Universidade do Minho
Instituto de Educação

Paulo Duarte Bastos Gil

A história da matemática no fomento de uma cultura de argumentação em sala de aula

Novembro de 2012

A história da matemática no fomento de uma cultura de argumentação em sala de aula
Paulo Duarte Bastos Gil
UMinho|2012

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Paulo Duarte Bastos Gil

A história da matemática no fomento de uma cultura de argumentação em sala de aula

Tese de Doutoramento
Doutoramento em Ciências da Educação
Especialidade de Educação Matemática

Trabalho realizado sob a orientação da
Doutora Maria Helena Martinho
e do
Doutor Carlos Correia de Sá

Novembro de 2012

Resumo

Nesta investigação, explora-se e analisa-se a integração de tarefas do âmbito da história da matemática como forma de promoção de uma cultura de argumentação matemática em contexto de sala de aula.

Este estudo em educação matemática encontra um suporte teórico em duas áreas distintas: história da matemática e argumentação matemática. Na primeira, procuram-se evidenciar as razões e os benefícios da integração da história da matemática em contexto de sala de aula, tendo em consideração os argumentos apontados por diversos matemáticos e investigadores. Na segunda, procede-se a uma análise do papel da argumentação na educação matemática ao nível da classificação de argumentos, formas de argumentação e tipos de estrutura de argumentação, para além de se proceder uma abordagem histórica sobre o papel da argumentação em matemática.

A metodologia adotada neste estudo, de caráter qualitativo, insere-se no paradigma interpretativo estruturando-se num estudo de caso, uma vez que se pretende analisar o modo como a integração de tarefas do âmbito da história da matemática, em contexto de sala de aula, influencia a capacidade de raciocínio e argumentação dos alunos. Os alunos, pertencentes a uma mesma turma, integraram esta investigação ao longo de dois anos letivos consecutivos, de forma a enquadrar o estudo no contexto educativo dos oitavo e nono anos de escolaridade. Este estudo baseou-se na observação do trabalho realizado pelos alunos, suportada pelas notas de campo do investigador, bem como por gravações de áudio e vídeo das aulas e dos documentos produzidos pelos alunos.

Através desta investigação foi possível identificar na resolução das diferentes tarefas propostas diferentes tipos de argumentos, formas simples e complexas de argumentação e diferentes estruturas de argumentação. Nesta experiência, a história da matemática revelou-se uma ferramenta potenciadora da aprendizagem matemática, uma vez que permitiu não só a aprendizagem e aplicação de determinados conceitos, mas também o desenvolvimento da capacidade dos alunos em expressar as suas ideias e em interpretar e compreender as ideias e opiniões que lhes foram sendo apresentadas, participando, assim, de forma construtiva em discussões argumentativas sobre ideias, processos e resultados matemáticos.

Palavras-chave:
história da matemática, argumentação matemática

Abstract

This research explores and analyzes aspects related to the integration of tasks within the history of mathematics as a way of promoting a culture of mathematical reasoning in the classroom's context.

This study in mathematics education finds a theoretical support in two distinct areas: history of mathematics and mathematical reasoning. As far as the first is concerned, the highlight of the reasons and benefits of integrating the history of mathematics in the context of the classroom is searched, taking into account the arguments raised by several mathematicians and researchers. In the second, in addition to a historical approach on the role of argumentation in mathematics, a special attention to the role of argumentation in mathematics education is assigned, in particular, on the prospects of some mathematics educators on this issue at the level of arguments classification, forms of reasoning and argumentation structure types.

The methodology adopted in this qualitative study, which falls within the interpretative paradigm, is structured in a case study, since it aims to examine how the integration of tasks within the history of mathematics in the context of classroom influences the ability of reasoning and argumentation of the pupils. Pupils belonging to the same class were included in this study over two consecutive academic years, in order to place the study in the educational context of the eighth and ninth grades. This study was based on observation of the work done by the pupils (through records, field notes, made by the investigator), audio and video in the context of the classroom and analysis of documents produced by the pupils.

Through this research, the identification of different types of arguments, simple and complex forms of argumentation and different argumentation structures on the several tasks proposed resolution, was made possible. In this experiment, the history of mathematics proved to be a boosting-tool for learning mathematics, since it allowed both the learning and application of certain concepts, but also the development of pupils' ability to express their ideas and to interpret and understand the ideas and opinions being presented to them and participating

constructively in argumentative discussions about ideas, processes and mathematical results.

Keywords:
history of mathematics, mathematical argumentation

Para a minha mãe

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho de tese de doutoramento, gostaria de deixar expresso o meu sincero agradecimento a todos aqueles que me ajudaram, de alguma forma, ao longo deste trabalho.

Assim, começaria por agradecer à Professora Maria Helena Martinho toda a disponibilidade, incentivo, apoio, orientação científica e desafios colocados no âmbito da Educação Matemática.

Ao Professor Carlos Correia de Sá pela disponibilidade, incentivo, sugestões, colaboração crítica e pela orientação científica prestada na elaboração da presente tese.

A todos os alunos envolvidos nesta investigação pelo simples facto de terem tornado possível a realização deste trabalho.

À Professora Rosário Pinto pela amizade e pelas palavras que impeliram a minha candidatura a este doutoramento.

À minha mãe pela permanente presença, pelo constante encorajamento e inigualável compreensão.

Ao Jacinto pela constante dedicação, pelo estímulo e pela amizade.

À Fátima pela amizade, sugestões críticas, colaboração e auxílios profissionais.

Ao Luís pela amizade e pela prestável colaboração em termos de conhecimentos técnicos disponibilizados na finalização da tese.

Ao Rui pela ajuda prestada na procura de bibliografia e pela partilha de preciosos conhecimentos informáticos.

Ao Eduardo e à Matilde pela alegria com que, como afilhados, preenchiam os tão importantes momentos de convívio e de refúgio desta exigente jornada.

Agradeço também à Luísa e à D. Balbina a amizade e o apoio incondicional.

Índice

Índice de figuras

Índice de tabelas

Introdução

O presente estudo tem por objetivo compreender a forma como a integração de um conjunto de tarefas do âmbito da história da matemática pode fomentar o desenvolvimento da argumentação em contexto de sala de aula.

A motivação para o desenvolvimento deste estudo decorre do interesse, em educação matemática, pela integração da história da matemática em contexto de sala de aula e da importância que é dada à organização, sistematização e apresentação de resultados, por parte dos alunos, nomeadamente, na formulação e teste de conjeturas durante uma argumentação. Torna-se relevante envolver os alunos em situações educativas que os incentivem a expressar as suas ideias, a interpretar e a compreender as opiniões que lhes são apresentadas e a participar de forma construtiva em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos, trocando impressões entre si, esclarecendo dúvidas e partilhando informações.

Uma vez que o raciocínio matemático envolve a construção de cadeias argumentativas que se iniciam através da simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem, progressivamente, para argumentações mais complexas, recorrendo à linguagem dos números, da geometria e da álgebra, a história da matemática pode ter um papel muito útil na criação de contextos que permitam aos alunos pensar e discutir matematicamente.

1.1. Objetivos e questões do estudo

Em Portugal, a Lei de Bases do Sistema Educativo, aprovada em outubro de 1986, definiu princípios e orientações básicas para uma reorganização dos planos curriculares dos ensinos básico e secundário. Essa reorganização contemplou não só a organização dos temas e respetivo desenvolvimento, como também indicações metodológicas, nas quais se concede à história da matemática um lugar no ensino da matemática. Apesar destas orientações metodológicas apontarem de forma explícita para a abordagem da história da matemática, o recurso à história não é inovador no ensino da matemática em Portugal. De acordo com Estrada (1993), na Reforma das Universidades, promovida em 1772 por Marquês de Pombal, aconselhava-se a que o ensino das Ciências fosse associado ao da sua história. E já no século XX, na década de quarenta, esta investigadora refere que alguns livros de matemática para o ensino secundário continham notas históricas, mesmo sem a recomendação expressa dos programas.

Tal como é referido no Currículo Nacional, o contacto dos alunos com aspetos da história da matemática permite-lhes reconhecer e valorizar o papel da matemática no desenvolvimento da ciência e da tecnologia. Esta orientação é retomada no reajustamento do atual Programa de Matemática do ensino básico, em que se pretende que a integração da história da matemática, em contexto de sala de aula, proporcione uma perspetiva dinâmica sobre a matemática e o seu papel na sociedade. Entre outros, aponta-se a relação da matemática com os grandes problemas científicos e técnicos, a evolução da notação, representação e conceitos, sobre o contributo das diversas civilizações para o desenvolvimento desta ciência e o contributo dado por esta ciência para o progresso da sociedade (ME, 2007).

Alguns manuais escolares, desde os anos noventa até aos nossos dias, têm contemplado na sua estrutura referências à história da matemática, desde a biografia de matemáticos, à contextualização dos conteúdos do tema em estudo na própria história da matemática, e têm promovido, por vezes, algumas tarefas relacionadas com esta área. Contudo, a maioria limita-se a contemplar apenas referências históricas.

A formação inicial de professores, nomeadamente nas licenciaturas em Matemática (via ensino), integram, atualmente, nos seus planos de estudo uma disciplina destinada ao estudo da História da Matemática. No entanto, é apenas uma disciplina semestral, muitas vezes de caráter opcional, o que de certo modo reduz a sua importância no contexto da formação inicial de professores. A acompanhar esta formação inicial, a Sociedade Portuguesa de Matemática, desde

1988, promove anualmente o Seminário Nacional de História da Matemática e a Associação de Professores de Matemática, na sua revista *Educação Matemática* dedica alguns artigos a esta temática, havendo um grupo de trabalho relacionado com esta área do conhecimento matemático (Grupo de Trabalho de História e Ensino da Matemática).

Existe, assim, entre a comunidade matemática e de educação matemática uma forte consciencialização da importância da integração da história da matemática no ensino desta disciplina. No entanto, a bibliografia existente em Portugal dedicada a esta área temática é reduzida, sendo ainda mais escassa a promoção de tarefas do âmbito da história da matemática.

É possível reconhecer a importância dada por diferentes investigadores e organizações ao papel da história no ensino da matemática. Contudo, apesar desta manifestação de interesse e de utilidade educativa, cabe aos docentes de matemática proceder, em contexto de sala de aula, a esta integração.

Mediante esta situação, questionamo-nos sobre quais as dificuldades dos alunos quando realizam tarefas do âmbito da história da matemática e, consequentemente, sobre o tipo de tarefas a propor aos alunos, por forma a que a integração da história da matemática seja efetiva e significativa no processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Deste modo, não só está em questão a qualidade e pertinência das tarefas relacionadas com a história da matemática a aplicar, mas também a sua rentabilização para a aprendizagem matemática, nomeadamente, no desenvolvimento das capacidades transversais, preconizadas no Currículo Nacional, em particular, ao nível da argumentação matemática em contexto de sala de aula.

Associada à comunicação matemática, uma vez que envolve a partilha de ideias, a descrição de estratégias e procedimentos matemáticos na justificação de resultados e a interpretação e análise das ideias dos outros, a argumentação surge como um dos aspetos chave no desenvolvimento do raciocínio matemático. De facto, ao serem desafiados a pensar e a raciocinar sobre a matemática e a expressarem as ideias daí resultantes, os alunos aprendem a ser claros e convincentes (NCTM, 2000). Ou seja, desenvolver e discutir argumentos matemáticos e formular e investigar conjeturas matemáticas usando conceitos, representações e procedimentos matemáticos permite aos alunos serem capazes de justificar os raciocínios que elaboram e as conclusões a que chegam.

Aprender a justificar as suas afirmações, a analisar e a questionar os métodos e as ideias dos outros, de forma a determinarem os seus pontos fortes e as suas limitações, permite aos alunos aprenderem a tornarem-se críticos no contexto matemático. Aulas em que os alunos são encorajados a apresentar as suas ideias e em que há um contributo de todos, através da avaliação das ideias de uns e de outros, proporcionam ambientes ricos e estimulantes para a aprendizagem e para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Nesse sentido, o raciocínio matemático deverá constituir uma parte consistente das experiências matemáticas dos alunos, podendo ser desenvolvido através de uma diversidade de contextos, nomeadamente, através da argumentação matemática.

Ao pretender-se nesta investigação implementar, em contexto de sala de aula, um conjunto de tarefas do âmbito da história da matemática que permitam o desenvolvimento da argumentação matemática, surge a questão da pertinência na escolha dessas mesmas tarefas. Na presente investigação, a escolha das tarefas não só teve em consideração os conteúdos programáticos vigentes, mas também a contextualização histórica desses mesmos conteúdos. Nesse sentido, esta investigação contempla uma secção em que se procede a uma abordagem de alguns tópicos do âmbito da história da geometria e da álgebra, na qual se pretende evidenciar a evolução histórica de determinados conceitos que se encontram presentes nas tarefas a implementar. Com a inclusão desta secção, pretende-se não só apresentar o processo evolutivo de alguns dos conceitos abordados, mas também destacar o útil recurso que a história da matemática pode ter no entendimento do processo de formação do pensamento matemático dos alunos, nomeadamente, ao nível da argumentação matemática. Conhecer a evolução histórica de conceitos e, consequentemente, conhecer historicamente o trabalho desenvolvido pelos próprios matemáticos para ultrapassar alguns obstáculos, permite ao professor um melhor entendimento sobre certas dificuldades dos alunos e, naturalmente, uma maior consciencialização na escolha e preparação de estratégias de ensino. Ou seja, no caso desta investigação, esta consciencialização permite explorar o próprio papel da história da matemática no esboço das tarefas a implementar em sala de aula.

A metodologia seguida centra-se, assim, na estruturação de um conjunto de tarefas do âmbito da história da matemática, tendo em conta os conteúdos programáticos vigentes nos 8.° e 9.° anos de escolaridade e na aplicação dessas mesmas tarefas a uma mesma turma nesses anos de escolaridade. A metodologia centra-se, ainda, na análise da forma como esses alunos se envolveram na concretização das tarefas propostas e do modo como a história da matemática pode fomentar tanto a criação de uma cultura de argumentação matemática em contexto de sala de aula, como prever e interpretar as dificuldades matemáticas dos alunos.

Nesta investigação, exploram-se, discutem-se e analisam-se aspetos relacionados com a integração de tarefas do âmbito da história da matemática como forma de promoção de uma cultura de argumentação matemática, em contexto de sala de aula. Assim, além da elaboração das tarefas e da respetiva aplicação em contexto de sala de aula, este estudo é ainda suportado por uma fundamentação teórica sobre o papel da história da matemática no ensino da matemática, nomeadamente, sobre a rentabilização da história da matemática na constituição de uma comunidade de discurso matemático, na qual está patente a argumentação matemática. Ainda no âmbito desta investigação, pretende-se conhecer as reações e opiniões dos alunos quando confrontados com tarefas de cariz histórico, bem como as dificuldades/constrangimentos sentidas pelos mesmos na realização deste tipo de tarefas.

