aluno define as distribuições de cada par de variáveis e representa-as conjuntamente num mesmo gráfico, facilitando a sua comparação. O gráfico apresenta maior grau de complexidade ao representar conjuntamente duas variáveis estatísticas. Estes gráficos permitem um nível superior de leitura, designado por análise da estrutura, pois permite comparar tendências e a variabilidade das duas variáveis numa única imagem.

Estabelecendo um paralelismo entre os níveis de leitura de gráficos de Bertin (1967, citado em Arteaga, 2011), posteriormente assumidos por Curcio (1989), e os níveis de construção de gráficos propostos por Arteaga (2011), tem-se: o nível 1 possibilita a extração de dados; o nível 2 permite atingir um nível intermédio, superior à simples extração de dados, sem chegar à extração de tendências; o nível 3 possibilita a extração de tendências e o nível 4 permite a análise da estrutura.

3. Metodologia

Com o presente estudo, de tipo qualitativo, procurou-se dar resposta às três seguintes questões de investigação: 1. Que aspetos devem ser considerados na integração da folha de cálculo no ensino da construção de tabelas e gráficos estatísticos? 2. Quais as potencialidades e limitações do uso da folha de cálculo na aprendizagem da construção de tabelas e gráficos estatísticos? 3. Quais as perceções dos alunos sobre a utilização da folha de cálculo na construção de tabelas e gráficos estatísticos? Neste texto abordam-se apenas as duas primeiras questões de investigação.

O estudo desenvolveu-se através de uma intervenção de ensino com os 26 alunos de uma turma do 7º ano de escolaridade tendo o professor de matemática da turma sido o investigador. A intervenção de ensino consistiu na exploração de seis tarefas sobre o tema Estatística, das quais três se focaram na construção de tabelas de frequências e gráficos estatísticos, sendo que aqui é estudada apenas a última destas tarefas na parte que respeita aos gráficos. A exploração da tarefa decorreu durante um período de 2,5 sessões, cada uma com a duração de 90 minutos.

As tarefas implementadas durante a intervenção de ensino foram organizadas em três fases distintas: (1) apresentação da tarefa; (2) resolução/exploração da tarefa; e (3) apresentação, discussão e síntese da resolução da tarefa. No final realização de cada tarefa os alunos procederam à sua avaliação de forma sistemática e comparável, tendo para o efeito preenchido uma ficha de avaliação da tarefa.

Durante o ensino os alunos trabalharam em pares e com recurso à folha de cálculo. A opção pelo trabalho em pares dos alunos justifica-se pelo facto de se ter seguido uma metodologia de projeto, com a realização de pequenas tarefas encadeadas, o que é compatível com o que é preconizado no *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ministério da Educação, 2007). Além disso, valorizou-se o uso de dados reais em tópicos de interesse dos alunos por, como refere Fernandes et al. (2009), se acreditar que tal contribui para a sua motivação para aprenderem Estatística. Os pares foram formados seguindo a disposição normal dos alunos na sala de aula e atendendo a que foram os alunos que escolheram os seus lugares na aula de Matemática, houve total concordância e agrado dos alunos pela metodologia seguida na formação dos pares.

A recolha de dados foi efetuada no ano letivo 2011/2012 e realizou-se através da observação direta das aulas, da gravação em vídeo das partes das aulas relativas à apresentação, discussão e elaboração de sínteses da resolução das tarefas, da análise das produções dos alunos, em papel e em formato digital, e da reflexão realizada no final de cada aula pelo professor e alunos. No final da intervenção de ensino foi realizada uma entrevista individual a todos os alunos da turma para conhecer as suas perceções sobre a utilização da folha de cálculo na construção de tabelas e gráficos estatísticos, que não é aqui analisada.

As aprendizagens foram verificadas com base na apresentação, discussão e síntese das resoluções das tarefas pelos pares à turma, bem como através da análise posterior dos registos vídeo das apresentações e dos registos escritos das suas resoluções das tarefas.

Quanto à análise e tratamento dos dados, foi realizada uma descrição geral da aplicação de cada tarefa, do modo como decorreu a intervenção de ensino, foram analisadas as resoluções das tarefas dos alunos, as suas avaliações das tarefas e as suas entrevistas.

4. A exploração da tarefa pelos alunos

Nesta secção apresentam-se os resultados da exploração realizada pelos alunos, trabalhando em pares, na tarefa. Nesta fase do trabalho, embora pudessem pedir esclarecimentos ao professor, os alunos trabalharam de forma autónoma (fases 1 e 2). Numa fase seguinte, que não é tratada neste texto, as resoluções dos alunos eram discutidas no grupo-turma, tendo em vista partilhar diferentes resoluções, ultrapassar erros e responder a dificuldades sentidas e, finalmente, institucionalizar o conhecimento pretendido.

Na tarefa, intitulada “Conhecer melhor os pais dos alunos da turma” era solicitado aos alunos para resolverem cada uma das questões, primeiro, com material de medição, desenho e de escrita e, em seguida, utilizando a folha de cálculo Excel.

> *Questão 1. Representa os dados referentes às alturas das mães dos alunos através de uma tabela de frequências e de um gráfico apropriado.*

Na resposta com material de medição, desenho e de escrita, 38% dos alunos construiu uma tabela de frequências com os dados agrupados em classes, 31% elaborou uma tabela de frequências absolutas e 31% dos alunos não respondeu.

Quanto aos gráficos construídos pelos alunos, 38% elaborou um histograma, 23% construiu um gráfico de barras a partir da tabela das frequências absolutas e 39% não respondeu. A genaralidade dos alunos não legendou ou legendou incorretamente os gráficos. Este tipo de erro foi mais comum nas resoluções com material de medição e de desenho.

Na resolução utilizando a folha de cálculo Excel, 46% dos alunos construiu uma tabela de frequências com os dados agrupados em classes, 31% elaborou uma tabela com as frequências absolutas, 8% apresentou uma tabela com a lista de todas as idades e 15% dos alunos não respondeu.

Quanto aos gráficos construídos pelos alunos, 38% dos alunos construiu um histograma, 23% um gráfico de barras com as frequências absolutas, 8% um gráfico de barras a partir dos dados agrupados em classes (barras separadas), 8% um gráfico com todas as idades e 23% dos alunos não construiu qualquer gráfico.

A resposta apresentada na Figura 1, constituida por uma tabela de frequências e por um histograma, construídos pelo par P7, é adequada para responder à questão, apesar de faltarem rótulos no gráfico e dos valores da frequência relativa e frequência relativa em percentagem não terem sido arredondados.

Alturas	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência relativa em%
1,50-1,60	14	0,538461538	53,84615385
1,60-1,70	8	0,307692308	30,76923077
1,70-1,80	4	0,153846154	15,38461538
Total	26	1,000000000	100

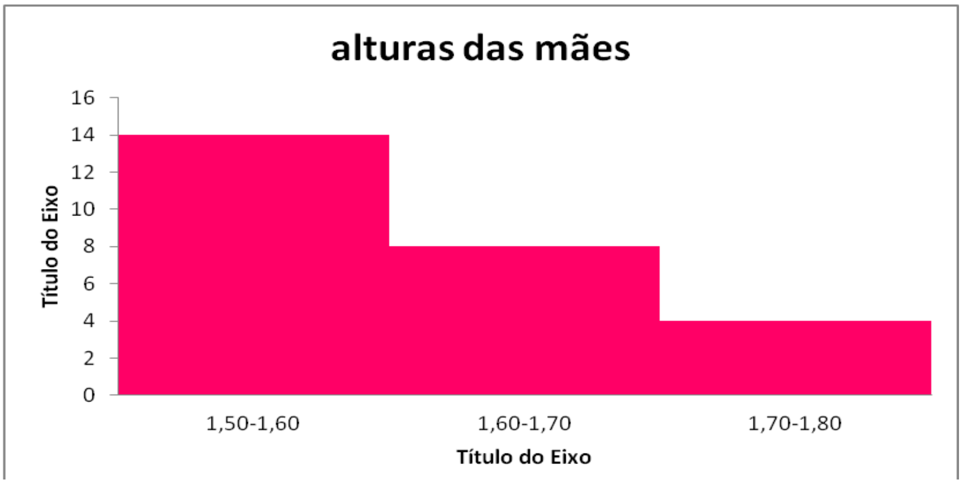


Figura 1. Resolução da questão 1, da tarefa 3, pelo par P7.

Questão 2. Utilizando um gráfico adequado, compara as idades dos pais com as idades das mães dos alunos. Existe alguma tendência na variação entre as idades dos pais e as idades das mães?

Na resposta com material de medição, desenho e de escrita, 23% dos alunos construiu um histograma para as mães e para os pais separadamente, 8% um gráfico de barras adicionadas para os dois sexos, 15% construiu apenas uma tabela de frequências absolutas, 8% construiu, com as duas médias das idades, um gráfico com duas barras, 8% um gráfico de barras com as frequências absolutas e 38% dos alunos não respondeu. Uma percentagem de 61% dos alunos concluiu corretamente que os pais são mais velhos do que as mães. Os restantes nada concluiram a este respeito.

Na resposta a esta questão utilizando a folha de cálculo Excel, 31% dos alunos construiu uma tabela de frequências com os dados agrupados em classes e um histograma por sexo, 31% um gráfico de barras com as frequências absolutas por sexo, 8% um gráfico de barras adicionadas, considerando três classes e comparando as idades dos dois sexos no mesmo gráfico, 8% construiu um gráfico de linhas, com duas linhas, uma por cada sexo, e 8% dos alunos construiu um gráfico de barras, por sexo, com todas as idades. Os restantes alunos não responderam. A percentagem de alunos que indicou uma tendência na variação entre as idades dos pais e as das mães foi de 69%.

Na Figura 2, constituída pela tabela de frequências absolutas para as idades dos pais e das mães e por um gráfico de barras adicionadas, o par P6 apresenta a mesma resposta, agora construída com o auxílio da folha de cálculo.

Idades	Mães	Pais
30 a 40	10	8
40 a 50	15	17
50 a 60	1	1

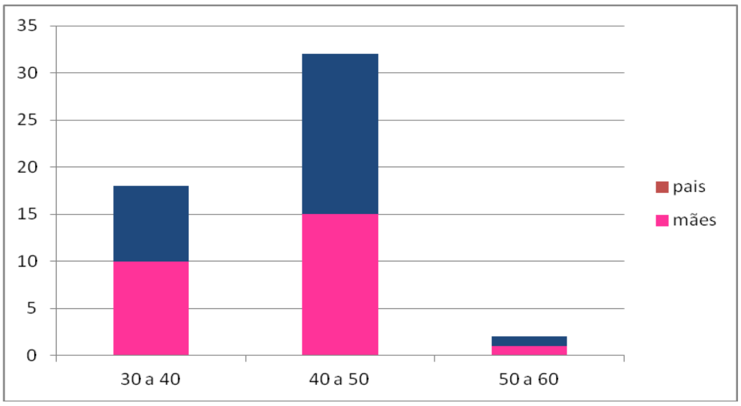


Figura 2. Resolução da questão 2, da tarefa 3, pelo par P6.

Analisando a resposta dada pelo par P13 na resolução representada na Figura 3, constata-se que a representação gráfica encontrada pelo par permite obter uma tendência na variação entre as idades dos pais e as idades das mães, pelo que o gráfico da figura é apropriado para responder à questão formulada aos alunos. A construção de um gráfico em que estejam representadas duas variáveis é uma tarefa de dificuldade acrescida para os alunos, enquadrando-se no nível mais elevado (nível 4) de Arteaga (2011).

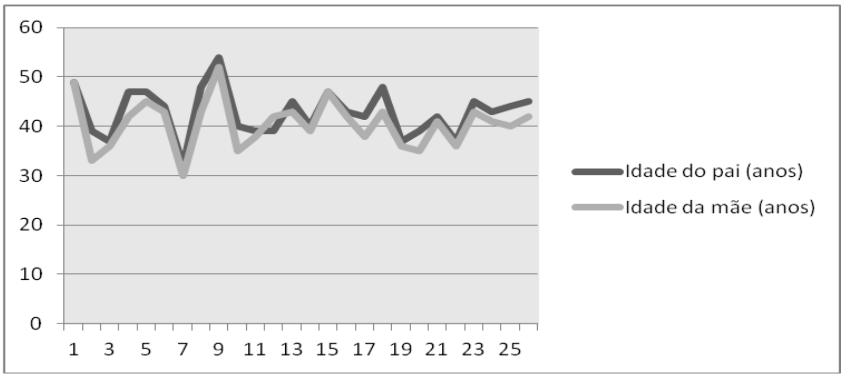


Figura 3. Resolução da questão 2, da tarefa 3, pelo par P13.

Questão 3. Apesar do crescimento de 1 centímetro por década, os dados de 2000 mostram que os homens portugueses continuam a ser os mais baixos da Europa, com uma média de 1,72 metros. A altura média dos espanhóis era de quase 1,74 metros, a dos franceses de quase 1,75 metros, a dos belgas de 1,76 metros, a dos suecos 1,79 metros e a dos holandeses 1,84 metros.

***a)** Compara, construindo um gráfico apropriado, as alturas dos pais e das mães dos alunos da turma.*

Na resposta com material de medição, desenho e de escrita, 38% dos alunos construiu uma tabela de frequências absolutas com os dados agrupados em classes e um histograma por sexo, 8% um gráfico de barras por sexo, 8% um gráfico com duas barras com as médias das alturas dos pais e das mães e 8% dos alunos construiu um gráfico de barras agrupadas em classes para pais e mães. Os restantes alunos não responderam.

Na resolução do par P6, representada na Figura 4, surge uma construção gráfica em que os dados foram agrupados em classes, mas não se trata de um histograma pois as barras estão separadas. A leitura e interpretação do gráfico com esta construção gráfica é possível, mas faltam os elementos identificativos do gráfico, nomeadamente título, rótulos e legendas.

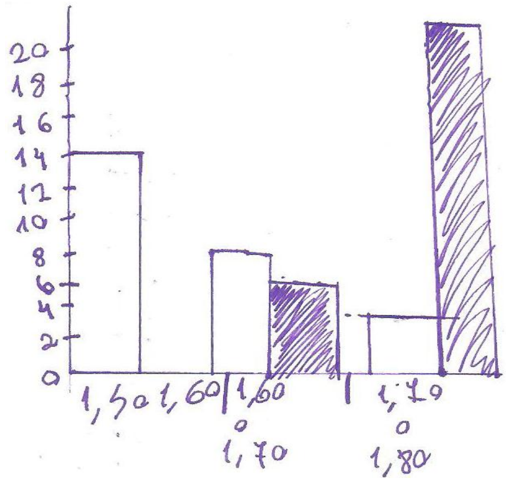
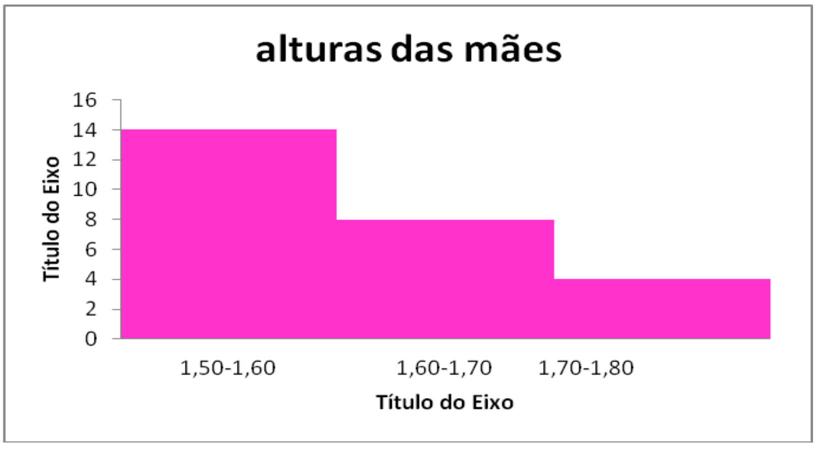


Figura 4. Resolução da questão 3a), da tarefa 3, pelo par P6.

Na resposta utilizando a folha de cálculo Excel, 38% dos alunos construiu uma tabela de frequências absolutas com os dados agrupados em classes e um histograma por sexo, 8% construiu uma tabela de frequências com os dados agrupados em classes e um histograma para pais e mães no mesmo gráfico, 8% construiu um gráfico com duas linhas, uma para os pais e outra para as mães, com todos os dados, 8% construiu um histograma só para as mães e 8% construíu um gráfico de barras, por sexo, com frequências absolutas. Os restantes alunos não respondem.

Reportando à Figura 5, constituída por uma tabela de frequências absolutas das idades dos pais e das mães, com os dados agrupados em classes e por dois histogramas, verifica-se que o par P3 não segue a regra empírica do número de classes aconselhada pelo professor. A resolução da figura responde corretamente à questão formulada, contudo continuam a surgir as falhas nos elementos identificativos dos gráficos. O diferente número de classes adotado para a distribuição das idades das mães e das idades dos pais dificulta a comparação.

3. a			
altura	**Mães**	**altura**	**Pais**
1,50-1,60	**14**	**1,50-1,60**	**1**
1,60-1,70	**8**	**1,60-1,70**	**6**
1,70-1,80	**4**	**1,70-1,80**	**15**
		1,80-1,90	**4**



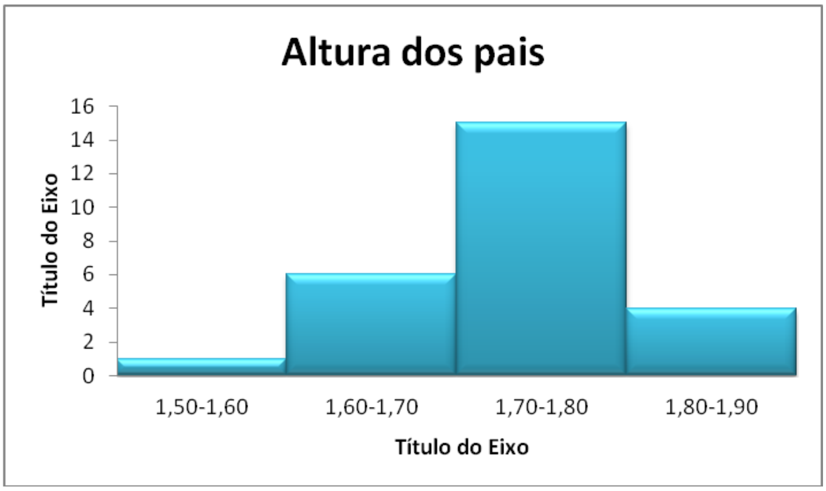


Figura 5. Resolução da questão 3a), da tarefa 3, pelo par P3.

Já na Figura 6, constituída por uma tabela de frequências e um gráfico, está representada a resolução do par P6. A solução encontrada por este par permite obter uma resposta à questão formulada, embora a construção dos histogramas à semelhança dos gráficos de barras adicionadas não seja adequada. A tabela não refere intervalos, mas o par P6 calcula a frequência absoluta, na tabela, de acordo com os intervalos definidos no gráfico.

altura dos pais	altura das mães
0	14
7	8
19	4

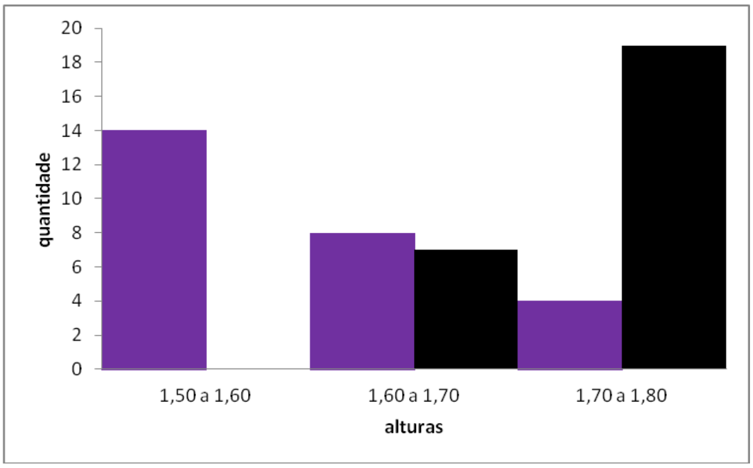


Figura 6. Resolução da questão 3a), da tarefa 3, pelo par P6.

b) *Constrói um gráfico que te permita comparar a altura dos pais da turma com a altura dos homens das várias nacionalidades referidas no enunciado da questão. O que se pode concluir?*

Na resposta com material de medição, desenho e de escrita, 31% dos alunos construiu um gráfico de barras com as médias das alturas dos homens de cada nacionalidade e com a média das alturas dos pais dos alunos, 8% dos alunos elaborou um gráfico de barras com as médias das alturas dos homens de cada nacionalidade sem considerar a média das alturas dos pais dos alunos da turma, 15% construiu tabelas de frequências absolutas e 46 % dos alunos não respondeu. Apenas 23% dos alunos concluiu corretamente que os pais dos alunos da turma são os mais baixos.

A resolução do par P7, apresentada na Figura 7, constituída por um gráfico com as médias de alturas dos homens das diferentes nacionalidades responde adequadamente à questão formulada.

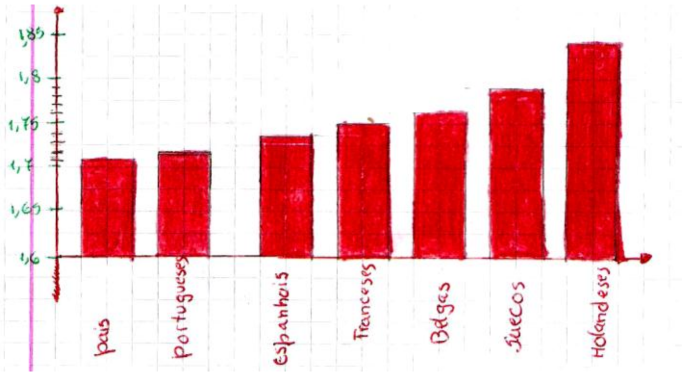


Figura 7. Resolução da questão 3b), da tarefa 3, pelo par P7.

Com a utilização da folha de cálculo Excel, os resultados são semelhantes aos obtidos com material de medição, desenho e de escrita.

Alguns alunos nas suas resoluções não fazem a quebra de escala (o eixo vertical não começa em zero). Os gráficos de barras não devem ter quebra de escala. Contudo, nesta questão, a quebra de escala não levanta problemas, já que os dados representados no gráfico são poucos e permite ao leitor reconhecer com alguma facilidade a existência da quebra de escala e fazer a leitura do gráfico tendo isso em consideração. A resolução do par P3, representada na Figura 8, responde de forma adequada à questão formulada.

4b-
A média dos pais da turma é de 1.71

País	Media (metros)
Pais	1,71
Portugueses	1,72
Espanhóis	1,74
Franceses	1,75
Belgas	1,76
Suecos	1,79
Holandeses	1,84

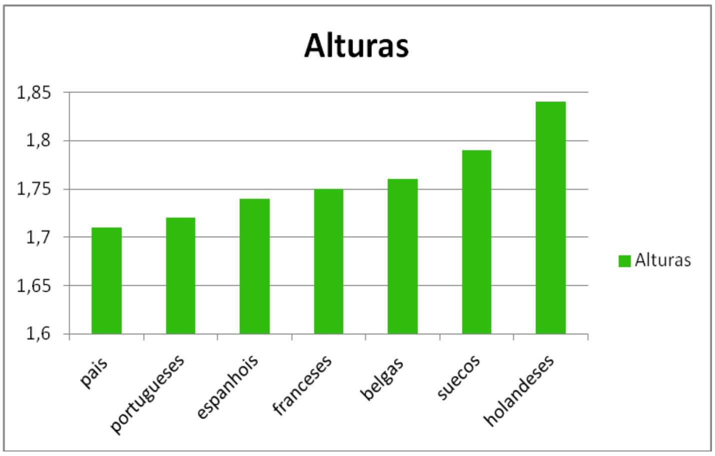


Figura 8. Resolução da questão 3b), da tarefa 3, pelo para P3.

Questão 4. Compara os passatempos preferidos dos pais e das mães recorrendo à construção, em papel e na folha de cálculo Excel, de um ou mais gráficos adequados.

Nesta questão, na resposta com material de medição, desenho e de escrita, 54% dos alunos construiu uma tabela de frequências absolutas e um gráfico de barras, por sexo, com as frequências absolutas, 23% construiu apenas uma tabela de frequências absolutas, por sexo, 8% construiu um gráfico de barras adicionadas com duas barras, representando numa o passatempo mais frequente para os pais e para as mães e na outra os outros passatempos. Os restantes alunos não responderam.

Esta foi uma das questões em que se verificou uma maior diversidade nas produções gráficas dos alunos. A maior parte das resoluções dos grupos de pares de alunos que responderam a esta questã fizeram-no de forma adequada.

Já na resolução representada na Figura 9, o par P6 construíu um gráfico de barras adicionadas com o passatempo preferido e os outros, fazendo a comparação dos passatempos preferidos dos pais com os passatempos preferidos das mães. Embora se possa perder informação com estas representações gráficas, elas podem ser muito úteis ao permitirem a concentração do leitor na informação mais relevante.

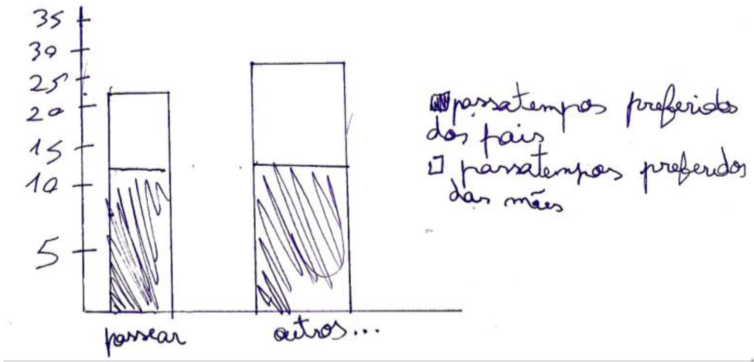


Figura 9. Resolução da questão 4, da tarefa 3, pelo par P6.

Na resolução utilizando a folha de cálculo Excel, 62% dos alunos construiu uma tabela de frequências absolutas e um gráfico de barras, por sexo, com as frequências absolutas, 15% construiu apenas uma tabela de frequências absolutas, por sexo, 8% construíu um gráfico de barras adicionadas com duas barras, representando numa o passatempo mais frequente para os pais e para as mães e na outra os outros passatempos, 4% dois gráficos circulares, por sexo, com as frequências absolutas e 4% um gráfico circular representando apenas os passatempos das mães dos alunos. Os restantes alunos não responderam.

Na resolução representada na Figura 10, constituída por uma tabela com os passatempos preferidos das mães e dos pais e por um gráfico de barras adicionadas, o par P6, encontra uma solução que transmite de uma forma rápida a informação que os alunos consideraram como mais relevante. Contudo há muita informação que se perde.

	Passatempos preferidos das mães	Passatempos preferidos dos pais
12	Passear	11
14	Outros	15

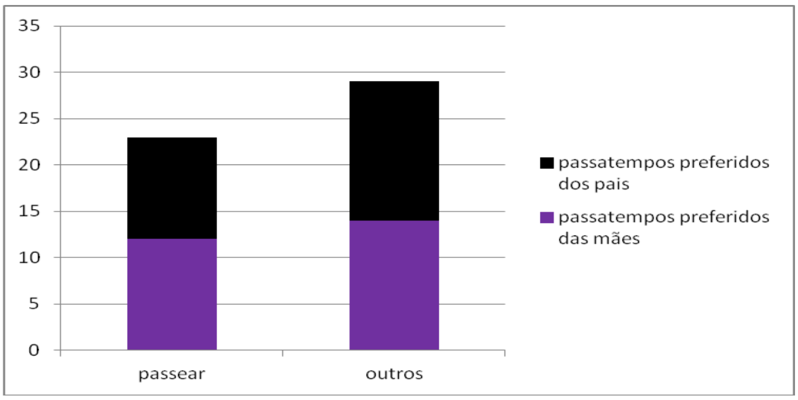


Figura 10. Resolução da questão 4, da tarefa 3, pelo par P6.

Complexidade semiótica dos gráficos produzidos pelos alunos

Nesta tarefa, na aplicação dos 4 níveis de Arteaga (2011) às produções gráficas dos alunos, foram classificadas produções gráficas no nível 4, apesar de a construção gráfica poder não estar correta e poder não pertencer a qualquer categoria de gráfico porque a sua leitura e interpretação permite comparar tendências e a variabilidade das duas variáveis numa única imagem.

Na questão 1, para obter uma resposta adequada os alunos tinham que construir gráficos de nível 2. No caso do uso de material de medição, desenho e de escrita, verificou-se que 39% dos alunos não construiu qualquer gráfico, 15% construiu gráficos de nível 1 e 46% construiu gráficos de nível 2. Ainda nesta questão, mas na resolução utilizando a folha de cálculo Excel, 23% dos alunos não construiu qualquer gráfico, 23% dos alunos construiu gráficos de nível 1 e 54% construiu gráficos de nível 2.

Na resolução representada na Figura 11, o par P12, construiu um gráfico de nível 1 dado que apenas representa parte das idades das mães e não efetuou qualquer redução de dados.

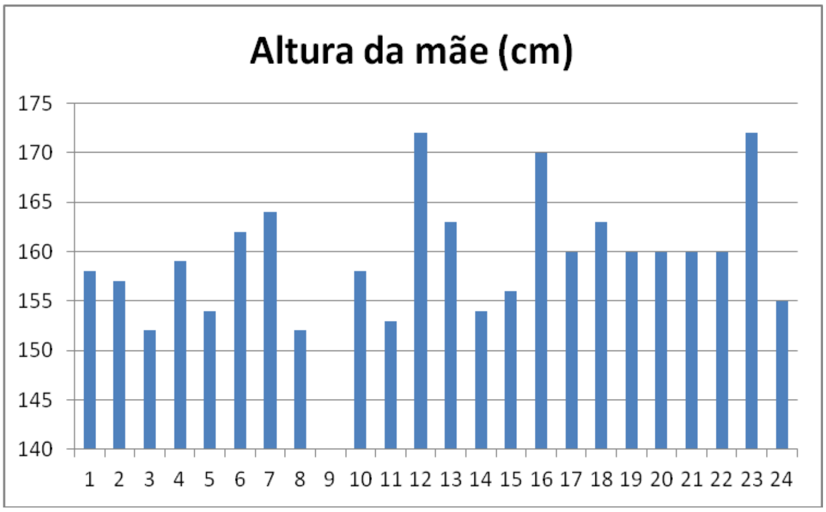
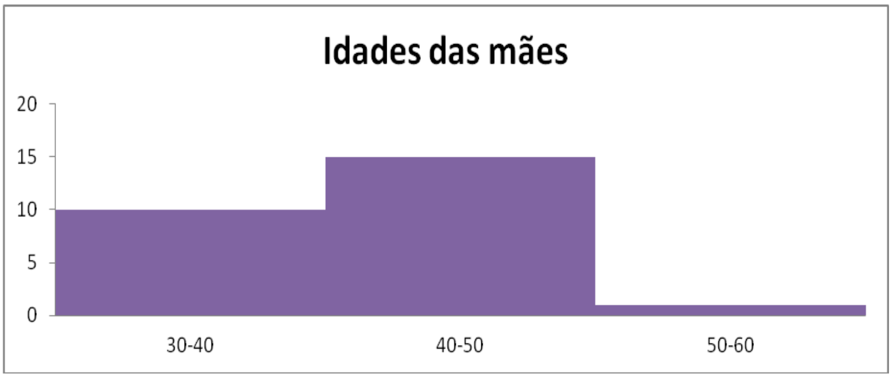


Figura 11. Resolução da questão 1, da tarefa 3, pelo par P12.

