

Lançamento de Projéteis

1. Introdução
2. Resenha Histórica
3. Análise Cinemática
4. Análise Dinâmica
5. Exemplos de Aplicação
6. Reflexão Final
7. Referências Bibliográficas
8. Glossário de Termos

Elaborado por Paulo Flores - 2013



Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4800-058 Guimarães - Portugal
Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: pflores@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt/People/pflores



1.1. Enquadramento

O **lançamento de projéteis** foi (e é ainda atualmente!) muito importante em **teatros de guerra**, onde armas, mais ou menos convencionais, têm sido utilizadas ao longo de toda a História da Humanidade.

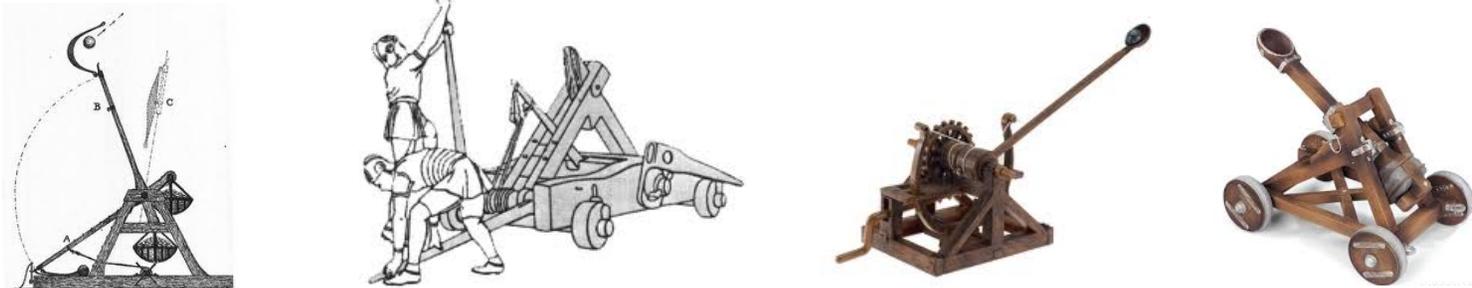


Fig. 1 Exemplos de catapultas utilizadas ao longo da história.



Fig. 2 Esboço de catapulta utilizada nas **Guerras Dácias** entre o Império Romano e Dácia (101-102 e 105-106 d.C.).



Fig. 3 Catapultas foram usadas durante a **Primeira Grande Guerra** pelas tropas francesas no lançamento granadas de mão para as trincheiras alemãs.



1.1. Enquadramento

O **lançamento de projéteis** foi (e é ainda atualmente!) muito importante em **teatros de guerra**, onde armas, mais ou menos convencionais, têm sido utilizadas ao longo de toda a História da Humanidade.

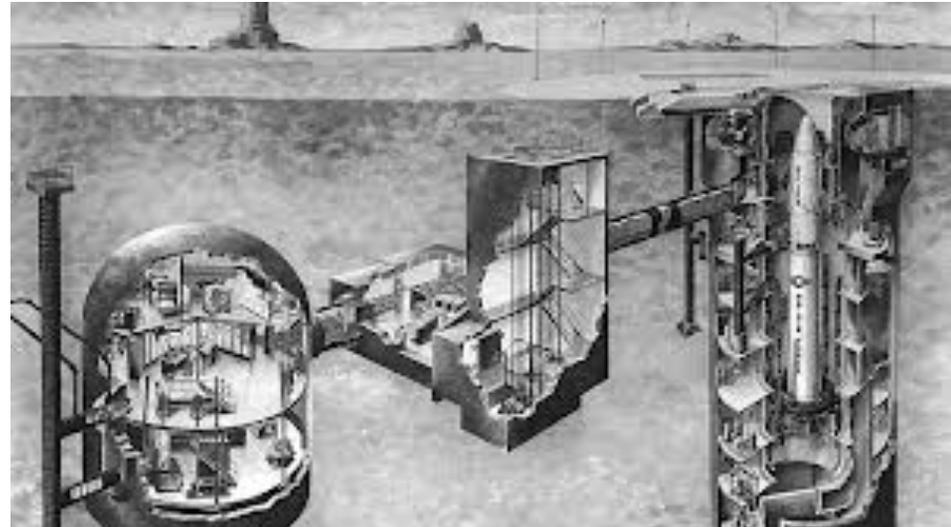


Fig. 4 Fotografias do museu do **míssil balístico intercontinental Titan II** situado em Tucson (Arizona, EUA).



1.1. Enquadramento

O **lançamento de projéteis** foi também muito importante na **caça**, em que uma quantidade diversa de artefactos têm vindo a ser utilizada pelo Homem ao longo dos tempos.



Fig. 5 Exemplos de **situações de caça** ou treino demonstradas ao longo da história.



1.1. Enquadramento

O **lançamento de projéteis** encontra também aplicação direta no **desporto**, onde diferentes objetos de diversas formas são arremessados por atletas.



Fig. 6 Exemplos de **modalidades desportivas** em que diferentes objetos são arremessados.



1.1. Enquadramento

O **lançamento de projéteis** encontra também um importante campo de estudo e de aplicação num conjunto diversificado de **atividades de caráter lúdico**.



Fig. 7 Exemplos de **situações lúdicas** onde se podem observar lançamentos de projéteis.



1.2. Objetivos

O presente documento serve de apoio aos alunos da unidade curricular Integradora II no estudo do tema dedicado ao lançamento de projéteis ou trajetórias aéreas.

Para um estudo mais aprofundado e exaustivo do tema é aconselhada a consulta da bibliografia temática, nomeadamente a que é listada no fim desta apresentação.

Com efeito, o **objetivo central** desta apresentação é o de apresentar aos estudantes uma **abordagem geral** sobre a problemática do lançamento de projéteis.

Os **objetivos específicos** desta apresentação podem ser elencados do seguinte modo:

- Apresentar uma **breve perspectiva histórica** sobre o lançamento de projéteis;
- Sensibilizar os estudantes para as **principais variáveis** que afetam as trajetórias aéreas;
- Fornecer aos alunos ferramentas para **análise do movimento** de projéteis;
- Fomentar o sentido crítico na abordagem de **dinâmica do lançamento de projéteis**.



2.1. Épocas Históricas da Humanidade

A **Idade Antiga**, ou Antiguidade é o período que medeia a invenção da escrita (4000-3500 a.C.) e a queda do Império Romano do Ocidente (476 d.C.)

A **Idade Média** diz respeito ao período que vai desde o século V até ao século XV. O fim desta época está relacionado com a tomada de Constantinopla pelos turcos otomanos em 1453.

A **idade Moderna** inicia-se com a queda de Constantino e tem o seu término na Revolução Francesa, que ocorreu em 1789.

A **Idade Contemporânea** tem o seu início no pós Revolução Francesa e estende-se até aos nossos dias.

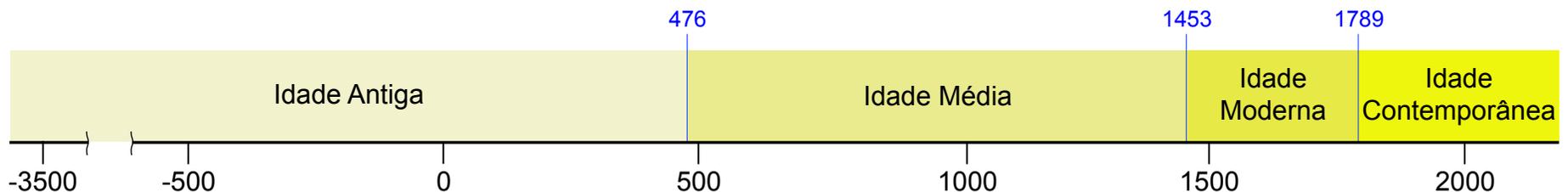


Fig. 8 Representação cronológica das principais épocas históricas da humanidade na Europa.

Deve referir-se que a divisão da História da Humanidade aqui apresentada não é unânime entre os historiadores, sendo possível encontrar outro tipo de divisão em função do espaço geográfico ou do acontecimento histórico.



2.2. Marcos Históricos no Estudo do Movimento de Projéteis

Na figura 9 estão representados alguns dos principais **marcos histórico-científicos** relacionados com o estudo do movimento de projéteis.

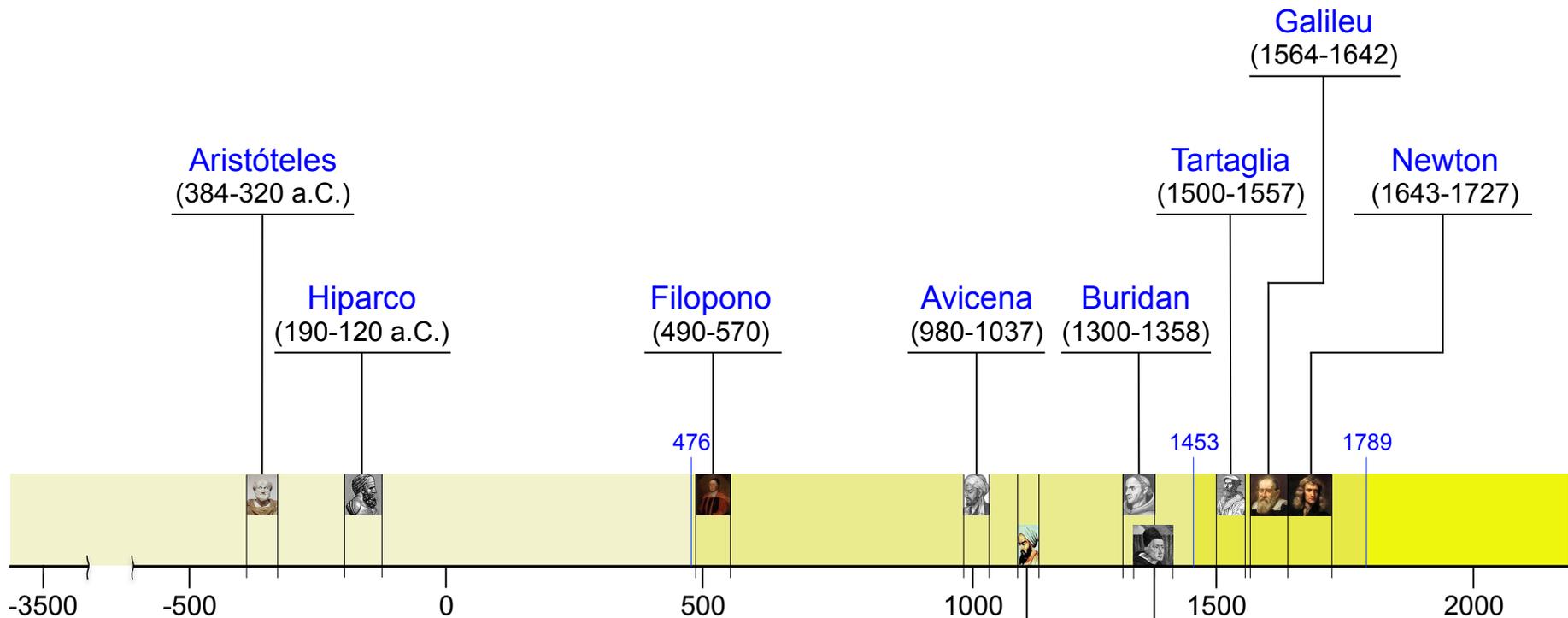


Fig. 9 Marcos no estudo do movimento de projéteis.