Conhecer as vicissitudes da integração da história da matemática em contexto de sala de aula, poderá ajudar-nos não só a refletir sobre a importância desta problemática de integração da história, mas também a delinear algumas orientações que promovam e possibilitem a concretização desta integração, facto que implica um apoio à prática letiva e, consequentemente, uma mais valia para o processo de ensino e aprendizagem. Segundo Fauvel e Maanen (2000), a história da matemática poderá permitir a descoberta e a exploração de novos caminhos de ensino e aprendizagem, provendo a educação matemática de novas ferramentas pedagógicas.

Com esta investigação pretende-se verificar não só de que modo a integração de tarefas do âmbito da história da matemática, em contexto de sala de aula, influencia a capacidade de argumentação dos alunos, mas também qual o desempenho e dificuldades destes, quando confrontados com esse tipo de tarefas.

O estudo sobre a integração de tarefas do âmbito da história da matemática com alunos de uma mesma turma nos 8.° e 9.° anos de escolaridade do ensino básico foi enquadrado pelas seguintes questões de investigação:

1) Quais os tipos de argumentos produzidos pelos alunos durante a realização de tarefas do âmbito da história da matemática?

2) Quais as formas de argumentação presentes nas interações discursivas realizadas pelos alunos durante a execução de tarefas do âmbito da história da matemática?

3) Quais os tipos de estruturas de argumentação presentes nas argumentações produzidas pelos alunos durante a realização de tarefas do âmbito da história da matemática?

4) Quais as dificuldades reveladas pelos alunos quando realizam tarefas do âmbito da história da matemática?

5) Como é que os alunos avaliam a realização de tarefas do âmbito da história da matemática?

1.2. Contexto do estudo

A história da matemática promove uma humanização do estudo da própria matemática, uma vez que a associa a pessoas, às necessidades, anseios e dificuldades por elas vivenciadas. Ao humanizar a matemática, a sua história remove alguma da mística muitas vezes associada ao estudo desta disciplina (Swetz, 1994). A matemática é um corpo de conhecimento cumulativo, muito dele criado há milhares de anos, sendo ainda válido nos nossos dias (Avital, 1995). Esta consciencialização de que o processo de criação matemático foi desenvolvido por diversas pessoas que, tal como nós e os nossos alunos, cometeram erros e, por vezes, embaraçaram-se na procura das soluções dos seus problemas, o que não os impediu de serem persistentes nessa descoberta, aponta para a importância de incorporar a história no ensino da matemática. A importância de associar a história ao ensino da matemática é ainda reforçada se se observar as discussões e controvérsias que, ao longo da história, surgiram na procura de soluções para diversos problemas. Essas discussões fizeram emergir não só os argumentos necessários para a justificação de determinadas conjeturas e raciocínios, estabelecendo a construção do conhecimento, mas também abriram novos caminhos para novas ideias e teorias. Esta perceção histórica do papel da argumentação no desenvolvimento do raciocínio e da prova e, consequentemente, na própria construção do conhecimento, permite destacar a história da matemática como um recurso plausível na criação de um contexto de argumentação em sala de aula.

Mais do que uma mera transmissão de factos, fornecer aos alunos uma perspetiva histórica da construção do conhecimento científico é um dos processos educativos mais valiosos (Grugnetti, 2000). A história estabelece, assim, uma lógica entre a definição do conceito matemático e a sua aplicação, ou de uma forma historicamente correta, entre a aplicação e a definição teórica de um conceito (Swetz, Fauvel, Bekke, Johansson & Katz, 1995). Esta perceção tem originado investigações e um amplo debate internacional, e nacional, sobre o papel da história da matemática na educação matemática, nomeadamente, sobre o papel da história da matemática na prevenção e interpretação das dificuldades matemáticas dos alunos e sua contribuição para as aprendizagens destes (Barbin et al., 2000). Esta perspetiva de integração da história da matemática em contexto de sala de aula, é partilhada por diversos investigadores. Estrada (1991) refere que a intenção desta inclusão não é ensinar história da matemática por si mesma, mas que o «(…) professor integre a história no ensino que ele faz da matemática.» (p. 55).

Uma das justificações para a integração da história da matemática em contexto da sala de aula está relacionada com a humanização da própria disciplina. Propor aos alunos tarefas com uma perspetiva histórica, permite que consciencializem que os assuntos que estão a abordar foram alvo de interesse e de estudo no passado, ou seja, que existiram mentes humanas que "gastaram" o seu tempo na resolução dos mesmos e que estes mesmos assuntos tanto surgiram em situações práticas do dia a dia, como resultaram da própria divagação criativa do pensamento humano. Para Silva (2001), esta humanização da matemática permite-a mostrar como ciência em construção e em interação com outras ciências. Este autor refere ainda que

> a informação sobre a génese e o percurso de um conceito ao longo dos tempos e a sua relação com o progresso da humanidade pode fomentar, ou aumentar, o interesse pelo tema em estudo, ao mesmo tempo que constitui uma fonte de cultura. (Silva, 2001, p. 12)

Fauvel (1997) e Struik (1997) também partilham esta perspetiva da humanização da Matemática com recurso à sua história. No entanto, estes investigadores elencaram outras razões que têm sido invocadas para o uso da história no ensino da matemática, que de seguida se destacam.

A motivação é uma das razões apontadas. Para estes autores, o recurso à história poderá aumentar nos alunos a motivação para aprender, uma vez que permitirá despertar o interesse e o entusiasmo pela matemática. Conhecer os obstáculos ao desenvolvimento sentidos no passado, ajuda os alunos a compreenderem as suas dificuldades. Os próprios alunos percebem que grandes matemáticos também as sentiram, o que não só, explicitamente, lhes apresenta o lado humano do processo de desenvolvimento da matemática, mas também os desafia à superação das suas próprias dificuldades.

Estes autores realçam, ainda, a importância da história da matemática na organização do currículo, bem como no próprio entendimento da evolução dos conceitos. Fauvel (1997) e Struik (1997) referem que o desenvolvimento histórico ajuda a ordenar a apresentação dos assuntos no currículo, uma vez que fornece um pano de fundo para se compreenderem as tendências no ensino da matemática no passado e no presente. Além disso, o uso da história da matemática permite mostrar aos alunos como os conceitos se desenvolveram e ajuda-os à sua compreensão, despoletando o desejo de saber como é que os conceitos matemáticos apareceram e se desenvolveram, permitindo ainda mudar a compreensão que estes têm da matemática. Para estes investigadores, o recurso à história da matemática possibilita ainda aos alunos comparar o antigo e o moderno valorizando, consequentemente, as técnicas modernas, o que proporciona oportunidades à realização de pesquisas. Estas próprias investigações poderão até ter, de acordo com estes autores, caráter interdisciplinar, uma vez que a integração da história no ensino da matemática, ajuda a desenvolver uma aproximação multicultural, ou seja, ajuda a compreender a nossa herança cultural, não só através das aplicações que a Matemática teve e ainda tem à Astronomia, Física e outras Ciências, mas também através da relação que teve e ainda tem com campos tão variados como a Arte, a Religião, a Filosofia e os Ofícios. Esta aproximação, na qual emerge o papel da matemática na sociedade, segundo estes investigadores, fornece a oportunidade de realização de trabalhos intercurriculares com outros professores ou disciplinas, isto é, oferece um campo de discussão comum com estudantes e professores de outras áreas do conhecimento.

Struik (1997), refere ainda que a história da matemática permite temperar o ensino com conversas e anedotas, proporcionando momentos mais descontraídos em contexto de sala de aula. No entanto, esta perspetiva suscita algumas reações por parte de alguns investigadores. Tanto Estrada (1991) como Gulikers e Blom (2001), salientam, respetivamente, que «(…) a perspetiva histórica, [em contexto de sala de aula], não pode ser dada somente recheando as aulas de umas quantas anedotas históricas.» (p. 55) e que é «(…) uma pobre contribuição como método de ensino (…)» (p. 229). Embora, possa ajudar a criar boa disposição e ambiente agradável à aprendizagem, é importante ter consciência que na história da matemática encontramos esclarecimentos para o significado de conceitos matemáticos, a construção das teorias matemáticas, o papel da intuição, o significado do rigor, do erro, da evidência e da demonstração (Estrada, 1991). Deste modo, ter resposta ou conhecimento histórico destas questões possibilita, aos professores, novas formas de abordagem em contexto de sala de aula, o que implica, no entanto, pesquisa e investigação sobre a evolução histórica de conceitos e teorias, bem como a discussão de estratégias e técnicas na própria implementação, em sala de aula, de material histórico.

Proporcionar aos alunos tarefas para resolverem, explorarem, investigarem e discutirem, de acordo com Abrantes (1989), é a ideia chave para que a aprendizagem da matemática constitua uma experiência positiva e significativa. Nesse sentido, não só se torna relevante a escolha da tarefa, como também a forma como é realizada a articulação dos diversos momentos de trabalho que naturalmente surgem na execução da própria tarefa.

De entre os vários momentos que surgem na execução de uma tarefa, segundo Ponte (2005), são os momentos de reflexão, discussão e análise crítica, posteriores à realização de uma atividade prática, que assumem um papel fundamental na aprendizagem dos alunos. De acordo com este investigador, os momentos de discussão em que os alunos apresentam o seu trabalho, dão a conhecer as suas conjeturas e conclusões, justificam os seus raciocínios e questionam os outros colegas, podem ser aproveitados pelo professor para procurar clarificar conceitos e procedimentos, avaliar o valor dos argumentos produzidos e estabelecer conexões dentro e fora da matemática, ou seja, «os momentos de discussão constituem, assim, oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento.» (Ponte 2005, p. 16).

De facto, e segundo Wood (1999), a investigação tem mostrado que a discussão em sala de aula é importante para o desenvolvimento das conceções matemáticas, sendo o processo de contradição e resolução fundamental para a transformação do pensamento, isto é, o desacordo é resolvido com recurso à argumentação. Este investigador aponta para um dos princípios da teoria de

Piaget, em que se considera a confusão cognitiva e a contradição da maior importância na transformação do pensamento.

Dentro da sala de aula ocorrem com frequência confusões e conflitos de ideias, em particular quando nestas se dá ênfase ao pensamento e raciocínio dos alunos (Wood, 1999). Este tipo de situações surgem, em sala de aula, quando o professor deixa de ter o papel de protagonista e os alunos passam a ter uma maior margem de participação e de intervenção. Ao proporcionar este tipo de envolvimento aos alunos, a discussão propicia a interação de diversos intervenientes que expõem ideias e perguntas uns aos outros (Ponte 2005). A este tipo de ambiente, Sherin (2002) chamou comunidade de discurso matemático, caraterizando-a por

> (…) ambientes de sala de aula em que os alunos se envolvem na apresentação e defesa das suas ideias através da argumentação, reagem e comentam contribuições dos colegas e em que a turma trabalha de modo a chegar a consensos sobre o significado de ideias matemáticas importantes. (Sherin, 2002, p. 94)

Ao construir e manter uma comunidade de discurso matemático está-se a construir uma cultura de argumentação (Boavida, 2005). Para esta investigadora, nessa construção não só está patente o envolvimento dos alunos em atividades de argumentação matemática, mas a negociação de normas de ação e interação de todos os intervenientes para que se favoreça a constituição e o desenvolvimento de uma comunidade de discurso matemático. Ponte (2005) refere que «(…) "aprender a conduzir discussões" é não só uma tarefa do professor, mas também uma aprendizagem coletiva a realizar por cada turma.» (p. 16). Constituir e manter uma comunidade de discurso matemático, com o objetivo de construir uma cultura de argumentação, não passa apenas pelo professor fazer emergir ideias dos alunos, mas por criar condições para poderem ocorrer conversações com as características indicadas (Boavida 2005).

A história da matemática pode, assim, ter um papel muito útil na educação matemática, nomeadamente, na criação de contextos propícios à introdução de conceitos matemáticos, mas também promotores da realização de tarefas que envolvam a resolução de problemas históricos e que possibilitem a confrontação de estratégias de resolução de forma a encorajar os estudantes a pensar (Fasanelli 2000). De acordo com Florence Fasanelli (2000), as soluções históricas permitem aos estudantes prosseguir caminhos simples de pensamento e desenvolvê-los de forma individual. Nessa medida, a mesma autora refere que os diferentes pontos de vista que surgem no contexto histórico, constituem oportunidade para os alunos desenvolverem a arte de discutir, de justificar as suas próprias opiniões e de apresentar os seus próprios raciocínios aos seus pares. Esta perspetiva é corroborada por outros autores. Tzanakis e Arcavi (2000) referem que os alunos envolvidos em tarefas relacionadas com a história da matemática não só crescem pessoalmente e ampliam conhecimentos associados ao seu desenvolvimento matemático, como também desenvolvem outras competências, como a capacidade de discutir, analisar e "falar sobre" matemática. Desta forma, os discursos apontados por estes autores realçam o papel da história da matemática como um veículo promotor do desenvolvimento da comunicação e argumentação matemática em contexto de sala de aula.

1.3. Abordagem metodológica

A presente investigação, inserida no paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1999; Goetz & LeCompte, 1984), estrutura-se a partir da aplicação de um conjunto de tarefas do âmbito da história da matemática por forma a analisar-se o modo como a integração dessas tarefas, em contexto de sala de aula, influencia a capacidade de raciocínio e argumentação dos alunos, procurando, assim, conhecer a realidade tal como ela é vista pelos próprios participantes (Ponte, 2006). Nesse sentido, tendo em conta os objetivos que este trabalho se propõe atingir, decidiu-se optar por uma investigação de caráter qualitativo. No âmbito da investigação qualitativa que se propõe realizar, optou-se ainda pelo estudo de caso, uma vez que se pretende analisar o modo como a integração de tarefas do âmbito da história da matemática, em contexto de sala de aula, influencia a capacidade de raciocínio e argumentação dos alunos de uma turma.

Neste estudo, participaram alunos e o respetivo professor de matemática de uma escola do Concelho de Penafiel. Os alunos, pertencentes a uma mesma turma, integraram esta investigação ao longo de dois anos letivos consecutivos, de forma a enquadrar o estudo no contexto educativo dos oitavo e nono anos de escolaridade. Nesse sentido, foram delineadas diferentes tarefas, sendo algumas organizadas em sequências de aulas.

Na recolha de dados existiu, assim, a preocupação de reunir um conjunto de informações válidas e diversificadas (Yin, 1989), o que originou a utilização de diferentes instrumentos de recolha de dados, nomeadamente, observação do trabalho realizado pelos alunos, suportada pelas notas de campo do investigador, bem como por gravações de áudio e vídeo das aulas e dos documentos produzidos pelos alunos.