Na questão 2, para obter uma resposta adequada os alunos tinham que construir gráficos de nível 4. Quando foi usado material de medição, desenho e de escrita, 53% dos alunos não construiu qualquer gráfico, 8% dos alunos construiu gráficos de nível 2, 23% dos alunos construiu gráficos de nível 3 e 16% construiu gráficos de nível 4. Já na resposta a esta questão, quando foi utilizada a folha de cálculo, 14% dos alunos não construiu qualquer gráfico, 8 % dos alunos construiu gráficos de nível 2, 54% dos alunos construiu gráficos de nível 3 e 24% dos alunos construiu gráficos de nível 4.

Quanto à questão 3a), para obter uma resposta adequada os alunos tinham que construir gráficos de nível 4. Quando foi usado material de medição, desenho e de escrita, 38% dos alunos não construiu qualquer gráfico, 46% dos alunos construiu gráficos de nível 3 e 16% construiu gráficos de nível 4. Já no caso da utilização da folha de cálculo, 30% dos alunos não construiu qualquer gráfico, 8% dos alunos construiu gráficos de nivel 2, 46% dos alunos construiu gráficos de nível 3 e 16% construiu gráficos de nível 4.

Na resolução representada na Figura 12, o par P1 produziu gráficos de nível 3 pois por cada variável apresenta um gráfico separado. Ao construir os gráficos separados dificulta-se a comparação das distribuições. Todavia, o par P1 ao construir os dois gráficos com o mesmo número de classes e com a mesma amplitude de classe atenua a dificuldade de comparação das duas distribuições.



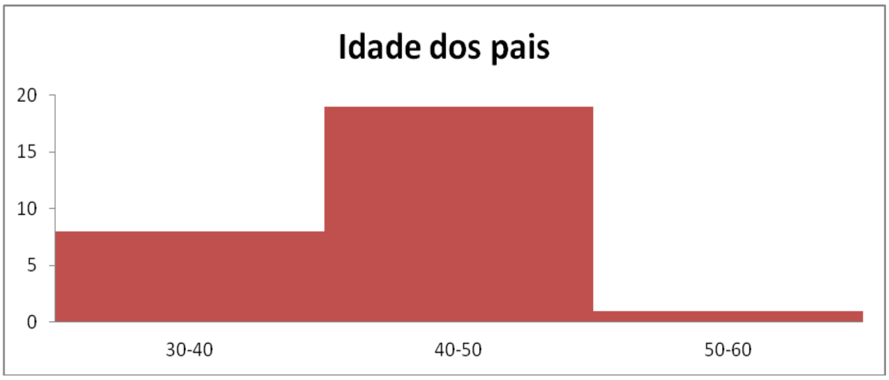


Figura 12. Resolução da questão 1, da tarefa 3, pelo par P1.

Na questão 3b), para obter uma resposta adequada, os alunos tinham que construir gráficos de nível 2. Quando foi usado material de medição, desenho e de escrita, 61% dos alunos não construiu qualquer gráfico, 8% construiu gráficos de nível 1 e 31% gráficos de nível 2. No caso da utilização da folha de cálculo, os resultados foram semelhantes aos obtidos quando foi usado material de medição, desenho e de escrita.

Finalmente, na questão 4, para obter uma resposta adequada, os alunos tinham que construir gráficos de nível 3. No caso da utilização de material de medição, desenho e de escrita, 38% dos alunos não construiu qualquer gráfico, 54% dos alunos construiram gáficos de nível 3 e 8% dos alunos construiu gráficos de nível 4. Já quando foi utilizada a folha de cálculo, 22% dos alunos não produziu qualquer gráfico, 4% produziu gráficos de nível 2, 66% produziu gráficos de nível 3 e 8% produziu gráficos de nível 4.

Dificuldades e erros dos alunos

A escolha da tabela e do gráfico adequados e a falta de títulos, legendas e de rótulos nas tabelas e nos gráficos foram os erros mais habituais. Os erros cometidos pelos alunos na construção de tabelas e gráficos estatísticos com e sem auxílio da folha de cálculo são do mesmo tipo, mas em menor número neste último caso.

Na construção de tabelas e de gráficos estatísticos, foram ainda erros frequentes os de contagem tendo em vista a determinação das frequências absolutas e ausência de arredondamentos nas questões em que os alunos determinaram freqências relativas. É significativo o número de pares que não construiu uma tabela de frequências, limitando-se a copiar os dados e a construir, a partir deles, um gráfico que não acrescentava nada aos dados em bruto.

5. Conclusões

Em termos de resultados, salienta-se a complementaridade da integração da folha de cálculo com o papel e lápis e o trabalho dos alunos em pares, que foram também valorizados pela grande maioria dos alunos. Os alunos responderam em maior número e de forma mais adequada quando utilizaram a folha de cálculo. A motivação proporcionada pela utilização da folha de cálculo, a relativa simplicidade do seu manuseamento, a facilidade com que os alunos ensaiaram soluções e a redução ou eliminação de erros revelaram-se importantes potencialidades da folha de cálculo na aprendizagem da construção de tabelas e gráficos estatísticos. Algumas limitações da folha de cálculo relacionaram-se com os erros na construção de tabelas e gráficos estatísticos que persistiram e as soluções prontas a usar disponibilizadas pela folha de cálculo que podem limitar a criatividade dos alunos.

O recurso à tecnologia e a utilização da folha de cálculo no ensino da estatística, para além de ser recomendado pelo programa de matemática para o ensino básico (Ministério da Educação, 2007), é igualmente defendida por diversos autores em muitos estudos. Neste sentido, Almeida (2002) considera que a Estatística, ao descrever a realidade, não pode ser ensinada de modo convencional, uma vez que não prepara os alunos para o mundo que os rodeia.

A abordagem da Estatística, à luz deste estudo, será um processo que apele ao sentido crítico do aluno, em que ele possa ser autor do seu conhecimento, recomendando-se, por isso, um ensino centrado no aluno, com recurso à tecnologia, até porque esta faz parte integrante da realidade que os rodeia. O software estatístico disponível nem sempre se revela adequado às aplicações didáticas específicas, cabendo ao professor conhecer as potencialidades e limitações do software disponível e selecionar, dentro das opções existentes, o software mais adequado.

Contudo, para além da tecnologia, e tal como estes alunos referiram, continua a haver um papel importante a desempenhar para o trabalho com material de desenho e de medição. Embora a realidade seja cada vez mais tecnológica, os alunos devem tomar consciência de como se trabalhou tradicionalmente a Estatística, dos pormenores do desenho, e dos pormenores que a azáfama tecnológica tem tendência a negligenciar.

Embora seja fundamental o trabalho individual do aluno, na sala de aula e fora dela, o trabalho de pares no tópico Organização e Tratamento de Dados é particularmente importante na resolução de tarefas, permitindo que os alunos troquem impressões entre si, esclareçam dúvidas e partilhem informações. Neste estudo, o trabalho de pares permitiu um constante fluir de informação e fomentou o espírito de entreajuda nos alunos, levando à superação de muitas das suas dificuldades. Roa, Correia e Fernandes (2009), numa intervenção de ensino de Combinatória, observaram perceções muito favoráveis dos alunos sobre o trabalho em pequenos grupos ao nível do surgimento de ideias, da sua participação nas tarefas propostas e da superação de dúvidas e dificuldades.

Já o trabalho na base da metodologia de projeto, centrado numa sucessão de pequenas tarefas interligadas e a abordagem de um tema do interesse dos alunos, em que os mesmos participaram ativamente na sua seleção, ajudou na motivação dos alunos para aprenderem estatística dado que, de uma forma simples, os alunos interiorizam o alcance das competências estatísticas que adquiriam.

Uma parte importante das dificuldades sentidas pelos alunos na resolução das tarefas deste estudo relacionava-se com a dificuldade dos alunos em operar com a folha de cálculo. Um contacto mais precoce dos alunos com esta tecnologia poderá contribuir para atenuar este problema. O novo currículo do ensino básico ao colocar no segundo ciclo a disciplina de TIC poderá ser uma via para colmatar algumas das dificuldades evidenciadas pelos alunos no decurso da intervenção de ensino.

O nível da complexidade semiótica do gráfico é um indicador da obtenção de conclusões, bem como da competência gráfica dos estudantes (Arteaga, 2011). Nas questões em que a resposta exigia o nível 4, os alunos atingiram o nível 3 com maior frequência, com ou sem recurso à folha de cálculo, o que está em consonância com os resultados obtidos por Arteaga (2011) no seu estudo com futuros professores primários. Já o número de alunos que não construiu gráficos é superior neste estudo relativamente aos resultados obtidos por este autor. Por outro lado, globalmente verifica-se que o nível de complexidade semiótica dos gráficos construídos pelos alunos aumenta quando eles utilizam a folha de cálculo.

Referências

Almeida, M. R. (2002). *Imagens sobre o ensino e a aprendizagem da Estatística*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tese de doutoramento, Universidade de Granada, Granada, Espanha.

Brocardo, J., & Mendes, F. (2001). Processos usados na resolução de tarefas estatísticas. *Quadrante*, 10(1), 33-58.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal For Research in Mathematics Education*, 18(5), 382-393.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension: elementary and middle school activities*. Reston, VA: NCTM.

Espinel, C., González, T., Bruno, A., & Pinto, J. (2009). Las gráficas estadísticas. In L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en Educación Estadística* (pp. 133-156). Melilla: Facultad de Humanidades y Educación.

Fernandes, J. A. & Vaz, O. (1998). Porquê usar tecnologia nas aulas de matemática? *Boletim da SPM*, n.º 39, 43-55.

Fernandes, J. A., Almeida, C., Viseu, F. & Rodrigues, A. M. (1999). Um estudo exploratório sobre atitudes e práticas de professores de matemática na utilização de calculadoras. In C. Almeida, J. A. Fernandes, A. M. Rodrigues, A. P. Mourão, F. Viseu & H. Martinho (Orgs.), *Calculadoras gráficas no ensino da matemática* (pp. 1-28). Braga: Departamento de Metodologias da Educação da Universidade do Minho.

Fernandes, J. A., Alves, M. P., Machado, E. A., Correia, P. F., & Rosário, M. A. (2009). Ensino e avaliação das aprendizagens em Estatística. In J. A. Fernandes, M. H. Marinho, F. Viseu & P. F. Correia (Orgs.), *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 52-71). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho [CD-ROM].

Ferreira, E. M. B. (2006). *Ensino e aprendizagem em ambientes geométricos dinâmicos: o tema de geometria do 9.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.

Gonçalves, C. V. P. (2011). *O ensino e a aprendizagem de Estatística com tecnologia: uma experiência no 7º ano de escolaridade*. Relatório de Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Hawkins, A. Jolliffe, F., & Glickman, L .(1992). *Teachining statistical concepts*. Londres: Longman.

Jungkenn, M. A. T.; & Del Pino, J. C. (2009). Analisando a capacidade de estudantes concluintes do Ensino Fundamental de interpretar informações de gráficos e tabelas. In *Anais do VII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências.*. Belo Horizonte: Associação Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências.

Kosslyn, S. M. (1985). Graphics and human information processing. *Journal of the American Statistical Association*, 80(391), 499-512.

Lopes, C. A. E. (2004). Literacia estatística e o INAF 2002. In: M. C. F. R. Fonseca, (Org.), *Letramento no Brasil: habilidades matemáticas: reflexões sobre o INAF 2002* (pp. 187-197). São Paulo: Global Editora.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

Morais, P. C. (2011). *Construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática*, 34, 2-7.

Ponte, J. P. (1997). *As Novas Tecnologias e a Educação*. Lisboa: Texto Editora.

Ponte, J. P., & Canavarro, A. P. (2007). *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ribeiro, J. O. (2007). *Leitura e interpretação de gráficos e tabelas: um estudo exploratório com professores*. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Ribeiro, M. J. B., & Ponte, J. P. (2000). A formação em novas tecnologias e as concepções e práticas dos professores. *Quadrante*, 9(2), 3-26.

Roa, R., Correia, P. F., & Fernandes, J. A. (2009). Percepciones de los estudiantes de una clase de bachillerato sobre una intervención de enseñanza en Combinatoria. In María Guzmán P. (Coord.), *Arte, Humanidades y Educación: Aportaciones a sus ámbitos científicos* (pp. 323-347).Granada, Espanha: Editorial Atrio.

Ruiz, B., Arteaga, P., & Batanero, C. (2009). Competencias de futuros profesores en la comparación de datos. In L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 57-74). Málaga: Gráficas San Pancracio.

Silva, A. A. (2006). *Gráficos e mapas: representação de informação estatística*. Lisboa: LIDEL.

Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher*, 21(1), 14-23.

Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

RELEVÂNCIA DOS GRÁFICOS ESTATÍSTICOS NOS MANUAIS ESCOLARES DA DISCIPLINA DE CIÊNCIAS FÍSICO-QUÍMICAS

Diana Sofia Jesus
Centro de Investigação em Educação, b6017@iep.uminho.pt
José António Fernandes
Universidade do Minho, jfernandes@ie.uminho.pt
Laurinda Leite
Universidade do Minho, lleite@ie.uminho.pt

Resumo. Neste trabalho estudam-se os gráficos estatísticos incluídos nos manuais escolares da disciplina de Ciências Físico-Químicas do 3.º ciclo do ensino básico, focado na análise do tipo e qualidade dos gráficos e no nível de compreensão requerido para a sua leitura e interpretação. Para tal recorreu-se a um total de 12 manuais escolares (quatro do 7.º ano, quatro do 8.º ano e quatro do 9.º ano). Em termos de resultados, salienta-se o recurso a gráficos de barras e circulares, pequenas falhas na construção dos gráficos ao nível do título e das especificações e a exigência dos níveis de compreensão 2 e 3 de Curcio (1989) para a sua leitura e interpretação.
Palavras-chave: Gráficos estatísticos; Manuais escolares de Ciências Físico-Químicas; 3.º ciclo do ensino básico.

Introdução

A disciplina de Ciências Físico-Químicas, estando ligada à evolução científica e tecnológica, contribui para o processo de formação científica da população, essencial para a capacidade de adaptação dos indivíduos ao mundo atual. O primeiro contacto com a disciplina ocorre no 3.º ciclo do ensino básico, que se assume como um período de grande importância na sua aprendizagem, pois é neste nível de escolaridade que ocorre um primeiro contacto com conceitos específicos da disciplina, do qual poderão depender opções escolares futuras.

Para além de outros fatores, a aprendizagem dos conceitos das Ciências Físico-Químicas está relacionada com a aquisição de conhecimentos matemáticos. Também na opinião dos alunos do 9.º ano de escolaridade, segundo verificou Fernandes (2007), a disciplina de Matemática é uma ferramenta útil e importante na compreensão das Ciências Físico-Químicas, o que resulta da perceção de uma estreita relação entre ambas.

No processo de ensino e aprendizagem da generalidade das disciplinas escolares, e também das Ciências Físico-Químicas, os recursos didáticos desempenham um papel fundamental. De entre os diferentes recursos pedagógicos existentes, o manual escolar é tido como muito importante quer pela Lei de Bases do Sistema Educativo revista (Lei nº 49/2005, de 30 de agosto, artigo 44.º), quer pelos próprios professores.

Na verdade, para além do uso que lhes é dado pelos alunos, no seu trabalho fora da sala de aula, a importância dos manuais escolares deriva, sobretudo, do facto de eles serem profusamente usados pelos professores na preparação e implementação do ensino. Deste modo, eles exercem uma grande influência sobre aquilo que os alunos aprendem na escola, assumindo-se, com frequência, para muitos professores, como o currículo a implementar e fornecendo fortes indicações sobre o currículo implementado, prevalecendo para além de mudanças nas políticas educativas e curriculares (Morgado, 2004).

Nos manuais atualmente disponíveis, a relação entre ambas as disciplinas pode ser observada sob diversas formas, sendo uma delas os gráficos estatísticos. Este tipo de gráficos são uma forma de expressar tendências ou conclusões de estudos ou experiências onde há recolha, análise e processamento de dados. Assim, independentemente do ano de escolaridade a que se destinam, eles assumem um papel importante ao permitirem representar uma grande quantidade de dados de uma forma condensada, clara e organizada (Carvalho, 2009).

Tendo em conta a relevância dos aspetos acima mencionados, isto é, da formação científica dos indivíduos, da apreciação das Ciências Físico-Químicas como disciplina que se encontra ligada à evolução científica e tecnológica, dos gráficos como forma de comunicação e dos manuais escolares como mediadores do conhecimento a adquirir na disciplina, o presente estudo foca-se em dois aspetos relativos à utilização de gráficos estatísticos nos manuais escolares de Ciências Físico-Químicas do 3.º ciclo do ensino básico: o tipo e a qualidade dos gráficos estatísticos que são utilizados nos manuais escolares e o nível de compreensão requerido para a leitura e interpretação desses gráficos.

1. Enquadramento teórico

Focando-se o estudo nos aspetos relativos ao tipo e à qualidade dos gráficos estatísticos usados nos manuais escolares e à compreensão que é requerida aos alunos na leitura e interpretação desses gráficos, torna-se relevante desenvolver uma revisão de literatura centrada na importância dos manuais escolares como mediadores entre o conhecimento científico e o conhecimento escolar e na construção, leitura e interpretação dos gráficos estatísticos.

1.1. Manuais escolares e sua importância

Embora o avanço das tecnologias de informação e comunicação tenha provocado uma evolução ao nível dos recursos pedagógicos à disposição dos professores e alunos, a utilização do manual escolar nas escolas, nomeadamente no ensino das Ciências, mantém-se como um meio de ensino e aprendizagem muito relevante.

Este recurso assume um papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem, devendo ser elaborado com base nas orientações curriculares homologadas pelo Ministério da Educação e conter toda a informação teórica relativa aos diferentes conteúdos programáticos, para além de atividades didáticas, atividades de avaliação dos conteúdos e ainda orientações dirigidas aos professores, centrando-se, em primeiro lugar, no aluno com o objetivo de contribuir para o seu desenvolvimento intelectual (Decreto de Lei n.º 47/2006, artigo 3.º, alínea b).

Observando a organização dos conteúdos no currículo nacional ou dirigindo a análise sobre outros países, o manual escolar estabelece uma relação estreita entre as práticas pedagógicas e os objectivos das aprendizagens, interferindo no trabalho do professor ou nos conhecimentos que se transmitem nas escolas (Morgado, 2004); ideia também partilhada por Ortiz (2002), para quem o manual escolar determina de uma forma preponderante quais os conteúdos e a forma como devem ser ensinados. Para alunos os manuais escolares são tidos como um reservatório de informações que, embora possa ir além da informação que é exigida pelas orientações curriculares, contém a informação que necessitam para serem aprovados à disciplina (Morgado, 2004). Alguns dos aspetos já mencionados, relativos ao papel dos manuais escolares, já tinham sido também constatados por Pereira e Duarte (1998) num estudo envolvendo professores e onde se concluiu que a maioria deles usava os manuais escolares para delinear as suas estratégias de ensino, considerando-os um suporte na organização das aprendizagens feitas pelos alunos e um mediador na construção do conhecimento científico.

Na escola, os manuais escolares são uma ponte entre uma linguagem científica e uma linguagem capaz de estimular e promover o gosto e a curiosidade do aluno pelas ciências, ou seja, uma linguagem que torna o conhecimento científico compreensível para o aluno (Guimarães, 2009). Por outro lado, é também reconhecido aos manuais escolares um papel de ligação entre a escola e a família, uma vez que permitem à família acompanhar e orientar as aprendizagens do aluno (Viseu, Fernandes & Gonçalves, 2009).

Na aprendizagem das Ciências o manual escolar tem um papel preponderante, na medida em que pode promover, ou não, no aluno o espírito crítico e a curiosidade pelas ciências, aspetos que poderão ser desenvolvidos através da sua capacidade em colocar questões. A colocação de questões, por parte do aluno, gera e organiza saber escolar e também desperta o desejo por coisas novas, para além de promover a reflexão (Morgado, 2004). Os manuais escolares procuram estimular esses aspetos, entre outros, colocando questões aos alunos. Leite, Dourado, Morgado, Vilaça, Vasconcelos, Pedrosa & Afonso (2012) constataram que os manuais escolares são portadores de um elevado conjunto de questões com diversas funções, que podem ir desde a avaliação de conhecimentos, surgindo, geralmente, no final de cada unidade, até contemplar questões que atribuam ao aluno um papel mais ativo, com o objetivo promover a capacidade de raciocinar, a procura de conhecimento e a curiosidade do aluno pela ciência, questões que surgem antes ou durante o desenvolvimento de um tema. No caso dos gráficos apresentados no manual escolar, o questionamento que os acompanham permitem analisar o nível de compreensão requerido na sua leitura e interpretação.

O aluno tem acesso, de uma forma geral, a dois tipos de livros: o livro de texto e o livro auxiliar, embora existam editoras e autores que disponibilizam, para acompanhar o mesmo livro de texto, mais que um livro auxiliar. Frequentemente, estes livros auxiliares são designados por cadernos de atividades, cadernos de exercícios e fichas de apoio. O livro de texto apresenta um caráter mais teórico, onde, de forma geral, são expostos os conceitos científicos, exploradas situações do quotidiano ou fenómenos naturais e apresentadas tarefas de consolidação dos conceitos científicos, constituindo, para o aluno, um suporte teórico a que ele pode recorrer sem a necessidade da presença do professor (Morgado, 2004). Já o livro auxiliar apresenta um caráter prático, constituindo-se como um complemento ao livro de texto, apresentando tarefas mais práticas cujo objetivo principal é a aplicação e treino dos conteúdos abordados.

1.2. Gráficos

Os "gráficos [estatísticos] providenciam um meio de comunicação e classificação de dados" (Curcio, 1989, p. 1), proporcionam a compactação de dados, a comparação de dados e a visualização de determinados aspetos que de outra forma não seriam evidentes. Os gráficos não permitem visualizar pequenos aspetos dos dados, mas permitem que o leitor visualize de imediato diferenças e semelhanças entre eles (Wallgren, Wallgren, Persson, Jorner & Haaland, 1996).

Os gráficos assumem um papel importante em diferentes áreas, encontrando-se entre elas as ciências. Arteaga, Batanero, Cañadas e Contreras (2011) mencionam as ciências como uma área onde este tipo de representações serve para comunicar conceitos abstratos, sendo utilizadas em atividades experimentais para o tratamento e análise de dados, e como auxiliares na determinação de relações entre variáveis que interferem num fenómeno. Podem, por isso, ser também úteis na construção de modelos explicativos de fenómenos físicos e naturais.

Naturalmente que a aprendizagem dos alunos através de gráficos depende das tarefas de construção de gráficos (para representar dados) e de leitura e interpretação de gráficos (já construídos), quer no que respeita ao tipo de gráfico quer no que se refere ao modo como as referidas tarefas são apresentadas ao aluno.

A construção de gráficos

A representação de dados através de gráficos sofreu, ao longo dos tempos, uma considerável evolução no sentido da diversificação e polivalência da representação graças aos avanços tecnológicos, o que se tem feito sentir na escola, mesmo ao nível do ensino básico. Atualmente, os alunos têm contacto com diferentes tipos de gráficos que organizam a informação de forma distinta. Dentro dos diferentes tipos de gráficos, é possível distinguir gráficos em formatos mais tradicionais, como pictogramas, gráficos de barras, gráficos de linhas ou gráficos circulares, e outros resultantes da evolução de novas técnicas de construção, como gráficos de caule-e-folhas e diagramas de extremos e quartis (Curcio, 1989), que enfatizam a análise exploratória de dados.

A construção de um gráfico deve ser feita de forma cuidada e criteriosa. A pessoa que constrói um gráfico deve fazê-lo de forma harmoniosa, colocando no gráfico as informações de forma clara e organizada, dando realce ao que é importante sem sobrecarregar demasiado o leitor na sua leitura (Wallgren et al., 1996). Para tal deve-se ter em conta que um gráfico é constituído por um conjunto de elementos, que permitem a organização da informação em duas áreas fundamentais: a área exterior e área de desenho (Silva, 2006). Na área exterior devem estar presentes informações tais como o título, que tem como fim orientar o leitor; as identificações, que dão informação acerca dos eixos, das unidades e ainda informação relativa, por exemplo, à fonte de informação de onde foram retirados os dados; e a legenda, constituída por um símbolo e respetiva designação. A legenda, quando necessária, deve ser clara, não criando confusão entre o símbolo e o componente representado, enquanto em situações em que dificulta a leitura do gráfico, ela deve ser omitida, colocando-se as designações junto das respetivas categorias. A área de desenho contém o eixo de categorias, onde se encontram as variáveis que se pretende analisar; o eixo de valores, onde se encontram algarismos importantes para a leitura dos dados; linhas auxiliares, que servem para ajudar a leitura dos dados do gráfico e não devem ser tão realçadas quanto as linhas dos eixos, pois quando salientadas em demasia são desagradáveis visualmente e não ajudam à leitura do gráfico. Para além destes elementos, podem existir outros elementos de auxílio à leitura, como por exemplo, a utilização no gráfico de um símbolo para assinalar valores anormais (Silva, 2006).

Ainda acerca da construção dos gráficos, segundo Friel, Curcio e Bright (2001), deve-se ter em conta quatro elementos: um relacionado com a dimensão visual do gráfico, denominado por especificadores, utilizado para representar os valores dos dados; um outro elemento são as etiquetas, que atribuem nomes aos elementos usados como especificadores; o título do gráfico; e, por último, o fundo do gráfico, existindo para este um conjunto de opções que podem ir desde uma cor específica até à utilização de uma imagem. No entanto, para estes autores, a construção de um gráfico corresponde a uma forma própria de comunicar, que vai para além dos quatro elementos mencionados.

A escolha do gráfico adequado para representar uma determinada variável é influenciada por alguns aspetos, tais como a estrutura dos dados, o tipo de variável ou a escala de valores utilizada (Wallgren et. al., 1996). A escolha e a construção de um gráfico que represente os dados, de forma clara e objetiva, não é um processo fácil, como é referido por Silva (2006).

A dificuldade inerente ao processo de construção de gráficos estatísticos para representar dados resulta do facto de os gráficos constituírem objetos matemáticos de grande complexidade semiótica (Ruiz, Arteaga & Batanero, 2009), e esta dificuldade aumenta quando confrontamos o aluno com a exigência de escolha do gráfico adequado para representar esses dados (Fernandes, Morais & Lacaz, 2011).

Também o tipo de gráfico que é adequado à representação dos dados influencia o desempenho dos alunos, como foi verificado por Fernandes, Morais e Lacaz (2011), em que o gráfico de barras se revelou mais fácil e o histograma se mostrou muito difícil para quase todos alunos que participaram no estudo. Este resultado, para além de razões didáticas, relativas às experiências de aprendizagem vivenciadas pelos alunos, também tem origem na diferente complexidade semiótica de cada um dos gráficos, uma vez que a construção de um histograma é muito mais complexa do que a construção de um gráfico de barras.

A leitura e interpretação de gráficos

A compreensão de informação envolve um conjunto de três tipos de comportamento: tradução, interpretação e extrapolação. A tradução requer a capacidade de mudar a forma como comunicamos os dados, por exemplo, a descrição de um gráfico; a interpretação exige um rearranjo do material, realizando ilações acerca dos dados representados, por exemplo, analisando a relação que existe entre as barras e os eixos num gráfico de barras; por último, a extrapolação, sendo considerada um prolongamento da interpretação, requer não só a informação essencial que consta dos dados representados como também possíveis consequências da informação obtida anteriormente (Jolliffe, 1991).

A compreensão de gráficos tem sido abordada por muitos investigadores como sendo a sua leitura e interpretação, enquanto outros autores incluem também outros fatores, tais como a construção ou a escolha do gráfico, como aspetos capazes de influenciar a compreensão de um gráfico (Friel, Curcio & Bright, 2001).

Quando através da observação de um gráfico se consegue interpretar e retirar conclusões acerca dos dados nele representados diz-se que é atingido o potencial máximo de um gráfico (Curcio, 1989). Ainda relativamente a este assunto, a compreensão de um gráfico inclui a habilidade, por parte do leitor, em conferir um significado aos gráficos, quer tenham sido construídos por outros ou por ele mesmo (Friel, Curcio & Bright, 2001).

Para Curcio (1989) é possível distinguir três níveis de compreensão de um gráfico: ler os dados, ler entre os dados e ler para além dos dados. No primeiro nível, ler os dados, é realizada uma leitura literal do gráfico, não existindo uma interpretação dos dados. O aluno limita-se a ler a informação que se encontra explícita no gráfico, como o título, a escala ou as unidades. No segundo nível, ler ente os dados, são identificadas relações matemáticas entre os dados representados no gráfico, exigindo-se uma interpretação dos dados a partir da realização de comparações entre as diferentes grandezas e recorrendo-se a conceitos matemáticos por forma a combinar e integrar os dados. Este nível é mencionado por Curcio (1989) como sendo o mais utilizado na compreensão de um gráfico, sendo exigido ao aluno apenas que relacione os dados e identifique tendências no gráfico. Por último, no nível ler para além dos dados o aluno ao ler e interpretar a informação contida no gráfico deverá ser capaz de utilizar conhecimentos já adquiridos e realizar previsões acerca dos dados. O aluno deverá responder a questões que vão para além da informação explícita e implícita no gráfico, mobilizando conhecimentos acerca do contexto dos dados e fazendo inferências acerca dos mesmos.

Num estudo envolvendo os níveis de compreensão de Curcio, Fernandes e Morais (2011) levaram a cabo um estudo com alunos do 9.º ano de escolaridade onde concluíram, à semelhança de Curcio, que os alunos revelaram pouca dificuldade nas questões de nível 1 (ler os dados), enquanto nas questões de nível 2 e 3 se verificou um aumento das dificuldades sentidas, ligeiramente mais acentuado nas questões de nível 2 do que nas questões de nível 3. No caso do nível 2, os autores explicaram as dificuldades dos alunos com base na falta de conhecimentos matemáticos e no tipo de ensino por que tinham passado os alunos, privilegiando os aspetos algorítmicos associados à regra de três simples. Ainda relativamente ao mesmo estudo, as dificuldades observadas nas questões de nível 1 encontravam-se relacionadas com a não observação de todos os elementos do gráfico ou da leitura incorreta do enunciado. Relativamente ao nível 2, os erros cometidos nas questões estavam associados com conhecimentos matemáticos e com a interpretação dos gráficos. Já nas questões de nível 3 verificou-se que os alunos apresentavam um desconhecimento do contexto dos dados, não sendo capazes de inferir ou predizer resultados para além das informações explícitas ou implícitas no gráfico.