2.2. Marcos Históricos no Estudo do Movimento de Projéteis

Aristóteles (384-322 a.C.)

Filósofo grego que fundou as bases do pensamento científico ocidental.

Aristóteles considerava o universo finito e delimitado por uma esfera.

Universo delimitado por uma esfera na qual se localizavam as estrelas.

Dentro da esfera existiam outras esferas (planetas conhecidos) que giravam em torno da terra que era fixa no centro do universo (teoria geocêntrica).

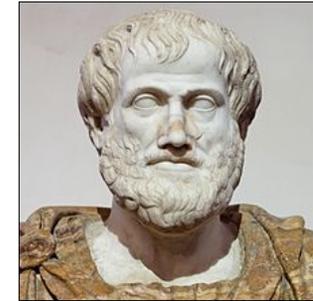


Fig. 10 Aristóteles

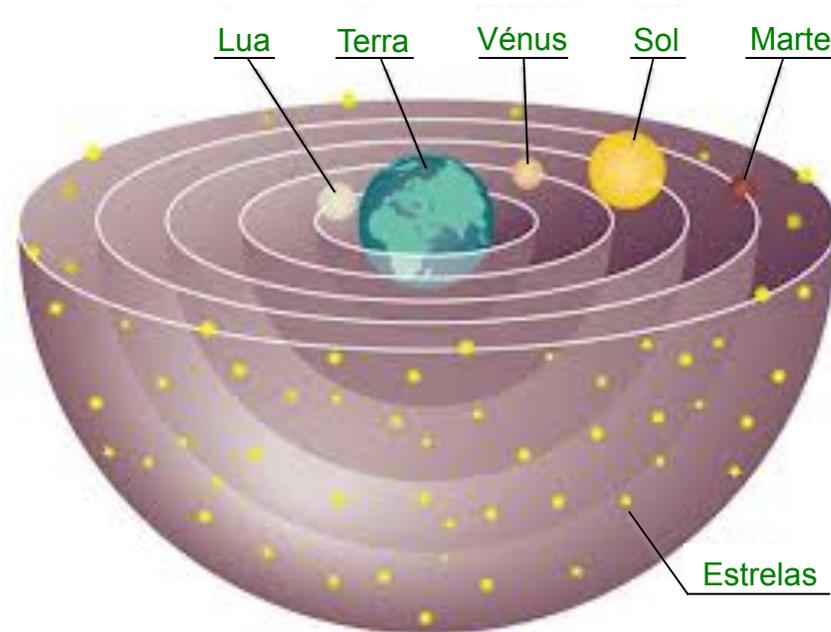
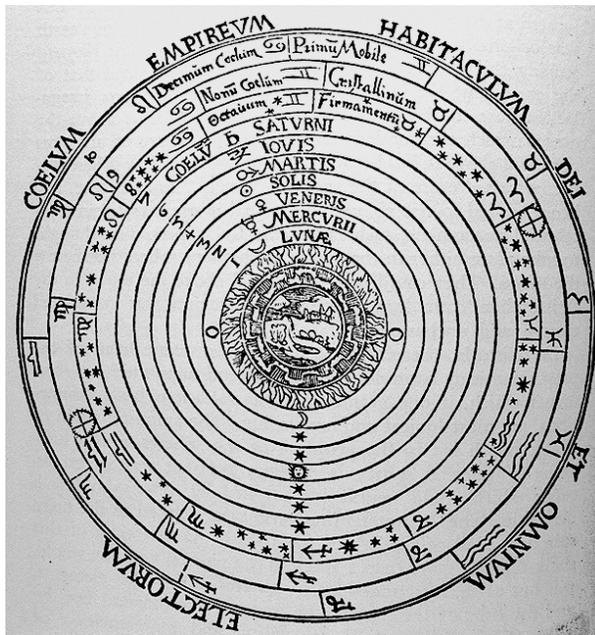


Fig. 11 Representações do modelo de cosmos de Aristóteles.



2.2. Marcos Históricos no Estudo do Movimento de Projéteis

Na Antiguidade, Aristóteles foi quem apresentou a **teoria mais elaborada sobre o movimento**, o qual estava associado à mudança em geral (**Física aristotélica**).

Segundo Aristóteles, os corpos movem-se para se situarem corretamente no cosmo de acordo com a natureza, isto é, **ocuparem o lugar natural**.

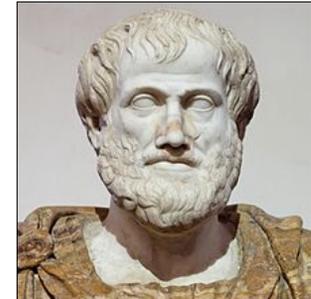


Fig. 12 Aristóteles

Com efeito, Aristóteles considerada a existência de dois tipos de movimento distintos:

- **Movimento natural**;
- **Movimento violento**.



Fig. 13 Movimento **natural**.

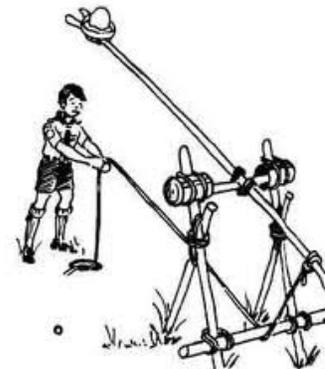


Fig. 14 Movimento **violento**.

Um movimento é natural quando conduz um dado objeto ao seu lugar natural. Os movimentos que não se enquadram nesta condição denominam-se movimentos violentos.

Esta distinção **não era válida para os seres vivos**, pois estes podem movimentar-se *de per si*.



2.2. Marcos Históricos no Estudo do Movimento de Projéteis

Assim, por exemplo, quando uma pedra é arremessada para cima, a primeira parte do movimento (subida) é do tipo violento, pois uma pedra por si só não pode realizar este movimento.

Por seu lado, o movimento de descida é do tipo natural uma vez que a pedra se desloca para o seu lugar natural.

O conceito de movimento natural é condicionado pela noção de espaço de Aristóteles e, por conseguinte, viola a lei da atração universal proposta por Newton.

Assim, todo o movimento que é contra a ordem natural é violento. Aristóteles, argumentava que o movimento violento carecia da aplicação contínua de uma ação (força/poder) exterior.

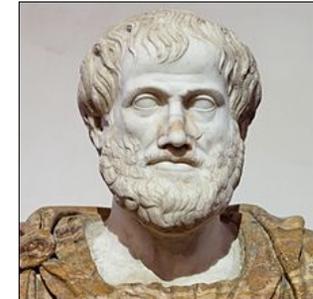


Fig. 15 Aristóteles



Fig. 16 Arrastamento de uma pedra.

O arrastamento de um objeto sobre a superfície terrestre pode ser analisado à luz da teoria de Aristóteles, se se considerar que o objeto apenas se move quando é atuado pela força motriz (força de arrastamento) e que o objeto fica imóvel quando aquela cessa, então está-se perante um movimento violento.



2.2. Marcos Históricos no Estudo do Movimento de Projéteis

Porém, **a mesma teoria não é capaz de explicar o movimento** de um projétil, uma vez que o movimento continua após o lançamento, não se verificando, portanto, a condição necessária que uma força externa tem que atuar continuamente sobre o objeto para que este realize um movimento violento.

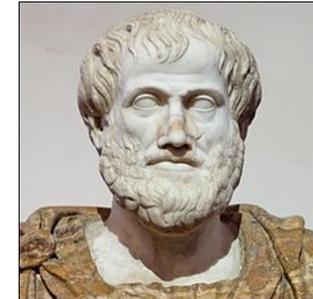


Fig. 17 Aristóteles

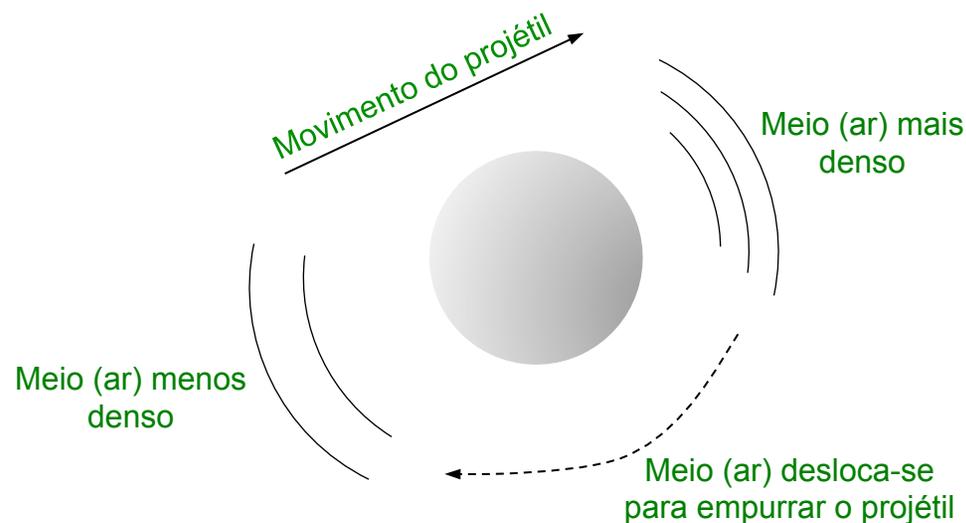


Fig. 18 Uma das explicações de Aristóteles para o movimento de um projétil.

Aristóteles **explica o movimento de um projétil** através do meio (ar), propondo duas abordagens distintas:

- Numa primeira abordagem, o próprio **ar que é deslocado à frente do projétil movimenta-se** para o lugar que o projétil deixa de ocupar à medida que se vai deslocando e, por consequência, vai **empurrando o projétil** (teoria antiperístase);
- Numa segunda teoria, Aristóteles defende que de alguma forma **o meio (ar) adquire uma força** (a partir do lançador ou do próprio ar) capaz de empurrar.



2.2. Marcos Históricos no Estudo do Movimento de Projéteis

Aristóteles atribui uma **função dupla ao ar**, por um lado sustem o movimento, e por outro, opõe-se ao movimento (**teoria antiperístase**).

Assim, **não seria possível o movimento de projéteis no vácuo**, uma vez que não havia meio para gerar o movimento violento. Aliás Aristóteles advogava a inexistência de vácuo na natureza.