Em relação à análise de dados, todo o material foi organizado e categorizado, tendo o desenvolvimento de categorias envolvido um olhar para as regularidades recorrentes nos dados (Merriam, 1988). O facto de serem usados diferentes instrumentos de recolha de dados permitiu fazer a triangulação dos dados. Através desta organização dos dados, emergiram padrões com vista à estabilização das categorias inerentes às temáticas resultantes das questões de investigação. Assim, a partir desta primeira seleção tornou-se possível identificar os extratos que fossem mais significativos e que ilustrassem melhor as perspetivas dos participantes sobre o fenómeno em estudo (Guerreiro, 2011), o que possibilitou a subdivisão de cada uma das categorias gerais em categorias mais finas de contornos mais estreitos. Enquadradas na temática estudada e na fundamentação teórica apresentada, as categorias e as subcategorias emergiram dos dados mediante um processo interpretativo. De acordo com Goetz e LeCompte (1984) e Fiorentini e Lorenzato, (2006) as categorias e as subcategorias permitem, assim, caracterizar a temática em estudo e analisar o próprio processo de investigação.

1.4. Estrutura

A presente investigação encontra-se estruturada em duas partes, a fundamentação teórica e o trabalho empírico. A fundamentação (primeira parte) é composta por quatro capítulos que se debruçam sobre as duas áreas de investigação que enquadram este estudo: a história da matemática e argumentação matemática. O primeiro capítulo (capítulo 2) aborda a importância da integração da história da matemática em contexto de sala de aula, focando as perspetivas vigentes sobre a importância da integração da história no ensino da matemática, o papel da história da matemática no currículo nacional, alguns dos constrangimentos e obstáculos apontados por diversos autores à integração da história da matemática em contexto de sala de aula, e por fim, aborda a questão da história da matemática no ensino da matemática, apontando razões e benefícios sobre essa mesma integração, apresentando-se ainda algumas formas de integração da história da matemática no ensino da matemática. O segundo capítulo (capítulo 3) aborda a questão da argumentação em matemática, procedendo a uma contextualização histórica da argumentação nesta disciplina. O terceiro capítulo (capítulo 4) aborda a questão da argumentação matemática, na educação matemática apontando não só correntes filosóficas que suportam os trabalhos de diversos educadores matemáticos nesta área como as próprias ideias e estudos desenvolvidos por esses educadores em torno desta temática. O último capítulo (capítulo 5) desta fundamentação teórica, aborda alguns tópicos da história da geometria e da álgebra que estão relacionados com as tarefas construídas e que foram aplicadas na presente investigação.

A segunda parte, que incorpora a componente empírica do estudo, contém dois capítulos. O primeiro (capítulo 6) apresenta e fundamenta a metodologia adotada. O seguinte (capítulo 7), o núcleo central deste trabalho, apresenta a análise dos dados recolhidos, terminando com uma análise cruzada das seis tarefas aplicadas. Por fim, no último (capítulo 8), são apresentadas as conclusões do estudo e apontadas sugestões para futuras investigações.

I. Fundamentação

2. Integrando a história da matemática em contexto de sala de aula

Sendo a Ciência uma atividade humana com uma história tão longa, passou necessariamente por muitas fases, muitas vicissitudes e muitas crises. Nesse sentido, os contextos em que as diferentes questões científicas foram colocadas e o modo de as exprimir foram sofrendo alterações ao longo dos séculos. O progresso da ciência surge, assim, como resultado de um trabalho edificado por diversos homens e mulheres, muitas vezes como consequência do esforço desenvolvido pelos seus antecessores.

Considerando este trabalho desenvolvido ao longo de séculos, diversos investigadores e professores, de diferentes áreas de conhecimento e de diversos graus de ensino, têm realçado a importância de integrar a história das diferentes disciplinas nas práticas de ensino. Ao nível da matemática, a consciência da importância da sua história tem assumido múltiplas formas e até dado origem a inúmeras iniciativas, nomeadamente, ao nível da sua utilização e integração em contexto de sala de aula.

Nos últimos tempos, a educação matemática tem-se debruçado sobre diversas questões relacionadas com a importância e as formas de proceder à integração da história da matemática no ensino, nomeadamente, se deve ser integrada em contexto de sala de aula e de que forma, e qual o impacto dessa integração no processo de ensino e aprendizagem. Existem diferentes respostas a estas questões, sendo a maioria favorável à sua integração argumentando sobre a sua importância, uma vez que uma cuidadosa e prudente integração da história da matemática, em contexto de sala de aula, pode tornar-se numa ferramenta significativa de ensino (Rickey, 1996; Wilson & Chauvot, 2000). De facto, a integração da história da matemática em sala de aula estabelece um contexto de ensino e de aprendizagem que proporciona tanto a professores como a alunos diferentes formas de se utilizar e adquirir conhecimentos sobre os diversos conteúdos a serem lecionados, nomeadamente, através da proposta e resolução de determinados problemas, uma vez que permite não só a observação da evolução histórica dos conceitos, mas também uma atividade de raciocínio e comparação de estratégias de resolução (Grugnetti, 2000); contribui para o desenvolvimento de situações de argumentação, onde é promovida a comunicação e a confrontação de ideias e raciocínios matemáticos (Lakoma, 2000); e implementa conexões com outros conhecimentos já adquiridos ou de outras áreas do saber (Grugnetti, 2000; Tzanakis & Arcavi, 2000), fomentando, em particular nos alunos o gosto pela matemática (Fauvel, 1991; Grugnetti, 1994; Fauvel & Maanen, 2000; Tzanakis & Arcavi, 2000).

2.1. Perspetivas sobre a importância da integração da história no ensino da matemática

O interesse pela integração da história da matemática no ensino e aprendizagem da matemática tem sido um assunto que tem envolvido tanto matemáticos eminentes, como investigadores e professores de matemática de diferentes graus de ensino. De facto, ao longo dos tempos, diversas personalidades expressaram, de diferentes formas e por razões específicas, ideias sobre o papel que a história da matemática pode desempenhar no ensino e aprendizagem da matemática (Fauvel & Maanen, 2000; Fasanelli, 2000). Segundo Fauvel e Maanen (2000), alguns educadores acreditam que a matemática é intrinsecamente histórica, portanto, aprender um determinado assunto deve envolver a sua história, tal como estudar arte envolve a aprendizagem sobre história da arte. Outros educadores apontam um diferente número de formas através das quais a história da matemática pode ajudar a tarefa do professor e, consequentemente, a aprendizagem dos alunos. De acordo com estes educadores, mais do que um aparente e banal conjunto de informações sobre nomes e vida dos matemáticos com os quais os alunos se deparam ao longo do estudo da matemática, a história da matemática pode constituir uma significativa e profunda forma de ensinar matemática. Há ainda a acrescentar a experiência de muitos professores de matemática que consideram que a história constitui um recurso pedagógico-didático benéfico para a aprendizagem e desempenho do aluno (Fauvel & Maanen, 2000). No entanto, é de observar que essas razões e ideias não só encontraram eco dentro da própria comunidade matemática, isto é, junto daqueles que se dedicam à investigação e ao ensino da matemática, mas também influenciaram algumas das decisões que foram sendo tomadas, em diferentes países, ao nível do contexto político educativo, em particular, ao nível dos conteúdos curriculares e das próprias metodologias.

2.1.1. Referências históricas sobre a integração da história da matemática no ensino e aprendizagem da matemática

Muitos foram os matemáticos que, no passado, destacaram a importância do conhecimento da história da matemática como pré-requisito para ser desenvolvida investigação em matemática. No século XVIII, Bernoulli apresentou a Euler, durante os estudos universitários deste último, alguns problemas clássicos (Calinger, 1996), realçando, assim, a importância dada aos problemas históricos no estudo e investigação matemática. Também Lagrange, numa aula sobre logaritmos para futuros professores, referiu que embora o cálculo dos logaritmos fosse um assunto do passado e desta forma os detalhes pudessem ser considerados desprovidos de valor, dever-se-ia ter curiosidade em conhecer quais as tentativas e caminhos trilhados por aqueles que permitiram alcançar esses resultados. Para Lagrange essa curiosidade não podia ser considerada como algo inativo, uma vez que, para este matemático, não só proporcionava orientação em pesquisas semelhantes, mas também poderia clarificar determinados assuntos sobre os quais alguém se encontrasse a trabalhar (Fasanelli, 2000). Já no século XIX, Abel, na margem do seu livro de notas, referiu que lhe parecia importante que se alguém pretendesse fazer progressos em matemática, deveria estudar pelos mestres (Fasanelli, 2000), apontando, assim, para a importância e necessidade de conhecer as obras daqueles que deixaram a sua marca na história da matemática. Também De Morgan, no discurso como presidente da Sociedade da Matemática de Londres, a 16 de janeiro de 1865, salientou para a necessidade dos matemáticos saberem qual o caminho traçado pelas invenções e descobertas que ocorreram nos diferentes ramos desta ciência (Fasanelli, 2000). Ainda no século XIX, Weierstrass insistiu sobre a importância de se ser cuidadoso no estudo quer dos clássicos, quer de jornais de investigação, indicados como essenciais não só para entender os fundamentos da matemática, mas também para o desenvolvimento de contribuições originais para o progresso e aperfeiçoamento do corpo do conhecimento matemático (Calinger, 1996). Em *Mathematical essays and recreations*, 1898, Hermann Schubert referiu que um matemático que pretenda adquirir um inteiro conhecimento sobre a investigação moderna, deveria debruçar-se de novo, mas num ritmo mais acelerado, no trabalho matemático realizado nos vários séculos anteriores (Fasanelli, 2000), realçando mais uma vez a importância do conhecimento da história da matemática no desenvolvimento da investigação matemática.

Além da preocupação e interesse manifestado por matemáticos sobre a importância do conhecimento da história da matemática no desenvolvimento da investigação matemática, também os próprios professores de matemática, ao longo dos tempos, foram realçando a pertinência e a utilidade da integração da história da matemática no ensino da mesma. Fasanelli (2000) destaca diferentes professores, entre os quais Eugenio Beltrami (1835-1899), professor na Universidade de Bolonha, que considerava pertinente que os alunos aprendessem, bastante cedo, os trabalhos dos grandes mestres, como uma forma de evitar que as suas mentes se tornassem estéreis, como resultado dos exercícios intermináveis realizados nas escolas.

Esta preocupação pela integração da história da matemática no ensino, também se encontra patente em relatórios e documentos oficias, como por exemplo, num relatório, de 1919, do Comité de uma Associação Matemática do Reino Unido. Nesse relatório era referido que o aspeto histórico da matemática ainda não tinha encontrado o lugar apropriado no ensino das escolas. Esse relatório indicava também que todos os alunos deveriam saber alguma coisa sobre a parte humana e o lado pessoal dos objetos em estudo. Nesse sentido, a história da matemática apresentava-se como potencial ajuda na elaboração do currículo escolar. Este relatório apontava ainda orientações para integração da história da matemática em contexto escolar, recomendando que fossem colocados em sala de aula os retratos dos grandes matemáticos, e que o professor nas suas aulas fizesse referência à vida e investigações desses mesmos matemáticos, relatando, sempre que possível, o efeito dessas descobertas no progresso da civilização (Fasanelli, 2000). Já em 1958, num relatório do ministro da educação do Reino Unido é registada a importância da história da matemática na formação de professores. Nesse relatório é referido que um professor que tenha poucos conhecimentos sobre a história da matemática está apto para ensinar técnicas de forma isolada, não as relacionando quer com os problemas e ideias que as originaram, quer com os desenvolvimentos posteriores que surgiram a partir destes. Esse relatório referia ainda que um conhecimento das divergências e dos argumentos entre grandes matemáticos podia induzir não só a um ceticismo saudável, isto é, um incremento e desenvolvimento do sentido crítico, mas também promover a discussão e a partilha de raciocínios em contexto de sala de aula (Fasanelli, 2000), possibilitando, portanto, o confronto de ideias e opiniões e, consequentemente, a clarificação de conceitos e procedimentos, promovendo, assim, o desenvolvimento do pensamento matemático. Por fim, este relatório referia que o conhecimento da história da matemática permitia aos professores apreciar e contextualizar a influência das correntes tradicionais, enquanto que aos alunos possibilitava a perceção de que o conhecimento do que hoje é ensinado como um produto acabado foi o resultado de séculos de pesquisa, ensaio e experimentação, muitas vezes associadas a animadas e energéticas controvérsias (Fasanelli, 2000).

Do descrito sobressai a existência histórica de uma preocupação e de um interesse sobre a relação entre a matemática, o seu ensino e a sua história. Esta preocupação tem também encontrado eco, nos últimos anos, em vários encontros e conferências que têm congregado historiadores, matemáticos, educadores matemáticos, investigadores e organizações nacionais e internacionais de matemática e da educação matemática, realizados em várias partes do mundo, onde se tem abordando a questão da relação entre a história e a pedagogia da matemática. De facto, nos últimos vinte anos há um crescente interesse, por parte dos professores e educadores matemáticos, na integração da história da matemática no ensino da matemática, surgindo algumas questões tais como: que consequências pode este interesse ter para a educação matemática? Como se pode julgar a efetividade dessa integração? (Barbin et al., 2000).

2.1.2. Pertinência sobre a realização de investigações empíricas no âmbito da integração da história da matemática em sala de aula

Ao longo do tempo têm aparecido um grande número de artigos, incluindo relatórios educacionais, reflexões de professores e considerações sobre experiências de ensino que forneceram diferentes argumentos a favor da inclusão da dimensão histórica no ensino da matemática, contendo, com frequência, as razões pelas quais os professores acreditam que esta inclusão pode ser significativa. Pode-se identificar, portanto, através da leitura e análise deste material as diferentes razões apontadas para o benefício dessa integração, bem como variadas formas através das quais é realizada, nomeadamente se a presença da história da matemática nas práticas de ensino é efetuada de forma implícita ou explícita, e se o uso da história é local (usado num tópico particular) ou global, o que caracteriza a estratégia didática ou a forma como a matemática é ensinada (Barbin et al, 2000). No entanto, apesar de um aumento global da atenção dada à integração da história no ensino da matemática, referidos que são os benefícios dessa integração e formas de a concretizar, a realidade em contexto de sala de aula tem sido pouco expressiva (Ferreira & Rich, 2001), pois de acordo com Fasanelli (2000) existe ainda pouca orientação em como o fazer.

Esta dificuldade de integrar a história da matemática de forma efetiva e significativa em contexto de sala de aula não só está associada ao facto de, em geral, os professores terem pouca preparação, no âmbito da sua formação inicial, e conhecimento sobre a história da matemática e das formas como esta pode ser integrada em contexto de sala de aula, mas também pelo facto de existir pouca investigação empírica no campo do uso e integração da história em educação matemática. É de observar que apesar do aumento do interesse e atenção mundial sobre a história da matemática na formação inicial e contínua dos professores de matemática (van Maanen, 1997; Silva & Araújo, 2001), em particular, os programas de formação inicial de professores, em todo o mundo, usualmente não contemplam disciplinas sobre história da matemática ou se as têm, são muitas vezes de caráter opcional (Ferreira & Rich, 2001) e, de acordo com Fasanelli (2000), não raras vezes negligenciam o valor didático da história da matemática. No que diz respeito à formação de futuros professores de matemática, em Portugal, existem algumas Universidades que oferecem a disciplina de história de matemática nos cursos de formação inicial, contudo, o uso didático da história da matemática em contexto de sala de aula é, por vezes, pouco implementado (Ferreira & Rich, 2001).