Ora, face às dificuldades reveladas pelos alunos, torna-se necessário intervir no processo de ensino e aprendizagem relativo à construção, leitura e interpretação de gráficos por forma a desenvolver um ensino que contribua para uma melhor compreensão dos gráficos e dos seus elementos, tal como é referido nas conclusões do estudo de Morais (2010). As tarefas realizadas na sala de aula são cruciais para a interpretação dos gráficos estatísticos. Na sala de aula o aluno deve ser encorajado a interpretar, a discutir e a escrever acerca do gráfico, promovendo situações onde os alunos coloquem questões e façam criticas acerca das questões colocadas por outros alunos, permitindo desta forma clarificar e partilhar ideias (Curcio, 1989).

2. Metodologia

A presente investigação centra-se no estudo dos gráficos utilizados nos manuais escolares da disciplina de Ciências Físico-Químicas do 3.º ciclo do ensino básico, com ênfase nos dois seguintes objetivos de investigação: analisar o tipo e a qualidade dos gráficos que são apresentados nos manuais escolares ao longo da apresentação dos diferentes tópicos programáticos; estudar o nível de compreensão requerido aos alunos na leitura e interpretação dos gráficos a partir do questionamento que acompanha os gráficos estatísticos.

Foram utilizados manuais escolares do 7.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade e, para cada um destes anos, foram selecionados quatro grupos de autores distintos. Os manuais foram selecionados tendo em consideração sucessivamente os dois seguintes critérios: o primeiro diz respeito à seleção dos grupos de autores, selecionando-se os mais adotados nas escolas; o segundo refere-se ao ano de edição dos manuais, tendo sido selecionados as edições mais recentes dos manuais de cada um desses grupos de autores, para cada ano escolar.

Cada manual escolar é constituído por dois tipos de livros distintos, os livros de texto e os livros auxiliares. Ao todo, foram analisados 29 livros, dos quais 14 são livros de texto. Nestes livros de texto, geralmente, é feita uma explicação teórica dos diferentes conteúdos programáticos e também são apresentados exercícios de aplicação. Os restantes 15 livros auxiliares, incluindo cadernos de atividades, cadernos de fichas ou fichas de apoio, destinam-se a complementar o livro de texto e têm um carácter prático e centrado na consolidação das aprendizagens.

Na amostra de manuais escolares analisados foi possível observar que nem todos os livros utilizavam gráficos e que os autores dão maior destaque aos livros de texto em detrimento dos livros auxiliares para efeitos de utilização de gráficos, tal como se mostra na Tabela 1.

Tabela 1 — Distribuição dos livros que constituem os manuais escolares por ano de escolaridade

Ano	Manuais analisados		Manuais com gráficos estatísticos	
	Texto	Auxiliar	Texto	Auxiliar
7.º	6	6	4	3
8.º	4	5	4	2
9.º	4	4	3	0
Total	14	15	11	5

Através da Tabela 1 também é possível observar uma diferença na frequência de livros com gráficos estatísticos que surgem nos diferentes anos de escolaridade: no 7.º ano de escolaridade (7 de 12) e no 8.º ano de escolaridade (6 de 9) os gráficos surgem mais vezes, enquanto no 9.º ano de escolaridade (3 de 8) a sua utilização é menor e são observados gráficos apenas no caso dos livros de texto.

A cada livro foi atribuído um código constituído pelo ano de escolaridade (7, 8 ou 9), por uma letra maiúscula para representar o autor ou autores (A, B, C ou D) e pelas iniciais do tipo de livro (LT – Livro de Texto; LA – Livro Auxiliar, incluindo caderno de atividades, caderno de exercícios e fichas de apoio). Em Anexo apresentam-se os referidos códigos relativos a cada um dos livros incluídos no estudo.

O tratamento e a análise de dados foram centrados nos temas ou capítulos do manual escolar onde houve recurso a gráficos estatísticos. A partir dos gráficos foram recolhidas informações tendo em conta a seguinte ordem: tema da disciplina onde o gráfico é utilizado; o tipo de livro em que surge; o tipo de gráfico; elementos relativos à sua construção e, nos que apresentavam um questionário associado, a análise das questões colocadas. Os gráficos contendo um questionário representam apenas uma parte da totalidade de gráficos analisados e com base neles foram estudados os níveis de leitura e interpretação de gráficos de Curcio (1989). A informação recolhida foi resumida em tabelas e os dados expressos na forma de frequências, estabelecendo-se comparações atendendo ao ano de escolaridade, ao tipo de livro e aos autores.

3. Apresentação de resultados

Nesta secção são apresentados os resultados da investigação feita sobre os gráficos em manuais escolares de Ciências Físico-Químicas do 3.º ciclo do ensino básico, especificamente em relação ao tipo e qualidade dos gráficos e à compreensão requerida na sua leitura e interpretação.

3.1. Tipo e qualidade dos gráficos

Nos manuais escolares é possível observar a utilização de gráficos em situações distintas: o gráfico acompanha a exposição de determinado conteúdo, funcionando como um reforço do que está a ser exposto; o gráfico vem acompanhado de um questionário, surgindo na introdução ou no desenvolvimento de determinado conteúdo e funcionando como um estímulo à aprendizagem de determinado conceito; e o gráfico contribui para a consolidação dos conceitos anteriormente aprendidos, surgindo no final de um tema.

Ainda no primeiro objetivo da presente investigação, relativo ao tipo de gráficos utilizados nos manuais escolares, estudámos a distribuição dos diferentes tipos de gráficos por ano de escolaridade (Tabela 2) e por autores (Tabela 3).

Tabela 2 — Distribuição dos diferentes tipos de gráficos por ano de escolaridade

Tipo de gráfico	7.º ano		8.º ano		9.º ano		Total
	Texto	Auxiliar	Texto	Auxiliar	Texto	Auxiliar	
Barras simples	1	0	1	1	1	0	4
Barras agrupadas	2	0	1	0	0	0	3
Barras empilhadas	0	1	0	0	0	0	1
Circular	9	2	7	1	0	0	19
Linha	4	0	2	0	2	0	8
Área	0	1	0	0	0	0	1
Total	16	4	11	2	3	0	36

Do total de 36 gráficos incluídos em todos os manuais escolares analisados, verifica-se que os diferentes tipos de gráficos surgem nos manuais escolares pela seguinte ordem decrescente de frequência: gráfico circular, gráfico de barras (simples, empilhadas e agrupadas), gráfico de linha e gráfico de área. É no 7.º e 8.º anos que se verifica a utilização de gráficos circulares, enquanto no 9.º ano este tipo de gráfico não surge. No 9.º ano, embora o número total gráficos seja reduzido, parece destaca-se o gráfico de linha.

Considerando os dois tipos de livros: livros de texto e livros auxiliares, que o aluno utiliza em cada ano escolaridade, observa-se uma diferença na quantidade de gráficos que neles aparecem. Os gráficos surgem com maior frequência no livro de texto do que no livro auxiliar (Tabela 2). No caso do livro de texto ainda foi possível observar que existe um maior número de gráficos sem questionário associado (21 no total de 31).

De entre os tipos de gráficos de barras que existem, observa-se que o gráfico de barras simples surge com mais frequência, em detrimento dos gráficos de barras empilhadas ou agrupadas (Tabela 2).

A Tabela 3 permite observar que todos os autores utilizam gráficos estatísticos nos seus manuais escolares do 3.º ciclo do ensino básico. No entanto, alguns autores destacam-se relativamente a outros, fazendo uso desta forma de representação de dados com maior frequência, nomeadamente o autor C com o maior número de gráficos, seguido dos autores A e B, com igual número de gráficos.

Tabela 3 — Distribuição dos diferentes tipos de gráficos estatísticos por autores

	Autor *A*		Autor *B*		Autor *C*		Autor *D*		Total
	Texto	Auxiliar	Texto	Auxiliar	Texto	Auxiliar	Texto	Auxiliar	
Barras simples	1	1	1	0	1	0	0	0	4
Barras agrupadas	1	0	0	0	1	0	1	0	3
Barras empilhadas	0	1	0	0	0	0	0	0	1
Circular	3	1	5	0	5	1	3	1	19
Linha	0	0	1	0	5	0	2	0	8
Área	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Total	5	3	7	1	12	1	6	1	36

Novamente os livros de texto se apresentam como a preferência dos autores para incluir gráficos estatísticos, verificando-se que todos os autores utilizam com maior frequência gráficos nos livros de texto do que nos livros auxiliares (Tabela 3).

Os quatro autores utilizam com pouca frequência gráficos de barras e de área, optando pelos gráficos circulares, quer no livro de texto quer no livro auxiliar. O autor *C* utiliza com maior frequência aos gráficos circulares e aos gráficos de linha (Tabela 3).

Para além dos aspetos já mencionados, foi possível observar outro tipo de tendência nos manuais escolares, nomeadamente no que diz respeito à possível ligação entre os diferentes tipos de gráficos e os conteúdos a ser lecionados. Tendo em conta as Orientações Curriculares da disciplina de Ciências Físico-Químicas (2001), durante a análise dos manuais observou-se uma tendência para a utilização de gráficos estatísticos em determinados temas, conforme se mostra na Tabela 4.

Tabela 4 — Distribuição dos gráficos estatísticos pelos diferentes temas da disciplina de Ciências Físico-Químicas

Ano	Temas	Barras Simples	Barras Agrupadas	Barras empilhadas	Circular	Linha	Área	Total
7.º	Universo	0	0	0	0	0	0	0
	Sistema Solar	0	0	0	0	0	0	0
	Planeta Terra	0	0	0	0	0	0	0
	Materiais	1	0	0	5	0	0	6
	Energia	0	2	1	6	4	1	14
8.º	Som e luz	0	0	0	0	0	0	0
	Reações químicas	1	0	0	0	0	0	1
	Mudança global	0	0	0	3	1	0	4
	Gestão sustentável dos recursos	1	1	0	5	1	0	8
9.º	Em trânsito	0	0	0	0	2	0	2
	Sistemas elétricos e eletrónicos	0	0	0	0	0	0	0
	Classificação dos materiais	1	0	0	0	0	0	1
	Ciência e Tecnologia e qualidade de vida	0	0	0	0	0	0	0

Por observação da Tabela 4 conclui-se que no 7.º ano todos os gráficos utilizados nos manuais se encontram incluídos em dois temas: o tema "Materiais" e o tema "Energia". No 8.º ano, os manuais escolares apresentam gráficos numa maior quantidade de temas do que no 7.º ano de escolaridade, embora também a maior parte dos gráficos fica confinada, essencialmente, a dois temas: "Mudança Global" e "Gestão sustentável dos recursos". Já no 9.º ano a quantidade de gráficos incluídos nos manuais diminui consideravelmente e concentram-se também em dois temas: "Em trânsito" e "Classificação dos materiais".

Analisando agora o tipo de gráfico que é utilizado ao longo de cada conteúdo programático, no 7.º e 8.º anos verifica-se, em todos os temas, uma tendência pela representação dos dados através de gráficos circulares. No 9.º ano essa tendência não se verifica, sendo utilizados os gráficos de linha e de barras.

Ainda relativamente ao primeiro objetivo do presente estudo, mas agora no que diz respeito ao rigor na construção dos gráficos que surgem nos manuais escolares, foi possível observar semelhanças na forma como os diferentes autores fazem uso deste recurso, o gráfico. A análise da construção gráfica foi feita tendo como referência Silva (2006) e, de uma forma global, as discordâncias entre os gráficos analisados e o que é preconizado por este autor para esses gráficos concentram-se nos seguintes elementos: título, eixos, identificações, legendas e elementos que auxiliam a leitura do gráfico.

Gráficos de barras. No que diz respeito aos gráficos de barras, quase na totalidade dos gráficos (8) o título é inexistente (Figura 1) ou surge posicionado por baixo do gráfico (Figura 2) ou lateralmente, quando devia surgir antes do gráfico posicionado à esquerda ou centrado.

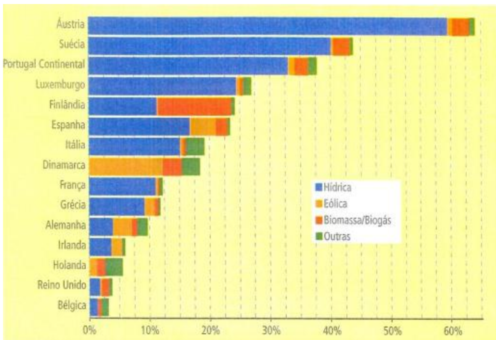


Figura 1. Gráfico sem título (extraído de 7A-LA, p. 59)

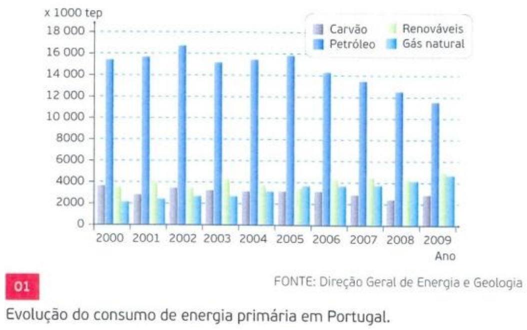


Figura 2. Posicionamento do título abaixo do gráfico (extraído de 7D-LT, p. 94).

A identificação dos eixos e das unidades encontram-se em falta em alguns deles (7) (Figura 3) e um número considerável de gráficos (6) não apresentam a fonte de origem dos dados (Figura 3). Relativamente às identificações, nomeadamente, as identificações dos eixos e a identificação das unidades, considera-se que é uma informação importante que deve constar no gráfico, e no que diz respeito à fonte de informação de onde os dados foram retirados faz parte de um conjunto de notas que o gráfico eventualmente poderá conter.

Em metade dos gráficos (4) não é utilizada uma legenda autónoma ou não são colocadas as designações junto da respetiva barra, o que embora não sendo considerado um elemento obrigatório, em determinadas situações, quando bem construída, torna o gráfico auto-explicativo. As linhas auxiliares são utilizadas com alguma frequência (4). Contudo, existem gráficos que não as possuem, ou ainda um gráfico onde as linhas auxiliares são paralelas às barras (Figura 4). Este elemento do gráfico, tal como a legenda, não apresenta carácter obrigatório, no entanto auxilia a leitura do gráfico desde que construídas de forma criteriosa, sendo incómodas e podendo perturbar a leitura do gráfico quando usadas em demasia. No caso do gráfico da Figura 4 verifica-se uma outra situação menos correta, uma vez que as linhas auxiliares quando utilizadas devem ser perpendiculares às barras para permitir uma mais fácil leitura do eixo de valores.

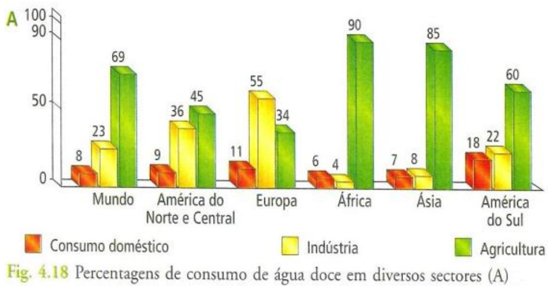


Figura 3. Gráfico sem identificações (unidades, eixo de valores, fonte de informação) (extraído de 7A-LT, p. 211).

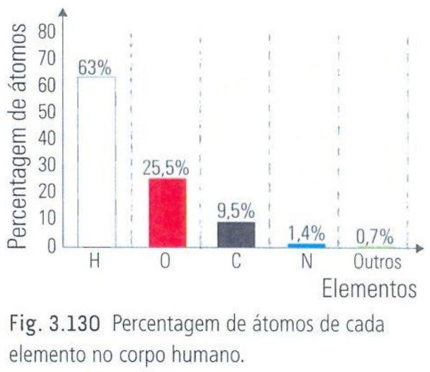


Figura 4. Gráfico com linhas auxiliares paralelas às barras (extraído de 9A-LT, p. 238).

Os elementos de auxílio à leitura, tais como notas, comentários relativos a valores anormais ou alterações bruscas, são utilizados em alguns gráficos (5) e servem para complementar a informação do gráfico e auxiliar a leitura e interpretação do mesmo, nomeadamente no que diz respeito a valores irregulares e de mais difícil interpretação.

Gráficos circulares. Os gráficos circulares apresentam problemas comuns aos gráficos de barras, tais como a localização do título ou a ausência do mesmo, a falta de identificações ou a falta de fonte de origem da informação. Relativamente às legendas, nos gráficos circulares verificam-se dois tipos de construções: numa delas, as legendas são autónomas (Figura 5), numa outra situação, as designações surgem junto de cada setor (Figura 6). Segundo Silva (2006), os dois tipos de situações são válidas, uma vez que quando o espaço disponível para o gráfico é reduzido, a designação junto de cada sector será uma forma de resolução do problema.

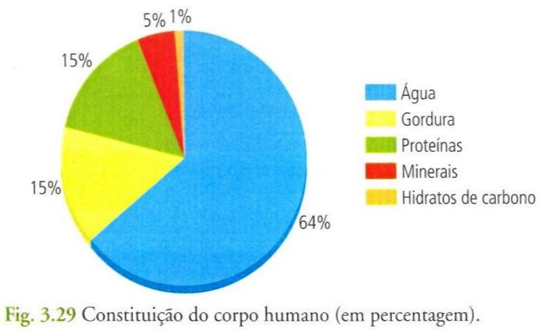


Figura 5. Gráfico circular com legenda autónoma (extraído de 7A-LT, p. 121).

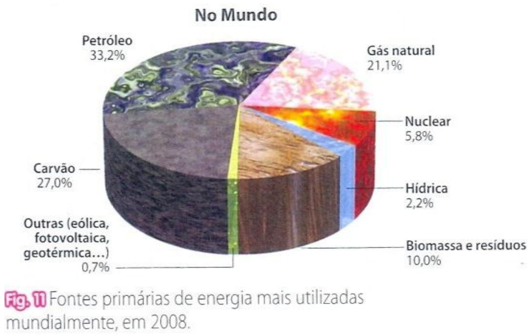


Figura 6. Gráfico circular sem legenda autónoma (extraído de 7C-LT, p.111).

Os gráficos circulares apresentam, com exceção de um deles, elementos que auxiliam na leitura, verificando-se que o valor correspondente a cada setor se encontra ao lado, tal como pode ser observado nas Figuras 5 e 6.

No que diz respeito às características mais específicas deste tipo de gráficos, tais como as distorções e o destaque dos diferentes setores ou aspetos relativos à dimensão visual do gráfico, foram observadas algumas situações. Uma delas consiste na separação dos setores (Figura 7) e a outra na utilização de gráficos a três dimensões (Figuras 6 e 7), esta última ocorrendo com alguma frequência nos manuais escolares. A separação dos diferentes sectores embora permita visualizar claramente as diferentes categorias presentes no gráfico, confere ao gráfico uma desordem visual e dificulta a extração de informação de forma correta, pelo que deve ser evitado. No que diz respeito à utilização de gráficos a três dimensões, se a terceira dimensão não tiver qualquer significado, isto é, caso não represente um valor do gráfico, ela não deve ser utilizada, sendo considerada uma forma errada de representação. No caso dos gráficos circulares analisados e representados a três dimensões, a terceira dimensão não apresentava qualquer significado.

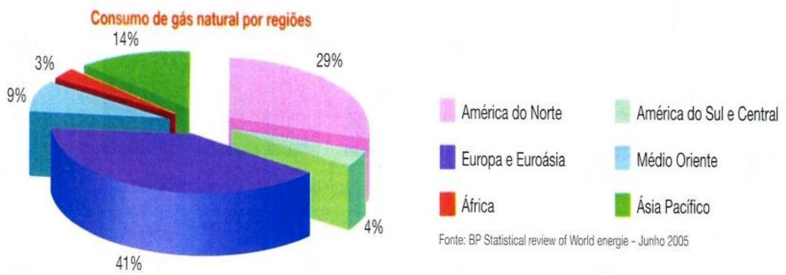


Figura 7. Gráfico circular com setores destacados (extraído de 8B-LT, p. 202).

O uso de imagens para preenchimento do gráfico é feito em dois dos gráficos analisados. Para além destes, num dos gráficos circulares os sectores encontram-se preenchidos com tonalidades semelhantes, o que não torna visível a zona separação entre eles e dificulta a análise do gráfico (Figura 8). O cuidado na escolha de cores ou imagens na representação de cada sector é comtemplado pelo autor Silva (2006) como um aspeto a ter em conta aquando da construção de um gráfico circular, uma vez que pode dar origem a dúvidas na sua leitura.

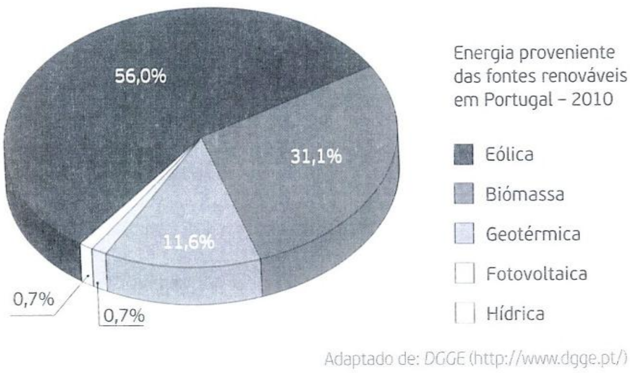


Figura 8. Gráfico circular apresentando uma escala de cinzas (extraído de 7D-LA, p. 29).

Gráficos de linha. Realizando uma análise aos gráficos de linha, estes verificam problemas em elementos dos dois gráficos anteriores (gráficos de barras e circulares). Tal como nos gráficos anteriores, nos gráficos de linha foi observada a falta títulos (Figura 9) ou posicionados abaixo do gráfico ou lateralmente ao mesmo. Relativamente às identificações, em alguns gráficos (7) os eixos das categorias não são identificados (Figura 9), outros (7) não apresentam a fonte de informação (Figura 9) e existem ainda poucos (2) onde não se apresenta a designação da respetiva unidade (Figura 9). As legendas nem sempre são utilizadas, verificando-se a sua existência em apenas alguns dos gráficos, e outros, porém, apresentam a designação junto à respetiva linha (Figura 9). No que diz respeito às linhas auxiliares, a maioria dos gráficos apresentam linhas auxiliares (7), sendo que num dos casos as linhas auxiliares encontram-se tão realçadas como as linhas dos eixos, o que é visto como uma falha uma vez que estas linhas servem apenas para auxiliar a leitura e não para transmitir informação (Figura 10).

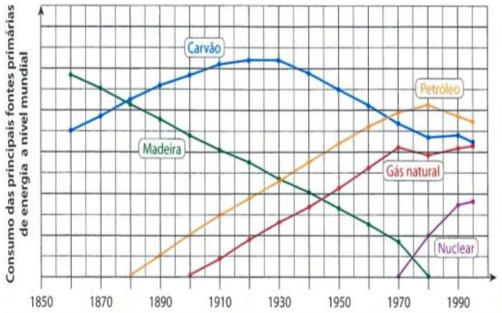


Figura 9. Gráfico de linha com ausência de título, de unidades no eixo de valores e de identificação do eixo de categorias (extraído de 7C-LA, p. 127).

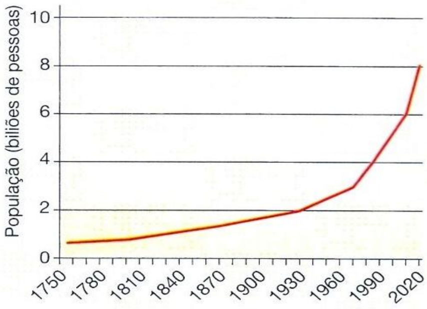


Figura 10. Gráfico com linhas auxiliares realçadas (extraído de 8B-LT, p. 196).

Metade dos gráficos de linha (4) não apresenta elementos de auxílio à leitura (Figura 11), enquanto a outra metade apresenta valores em pontos de referência, máximos e mínimos do gráfico. Neste tipo de gráficos considera-se que a inclusão de informação acerca, por exemplo, de valores máximos e mínimos, deve surgir nomeadamente no que se refere a séries temporais extensas pois permite orientar a interpretação do gráfico.

No que toca a elementos específicos deste tipo de gráficos, nomeadamente à representação de mais que uma categoria no mesmo gráfico, observaram-se gráficos (4) com elevado número de categorias representadas no mesmo gráfico. Como consequência da representação de várias linhas no mesmo gráfico, algumas delas encontram-se sobrepostas dificultando a leitura dos valores (Figura 11). Para ultrapassar este problema recomenda-se um número máximo de categorias por gráfico, sendo aceitável a representação de até cinco categorias por gráfico; quando ultrapassado este valor, aumenta a probabilidade da leitura do gráfico se tornar difícil e confusa.

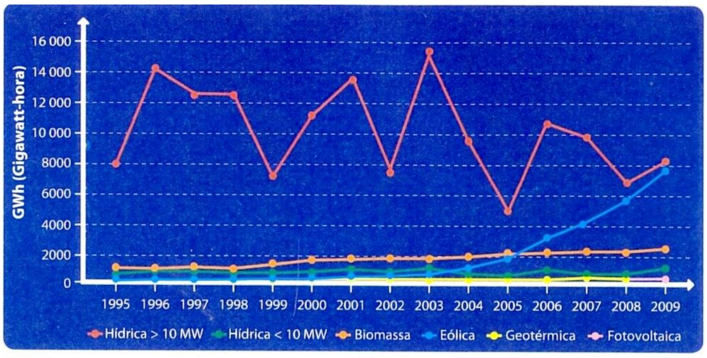


Fig. 13 Produção de energia elétrica, em Portugal, a partir de fontes renováveis de energia.

Figura 11. Gráfico de linha com elevado número de categorias (extraído de 7C-LT, p. 112).

Gráficos de área. Para terminar a análise à construção dos gráficos, constatou-se a utilização por apenas um autor do gráfico de área. Relativamente a este gráfico, verifica-se que ele não apresenta o título, no eixo de valores não é identificada a respetiva unidade nem valores de referência, que permitam a leitura adequada do gráfico, e também não é identificada a fonte dos dados. Não existe uma legenda autónoma e as designações surgem no interior da respetiva área. Neste tipo de gráfico comtemplam-se as duas construções relativas à legenda, tal como nos gráficos circulares, sendo ambas as construções possíveis.

No eixo das categorias existem intervalos de tempo diferentes, mas com espaçamentos aproximadamente iguais. Este aspeto traduz a uma falha na construção da escala, pois a intervalos iguais devem corresponder valores iguais. Também não apresenta linhas auxiliares nem qualquer outro elemento de auxílio à leitura do gráfico (Figura 12).

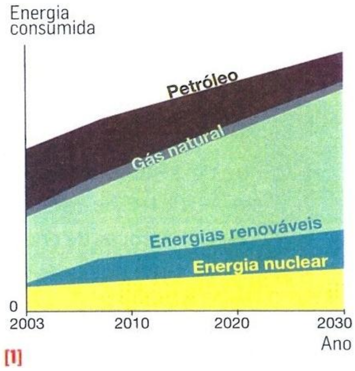


Figura 12. Gráfico de área (extraído de 7B-LA, p. 52).

3.2. Compreensão requerida na leitura e interpretação dos gráficos

No que concerne ao segundo objetivo do presente estudo, isto é, ao nível de leitura e interpretação dos gráficos que é exigido aos alunos, passamos à apresentação dos resultados, focados apenas nos gráficos que possuem um questionário associado, uma vez que nos gráficos sem questionário não é possível inferir o nível requerido. Na Tabela 4 encontra-se registada a distribuição das questões pelos níveis de leitura e interpretação de Curcio (1989), por tipo de manual e por ano de escolaridade.

Tabela 4 — Frequência das questões por nível de Curcio, em função do tipo de livro e ano de escolaridade

Ano	Nível 1		Nível 2		Nível 3		Total
	Texto	Auxiliar	Texto	Auxiliar	Texto	Auxiliar	
7.º	12	8	2	2	3	12	39
8.º	0	2	1	0	5	3	11
9.º	2	0	1	0	2	0	5
Total	14	10	4	2	10	15	55

Observando a Tabela 4, verifica-se que o número total de questões dos gráficos dos manuais de 7.º ano de escolaridade é muito superior ao número de questões dos gráficos dos manuais de 8.º e 9.ºanos de escolaridade. Por outro lado, atendendo à distribuição das questões pelos livros de texto e livros auxiliares, verifica-se que o número de questões é aproximadamente igual em ambos os casos. Finalmente, considerando os níveis de Curcio, constata-se que o número de questões dos níveis 1 e 3, sensivelmente igual, é muito superior ao número de questões do nível 2.

Comparando a distribuição das questões pelos diferentes níveis de leitura e interpretação de Curcio pelos diferentes anos de escolaridade, é possível observar uma maior percentagem de questões de nível 1 no 7.º ano (51%), diminuindo no 8.º ano (18%) e no 9.º ano (40%). No caso do nível 2, a percentagem de questões é superior no 9.º ano de escolaridade (20%) e aproximadamente igual no 7.º e 8.º ano de escolaridade (cerca de 10%). Por último, a percentagem de questões de nível 3 é superior no 8.º ano (73%), diminuindo no 7.º ano (38%) e no 9.º ano (40%).

Entre os livros de texto e os livros auxiliares, no nível 1 destaca-se a percentagem de questões dos livros de texto (25% contra 18%), no nível 2 destaca-se também a percentagem de questões dos livros de texto (7% contra 4%) e no nível 3 destaca-se a percentagem de questões dos livros auxiliares (27% contra 18%).

Realizando uma análise das questões, desta vez, distribuídas pelos diferentes autores, obtiveram-se os resultados apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 — Distribuição de frequências das questões colocados por autor

Autor	Nível 1		Nível 2		Nível 3		Total
	Texto	Auxiliar	Texto	Auxiliar	Texto	Auxiliar	
A	3	6	1	2	8	7	27
B	0	3	0	0	0	2	5
C	11	1	2	0	1	2	17
D	0	0	1	0	1	4	6
Total	14	10	4	2	10	15	55

A Tabela 5 permite concluir que, globalmente, o autor *A* incluiu um número muito superior de questões nos gráficos dos manuais, seguindo-se o autor *C* e, finalmente, os autores *B* e *D*, com sensivelmente o mesmo número de questões.

Entre os livros de texto e os livros auxiliares, no caso dos autores *A* e *C*, a formulação de questões distribui-se pelos dois tipos de livros, com maior percentagem nos livros auxiliares para o autor *A* (56%) e nos livros de texto para o autor *C* (82%). O autor *B* apenas formula questões nos livros auxiliares e o autor *D* também distribui as questões pelos dois tipos de livros, com maior percentagem nos livros auxiliares (67%).

Comparando os diferentes níveis de leitura e interpretação de Curcio pelos diferentes autores, constata-se que os autores *A* e *C* apresentam questões distribuídas pelos diferentes níveis de compreensão, salientando-se o nível 3 no autor *A* (56%) e o nível 1 no autor *C* (71%). O autor *B* utiliza questões apenas do nível 1 (60%) e nível 3 (40%), exclusivamente em livros auxiliares. Por fim, o autor *D* utiliza apenas questões de níveis 2 e 3, numa percentagem muito superior de questões do nível 3 (83%).