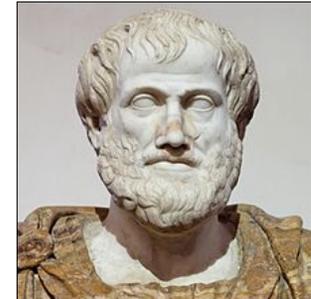


Fig. 19 Aristóteles

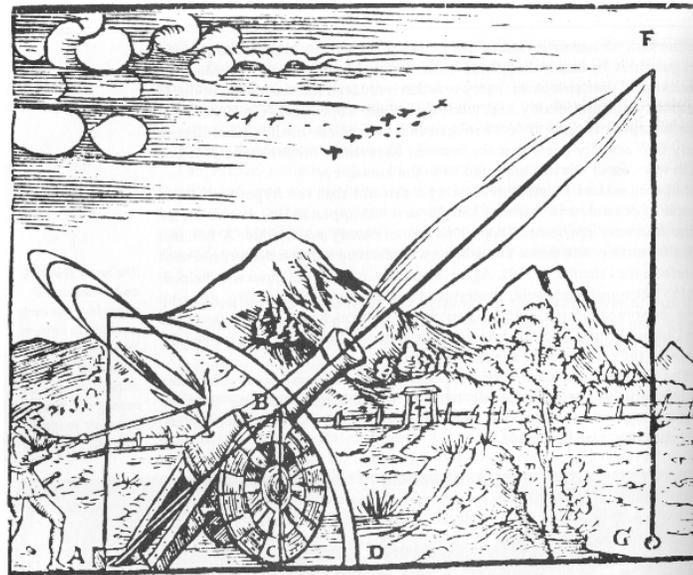


Fig. 20 Trajetória de um projétil segundo a teoria de Aristóteles.

Nas duas explicações de Aristóteles, a **força externa que é exercida no projétil diminui de intensidade** ao longo do movimento, facto que explica a queda do projétil ao fim de algum tempo.

Para Aristóteles, o movimento natural e o movimento violento acontecem separadamente (ou um ou outro!), sendo **retilíneo o movimento sublunar**. Assim, o movimento de um projétil tem uma fase em que o objeto sobe com **movimento violento retilíneo**, e outra em que o objeto desce com um **movimento natural retilíneo**.



2.2. Marcos Históricos no Estudo do Movimento de Projéteis

Hiparco (190-120 a.C.)

Astrónomo grego considerado o [fundador da Astronomia científica](#).

[Hiparco](#), discordando da abordagem de Aristóteles, apresenta uma nova explicação para o movimento de projéteis.

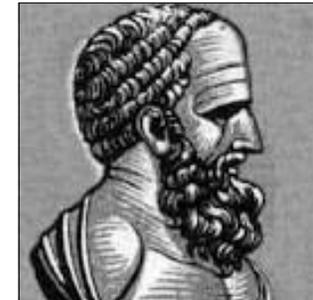


Fig. 21 Hiparco

Segundo [Hiparco](#) o movimento de um projétil é promovido por uma [força que é transmitida e armazenada no projétil aquando do arremesso](#). Esta força interna vai diminuindo de intensidade durante o movimento até se [autoextinguir](#).

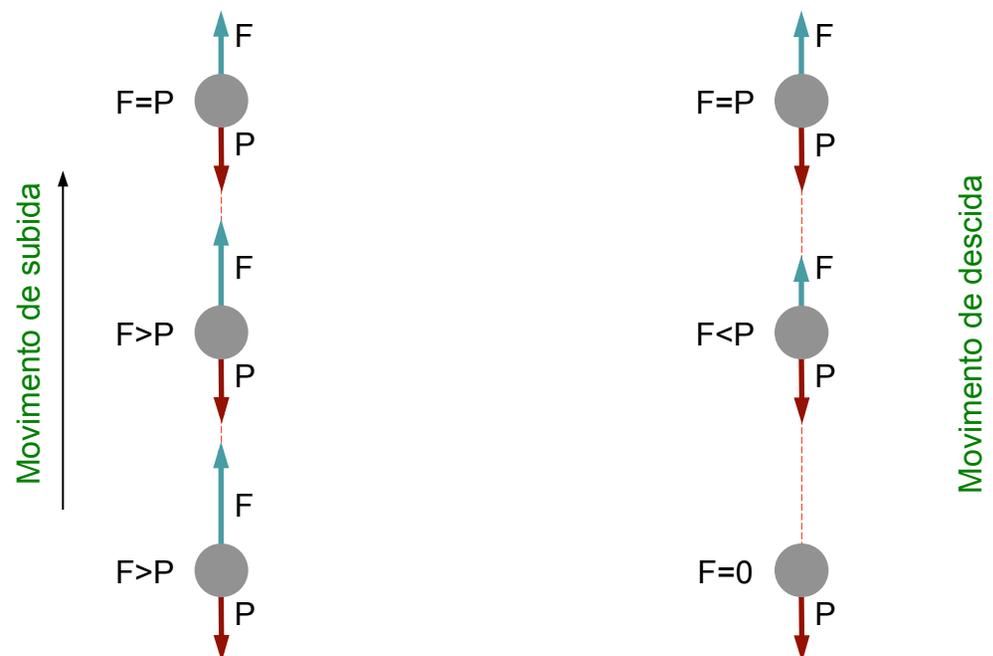


Fig. 22 Movimento de subida e de descida de um projétil segundo a teoria de Hiparco.



2.2. Marcos Históricos no Estudo do Movimento de Projéteis

A teoria do movimento de projéteis de Aristóteles perdurou por vários séculos, pois [o que as pessoas vêem é influenciado pelo que esperam ver](#).

Para [Aristóteles](#) a força provém do meio, sendo, portanto, [externa](#).

Para [Hiparco](#) a força responsável pelo movimento é [interna](#).

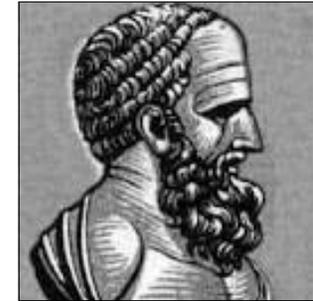


Fig. 23 Hiparco

Apesar das explicações de [Aristóteles](#) e [Hiparco](#) serem diferentes, em ambos os casos o movimento de um projétil descreve o mesmo tipo de [trajetória retilínea](#).

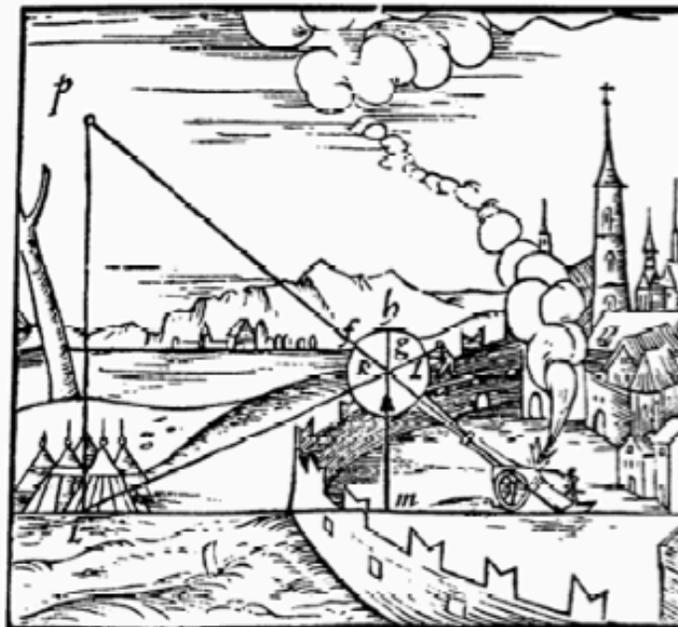


Fig. 24 Trajetória de um projétil segundo a teoria de Hiparco.



2.2. Marcos Históricos no Estudo do Movimento de Projéteis

Filopono (490-570)

Filósofo grego foi um [comentador da obra de Aristóteles](#).

Segundo Filopono, o meio não podia ter função dupla, isto é, ser ao mesmo tempo [promotor e resistência do movimento](#) de um projétil



Fig. 25 Filopono

Assim, Filopono advogava que, à semelhança de Hiparco, o movimento de um projétil era causado por uma [força motriz que era transmitida ao objeto](#) durante o arremesso. Esta força é mais tarde denominada de [ímpeto](#) e é interna ao projétil.

Segundo esta teoria, o [movimento de um projétil seria possível no vácuo](#), no qual a força motriz também se [autoextingue](#), pois Filopono também defendia um [universo finito](#).

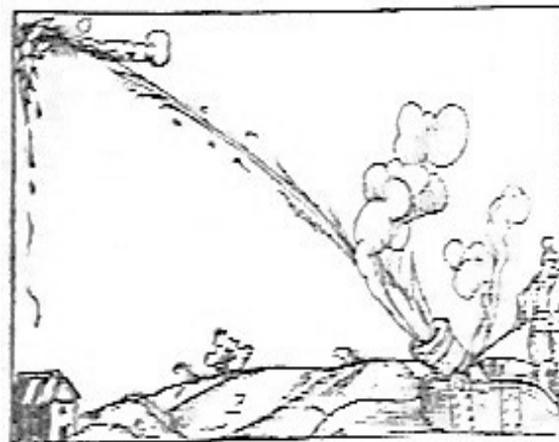


Fig. 26 Trajetória de um projétil segundo a teoria de Filopono.



2.2. Marcos Históricos no Estudo do Movimento de Projéteis

Avicena (980-1037)

Filósofo e sábio persa autor de mais de 400 obras.

Avicena [opõe-se à teoria de Filopono](#) de que a força transmitida a um projétil se autoextingue (como acontece com o fogo!).



Fig. 27 Avicena

Segundo Avicena, a [força transmitida](#) a um projétil só pode [diminuir de intensidade devido à ação do meio](#).

À semelhança dos seus antecessores, Avicena apenas considera a [existência de movimentos retilíneos e não simultâneos](#).

Assim, por exemplo, um [projétil lançado horizontalmente](#) descreve um movimento horizontal até que a força que lhe deu origem cessa de atuar, para depois se deslocar verticalmente devido à ação do peso.

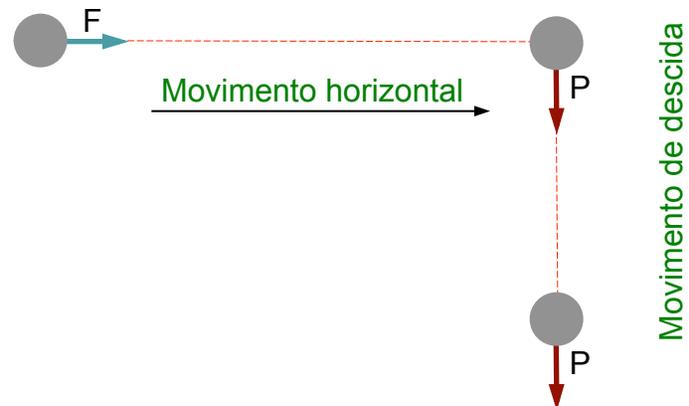


Fig. 28 Trajetória de um projétil lançado horizontalmente segundo a teoria de Avicena.



2.2. Marcos Históricos no Estudo do Movimento de Projéteis

Avempace (1095-1138)

Filósofo **árabe-espanhol** (Saragoça).