Embora haja uma vasta literatura disponível sobre o uso da história na educação matemática, apenas uma pequena parte dessa literatura se ocupa da investigação empírica sobre como usar a história da matemática na educação (Jankvist, 2009a; 2009b). Para este investigador, embora esses argumentos sejam, com frequência, baseados em experiências pessoais de ensino, existem poucos dados empíricos que suportem esta integração, não se tornando claro, para Gulikers e Blom (2001) o modo como essas experiências, consideradas positivas, podem ser transferidas para outros contextos: escolas, professores e salas de aula. Nesse sentido, Siu e Tzanakis (2004) argumentam que é necessário promover e desenvolver investigações empíricas sobre a eficácia do uso da história.

2.2. O papel da história da matemática no currículo nacional

Em Portugal, os programas de matemática para o ensino básico e secundário apontam para a humanização do estudo da disciplina, por forma a que o aluno adquira uma perspetiva da matemática como ciência em construção e em constante interação com as outras ciências. Desta forma, a promoção de tarefas, junto dos alunos, com uma perspetiva histórico-cultural assume especial evidencia como um dos temas transversais no currículo de matemática.

É de observar que esta preocupação pela perspetiva histórico-cultural no estudo da matemática, já se encontrava presente na reforma das Universidades promovida em 1772 pelo Marquês de Pombal, na qual se aconselhava que o ensino das ciências fosse associado ao da sua história (Estrada, 1993). Também no século XX, Sebastião e Silva preocupou-se com os aspetos programáticos e pedagógico-didáticos do ensino da matemática no secundário, tendo elaborado diversos livros didáticos, destacando-se o *Compêndio de Matemática*, utilizado na experiência de modernização do ensino da matemática em Portugal, e o *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (dois volumes). De acordo com Estrada (1993), nestas obras é possível encontrar várias recomendações que explicita ou implicitamente remetem para o uso da história da matemática. Esta mesma autora destaca algumas afirmações de Sebastião e Silva, nas quais este refere que o ensino da matemática deve ser «um ensino vital de ideias, em vez de uma experiência mecânica de matérias», chamando a atenção que «um ensino que não estimule o espírito e que pelo contrário o obstrua com as clássicas matérias para exame só contribui para produzir máquinas em vez de homens», referindo ainda «[que] o exemplo histórico do tabuleiro de xadrez deveria ser familiar a todos os alunos que passam pelo ensino secundário» (Estrada, 1993, pp. 17 – 18). Perante estas afirmações, o papel da história da matemática no ensino assume, indiscutivelmente, um real destaque, uma vez que, e segundo Estrada (1993, p. 18), «(…) é fundamental para estimular o espírito dos alunos, para o desenvolvimento do espírito crítico e ainda para que o aluno sinta e se aperceba das ideias subjacentes às teorias e aos teoremas já acabados que aprende.». Acresce referir que Sebastião e Silva foi o primeiro professor a lecionar uma cadeira de História do Pensamento Matemático, na Faculdade de Ciências de Lisboa, dando, assim, à História da Matemática um estatuto de disciplina de um curso superior.

Na década de 90, nos documentos oficiais referentes ao programa de matemática do ensino básico, surgiram indicações bastante precisas sobre a integração da história da matemática em contexto de sala de aula. Por exemplo, nos objetivos gerais do programa de matemática para os 2.° e 3.° ciclos era possível encontrar, na secção referente aos valores/atitudes e às capacidades/aptidões, propostas para desenvolver, nos alunos, a curiosidade e gosto de aprender, bem como a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção do real. No que diz respeito aos valores/atitudes, enquanto que no 2.° ciclo é sugerido que se deva interessar os alunos por factos da história da matemática relacionados com os conhecimentos que adquire (1991a); no 3.° ciclo pretende-se que os alunos reconheçam o contributo da matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através dos tempos (1991b). Na parte referente às capacidades/aptidões, em ambos os ciclos sugere-se que se relacione etapas da história da matemática com a evolução da humanidade (1991a; 1991b).

Em 2001, no *Currículo Nacional do Ensino Básico* na secção referente às experiências de aprendizagem apontava-se para a realização de trabalhos sobre matemática, considerando que «a Matemática e a sua história, os matemáticos e as suas histórias, integrados ou não na história da ciência e no desenvolvimento científico, são uma fonte de conhecimentos favoráveis à aprendizagem.» (2001, p. 69).

Também o atual reajustamento do Programa de Matemática para o ensino básico faz referência à história da matemática no âmbito das orientações metodológicas gerais, salientando que os alunos devem contactar com aspetos da história da matemática e reconhecer o papel da matemática no desenvolvimento da tecnologia e em várias técnicas.

> Na História da Matemática devem salientar-se o contributo de diversos povos e civilizações para o desenvolvimento desta ciência, a sua relação com grandes problemas científicos e técnicos de cada época, o seu contributo para o progresso da sociedade, e a sua própria evolução em termos de notações, representações e conceitos, proporcionando uma perspetiva dinâmica sobre a Matemática e o seu papel na sociedade. (ME, 2007, p. 10)

Além das indicações supracitadas, em que se apela à importância do uso da história da matemática em contexto escolar, é possível encontrar, nestes documentos oficiais, algumas sugestões, apesar de escassas, sobre a própria integração da história da matemática em contexto de sala de aula, ou como tópico de trabalhos de pesquisa.

Em 1991, no programa de 6.° ano de escolaridade, no capítulo "Números inteiros relativos" «sugere-se a pesquisa de dados de natureza histórica e a realização de pequenos trabalhos escritos sobre a introdução de números negativos.» (ME, 1991a, p. 41). No 8.° ano de escolaridade, no capítulo "Decomposição de figuras – Teorema de Pitágoras" e a propósito do teorema de Pitágoras sugere-se que se faça referência à história da matemática: «a Matemática nos Egípcios, nos Gregos, a corda dos 12 nós, a demonstração na História da Matemática» (ME, 1991b, p. 36). No 9.° ano de escolaridade, existem três capítulos onde se faz referência a uma perspetiva histórica. No capítulo "Equações", nas observações/sugestões metodológicas, caso seja oportuno, «(…) os alunos poderão fazer um pequeno trabalho em grupo sobre a resolução de equações na História da Matemática (resolução de equações particulares na antiguidade, Pedro Nunes e a resolução de equações, a escrita simbólica e o seu contributo para o avanço na resolução de equações e sua utilização, etc.) (…)» (ME, 1991b, p. 59). No capítulo "Trigonometria do triângulo retângulo" é referido no preâmbulo desta unidade que

«(…) o aluno terá oportunidade para realizar trabalhos em grupo, no âmbito da Matemática ou interdisciplinar, nomeadamente pesquisas referentes à trigonometria na História da Matemática.» (ME, 1991b, p. 60). Como observações/sugestões metodológicas é referida a inclusão, no ensino, de aspetos da história da matemática relacionados com a trigonometria «(…) como apareceu, qual o seu contributo, curiosidades interessantes (como Eratóstenes determinou o raio da Terra, por exemplo), etc. (…)» (ME, 1991b, p. 61). É ainda sugerido que os alunos realizem trabalhos neste âmbito, durante ou no final da lecionação desta unidade. Por fim, e ainda no 9.° ano de escolaridade, no capítulo referente ao "Espaço – outra visão" nas observações/sugestões metodológicas é proposta a referência às geometrias não euclidianas, sendo sugerido que os alunos realizem trabalhos sobre a geometria na história da matemática, percorrendo os diferentes contributos realizados neste âmbito, proporcionando, assim, a oportunidade de realizar diferentes reflexões.

No atual reajustamento do Programa de Matemática também estão presentes algumas notas para a integração da história da matemática em contexto de sala de aula. No 2.° ciclo, a integração de uma perspetiva histórico-cultural da matemática surge no conteúdo "Geometria",

> dado que a Geometria e a Medida estão diretamente relacionadas com as atividades matemáticas mais antigas em que o ser humano se envolveu, [desta forma] o seu estudo possibilita a exploração de aspetos históricos (a Matemática como atividade de resolução de problemas práticos em algumas civilizações e também como atividade predominantemente intelectual para os Gregos). (ME, 2007, p.36).

No 3.° ciclo, no conteúdo "Números e operações", sugere-se que os alunos contactem com a irracionalidade da $\sqrt{2}$ numa abordagem histórica ao problema dos incomensuráveis entre os pitagóricos (ME, 2007). Ainda ao nível das capacidades transversais no tópico "Raciocínio matemático" propõe-se que os alunos realizem uma pesquisa histórica sobre os *Elementos* de Euclides e a organização axiomática desta obra (ME, 2007).

No que diz respeito ao ensino secundário, quer nos anos 90, quer em 2001, já com a divisão em Matemática A, B e Matemática Aplicada às Ciências Sociais, são apresentadas indicações para o uso e integração de história da matemática no currículo. Na parte referente a valores/atitudes, um dos objetivos desta disciplina é desenvolver interesses culturais dos alunos, de modo a que estes manifestem vontade de aprender e gosto pela pesquisa; interesse por notícias e publicações relativas à matemática e a descobertas científicas e tecnológicas e que apreciem o contributo da matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através dos tempos. Além disso, no que diz respeito às capacidades/aptidões, no objetivo "desenvolver o raciocínio e o pensamento científico" aponta-se para a compreensão, por parte dos alunos, da relação entre o avanço científico e o progresso da humanidade (Silva, 2001).

Tendo ainda em atenção as orientações do currículo, a história da matemática a par da comunicação matemática, das aplicações e modelação matemática, lógica e raciocínio matemático, resolução de problemas e atividades investigativas e tecnologia matemática, adquire destaque como um tema transversal que atravessa todo o programa (Silva, 2001). É então sugerido que trabalhar com aspetos da história da matemática é fundamental e deve ser realizado sob os mais diversos pretextos. Deste modo, ao longo do programa, é possível encontrar algumas pistas para esse trabalho, por forma a ampliar a compreensão dos assuntos matemáticos estudados. Nas sugestões metodológicas podem encontrar-se algumas temáticas para integrar a história da matemática em contexto de sala de aula, como por exemplo, o estudo dos polinómios em Pedro Nunes, a história do cálculo diferencial e a história dos números complexos. No entanto, existem brochuras de apoio ao programa que contêm alguns exemplos temáticos, tais como, sobre origens da geometria, a evolução das máquinas de calcular, fazendo referência à função logarítmica e à régua de cálculo, e sobre a história do teorema fundamental da álgebra. Neste documento oficial é ainda sugerido aos professores que apresentem aos alunos problemas históricos, propondo-lhes a resolução de alguns desses problemas.

Tendo em conta as recomendações do currículo oficial português sobre a importância e as formas de integrar a história da matemática em sala de aula, constata-se que estas recomendações são de natureza vaga e quase sempre se restringem a sugestões de caráter metodológico. Contudo, é de referir que noutros países, como por exemplo Itália, Noruega e Polónia (Fasanelli, 2000), onde a associação entre a história e o ensino da matemática tem maiores tradições, existem diversas publicações que fornecem tanto a professores como a alunos uma visão da história da matemática, bem como recursos para serem utilizados em contexto de sala de aula.

2.3. Alguns constrangimentos e obstáculos à integração da história da matemática em contexto de sala de aula

Se se fizer uma viagem no tempo, verifica-se que ao longo da história o Homem foi construindo o seu saber através de avanços e recuos perante novas ideias e conhecimentos. A própria matemática foi alvo dessas vicissitudes. Por exemplo, a descoberta da incomensurabilidade abalou profundamente os princípios da filosofia pitagórica, ou seja, nem tudo era número, portanto, a geometria não podia reduzir-se à aritmética, o que consequentemente originou a separação dos domínios do numérico e do geométrico (Sá, 2000). Também as dificuldades em atribuir significado aos números negativos e complexos originaram discussões e posteriormente abriram caminho a novas situações, tal como a questão relacionada com o quinto postulado de Euclides que originou o aparecimento das geometrias não euclidianas. Desta forma, ao encarar-se a matemática como uma ciência fruto da atividade humana, recorrer à sua história permitirá «(…) entender melhor as dificuldades vividas pelo aluno diante de cada novo conceito.» (Silva & Araújo, 2001, p. 19). Ou seja, conhecer as dificuldades que homens e mulheres, ao longo dos tempos, tiveram na construção desta ciência proporciona um conhecimento dos obstáculos epistemológicos dos alunos.

Uma vez que o professor tem um papel decisivo e preponderante na condução do processo de ensino e aprendizagem, dotar os futuros professores de métodos e técnicas utilizadas ao longo da história da matemática, significa fornecer-lhes ferramentas que os poderão ajudar nas suas futuras práticas letivas, dado que não só possuem conhecimentos sobre as dificuldades históricas subjacentes a cada assunto, mas também as próprias relações históricas entre os diversos temas. De acordo com Gulikers e Blom (2001), faz todo o sentido ensinar história da matemática nos cursos de formação inicial de professores, uma vez que esse conhecimento pode influenciar as atitudes dos professores e enriquecer o seu próprio repertório didático. Van Maanen (1997) refere que "olhar" para "métodos antigos" poderá ajudar os professores e os alunos a evoluir os seus padrões, o que realça a capacidade da história da matemática em alargar e aprofundar certos tópicos.

Contudo, os futuros professores além de possuírem conhecimento de história da matemática, precisam de aprender a integrá-lo em contexto de sala de aula, por forma a que este conhecimento tome significado para a aprendizagem dos alunos. Nesse sentido, a utilização de excertos ou adaptações de textos de diferentes épocas servem «(…) para motivar a introdução de um conceito, para fornecer mais uma perspetiva sobre um conceito, para ajudar a sedimentar um conceito, para servir como aula de exercícios – para não serem só exercícios rotineiros a cumprir esta função.» (Silva, 1993, p. 27). Contudo, Furinghetti (2000) observa que a história da matemática não é a solução para resolver os diversos problemas associados à preparação de futuros professores de matemática, embora reconheça que a história da matemática permite a reflexão sobre o conhecimento e sobre alguns dos problemas educacionais, nomeadamente ao nível das conceções matemáticas dos alunos.