4. Conclusões

Globalmente, da análise feita aos manuais escolares da disciplina de Ciências Físico-Químicas, em termos de gráficos que incluem e do modo como os incluem, verificaram-se duas tendências: em primeiro lugar, os autores utilizam gráficos estatísticos maioritariamente nos livros de texto; em segundo lugar, a maioria dos gráficos surge sem um questionário associado, isto é, não surge na forma de tarefa dirigida ao aluno. Os gráficos utilizados pelos autores sem um questionário associado, nos diferentes anos de escolaridade, são incorporados no decorrer da abordagem feita a determinado conteúdo programático. O gráfico funciona, neste tipo de situação, como um complemento do conteúdo que está a ser exposto, existindo, por vezes, ao longo da exposição do conteúdo programático, referências ao gráfico e aos dados nele representados.

No que diz respeito ao tipo de gráficos incluídos nos manuais, verificou-se que os autores utilizam essencialmente três tipos de gráficos: gráfico circular; gráfico de barras (empilhadas, agrupadas ou simples) e gráfico de linha. A tendência observada na escolha do tipo de gráfico usado pode ser devida a vários fatores. Um deles poderá estar associado ao fato dos gráficos de barras serem apontados como um tipo de gráfico básico, quer na construção quer na leitura do mesmo (Wallgren et al., 1996). Os gráficos circulares são úteis quando o objetivo é realizar comparações entre vários grupos sem grande preocupação com o significado do valor correspondente a cada setor, mas sim com a proporção que determinado setor apresenta em comparação com a totalidade dos dados (Wallgren et al., 1996). Este tipo de gráfico foi o mais utilizado pelos autores em diversos conteúdos, mas sempre com o objetivo de mostrar ao aluno diferenças entre determinadas categorias, como, por exemplo, observar a diferença entre a quantidade de água doce que existe no planeta relativamente à quantidade de água salgada (7D-LT) ou a comparação entre os tipos e a quantidade de energia gasta em Portugal (7C-LT). O gráfico de linha foi observado em situações onde o autor pretendia mostrar variações temporais de determinada categoria; embora fosse possível fazê-lo através do gráfico de barras, a opção pelo gráfico de linha será melhor quando o objetivo é observar variações ao longo do tempo (Wallgren et al., 1996). Por outro lado, os tipos de gráfico terão sido também consequência do tipo de variável representada (Silva, 2006) pois os manuais escolares utilizam frequentemente gráficos estatísticos na representação de variáveis qualitativas ou quantitativas discretas.

Um outro fator com influência na escolha do tipo de gráfica poderá estar relacionado com a ligação entre o aluno e a forma como os conteúdos são expostos no manual escolar e a maior ou menor capacidade de interpretação de gráficos por parte do aluno, verificando-se que, tal como foi verificado no estudo Morais (2010), os alunos admitem conhecer o gráfico circular, o gráfico de barras, o pictograma e o gráfico de linhas. Para além da maior ou menor familiaridade dos alunos com os diferentes tipos de gráficos, a capacidade dos alunos interpretarem os gráficos de barras, circulares e de linha não apresenta grandes diferenças em termos de dificuldade, conclusão salientada no estudo de Fernandes e Morais (2011).

No que diz respeito ao rigor com que são construídos os gráficos apresentados nos manuais, verificou-se que, em geral, eles apresentam falhas em algumas caraterísticas gerais, tais como: o título, que na maioria das vezes surge posicionado abaixo do gráfico ou está ausente; as identificações, poucos autores colocam a fonte de informação dos dados e as designações dos eixos e das unidades de medida faltam com alguma frequência ao longo dos manuais; por último, verifica-se que os gráficos, em geral, não apresentam elementos de auxílio à leitura, possivelmente porque o objetivo seja o aluno focar-se na tendência de determinada variável e não centrar a sua atenção em valores concretos.

Já no que diz respeito às características específicas de cada tipo de gráfico, verificou-se que, na globalidade, os gráficos cumprem os requisitos de construção. No entanto, os gráficos circulares evidenciam, com alguma frequência, representações a três dimensões, ou então o destacamento dos diferentes setores criando uma certa desorganização na visualização do gráfico na totalidade.

Centrando a atenção nos gráficos com questionário associado, verificou-se que os níveis de interpretação mais exigidos aos alunos são os níveis 1 e 2, seguido do nível 2. Esta observação não se encontra de acordo com o estudo de Curcio (1989), onde se concluiu que o nível de compreensão mais utilizado na interpretação de gráficos foi o nível 2. Observando os diferentes tipos de livros, e no que diz respeito aos diferentes níveis de compreensão, verificou-se existir uma tendência para formular um maior número de questões de nível 1 nos livros de texto e maior número de questões de nível 3 nos livros auxiliares, possivelmente pelo carácter distinto atribuído a cada tipo de livro. Apresentando o livro auxiliar um carater prático, o objetivo é a consolidação dos conhecimentos e como tal é exigido ao aluno que observe o gráfico, estabeleça relações entre os conceitos aprendidos e os dados representados e extraia ilações.

Verifica-se, também, uma preferência pela utilização de gráficos em determinados temas programáticos. No 7.º ano de escolaridade, verificou-se que todos os gráficos estatísticos se concentram nos últimos dois temas a ser lecionados (Materiais e Energia). Nestes temas os gráficos foram utilizados para mostrar a constituição de determinados corpos ou misturas e comparar as proporções de cada elemento, ou então mostrar a evolução dos diferentes tipos de energia e as diferenças no consumo ao longo do tempo. No 8.º ano de escolaridade, os autores utilizam gráficos essencialmente em dois temas: "Mudança global" e "Gestão sustentável dos recursos". Nestes temas, os gráficos utilizados pretendem comunicar, de uma forma geral, aspetos relativos a agentes poluentes e o peso de cada um, ou mostrar os diferentes tipos de recursos utilizados e a contribuição de cada um deles. Por último, no 9.º ano de escolaridade, os gráficos são utilizados no tema "Em trânsito", onde se representam dados relativos à sinistralidade, como, por exemplo, a evolução do número de vítimas em acidentes rodoviários ao longo dos últimos anos (9C-LT), e no tema "Classificação de materiais" (9A-LT), onde os gráficos pretendem representar e comunicar que os diferentes materiais são constituídos por diferentes substâncias ou elementos, embora o corpo possa parecer apresentar uma constituição homogénea.

Em suma, tendo em conta os dois objetivos propostos no presente estudo, pode-se concluir que, no que diz respeito ao tipo de gráfico e qualidade dos mesmos, os autores optam por formas gráficas mais direcionadas para a representação de variáveis discretas ou qualitativas. Analisando o tipo de gráfico ao longo dos anos escolares, verificou-se um aumento na complexidade dos gráficos escolhidos, que aumenta com o ano escolar (gráficos de barras mais ao nível do 7.º e 8.º ano de escolaridade e gráfico de linha ao nível do 9.º de escolaridade). Relativamente ao rigor na construção dos mesmos foram identificados falhas principalmente ao nível do título e identificações. Na interpretação dos gráficos é exigido aos alunos que leiam e interpretem gráficos de forma literal (nível 1) ou então utilizem conceitos das Ciências Físico-Químicas e extraiam ilações (nível 3). Para finalizar, verifica-se que os autores optam por utilizar com maior frequência gráficos no 7.º ano de escolaridade e nos livros de texto.

Apesar do número limitado de manuais analisados e das dificuldades e riscos que uma análise deste tipo comporta, os resultados parecem sugerir que os professores de Ciências Físico-Químicas devem ter muita atenção aos gráficos neles contemplados, pois, uma vez que eles nem sempre são apresentados e explorados pelo manual da melhor forma, os alunos podem não os entender ou até interpretá-los de modo incorreto. Estes riscos poderão ser minimizados se os professores discutirem os gráficos que o manual apresenta com os seus alunos e, assim, transformarem eventuais limitações do manual em oportunidades de aprendizagem dos alunos.

Referências

Amorim, A. T. L. (2009). *A história das ciências e a adoção de manuais escolares: uma investigação com manuais escolares e professores de Ciências Físico-Químicas, centrada no tema "Viver Melhor na Terra"*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. & Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales, *Números*, 76, 55-67.

Carvalho, C. (2009). Reflexões em torno do ensino e da aprendizagem da Estatística. In J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H., Martinho & P. F. Correia (Orgs), *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na escola* (pp. 22-36). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension: elementary and middle school activities*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ministério da Educação (2001). *Ciências Físicas e Naturais – Orientações Curriculares – 3.º ciclo*. Lisboa: Autor. [http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinobasico/index.php?s=directorio&pid=51&ppid=3]

Decreto de lei n.º 47/2006 de 28 de Agosto, Artigo 3.º. Lisboa: Ministério da Educação. [www.dgidc.min-edu.pt/data/dgidc/manuais.../L47_2006.pdf]

Fernandes, C. A. F. (2007). *A Matemática na disciplina de Ciências Físico-Químicas. Um estudo sobre atitudes de alunos de 9.º ano de escolaridade*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga.

Fernandes, J. A. & Morais, P. C. (2011). Leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 95-115.

Fernandes, J. A., Morais, P. C. & Lacaz, T. V. S. (2011). Representação de dados através de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. In *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Recife, Brasil, 26-30 Junho 2011.

Friel, S., Curcio, F. & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158.

Friel, S. N. & Bright, G. W. (1995). Graph knowledge: understanding hoe students interpret data using graphs. *Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Comlumbus, OH: Educational Resources Information Center.

Guimarães, F. (2009). Contributos dos manuais escolares de ciências para a formação de professores no ensino de Botânica. *A Página da Educação*, Série II, 187 (Inverno 2009), 87.

Jolliffe, F. R. (1991). Assessment of the understanding of statistical concepts. In D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the third international conference on teaching statistics* (vol. 1, pp. 461–466). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Lei de Bases do Sistema Educativo, lei n.°49/2005 de 30 de Agosto, Artigo 44.°, Ministério da Educação. [http://www.dges.mctes.pt/NR/rdonlyres/AE6762DF-1DBF-40C0-B194-E3FAA9516D79/1768/Lei49_2005.pdf]

Pereira, A. C. & Duarte, M. C. (1998). O manual escolar como facilitador da construção do conhecimento científico: o caso do tema "Reacções de oxidação-redução" do 9.° ano de escolaridade. In R. V. Castro et al. (Orgs.), *Actas do I encontro internacional de manuais escolares* (pp. 367-374). Braga: Universidade do Minho, Centro de Investigação em Educação.

Ministério da Educação (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Autor. [http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinobasico/index.php?s=directorio&pid=50&ppid=3]

Leite, L., Dourado, L., Morgado, S., Vilaça, T., Vasconcelos, C., Pedrosa, M. A. & Afonso, A. S. (2012).Questionamento em manuais escolares de Ciências: desenvolvimento e validação de uma grelha de análise. *Educar em Revista*, n. 44, p. 127-143.

Morais, P. C. (2010). *Construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9.° ano de escolaridade*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Morgado, J. C: (2004). Manuais escolares: Contributo para uma análise. Porto: Porto Editora.

Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidade en los libros de texto*. Granada: Grupo de Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Silva, A. A. (2006). *Gráficos e mapas: representação de informação estatística*. Lisboa: LIDEL.

Viseu, F., Fernandes, A. & Gonçalves, M. I. (2009). O manual escolar na prática docente do professor de matemática. In B. Silva et al. (Orgs.), *Actas do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia* (pp. 3178-3190). Braga: Universidade do Minho, Centro de Investigação em Educação.

Wallgren, A., Wallgren, B., Persson, R., Jorner, U. & Haaland, J. (1996). *Graphing statistics & data: creating better charts*. Sweden: Sage Publications.

ANEXO

Ano	Manual escolar	Código
7.º	Fiolhais, C., Fiolhais, M., Gil, V., Paiva, J., Morais, C. & Costa, S. (2006). *7 CFQ: Terra no espaço, Terra em transformação*. Lisboa: Texto Editores.	7A-LT
	Fiolhais, C., Fiolhais, M., Gil, V., Paiva, J., Morais, C. & Costa, S. (2006). *Caderno de atividades, 7 CFQ: Terra no espaço, Terra em transformação*. Lisboa: Texto Editores.	7A-LA
	Cavaleiro, M. N. G. C. & Beleza, M. D. (2012). *Novo FQ 7 – 3.º ciclo do ensino básico, 7.º ano de escolaridade*. Porto: Edições ASA.	7B-LT
	Cavaleiro, M. N. G. C. & Beleza, M. D. (2012). Ca*derno de atividades – Novo FQ 7 3.º ciclo do ensino básico 7.º ano de escolaridade*. Porto: Edições ASA.	7B-LA
	Maciel, N. & Duarte, C. A. (2012). *À descoberta do planeta azul – Terra em transformação, Ciências Físico-Químicas, 7.º ano*. Porto: Porto Editora.	7C-LT
	Maciel, N. & Duarte, C. A. (2012). *À descoberta do planeta azul – Terra no espaço, Ciências Físico-Químicas, 7.º ano*. Porto: Porto Editora.	7C-LT
	Maciel, N. & Duarte, C. A. (2012). *À descoberta do planeta azul – Fichas de apoio Ciências Físico-Químicas, 7.º ano*. Porto: Porto Editora.	7C-LA
	Maciel, N. & Duarte, C. A. (2012). *À descoberta do planeta azul – Caderno de atividades, Ciências Físico-Químicas, 7.º ano*. Porto: Porto Editora.	7C-LA
	Silva, A. J., Simões, C., Resende, F. & Ribeiro, M. (2012). *Zoom 7 – Terra em transformação, Ciências Físico-Químicas – 7.º Ano*. Porto: Areal Editores.	7D-LT
	Silva, A. J., Simões, C., Resende, F. & Ribeiro, M. (2012). *Zoom 7 – Terra no espaço, Ciências Físico-Químicas – 7.º Ano*. Porto: Areal Editores.	7D-LT
	Silva, A. J., Simões, C., Resende, F. & Ribeiro, M. (2012). *Zoom 7 – Caderno de atividades, Ciências Físico-Químicas – 7.º Ano*. Porto: Areal Editores.	7D-LA
	Silva, A. J., Simões, C., Resende, F. & Ribeiro, M. (2012). *Põe-te à prova – Zoom 7, Ciências Físico-Químicas – 7.º Ano*. Porto: Areal Editores.	7D-LA
8.º	Fiolhais, C., Fiolhais, M., Gil, V., Paiva, J., Morais, C. & Costa, S. (2009). *8 CFQ: sustentabilidade na Terra*. Lisboa: Texto Editores.	8A-LT
	Fiolhais, C., Fiolhais, M., Gil, V., Paiva, J., Morais, C. & Costa, S. (2009). *Caderno de atividades, 8 CFQ: sustentabilidade na Terra*. Lisboa: Texto Editores.	8A-LA
	Cavaleiro, M. N. G. C. & Beleza, M. D. (2010). *FQ 8 Sustentabilidade na Terra – 3.º ciclo do ensino básico, 8.º ano de escolaridade*. Porto: Edições ASA.	8B-LT
	Cavaleiro, M. N. G. C. & Beleza, M. D. (2010). *FQ 8 Sustentabilidade na Terra – Caderno de exercícios, 3.º ciclo do ensino básico, 8.º ano de escolaridade*. Porto: Edições ASA.	8B-LA
	Cavaleiro, M. N. G. C. & Beleza, M. D. (2010). *FQ Sustentabilidade na Terra – Caderno de atividades, 3.º ciclo do ensino básico, 8.º ano de escolaridade*. Porto: Edições ASA.	8B-LA
	Maciel, N., Miranda, A. & Marques, M. C. (2007). *Eu e o planeta azul. Sustentabilidade na Terra, Ciências Físico-Químicas, 8.º ano*. Porto: Porto Editora.	8C-LT
	Maciel, N., Miranda, A. & Marques, M. C. (2007). *Eu e o planeta azul. Sustentabilidade na Terra. Caderno de atividades, Ciências Físico-Químicas, 8.º ano*. Porto: Porto Editora.	8C-LA
	Silva, A. J., Simões, C., Resende, F. & Ribeiro, M. (2010). *(CFQ) 8 – Ciências Físico-Químicas, terceiro ciclo do ensino básico*. Porto: AREAL Editores.	8D-LT
	Silva, A. J., Simões, C., Resende, F. & Ribeiro, M. (2010). *(CFQ) 8 – Caderno de fichas Ciências Físico-Químicas, terceiro ciclo do ensino básico*. Porto: AREAL Editores.	8D-LA
9.º	Fiolhais, C., Fiolhais, M., Gil, V., Paiva, J., Morais, C. & Costa, S. (2008). *9 CFQ – Viver melhor na Terra, Ciências físico-químicas*. Lisboa: Texto Editores.	9A-LT
	Fiolhais, C., Fiolhais, M., Gil, V., Paiva, J., Morais, C. & Costa, S. (2008). *Caderno de atividades, 9 CFQ. – Viver melhor na Terra, Ciências Físico-Químicas*. Lisboa: Texto Editores.	9A-LA
	Cavaleiro, M. N. G. C. & Beleza, M. D. (2008). *FQ 9 – Viver melhor na Terra, 3.º ciclo do ensino básico 9.º ano de escolaridade*. Porto: Edições ASA.	9B-LT
	Cavaleiro, M. N. G. C. & Beleza, M. D. (2008). *FQ 9 – Viver melhor na Terra. Caderno de exercícios, 3.º ciclo do ensino básico, 9.º ano de escolaridade*. Porto: Edições ASA.	9B-LA
	Maciel, N., Miranda, A. & Marques, M. C. (2009). *Eu e o planeta azul – Viver melhor na Terra. Ciências Físico-Químicas, 9.º ano*. Porto: Porto Editora.	9C-LT
	Maciel, N., Miranda, A. & Marques, M. C. (2009). *Eu e o planeta azul – Viver melhor na Terra. Caderno de atividades, Ciências Físico-Químicas, 9.º ano*. Porto: Porto Editora.	9C-LA
	Silva, A. J., Simões, C., Resende, F. & Ribeiro, M. (2009). *(CFQ) 9 – Ciências Físico-Químicas, 3.º ciclo do ensino básico*. Porto: AREAL Editores.	9D-LT
	Silva, A. J., Simões, C., Resende, F. & Ribeiro, M. (2009). *(CFQ) 9 – Caderno de fichas Ciências Físico-Químicas, 3.º ciclo do ensino básico*. Porto: AREAL Editores.	9D-LA

FERNANDES, J. A., VISEU, F., MARTINHO, M. H. & CORREIA, P. F. (ORGS.) (2013). *ATAS DO III ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA*. BRAGA: CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DO MINHO.

APRENDIZAGEM DE ESTATÍSTICA COM TECNOLOGIA NO 7º ANO DE ESCOLARIDADE

Catarina Vasconcelos Pereira Gonçalves
catarinavasconcelos7@hotmail.com
José António Fernandes
Universidade do Minho, jfernandes@ie.uminho.pt
Paulo Ferreira Correia
Escola Secundária/3 de Barcelos, ferreiracorreiapaulo@gmail.com

Resumo. Neste estudo trata-se uma intervenção de ensino de Estatística com tecnologia, em torno dos objetivos: 1) Identificar formas de utilização da tecnologia no ensino e aprendizagem da Estatística; 2) Reconhecer aspetos fortes e aspetos frágeis na utilização da tecnologia no ensino e aprendizagem da Estatística. Nesta comunicação aborda-se apenas a exploração do gráfico circular com a folha de cálculo numa turma do 7° ano de escolaridade, constituída por 19 alunos, pertencente a uma escola do concelho de Barcelos. Em termos dos resultados obtidos, verificou-se que o uso do computador por grupo revelou-se a forma mais eficaz de integrar esta tecnologia na aula de Matemática, conjugou-se o uso da tecnologia com o papel e lápis de várias formas e constatou-se um maior número de aspetos fortes do uso da tecnologia do que de aspetos frágeis.

Palavras-chave: Aprendizagem de Estatística; Tecnologia; Alunos do 7° ano.

Introdução

A Estatística é um ramo da Matemática em rápida expansão, que tem vindo a adquirir grande importância nos programas do ensino básico e do ensino secundário. Em 2007, com o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007), a Estatística passou a ser um tema explícito do programa do 1° ciclo do ensino básico, tal como já acontecia nos programas dos outros níveis de escolaridade.

Os gráficos estatísticos são um meio para organizar e expressar dados e estão presentes no nosso dia a dia em todas as áreas da sociedade. Assim, é natural que os alunos aprendam a ler e a interpretar gráficos, mesmo antes de os ensinarmos (Fernandes, Morais & Lacaz, 2011). Contudo, isto não implica que os alunos saibam o que é um gráfico estatístico, o seu significado e a sua importância na sociedade atual (Carvalho, 2009). Daí a relevância do ensino e da aprendizagem dos gráficos estatísticos.

Contrastando com a sua importância, observam-se muitas dificuldades, por parte dos alunos, em alguns conceitos estatísticos, o que leva a questionar se as metodologias de ensino e os recursos utilizados pelos professores não serão uma das explicações para o insucesso do ensino e aprendizagem de Estatística. Admitindo esta possível causa, justificam-se intervenções em sala de aula baseadas em metodologias diferentes e que despertem o interesse nos alunos, recorrendo, por exemplo, às tecnologias.

A utilização de tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática conduz a uma aprendizagem mais significativa e profunda (Fernandes & Vaz, 1998), pois potencia a resolução de tarefas abertas e criativas, a comunicação, o raciocínio e o desenvolvimento do espírito crítico. Além disso, a tecnologia proporciona "importantes recursos de simulação que permitem explorar praticamente todos os objetos estatísticos" (Fernandes, Batanero, Contreras & Díaz, 2009, p. 168).

Existem várias tecnologias que podem ser utilizadas no ensino da Estatística, sendo a folha de cálculo considerada uma ferramenta "poderosa, com potencialidades que podem facilmente ser usadas para a aprendizagem da Matemática" (Ponte, Nunes & Veloso, 1991, p. 154).

Contudo, as tecnologias “não representam a alvorada de um novo mundo sem problemas” (Ponte, 2000, p. 3), uma vez que as tecnologias apresentam limitações. “O software e as ferramentas tecnológicas alteram o significado da Estatística porque introduzem novas representações e mudam a forma de trabalhar” (Fernandes, Sousa & Ribeiro, 2004, p. 171), pelo que é importante considerar essas alterações.

1. Enquadramento teórico

1.1. Ensino, aprendizagem e avaliação da Estatística com tecnologia

Ao longo dos anos, a tecnologia tem sido cada vez mais enfatizada no ensino e na aprendizagem da Estatística. As alterações no currículo de Matemática têm vindo a atribuir às tecnologias um lugar cada vez mais consistente (Amado & Carreira, 2008), tendo-lhes sido reconhecidos muitos aspetos fortes.

O Currículo Nacional para o Ensino Básico (2001) apresentava já uma referência muito explícita à utilização do computador, referindo: “Quanto ao computador, os alunos devem ter oportunidade de trabalhar com a folha de cálculo e com diversos programas educativos (...) assim como de utilizar as capacidades educativas da rede Internet” (p. 71). Mais recentemente, o atual Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007), no tópico Organização e Tratamento de Dados, no 3º ciclo, refere que “os alunos devem usar recursos tecnológicos – por exemplo, calculadora gráfica ou folha de cálculo – para representar, tratar e apresentar a informação recolhida” (p. 60).

Aspetos fortes e frágeis do uso da tecnologia no ensino e aprendizagem da Estatística

A utilização das tecnologias nas aulas de Matemática, e consequentemente de Estatística, segundo Fernandes e Vaz (1998) justifica-se na medida em que tem potencial para (1) promover uma aprendizagem mais profunda e significativa, (2) favorecer uma abordagem experimental ou indutiva da Matemática, e (3) desenvolver as suas aplicações (p. 44).

O ensino da Estatística com computador revela-se fundamental, uma vez que esta ferramenta permite que os alunos experimentem e explorem todas as fases dos estudos estatísticos, desde a escolha da amostra, passando pela recolha e organização dos dados, a simulação e análise, até à interpretação e comunicação dos resultados (Batanero, 2001).

Particularmente nos domínios dos gráficos, atualmente, “com as potencialidades gráficas trazidas pelas tecnologias, os alunos e os professores passam a ter uma ferramenta de investigação poderosa que lhes permite fazer simulações” (Carvalho, 2009, p. 25) e destacar a construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos.

Nesta linha de ideias, Ponte (1991, citado em Carvalho, 2009), considera que o computador permite libertar os alunos da construção manual dos gráficos, deixando-lhes assim mais tempo para a sua interpretação. Como refere a Carvalho (2009), “o papel do professor deixa de ser como *se constrói o gráfico* para passar a ser o que *nos diz o gráfico* e o papel do aluno passa a ser o de explicar o que está a acontecer para além da mera leitura dos dados” (Carvalho, 2009, p. 28).

Assim, o papel do professor revela-se fundamental, pois cabe-lhe a tarefa de “ajudar os alunos a questionar o próprio gráfico, a orientarem a sua atenção para certos aspetos e a desencorajarem outros” (Carvalho, 2009, p. 33).

Por outro lado, segundo Hawkings, Jolliffe e Glickman (1992) e Ponte (1995), com o uso do computador assiste-se a uma relativização da importância das capacidades de cálculo e de simples manipulação simbólica, que podem ser realizadas agora de uma forma muito mais rápida e eficiente. Os computadores permitem, assim, que seja dada uma maior importância aos aspetos interpretativos, conceptuais e de análise crítica, e menor importância aos procedimentais e algorítmicos (Batanero, 2001; Canavarro & Ponte, 1997).

Num ambiente de aprendizagem marcado pela utilização do computador "há uma maior quantidade de exemplos e contraexemplos, num menor espaço de tempo" (Amado & Carreira, 2008, p.288), resultado, segundo Hawkings, Jolliffe e Glickman (1992) e Batanero (2001), da natureza dinâmica e da velocidade do computador, considerados por estas autoras dois dos seus principais aspetos fortes.

Assim, o uso do computador permite a disponibilidade dos alunos para processos cognitivos de ordem superior (Rodrigues, 2000), que se situam para além do cálculo e da compreensão de conceitos e relações matemáticas simples (Canavarro & Ponte, 1997; Ponte, 1995), "deixando espaço para o desenvolvimento de processos reflexivos em torno das atividades" (Rodrigues, 2000, p. 16).

Além disso, o software estatístico computacional permite o estudo de maiores conjuntos de dados (Batanero, 2001) e permite que os alunos explorem e estudem conjuntos de dados reais (Hawkings, Jolliffe & Glickman, 1992). Ora, os investigadores e educadores consideram que o trabalho com dados reais em temas de interesse para os alunos contribui para a sua motivação para aprenderem Estatística (Bem-Zvi, 2000; Biehler, 1997, 2003, 2006, citado em Fernandes et al., 2009).

O uso do computador contribui também para o desenvolvimento do espírito crítico, uma vez que o computador se torna indispensável para a avaliação da veracidade e razoabilidade dos resultados fornecidos por estas ferramentas (Canavarro, 1994; Canavarro & Ponte, 1997) e "oferece um contexto favorável a que os alunos trabalhem de forma criativa, formulando e testando conjeturas próprias e explorando ideias diversas" (Canavarro & Ponte, 1997, p. 107).

Por outro lado, a utilização do computador como instrumento de apoio ao ensino e aprendizagem da Matemática incentiva o trabalho colaborativo entre os alunos, aumentando as oportunidades de discussão e comunicação (Amado & Carreira, 2008; Canavarro, 1994; Canavarro & Ponte, 1997) que podem ocorrer "entre os alunos num grupo de trabalho, entre diversos grupos da turma, ou entre a turma inteira e o professor" (Canavarro & Ponte, 1997, p. 109).

Deste modo, um ambiente de aprendizagem com computadores revela-se uma forma de "envolver os alunos em atividades de Matemática intensa e significativa, favorecendo o desenvolvimento de atitudes positivas em relação a esta disciplina e uma visão muito mais completa da sua verdadeira natureza" (Amado & Carreira, 2008; Ponte, 1995, p. 2). Nesta linha de ideias, Amado e Carreira (2008), além de referirem que os computadores motivam os alunos para a aprendizagem da Matemática, apontam "a redução da ansiedade e do medo de cometer erros" (p. 288) como um aspeto forte do uso desta ferramenta.

A folha de cálculo é uma tecnologia que se revela muito útil no ensino e aprendizagem da Estatística. Segundo Moreira (1989), a folha de cálculo permite avaliar, rapidamente, o efeito da substituição de um dado, isto é, permite obter pistas para responder a questões do tipo "que acontecerá se…". Além disso, Moreira (1989) refere outra potencialidade da folha de cálculo: permitir estudar a mesma situação de diferentes perspetivas – aritmética, algébrica e gráfica –, podendo-se constatar quão variada e plena de sentido pode ser a aprendizagem do aluno (Fernandes & Vaz, 1998). Canavarro e Ponte (1997) consideram este aspeto "o mais importante contributo do computador para o ensino da Matemática" (p.106), na medida em que, desta forma, esta ferramenta facilita a abordagem investigativa na aprendizagem da Matemática.

Contudo, a utilização das tecnologias na aula de Matemática não apresenta apenas aspetos fortes. As tecnologias apresentam limitações, que, quando não são consideradas podem estar na origem de aprendizagens erradas (Fernandes & Vaz, 1998).

O uso de tecnologias cria, por vezes, "um ambiente de aula com mais movimento, mais ruído, mais sobressaltos e receios para o professor" (Amado & Carreira, 2008, p. 287), exigindo muitas tomadas de decisão por parte do professor, tanto na planificação de atividades como na sua implementação (Santos, 2000).

Formas de integrar a tecnologia no ensino e aprendizagem da Estatística

A "utilização de tecnologias nas aulas de Matemática implica a tomada de decisões ao nível da organização do ensino e ao nível do próprio ensino" (Fernandes & Vaz, 1998, p. 43), pois as ferramentas tecnológicas potenciam métodos de ensino diferentes dos chamados "tradicionais". Além disso, os diferentes modos de utilização do computador no ensino de Estatística supõem uma revisão na forma como se deve ensinar e aprender este tema (Batanero, 2001).

Podemos considerar três formas de usar computador em sala de aula: computador na turma, computador no trabalho individual e o computador no trabalho de grupo (Canavarro & Ponte, 1997). O computador ligado a um projetor, perante a turma, pode ter diversas funções: o professor pode substituir o quadro de giz por este instrumento, de modo a demonstrar, visualmente, alguns aspetos de forma mais dinâmica, muito mais rigorosa e muitíssimo mais rápida. Um único computador por turma pode ainda ser usado numa situação de exploração com toda a turma, numa discussão coletiva, numa síntese das conclusões dos diversos grupos ou na exemplificação de aspetos particulares introduzidos por algum aluno ou pelo professor (Canavarro & Ponte, 1997).

O computador no trabalho individual será, em alguns casos, a situação ideal, mas, por vezes, a presença de grande quantidade de equipamentos pode ser mesmo contraproducente (Canavarro & Ponte, 1997). No caso dos alunos envolvidos no estudo, esta estratégia justificou-se pelas dificuldades por eles apresentadas no âmbito da aprendizagem da matemática e pelo momento de avaliação permitir o uso do computador.

O computador no trabalho de grupo é uma das formas de trabalho mais recomendadas hoje em dia, uma vez que promove a interação e a colaboração entre os alunos e contribui para o desenvolvimento do espírito crítico (Canavarro & Ponte, 1997). Segundo Canavarro e Ponte (1997), as tarefas a realizar podem ter um objetivo específico ou serem de natureza mais aberta.