Foi **crítico da teoria de Aristóteles** no que se refere à causa (*i.e.* o meio) do movimento de projéteis.



Fig. 29 Avempace

Avempace foi grande **defensor da abordagem de Filopono**.

Por sua vez, **Averróis** (1125-1198) foi um comentador e defensor da teoria de Aristóteles, que usa para contradizer a teoria de Filopono e Avempace.

De facto, num contexto fundamentalmente aristotélico foram poucos os adeptos de Filopono e Avempace, dos quais se destacam **Tomás de Aquino** (1225-1274) e **Roger Bacon** (1214-1294).

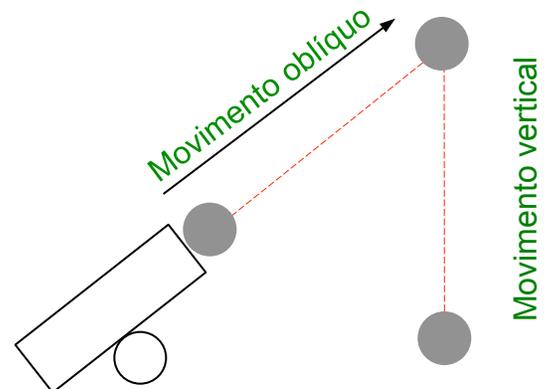


Fig. 30 Trajetória de um projétil segundo a teoria de Avempace.



2.2. Marcos Históricos no Estudo do Movimento de Projéteis

Buridan (1300-1358)

Filosofo francês apresentou a [teoria do ímpeto](#) (movimento repentino).

Segundo Buridan, um [projétil adquire um ímpeto quando é arremessado](#), o qual produz o movimento.

O ímpeto, que fica armazenado no projétil, [diminui de intensidade por forças externas](#).

As forças externas podem ser a [gravidade](#) ou [resistência do meio](#).

Buridan defendia que o [ímpeto aumenta](#) com a velocidade e com a quantidade de matéria, que é uma abordagem à quantidade de movimento como [causa movimento](#).

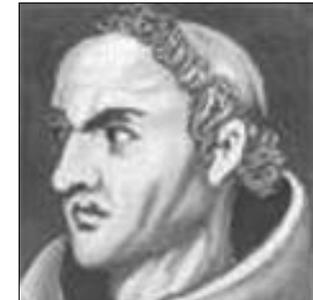


Fig. 31 Buridan

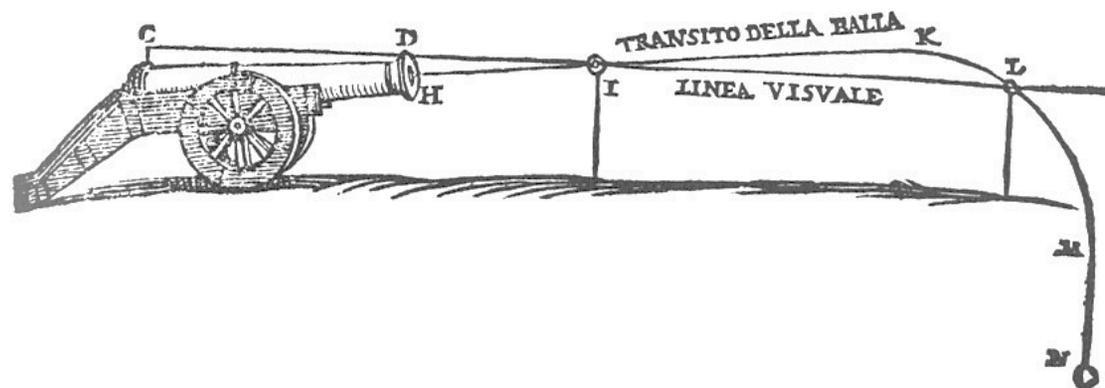


Fig. 32 Trajetória de um projétil segundo a teoria de Buridan.



2.2. Marcos Históricos no Estudo do Movimento de Projéteis

Alberto da Saxónia (1316-1390)

Filósofo alemão foi aluno de Buridan e deu **contributos para a lógica e a física**.

Com **base na teoria do ímpeto** de Buridan, Alberto da Saxónia descreve o movimento de um projétil lançado horizontal e obliquamente em **três fases** distintas:



Fig. 33 Alberto Sa.

- Na primeira fase, o **projétil desloca-se em linha reta** dado que o ímpeto que causa o movimento é muito superior ao peso (movimento violento);
- Na segunda fase, o **ímpeto começa a diminuir** gradualmente de intensidade pela resistência do meio e pela ação do peso e, conseqüentemente, desvia-se da trajetória retilínea e descreve uma **trajetória curva** (movimento violento e natural);
- Na terceira fase, uma vez dissipado o ímpeto, o projétil descreve uma **trajetória vertical** devido ao peso (movimento natural).

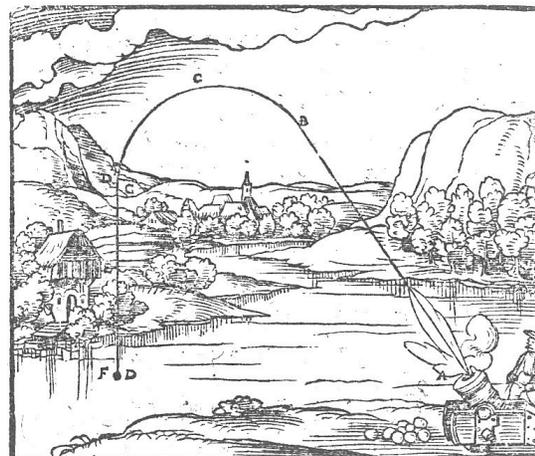


Fig. 34 Trajetória de um projétil segundo a teoria de Alberto da Saxónia.



2.2. Marcos Históricos no Estudo do Movimento de Projéteis

Tartaglia (1500-1557)

Filósofo italiano refere o movimento de projéteis como a **nova ciência**.

Tartaglia **apoiar-se na teoria do ímpeto** dividida em três fase, porém questiona como é possível que o peso atua apenas nas fases 2 e 3 do movimento de um projétil.



Fig. 35 Tartaglia

Como consequência, **Tartaglia admite uma trajetória curva** na primeira fase do movimento. Porém, a curva é tão suave e imperceptível que pode ser ignorada.

Tartaglia defende, portanto, que na **primeira fase do movimento**, apresentada por Alberto da Saxónia, **não pode existir somente movimento violento em linha reta**, exceto para lançamentos verticais.

Segundo Tartaglia, o **movimento de um projétil é influenciado pelo peso** em toda a sua amplitude, e que, por isso, o afasta das trajetórias retilíneas.



Fig. 36 Trajetória de um projétil segundo a teoria de Tartaglia.



2.2. Marcos Históricos no Estudo do Movimento de Projéteis

Galileu (1564-1642)

Astrónomo italiano considerado o **pai da método científico** moderno (**observação**).

Foi um **seguidor da teoria do ímpeto** e faz a ligação desta com a **dinâmica inercial**.

Defende que o **ímpeto é tem tendência a diminuir** com o movimento, mesmo no vácuo.

Galileu apresentou o **princípio da independência dos movimentos**, em que o movimento de um projétil se pode decompor em:

- **Movimento uniforme** na direção horizontal;
- **Movimento uniformemente acelerado** na direção vertical.

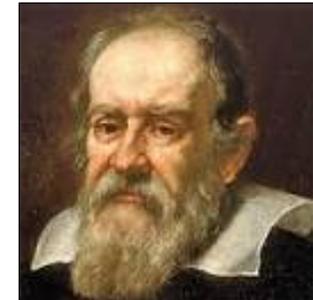


Fig. 37 Galileu

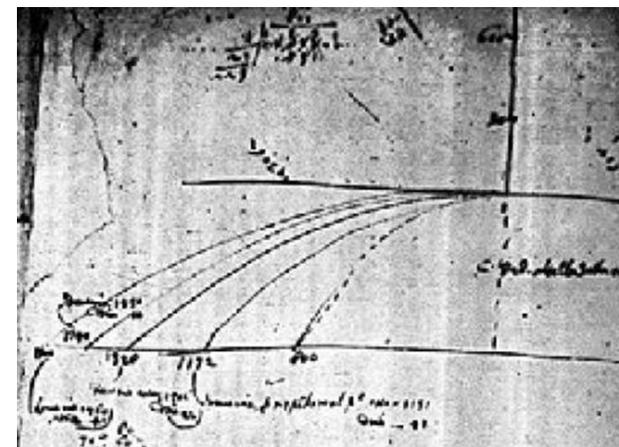


Fig. 38 Trajetória de um projétil segundo a teoria de Galileu.



2.2. Marcos Históricos no Estudo do Movimento de Projéteis

Galileu chegou a esta conclusão com base na [experimentação](#).

O [Princípio da independência](#) ou de Galileu diz que quando um corpo realiza um movimento composto, cada um dos seus [movimentos simples acontece como se os restantes não existissem](#).

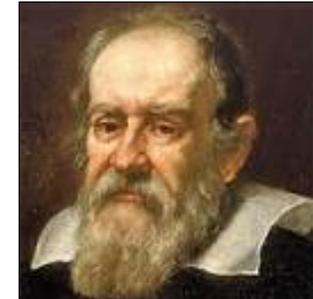


Fig. 39 Galileu

Galileu usou o plano inclinado com esferas pintadas para realizar ensaios sobre o movimento de projéteis.

De facto, foi Galileu quem primeiramente estudou com rigor o movimento de um projétil, o qual descreve uma curva bem definida, i.e., uma [semi-parábola](#).

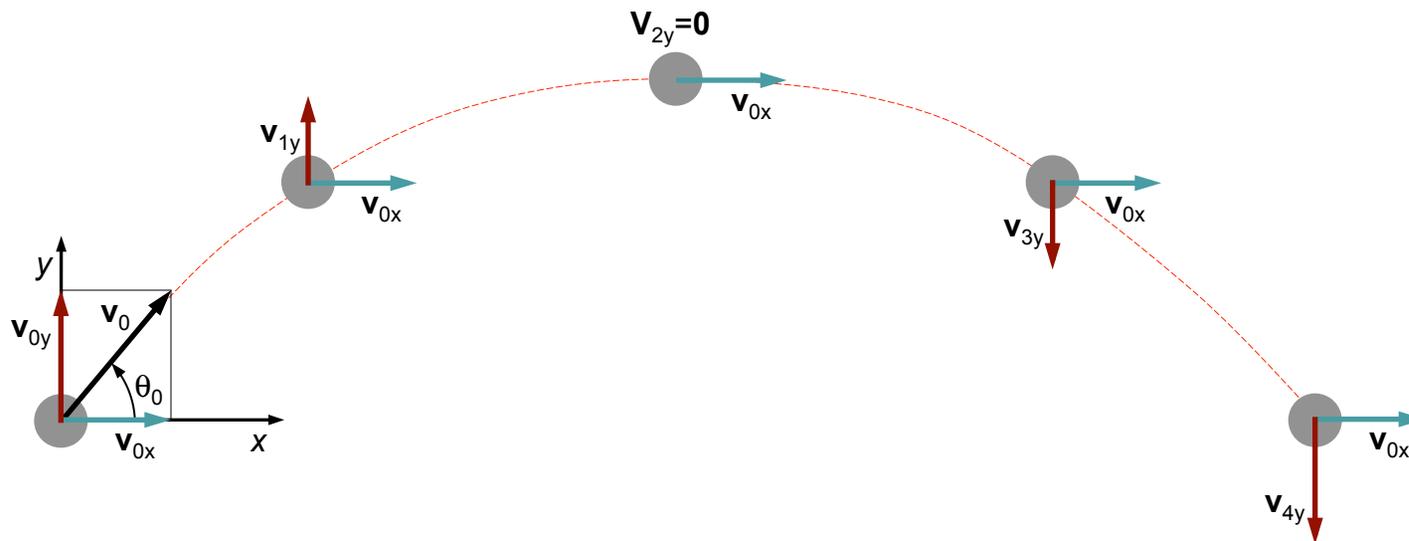


Fig. 40 Trajetória de um projétil (semi-parábola) segundo a teoria de Galileu.