É, no entanto, de observar que a falta de conhecimento por parte dos professores da história da matemática e das formas como esta pode ser integrada em contexto de sala de aula, não pode ser considerada o único fator responsável pela não inclusão da história da matemática nas práticas de ensino. De facto, a falta de conhecimento histórico, como consequência da não existência de um programa de história da matemática apropriado na formação inicial de professores, proporciona diminuição de confiança nos professores para que procedam a uma real integração da história no ensino. Para uma plena integração da história da matemática no ensino não é só preciso conhecimento histórico, mas também interdisciplinar, o que leva mais longe a formação inicial de professores de matemática (Tzanakis & Arcavi, 2000). Na verdade, também existem poucos recursos materiais apropriados para ajudar os professores que pretendem integrar a história da matemática em sala de aula (Fauvel, 1991; Le Goff, 1996). Fasanelli (2000) e Ferreira e Rich (2001) criticam o facto da referência à história da matemática nos livros de matemática ou manuais escolares se limitar, a maior parte das vezes, à inclusão, nos finais dos capítulos, de algumas notas históricas, geralmente biografias e curiosidades. Esta circunstância, origina que os professores perspetivem a história da matemática como um tema separado do currículo, ou seja, e como um *alien* ao trabalho diário que ocorre em sala de aula (Janke, Knoche & Otte, 1996). No entanto, Ferreira e Rich (2001) apontam como outro fator as crenças dos professores sobre a natureza da matemática e sobre o seu ensino e aprendizagem, o que influencia as suas práticas em sala de aula e, consequentemente, a sua boa vontade e gosto em integrar a história da matemática nas suas práticas de ensino. De facto, se a matemática é vista como um corpo fixo e terminado de conhecimentos e o ensino da matemática é visto como uma transmissão de conhecimentos de professores para alunos, então, muito dificilmente, a história da matemática será integrada no processo de ensino e de aprendizagem (Ferreira & Rich, 2001). Ao contrário, se a matemática for encarada como apenas uma das muitas formas de conhecimento e, portanto, como um tipo de manifestação cultural ou de atividade humana mais geral, então a história desse conhecimento não só ganhará significado, como o seu estudo proporcionará um melhor entendimento entre as relações do Homem e o conhecimento matemático, dentro de um certo contexto cultural (Silva & Araújo, 2001). Fauvel (1991), aponta ainda o facto de muitos considerarem que a história não é matemática e, portanto, a história poderá confundir mais do que esclarecer.

Os professores apontam ainda falta de tempo como causa para a não integração da história nas suas práticas de ensino, visto que consideram que têm já pouco tempo para ensinar matemática, quanto mais para ensinar história da matemática (Buhler, 1990). Uma outra causa ainda apontada refere-se ao facto de não existir de forma clara ou consistente uma avaliação para a integração de qualquer componente histórica na avaliação dos alunos. Assim, se a história da matemática não é avaliada, então os alunos não estão com atenção (Tzanakis & Arcavi, 2000).

Há ainda outros argumentos contra a incorporação da história da matemática na sala de aula. Fauvel (1991) refere que muitos alunos têm, por natureza, pouca sensibilidade para questões do passado, o que torna impossível a contextualização histórica da matemática sem que lhes seja ensinado uma grande extensão de história geral. Tzanakis e Arcavi (2000) observam ainda que muitos alunos não gostam de história e por consequência não gostam de história da matemática, considerando-a mais aborrecida do que a própria matemática. Por fim, Le Goff (1996) observa que se o progresso em matemática tornou problemas difíceis em simples rotinas, muitos questionam o porquê da necessidade de olhar para trás.

Mediante estes factos e por em muitos países, incluindo Portugal, existir pouca investigação empírica realizada sobre a integração da história da matemática em sala de aula, os professores ignoram as recomendações, mesmo que superficiais, presentes no currículo oficial sobre esta temática. Existe, contudo, um número razoável de estudos e de pesquisas que apontam os benefícios da integração da história da matemática na educação matemática, tanto para professores como para alunos dos vários níveis de ensino (Barbin, 2000; Marshall, 2000; Tzanakis & Arcavi, 2000).

2.4. A história da matemática no ensino da matemática

Uma aula contextualizada proporciona ao aluno a possibilidade de interagir com o que se ensina, o que lhe permite uma maior e melhor compreensão e apropriação do conteúdo exposto. A história da matemática surge, assim, como uma mais-valia neste processo de contextualização, sendo, portanto, a sua integração em contexto de aula de matemática uma ferramenta que o professor dispõe para rentabilizar a sua prática letiva. Contudo, é importante que o professor tenha consciência que a integração da história da matemática em contexto de sala de aula não resulta numa mudança milagrosa na motivação dos alunos para aprenderem ou numa mudança nas suas próprias realizações matemáticas (Fauvel, 1991). De facto, a história da matemática, embora proporcione uma reflexão ao nível dos problemas cognitivos e educacionais, nomeadamente ao nível das conceções matemáticas dos alunos, não pode ser considerada panaceia para resolver quer a falta de motivação e as dificuldades manifestadas pelos alunos (Barbin, 2000), quer os problemas relacionados com eventuais falhas de preparação dos professores de matemática (Furinghetti, 2000). Na verdade, a integração da história da matemática nas práticas de ensino pode fornecer uma nova perspetiva sobre a matemática como um esforço humano (Fauvel, 1991), ou seja, a humanização da própria disciplina, uma vez que a matemática é algo que foi inventado por pessoas, em estádios particulares da história, sendo, portanto, a sua evolução resultado de várias contribuições crescentes a partir de diferentes culturas (Fauvel & Maanen, 2000). Todavia é preciso ter em conta que «a história não é apenas uma espécie de lubrificante ou aditivo que vem numa bisnaga e que pode ser usado em determinada altura, como o amaciador para pôr na máquina de lavar.» (Fauvel,1997, p. 17).

Com a integração da história no ensino da matemática pretende-se, por um lado, proporcionar aos alunos uma visão da história da matemática como um elo que une a matemática através dos tempos e que cruza várias áreas científicas; por outro lado, permitir aos alunos experienciar o "fazer" matemática e olhar para esta área do conhecimento como um processo dinâmico e criativo do espírito humano. Não se pretende, assim, usar a história da matemática como algo que aconteceu no passado, sem utilidade, sendo, portanto, um pedaço de conhecimento de matemática "cristalizado". Nesse sentido, embora em muitos textos as expressões "usar" e "integrar" surjam de forma indiscriminada, diversos investigadores, como Estrada (1993), Furinghetti (1997), Wilson & Chauvot (2000) e Ferreira e Rich (2001), realçam que a diferença entre os termos "usar" e "integrar" a história da matemática no ensino da matemática está relacionada, portanto, com a forma como se pretende empregar a história no ensino.

2.4.1. Razões e benefícios da integração da história da matemática no ensino da matemática

Existe uma variedade de argumentos – conceptuais, multiculturais e motivadores – que justificam quais os benefícios, relevantes tanto para alunos como para professores, da integração e valorização da história da matemática no ensino e aprendizagem da matemática (Gulikers e Blom, 2001). Duas das razões mais apresentadas, para a inclusão da dimensão histórica em contexto de sala de aula, são, por um lado, a oportunidade que a história da matemática fornece para desenvolver a visão do que é a matemática; por outro lado, a oportunidade de permitir obter um melhor entendimento dos conceitos e teorias presentes na própria matemática. Para Barbin (2000), estas razões, permitem estabelecer uma sequência no desenvolvimento da compreensão: a história da matemática pode, primeiramente, mudar a perceção e entendimento pessoal sobre a matemática, o que influenciará a forma como é ensinada e finalmente, afeta a forma como os próprios alunos percebem e entendem a matemática. Tzanakis e Arcavi (2000) apontam, no entanto, cinco domínios, que consideram essenciais, em que o ensino da matemática pode ser sustentado, enriquecido e melhorado através da integração da história da matemática no processo educativo, a saber, ao nível: da aprendizagem da matemática; do desenvolvimento da visão da natureza da matemática e da sua atividade; da prática didática dos professores e do seu reportório pedagógico; da predisposição afetiva perante a matemática; e da apreciação da matemática como um empreendimento cultural e humano.

Ao nível da aprendizagem da matemática

O *conhecimento do desenvolvimento histórico* permite conhecer a organização da matemática. A maioria das ideias matemáticas não são publicadas na forma como foram descobertas (Freudenthal, 1983), sendo, a matemática usualmente ensinada de uma forma dedutiva. Contudo, o desenvolvimento histórico da matemática mostra que esta organização dedutiva, ou até mesmo axiomática, surge após esta ciência ter atingido um determinado nível de maturidade, ou seja, quando se tornou necessário fornecer uma apresentação da sua perfeição e estrutura lógica. A matemática é, assim, global e retrospetivamente reorganizada, sendo que esta necessidade de reorganização está associada, por um lado, ao facto de se pretender evitar os tortuosos e prolixos cálculos iniciais; por outro lado, associada à intenção de apresentar um corpo de conhecimento dedutivo, no qual os novos resultados possam ser adicionados de uma forma cumulativa, com o intuito de que as questões e problemas que constituíram as motivações básicas para o desenvolvimento de uma ideia, bem como qualquer dúvida surgida no desenvolvimento dessa mesma ideia, permaneçam escondidas sob uma organização linear (Tzanakis & Arcavi, 2000). Neste sentido, a integração da história na educação matemática pode tomar um papel importante ao permitir a descoberta de como os conceitos, estruturas e ideias surgiram por forma a servirem de ferramentas para organizar os fenómenos físicos e sociais (Freudenthal, 1983). Desta forma, à aprendizagem de um conceito, estrutura ou ideia pode ser acrescentado o conhecimento da motivação e do fenómeno para os quais foram criados. Este facto tem sido reconhecido e defendido por vários investigadores, como Polya e Lakatos. Gulikers e Blom (2001) salientam que comparando as técnicas antigas e modernas, os alunos tornam-se conscientes de que os métodos utilizados ao longo dos tempos foram mudando, percebendo, assim, que as melhorias introduzidas nos métodos existentes tornaram mais fácil a aprendizagem da matemática. Estes autores referem ainda, que a história da matemática permite aos alunos aprender de uma forma não linear, isto é, os alunos ao contactarem com os princípios e os problemas que estiveram na origem de determinadas teorias, permiti-lhes realizar um confronto com o que se encontra exposto nos livros de matemática da atualidade e verificar que, muitas vezes, o que é ensinado não é o problema que esteve na origem da teoria. Freudenthal (1993) e Gulikers e Blom (2001), consideram esta forma patente nos livros como "inversão antididática", visto que a ordem de aparecimento foi em sentido inverso. Gulikers e Blom (2001, p. 228) referem ainda que a história da matemática permite aos alunos adquirir um balanço entre o "rigor" e a "imaginação", sendo que, «(…) o aluno não salta para conclusões infundadas e dá-lhe a oportunidade de seguir um pensamento criativo em diferentes direções.». Horak e Horak (1981), Gulikers e Blom (2001), salientam que adicionar ao ensino o conhecimento dos esforços das descobertas, patentes ao longo da história, bem como o desenvolvimento dos conceitos, permite um melhor entendimento dos fundamentos teóricos da matemática, nomeadamente, do uso e aplicação de diferentes técnicas. Do mesmo modo e tendo em conta a opinião de Byers (1982) e Ransom (1991), os mesmos autores, referem «(…) que os problemas históricos fornecem métodos alternativos de resolução e fazem os alunos pensar.» (Gulikers & Blom, 2001, p. 228). Assim, mostrar aos alunos como os conceitos se desenvolveram, ajuda-os na compreensão dos mesmos (Fauvel, 1997). Contudo, isto implica que haja a consciência por parte do professor que não existe uma única forma específica de apresentar um determinado assunto que siga exatamente o, por vezes, complicado desenvolvimento histórico. De acordo com Tzanakis e Arcavi (2000), a história pode fornecer, de forma natural, diferentes formas para apresentar um dado assunto, conservando as mínimas falhas lógicas e as introduções para determinados fins de conceitos, métodos ou provas. Desta forma, os registos históricos podem inspirar professores e ajudá-los na sua prática de ensino. No entanto, este papel, apontado por Gulikers e Blom (2001), de que história da matemática pode ter em ajudar os alunos a entenderem melhor a matéria não é unanimemente aceite. Freudenthal (1981) manifesta algumas hesitações e Grattan-Guinness (1973) refere que quando a introdução histórica a um assunto segue unicamente a linha histórica, pode tornar difícil a compreensão do assunto em causa, em particular para alunos mais novos que ainda não têm uma consciência histórica e não conseguem entender, assim, ideias e técnicas originais que lhes são pouco familiares.

Ao usar, como recurso, os registos históricos, nomeadamente, problemas retirados da história da matemática, alunos e professores podem *comparar as suas estratégias de resolução com as originais* (Grugnetti, 1994). Esta é uma forma interessante de levar os alunos a entender não só a economia e a vantagem dos atuais símbolos e processos matemáticos (Grugnetti, 2000), mas também de confrontarem as suas conjeturas, bem como os argumentos e estratégias de resolução utilizados. De facto, uma componente importante deste tipo de abordagem, que implica a estratégia do aluno e a análise da estratégia matemática apresentada por matemáticos do passado, é a possibilidade dos alunos poderem comparar as suas estratégias com as dos antigos matemáticos. Como referido, os alunos podem, por exemplo, entender a economia e a eficácia dos processos algébricos modernos, comparando-os com os antigos métodos. No entanto, um dos aspetos mais importantes do desenvolvimento da aprendizagem da matemática é a atividade de reconhecer e comparar estratégias de resolução (Grugnetti, 2000). O facto de os alunos se tornarem capazes de comparar diferentes estratégias, tanto na resolução de problemas como na prova de teoremas, permitirá o desenvolvimento do processo de generalização e de abstração.

A história pode constituir um excelente *elo de ligação entre a matemática e outras temáticas*. A integração da história da matemática na sala de aula permite o reconhecimento das várias conexões existentes entre as várias áreas da matemática e entre a matemática e outras áreas do conhecimento (Reimer & Reimer, 1995;

Furinghetti & Somaglia, 1998; Grugnetti & Rogers, 2000). Para Tzanakis e Arcavi (2000), a integração da história no ensino da matemática pode exibir conexões entre domínios do conhecimento que ao primeiro olhar poderia parecer não se encontrarem relacionados, proporcionando, desta forma, a oportunidade de verificar que a frutífera pesquisa de um determinado domínio científico não se encontra isolado das atividades de outros domínios. Frequentemente, essa relação é motivada por questões e problemas surgidos de disciplinas aparentemente não relacionadas e tendo como base experiências empíricas. Por exemplo, os professores podem mostrar as relações entre a aritmética, a álgebra e a geometria através dos trabalhos de Euclides, Al-Khwarizmi e Descartes; podem ainda realçar a forte ligação entre a matemática, a geografia, a engenharia e astronomia que pode, ser encontrada no desenvolvimento dos instrumentos de navegação e nos planos/esquemas de cálculo, tão cruciais para o sucesso das viagens marítimas, em particular na época dos descobrimentos portugueses (Veloso, 1994; Grugnetti & Rogers 2000; Ferreira e Rich, 2001). A história da matemática fornece, assim, a oportunidade de articulação com as outras áreas curriculares disciplinares.