Além disso, deve-se integrar as ferramentas tecnológicas com outros meios de ensino, designadamente o papel e lápis. Demana e Waits (1994) referem três formas de integrar a calculadora gráfica no ensino da matemática: 1. Começar por resolver um exercício ou um problema com papel e lápis e, seguidamente, utilizar a calculadora para verificar a resolução; 2. Começar por resolver o exercício ou problema com a calculadora e, depois, confirmar ou completá-lo com papel e lápis; e 3. Resolver um exercício ou problema apenas com a calculadora, pois a sua resolução através de outros meios é impraticável ou mesmo impossível. Fernandes e Vaz (1998) consideram que estas formas de integração podem ser ampliadas a outras ferramentas tecnológicas, designadamente aos computadores.

Demana e Waits (1994) referem as consequências subjacentes a estas três formas de integração da tecnologia. Quanto à primeira, mencionam a tecnologia como um *feedback* que pode ter efeitos positivos ao nível da motivação dos alunos e da sua autoconfiança. Relativamente à segunda, referem a primeira abordagem do problema com a tecnologia no sentido de fornecer pistas para a sua resolução analítica e como um momento de formular conjeturas e hipóteses. Quanto à terceira, a resolução do problema apenas com tecnologia justifica-se quando, por razões de tempo ou de custos, se torna impraticável a sua resolução com papel e lápis.

2. Metodologia

A presente investigação constitui parte de um estudo relativo a uma intervenção de ensino em Estatística com tecnologia, apresentada na Tabela 1, realizada no ano letivo 2011/2012, inserida no Mestrado em Ensino da Matemática no 3° ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário, na Universidade do Minho.

Tabela 1 – Síntese da intervenção de ensino

Aula	Tempo	Tarefas	Objetivos
1	90’	– Vídeo: Sondagens Presidenciais 2011 – O que é a Estatística? – Explorando os conceitos de variável estatística, população, amostra, censo e sondagem em situações da vida real. – Censos 2011. – Amostra representativa? – Desporto favorito – a escolha da amostra no Excel.	– Compreender os conceitos: Estatística, variável estatística, amostra, população, censo, sondagem. – Recolher informação acerca dos Censos 2011, em grupo, na Internet. – Explorar situações que evidenciam enviesamento, na recolha de dados. – Gerar no Excel uma amostra aleatória.

2	90’	– Desporto favorito. – Animal doméstico preferido.	– Construir e interpretar tabelas de frequências absolutas e relativas. – Identificar a moda de um conjunto de dados.
3	45’	– Variáveis estatísticas.	– Distinguir variáveis qualitativas de variáveis quantitativas discretas ou contínuas.
4	90’	– Desporto favorito. – O agregado familiar em gráfico de barras. – O crescimento do Pedro e da Alice.	– Construir, ler e interpretar gráficos de barras e de linha.
5	90’	– A pizza preferida em gráficos circulares.	– Construir e interpretar tabelas de frequências absolutas e relativas e gráficos circulares.
6	90’	– Alturas dos jogadores portugueses na Liga Europa.	– Construir, analisar e interpretar o histograma e tirar conclusões.
7	45’	– Vamos conhecer a nossa turma.	– Consolidar aprendizagens.
8	90’	Avaliação com recurso à tecnologia.	– Esclarecer dúvidas. – Avaliar as aprendizagens dos alunos, na unidade Organização e Tratamento de Dados.

Este estudo desenvolveu-se em torno de quatro objetivos, acerca dos quais vamos apresentar resultados relativos aos dois primeiros: 1) Identificar formas de utilização da tecnologia no ensino e aprendizagem da Estatística; 2) Reconhecer aspetos fortes e aspetos frágeis na utilização da tecnologia no ensino e aprendizagem da Estatística.

Nesta intervenção, a tecnologia usada foi o computador com a folha de cálculo. Numa primeira fase, foi usado um computador por aluno e, numa segunda fase, um ou dois computadores por grupo.

A intervenção de ensino foi implementada numa turma do 7° ano de escolaridade, constituída por 19 alunos, pertencente a uma escola do concelho de Barcelos, sendo 12 anos a sua média de idades e maioritariamente do sexo feminino.

A turma caracterizava-se como bastante heterogénea, tanto ao nível cognitivo, como ao nível afetivo e do seu interesse em relação à Matemática. Ao nível cognitivo, a maior parte dos alunos da turma apresentava dificuldades na interpretação de enunciados de problemas, na comunicação oral e escrita e na resolução de problemas que exigem conexões entre vários temas de matemática.

Durante a intervenção de ensino, os alunos, nomeados por A_i, com $i = 1, 2, \ldots, 19$, organizaram-se em seis grupos de trabalho heterogéneos (ver Tabela 2) quanto ao seu desempenho em Matemática, de modo a beneficiar tanto os alunos mais capazes como aqueles que tinham mais dificuldades. Matos e Serrazina (2006) justificam esta estratégia afirmando que, deste modo, os alunos mais capazes podem observar processos conhecidos e refletir sobre eles a um nível superior e os alunos com mais dificuldades têm a oportunidade de usar as explicações recebidas.

Tabela 2 – Distribuição dos alunos da turma por grupos de trabalho

N° do grupo	1	2	3	4	5	6
Elementos do grupo	A_1, A_2, A_3, A_4	A_5, A_6, A_7, A_8	A_9, A_{10}, A_{11}	A_{12}, A_{13}	A_{14}, A_{15}, A_{16}	A_{17}, A_{18}, A_{19}

Finalmente, a avaliou-se a intervenção de ensino analisando-se as tarefas realizadas pelos alunos, as gravações das aulas e o teste realizado com recurso à tecnologia, enfatizando-se neste texto as formas de utilização da tecnologia no ensino e aprendizagem da Estatística e os aspetos fortes e frágeis no uso deste recurso didático.

3. Apresentação de resultados

Nesta secção apresentam-se os resultados da exploração de uma das tarefas, relativa ao gráfico circular. Esta tarefa desenrolou-se numa das últimas aulas da implementação do projeto. Nesta altura, os alunos já não demonstraram dificuldades no manuseamento do computador e, por outro lado, já se mostraram bastante críticos perante as respostas fornecidas pelo computador.

Esta tarefa considera-se adequada para a aprendizagem, uma vez que segue as orientações do Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007) e aborda um tema de interesse para os alunos. Além disso, compara dados entre o todo e as partes, tal como sugere Carvalho (2009) no estudo do gráfico circular.

A pizza preferida em gráficos circulares

Na aula de Matemática, o professor apresentou os resultados de um inquérito, sobre qual a pizza preferida das turmas A e B, organizados nas seguintes tabelas de frequência.

Pizza preferida da turma A	Frequência absoluta
Margarita	5
Quatro queijos	10
Vegetais	1
Frango	2
Atum	2
Pizza preferida da turma B	**Frequência absoluta**
Margarita	7
Quatro queijos	8
Vegetais	2
Frango	7
Atum	2

a) Representa os dados referentes à pizza preferida na turma A num gráfico circular, com papel e lápis.

b) Representa, no Excel, os dados relativos à pizza preferida da turma B através de um gráfico circular.

c) Se se duplicasse o número de alunos da turma B a preferirem cada tipo de pizza, o que acontecia ao gráfico circular?

d) Supõe que duplicavas o número de alunos da turma A a preferirem a pizza de quatro queijos. O ângulo do sector circular correspondente a este tipo de pizza também duplicava? Justifica a resposta.

Nota: Adaptado de *Organização e Tratamento de Dados* (Martins & Ponte, 2010).

Na realização desta tarefa verificaram-se, nos diferentes grupos, diferentes formas de integração da tecnologia e observaram-se vários aspetos fortes e frágeis do uso da tecnologia, tal como se observa no Quadro 1.

Quadro 1 – Formas de integração da tecnologia nos grupos de trabalho ($n = 6$) e aspetos fortes e frágeis do uso da tecnologia presentes no desenvolvimento das questões a), b), c) e d)

Questões	Diferentes formas de integração da tecnologia segundo os grupos de trabalho				Aspetos fortes do uso da tecnologia na resolução das questões	Aspetos frágeis do uso da tecnologia na resolução das questões
	I	*II*	*III*	*IV*		
a)	3	2, 4, 5, 6	—	1	– Computador funcionou como um feedback; – Levar os alunos de uma forma mais rápida à construção do gráfico circular; – Rigor na construção de gráficos estatísticos; – Organizar os dados de diversas formas; – Facilitar a relação entre a medida da amplitude do ângulo do sector circular e a respetiva frequência; – Despoletar discussão entre os alunos nos grupos e entre a turma e a professora.	– Ruído; – Movimento.
b)	—	1, 2, 3, 4, 5, 6	—	—	– Desenvolver o sentido crítico; – Despoletar discussão entre os alunos nos grupos, entre vários grupos e entre a turma e a professora.	
c)	1, 2, 3, 4, 5, 6	—	—	—	– Permitir responder a questões do tipo "que acontecerá se..."; – Encorajar o raciocínio; – Incentivar a experimentação; – Motivar os alunos; – Esclarecer ideias; – Avaliar numa questão uma maior quantidade de conceitos; – Despoletar discussão entre os alunos nos grupos, entre vários grupos e entre a turma e a professora; – Desenvolver a intuição matemática.	
d)	1, 2, 3, 4, 5, 6	—	—	—	– Repensar raciocínios; – Incentivar a experimentação; – Despoletar discussão entre os alunos nos grupos, entre vários grupos e entre a turma e a professora; – Desenvolver a intuição matemática.	

Nota: I – A tecnologia como feedback; II – A tecnologia como geradora de uma ideia geral do problema; III – A tecnologia como único meio de resolução do problema; IV – Resolução do problema só com papel e lápis.

Questão a)

Da análise do Quadro 1, relativamente à questão a), que requer a construção de um gráfico circular com papel e lápis, destacam-se os grupos 1 e 3, na medida em que o grupo 1, ao contrário dos outros grupos, não utilizou a tecnologia para dar resposta ao problema. Já o grupo 3 começou por responder ao problema com papel e lápis e depois utilizou o computador para verificar se a construção do gráfico circular estava correta, tal como referiram à professora, no âmbito da discussão grupo-turma:

> *Professora:* Então quando representaram o gráfico, no Excel, relativamente à pizza da turma B, resultou o que estavam à espera? O que também fariam à mão? Vamos lá ver... Ali o grupo do A_{10}!
> A_{10}: O da turma A sim.
> *Professora:* Então na turma A, vocês representaram com papel e lápis, e depois, no Excel?
> A_{10}: Sim. E deu-nos igual.

Nesta questão, 67% dos grupos começaram por resolver o problema com tecnologia e, de seguida, construíram o gráfico com papel e lápis. Esta forma de utilizar o computador permitiu que os alunos obtivessem uma noção geral do gráfico circular, levando-os, de uma forma mais fácil e rápida, à construção do gráfico circular. A discussão havida no grupo-turma, entre a professora e um dos elementos do grupo 5, é disso ilustrativo.

> *Professora:* E vocês A_{14}, usaram o computador?
> A_{14}: Primeiro usamos o computador e depois fizemos no caderno.
> *Professora:* E o computador em que é que ajudou?
> A_{14}: Ajudou a perceber...
> Professora: Mas em quê?
> A_{14}: Ajudou-nos a perceber como íamos fazer o gráfico circular.
> *Professora:* Então ajudou-vos, duma forma global... para perceberem como era o gráfico circular?
> A_{14}: Sim.

Esta forma de integração da tecnologia conduziu os alunos, de uma forma mais rápida, à relação entre a medida da amplitude de cada sector circular e a frequência. Este aspeto forte da tecnologia revela-se muito importante, uma vez que, segundo Girard (1996, citado em Carvalho, 2009), "existe uma hipótese implícita de que os gráficos circulares ou de barras não levantem outros problemas além dos da proporcionalidade" (p. 6). Este aspeto verifica-se no seguinte diálogo, numa discussão do grupo-turma, entre a professora e o grupo 2.

> *Professora:* Alguém usou no Excel, o gráfico para ver as percentagens? Alguém antes de construir o gráfico com papel e lápis, olhou para o computador? Diz A_5.
> A_5: Antes de fazer olhei para o gráfico e reparei que, mesmo sem ter o ângulo, a quatro queijos ia ser metade do gráfico e Margarita ia ser um quarto.
> *Professora:* Significa que ao olhar para o gráfico apercebeste-te que tinhas meio círculo gasto com a pizza, certo? E isso influenciou a tua ideia de procurares a metade?
> A_5: Sim!

Questão b)

No que diz respeito à segunda questão, observa-se pelo Quadro 1 que todos os grupos utilizaram o computador do mesmo modo, isto é, começaram por resolver o problema com tecnologia e depois confirmaram ou completaram com papel e lápis.

Nesta questão, metade dos grupos, os grupos 2, 3 e 6, ao construírem o gráfico circular no computador, relativo aos dados da turma B, aperceberam-se que o computador fornecia às categorias vegetais e atum, com a mesma frequência absoluta, diferentes frequências relativas, 7% e 8%, respetivamente. Disto é ilustrativo o diálogo entre dois elementos do grupo 2, na discussão no grupo, e a Figura 1, apresentadas a seguir.

Figura 1. Representação dos dados da turma B, no Excel, num gráfico circular, pelo grupo 3.

A_5: Olha! O atum e os vegetais têm a mesma frequência e aqui dá diferente!
A_8: Pois, porque aqui não podem ter a mesma percentagem.
A_5: Têm que ter a mesma percentagem. [*A_5* chama a professora.]
A_5: Professora, aqui têm a mesma frequência absoluta, mas no computador a percentagem dá diferente!
Professora: Então calculem vocês à mão para verem o que concluem. [Os alunos calculam as frequências absolutas com papel e lápis.]
A_5: Hum... dá 7,69%.
Professora: Então o que acham que o computador fez?
A_5: Num arredondou para cima e noutro arredondou para baixo.

Posto isto, tornou-se patente na discussão no grupo-turma que a professora aproveitou a intervenção havida neste grupo, relativamente à resposta do computador, para promover o desenvolvimento do sentido crítico dos alunos.

Professora: E na turma B?
A_9: Nós não estávamos à espera que tipo... era suposto que... uma parte fosse 7% e 7%... e deu-nos 7%, 8%... e nós não estávamos a perceber porquê.
Professora: Pois... então depois fizeram com papel e lápis, não foi?
A_9: Sim.
Professora: E então, o que é que vocês deduziram que o computador fez?
A_9: Arredondou.
Professora: O grupo da *A_5* também viu isso... e o grupo da *A_{17}* também... Viram que havia ali qualquer coisa que não estava bem! Experimentem somar as frequências que vocês calcularam à mão! (...)
Professora: Então vamos ouvir o *A_9*! O *A_9* somou as frequências e quanto deu?
A_9: Dá 0,000... Não! Dá 1,0038.
Professora – E quanto deveria dar no total?
A_9: 1.

Além disso, esta questão levou à discussão entre os grupos e ao esclarecimento de ideias do grupo 5, como se infere do diálogo seguinte.

Professora: Então o que é que vocês pensam que aconteceu? Diz *A_{15}*.
A_{15}: Calcularam mal.
Professora: Calcularam mal?
A_{10}: Não! O computador arredondou...

Professora: Ou seja, o computador aqui... não está nada mal, A_{15}. O computador aqui teve que arredondar de tal modo, não é? ...para... nós só podíamos representar naquele gráfico circular então houve ali uma necessidade de ajustar, certo? A_{15}, não foi? Como é que ultrapassávamos aquele espaço? Não podíamos... então houve ali uma necessidade de ajustar. Certo? Vocês perceberam? Por isso, vocês têm de ter cuidado quando representam no computador têm que ser críticos, têm que ver e pensar... Vocês aí tiveram essa atitude! O grupo da A_5 também, vocês também A_{17}.

Questão c)

Quanto à questão c), em que se pretende verificar o que acontece ao gráfico circular quando se duplica o número de alunos da turma B a preferirem cada tipo de pizza, todos os grupos resolveram primeiro o problema com papel e lápis e, de seguida, utilizaram o computador para verificar a veracidade da resolução.

Previamente a resolverem o problema no computador, dos cinco alunos que referiram o seu raciocínio, alguns alunos (A_8 e A_9 pertencentes ao mesmo grupo) pensavam que o gráfico circular ia ficar diferente e outros (A_1, A_5 e A_{10}) tinham a opinião que o gráfico circular não ia sofrer alterações ao duplicar o número de alunos da turma B a preferirem cada tipo de pizza.

A_5: Iam dar valores diferentes!
Professora: E vocês, A_1, o que pensaram?
A_1: Eu achei que o gráfico ía ficar igual... os valores duplicavam, mas ia acabar por dar ao mesmo, porque o total também duplicava.

Além disso, observe-se o seguinte diálogo que ocorreu na aula, numa discussão entre os alunos do grupo 3, em que é patente um conflito entre as noções de frequência absoluta e de percentagem.

A_9: Claro que duplicava!
A_{10}: Não duplicava nada! Sabes porquê? Ficava a mesma percentagem. Se pensarmos bem... ficavam as mesmas percentagens.
A_9: Mas então se juntarmos mais alunos, esses alunos vão ter mais preferências... o número vai aumentando! Vai aumentar o gráfico.
A_{10}: Mas tipo, vai duplicar do 10 para o 20, certo? Isto ficava 40, certo? Isto ficava 10, isto 20, 2, 4, 4.
A_9: Pronto!
A_{10}: 20 é metade de 40?
A_9: É!
A_{10}: Então... 50%, certo? 10 é ¼ de 40. É tudo igual.

O grupo 3 ao resolver, em primeiro lugar, o problema com papel e lápis e ao verificar no computador, de seguida, constatou que a resolução estava correta, aumentando a motivação e a autoconfiança dos alunos do grupo. O aluno A_{10} depois de resolver com papel e lápis e confirmar a veracidade da sua resolução no computador, deu largas à sua satisfação.

A_{10}: Ficou igual. I'm the best!
A_9: Fica igual.

A resolução no computador, depois da resolução com papel e lápis, propiciou o esclarecimento de ideias por parte de alguns alunos, tal como se verifica na discussão ocorrida no grupo-turma, entre a professora e um elemento do grupo 2.

Professora: Então, o Excel aqui ajudou-vos ou não a tirar conclusões?
A_8: Ajudou! Ajudou e muito!
Professora: Diz lá A_8!
A_8: Foi uma maneira de vermos o gráfico.

Professora: O que vai acontecer! Essa tua oscilação com os dedos traduz tudo, A8... Porque não seria logo à primeira, pois não A_8!?
A_8*:* Não.
Professora: Porque se mudava um, era verdade o vosso raciocínio!.. Só quando termino, é que ele ajustou... fez isso que fazias com os dedos ... ajustou e ficou igual!

Questão d)

Na questão d) pretende-se verificar se a amplitude do ângulo do sector circular correspondente à categoria pizza de quatro queijos duplica, quando se duplica o número de alunos da turma A a preferirem essa pizza. Trata-se de uma questão em que se aborda a relação entre a amplitude do ângulo e a frequência, tendo-se revelado uma tarefa complexa. Carvalho (2009) e Espinel, González, Bruno & Pinto (2009) consideram esta relação como uma das dificuldades dos alunos na construção do gráfico circular.

Nesta questão, todos os grupos começaram por resolver o problema no caderno, com papel e lápis e, seguidamente, com recurso à tecnologia. Tal como na questão anterior, emergiram diferentes raciocínios na resolução deste problema. Mais uma vez, se denota que o uso do computador favoreceu a discussão nos grupos e, além disso, levou alguns alunos a repensar raciocínios, como aconteceu com os alunos do grupo 3.

Professora: Pois, porque na alínea anterior, quando dizia para duplicarmos apenas um setor, o que é que vocês disseram? O grupo do A_{10}, o que pensaram antes de usar o Excel?
A_9*:* Achámos coisas diferentes.
Professora: Digam então...
A_9*:* O A_{10} e o A_{11} achavam que ía ficar igual e eu achava que ia ficar diferente.
Professora – O que é diferente? Passar para o dobro ou não passar para o dobro?
A_{10}*:* Não passar para o dobro.
Professora: Porquê?
A_{10}*:* Porque ainda tem os outros tipos de pizza.

Tal como no grupo 3, também se podem evidenciar diferentes raciocínios nos grupos 1 e 2, durante a discussão no grupo-turma.

Professora: E vocês A_1? O que achavam antes de pôr no Excel?
A_1*:* Eu não sabia se ele ia duplicar ou só aumentar... mas depois pus no computador e reparei que não, porque os outros grupos de pizza se duplicasse os outros não tinham mais espaço! Então vi que não ia duplicar, mas sim aumentar.
Professora: E vocês aí?
A_5*:* O A_6 achava que ia duplicar e nós não porque achávamos que se duplicasse o quatro queijos os outros também iam aumentar.
Professora: Os outros também iam aumentar?
A_5*:* Não.
Professora: E vocês ai?
A_{10}*:* A pizza de quatro queijos ia aumentar e os outros iam diminuir.
Professora: Mas ia aumentar para o dobro? Não... ia aumentar uma percentagem.

4. Conclusão e implicações

Dos resultados obtidos constataram-se muitos aspetos fortes do uso da tecnologia, aspetos esses fulcrais na aprendizagem da Estatística. Consequentemente, a tecnologia, tal como refere Ponte (1997) em relação à matemática, contribuiu para a aprendizagem da Estatística, no sentido de "dar um contributo essencial para aprender a interrogar, conjeturar, descobrir e argumentar raciocinando sobre objetos abstratos e relacionando-os com a realidade física e social" (Ponte, 1997, p. 1).

Além disso, com este trabalho verificou-se ser necessário entender como se integrar a tecnologia na sala de aula, constatando-se que um computador por grupo é a forma mais eficaz pois promove uma maior interação entre os seus membros. Por outro lado, também se patenteou a importância de conjugar a tecnologia com o papel e lápis, e observaram-se muitas vantagens inerentes a estas estratégias de ensino e aprendizagem, designadamente: a motivação dos alunos, o proporcionar de pistas à resolução analítica e organizar grandes quantidades de dados reais em pouco tempo.

Deste estudo também resultaram alguns aspetos frágeis na utilização da tecnologia. No entanto, se a tecnologia se tornar numa rotina da sala de aula, alguns destes aspetos, como por exemplo as dificuldades de manuseamento do computador, a distração decorrente da sua utilização e o sentido acrítico dos alunos perante as respostas do computador, diminuem ou podem mesmo desparecer, tal como se observou ao longo da intervenção. Além disso, o professor tem de admitir que uma aula com tecnologia tem mais ruído e movimento, pois "a aula deixa de estar totalmente nas mãos do professor e passa a ser também dominada pelo computador e pelo próprio desempenho dos alunos" (Santos, 2000, p. 77).

5. Referências

Amado N., & Carreira S. (2008). Utilização pedagógica do computador por professores estagiários de Matemática – diferenças na prática da sala de aula. In A. P. Canavarro, D. Moreira, & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 286-299). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Universidad de Granada.

Ben-Zvi, D. (2000). Towards understanding the role of technological tools in statistical learning. *Mathematics Thinking and Learning*, 2(1&2), 127–155.

Canavarro, A. P. & Ponte, J. P. (1997). *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Canavarro, A. P. (1993). *Conceções e práticas de professores de matemática: três estudos de caso.* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Carvalho, C. (2009). Reflexões em torno do ensino e da aprendizagem da Estatística. O exemplo dos gráficos. In J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H. Martinho, & P. F. Correia (Orgs.), *Atas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 22-36). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Demana, F., & Waits, B. (1994). Graphing calculator and computer precalculus projects (C^2PC): What have we learned in ten years? In A. Slow (Ed.), *Preparing for a new calculus conference proceedings*. Washington: The Mathematical Association of America.

Espinel, M. C., González, M. T., Bruno, A., & Pinto, J. (2009). Las gráficas estadísticas. In L. Serrano (Eds.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp.57-74). Málaga: Gráficas San Pancracio.

Fernandes, J. A., & Vaz, O. (1998). Porquê usar tecnologia nas aulas de Matemática? *Boletim da SPM,* 39, 43-55.

Fernandes, J. A., Alves, M. P., Machado, E. A., Correia, P. F., & Rosário, M. A. (2009). Ensino e avaliação das aprendizagens em Estatística. In J. A. Fernandes, M. H. Marinho, F. Viseu, & P. F. Correia (Orgs.), *Atas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 52-71). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Fernandes, J. A., Batanero, C., Contreras, J. M., & Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante*, vol. XVIII, nº 1 e 2, 161-183.

Fernandes, J. A., Morais, P. C., & Lacaz, T. V. S. (2011). Representação de dados através de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Recife, Brasil, 26-30 Junho 2011.

Fernandes, J. A., Sousa, M. V. & Ribeiro, S. (2004). O ensino de estatística no ensino básico e secundário: Um estudo exploratório. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa, & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Atas do I Encontro de Probabilidades e*

Estatística na Escola (pp. 165-193). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Hawkins, A., Jolliffe, F., & Glickman, L. (1992). *Teaching statistical concepts*. Harlow, Essex, England: Longman Group UK Limited.

Jolliffe, F. (2007). The changing brave new world of statistics assessment. In B. Philips, & L. Weldon (Eds.), *The Proceeding of the ISI/ISAE Satellite on Assessing Student Learning in Statistics*, Vooburg: International Statistical Institute.

Martins, M. E., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e Tratamento de Dados*. Lisboa: Ministério de Educação.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

Moreira, L. (1989). *A folha de cálculo na educação matemática: Uma experiência com alunos do ensino preparatório* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática,* 34, 2-7.

Ponte, J. P. (1997). O Ensino da Matemática na Sociedade da Informação. *Educação e Matemática,* 45, 1-2.

Ponte, J. P. (2000). Tecnologias de informação e comunicação na educação e na formação de professores: Que desafios para a comunidade educativa? In A. Estrela & J. Ferreira (Eds.), *Tecnologias em educação: Estudos e investigações* (Atas do X Colóquio da AFIRSE, pp. 89-108). Lisboa: Universidade de Lisboa, Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação.

Ponte, J. P., Nunes, F., & Veloso, E. (1991). *Computadores no Ensino da Matemática. Uma coleção de estudos de caso*. Lisboa: APM e Projeto Minerva (DEFCUL).

Rodrigues, M. (2000). Interações sociais na aprendizagem da Matemática *Quadrante,* vol. 9, nº 1, 3-47.

Santos, E. (2000). O computador e o professor: Um contributo para o conhecimento das culturas profissionais dos professores. *Quadrante,* vol. 9, nº 2, 55–81.

FERNANDES, J. A., VISEU, F., MARTINHO, M. H. & CORREIA, P. F. (ORGS.) (2013). *ATAS DO III ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA*. BRAGA: CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DO MINHO.

A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA NA APRENDIZAGEM DE ESTATÍSTICA NO 10º ANO DE ESCOLARIDADE

Ana Sofia Alves Ferreira
anasofia29.10@gmail.com
Floriano Augusto Veiga Viseu
Universidade do Minho, fviseu@ie.uminho.pt

Resumo. Os gráficos estatísticos encontram-se presentes na maior parte dos meios de divulgação de informação, que dificilmente seria percebida de outra forma. A compreensão dessa informação pressupõe que o aluno mobilize conhecimentos de conceitos estatísticos, muitas das vezes adquiridos pela aplicação acrítica de fórmulas. Partindo do pressuposto de que uma forma de promover a aprendizagem desses conceitos é através da articulação entre as suas diferentes representações, procuramos averiguar o contributo das representações gráficas no desenvolvimento da capacidade estatística de alunos do 10.º ano de escolaridade. Os dados foram recolhidos através da análise dos gráficos estatísticos que integram o manual escolar, de gráficos que foram trabalhados na sala de aula e das perspetivas dos alunos sobre a estratégia de ensino delineada. Relativamente ao manual escolar, as representações gráficas que prevalecem, de forma intrínseca, são os histogramas e os diagramas de dispersão, e, de forma extrínseca, os histogramas e os gráficos de barras. Com estas representações, o manual escolar contribui para o desenvolvimento da capacidade estatística de ler os dados e de ler entre os dados. Para além destes níveis de compreensão estatística, os gráficos trabalhados nas aulas contribuíram para o desenvolvimento da capacidade de ler entre os dados e de ler além dos dados. A maioria dos alunos considera que o estudo da Estatística os preparou para a construção das representações gráficas estudadas e para a interpretação da informação que veiculam, contribuindo os gráficos trabalhados nas aulas para o desenvolvimento da capacidade de avaliar criticamente essa informação. Alguns alunos revelam dificuldades na escolha adequada da escala na construção do diagrama de dispersão.

Introdução

Na sociedade da informação em que vivemos, a quantidade de dados com que somos confrontados, como é exemplo a publicidade dos mais variados produtos, evidencia a importância do cidadão comum ter capacidade de a saber gerir. A escola desempenha um papel preponderante no desenvolvimento dessa capacidade dos seus alunos, de serem capazes de interpretar e de dar o devido sentido à informação com que se deparam nos diversos meios de comunicação, para o que muito contribui o estudo do tema de Estatística. Porém, por razões várias, nem sempre este tema merece a mesma atenção do que outros, sendo relegado para os últimos dias do ano letivo e/ou tratado com pouca profundidade.

Segundo um estudo realizado pela APM (1998), este tratamento deve-se à consideração por parte de alguns professores de que o estudo da Estatística deve ser reduzido na sua importância curricular no ensino secundário. Esta posição pode dever-se à falta de formação dos professores sobre o tema, assim como à sua integração recente no currículo da disciplina de Matemática de todos os ciclos escolares.

As recomendações atuais para o ensino de Estatística apontam para o desenvolvimento de atividades que fomentem nos alunos a capacidade de interpretação, discussão e uma posição crítica perante a informação que diariamente aparece nos mais diversos formatos (NCTM, 2007). Uma forma de promover a compreensão dos conceitos estatísticos é através da conexão entre as suas diferentes representações. Dessas representações, a gráfica é entendida como um recurso que permite sintetizar e comunicar informação sobre um dado fenómeno. Como diariamente os alunos são confrontados com informação sob a forma de gráficos, sobre os quais é necessário analisar, interpretar e compreender a informação neles contida, pretendemos averiguar o contributo das representações gráficas no desenvolvimento da capacidade estatística de alunos do 10.º ano.

1. O ensino da Estatística em Portugal

A importância dada ao ensino da Estatística em Portugal nem sempre foi a mesma e muito menos consensual entre os professores, apesar deste tema, como referem Ponte e Fonseca (2001), adquirir uma "forte especificidade face aos outros tópicos do currículo" (p. 7). Devido à sua enorme expressão na atividade social e em muitos domínios do conhecimento, como por exemplo nas ciências sociais e humanas, a escola desempenha um papel crucial na formação estatística dos seus alunos. Para Gal (2002) esta formação inclui, para além da componente algorítmica de fórmulas ou a mera construção de gráficos, a capacidade de interpretar e avaliar criticamente a informação estatística a partir de diferentes fontes e de discutir ou comunicar a razoabilidade dessa informação. A essa capacidade o autor chama Literacia Estatística. Martins e Ponte (2010) consideram que esta capacidade ajuda a resolver problemas que muitas vezes são apresentados pelos meios de comunicação social e a interpretar gráficos, taxas de desemprego e taxas relativas à evolução de doenças.