2.2. Marcos Históricos no Estudo do Movimento de Projéteis

Newton (1643-1727)

Cientista inglês considerado **um dos mais influentes** na História da Humanidade.

Newton deu **continuidade às ideias de Buridan e Galileu** no que diz respeito ao estudo do movimento de projéteis.



Fig. 41 Newton

A principal **diferença entre mecânica Newtoniana e a teoria do ímpeto** é que nesta última o ímpeto é a **causa do movimento e é interna ao projétil**, ao passo que na mecânica Newtoniana a **força é externa e é necessária** para que haja alteração do movimento.

Por outro lado, Newton deu expressão **física aos estudos experimentais e empíricos** desenvolvidos por Galileu, ao consolidar a **perspetiva inercial do movimento**.

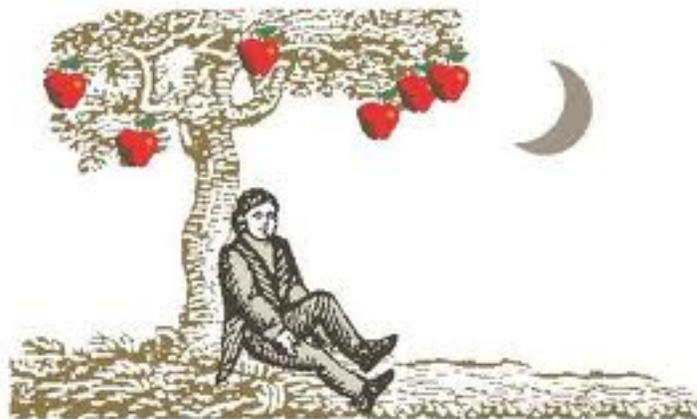


Fig. 42 Ilustração relativa à lenda que diz que sobre a cabeça de Newton caiu uma maçã.



2.2. Marcos Históricos no Estudo do Movimento de Projéteis

Newton propôs a [lei da gravitação universal](#) entre os corpos

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1)$$

em que G é a [constante gravitacional universal](#) ($6,673 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$).



Fig. 43 Newton

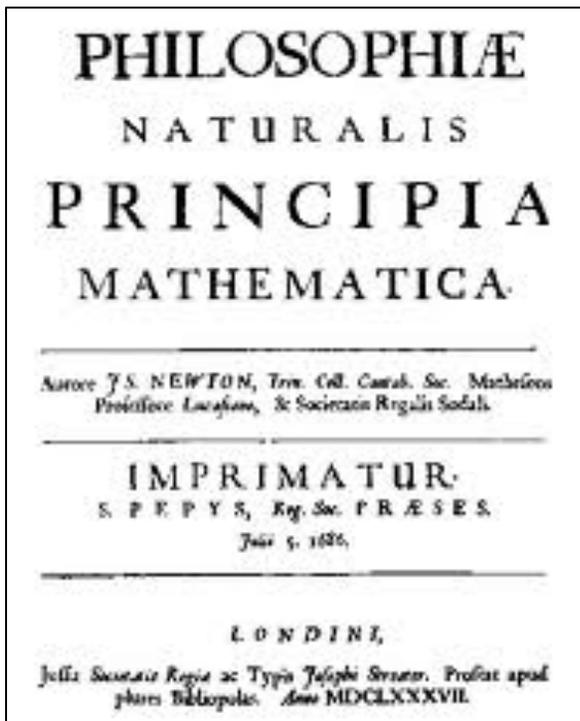


Fig. 44 Ilustração de obra de Newton.

Newton estabeleceu, com genial argúcia, as três leis fundamentais do movimento, publicadas na obra "*Principia*":

Primeira lei - [lei da inércia](#) - um corpo, sem qualquer influência exterior, permanece no seu estado de repouso ou de movimento retilíneo e uniforme, enquanto não for obrigado a modificar esse estado pela ação de forças aplicadas.

Segunda lei - [lei fundamental da dinâmica](#) - o produto da massa de um corpo pela aceleração que lhe imprime uma dada força é igual, em módulo, a essa força, sendo o sentido da aceleração o mesmo que o da força.

Terceira lei - [lei da igualdade da ação e da reação](#) - dois corpos exercem um sobre o outro forças de igual magnitude, com a mesma direção mas em sentidos opostos.



2.2. Marcos Históricos no Estudo do Movimento de Projéteis

Os [desenvolvimentos de Newton](#) desempenham um papel de primordial importância no movimento de projéteis.

De facto, Newton estabeleceu [relações matemáticas](#) que traduzem os [fenómenos físicos](#) que estão associados ao movimento de projéteis.

A [observação experimental](#) permitiu validar as previsões dadas pela mecânica Newtoniana.



Fig. 45 Newton



Fig. 46 Trajetória de um projétil segundo a teoria de Newton.

Com base em estudos bíblicos, nomeadamente textos do Livro de Daniel, Newton previu que o [fim do mundo](#) não deveria acontecer antes do [ano 2060](#).

Newton afirma que [“Ele pode acabar além desta data, mas não há razão para acabar antes”](#).



3.1. Movimento Uniforme e Movimento Uniformemente Acelerado

Nesta secção é apresentado o estudo do [movimento uniforme](#) e movimento [uniformemente acelerado](#), necessários para efetuar a análise de trajetórias aéreas.

Por definição, a [velocidade instantânea de um corpo rígido](#) é a derivada da posição em relação ao tempo e pode ser escrita da seguinte forma

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (2)$$

Assim, uma vez conhecida a velocidade de um corpo em função do tempo, torna-se possível, utilizando a Eq. (2), [calcular as sucessivas posições](#) que esse corpo ocupa ao longo do movimento.

Reescrevendo e integrando a Eq. (2) resulta que

$$\int_{s_0}^s ds = \int_{t_0}^t v dt \quad (3)$$

Para um [movimento uniforme e retilíneo](#), a velocidade é constante, pelo que utilizando a Eq. (3), a [posição de um corpo](#) pode ser escrita da seguinte forma

$$s = s_0 + vt \quad (4)$$

em que s_0 representa a posição inicial e t_0 é considerado nulo ($t_0=0$).



3.1. Movimento Uniforme e Movimento Uniformemente Acelerado

Quando a **velocidade varia com o tempo**, pode-se calcular a **aceleração instantânea** a partir da própria de definição de aceleração, isto é, a aceleração representa a derivada da velocidade em ordem ao tempo

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (5)$$

Com efeito, conhecida a aceleração é possível **determinar o valor valor da velocidade por integração** direta de Eq. (5), resultando em

$$v = v_0 + \int_{t_0}^t a dt \quad (6)$$

onde v_0 representa a velocidade inicial. A Eq. (6) relaciona diretamente a velocidade, a aceleração e o tempo.

É possível, para um dado **movimento uniformemente acelerado**, relacionar a **posição, a velocidade e a aceleração**. Assim, substituindo a Eq. (2) na Eq. (5), após tratamento matemático, pode escrever-se que

$$v dv = a ds \quad (7)$$

Integrando a Eq. (7) resulta que

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = a \int_{s_0}^s ds \quad (8)$$



3.1. Movimento Uniforme e Movimento Uniformemente Acelerado

Para o **movimento retilíneo uniformemente acelerado**, i.e. com aceleração constante, a **velocidade** pode ser calculada por integração da Eq. (6)

$$v = v_0 + at \quad (9)$$

em que t_0 é considerado nulo ($t_0=0$).

Ainda para o **movimento retilíneo uniformemente acelerado** pode obter-se uma expressão que traduz a **posição** em cada instante. Assim, substituindo a Eq. (9) na Eq. (3) resulta que

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (10)$$

Finalmente, a partir da Eq. (8) pode-se obter uma expressão que relaciona a **posição, a velocidade e aceleração**, ou seja

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0) \quad (11)$$

onde s_0 e v_0 representam a posição e a velocidade iniciais, respetivamente.

A Eq. (11) é vulgarmente conhecida como **equação de Torricelli**, a qual permite calcular a velocidade de um corpo em movimento retilíneo uniformemente acelerado sem necessidade de conhecer o intervalo de tempo em que o movimento acontece.



3.2. Cinemática de Trajetórias Aéreas

Nesta secção é apresentada a análise **cinemática do movimento de um projétil** lançado **obliquamente** com uma **velocidade inicial** e sem ter em consideração a **resistência do ar**.

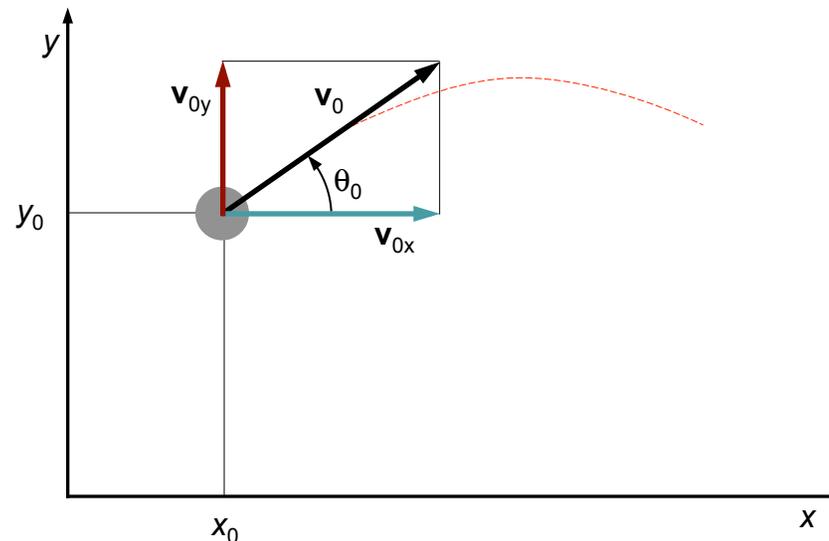


Fig. 47 Lançamento oblíquo de um projétil com uma velocidade inicial igual a v_0 .

O movimento de um projétil pode ser estudado tendo em consideração o **Princípio de Galileu** em que os movimentos horizontal e vertical podem ser analisados de modo independente.