A história pode *despertar a motivação e o interesse dos alunos*. A história da matemática constitui um amplo reservatório de relevantes questões, problemas e exposições que podem ter não só muito valor tanto em termos do seu conteúdo, como também em termos de motivação, interesse e envolvimento dos alunos (Tzanakis & Arcavi, 2000). De facto, uma das razões apontadas para integração da história no ensino da matemática é o facto da história da matemática poder ajudar a incrementar o interesse dos alunos pela aprendizagem (Siu & Siu, 1979; Byers, 1982; Fauvel, 1991; Reimer & Reimer, 1995; Ernest, 1998; Tzanakis & Arkavi, 2000; Ferreira & Rich, 2001, Gulikers & Blom, 2001). O facto de se proporcionar uma outra perspetiva sobre os assuntos e um novo olhar sobre a origem dos problemas, conceitos, métodos e provas, a integração da história nas aulas de matemática pode intrigar e motivar os alunos e, desta forma, «(…) as aulas de matemática podem tornar-se menos assustadoras e mais agradáveis (…).» (Gulikers & Blom, 2001, p. 230). Um dos exemplos sugeridos por Bussi & Sierpinska, (2000) é a introdução de anedotas na sala de aula para motivar a aprendizagem da matemática. De acordo com vários investigadores (Swetz, 1984; Barbin, 2000; Rubinstein & Schwartz, 2000), na história da matemática podem-se encontrar diversas situações cuja integração em sala de aula poderá despertar a atenção dos alunos e, consequentemente, aumentar a sua curiosidade pelo estudo da matemática. Por exemplo, o estudo da numeração egípcia e de constantes matemáticas como π e o e; a procura de construções com régua e compasso de polígonos regulares; a análise de certos códigos numéricos secretos que eram populares na Idade Média; a contestação por Galileu do ponto de vista ptolemaico sobre o movimento dos planetas, são alguns casos que podem de forma intrínseca motivar os alunos a quererem aprender mais (Ferreira & Rich, 2001). Também as tarefas inspiradas na história podem estimular, de forma intrínseca, o interesse dos alunos e contribuir para aumentar o valor do currículo, a par de exercícios e problemas que denotam um caráter mais artificial. De facto, através da realização destas tarefas, aspetos do desenvolvimento histórico de um determinado assunto poderão tornar-se conhecimento trabalhado pelos alunos e, neste sentido, a história surge como algo que não é estranho à própria matemática (Tzanakis & Arcavi, 2000). De acordo com Ferreira e Rich (2001), uma motivação intrínseca para aprender é preferível a uma motivação extrínseca (Middleton, 1995). Enquanto que a primeira é caracterizada não só pelo desejo dos alunos aprenderem por si mesmos, mas também pelo seu interesse pelas atividades de sala de aula, que consideram agradáveis, desafiadoras e úteis à vida (Schiefele & Csikszentmihalyi, 1995; Middleton & Spanias 1999); a segunda é caracterizada pelo empenho e o envolvimento dos alunos em tarefas académicas com o objetivo de obterem recompensas ou evitarem punições. O objetivo de uma motivação extrínseca é mostrar evidências das capacidades, com melhores resultados que outros, alcançando o sucesso com muito pouco esforço (Ames & Archer, 1988), obtendo, assim, por parte dos professores e dos seus pares, julgamentos favoráveis às suas competências (Middleton & Spanias, 1999).

Contactar com a história permite o *desenvolvimento das* designadas *capacidades transversais*: resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática. A convicção de que a integração da história, em sala de aula, melhora a aprendizagem da matemática assenta, portanto, em duas suposições sobre o próprio processo de aprendizagem: quanto mais o aluno está interessado na matemática, mais trabalho realiza e, desta forma, se mais trabalho realiza melhor vão ser os seus resultados ao nível da aprendizagem e da compreensão (Barbin, 2000). Isto significa que o interesse provocado pela integração da história da matemática vai mais longe do que um fator de motivação (Barbin, 2000), uma vez que permite aos alunos olharem mais além (Gulikers & Blom, 2001), visto que uma melhor compreensão por parte destes, dos conceitos e procedimentos, têm, de facto, um efeito significativo na sua aprendizagem (Kieran, 1994).

Nos últimos anos a educação matemática insiste na importância dos alunos apreciarem o valor e o mérito de trabalharem problemas difíceis e investigações desafiadoras, em vez de desistirem após terem encontrado o primeiro obstáculo (Abrantes et al., 1999; Ferreira & Rich, 2001; ME, 1991b; NCTM, 2007; ME, 2007). A importância da compreensão do problema e da conceção, aplicação e justificação de estratégias constituem passos necessários para a resolução de problemas. A história da matemática permite não só apresentar um leque diversificado de problemas que poderão ser trabalhados pelos alunos, como está repleta de exemplos de sucessos e falhas através do desenvolvimento do corpo do conhecimento matemático (Swetz, 1994). Os alunos poderão compreender a importância da formulação e teste de conjeturas, nomeadamente do processo entediante de tentativa e erro, por vezes utilizado nas descobertas matemáticas (Horn, Zamierwski & Barger, 2000), bem como da importância da comunicação e argumentação dos raciocínios matemáticos no desenvolvimento da prova e do rigor, conceitos estes de natureza dependente, o que pode ser verificado ao longo dos tempos (Tzanakis & Arcavi, 2000). Neste sentido, os alunos poderão apreciar o valor do intenso trabalho e determinação (Reimer & Reimer, 1995) como a importância de persistência na persecução de um determinado objetivo (Ferreira & Rich, 2001). Por exemplo, a vida e o trabalho de Kepler e Andrew Wiles, poderão servir de exemplos de esperança, desapontamento, persistência e por último de triunfo (Shotsberger, 2000, p.680; Tzanakis & Arcavi, 2000), encorajando os alunos a irem mais longe e proporcionando oportunidades para realização de trabalhos de investigação (Fauvel, 1997). Observando a evolução histórica de um conceito, os alunos podem observar que a matemática não é fixa nem definitiva. A história da matemática pode, assim, criar um contexto para introduzir conceitos matemáticos, de um modo que encoraje os alunos a pensar. Soluções históricas levam os alunos a procurar e a desenvolver, individualmente, formas simples de raciocínio. Os diferentes pontos de vista que são possíveis apresentar em contextos históricos dão aos alunos a oportunidade para desenvolverem a arte de discutir, justificar as suas próprias opiniões e apresentarem o seu próprio raciocínio aos outros. Os casos históricos encorajam, assim, os alunos a repetirem individualmente os esforços e tentativas de resolver problemas. Todas estas atividades não só são muito importantes para formar os conceitos matemáticos e desenvolver o pensamento matemático, mas também úteis no desenvolvimento de um estilo discursivo em educação (Lakoma, 2000). Alunos envolvidos em contextos de trabalho que integrem a história da matemática podem, assim, desenvolver diferentes capacidades não apenas associadas, unicamente, ao seu desenvolvimento matemático, mas também competências de leitura, escrita, pesquisa, análise e comunicação, de forma a que "falando sobre" matemática, desenvolvam e discutam argumentos matemáticos (Tzanakis & Arcavi, 2000).

Ao nível do desenvolvimento da visão da natureza da matemática e da sua atividade

De acordo com Tzanakis e Arcavi (2000), uma forma diferente de olhar a matemática e a atividade matemática pode ser proporcionada, ao nível do *conteúdo*, através da análise de questões, problemas e respostas históricas, fornecidas diretamente por recurso a fontes primárias ou a textos reconstruídos em linguagem atual. Ao contactarem com este tipo de produções, os alunos podem aprender que os erros, os argumentos heurísticos, as incertezas, as dúvidas, os argumentos intuitivos, as respostas "sem saída", as controvérsias e as abordagens alternativas a problemas, não só são legítimos como também fazem parte integrante de fazer matemática. Neste sentido, estes autores (idem) referem que os alunos podem entender melhor o porquê das conjeturas e provas que foram sugeridas no passado, fornecerem ou não, de forma satisfatória, resposta para problemas já existentes. De uma forma indireta, os alunos são encorajados a formularem as suas próprias questões, fazer conjeturas e a testá-las. Acresce referir que a história também torna mais visível, tanto para professores como para alunos, a natureza evolucionária do conhecimento matemático e o caráter temporal na dependência de determinados conceitos: como prova, rigor, evidência, erro, entre outros.

A integração da história da matemática, em contexto de sala de aula, também pode proporcionar aos alunos um outro modo de olhare a matemática e a atividade matemática, ao nível da sua *forma*, como a notação, a terminologia, os métodos computacionais, os modos de expressão e de representação. A integração da história da matemática poderá ajudar os alunos a entenderem não só estas questões formais, mas também a própria linguagem, verbal ou simbólica, da matemática de um determinado período, reavaliando o papel visual, intuitivo e as abordagens não formais sugeridas no passado (van Maanen, 1997). Assim, com ajuda de fontes originais ou até mesmo de extratos retirados dessas fontes, tanto professores como alunos podem ficar a conhecer quais as vantagens e/ou desvantagens das formas modernas da matemática (Tzanakis & Arcavi, 2000).

Ao nível da predisposição perante a matemática

A história da matemática pode enfatizar o papel da atividade humana no processo criativo da matemática, o que permitirá influenciar a predisposição dos alunos perante a matemática.

A história da matemática permite *humanizar a matemática* ao mostrar que a matemática mais do que um sistema rígido de verdades é um assunto envolvente e humano. É um esforço humano que requer um esforço intelectual e é determinado por vários fatores, tanto internos como externos, não sendo um produto acabado, dado por Deus (Tzanakis & Arcavi, 2000). A dimensão histórica encoraja, assim, a considerar a matemática mais como um processo de reflexão e aperfeiçoamento realizado ao longo dos tempos, do que uma estrutura definida, composta por verdades irrefutáveis e imutáveis. O facto da matemática ser uma atividade humana e dinâmica significa que, de uma forma natural, é influenciada por fatores sociais e culturais e, nesse sentido, a história da matemática pode ajudar a explicar aos alunos o papel da matemática na sociedade (Gulikers e Blom, 2001). Ter esta noção, permite aos alunos «(…) ver que a matemática foi conduzida não somente por razões de utilidade, mas também que se desenvolveu por si própria, motivada pela curiosidade intelectual, por um propósito de entretenimento e por critérios de estética.» (Gulikers e Blom, 2001, p. 229). Para estes investigadores, a história da matemática ao apresentar o desenvolvimento da matemática como uma atividade humana, permite aos alunos visualizar o aspeto humano da matemática e não apenas olhá-la como um sistema rígido de verdades. Pensar na matemática como uma atividade intelectual, mais do que um produto acabado, significa pensar em problemas para serem resolvidos, realçando, portanto, a importância das conjeturas e do valor da intuição na realização das tarefas propostas em sala de aula. Neste sentido, o aluno na sala de aula de matemática e o investigador matemático estão ocupados no mesmo tipo de atividade. A dimensão histórica pode trazer aqui uma mudança global na abordagem do professor, estando ou não o elemento histórico explícito na sala de aula.

A história da matemática permite ainda fomentar o valor de persistir nas ideias, de tentar empreender linhas de investigação, de colocar questões e de tentar desenvolver formas de pensamento criativo. Ou seja, permite verificar que no trabalho de diferentes proeminentes matemáticos existiram, por vezes, falhas, erros, incertezas e mal entendidos De acordo com Stander (1989), a confiança dos alunos aumenta, quando estes se apercebem que os grandes matemáticos não obtiveram de imediato respostas aos seus problemas e reconhecem que os erros, dúvidas, argumentos intuitivos, controvérsias e abordagens alternativas não só são legítimas como também são uma parte integral de fazer matemática (Tzanakis & Arcavi, 2000). Os alunos sentem-se melhor ao perceberem que não são os únicos a terem dificuldades (Fauvel, 1997). Através da integração da história da matemática na sala de aula, os próprios alunos sentem que não estão sozinhos quando se debatem com muitos problemas durante a sua aprendizagem da matemática e veem, portanto, os assuntos de uma forma menos assustadora (Ferreira & Rich, 2001). Contudo, de acordo com Barbin (2000), mesmo que os alunos sejam levados a construir o seu conhecimento de uma forma paralela ao desenvolvimento histórico, não significa que exista uma correspondência exata entre a construção realizada pelos alunos e a sequência histórica. Para esta investigadora (idem), os obstáculos encontrados pelos matemáticos ao longo da história podem não ser aqueles que surgem hoje em dia aos alunos. Independentemente desta ideia, considera que aprender que existiram obstáculos ao longo da história é em si benéfico.

A integração da história da matemática no ensino da matemática tem mostrado que promove nos alunos e professores perceções sobre os assuntos, como também as suas *atitudes, criatividade e entusiasmo* sobre esses mesmos assuntos

(Arcavi et al., 1982; Fauvel, 1991; Estrada, 1993; van Maanen, 1997; Ernest, 1998; Philippou & Christou, 1998; Barbin, 2000; Marshall, 2000, Rubenstein & Schwartz, 2000). De acordo com Swetz (1984), por vezes, o ensino da matemática proporciona a compartimentação da mesma, originando que os alunos observem a matemática como uma incompreensível coleção de regras e fórmulas. Nesse sentido, os alunos constroem barreiras psicológicas ao verdadeiro entendimento matemático, desenvolvendo ansiedades sobre a aprendizagem e uso da matemática. No entanto, quando os aspetos históricos são integrados nas práticas de sala de aula, o afastamento dos alunos ao estudo da matemática, bem como a ansiedade matemática podem ser reduzidos de forma significativa (Marshall, 2000; Schubring, 2000; Ferreira & Rich, 2001), mudando, portanto, a perceção que estes têm da matemática (Fauvel, 1997). Nesse sentido, a aplicação da história da matemática em certas situações educativas pode trazer dinamismo ao ensino da matemática, criando uma atmosfera agradável dentro da sala de aula, tornando as aulas mais interessantes e, portanto, promotoras de maior sucesso (Gulikers & Blom, 2001).

Ao nível da apreciação da matemática como um esforço cultural

Como foi referido anteriormente, a matemática não é um sistema estruturado de forma rígida, mas um processo contínuo que envolve a parte intelectual humana, hermeticamente ligado com a sociedade, outras ciências e diferentes culturas (Tzanakis & Arcavi, 2000).