A introdução da Estatística nas escolas portuguesas surge nos anos 60 (Carvalho & César, 2001), primeiramente no ensino secundário e posteriormente nos programas de todos os anos escolares do ensino básico (Ministério da Educação, 2007). No que diz respeito ao ensino secundário, o tema de Estatística adquiriu o seu 'espaço' com as sucessivas reformulações curriculares, tal como ilustra a evolução da percentagem de aulas atribuídas a este tema nos programas de Matemática do 10.º ano de escolaridade desde 1991 (Tabela1).

Tabela 1 – Percentagem de aulas atribuídas ao ensino de Estatística nos programas de Matemática do 10.º ano de escolaridade de 1991 até à atualidade[1]

Ensino Secundário	Total de aulas da disciplina de Matemática	% de aulas para o tema da Estatística
Programa de Matemática de 1991	92	19.6%
Programa de Matemática de 1997	92	21.7%
Programa de Matemática A de 2002	51	29.4%

O aumento, em termos percentuais, do número de aulas recomendado para lecionar o tema de Estatística não significa que o ensino deste tema sofreu alterações ao longo dos anos. Para Ponte e Fonseca (2000), apesar das alterações do currículo de Matemática a Estatística tende a "ser ainda um tema marginal do currículo, facilmente relegável para segundo plano" (p. 179). Num estudo realizado por estes autores, com o objetivo de comparar os programas portugueses com os programas ingleses e americanos no que respeita ao tema de Estatística, o único nível de ensino português que apresenta uma comparação mais equilibrada em relação aos outros dois países é o ensino secundário. Ponte e Fonseca (2000) consideram que muito há a fazer no âmbito da educação estatística para que os cidadãos possam ser elementos ativos e informados na sociedade:

> É preciso ultrapassar definitivamente a noção que a Estatística se reduz a umas tantas formas de representar dados em gráficos e tabelas e à execução de certos cálculos para determinar a média ou o desvio-padrão. A Estatística, encarada como um domínio de

[1] O número total de aulas atribuído ao ensino de Estatística no programa de Matemática A de 2002 é menor que nos programas anteriores devido à alteração da duração de uma aula de 50 minutos para 90 minutos.

> conceptualização dos processos de recolha, análise e interpretação de dados constitui uma interface fundamental entre a Matemática e a realidade, indispensável numa verdadeira educação para a cidadania e para a intervenção ativa nas mais diversas atividades. (p. 194)

Repensar a forma como se ensina Estatística tem implicações nas tarefas que se propõem aos alunos, nos materiais didáticos a que estes recorrem e nas interações que se promovem na sala de aula (César & Sousa, 2000). Entre os materiais, o professor tem à sua disposição recursos tecnológicos, como são exemplo a calculadora e o computador, e situações retiradas dos *media* que potenciam a conexão entre as diferentes representações dos conceitos estatísticos e a construção do seu significado.

2. A representação gráfica no ensino e na aprendizagem de Estatística

A forma expedita de veicular a informação num mundo cada vez mais globalizado evidencia a importância da utilização da representação gráfica para comunicar (Carvalho, 2009) e para estabelecer relações entre os dados e inferir informação através da sua interpretação (Monteiro & Ainley, 2003). A nível escolar, a concretização destas atividades tem por finalidade o desenvolvimento do espirito crítico na avaliação da informação estatística (Ministério da Educação, 2002). Uma forma de desenvolver a capacidade estatística dos alunos é através de tarefas que apresentem diferentes representações com distintos graus de complexidade (Pires & Martins, 2009). Curcio (1989) estabelece distintos níveis de compreensão para o desenvolvimento dessa capacidade:

Nível 1: *Ler os dados*: leitura literal da representação em causa; compreensão da escala e das unidades de medida; resposta a questões imediatas por observação da representação gráfica; identificar e classificar variáveis em estudo.

Nível 2: *Ler entre os dados*: interpretação e organização da informação patente na representação; construção de diferentes representações; compreender e aplicar as propriedades das medidas de tendência central e de dispersão; explicar o significado de valores obtidos; estabelecer comparações entre os dados e respetivas representações dos mesmos; extrair informação de um gráfico e recorrer a conhecimentos matemáticos prévios.

Nível 3: *Ler além dos dados*: extrapolação, previsão ou inferência a partir da informação contida no tipo de representação em causa; capacidade de colocar questões.

O primeiro nível requer uma leitura literal do gráfico, não sendo necessário alguma interpretação dos mesmos mas apenas a capacidade de responder a questões imediatas. Carvalho (2009) advoga que as tarefas realizadas na sala de aula que se integram neste nível de compreensão apresentam um baixo nível cognitivo.

O segundo nível requer uma interpretação e organização da informação fornecida pelo gráfico. É necessária a capacidade de extrair informação de um gráfico, encontrar relações nos dados e compará-los, podendo recorrer a conhecimentos matemáticos prévios. Este nível exige a compreensão de gráficos e a possibilidade de fazer algumas inferências simples. Carvalho (2009) aponta que neste nível é necessário que os alunos sejam capazes de "comparar quantidades ao mesmo tempo que recorre a outros conceitos e capacidades, que lhe permitem identificar as relações matemáticas presentes num gráfico" (p. 25).

O terceiro nível exige a extrapolação, previsão ou inferência a partir da representação gráfica para responder a questões implícitas. Para o NCTM (2007), a utilização da Estatística "de forma perversa para influenciar a opinião pública acerca de determinadas matérias ou para representar a suposta qualidade e eficácia de produtos comerciais" (p. 52) eleva a responsabilidade da escola em desenvolver este nível de compreensão dos alunos. Segundo Branco e Martins (2002), este nível permite resolver com "segurança um rol de problemas que nos dizem diretamente respeito ou que nos são apresentados frequentemente pelos *media* e cuja resolução apela a conhecimentos e raciocínio estatísticos" (p. 13).

Embora a Estatística seja um tema recente nos programas de todos os anos escolares do ensino básico, é um tema que desperta o interesse da investigação. Exemplo disso é o estudo realizado por Morais (2010), que envolveu 180 alunos do 9.º ano de escolaridade de um agrupamento de escolas do distrito de Braga com o intuito de compreender as atividades realizadas pelos alunos em tarefas que incidiam na construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos. Relativamente à construção de gráficos estatísticos, a maior parte dos alunos utilizou vários tipos de gráficos nas respostas às questões colocadas, embora um número considerável de alunos não produziu qualquer tipo de gráfico. Quanto à leitura e interpretação de gráficos estatísticos, a autora conclui que no nível 1 (*ler os dados*) os alunos revelaram poucas dificuldades, o que já não aconteceu nas questões de nível 2 (*ler entre os dados*) e de nível 3 (*ler além dos dados*) (Tabela 2).

Tabela 2 – Dificuldades e erros na leitura, construção e interpretação de gráficos estatísticos de alunos do 9.º ano (Morais, 2010)

Apresentação de gráficos desajustados dos dados apresentados
Marcação ou ausência de escala nos gráficos
Determinação de classes com diferentes amplitudes
Omissão dos rótulos nos eixos, títulos e legendas
Marcação dos pontos coordenados na construção de um gráfico de linhas
Leitura dos dados

Perante as dificuldades manifestadas pelos alunos, Morais (2010) defende "a necessidade de alguma intervenção no processo de ensino e aprendizagem da Estatística, no que diz respeito à construção, leitura e interpretação de gráficos" (p. 139). Essa intervenção deve contribuir "para um maior conhecimento do conceito de gráfico e dos seus elementos, bem como da compreensão dos mesmos" (idem, p. 139).

3. Metodologia

Com o objetivo de averiguar o contributo das representações gráficas na aprendizagem de Estatística de alunos do 10.º ano, analisámos os gráficos estatísticos contemplados no manual escolar do aluno e alguns gráficos que foram trabalhados nas aulas de Matemática, tendo como referência os níveis de compreensão estatística de Cúrcio (1989). Os alunos que integram este estudo frequentavam a área Cientifico-Humanístico de Ciências e Tecnologias, sendo 17 raparigas (74%) e 6 rapazes (26%) com idades compreendidas entre os 14 e os 16 anos. Do manual escolar, identificámos nas diferentes partes que estruturam o tema de Estatística a referência, explícita e implícita, aos diferentes tipos de gráficos estatísticos, o que é traduzido sob a forma de frequência absoluta. Dos gráficos que foram utilizados nas aulas, incidimos a nossa análise em alguns gráficos que apresentam características que complementam os gráficos que são apresentados no manual, tais como: (i) gráfico de linhas; (ii) histograma; e (iii) gráfico de dispersão. Para conhecermos as perceções dos alunos (n=23) sobre a estratégia de ensino com base nas representações gráficas, recolhemos as suas respostas através de um questionário, as quais são analisadas segundo as seguintes dimensões: (i) a calculadora gráfica na aprendizagem de Estatística; (ii) as representações gráficas no ensino e na aprendizagem de conceitos estatísticos; (iii) capacidades/conhecimentos desenvolvidos na aprendizagem de Estatística. As respostas dos alunos às questões de cada uma destas dimensões são apresentadas na forma de percentagem, que traduzem o grau de concordância das suas opções agrupadas por DT/D, I, C/CT e através da média dos valores de 1 a 5, que representam, por ordem crescente, o grau de concordância Discordo Totalmente (DT), Discordo (D), Indiferente (I), Concordo (C), Concordo Totalmente (CT).

4. Apresentação dos resultados

4.1. Manual escolar

Como as atividades de ensino e aprendizagem tendem a ser influenciadas pelo que o manual escolar veicula, analisámos o capítulo de Estatística do manual do 10.º ano adotado na escola onde se desenvolveu este estudo. Pretendemos averiguar de que forma o manual escolar contribui para promover a capacidade estatística com recurso a diferentes representações gráficas, que traduz a capacidade do aluno de ler, interpretar e avaliar criticamente a informação presente nas mesmas (Gal, 2002).

O manual escolar analisado apresenta uma estrutura clara, tira partido de algumas cores para destacar a informação e contém um conjunto de ilustrações, desde imagens de situações reais, que ilustram, por exemplo, pessoas a praticar desporto, a gráficos que tornam o manual mais apelativo ao olhar do aluno. Na parte central apresenta os conteúdos dos tópicos tratados com exemplos ilustrativos e no final de cada tópico propõe algumas tarefas de desenvolvimento das aprendizagens sobre esses conteúdos. Nas margens das folhas apresenta tarefas de aplicação do que se aprende na explanação dos conteúdos teóricos, sob a forma de exercícios e problemas. No final de cada tema existe uma secção com diversas tarefas que abarcam todos os conteúdos tratados.

Incidindo a análise das tarefas propostas pelo manual no desenvolvimento dos conceitos estatísticos, há tarefas que recorrem a gráficos de forma explícita (Tabela 3), integrando os gráficos na própria tarefa, e de forma implícita, as tarefas que solicitam aos alunos a organização da informação estatística através de gráficos (Tabela 4).

Tabela 3 – Frequência absoluta dos gráficos contemplados explicitamente nas tarefas do manual

	Parte central		Margens	Final do tema	
Tipo de gráfico	Teoria	Tarefas	Tarefas	Tarefas	**Total**
Gráficos de linhas	3	3	3	4	**13**
Histogramas	12	6	4	3	**25**
Gráficos circulares	3	3	1	3	**10**
Diagrama de caule-e-folhas	3	3	3	0	**9**
Diagrama de extremos e quartis	1	2	2	9	**14**
Diagrama de dispersão	6	0	3	0	**9**
Gráficos de barras	9	5	8	10	**32**
Total	**37**	**22**	**24**	**29**	**112**

Dos diferentes gráficos, a informação estatística é explicitamente veiculada predominantemente através de histogramas e gráficos de barras. Com este tipo de gráficos, como exemplificam os da Figura 1, o aluno extrai informação (*ler os dados*) para responder a questões de baixo nível cognitivo e para representar essa informação numa tabela de frequências.

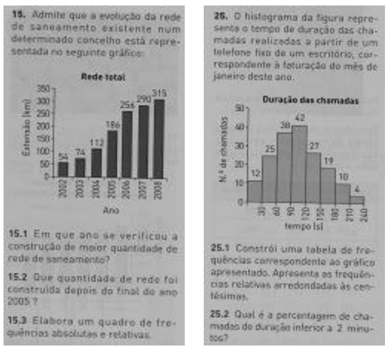


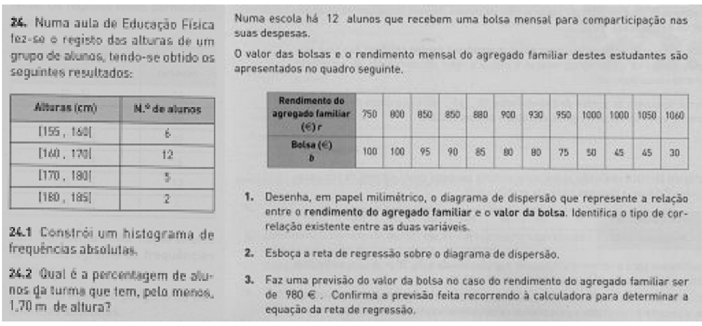
Figura 1. Tipo de tarefas que recorrem explicitamente a representações gráficas.

Em termos implícitos, os alunos são desafiados a organizar a informação estatística presente nas tarefas maioritariamente por histogramas e diagramas de dispersão (Tabela 4).

Tabela 4 – Frequência absoluta dos gráficos contemplados implicitamente nas tarefas do manual

	Parte central		Margens	Final do tema	
Tipo de gráfico	Teoria	Tarefas	Tarefas	Tarefas	**Total**
Gráficos de linhas	–	1	1	2	**4**
Histogramas	–	4	3	2	**9**
Gráficos circulares	–	0	0	0	**0**
Diagramas de caule-e-folhas	–	1	0	0	**1**
Diagrama de extremos e quartis	–	3	0	0	**3**
Diagrama de dispersão	–	3	2	2	**7**
Gráficos de barras	–	0	1	0	**1**
Total	**–**	**12**	**7**	**6**	**25**

As tarefas propostas no manual instigam os alunos a recorrer a tais gráficos para apresentarem a informação estatística. Como exemplificam as seguintes tarefas (Figura 2), os dados surgem organizados em tabelas para os alunos construírem os respetivos gráficos e a partir deles fazerem interpretações e previsões simples.



24. Numa aula de Educação Física fez-se o registo das alturas de um grupo de alunos, tendo-se obtido os seguintes resultados:

Alturas (cm)	N.º de alunos
[155 , 160[	6
[160 , 170[	12
[170 , 180[	5
[180 , 185[	2

24.1 Constrói um histograma de frequências absolutas.

24.2 Qual é a percentagem de alunos da turma que tem, pelo menos, 1,70 m de altura?

Numa escola há 12 alunos que recebem uma bolsa mensal para comparticipação nas suas despesas.

O valor das bolsas e o rendimento mensal do agregado familiar destes estudantes são apresentados no quadro seguinte.

Rendimento do agregado familiar (€) r	750	800	850	850	880	900	930	950	1000	1000	1050	1060
Bolsa (€) b	100	100	95	90	85	80	80	75	50	45	45	30

1. Desenha, em papel milimétrico, o diagrama de dispersão que represente a relação entre o **rendimento do agregado familiar** e o **valor da bolsa**. Identifica o tipo de correlação existente entre as duas variáveis.
2. Esboça a reta de regressão sobre o diagrama de dispersão.
3. Faz uma previsão do valor da bolsa no caso do rendimento do agregado familiar ser de 980 €. Confirma a previsão feita recorrendo à calculadora para determinar a equação da reta de regressão.

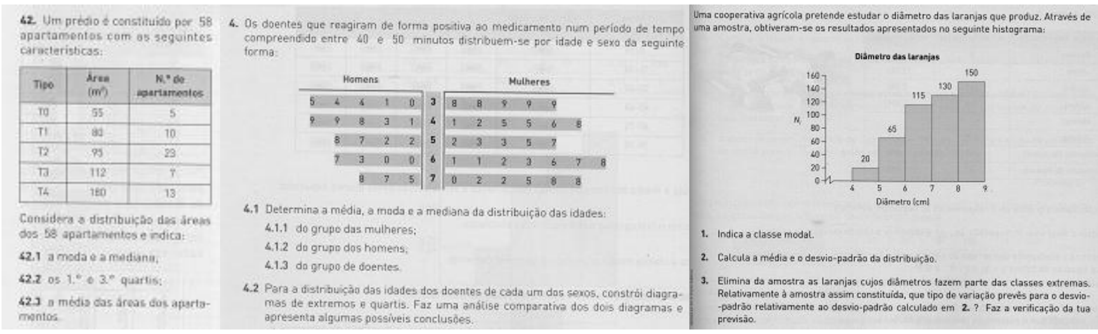
Figura 2. Tipo de tarefas do manual que envolvem implicitamente representações gráficas.

As atividades que os alunos realizam com as tarefas propostas promovem o desenvolvimento da capacidade estatística de *ler os dados* e de *ler entre os dados* (Tabela 5).

Tabela 5 – Frequência absoluta das tarefas que contemplam os níveis da capacidade estatística estabelecidos por Curcio (1989)

Níveis de compreensão	Parte central	Margens	Final do tema
Ler os dados	0	3	2
Ler entre os dados	6	19	17
Ler além dos dados	0	0	0
Ler os dados e ler entre os dados	8	15	15
Ler entre os dados e ler além dos dados	0	0	2
Ler os dados, ler entre os dados e ler além dos dados	4	0	1

As tarefas das margens destinam-se a atividades de aplicação dos conhecimentos aprendidos. Predomina a construção isolada de diferentes representações gráficas, o cálculo de medidas de tendência central e de dispersão. A tarefa apresentada na Figura 3 exemplifica o tipo de tarefa que predomina nas margens do manual ao longo do tema de Estatística, o que ilustra a ausência da exploração do significado dos conceitos estatísticos e dos valores obtidos e da explicação do significado dos valores calculados no contexto da tarefa.



42. Um prédio é constituído por 58 apartamentos com as seguintes características:

Tipo	Área (m²)	N.º de apartamentos
T0	55	5
T1	80	10
T2	95	23
T3	112	7
T4	180	13

Considera a distribuição das áreas dos 58 apartamentos e indica:

42.1 a moda e a mediana;

42.2 os 1.º e 3.º quartis;

42.3 a média das áreas dos apartamentos.

4. Os doentes que reagiram de forma positiva ao medicamento num período de tempo compreendido entre 40 e 50 minutos distribuem-se por idade e sexo da seguinte forma:

Homens		Mulheres
5 4 4 1 0	3	8 8 9 9 9
9 9 8 3 1	4	1 2 5 5 6 8
8 7 2 2	5	2 3 3 5 7
7 3 0 0	6	1 1 2 3 6 7 8
8 7 5	7	0 2 2 5 8 8

4.1 Determina a média, a moda e a mediana da distribuição das idades:

4.1.1 do grupo das mulheres;

4.1.2 do grupo dos homens;

4.1.3 do grupo de doentes.

4.2 Para a distribuição das idades dos doentes de cada um dos sexos, constrói diagramas de extremos e quartis. Faz uma análise comparativa dos dois diagramas e apresenta algumas possíveis conclusões.

Uma cooperativa agrícola pretende estudar o diâmetro das laranjas que produz. Através de uma amostra, obtiveram-se os resultados apresentados no seguinte histograma:

1. Indica a classe modal.
2. Calcula a média e o desvio-padrão da distribuição.
3. Elimina da amostra as laranjas cujos diâmetros fazem parte das classes extremas. Relativamente à amostra assim constituída, que tipo de variação prevês para o desvio-padrão relativamente ao desvio-padrão calculado em 2.? Faz a verificação da tua previsão.

Figura 3. Tipo de tarefas das margens, parte central e do final do tema de Estatística do manual escolar.

Relativamente às tarefas da parte central, o nível de compreensão *ler além dos dados* tem uma expressão diminuta, como se constata na Tabela 5, aparecendo interligado, muitas das vezes na última alínea da tarefa, com os outros níveis de compreensão estatística. As tarefas que integram a parte central distinguem-se das tarefas das margens por solicitarem ao aluno a comparação entre representações gráficas, como por exemplo entre dois diagramas de caule-e-folhas. Este tipo de questão exige do aluno outro nível de compreensão e uma interpretação dos resultados em função do contexto do que as tarefas que requerem respostas imediatas.

Por fim, as tarefas do final do tema são semelhantes às tarefas das margens mas com uma maior preocupação de contemplar o último nível de compreensão, *ler além dos dados*, embora pudesse apresentar uma expressão mais significativa. A tarefa apresentada na Figura 3, que exemplifica as tarefas desta parte do manual que contemplam o último nível de compreensão, ao pedir ao aluno uma previsão sobre a variação do desvio-padrão, exige a interpretação, a compreensão e a avaliação dos conceitos contemplados.

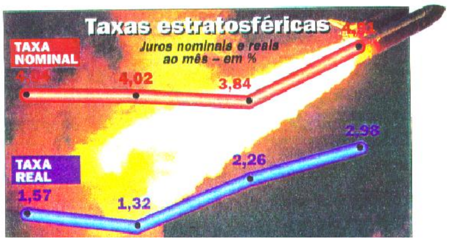
Da análise das tarefas do manual, constata-se que nenhuma delas evidencia apenas o nível *ler além dos dados*. É expressivo o número de questões que exigem do aluno a capacidade de *ler entre os dados*, mas a componente crítica é pouco explorada. Poucas vezes é pedido ao aluno que justifique as suas respostas, que interprete no contexto da tarefa os valores obtidos e que estabeleça comparações e relações entre diferentes representações gráficas.

4.2. Prática pedagógica

O ensino do tema de Estatística do 10.º ano teve direito, na escola onde decorreu este estudo, a seis aulas, todas com duração de noventa minutos, número que consideramos insuficiente para que o aluno possa dar mais sentido ao que aprende. Este número de aulas deveu-se à gestão da planificação anual da turma onde um dos autores deste texto, enquanto professora estagiária, realizou a sua prática pedagógica. Ao longo das seis aulas, os conteúdos estatísticos foram tratados através de tarefas de natureza exploratória recorrendo a informação veiculada através de representações gráficas. Dos gráficos contemplados no estudo dos conteúdos programáticos, debruçamo-nos sobre o gráfico de linhas, o histograma e o diagrama de dispersão.

Gráfico de linhas. Como este tipo de gráfico surge frequentemente nos *media* para induzir o leitor a estabelecer comparações, por vezes enganosas, procurámos desenvolver a capacidade dos alunos de interpretar e avaliar criticamente a informação contida num gráfico, aspetos que não são evidenciados pelo manual analisado. Recorremos a uma publicação de uma revista para ilustrar a atenção que se deve ter na interpretação de argumentos que podem ser usados para dissimular certos aspetos dos dados (Ainley, 2001).

O gráfico seguinte foi produzido por uma revista com o intuito de ser ilustrado o desempenho comparativo entre duas taxas de juros. Consideras que a imagem publicada pela revista traduz uma comparação explícita do desempenho de cada uma das taxas de juros? Justifica a tua resposta.



Visualmente, a inclinação dos segmentos que unem os valores de cada uma das modalidades de taxa de juro tende a influir a uma leitura errada. Alguns alunos não manifestaram dificuldades na leitura e interpretação do gráfico de linhas, revelando capacidade de *ler entre os dados*:

A18: A revista quer mostrar que a taxa nominal sobe mais do que a taxa real, quando na realidade o que acontece é o contrário.

Prof: Toda a gente concorda? Olhando para o gráfico, porque acham que o A18 obteve aquela resposta?

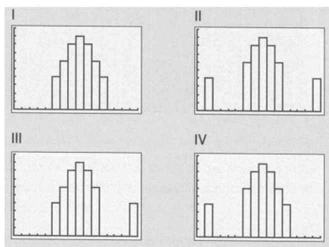
A12: Vemos no gráfico que ao fim de quatro meses a taxa real aumenta quase para o dobro da taxa nominal.

No momento de apresentação das suas respostas, a maior parte dos alunos não se envolveu na discussão gerada. Para além de práticas que muito se devem à ação do professor, o manual escolar também contribui para esta cultura de reprodução ao não incentivar o aluno a justificar e a confrontar os seus processos e resultados com os dos seus colegas.

Histograma. Este tipo de gráfico é frequentemente usado para representar as frequências dos dados agrupados em classes. Para além dessa atividade, que traduz a capacidade de *ler os dados*, procurámos desenvolver a capacidade dos alunos de *ler entre os dados* de modo a estabelecerem, em representações gráficas, relações entre as medidas de localização e de dispersão. O manual escolar, no tratamento das representações gráficas e das medidas estatísticas referidas, apresenta tarefas para que os alunos calculem os valores de cada uma das medidas, mas não lhes solicita a estabelecer relações entre essas medidas sem efetuar cálculos. Com esta tarefa, os alunos tiveram que interpretar os conceitos de média, mediana e desvio-padrão para que fosse possível compará-los.

Observa os histogramas:

1. Qual a relação entre as dimensões das distribuições?
2. Qual a relação entre a média e a mediana em cada histograma?
3. Estabelece uma relação de ordem entre os desvios-padrão das diferentes distribuições. Explica o teu raciocínio.



A maior parte dos alunos estabeleceu uma escala comum a todos os histogramas mostrando a necessidade de ter os eixos numerados para os ajudar na comparação. Alguns alunos não necessitaram de numerar os eixos dos histogramas.

A13: O desvio-padrão é tanto maior como maiores forem os desvios em relação à média. No primeiro histograma temos o menor desvio-padrão porque os valores estão mais próximos da média. O segundo e terceiro histograma têm o mesmo desvio-padrão pensando por compensação. O quarto é o que tem maior desvio-padrão porque é o que apresenta valores mais afastados da média.

Prof: Então todos sabem explicar porque é que a média não é igual à mediana no terceiro e quarto histograma?

A6: No terceiro histograma, porque tem valores mais afastados à direita, o que faz com que a mediana seja maior que a média. E no quarto, ao contrário porque é para a esquerda.

Nesta tarefa, grande parte da turma manifestou dificuldades em estabelecer uma relação de ordem entre a média e a mediana em cada um dos histogramas (nível *ler entre os dados*).

Gráfico de dispersão. No estudo de distribuições bidimensionais os alunos deparam-se com a construção deste tipo de gráfico, muitas das vezes com recurso à calculadora gráfica, como exemplifica a atividade que desenvolveram com a seguinte tarefa:

O queijo, proveniente do leite, é um alimento rico em cálcio. No entanto, é necessário não abusar, já que, de um modo geral, é um alimento muito calórico e a maior parte das vezes rico em gordura. Na tabela seguinte apresentam-se, para vários tipos de queijo, a quantidade de gordura e o número de calorias, por cada 100 gramas de queijo:

Alimento (100g)	**Gordura (x_i)**	**Calorias (y_i)**
Queijo Brie	20	263
Queijo Camembert	23	313
Queijo Ilha	26	357
Queijo de Azeitão	25	309
Queijo de Évora	34	412
Queijo de Serpa	26	330
Queijo de Tomar	27	305
Queijo Flamengo 20%	8	185
Queijo flamengo 30%	14	246
Queijo flamengo 45%	23	315
Queijo fresco	21	265
Queijo Gorgonzola	37	407
Queijo Parmesão	28	401
Queijo Roquefort	32	371
Queijo Suíço	29	357

1. Representa num referencial cartesiano o conjunto de pares ordenados (X,Y), em que X e Y representam, respetivamente, a quantidade de gordura e o número de calorias. Da análise do gráfico o que observas?

2. Na representação gráfica dos pontos de uma distribuição bidimensional podes determinar o centro de gravidade que é definido pelas médias de cada uma das variáveis. Determina as coordenadas desse ponto e representa-o no gráfico.

3. Com recurso à calculadora, determina a expressão da reta que melhor se ajusta aos pontos da distribuição dada. Representa essa reta no gráfico que elaboraste.

4. Qual o número de calorias de um queijo com 28g de gordura?

Os alunos manifestaram dificuldades em relação à escolha da escala, o que poderá relacionar-se com as grandezas que expressam cada uma das variáveis, onde a compreensão da escala e das unidades de medida são consideradas por Curcio (1989) como capacidades necessárias no nível *ler os dados*. Nesta tarefa, a compreensão da escala era fundamental para que os alunos a conseguissem resolver. A construção do diagrama de dispersão foi apresentada no quadro pelo aluno A2 (ver Figura 4).

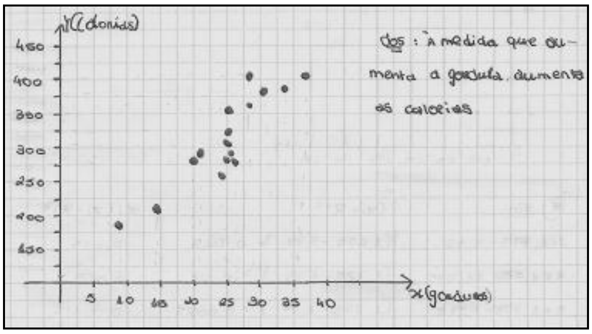


Figura 4. Resposta do aluno A2.

O aluno identificou as variáveis em estudo, subdividiu os eixos coordenados com diferentes escalas e representou corretamente os pares ordenados que representam os valores das variáveis, embora não indique a origem do sistema de eixos coordenados.

A determinação e a representação da reta de regressão foram efetuadas com recurso à calculadora gráfica. É importante que os alunos conjuguem a tecnologia com o papel e o lápis, para que não utilizem simplesmente a calculadora como um fim, mas como um meio útil e com potencialidades a utilizar na resolução da tarefa. Um aluno mostrou a forma como determinou a reta de regressão através da calculadora e um outro aluno representou no quadro o gráfico como o fez no seu caderno.

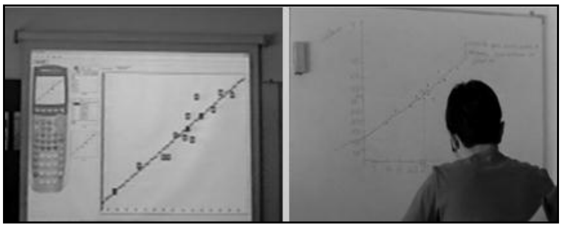


Figura 5. Determinação da reta de regressão dos dados de uma distribuição bidimensional.

Os alunos constataram que a melhor reta que se ajustava aos pontos representados não os incluía a todos, o que permitiu debater o significado do coeficiente de correlação e dos parâmetros devolvidos pela calculadora gráfica. Porém, o valor de coeficiente de correlação pode não ser suficiente para debater certas situações sobre as quais a representação gráfica ajuda a perceber melhor como se comportam os dados de uma dada distribuição, tal como ilustra a atividade que os alunos realizaram com a seguinte tarefa:

Considera os seguintes conjuntos de dados:

X	*Y2*
10	8.04
8	6.95
13	7.58
9	8.81
11	8.33
14	9.96
6	7.24
4	4.26
12	10.84
7	4.82
5	5.68

X	*Y3*
10	9.14
8	8.14
13	8.74
9	8.77
11	9.26
14	8.10
6	6.13
4	3.10
12	9.13
7	7.26
5	4.74

X	*Y4*
10	7.46
8	6.77
13	12.74
9	7.11
11	7.81
14	8.84
6	6.08
4	5.39
12	8.15
7	6.42
5	5.73

X2	*Y5*
8	6.58
8	5.76
8	7.71
8	8.84
8	8.47
8	7.04
8	5.25
19	12.50
8	5.56
8	7.91
8	6.89

1. Para cada um dos casos, determina os parâmetros da reta de regressão e calcula o coeficiente de correlação. Regista os valores com aproximação à milésima. Que têm em comum?