- O movimento **horizontal** é retilíneo e **uniforme** (velocidade constante);
- O movimento **vertical** é retilíneo **uniformemente acelerado** (aceleração constante: $g=9,81 \text{ m/s}^2$).

O movimento geral do projétil pode ser obtido pela **sobreposição destes dois movimentos**.



3.2. Cinemática de Trajetórias Aéreas

O **vetor velocidade inicial** pode ser escrito do seguinte modo

$$\mathbf{V}_0 = v_{0x} \mathbf{u}_x + v_{0y} \mathbf{u}_y \quad (12)$$

onde

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 \quad (13)$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 \quad (14)$$

sendo θ_0 o ângulo que o vetor velocidade inicial faz com a horizontal.

Do mesmo modo, a **velocidade do projétil** pode ser escrita como

$$\mathbf{V} = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y \quad (15)$$

em que as **componentes horizontal e vertical** da velocidade podem obter-se pela Eq. (9), ou seja as **equações paramétricas** da velocidade

$$v_x = v_{0x} \quad (16)$$

$$v_y = v_{0y} - gt \quad (17)$$



3.2. Cinemática de Trajetórias Aéreas

De forma análoga, a Eq. (10) pode ser escrita na forma vetorial do seguinte modo

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{v}_0 t - \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 \quad (18)$$

a qual pode ser [decomposta](#) nas direções x e y como

$$x = x_0 + v_{0x} t \quad (19)$$

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (20)$$

As expressões (19) e (20) representam [equações paramétricas](#) da trajetória aérea descrita por um projétil.

Combinando as Eqs. (19) e (20) no sentido de eliminar a variável tempo, pode obter-se a [equação cartesiana](#) da trajetória aérea de um projétil, ou seja

$$y = y_0 + \tan \theta_0 (x - x_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} (x - x_0)^2 \quad (21)$$

A Eq. (21) representa a [expressão matemática de uma parábola](#) de eixo vertical que passa pelo ponto (x_0, y_0) .



3.2. Cinemática de Trajetórias Aéreas

Atendendo a que a trajetória de um projétil descreve um parábola, então **existe um instante** para o qual a **derivada é nula**, o qual corresponde ao **ponto mais elevado da trajetória**.

Como a derivada da posição em relação ao tempo é a velocidade, então para o instante correspondente à altura máxima **é nula a componente vertical da velocidade**.

Assim, da Eq. (17) pode escrever-se que

$$0 = v_{0y} - gt \quad (22)$$

Substituindo a Eq. (14) na Eq. (22) e resolvendo em ordem à varável tempo resulta no **tempo de subida**

$$t = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \quad (23)$$

Se um corpo em for **lançado à mesma altura que a sua queda**, então o tempo de subida é igual ao tempo de descida, pelo que o **tempo total de voo** pode ser calculado como o dobro do tempo da subida, ou seja

$$t = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g} \quad (24)$$



3.2. Cinemática de Trajetórias Aéreas

A [altura máxima](#) a atingir durante o voo é calculada pela substituição do tempo de subida dado pela Eq. (23) na Eq. (20) resultando que

$$y_{\max} = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} \quad (25)$$

Por seu lado, o [alcance máximo](#) obtém-se pela substituição da Eq. (24) na Eq. (19) resultando que

$$x_{\max} = x_0 + \frac{2v_0^2 \cos \theta_0 \sin \theta_0}{g} \quad (26)$$

A abordagem anteriormente apresentada por ser utilizada no estudo do [movimento de projéteis](#) em que a [resistência do ar é desprezável](#).



3.2. Cinemática de Trajetórias Aéreas

Exercício de aplicação:

Um projétil é disparado da extremidade de uma colina de 150 m de altura, com uma velocidade de 180 m/s e com uma inclinação de 30° , como se mostra na figura de baixo. Desprezando a resistência do ar, determine:

- (a) A **distância horizontal** entre a início do movimento e o ponto onde o projétil atinge o solo;
- (b) A **altura máxima** que o projétil alcança em relação ao solo.

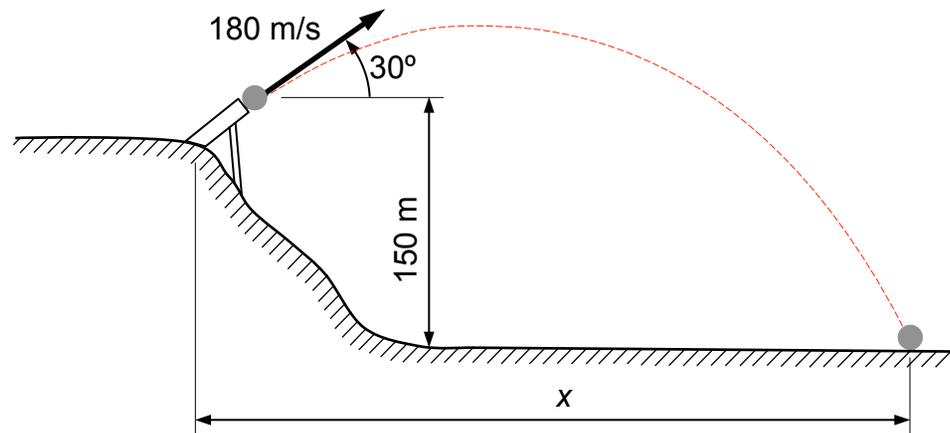


Fig. 48 Lançamento de um projétil.

Respostas:

- (a) 3102,4 m;
- (b) 563,3 m.



4.1. Lei Fundamental da Dinâmica

A lei fundamental da dinâmica diz que a força resultante do **conjunto das forças que atuam num corpo produz nele uma aceleração** com mesma direção e o mesmo sentido da força resultante, que é tanto maior quanto maior for a intensidade da força resultante.

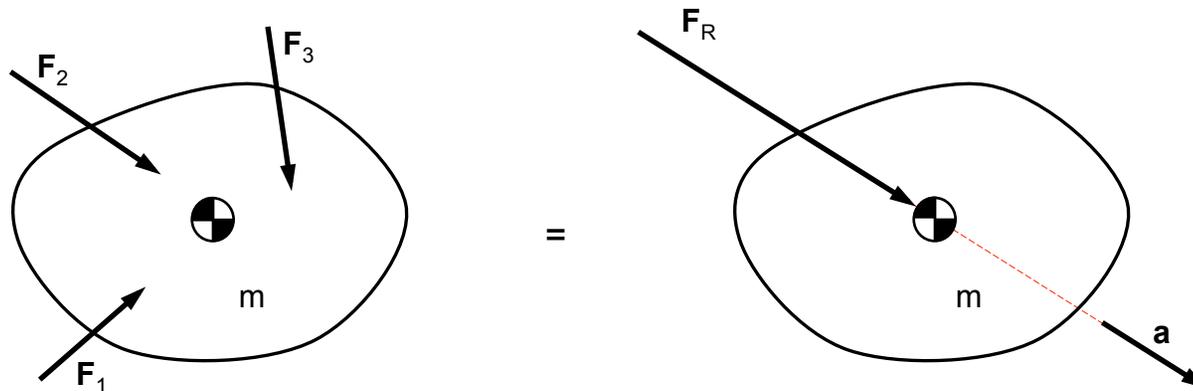


Fig. 49 Representação da lei fundamental da dinâmica.

Matematicamente, a equação gráfica da figura de cima pode ser escrita da seguinte forma

$$\sum F = F_R = ma \quad (27)$$

a qual traduz **a segunda lei de Newton**. O **Princípio de D'Alembert** (1717-1783) estabelece que o somatório das forças exteriores que atuam no sistema, conjuntamente com as forças de inércia (ma) formam um sistema de forças em equilíbrio. Este **equilíbrio dinâmico** pode ser escrito como

$$\sum F - ma = 0 \quad (28)$$



4.1. Lei Fundamental da Dinâmica

De modo análogo, para o [movimento de rotação](#) pode escrever-se a seguinte equação do movimento

$$\sum M = I\alpha \quad (29)$$

em que M representa o momento [Nm], I é o momento mássico de inércia [kgm²] e α é a aceleração angular [rad/s²]. A expressão (29) traduz a [equação de Euler](#).

Assim, no caso mais geral do [movimento plano de um corpo não constrangido](#) tem-se que

$$\sum F_x = ma_x \quad (30)$$

$$\sum F_y = ma_y \quad (31)$$

$$\sum M_z = I\alpha \quad (32)$$

As expressões (30)-(32) representam as [equações de Newton-Euler](#) ou também denominadas equações do [movimento de translação e de rotação](#).

Uma abordagem geral e sistemática que permite efetuar a análise [dinâmica de sistemas mecânicos de corpos constrangidos](#) foi desenvolvida por [Lagrange](#) (1736-1813).

Contudo, foi já em pleno século XX que se desenvolveram os primeiros [programas computacionais](#) especialmente dedicados à análise dinâmica de sistemas multicorpo constrangidos ([e.g. Working Model](#))



4.2. Análise Dinâmica de Projéteis

Na sua forma mais geral, a equação que rege a queda de um corpo é dada pela segunda lei de Newton

$$\sum F = ma \quad (33)$$

em que são incluídas todas as forças que atuam no corpo, isto é, a **força gravítica** e a **força do vento** ou de resistência do ar.

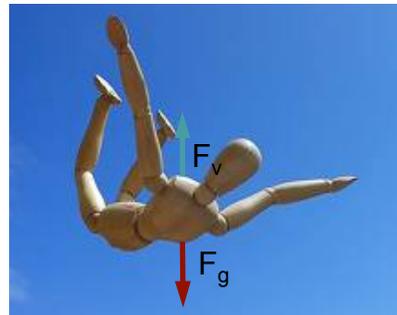


Fig. 50 Queda de um corpo livre.

A Eq. (33) pode também ser escrita da seguinte forma

$$ma = \sum F \Rightarrow a = \frac{\sum F}{m} \quad (34)$$

em que m é massa do corpo, dada pelo produto da massa específica pelo volume.



4.2. Análise Dinâmica de Projéteis

As equações (33) e (34) referem-se, respectivamente à [dinâmica inversa](#) e [dinâmica direta](#).

[Dinâmica inversa](#): determinação da forças do sistema com base no [conhecimento da cinemática](#) do sistema e nas propriedades inerciais dos corpos.

[Dinâmica direta](#): determinação das características cinemáticas do movimento do sistema com base no [conhecimento das forças](#) que atuam no sistema.

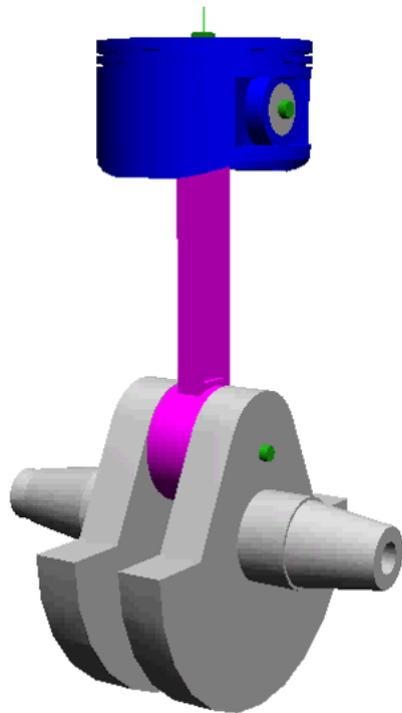


Fig. 51 Dinâmica inversa.