A partir do estudo detalhado de exemplos históricos, pode ser proporcionada aos alunos a oportunidade de apreciar o desenvolvimento da matemática como um processo impulsionado não só por razões utilitárias, mas também por critérios estéticos, curiosidade intelectual e propostas de desafio e prazer de caráter recreativo. A história pode, assim, fornecer exemplos de como o desenvolvimento interno da matemática, se impulsionado pela parte utilitária ou "pura", terá sido influenciado ou até determinado, em grande extensão, por fatores sociais e culturais. Estudar o desenvolvimento histórico da matemática permite tanto a professores como a alunos compreender o caráter evolutivo desta ciência, encarando-a como uma *ciência viva*. Alunos e professores podem observar como as ideias matemáticas surgiram no passado, e como muitos dos conceitos com que se ocupam/trabalham em sala de aula e na sua vida do dia a dia, bem como as várias técnicas usadas para resolver problemas, foram evoluindo ao longo do tempo (Swetz, 1984; Estrada, 1993; Fauvel, 1991; Furinghetti & Somaglia, 1998; Tzanakis & Arcavi, 2000). O material histórico pode dar uma ajuda às aulas de matemática (Swetz, 1984) e, portanto, as aulas de matemática podem tornar-se substancialmente mais humanizadas por meio de uma integração contextualizada da história da matemática no ensino da matemática (Bidwell, 1993; Reimer & Reimer, 1995; Swetz 1984). Por exemplo, os alunos podem observar que existem problemas que levaram vários séculos para serem resolvidos, como o último teorema de Fermat e o teorema das quatro cores, e perceber que hoje ainda existem muitos problemas insolúveis, como a conjetura de Goldbach (Ferreira & Rich, 2001). Além disso, podem apreciar, por um lado, como odesenvolvimento da notação, terminologia, métodos computacionais, modos de expressão e representação matemática levaram tantos séculos a evoluir (Tzanakis & Arcavi, 2000); por outro lado, como a linguagem e os meios usados para transmitir e comunicar o conhecimento matemático foram mudando ao longo dos tempos (Thomaidis, 1991; Grugnetti, 2000). A história da matemática fornece, assim, um vasto número de exemplos do papel da inovação e da criação no desenvolvimento da matemática, permitindo tanto a alunos como a professores apreciar e reconhecer que a matemática é, de facto, um esforço criativo e cultural humano (Barbin, 1991; Tzanakis & Arcavi, 2000; Ferreira & Rich, 2001).

A matemática na sua forma moderna é frequentemente vista como um produto particular da cultura Ocidental. Através do estudo da história da matemática, os professores e os alunos têm oportunidade de ficar a conhecer outras culturas menos conhecidas, nomeadamente sobre as abordagens efetuadas em relação à matemática no interior dessas culturas e o papel que a matemática tomou nessas mesmas culturas. O conhecimento da *matemática nas diferentes culturas*, em alguns casos, pode ajudar o professor no seu dia a dia de trabalho em salas de aula com alunos de multietnias, de modo a poder revalorizar a herança cultural local como meio de desenvolver tolerância e respeito entre todos. Na verdade, a integração da história da matemática na sala de aula de matemática abre as portas à abordagem multicultural no ensino. Assim, o multiculturalismo pode ser visto como

> a identificação e celebração da diversidade, o respeito e valor do trabalho

> dos outros, o reconhecimento de diferentes contextos, necessidades e propósitos e a compreensão de que cada sociedade faz e fez importantes contribuições para o corpo do conhecimento a que chamamos matemática (Grugnetti & Rogers, 2000, p. 51).

Aulas caracterizadas por uma perspetiva histórica integrada permitem, deste modo, que os alunos admitiam e reconheçam os contextos cultural, político, social e económico do desenvolvimento da matemática, bem como o importante papel que tomaram diversas e distintas culturas na evolução da mesma (Swetz, 1984; Barbin, 1991; Thomidis, 1991; Grugnetti, 2000). A história da matemática proporciona aos alunos várias oportunidades para investigar culturas e sociedades antigas e para conhecer, respeitar e valorizar diferentes culturas, incluindo a sua própria (Fauvel, 1991; Reimer & Reimer, 1995; Grugnetti & Rogers, 2000; Kelley, 2000). Os alunos podem, assim, perceber como as normas sociais e as práticas de diversas culturas influenciaram o desenvolvimento matemático. A título de exemplo, refira-se as influências políticas e religiosas no trabalho matemático de Galileu que afetaram a forma como as pessoas pensavam e operavam (Wilson & Chauvot, 2000). Gulikers e Blom (2001) também destacam o papel relevante que a história da matemática desempenha a nível cultural. Além da perceção de que a matemática na sua forma atual não é um produto apenas da cultura Ocidental, para estes autores, ter conhecimentos da história da matemática surge como uma mais-valia na questão da interdisciplinaridade, nomeadamente, nas áreas da física e astronomia.

Ao nível da prática didática dos professores e do seu reportório pedagógico

Ao estudar história da matemática e ao tentar reconstruir, de uma forma didática, aspetos do desenvolvimento histórico em tópicos específicos da matemática, os professores têm a oportunidade de:

(i) *identificar* quais as motivações subjacentes à introdução do conhecimento matemático. O estudo de exemplos que suscitaram o desenvolvimento histórico de conceitos e teorias, podem permitir ao professor ajudar os alunos a entenderem melhor esse mesmo conhecimento matemático;

(ii) *conhecer as dificuldades*, ou até mesmo os obstáculos que apareceram na história e que podem surgir em contexto de sala de aula, nomeadamente, do quão "avançado" pode ser um determinado assunto. De facto, mesmo que um assunto possa parecer simples, ele pode ser o resultado de uma evolução gradual. Em geral, esta evolução foi baseada em questões e problemas concretos os quais, muitas vezes, não são evidentes se o assunto for apresentado a partir do início, usando a notação atual. Assim, estas questões e problemas pressupõem uma maturidade matemática por parte dos alunos que estes podem ainda não possuir. Neste sentido, a história da matemática pode ajudar o professor a tomar conhecimento dos prós e contras de apresentar um assunto num determinado nível de escolaridade. O conhecimento histórico, por parte do professor, poderá ainda ajudá-lo a entender melhor os diferentes estádios da aprendizagem dos alunos, permitindo-lhe observar a existência de uma conexão entre os erros dos alunos, os obstáculos cognitivos e os problemas surgidos na história do desenvolvimento da matemática (Schubring, 1988; Gulikers & Blom, 2001). De facto, o conhecimento de importantes momentos da história da matemática pode fornecer ao professor ferramentas que antecipem os obstáculos epistemológicos dos alunos na aprendizagem da matemática (Struve, 1996; Waldegg, 1997; Gulikers & Blom, 2001), permitindo ao professor entender os erros e as falsas noções dos alunos em certos tópicos e, assim, ajudar a explicar o que hoje os alunos consideram difícil (Sfard, 1994; Gulikers & Blom, 2001). Também Fauvel (1997), Kelley (2000) e Ferreira e Rich (2001) reforçam esta ideia de conexão entre o assunto que é difícil para o aluno entender e aquele que foi difícil para a comunidade matemática aceitar. Desta forma, o conhecimento histórico e a integração da história da matemática no ensino proporciona aos professores uma mudança na forma como observam o processo de aprendizagem dos seus alunos, tornando-os mais sensíveis e capazes de entenderem melhor os obstáculos que os alunos encontram na aprendizagem de determinados conceitos e procedimentos matemáticos (Fauvel, 1991; Tzanakis & Arcavi, 2000; Ferreira & Rich, 2001), como por exemplo, os conceitos de zero, de zero fatorial, dos números negativos e das suas regras operatórias, dos números complexos, das séries e limites e dos conceitos associados às geometrias não-euclidianas (Ferreira & Rich, 2001). De acordo com Barbin (2000), as respostas dadas pelos alunos a um determinado problema histórico adotam um novo caráter quando comparadas com as respostas dadas pelos matemáticos ao longo dos tempos, uma vez que alunos, em vários níveis de ensino, encontram obstáculos de aprendizagem que são semelhantes àqueles que os matemáticos do passado tiveram (Radford et al., 2000). Uma análise histórica e epistemológica permite ao professor entender o porquê de certo conceito ser difícil para os alunos, e, deste modo, possibilita o desenvolvimento de estratégias de ensino. Na verdade, a literacia matemática do professor fica enriquecida, por exemplo, com um reportório didático de questões, respostas, explicações, exemplos e abordagens alternativas de apresentar um dado assunto ou de resolver um determinado problema (Tzanakis & Arcavi, 2000; Barbin, 2000; Tzanakis & Thomaidis, 2000).

A análise histórica e epistemológica que permite ao professor entender o porquê de certo conceito ser difícil para os alunos, de acordo com Barbin et al. (2000), tem duas particulares consequências na forma como o professor pode usar a dimensão histórica, de forma efetiva, no desenvolvimento de uma estratégia de ensino. Por um lado, o professor pode adotar uma atitude construtiva perante os erros realizados pelos alunos. Por outro, o professor pode focar-se na produção de uma variedade de respostas a um dado problema, relacionando-as com o conhecimento dos alunos. A dimensão histórica permite, assim, que a matemática seja vista não como uma sequência discreta de capítulos (de geometria, álgebra ou análise), mas sim como uma atividade que se move entre diferentes formas de raciocínio, conceitos e ferramentas matemáticos (Barbin et al., 2000). Uma aprendizagem sobre o desenvolvimento histórico da matemática, permite ainda ao professor entender o tempo que os alunos despendem em desenvolver o seu conhecimento matemático. O desenvolvimento histórico mostra que a comunidade de grandes matemáticos precisou de tempo, muitas vezes mais do que um século, para construir as bases conceptuais de diferentes assuntos. O que realça, uma vez mais, as intrínsecas dificuldades destas perceções e relembra aos professores a necessidade de serem pacientes com os alunos e de terem em atenção as dificuldades associadas a determinados conceitos matemáticos, num alto nível de abstração e de exatidão (Kronfellner, 2000). Por exemplo, os vários séculos necessários para os matemáticos serem capazes de tornar explícito o nosso corrente conceito de limite ou os problemas epistemológicos inerentes à manipulação do infinito, implica que seja natural que também os alunos devam demorar algum tempo a adquirir esses mesmos conhecimentos (Barbin et al., 2000) e que o raciocínio realizado em torno de conjuntos infinitos tenha inicialmente os contornos de raciocínios finitos.

(iii) *conhecer o processo criativo* de fazer matemática (Barbin, 1997). Desta forma, os professores e, por consequência os alunos, não só enriquecem a sua literacia matemática como podem apreciar melhor a natureza da atividade matemática. Além de poder constituir-se como uma motivação dos alunos à aprendizagem, a história da matemática poderá também suscitar a motivação dos próprios professores para aprofundar os seus conhecimentos matemáticos. De acordo com LeGoff (1994), um professor é também um investigador e acima de tudo um intelectual, que pode encontrar através da história da matemática o prazer de ensinar. Nesse sentido, explorar a história ajuda a manter o nosso interesse e entusiasmo pela matemática (Fauvel, 1997). Deste modo, o prazer que a história da matemática oferece aos professores pode também beneficiar os alunos através da riqueza do conhecimento que o professor adquire (Barbin, 2000). Contudo, entrar no mundo da história da matemática e procurar integrá-la no ensino, em contexto de sala de aula, poderá constituir um desafio (Estrada, 1993) que muitos professores poderão não estar dispostos a aceitar (Ferreira & Rich, 2001).

(iv) *enriquecer o reportório didático* com explicações, exemplos e abordagens alternativas de apresentar um determinado assunto ou de resolver um dado problema. Nesse sentido, a história da matemática proporciona uma mudança nas crenças e práticas de sala de aula. A história da matemática muda os conceitos epistemológicos da matemática dando ênfase à construção do conhecimento fora da atividade de resolver problemas. Por exemplo, ler fontes antigas permite um melhor conhecimento da essência do que é a matemática e melhora as próprias habilidades didáticas como professor (Barbin 1991, 1996, 1997, 2000). Estrada (1993) reforça esta ideia referindo que a introdução de referências históricas no ensino constitui um excitante desafio ao conhecimento e criatividade do professor, uma vez que além de entender melhor as ideias matemáticas, o professor tende a mudar a sua opinião sobre os seus alunos (Barbin, et al., 2000), vendo-os como alguém que pensa, investiga e questiona. Consequentemente, tende a existir um esforço de mudança nas práticas do professor afetando, portanto, a aprendizagem dos alunos de uma forma positiva. Contudo, uma mudança de crenças não significa necessariamente uma transferência na mudança das práticas de sala de aula (Thompson, 1992; Franke, Fennema & Carpenter, 1997; Raymond, 1997; Ferreira & Rich, 2001).

(v) *participar em situações de trabalho com fontes primárias*. A análise de textos históricos, portanto não escritos na notação atual, poderá suscitar a sensibilidade, tolerância e respeito dos professores perante formas não convencionais ou idiossincráticas de expressar ideias e resolver problemas. Esta sensibilidade e tolerância perante diferentes formas de raciocínio também poderá ser extensível aos alunos.

(vi) *mudar o discurso em sala de aula*. A oportunidade de contactar com diferentes formas de expressar ideias e resolver problemas poderá estimular o discurso, dos professores, em contexto de sala de aula. Esta atuação possibilita ao professor o desenvolvimento da capacidade de explicar e responder a variadas questões que muitas vezes surgem em aula (Bidwell, 1993; Kelley, 2000), questões essas que não raras vezes emergem a partir dos alunos que não estão dispostos a aceitar o que os professores dizem sem uma contextualização do assunto em causa (Reimer & Reimer, 1995). Por exemplo, os alunos podem colocar questões sobre a origem de certos métodos computacionais, notação e palavras que são usadas de forma corrente no interior da comunidade matemática (Estrada, 1993; Rubinstein & Schwartz, 2000; Tzanakis & Thomaidis, 2000). De facto, os termos matemáticos podem ser vistos como fósseis preservados com origem em tempos antigos e a ação de "escavá-los" pode resultar numa fascinante descoberta de como a matemática evoluiu ao longo dos tempos (Rubinstei & Schwartz, 2000).

Esta mudança que a história pode trazer à imagem da matemática e, consequentemente, à abordagem utilizada pelo professor nas suas práticas de ensino pode contrastar com a apresentação tradicional no ensino da matemática, correspondendo a um contraste no estilo pedagógico. Por um lado um processo de aprendizagem baseado no conhecimento transmitido pelo professor, por outro lado, um processo de aprendizagem que se baseia na atividade matemática desenvolvida pelo próprio aluno em contexto de sala de aula. Um ponto de vista heurístico está, portanto, associado a um ponto de vista construtivista da matemática em que o conhecimento é construído passo a passo e os conceitos são clarificados através da resolução de novos problemas. A história surge aqui não só como uma revelação, mas também como uma fonte de reflexão para a própria prática de ensino do professor (Barbin et. al., 2000).

2.4.2. Algumas formas de integração da história da matemática no ensino da matemática

Existem diferentes formas de integrar a história da matemática em contexto de sala de aula. Contudo, apesar de concordarem, de uma forma geral, com o valor e a importância da história da matemática no ensino, diferentes professores podem adotar vários estilos, uma vez que têm diferentes crenças, colocam ênfase em diversos aspetos por eles valorizados e têm por certos tópicos da história diferentes preferências (Siu, 2000).