2. Efetua o gráfico de dispersão de cada uma das distribuições. Parece-te que a correlação descreve bem o que se passa em cada caso?

Prof: Já todos responderam à primeira questão? A que conclusões chegaram?

A21: É tudo igual.

A9: Os valores de *a, b e r* são aproximadamente iguais.

Alguns alunos pensaram estar a resolver erradamente a tarefa por obterem parâmetros da reta de regressão e do coeficiente de correlação com valores aproximadamente iguais em todas as distribuições. Ao observarem a variação dos valores da variável dependente esperavam obter valores distintos para tais parâmetros, o que denota a falta de hábito dos alunos de colocarem questões sobre os resultados obtidos, refletindo sobre a sua pertinência e veracidade (nível *ler além dos dados*).

A representação gráfica, ao revelar os dados, pode ajudar na interpretação das características dos mesmos numa dada distribuição. Arcavi (2003) considera que os gráficos podem ser mais precisos e reveladores do que os convencionais cálculos estatísticos. A visualização complementa o desenvolvimento simbólico, uma vez que uma imagem visual, por virtude da sua concretização, pode ser um fator essencial na compreensão do efeito da variação dos dados. Tal perceção foi reveladora na reação dos alunos na observação das curvas que representam cada uma das distribuições. Inicialmente traduziram os valores dos parâmetros encontrados como indicadores da mesma representação para as quatro distribuições. As suas conjeturas expressam a representatividade do que se obtém da aplicação de fórmulas nos seus raciocínios, como se constata na discussão dos gráficos de tais distribuições:

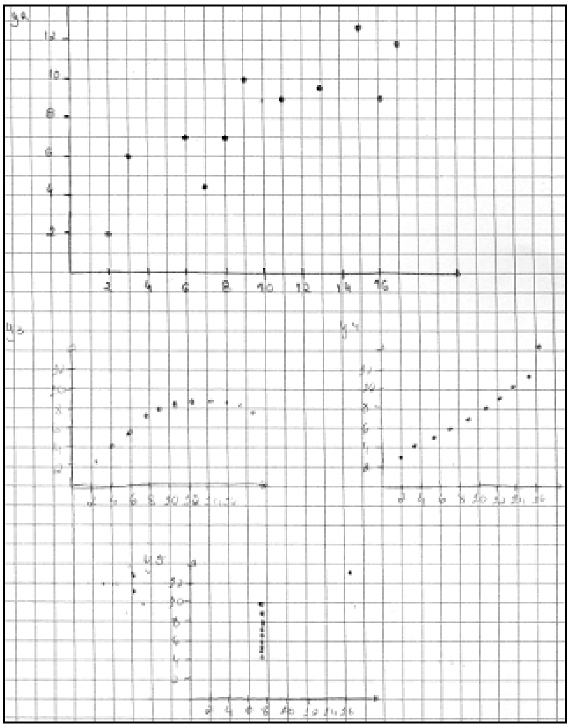


Figura 6. Resposta do aluno A6.

Prof: Pelos resultados esperavam que os diagramas de dispersão fossem assim?

Alunos: Não!

Prof: Porquê? Olhando para o diagrama de dispersão que tipo de correlação há no caso 4?

A7: Nula.

Prof: E nesse caso qual era o coeficiente de correlação?

A7: 0.817.

Prof: Esperavam que acontecesse o quê?

A10: Que fossem todas iguais.

Prof: Neste caso, como disseram nem sequer existia correlação. Considerando agora o caso 3, será mais próximo do que esperavam ou não?

A6: Sim!

Prof: Porque é que o coeficiente de correlação não é 1?

Alunos: Por causa do último valor!

Prof: Pode, por exemplo, ser um erro cometido no registo dos dados. É necessário registar todos os valores com precisão. Qual o tipo de correlação entre estas duas variáveis?

A6: Positiva forte.
Prof: Correto. E agora para este diagrama de dispersão?
A6: Esse parece uma curva.
A22: Esses pontos não se dispõem segundo uma reta mas segundo uma parábola.
Prof: Não é uma correlação linear mas uma correlação quadrática. Esta tarefa era para que percebessem que é importante recorrermos ao diagrama de dispersão para percebermos o tipo de relação entre as variáveis.
A22: Só pelo valor do *r* dizíamos que tínhamos o mesmo tipo de correlação em todos os casos.

Os alunos estabeleceram comparações entre o valor que obtiveram para o coeficiente de correlação e o respetivo diagrama de dispersão, apercebendo-se assim de que o valor obtido para o coeficiente de correlação nem sempre permite concluir de forma correta o tipo de correlação existente.

4.3. Perspetivas dos alunos

Os alunos, enquanto intervenientes no processo de ensino e aprendizagem, puderam, tal como defende Branco (2000), expressar a sua opinião acerca da estratégia adotada no ensino de Estatística (Quadro 1).

Quadro 1 – Percentagem das respostas dos alunos sobre a estratégia delineada no ensino de Estatística (n=23)

	DT/D	I	C/CT	$\bar{x}$
A calculadora gráfica na aprendizagem de Estatística				
A calculadora gráfica permitiu-me visualizar diferentes representações gráficas de uma forma rápida.	–	9%	81%	4.37
Recorri à calculadora gráfica para comparar resultados obtidos.	4%	4%	92%	4.30
A calculadora gráfica favoreceu a minha aprendizagem de conceitos estatísticos.	–	–	100%	4.5
As representações gráficas no ensino e na aprendizagem de conceitos estatísticos				
Gostei de aprender conceitos estatísticos através das representações gráficas.	–	–	100%	4.5
As tarefas propostas na aula a partir de gráficos suscitaram o meu interesse pela Estatística.	–	17%	83%	4.24
As representações gráficas ajudaram-me a representar e comparar dados.	–	4%	96%	4.43
Capacidades/Conhecimentos desenvolvidos na aprendizagem de Estatística				
Sou capaz de construir qualquer representação gráfica estudada.	4%	4%	92%	4.30
Aprendi a interpretar corretamente a informação contida num gráfico.	–	13%	87%	4.30
Desenvolvi capacidades que me permitem avaliar a veracidade da informação veiculada num gráfico.	–	13%	87%	4.30

Relativamente à utilização da calculadora gráfica nas atividades de aprendizagem de Estatística, a maioria dos alunos concorda que as potencialidades da calculadora lhes permitiu visualizar as diferentes representações gráficas dos conceitos estatísticos (81%) e comparar os resultados obtidos (92%). Todos os alunos consideram que a utilização deste recurso nas atividades desenvolvidas favoreceu a aprendizagem dos conceitos estatísticos estudados.

Quanto ao papel atribuído às representações gráficas na aprendizagem de conceitos estatísticos, a maioria dos alunos concorda que os gráficos utilizados nas tarefas propostas suscitaram o seu interesse em aprender Estatística (83%) e que as representações gráficas os ajudaram a representar e a comparar dados (96%).

No que respeita às capacidades/conhecimentos desenvolvidos na aprendizagem de Estatística, a maior parte dos alunos sente-se capaz de construir qualquer representação gráfica (92%), exprime que aprendeu a interpretar a informação presente num gráfico (87%) e que desenvolveu capacidades que lhes permite avaliar a veracidade da informação veiculada num gráfico (87%). Estes resultados expressam praticamente o mesmo grau de concordância dos alunos de diferentes níveis de desempenho[2]:

Quadro 2 – Média das opções dos alunos sobre capacidades/conhecimentos desenvolvidos na aprendizagem de Estatística em função do seu nível de desempenho (n=23)

	Desempenho					
	Baixo		Médio		Alto	
Capacidades/Conhecimentos desenvolvidos na aprendizagem de Estatística	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s
Sou capaz de construir qualquer representação gráfica estudada.	3.86	0.35	3.91	0.67	4.2	0.4
Aprendi a interpretar corretamente a informação contida num gráfico.	4.14	0.64	3.91	0.51	4.4	0.49
Desenvolvi capacidades que me permitem avaliar a veracidade da informação veiculada num gráfico.	4.29	0.45	3.82	0.39	4.2	0.4

Os alunos com diferentes níveis de desempenho valorizam a estratégia utilizada e consideram que desenvolveram capacidades para interpretar e avaliar a informação veiculada num gráfico. Quanto à capacidade de construir qualquer representação gráfica estudada, em média, as dificuldades dos alunos diminuem à medida que aumenta o seu grau de desempenho

Das representações gráficas trabalhadas, os diagramas de extremos e quartis foram os que suscitaram mais dificuldades aos alunos (Tabela 7).

Tabela 7 – Percentagem de respostas sobre as representações gráficas que suscitaram mais dificuldades aos alunos (n=23)

Diagrama de extremos e quartis	30%
Diagrama de dispersão	22%
Gráfico circular	9%
Histograma	9%
Nenhuma das representações gráficas estudadas	26%
Não responde	4%

Alguns alunos também referem que tiveram dificuldades na construção de diagramas de dispersão (22%) devido à marcação dos pares ordenados num referencial. As dificuldades sentidas pelos alunos com baixo desempenho neste tipo de gráfico deveram-se, como exemplificam as seguintes afirmações, porque "têm duas variáveis, são mais complexos" (A14) e porque "os pontos a marcar no referencial eram muito próximos, era mais difícil construir corretamente o gráfico" (A8). As tarefas ao tratarem assuntos do quotidiano apresentavam valores, por vezes, bastante próximos, até às centésimas. Já a dificuldade expressa por alguns alunos sobre a construção do gráfico circular (9%) deveu-se à utilização de valores na forma de percentagem e à utilização do transferidor. Em relação ao histograma, alguns alunos (9%) manifestaram dificuldades na determinação da amplitude das classes.

[2] Consideramos os seguintes níveis de desempenho: baixo: 8 a 13 valores; médio: 14 a 17 valores; e alto: 18 a 20 valores. Estes níveis traduzem as classificações dos alunos no final do ano.

Conclusões

A articulação entre as diferentes representações ajuda a promover o desenvolvimento da compreensão dos atributos e dos significados de conceitos estatísticos. Dessas representações, os manuais escolares propõem ao aluno a realização de atividades de ler, construir e interpretar gráficos (Wu & Wong, 2009). A forma como as representações gráficas são tratadas tem implicações no desenvolvimento da capacidade estatística do aluno (Cúrcio, 1989). No manual escolar dos alunos da turma deste estudo a representação gráfica mais contemplada, implícita e explicitamente, é o histograma, que tem por finalidade desenvolver o conhecimento do aluno das características deste tipo de gráfico estatístico, interpretá-lo e construí-lo. Na realização destas atividades emerge a articulação, recíproca, entre a organização dos dados de uma dada distribuição em tabelas e a elaboração pelo aluno do respetivo gráfico, o que para Curcio (1989) favorece o desenvolvimento no aluno da capacidade estatística de *ler os dados* e de *ler entre os dados*. Já o desenvolvimento da capacidade crítica ou de efetuar previsões a partir da informação contida no gráfico, descrita por Curcio (1989) por *ler além dos dados*, tem uma expressão pouco significativa. O manual não contribui assim para a promoção no aluno da capacidade crítica e de generalização da informação contida numa representação gráfica. Estas dificuldades são expressas pelos alunos do estudo de Morais (2010), que se acentuam quanto maior for o nível de compreensão estatística contemplada nos gráficos.

Partindo do pressuposto de que compete ao professor adaptar tarefas que complementem as que são propostas no manual escolar, integrámos nas estratégias de ensino dos tópicos estatísticos do 10.º ano tarefas que contemplassem gráficos que envolvessem o aluno a: (i) estabelecer comparações, por observação e interpretação da informação veiculada nas representações gráficas, entre as medidas de tendência central e de dispersão (*ler entre os dados*); (ii) interpretar a informação veiculada em diferentes representações gráficas, essencialmente em histogramas, gráficos de barras, gráficos de linhas e diagramas de dispersão (*ler os dados e ler entre os dados*); (iii) analisar criticamente o valor do coeficiente de correlação obtido em comparação com o diagrama de dispersão associado (*ler além dos dados*); e (iv) avaliar criticamente a informação veiculada numa representação gráfica e concluir sobre a sua veracidade (*ler além dos dados*). O desenvolvimento da capacidade estatística através das representações gráficas resulta da atenção que o professor dá à atividade do aluno, sobretudo à justificação e à explicação do seu ponto de vista sobre a veracidade da informação veiculada nessas representações.

A concretização das estratégias de ensino dos tópicos estatísticos através de representações gráficas foi apreciada positivamente pela maioria dos alunos, que consideraram ter compreendido a utilidade e a aplicabilidade dessas representações a situações do quotidiano. Tais resultados dever-se-ão à resolução de tarefas do quotidiano, algumas delas retiradas dos meios de comunicação social. Constatamos que, como defende Ponte (2005), o contexto das tarefas é um fator relevante na interpretação da informação contida nas representações gráficas. Para Friel, Curcio e Bright (2001), a discussão sobre situações reais tende a provocar níveis mais elevados de compreensão dos conceitos estatísticos. Para a maioria dos alunos, as representações gráficas contribuíram para o desenvolvimento da sua capacidade estatística, através da interpretação, representação e avaliação crítica da informação contida nas representações gráficas estudadas.

Referências

Ainley, J. (2001). Transparency in graphs and graphing tasks: An iterative design process. *Journal of Mathematical Behavior*, 19, 365–384.

APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e a aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representatios in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215–224.

Branco, J. (2000). Estatística no secundário: O ensino e seus problemas. *Jornal de Matemática Elementar*, 190, 10-18.

Branco, J., & Martins, M. E. G. (2002). Literacia Estatística. *Educação matemática*, 69, 9-13.

Carvalho, C. (2009). Reflexões em torno do ensino e da aprendizagem da estatística: O exemplo dos gráficos. In J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H. Martinho, & P. F. Correia (Orgs.), *Atas do II encontro de probabilidades e estatística na escola*. Braga: Centro de Investigação em Educação.

Carvalho, C., & César, M. (2001). Interações entre Pares e Estatística: Contributos para o estudo do conhecimento instrumental e relacional. *Quadrante*, 10(1), 3-27.

César, M., & Sousa, R. S. (2000). Estatística e interações sociais: Jura que não vai ser (só) uma aventura! In C. Loureiro, O. Oliveira, & Brunheira (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da estatística* (pp. 195-211). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística e Associação dos Professores de Matemática.

Curcio, F. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1(5), 382-393.

Curcio, F. (1989). *Developing graph comprehension: Elementary and middle school activities*. Reston: NCTM.

Friel, S., Curcio, F., & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1–25.

Martins, M. E. G., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e Tratamentos de Dados*. Lisboa: ME-DGIDC.

Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática para o Ensino Secundário*. Lisboa: ME-DGEBS.

Ministério da Educação (1997). *Matemática-Programas do 10.º, 11.º e 12.º anos*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2002). *Programa de Matemática A-10.º ano*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

Monteiro, C., & Ainley, J. (2003). *Developing Critical Sense in Graphing*. Acedido em 4 de julho, 2012, de http://fibonacci.dm.unipi.it/~didattica/CERME3.

Morais, P. C. (2010). *Construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: IIE e APM.

Pires, M. V., & Martins, C. (2009). Estatística: desenvolvimento curricular e tecnologias: algumas questões para discussão. In C. Costa, E. Mamede, & F. Guimarães (Orgs.), *Números e estatística: refletindo no presente, perspetivando o futuro: Atas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Vila Real: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação e Matemática.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Fonseca, H. (2000). A Estatística no currículo do ensino básico e secundário. In C. Loureiro, O. Oliveira & Brunheira (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da estatística* (pp. 179-211). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística e Associação dos Professores de Matemática.

Ponte, J. P., & Fonseca, H. (2001). Orientações curriculares para o ensino da Estatística: análise comparativa de três países. *Quadrante*, 10 (1), 93-115.

Wu, Y., & Wong, K. Y. (2009). Understanding of statistical graphs among Singapore secondary students. In K. Y. Wong et al. (Eds.), *Mathematics education: The Singapore Journey*. Hackensack, NJ: World Scientific. Series on Mathematics Education, 2, 227-243.

FERNANDES, J. A., VISEU, F., MARTINHO, M. H. & CORREIA, P. F. (ORGS.) (2013). *ATAS DO III ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA*. BRAGA: CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DO MINHO.

ESTRATÉGIAS USADAS POR ALUNOS DO 7º ANO NA RESOLUÇÃO DE TAREFAS ESTATÍSTICAS

Andreia Filipa Teixeira Salgado Ribeiro
andreia.filipa.mat@gmail.com
Paulo Ferreira Correia
Escola Secundária/3 de Barcelos
ferreiracorreiapaulo@gmail.com
José António Fernandes
Universidade do Minho
jfernandes@ie.uminho.pt

Resumo

O presente artigo é baseado num estudo desenvolvido ao longo do estágio curricular e centra-se no estudo das estratégias de resolução usadas por alunos do 7º ano de escolaridade em tarefas estatísticas envolvendo os conceitos de média, moda e mediana. Este estudo foi desenvolvido numa turma do 7º ano de escolaridade, com 19 alunos, e recorreu-se ao trabalho de grupo, a tarefas abertas e a discussões coletivas como metodologias de ensino-aprendizagem. Os dados usados no estudo foram obtidos a partir de diversos métodos: inicialmente, os alunos resolveram uma ficha de avaliação diagnóstica apenas sobre conteúdos estatísticos; de seguida, recolheram-se todas as produções escritas dos alunos durante toda a intervenção, gravando em vídeo ainda todas as aulas; e, por fim, os alunos resolveram uma ficha de avaliação sobre as medidas de tendência central. Em termos de resultados, identificaram-se neste estudo, cinco tipos de estratégias de resolução: estratégia de tentativa-e-erro; estratégia de compensação; estratégia de representação gráfica; estratégia aritmética e, por fim, estratégia algébrica.

Palavras-chave: Tarefas estatísticas; Estratégias de resolução; Alunos do 7º ano.

Introdução

O facto do tema deste estudo recair sobre a Estatística surgiu da importância crescente atribuída a este tema na vida quotidiana dos cidadãos, que por sua vez se tem repercutido nos currículos nacionais de Matemática. Atualmente, basta abrir um jornal, uma revista ou ligar a televisão para sermos "bombardeados" com informação estatística do país e do mundo, o que releva a necessidade de formar cidadãos capazes de interpretar tal informação.

A Estatística é cada vez mais "uma ciência privilegiada no sentido em que é uma das áreas mais presentes na vida comum das pessoas" (Santos & Pedro, 2000, p. 177) e, por isso, é "essencial" que os cidadãos possuam conhecimentos de estatística para que compreendam a informação disponível (Carvalho, 2006). De acordo com Martins e Cerveira (1999), "é necessário estarmos aptos a saber ler e interpretar, assim como a utilizar convenientemente essa forma de transmitir a informação" (p. 9). Carvalho e César (2001) vão mais longe, afirmando que "ter conhecimentos de Estatística tornou-se uma inevitabilidade para exercer uma cidadania crítica, reflexiva e participativa, uma vez que, coletiva e individualmente, todos somos chamados a tomar decisões com base em análises críticas de dados" (pp. 65-66).

Uma ideia que evidencia, à luz da literatura, a relevância do estudo se inserir no tema Estatística resulta do facto de "para que os alunos sejam cidadãos inteligentes que possam tomar decisões de forma crítica e informada, são necessários conhecimentos de Estatística" (NCTM, 1991, p. 125). Por outro lado, compreender o tipo de estratégias que os alunos usam na resolução de tarefas estatísticas e identificar as suas dificuldades, consoante se realiza no presente estudo, é da maior utilidade para a promoção de uma melhor aprendizagem dos alunos, bem como para o desenvolvimento profissional do professor.

1. O ensino da Estatística

Tal como já foi referido anteriormente, o tema deste estudo diz respeito às estratégias adotadas por alunos do 7° ano de escolaridade na resolução de tarefas estatísticas.

Na opinião de Branco (2006), "o ensino da estatística tem vindo a requerer mudanças" (p. 19) e os defensores da mudança sugerem uma "atitude que privilegia a compreensão dos conceitos fundamentais, que forma a base da estatística, e que dá relevo ao desenvolvimento do raciocínio estatístico" (Branco, 2006, p. 21). No entanto, os conteúdos de Estatística, nem sempre são apresentados aos alunos, ou "por falta de tempo ou por falta de convicção do seu real interesse" (Branco, 2000, p. 16), e por vezes são lecionados de uma forma insistente na rotina, na mecanização e na memorização (Lima, 1998). Na opinião de Carvalho (2006), "o facto de a Estatística ser ensinada na maioria dos países como um tópico na disciplina de Matemática faz com que seja frequentemente lecionada enfatizando-se a computação, as fórmulas e os procedimentos" (p. 5).

As tarefas assumem um papel importante na sala de aula uma vez que podem, quando bem construídas, suscitar a atividade do aluno (Ponte, 2005). Segundo Ponte (2005), "um único tipo de tarefa dificilmente atingirá todos os objetivos curriculares valorizados pelo professor" (p. 1). Além da seleção de tarefas diversificadas, o professor deve ter também em conta o tempo de realização e os materiais a usar, não esquecendo que as tarefas devem estimular "o sentido crítico dos alunos" (Fernandes, Carvalho & Ribeiro, 2007, p. 31). Acredita-se que "quando os alunos têm a oportunidade de se confrontar com tarefas e situações estatísticas não rotineiras revelam uma grande riqueza de estratégias de resolução o que mostra como constroem o significado estatístico" (Carvalho, 2006). Além disto, uma vez que o ensino da Estatística deve contribuir para que, no futuro, os alunos sejam cidadãos críticos e participativos na sociedade, "é fundamental que o professor use exemplos reais e interessantes e estimule o sentido crítico dos alunos, permitindo-lhes experimentar e criticar um variado tipo de situações na sala de aula para ficarem melhor preparados para as diversas situações da sua vida" (Ribeiro, 2005, p. 47).

Contudo, não é suficiente "selecionar boas tarefas – é preciso ter atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula" (Ponte, 2005, p. 12). Por tudo isto, pode-se então concluir que "o professor tem assim um papel fundamental tanto na planificação das atividades como na sua condução ao envolver os alunos no trabalho que se está a realizar e em manter, ao longo do mesmo, o seu interesse pelas questões esclarecedoras e estimulantes que realiza" (Carvalho, 2006, p. 14).

Para o desenvolvimento deste estudo interessaram as "tarefas que enfatizam o raciocínio e o pensamento estatístico, a interpretação e a capacidade crítica e de reflexão" (Fernandes, 2009, p. 4) pois este tipo de tarefas proporcionam aos alunos condições ótimas para desenvolver diferentes estratégias de resolução que é o assunto principal deste estudo.

Vários estudos têm sido feitos para melhorar o ensino da Estatística. Os autores que se têm dedicado ao estudo do ensino e da aprendizagem da Estatística sugerem que "os trabalhos em pequenos grupos revelam ser a forma ideal para fazer Estatística nas aulas de Matemática" (Carvalho, 2006, p. 12).

O tipo de tarefas referido anteriormente incentiva e valoriza o trabalho em grupo, uma vez que este método de trabalho permite expor os alunos aos pontos de vista de outros membros do grupo e promove a reflexão e a discussão como parte essencial do processo de se tornarem práticos competentes e reflexivos (Petocz & Reid, 2007). O trabalho em grupo permite também que os alunos desenvolvam a autonomia e a capacidade de comunicação visto que estes necessitam de convencer os colegas de grupo da sua estratégia.

Num estudo elaborado por Carvalho (2001) observou-se que o trabalho colaborativo nas díades "facilitou a apropriação de conhecimentos e a mobilização de competências estatísticas, nomeadamente porque há estratégias que são descobertas através de uma co-elaboração e que os alunos se revelam capazes de [as] continuar a utilizar quando voltam a trabalhar individualmente" (p. 472). Também Roa, Correia e Fernandes (2009) referem que foi notório o reconhecimento dos alunos sobre o contributo do trabalho em pequenos grupos para sua aprendizagem, designadamente para que surgissem ideias diferentes, para promover a sua participação na realização das tarefas e para superar dúvidas e dificuldades por eles sentidas.

As interações mantidas entre os alunos ou entre o professor e os alunos, seja ao nível do trabalho nos pequenos grupos ou ao nível do grupo-turma, constitui outra importante orientação para o ensino e a aprendizagem da Estatística. Smith, Hughes, Engle e Stein (2009) sugerem cinco práticas que permitem orientar de modo mais eficaz a condução das discussões desenvolvidas na sala de aula: (1) antecipar as resoluções dos alunos em tarefas matemáticas desafiadoras; (2) monitorizar o trabalho dos alunos e o seu envolvimento nas tarefas; (3) selecionar determinados alunos para apresentarem o seu trabalho; (4) sequenciar as resoluções dos alunos que serão apresentadas; (5) estabelecer conexões entre resoluções e ideias matemáticas.

Atualmente, o uso das tecnologias de informação e comunicação, através de software específico de Estatístico ou recorrendo à internet, no ensino e na aprendizagem da Estatística é amplamente preconizado por educadores e investigadores, mais frequentemente no tema de Estatística do que em qualquer outro tema de Matemática. Segundo Branco e Martins (2002) o uso das tecnologias "é, hoje em dia, um aspeto fundamental da prática da Estatística" (p. 13) e Jolliffe (2007) advoga que as maiores alterações do ensino da Estatística são consequência da revolução tecnológica.

Relativamente à Estatística, ultimamente têm surgido alguns estudos no sentido de identificar dificuldades e estratégias de resolução dos alunos. No que diz respeito às estratégias de resolução destaca-se o estudo de Carvalho (2001). Este estudo envolveu um total de 533 alunos do 7º ano de escolaridade que se dividiram para estabelecer um grupo de controlo e um grupo experimental. Este segundo grupo realizou, em pares, tarefas não-habituais de Estatística, isto é, tarefas estatísticas em que "os alunos não encontram orientações claras acerca de como as realizar uma vez que a própria formulação da pergunta está concebida de forma a deixar diversas possibilidades de resolução em aberto" (Carvalho, 2001, p. 244).

Um dos objetivos deste estudo foi pesquisar quais as estratégias mais frequentes utilizadas pelos alunos quando realizam tarefas não-habituais de Estatística, tendo sido possível identificar cinco estratégias de resolução: a estratégia por tentativa e erro, a estratégia de representação gráfica com e sem suporte estatístico, a estratégia de produção escrita com e sem suporte estatístico, a estratégia aritmética e, por fim, a estratégia algébrica.

A estratégia de resolução por tentativa e erro "consiste em experimentar diversas soluções e verificar qual delas corresponde ao valor pretendido" (Carvalho, 2001, p. 244). De acordo com César (1994), "o grau de sucesso atingido pelas díades com este tipo de estratégia é variável, uma vez que está relacionado com a capacidade de intuição Matemática e de persistência dos sujeitos" (Carvalho, 2001, p. 246).

Quando na sua resolução a díade recorre a alguma forma visual diz-se que utiliza uma estratégia de resolução de representação gráfica. Segundo a autora, "foi possível encontrar dois tipos de estratégia de resolução gráfica: uma, com suporte estatístico, quando os alunos recorriam a este tipo de conhecimentos para a sua resolução; outra, sem suporte estatístico, quando os alunos não o utilizavam para resolver a tarefa" (p. 248).

A autora designa de estratégia de produção escrita quando os alunos "recorriam a textos, a questionários por eles concebidos ou a um plano de como executavam o trabalho estatístico como forma de resolverem o problema” (p. 256). À semelhança da estratégia anterior também esta pode ser divida em dois tipos: com suporte estatístico, quando os alunos incluem na sua resolução argumentos estatísticos; e sem suporte estatístico, quando apenas recorrem a argumentos de tipo social, cultural ou político.

A estratégia aritmética significa que o aluno “recorreu apenas às quatro operações básicas matemáticas para resolver o problema” (César, 1994, p. 255). No estudo de Carvalho (2001) esta foi a estratégia mais utilizada pelos alunos.

Por fim, a estratégia de resolução algébrica subentende que os alunos são capazes de pôr o problema em equação e resolvê-lo (César, 1994). No estudo realizado por Carvalho (2001) esta estratégia surge com pouca frequência, o que leva a autora a concordar com Gattuso e Mary (1995) quando estas autoras salientam que “nos anos de escolaridade elementar são poucas as crianças que escolhem e aplicam com sucesso este tipo de estratégia mais abstrata” (citado em Carvalho, 2001, p. 267).

2. Metodologia

Neste texto aborda-se parte de um estudo mais amplo, inserido no Mestrado em Ensino da Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário, na Universidade do Minho, tendo por objetivos: 1. Caracterizar as estratégias de resolução usadas pelos alunos nas tarefas estatísticas; 2. Reconhecer as potencialidades e limitações das estratégias de resolução usadas pelos alunos; 3. Envolver os alunos em discussões no grupo-turma de modo a avaliarem as suas estratégias.

A intervenção de ensino desenvolveu-se numa turma do 7º ano de escolaridade, com 19 anos, de uma escola do concelho de Barcelos. Os alunos, com 12 anos de média de idades, eram maioritariamente do sexo feminino e pelas observações realizadas verificou-se que, em geral, não tinham muitos hábitos de trabalho e apresentavam dificuldades a nível do raciocínio matemático e da comunicação matemática.

Na implementação da intervenção de ensino, os alunos exploraram tarefas tendencialmente abertas, trabalharam em grupo e tiveram acesso a um ou dois computadores por grupo de modo a poderem recorrer à folha de cálculo sempre que achassem pertinente. Com estas metodologias, que constituem orientações atuais para o ensino da Estatística, pretendeu-se colmatar tanto o desinteresse de alguns alunos face à Matemática como algumas dificuldades dos alunos envolvidos.

No caso do trabalho em grupo, os alunos organizaram-se em seis grupos com quatro ou três alunos e foi nos grupos que primeiramente os alunos exploraram as tarefas de forma mais autónoma. Uma vez terminada a exploração das tarefas nos grupos, desenvolviam-se discussões coletivas, no grupo-turma, em que os alunos eram convidados a partilhar e a explicar aos colegas a forma como pensaram. Com estas discussões pretendeu-se que os alunos conhecessem, discutissem e validassem as estratégias dos colegas, de modo a fomentar a participação de outros alunos na discussão.

A recolha de dados foi realizada através de uma ficha de avaliação diagnóstica, aplicada antes da intervenção de ensino, das gravações audiovisuais das aulas, das produções escritas dos alunos e de uma ficha de avaliação final. Todos estes métodos tiveram como objetivo obter informações variadas e essenciais para o presente estudo e permitiram, sobretudo as produções escritas, analisar as estratégias adotadas pelos alunos na exploração das tarefas propostas.