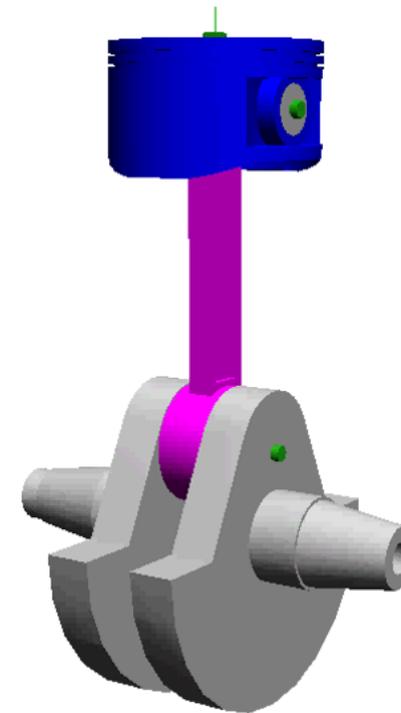


Fig. 52 Dinâmica direta.



4.2. Análise Dinâmica de Projéteis

A resolução das equações movimento de um projétil pode ser resumida nos seguintes procedimentos:

1. **Definir as condições iniciais** para as posições e as velocidades, o tempo inicial, o tempo final e incremento do tempo, ou seja, s_0 , v_0 , t_0 , t_{final} e Δt ;
2. **Determinar as forças** que atuam no sistema, isto é, força da gravidade (F_g) e força do vento (F_v);
3. **Calcular as acelerações** resolvendo a Eq. (34);
4. **Integrar as acelerações e velocidades** para obter, respetivamente, as velocidades e as posições, utilizando, por exemplo, o método da **integração numérica de Euler**,

$$v_{t+\Delta t} = v_t + a_t \Delta t \quad (35)$$

$$s_{t+\Delta t} = s_t + v_t \Delta t \quad (36)$$

5. **Atualizar as variáveis de estado**, voltar ao passo 2 e prosseguir a análise até se atingir o tempo final da simulação.

Estes passos podem facilmente serem implementados em [Excel](#) ou [Matlab](#).



4.3. Força Gravítica

Um corpo está sujeito a forças gravíticas exercidas por todos os corpos que o rodeiam.

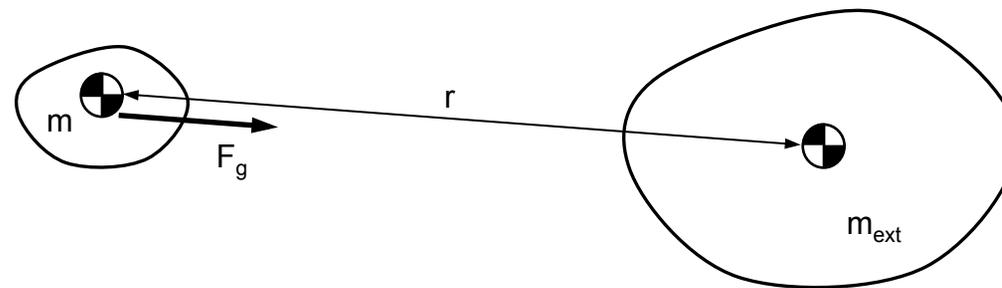


Fig. 53 Força gravítica exercida sobre um corpo de massa m pelo corpo exterior de massa m_{ext} .

De acordo com a lei da gravitação universal de Newton tem-se que

$$F_g = G \frac{m m_{ext}}{r^2} \quad (37)$$

em que G é a constante gravitacional universal ($G=6,673 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$), m é a massa do corpo dado [kg], m_{ext} é a massa do corpo exterior [kg] e r representa a distância entre os corpos [m].

De seguida apresentam-se as forças gravíticas exercidas sobre um homem de 70 kg:

Corpo de 1000 kg a uma distância de 2 m: $F_g = 1,17 \mu\text{N}$;

Lua: $F_g = 2,31 \text{ mN}$;

Sol: $F_g = 0,41 \text{ N}$;

Terra: $F_g = 686,70 \text{ N}$.



4.3. Força Gravítica

A força gravítica exercida pela Terra denomina-se de **peso** e é dada por

$$F_g = mg \quad (38)$$

em que

$$g = G \frac{m_{Terra}}{r^2} \quad (39)$$

Para $m_{Terra} = 5,976 \times 10^{24}$ kg e $r_{Terra} = 6371$ km obtém-se o valor absoluto de $g = 9,824$ m/s.

Contudo, a **rotação da Terra** faz com que a aceleração seja ligeiramente inferior ao valor absoluto. Assim, a **fórmula internacional da gravidade** é dada por

$$g = 9,807 \times (1 + 0,0052884 \sin^2 \gamma + 0,0000059 \sin^2 2\gamma) \quad (40)$$

em que γ representa a latitude. O valor da aceleração da gravidade depende, portanto, da localização do corpo:

Equador: 9,78031 m/s²;

Lisboa: 9,80054 m/s²;

Polo norte: 9,83232 m/s².

O **valor padrão** da aceleração gravítica é igual a **9,80665 m/s²**.



4.3. Força do Vento

O **vento** é o ar em movimento. A **aerodinâmica** é a área da Mecânica dos Fluidos que estuda o movimento do ar e a força exercida em objetos.

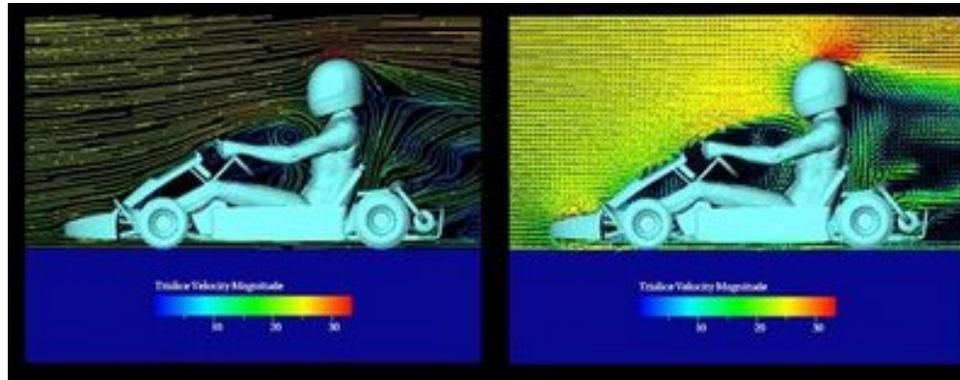


Fig. 54 Escoamento do ar sobre um piloto de *kart*.

A força aerodinâmica do vento é uma **força superficial** que é exercida pelo ar sobre os corpos, a qual pode ser escrita da seguinte forma

$$F_v = \frac{1}{2} \rho v^2 A c_f \quad (41)$$

em que

ρ é a massa específica do ar ($\approx 1,16 \text{ kg/m}^3$);

v é a velocidade do vento [m/s];

A é a área frontal efetiva ou projetada [m^2];

c_f é um coeficiente de forma (coeficiente de resistência aerodinâmica).



4.3. Força do Vento

O **coeficiente de resistência aerodinâmica** depende da **geometria** do objeto e do **regime de escoamento** do ar (laminar ou turbulento).

O coeficiente de resistência aerodinâmica pode ser determinado **numérica ou experimentalmente**.

De seguida apresentam-se alguns valores de coeficiente de resistência aerodinâmica para diferentes objetos:



Golfinho: 0,0036



Boeing 747: 0,031



Esfera lisa: 0,1



Toyota Pirus: 0,26



Pássaro: 0,4



Ford T: 0,8



Camião: 0,9



Pessoa de pé: 1,2



Saltador de esqui: 1,3



Empire State Building: 1,4

Fig. 55 Valores de coeficiente de resistência aerodinâmica para diferentes objetos.



5.1. Queda de Corpos na Atmosfera Terrestre

Um corpo em queda livre na atmosfera terrestre fica sujeito à força gravítica a uma força de resistência aerodinâmica, como se ilustra da figure seguinte.

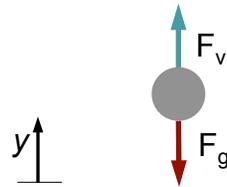


Fig. 56 Diagrama do corpo livre de uma esfera em queda livre na atmosfera terrestre.

Aplicando a segunda lei da Newton ao diagrama do corpo livre de cima tem-se que

$$F_v - F_g = -ma_y \quad (42)$$

em que a força gravítica é considerada constante, ao passo que a força do vento aumenta com o aumento da velocidade de queda.

Assim, na queda dos corpos na atmosfera terrestre podem distinguir-se duas fases:

- Numa primeira fase, o corpo descreve um movimento com velocidade crescente uma vez que $F_g > F_v$;
- Na segunda fase, a força do vento equilibra a força gravítica, pelo que o corpo cai com velocidade constante.



5.1. Queda de Corpos na Atmosfera Terrestre

Na situação de **equilíbrio de forças** tem-se que

$$F_v - F_g = 0 \quad (43)$$

Substituindo as expressões anteriormente apresentadas, pode-se calcular a **velocidade máxima de queda**

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_{ar} A c_f}} \quad (44)$$

Da análise da Eq. (44) pode concluir-se que a velocidade máxima de queda

- **Aumenta** com a **massa do corpo**;
- **Aumenta** com a **diminuição do coeficiente** de resistência aerodinâmica do corpo;
- **Aumenta** com a **diminuição da área exposta** ao vento.

Na queda de corpos na atmosfera terrestre observa-se que a aceleração é variável e decrescente. No **vácuo não há resistência do ar**, pelo que os objetos sujeitos à atração gravítica da Terra caem com aceleração constante de $9,81 \text{ m/s}^2$.

Em agosto de 1971, o **astronauta norte-americano David Scott**, na missão Apollo 15 à Lua, demonstrou experimentalmente que um **martelo e uma pena chegam ao mesmo tempo à superfície lunar**.

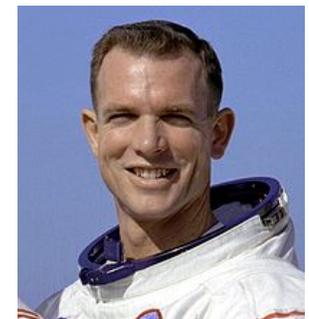


Fig. 57 David Scott



5.1. Queda de Corpos na Atmosfera Terrestre

Para um **paraquedista de 90 kg** de massa e A_{c_f} igual a $0,836 \text{ m}^2$ verifica-se que a velocidade de queda é dada por:

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 90 \times 9,81}{1,16 \times 0,836}} = 42,7 \text{ m / s} = 154 \text{ km / h}$$

A velocidade do paraquedista **converge assintoticamente para este valor** e teoricamente nunca o atinge.