Assim o estudo desenvolveu-se ao longo de três momentos: pré-intervenção; intervenção propriamente dita e pós-intervenção. No primeiro momento, pré-intervenção, os alunos resolveram uma ficha de avaliação diagnóstica de Estatística para aferir os seus conhecimentos e adequar estratégias de ensino para esta unidade. Na intervenção propriamente dita os alunos resolveram, em grupo, tarefas pouco usuais no ensino da estatística. Por fim, na pós-intervenção os alunos resolveram uma ficha de avaliação sobre as medidas de tendência central. No presente texto aborda-se, fundamentalmente, o momento de pós-intervenção.

3. Estratégias e dificuldades dos alunos

Nesta secção analisam-se as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das questões da ficha de avaliação, referindo-se também os objetivos de cada questão, assim como as dificuldades sentidas pelos alunos nas várias questões, as quais versavam, fundamentalmente, as medidas de tendência central.

Questão 1

As classificações obtidas, pelas raparigas da tua turma, no último teste de Matemática do 1º período encontram-se registadas no quadro seguinte.

Classificações das raparigas da turma					
20	64	76	83	58	40
56	31	42	12	78	97

1.1. Determina a média, a moda e a mediana das classificações das raparigas da tua turma.

1.2. Uma das alunas da turma obteve, neste teste, a classificação de 58%. Qual foi a sua classificação no teste anterior sabendo que a média dos dois testes foi 72%? Explica o teu raciocínio.

A alínea 1.1 da ficha de avaliação tem por objetivo calcular a média, a moda e a mediana de um conjunto de dados relativo às classificações das raparigas da turma, enquanto na alínea 1.2 se pretende testar a capacidade de determinar um dado desconhecido com base no conhecimento de outro dado e da média dos dois dados. Note-se que os dados usados nesta tarefa dizem respeito às raparigas da própria turma onde se desenvolveu o estudo. Na Tabela 1 podem ver-se as estratégias usadas pelos alunos na determinação das três medidas de tendência central inquiridas na alínea 1.1.

Tabela 1 – Descrição das estratégias apresentadas pelos alunos na alínea 1.1

Estratégia	% de alunos
Média	
E1 – Aplica o algoritmo da média.*	68,4
E2 – Soma todos os valores presentes no enunciado.	10,5
E3 – Soma todos os valores presentes no enunciado e divide o resultado por 10.	5,3
E4 – Apresenta um valor errado para a média sem efetuar cálculos.	10,5
Não responde.	5,3
Moda	
E5 – Identifica corretamente a moda.*	73,7
E6 – Apresenta um valor errado para a moda.	10,5
Não responde.	15,8
Mediana	
E7 – Organiza os dados num diagrama de caule-e-folhas e determina corretamente a mediana.*	15,8
E8 – Ordena os valores e determina corretamente a mediana.*	21,1
E9 – Ordena os valores mas não determina corretamente a mediana.	10,5
E10 – Organiza os dados num diagrama de caule-e-folhas mas não determina corretamente a mediana.	31,6
Não responde.	21,1

Nota: a estratégia assinalada com o asterisco (*) conduziu a respostas corretas.

Como se pode ver pela Tabela 1, a mediana foi a medida de tendência central com maior percentagem de respostas incorretas (42,1%), seguida da média com 26,3% e da moda com 10,5%. Relativamente às estratégias, pode ver-se que para a determinação da mediana se destaca com 47,4% a estratégia em que os alunos recorreram a elaboração de um diagrama de caule-e-folhas. Contudo, apenas 15,8% destes determinam corretamente a mediana. Dos restantes 31,6%, 10,5% cometem o erro de usar apenas as folhas do diagrama para determinar a mediana, como se pode ver na resolução do aluno A13, apresentada na Figura 1.

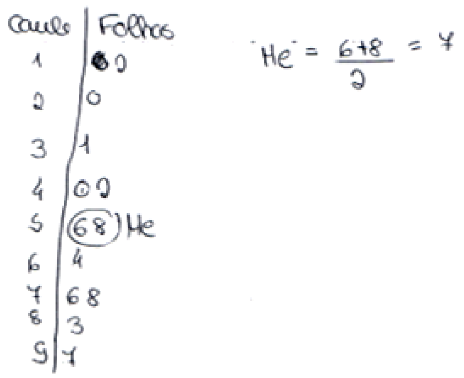


Figura 1. Resposta dada pelo aluno A13 na alínea 1.1.

A segunda estratégia mais usada para determinar a mediana foi a de ordenar os valores para determinar esta medida, com 31,6% de alunos. Destes, apenas 10,5% determinaram erradamente a mediana por, apesar de o número de dados ser par, determinarem a mediana como se esse número fosse ímpar.

Dos 73,7% alunos que responderam corretamente à moda, 15,8% apresentaram ainda uma justificação para a não existência de moda, como por exemplo: “não há moda porque nenhum número se repete mais do que uma vez” e “não há moda pois todas as classificações são diferentes”. Relativamente às estratégias para a determinação da média, pode ver-se que a maioria dos alunos usou o algoritmo da média. A estratégia E3 parece resultar de alguma distração por parte do aluno que a utilizou pois não se percebe o valor 10 como denominador do algoritmo da média. Salienta-se, por fim, que a percentagem de alunos que não responde a cada uma das medidas vai aumentando, sendo a média a medida com mais alunos a responder e a mediana com menos alunos a responder.

Relativamente à alínea 1.2, as estratégias adotadas pelos alunos encontram-se na Tabela 2.

Tabela 2 – Descrição das estratégias apresentadas pelos alunos na alínea 1.2

Estratégia	% de alunos
E11 – Coloca o problema em equação.*	31,6
E12 – Resolve o problema por tentativa-e-erro.*	26,3
E13 – Efetua cálculos (somas ou subtrações) com valores presentes no enunciado.	21,1
E14 – Apresenta um valor errado sem efetuar cálculos.	10,5
Não responde.	10,5

Nota: a estratégia assinalada com o asterisco (*) conduziu a respostas corretas.

Pela análise da Tabela 2, pode constatar-se que 57,9% dos alunos respondeu corretamente a esta questão. De salientar que a estratégia E11 foi a mais usada pelos alunos e é, sem dúvida, mais difícil e abstrata que a segunda estratégia mais usada. Na Figura 2 pode ver-se a resposta do aluno A13 que adotou a estratégia E11.

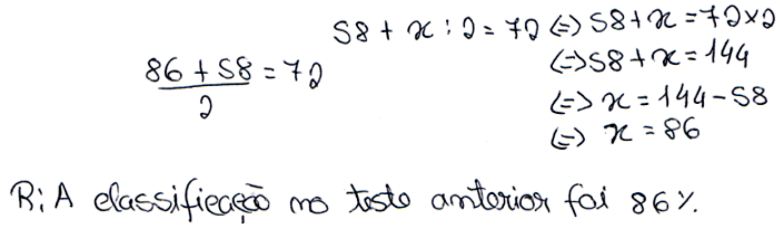


Figura 2. Resposta dada pelo aluno A13 na alínea 1.2.

A estratégia E12 foi a segunda estratégia mais usada pelos alunos, com 26,3%. Contudo, 10,5% dos alunos que usaram esta estratégia não apresentaram as tentativas que os levaram à resposta correta. Esta omissão pode explicar-se pelo facto de alguns alunos terem o hábito de resolver as fichas de avaliação a lápis e no final passar a caneta, não o tendo feito por esquecimento ou falta de tempo. Nos restantes 15,8% é evidente a utilização de uma estratégia por tentativa e erro. Na Figura 3 pode observar-se um exemplo do uso desta estratégia, em que o aluno A2 foi testando valores até encontrar um valor que satisfizesse o enunciado do problema.

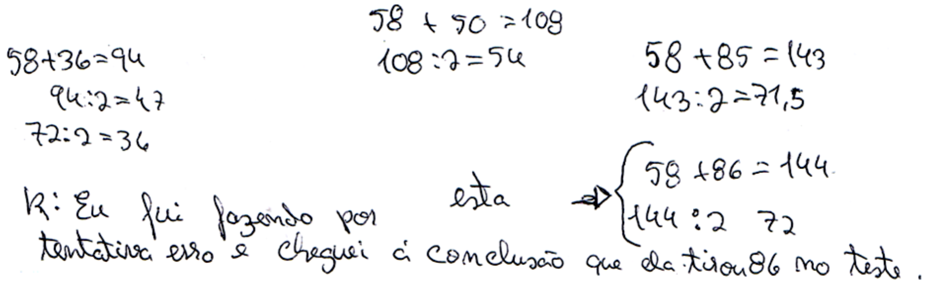


Figura 3. Resposta dada pelo aluno A2 na alínea 1.2.

Relativamente à estratégia E13, ela foi adotado por 21,1% dos alunos. Observando a resolução do aluno A5, apresentada na Figura 4, parece que os alunos não entenderam o problema e, na expectativa de angariar alguns pontos na ficha de avaliação, escreveram qualquer coisa.

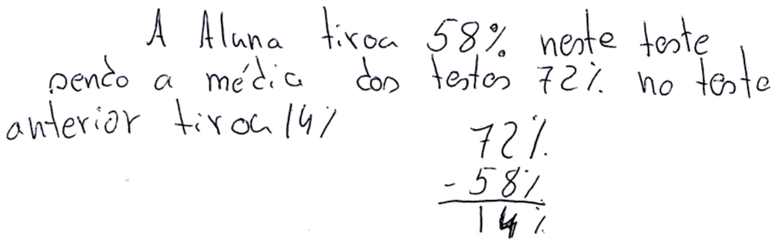


Figura 4. Resposta dada pelo aluno A5 na alínea 1.2.

Questão 2

Num certo dia, no hospital de uma determinada localidade, foram observadas crianças com idade inferior a 3 anos. O registo das idades, em meses, foi organizado no seguinte diagrama de caule-e-folhas:

0	3 6 6 7
1	0 1 1 2 4 6 8
2	2 7 7
3	0 2 4

Determina a mediana das idades das crianças.

Com esta questão pretendia-se que os alunos interpretassem o diagrama de caule-e-folhas e, de seguida, determinassem a mediana das idades das crianças. Na Tabela 3 apresentam-se as estratégias usadas pelos alunos na resolução desta questão.

Tabela 3 – Descrição das estratégias apresentadas pelos alunos na questão 2

Estratégia	% de alunos
E15 – Apresenta um valor correto para a mediana.*	36,8
E16 – Apresenta um valor incorreto para a mediana.	47,4
Não responde	15,8

Nota: a estratégia assinalada com o asterisco (*) conduziu a respostas corretas.

Como se pode constatar na Tabela 3, a percentagem de alunos que respondeu corretamente foi de 36,8%. Relativamente à estratégia que conduziu à resposta correta, E15, os alunos dividiram o número total de elementos por dois e constataram que a mediana se encontra na posição nove do diagrama de caule-e-folhas. No caso da estratégia E16, verificaram-se essencialmente dois tipos de erro: (i) 21,1% dos alunos determinam corretamente a posição da mediana, mas apenas consideram as folhas, isto é, afirmam que a mediana é 4, em vez de 14; (ii) 26,3 % dos alunos não determinam corretamente a posição da mediana. Esta dificuldade por ter resultado de alguma distração por parte dos alunos. Comparando a percentagem de alunos que não respondeu a esta questão com a percentagem de alunos que não respondeu à alínea 1.1 desta ficha de avaliação, verifica-se uma ligeira descida. Este facto pode ter resultado de os alunos, nesta questão, terem o gráfico de caule-e-folhas, isto é, terem os dados já ordenados, o que pode ter facilitado.

Questão 3
Escolheram-se cinco alunos da tua escola. Acerca das idades, em anos, desses alunos sabe-se que a média é 14 anos, a mediana é 13 anos e a moda é 12 anos. Quais as possíveis idades, em anos, dos cinco alunos?

Com esta tarefa pretendeu-se que os alunos determinassem as idades dos cinco alunos, tendo em atenção a média, a mediana e a moda. Podem ver-se na Tabela 4 as estratégias adotadas pelos alunos nesta questão.

Tabela 4 – Descrição das estratégias apresentadas pelos alunos na questão 3

Estratégia	% de alunos
E17 – Indica cinco valores que verificam as estatísticas presentes no enunciado (média, moda e mediana).*	27,8
E18 – Indica cinco valores que verificam o valor da média e da moda.	5,6
E19 – Indica cinco valores que verificam apenas uma das estatísticas presentes no enunciado.	38,9
E13 – Efetua cálculos com valores presentes no enunciado.	5,6
Não responde.	22,1

Nota: a estratégia assinalada com o asterisco (*) conduziu a respostas corretas.

Pela observação das produções escritas, parece que 72,3% dos alunos usaram uma estratégia de compensação e de tentativa-e-erro simultaneamente, dando origem a três situações diferentes:

(i): 38,9% dos alunos tiveram em consideração apenas uma das medidas ignorando as restantes, obtendo, por exemplo, os seguintes conjuntos de valores: “14, 14, 14, 14, 14”; “12, 12, 12, 13, 14” e “12, 12, 13, 14, 14”.

(ii): 27,8% dos alunos tiveram em consideração as três medidas, obtendo, por exemplo, os seguintes conjuntos: “12, 16, 13, 12, 17” e “12, 12, 13, 15, 18”.
(iii): 5,6% dos alunos tiveram em consideração a média e a moda, ignorando a mediana.

Na Figura 5 exemplifica-se uma resolução correta da questão, onde parece que o aluno A16 combina a estratégia por tentativa-e-erro com a estratégia por compensação.

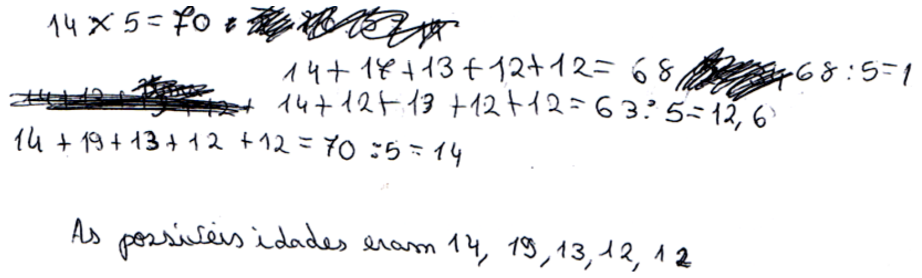


Figura 5. Resposta dada pelo aluno A16 na questão 3.

Relativamente à estratégia E19, pode dizer-se que dos 38,9% alunos, 27,8% consideraram apenas a moda, 5,6% tiveram em consideração apenas a média e 5,6% consideraram apenas a mediana. A percentagem de alunos que não respondeu a esta questão (22,1%) revela-se preocupante.

Questão 4
Num Jardim Zoológico há quatro girafas com o peso médio de 850 quilos. Juntou-se outra girafa ao grupo com o peso de 500 quilos. Determina, agora, a média dos pesos das cinco girafas.

Nesta questão pretendeu-se que os alunos interpretassem o significado de média e após a inserção de um novo dado determinassem a nova média. Na Tabela 5 podem ver-se as estratégias utilizadas pelos alunos nesta questão.

Tabela 5 – Descrição das estratégias apresentadas pelos alunos na questão 4

Estratégia	% de alunos
E29 – Atribui o peso de 850 quilos a cada uma das 4 girafas. De seguida, soma o peso de cada uma destas girafas com o peso da nova girafa e divide o resultado (3900kg) por 5. Por fim, afirma que a média do peso das 5 girafas é 780 quilos.*	21,1
E21 – Atribui o peso de 850 quilos a cada uma das 4 girafas. De seguida, soma o peso de cada uma destas girafas com o peso da nova girafa e divide o resultado (3900kg) por 2. Por fim, afirma que a média do peso das 5 girafas é 1950 quilos.	5,3
E22 – Atribui o peso de 850 quilos a cada uma das 4 girafas. De seguida, soma o peso de cada uma destas girafas com o peso da nova girafa obtendo o resultado de 3900 quilos.	5,3
E23 – Soma à média dos pesos das 4 girafas o peso da nova girafa e, de seguida, divide o valor obtido por 5. Por fim, afirma que a média do peso das 5 girafas é 270 quilos.	21,1
E24 – Soma à média dos pesos das 4 girafas o peso da nova girafa e, de seguida, divide o valor obtido por 2 (lei do fecho). Por fim, afirma que a média do peso das 5 girafas é 675 quilos.	5,3
E25 – Soma à média dos pesos das 4 girafas o peso da nova girafa e, de seguida, afirma que a média do peso das 5 girafas é 1350kg.	5,3
E26 – Soma à média dos pesos das 4 girafas o peso da nova girafa obtendo o	5,3

valor de 1350kg. De seguida indica quatro valores cuja soma é 1350 e divide por 4. Por fim, afirma que a média do peso é 337,5kg.	
E27 – Multiplica a média dos pesos das 4 girafas pelo peso da nova girafa e, de seguida, divide o valor obtido por 5. Por fim, afirma que a média do peso das 5 girafas é 85000 quilos.	5,3
E28 – Divide a média do peso das 4 girafas pelas 4 girafas. De seguida, a este resultado (212.5) soma o peso da nova girafa. Por fim, afirma que a média do peso das 4 girafas é 712,5.	5,3
E29 – Apresenta dois valores para a média.	5,3
Não responde	15,8

Nota: a estratégia assinalada com o asterisco (*) conduziu a respostas corretas.

Nesta questão importa salientar que 31,7% dos alunos parecem compreender o significado de média pois começam por atribuir o valor da média a cada uma das quatro girafas. Destes alunos, 21,1% usaram a estratégia E29, que conduziu à resposta correta, que se exemplifica na Figura 6. Esta estratégia já tinha sido usada na fase inicial da intervenção, contudo, com uma menor frequência e, tal como nesta questão, foi a única estratégia que conduziu à resposta correta.

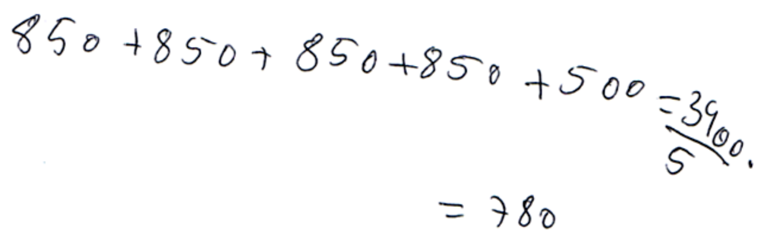


Figura 6. Resposta dada pelo aluno A15 na questão 4.

A resolução apresentada na Figura 6 apesar de conter um erro de escrita matemática (a primeira igualdade não está correta uma vez que a primeira soma devia também ser dividida por 5) subentende um raciocínio que levou à resposta correta.

Considerando a grandeza de um valor razoável para o peso médio das cinco girafas, pode-se avaliar quão são acríticos os alunos ao apresentarem os valores resultantes da adoção das estratégias E21, E22, E23, E25, E26 e E27, seja porque se trata de um valor excessivamente pequeno ou excessivamente elevado relativamente ao que seria expectável.

4. Conclusões

De seguida, apresentam-se os resultados mais relevantes para cada uma das estatísticas consideradas nas questões analisadas e, sempre que possível, comparam-se com estudos que abordam a mesma temática.

Média

No cálculo da média simples (alínea 1.1) 68,4% dos alunos conseguiram aplicar corretamente o algoritmo da média e 10,5% dos alunos ainda apresentaram dificuldades no uso do algoritmo da média, somando as idades dos alunos mas não dividindo pelo número total de alunos.

O cálculo da média ponderada foi um assunto tratado ao longo de toda a intervenção. Este foi um assunto problemático para a maioria dos alunos, sendo que, na pós-intervenção (questão 4), a percentagem de alunos que respondeu corretamente a esta questão foi de 21,1%. A estratégia que conduziu à resposta correta resume-se à aplicação do algoritmo da média ponderada.

Relativamente às dificuldades sentidas pelos alunos, surgiram três erros que se tinham verificado ao longo da intervenção. No primeiro, os alunos somam os valores do enunciado, esquecendo-se de ponderar estes valores, e de seguida dividem pelo total de elementos do conjunto. Na pós-intervenção 21,1% dos alunos cometeu este erro. No segundo erro, os alunos calculam a média dos valores do enunciado, isto é, aplicam a lei do fecho. Na pós-intervenção a percentagem de alunos que cometeu este erro foi de 5,3%. No estudo de Boaventura (2003), com alunos do ensino secundário, este erro verificou-se em 50,8% dos casos. Já no estudo de Barros (2003), com futuros professores do 1º e 2º ciclo, este erro observou-se em 29,7% dos casos. Por fim, no terceiro erro, os alunos apenas somam os valores do enunciado. Este erro verificou-se em 5,3% dos casos. No estudo de Barros (2003) este erro observou-se em 5,4% dos casos. Tal como refere esta autora, "é limitada a compreensão relacional do conceito de média, pois os alunos atribuíram-lhe um valor superior a qualquer das médias dadas" (p. 94).

Tal como aconteceu no estudo de Boaventura, o conceito de média nas questões em que era necessário trabalhá-lo em conjunto com a moda e a mediana (questão 3) ofereceu muitas dificuldades aos alunos, com apenas 27,8% dos alunos a conseguir apresentar uma resposta correta. Nesta questão, uma percentagem significativa de alunos (38,9%) apresentou cinco valores para os dados que verificam apenas uma das estatísticas referidas no enunciado. Esta estratégia de resolução também se verificou no estudo de Boaventura (2003), que salienta a dificuldade dos alunos em interligar as três medidas de tendência central.

Em suma, tal como afirma Boaventura (2003) no seu estudo, "a média revelou-se um conceito problemático em situações cuja resposta abrangia um raciocínio para além do cálculo de uma média aritmética simples" (p. vi).

Moda

Neste estudo constatou-se que o conceito de moda foi o melhor adquirido pelos alunos, tendo sido das, três medidas de tendência central, aquela que causou menos dificuldades.

A identificação correta da moda num conjunto de dados não organizados foi de 73,7% na pós-intervenção (alínea 1.1). Relativamente às dificuldades sentidas pelos alunos, apenas se verificou uma dificuldade ocorrida na fase de pré-intervenção (ficha de avaliação diagnóstica), em que alguns alunos identificaram a moda como o valor menos frequente do conjunto de dados.

Mediana

A mediana é um conceito novo para os alunos do 7º ano de escolaridade uma vez que é incluída pela primeira vez neste ano de escolaridade. Na alínea 1.1, da ficha de avaliação, a percentagem de respostas corretas foi de 36,9% e verificaram-se, essencialmente, duas estratégias de resolução: uma em que os alunos começaram por organizar os dados num diagrama de caule e folhas e, de seguida, encontraram a mediana; e outra em que os alunos ordenaram os dados por ordem crescente e, posteriormente, calcularam a mediana. A primeira estratégia foi adotada por 47,4% dos alunos e destes apenas 15,8% apresentaram o valor correto para a mediana. Dos restantes 31,6% que recorreram a esta estratégia, 10,5% usaram apenas as folhas do diagrama para calcular a mediana e os restantes calcularam a mediana como se o número de elementos do conjunto fosse ímpar. A percentagem de alunos que recorreu à segunda estratégia foi de 31,6% e, tal como na estratégia anterior, 10,5% destes determinou a mediana como se o número de elementos do conjunto fosse ímpar.

Ainda na ficha de avaliação, os alunos foram confrontados com o cálculo da mediana numa situação em que os dados estavam representados num diagrama de caule-e-folhas (questão 2). Nesta questão, 36,8% dos alunos determinaram a posição na qual se encontra a mediana e afirmaram corretamente que a mediana das idades era 14 meses. Dos 47,4% de alunos que respondem incorretamente, 21,1% determinou a posição correta da mediana mas afirmou que a mediana era 4 meses, ou seja, tendo apenas em consideração as folhas do diagrama; e os restantes 26,3% não determinaram corretamente a posição da mediana.

Finalmente, o conceito de mediana, quando aplicado em conjunto com a média e a moda, abordado na questão 3 da ficha de avaliação, revelou-se muito difícil para os alunos pois apenas 27,8%

conseguiu encontrar um conjunto de cinco elementos conhecidas as medidas de tendência central, média, moda e mediana.

Potencialidades e limitações das estratégias de resolução usadas pelos alunos

Ao longo de todas as resoluções dos alunos, relativas à pré-intervenção, intervenção e pós-intervenção, identificaram-se estratégias variadas, as quais nem sempre conduziram a respostas corretas. Especificamente, no decorrer deste estudo, surgiram 5 estratégias diferentes: estratégia de tentativa-e-erro; estratégia de compensação; estratégia de representação gráfica; estratégia aritmética e, por fim, estratégia algébrica. A estratégia mais frequente ao longo de toda a intervenção foi a estratégia aritmética (70,8%), seguida da estratégia de compensação (12,5%), da estratégia de representação gráfica (10,4%), da estratégia algébrica (4,2%) e, por fim, da estratégia de tentativa-e-erro (2,1%).

Em questões cujas medidas de tendência central eram conhecidas e se pedia que os alunos encontrassem um conjunto de dados que as satisfizesse, surgiu maioritariamente a estratégia de compensação. Por vezes, esta estratégia surgiu em simultâneo com a estratégia de tentativa-e-erro. Contudo, nem sempre esta estratégia de compensação conduziu a respostas corretas. Relativamente à eficácia desta estratégia conclui-se que é uma estratégia eficaz neste tipo de questões, mas, no entanto, é pouco aplicável aos restantes conteúdos da disciplina de Matemática.

Em questões onde se pretendia que os alunos descobrissem um dado desconhecido com base no conhecimento da média, verificou-se que a estratégia mais utilizada pelos alunos nas suas resoluções foi a estratégia algébrica (o que significa que os alunos conseguem traduzir o enunciado de um problema para uma equação e resolvê-la), seguida da estratégia de tentativa-e-erro e, por fim, da estratégia aritmética. Neste tipo de questões, à partida, parece que a estratégia mais eficaz é a estratégia algébrica pois com esta estratégia pode poupar-se tempo. Além disso, a estratégia algébrica pode ser aplicada a muitas situações da Matemática. Relativamente à segunda estratégia mais utilizada neste tipo de questões, a estratégia de tentativa-e-erro, revela-se um pouco limitada pois, tal como refere César (1994), nesta estratégia o nível de êxito atingido pelos alunos é variável, pois está relacionado com a capacidade de intuição matemática e de insistência dos sujeito. Assim, para esta autora

> quando a intuição matemática é muito boa, a persistência não desempenha um papel essencial; quando a intuição matemática é mais fraca, a persistência passa a ter um papel fundamental, pois neste caso os sujeitos precisam de experimentar muitas hipóteses até conseguirem obter uma solução correta. (p. 254)

Desta forma, um aluno com fraca intuição matemática pode demorar muito tempo na procura de uma solução. Além disso, à semelhança da estratégia de compensação, a estratégia de tentativa-e-erro é pouco aplicável na Matemática.

Nas questões em que era dada a média de um conjunto de dados, se acrescentava um novo dado e se pedia que os alunos encontrassem a nova média, todas as estratégias usadas pelos alunos foram aritméticas. Isto significa que os alunos recorreram às operações básicas da matemática (adição, subtração, multiplicação e divisão) para solucionar o problema. Nesta questão, de todas as estratégias já apresentadas, a estratégia aritmética foi a que se revelou com mais potencialidades para os alunos alcançarem a resposta correta. Além disso, tal como a estratégia algébrica, esta é uma estratégia muito aplicável na Matemática.

Nas questões onde se pedia para determinar a mediana, foi maioritariamente adotada uma estratégia de representação gráfica, em que os alunos construíram o diagrama de caule-e-folhas como forma de ordenar os dados. Contudo, nas situações em que se requer apenas a determinação da mediana seria preferível apenas ordenar os dados sem construir o diagrama de caule-e-folhas.

5. Referências

Barros, P. M. (2003). *Os futuros professores do 2º ciclo e a estocástica: dificuldades sentidas e o ensino do tema.* Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Boaventura, M. G. (2003). *Dificuldades de alunos do ensino secundário em conceitos estatísticos: O caso das medidas de tendência central.* Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Branco, J. & Martins, M. E. G. (2002). Literacia estatística. *Educação e Matemática*, 69, 9-13.

Branco, J. (2000). Estatística no secundário: O ensino e os seus problemas. In C. Loureiro, O. Oliveira & L. Brunheira (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de estatística* (pp. 11-30). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática, Departamento de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Branco, J. A. (2006). Mudanças no ensino da estatística. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Estatística*. 19-23.

Carvalho, C. & César, M. (2001). Interagir para aprender: Um caso de trabalho colaborativo em estatística. In B. Silva & L. Almeida (Orgs.), *Atas do VI Congresso Galaico Português de Psicopedagogia* (vol. 2, pp. 65-80). Braga: Centro de Estudos em Educação e Psicologia da Universidade do Minho.

Carvalho, C. (2001). *Interacção entre pares: Contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Carvalho, C. (2006). Olhares sobre a Educação Estatística em Portugal. In *Anais do SIPEMAT*. Recife: Programa de Pós-Graduação em Educação – Centro de Educação – Universidade Federal de Pernambuco.

César, M. (1994). *O Papel da interacção entre pares na resolução de tarefas matemáticas Trabalho em díade vs. trabalho individual em contexto escolar*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Fernandes, J. A. (2009). Ensino e aprendizagem da estatística: Realidades e desafios. In C. Costa, E. Mamede & F. Guimarães (Orgs.), *Atas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Vila Real: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, CD-ROM.

Fernandes, J. A., Carvalho, C. & Ribeiro, S. A. (2007). Caracterização e implementação de tarefas estatísticas: um exemplo no 7°ano de escolaridade. *Revista Zetetiké*, 15(28), 27-61.

Jolliffe F. (2007). The changing brave new world of statistics assessment. In B. Phillips & L. Weldon (Eds.), *The Proceedings of the ISI/IASE Satellite on Assessing Student Learning in Statistics*, Voorburg: International Statistical Institute.

Lima, Y. (1998). Modernização da Matemática no Liceu: Um programa inédito de Sebastião e Silva. *Jornal de Mathemática Elementar,* 174, 10-17.

Martins, M. E. G. & Cerveira, A. G. (1999). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Lisboa: Universidade Aberta.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: APM e IIE.

Petocz, P. & Reid, A. (2007). Learning and assessment in statistics. In Philips B. & Weldon L. (Eds.), *The Proceedings of ISI/IASE* Satellite *on Assessing Student Learning in Statistics*, Voorburg: International Statistical Institute, The Netherlands, CD-ROM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ribeiro, S. A. (2005). *O ensino da estatística no 7ºano de escolaridade: Caracterização e dificuldades sentidas pelos professores*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Roa, R., Correia, P. F. & Fernandes, J. A. (2009). Percepciones de los estudiantes de una clase de bachillerato sobre una intervención de enseñanza en Combinatoria. In María Guzmán P. (Coord.), *Arte, Humanidades y Educación: Aportaciones a sus ámbitos científicos* (pp. 323-347). Granada, Espanha: Editorial Atrio.

Santos, C. & Pedro, C. (2000). Estatística: utilização de programas de geometria dinâmica. In C. Loureiro, O. Oliveira & L. Brunheira (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de estatística* (pp.168-177). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática, Departamento de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Smith, M., Hughes, E., Engle, R. & Stein, M. (2009). Orchestrating discussions. *Mathematics Teaching in the Midle School* , 14(9), 548-556.