Pode verificar-se que para uma **altura de queda inferior a 30 m**, o efeito da resistência do ar sobre um ser humano pode ser desprezado, pois a sua influência é **inferior a 10%**.

Pode também verificar-se que **quando a resistência aerodinâmica é relevante, objetos mais pesados caem mais rapidamente**, aliás como advogada Aristóteles.

Em agosto de **1960**, **Joseph Kittinger** estabeleceu o recorde de queda livre mais longa (**4 minutos e 36 segundos**) atingindo uma **velocidade máxima de 988 km/h** antes de abrir o paraquedas a cerca de 5500 m. Kittinger saltou de um balão de hélio a uma altitude de **31300 m**.

Em outubro de 2012, o austríaco **Felix Baumgartner** saltou a **39068 m** de altitude e atingiu uma velocidade de **1341,9 km/h** (1,24 vezes a velocidade do som), tendo a queda demorado cerca de 15 minutos, dos quais 4 minutos e 20 segundos em queda livre.



Fig. 58 Kittinger e Baumgartner



5.2. Movimento de Projéteis com Resistência Aerodinâmica

A figura seguinte ilustra o [diagrama do corpo livre](#) de uma posição genérica do movimento de um projétil.

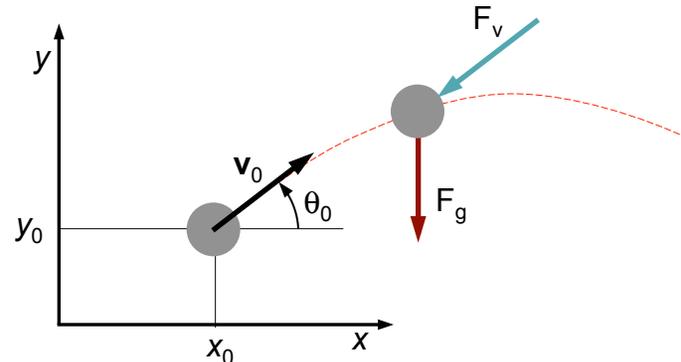


Fig. 59 Diagrama do corpo livre de um projétil

Aplicando a [segunda lei de Newton](#) do movimento nas direções x e y obtém-se que

$$ma_x = -F_{v_x} \quad (45)$$

$$ma_y = -F_g - F_{v_y} \quad (46)$$

em que a [força do vento](#) e a [força gravítica](#) são dadas pelas equações (38) e (41), respetivamente. As Eqs. (45) e (46) podem ser resolvidas para a_x e a_y resultando em

$$a_x = -\frac{\rho_{ar} A c_f \cos \theta}{2m} v^2 \quad (47)$$

$$a_y = -g - \frac{\rho_{ar} A c_f \sin \theta}{2m} v^2 \quad (48)$$



5.2. Movimento de Projéteis com Resistência Aerodinâmica

A análise dinâmica do movimento de um projétil pode ser efetuada de acordo com os seguintes passos:

1. Estabelecer as propriedades do projétil, isto é, m , A e c_f ;
2. Definir $t_0=0$, x_0 , y_0 , v_0 e θ_0 ;
3. Calcular $\theta=\text{atan}(v_y/v_x)$;
4. Determinar as componentes da aceleração a_x e a_y usando as Eqs. (47) e (48);
5. Obter as componentes da velocidade:

$$v_{x_{t+\Delta t}} = v_{x_t} + a_{x_t} \Delta t$$

$$v_{y_{t+\Delta t}} = v_{y_t} + a_{y_t} \Delta t$$

6. Obter as componentes cartesianas da posição:

$$s_{x_{t+\Delta t}} = s_{x_t} + v_{x_t} \Delta t$$

$$s_{y_{t+\Delta t}} = s_{y_t} + v_{y_t} \Delta t$$

7. Incrementar o tempo ($t=t+\Delta t$), voltar ao passo 3 repetindo o procedimento até ao fim da simulação.



5.2. Movimento de Projéteis com Resistência Aerodinâmica

Estude a trajetória de uma bola de pingue-pongue com as seguintes características:

- **Material:** Acetato de celulose (termoplástico);
- **Massa:** 2,74 gramas;
- **Diâmetro:** 40 mm;
- **Coefficiente de resistência aerodinâmica:** 0,445;
- **Coefficiente de restituição:** 0,89-0,92;
- **Lançamento** a 45° com uma **velocidade** de 25 km/h.

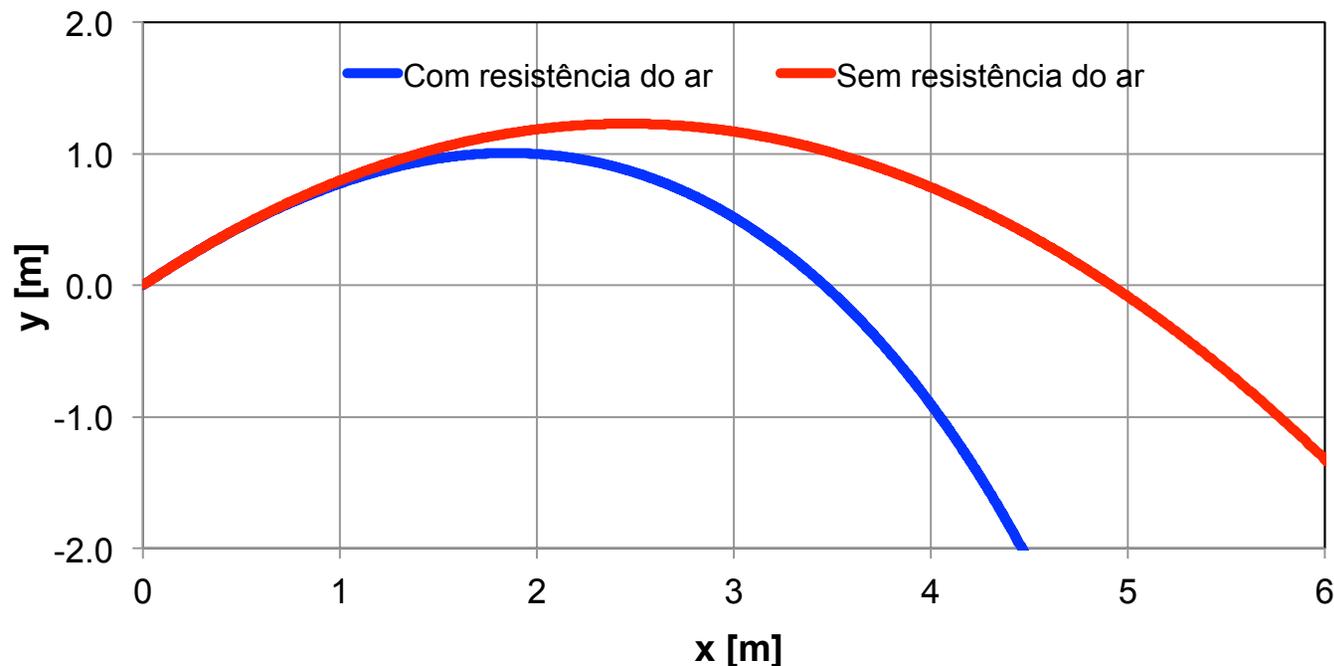


Fig. 60 Trajetória de uma bola de pingue-pongue com e sem resistência do ar.



Lista de Principais Contributos para o Estudo do Lançamento de Projéteis

Aristóteles: a força é externa e provém do meio (teoria antiperístase).

Hiparco, Filipono e Avempace: a força é interna, transmitida e armazenada no projétil e autoextingue-se.

Avicena: a força extingue-se por causa do meio.

Buridan: teoria do ímpeto, a força diminuir por ação da gravidade e resistência do meio.

Alberto da Saxónia: descreve o movimento de projéteis em 3 fases distintas.

Tartaglia: o movimento de projéteis dá-se segundo trajetórias curvas.

Galileu: princípio da independência do movimento.

Newton: lei fundamental da dinâmica $ma=F$.



Fig. 61 Queda livre um martelo e de uma pena na superfície lunar.



Lista de Referências Bibliográficas Consultadas

Antunes, F., 2012, [Mecânica aplicada: Uma abordagem prática](#). Lidel.

Flores, P., 2012, [Análise cinemática e dinâmica de mecanismos: Exercícios resolvidos e propostos](#). Publindústria.

Flores, P., Claro, J.C.P., 2007, [Cinemática de mecanismos](#). Almedina.

French, R.M., 2006, [Part 4: Dropping a ping-pong ball](#). Experimental Techniques, 59-60.

Greenwood, D.T., 1965, [Principles of dynamics](#). Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

ITTF Technical Leaflet T3: [The Ball](#). (disponível *online* 2013)

Jimoyiannis, A., Komis, V., 2001, [Computer simulations in physics teaching and learning: a case study on students' understanding of trajectory motion](#). Computers and Education, 36, 318-204.

Johnston, E.R., Beer, F.P., 1991, [Mecânica vetorial para engenheiros: Cinemática e dinâmica](#). McGraw Hill, São Paulo.

La Rocca, P., Rigi, F., 2009, [Projectile motion with a drag force: were the Medievals right after all?](#) Physics Education, 44(4), 398-402.

Nikraves, P.E., 1988, [Computer-aided analysis of mechanical systems](#). Prentice Hall, New Jersey.

Prescott, A.E., 2004, [Student understanding and learning about projectile motion in senior high school](#). PhD Thesis, Macquarie University, Australia.



Lista de Principais Termos Utilizados

Aceleração – Taxa de variação da velocidade por unidade de tempo.

Antiperístase – Circunstância que faz sobressair uma qualidade por influência doutra oposta.

Centro de gravidade – Ponto de um corpo no qual atua a força resultante devido à ação de um campo gravítico. Se este for uniforme, o centro de gravidade coincide com o centro de massa.

Cinemática – Disciplina da Mecânica que onde se estudam as características do movimento independentemente das causas que o provocam.

Deslocamento – Trajetória contínua descrita por um ponto em movimento relativamente a um referencial.

Diagrama do corpo livre – Esquema do corpo isolado do sistema no qual se representam todas as forças que nele atuam.

Dinâmica – Disciplina da Mecânica onde se estudam as leis dos movimentos dos corpos sujeitos à ação de forças e/ou momentos.

Força – Grandeza física que dá a media quantitativa da interação mecânica dos corpos.

Impulso – Conceito aplicado a uma força que atua durante um intervalo de tempo muito curto.

Massa – Quantidade de matéria que existe num dado corpo.

Momento – Grandeza que mede o efeito rotativo da força em torno de um eixo.

Movimento – Variação temporal da posição relativa dos corpos no espaço.

Peso – Intensidade da força que um corpo em repouso, situado num campo gravítico, exerce sobre o apoio que o impede de cair no sentido de atuação do campo gravítico.

Posição – Local adquirido por um dado corpo após ter efetuado um deslocamento.

Velocidade – Taxa de variação da posição com o tempo.