De acordo com Furinghetti (1997), o objetivo de integrar a história da matemática no ensino é o desenvolvimento do conhecimento matemático. Nesse sentido, esta investigadora (idem) propõe um modelo que possibilita um processo geral de integração da história da matemática em sala de aula. Esse modelo desenvolve-se em várias fases. A primeira fase passa por *conhecer as fontes*, o que permite *selecionar os tópicos*, tendo em conta a turma em causa e as suas *necessidades*. Após esta fase, *planear a atividade*, tendo em conta os meios de avaliação, os objetivos e o contexto da atividade, seguidamente *executá-la* e, por fim, proceder à *avaliação* da mesma. De acordo com Ferreira e Rich (2001) esta avaliação final da atividade permite não só verificar qual o impacto da abordagem histórica realizada, o que de acordo com Barbin (2000) poderá ser verificada através de uma análise qualitativa, mas também verificar qual a avaliação que os alunos fazem da sua aprendizagem quando confrontados com este tipo de atividade.

Embora exista uma diversidade de abordagens possíveis na integração da história da matemática no ensino da matemática, destacam-se algumas das formas que surgem de modo mais regular em diversos artigos ou publicações do âmbito da educação matemática. Contudo, a imaginação e criatividade do professor toma nesta integração um papel relevante.

Fragmentos históricos

Uma forma de humanizar a matemática passa pela introdução de biografias de matemáticos nas aulas de matemática (Gulikers & Blom, 2001). Esta forma de integração poderá ser apresentada pelo professor ou pelos próprios alunos, como um resultado de um trabalho de projeto. Apresentar a história da vida e obra dos grandes matemáticos é uma forma de conhecer não só as suas grandezas, fraquezas, sonhos, desilusões, coragem, lutas e desistências, mas também os lampejos de génio que abriram novos caminhos, bem como os erros que muitos espíritos brilhantes cometeram (Estrada, 1991). Este contacto com homens e mulheres que ao longo dos tempos foram construindo a matemática, permite aos alunos constatar que não só os homens estiveram envolvidos nas grandes descobertas matemáticas, mas também mulheres que contribuíram com os seus trabalhos para o progresso desta ciência (Gulikers & Blom, 2001, p. 229).

Uma outra abordagem da história da matemática no ensino surge quando se pretende dar a conhecer a origem e significado de certos termos matemáticos (Estrada, 1993). É o caso dos termos "geometria", "cálculo", "triângulo", "álgebra", "algarismo", etc.. Com recurso à história da matemática, poder-se-á de uma forma contextualizada explicar a origem dos termos e o respetivo significado, tomando para os alunos estes termos um novo significado, e não apenas um conjunto de termos soltos desprovidos de sentido.

Apreciar e fazer uso explícito do papel do erro, conceções alternativas, mudanças de perspetiva de um assunto, paradoxos, controvérsias e revisão de afirmações implícitas e notação e argumentos intuitivos que aparecem historicamente poderá ser uma forma de implementar a história no ensino e aprendizagem da matemática. Este modo de integração permitirá aos alunos entender a motivação, origem e evolução de uma ideia, a origem de determinados problemas históricos, bem como conhecer métodos antigos de cálculo (Jahnke, Arcavi, Barbin et al., 2000).

Problemas históricos

No atual currículo de matemática, a resolução de problemas tem um papel relevante no ensino da matemática. No entanto, e de acordo com Ferreira e Rich (2001), resolver problemas esteve sempre no centro do desenvolvimento histórico da matemática. Desta forma, e de acordo com estas investigadoras, a integração em sala de aula de problemas históricos, permite aos alunos entenderem a motivação que esteve por detrás do nascimento e desenvolvimento de vários conceitos e procedimentos matemáticos. Além disso, o contacto e a resolução de problemas de diferentes períodos e culturas estimulam os alunos a reconhecerem e a compararem diferentes estratégias de resolução (Swetz, 1989; Reimer Reimer, 1995; Grugnetti, 2000; Ferreira & Rich, 2001); a estabelecerem conexões matemáticas (Grugnetti, 1994; Reimer & Reimer, 1995; Wilson & Chauvot, 2000; Ferreira & Rich, 2001); e a irem mais além nas suas explorações e discussões, (Fauvel, 1991; Wilson & Chauvot, 2000; Ferreira & Rich, 2001).

Fontes primárias

Segundo Estrada (1993, p. 19), «a escolha de textos como material de trabalho na aula dá a vantagem ao professor da escolha de um enquadramento histórico, acrescido à riqueza do tratamento de documentos originais.». Contudo, essa escolha, tem de ser cuidadosamente efetuada, tendo em consideração o assunto que se pretende abordar e o interesse e a relevância dos textos para esse mesmo assunto (Barbin, 1991; Ferreira & Rich, 2001). Conscientes deste cuidado, os argumentos a favor da utilização de fontes originais são diversos. Segundo Ferreira e Rich (2001) tanto assentam na ajuda que podem proporcionar aos alunos em olharem a matemática como um esforço de atividade humana, como proporcionar um melhor entendimento e apreciação das invenções matemáticas, dos processos inerentes à sofisticação de conceitos e técnicas e da clareza e elegância da própria notação. No entanto, o recurso a fontes primárias requer da parte do professor um conhecimento detalhado e profundo da época em que essas fontes foram escritas, bem como um conhecimento geral do contexto dessas ideias. Também o tipo de linguagem presente nesses escritos são completamente diferentes da prática usual de ensino. A leitura e a interpretação de textos históricos deve ser, assim, integrada de forma efetiva e não como um extra. Isso implica que o professor tenha um conhecimento histórico e seja capaz de manusear a matemática envolvida nesses documentos (Jahnke, Arcavi, Barbin et al., 2000).

Dramatizações, jogos matemáticos antigos e tecnologia

A dramatização e os jogos matemáticos antigos são outras propostas de integração da história da matemática em contexto de sala de aula (Ferreira & Rich, 2001). Estas formas de integração, não só permitem redescobrir a vida matemática do passado, mas também permitem apreciar o lado humano da atividade matemática (Tzanakis & Arcavi, 2000). A execução de uma dramatização por parte dos professores e alunos envolvidos instiga-os a proceder a uma pesquisa e investigação da temática e dos matemáticos em causa, o que lhes permite restabelecer argumentos famosos da história, levando-os a viver assuntos matemáticos (Tzanakis & Arcavi, 2000). Por outro lado, a introdução de jogos matemáticos antigos, estimula não só o sentido crítico dos alunos, nomeadamente no que se refere à análise de estratégias de jogo, mas permite proceder a uma investigação cultural das pessoas que inventaram e jogaram esses jogos (Ferreira & Rich, 2001).

Uma outra forma de abordar a história da matemática é o recurso às tecnologias (Ferreira & Rich, 2001). O acesso a computadores, recorrendo em particular a softwares de geometria dinâmica, e às calculadoras gráficas, permite aos alunos explorar determinados problemas históricos de forma interativa, como por exemplo, investigar certas proposições dos *Elementos* de Euclides, simular mecanismos que permitem resolver problemas geométricos dos antigos gregos (Tzanakis & Arcavi, 2000), construir determinadas curvas clássicas e explorar algoritmos, como os de Euler e Newton, para resolver equações (Flusser, 1992).

3. Argumentação em matemática

3.1. O conceito da argumentação em matemática

A argumentação faz parte da vida quotidiana do ser humano, uma vez que é um ato de interação social. Em diversas circunstâncias é-se conduzido a argumentar e/ou é-se alvo de argumentos desenvolvidos por outros. De facto, quando se pretende justificar ou refutar um ponto de vista, condenar ou enaltecer pessoas ou ações, ou avaliar as vantagens e as desvantagens de uma escolha ou decisão, é-se levado a fornecer razões a favor ou contra uma determinada afirmação, a fim de convencer o outro (o *interlocutor*) ou os outros (o *auditório*).

Recorrendo à expressão oral, escrita ou visual, a argumentação caracteriza-se por ser um processo

> (⋯) pelo qual uma pessoa – ou um grupo – intenta levar um auditório a adotar uma posição através do recurso a apresentações ou asserções – argumentos – que visam mostrar a validade ou o fundamento daquela. (Oléron, 1983, pp. 12 e 13)

Com esta enunciação, Oléron (1983) pretende realçar três características da argumentação. Em primeiro lugar, numa argumentação intervêm várias pessoas, o locutor, quem produz as asserções, e o(s) interlocutor(es), ou auditório, a quem o locutor se dirige. A argumentação caracteriza-se, assim, por ser um fenómeno *social*. Por outro lado, a argumentação não pretende ser um mero exercício especulativo, que tem por finalidade descrever um objeto ou narrar um acontecimento, mas sim uma prática pela qual uma das pessoas tem como objetivo exercer uma influência sobre a(s) outra(s), ou seja de *convencê-lo(s)*. Por fim, a argumentação, na defesa de uma determinada tese, não imposta pela força, faz intervir justificações e elementos de prova. Daí que a argumentação, processo que engloba elementos *racionais*, esteja relacionado com o raciocínio e a lógica. De facto, numa determinada discussão quando um ou mais participantes enunciam algo, não fazem mais do que declarar a validade dessa afirmação. Este propósito mostra, portanto, a disponibilidade dos participantes para agirem de forma racional e para estabelecerem as suas afirmações com mais detalhe, caso seja necessário (Banegas, 1998).

A *argumentação* é considerada como uma técnica ou método de discurso para estabelecer uma afirmação (Banegas, 1998), ou seja, um processo que produz um discurso lógico (não necessariamente dedutivo) sobre um dado assunto (Douek, 1999). Nesse sentido, numa discussão, a argumentação pode ser caracterizada como o esforço de transformar algo discutível em algo aceite por todos os participantes. Contudo, não é necessário que a discussão, à volta da qual se desenvolve a argumentação, se proceda de forma harmoniosa, pois «há argumentação quando algo não é admitido como evidente mas suscita discussão, tomadas de posição (decisões, escolhas), necessidade de defesa ou de crítica.» (Grácio, 1993, p. 73). De facto, em cada fase da argumentação podem ocorrer desacordos, o que permite a mudança e a correção das diferentes afirmações que vão sendo estabelecidas. O conjunto dessas afirmações, que surgem durante uma argumentação, e que são aceites por consenso, irão, portanto, passo a passo, tomando forma, sendo o desacordo superado. O resultado deste processo, que pode ser reconstruído, designa-se por *argumento* (Banegas, 1998). Neste sentido, o argumento pode ser definido como um intercâmbio discursivo com o propósito de convencer os outros pelo uso de certos modos de pensamento, podendo a argumentação ser vista como um processo interativo de saber como e quando participar nesse intercâmbio (Wood, 1999).

Argumento é, portanto, caracterizado como a razão ou razões apresentadas a favor ou contra uma proposição, opinião ou parecer que pode abranger diferentes formas de expressão, desde a forma verbal à não verbal, podendo, em particular, ser incluídos num argumento desenhos, esquemas e dados numéricos, ou seja, cálculos. Um argumento pode ser, assim, a afirmação de um facto, o resultado de uma experiência, ou simplesmente um exemplo, uma definição, o relembrar de uma regra, uma crença mútua ou então a apresentação de uma contradição que toma o valor de uma justificação, quando usados para explicar por que razão se aceita ou rejeita uma determinada proposição (Duval, 1999). Contudo, de acordo com Duval (1999), a argumentação não pode ser reduzida ao uso de um simples argumento, uma vez que requer a existência da capacidade de avaliar um argumento e opô-lo a outros argumentos, o que corresponde à dinâmica de qualquer situação de investigação ou debate. Weston (1996) observa que o argumento configura-se a uma investigação, visto que é uma forma de explicar e defender as conclusões a que se chega, conclusões essas fundamentadas por boas razões. Para este investigador (idem), um argumento fornece ao indivíduo dados e razões suficientes para que este tenha oportunidade de formar a sua própria opinião, o que destaca a atividade intencional e discursiva presente num argumento, requerendo, portanto, uma participação ativa daqueles a quem este se dirige (Grize, 1996). Para Duval (1999), os argumentos tomam assim parte de um discurso, consistindo a argumentação no uso de um ou vários argumentos que estão logicamente ligados entre si (Douek, 1999).

Argumentar, genericamente, consiste em oferecer um conjunto de razões a favor de uma conclusão ou oferecer dados favoráveis a essa mesma conclusão (Weston, 1996). Nesse sentido, os argumentos são tentativas de sustentar certos pontos de vista com recurso à razão.

A reconstrução de argumentos permite realçar os aspetos funcionais da argumentação, evidenciando que as diferentes afirmações que a constituem podem desempenhar diferentes papéis no estabelecimento e na estrutura interna de um argumento (Banegas, 1998). De facto, as características funcionais de uma argumentação determinam a sua finalidade, a sua utilidade e o seu papel no interior do discurso, enquanto que as características estruturais permitem identificar um argumento e definir uma estrutura (Pedemonte, 2002). Quanto ao valor e à força de um argumento, estes não dependem apenas do domínio do conhecimento em causa (matemática, direito, história, política, ...), mas também do *contexto* particular que motiva o recurso aos argumentos.

Para Duval (1999), a noção de argumento envolve a consideração de duas dimensões: o assunto e o contexto. Enquanto que a escolha do assunto permite atingir determinado objetivo, o contexto está associado à produção do próprio argumento. O contexto, para a produção de um argumento, é determinado, por um lado, pelo que motivou o recurso aos argumentos: o peso de uma decisão que tem de ser tomada, a resolução de um conflito de interesses ou de um problema que apresenta constrangimentos técnicos ou lógicos. Por outro lado, é determinado pelo objetivo: convencer alguém ou diminuir o risco de erro ou de incerteza na escolha de um processo. A noção de argumento apresenta, assim, três características: a escolha do assunto a argumentar, a motivação dessa escolha e o objetivo pretendido.

Contudo, Duval (idem) observa que longe do contexto da sua produção, o argumento perde força, sendo em qualquer dos casos essa força variável. Além disso, observa que por vezes, é necessário recorrer a diversos argumentos para conseguir convencer. Nesse sentido, são os constrangimentos do problema que determinam a escolha dos argumentos e não as crenças da pessoa a quem o argumento se dirige, o que significa que a força do argumento depende primeiramente do caráter apropriado do mesmo para a situação, estando a questão principal relacionada com o facto de o argumento funcionar ou poder funcionar (Duval, 1999).

A problemática da argumentação está, portanto, associada ao reconhecimento do importante papel da comunicação e da interação social na aquisição de conhecimento (Duval, 1999). Este reconhecimento não só permite realçar a importância da linguagem natural e do estreito vínculo existente entre a prova e a convicção, mas também favorece a comunicação, encorajando a confrontação de diferentes pontos de vista. Aplicada em diferentes contextos sociais, científicos, económicos, políticos e ideológicos, a argumentação pode ser analisada por diferentes áreas do conhecimento, em particular pela área da educação matemática. Contudo, quer em matemática, quer em outras ciências, o contexto de produção de um argumento é radicalmente diferente do que acontece em outros setores da atividade social nos quais se é levado a argumentar.

Em matemática o motivo e o objetivo da argumentação são específicos do problema que se pretende resolver (Duval, 1999). A necessidade de estudar a argumentação em matemática deriva, portanto, da necessidade de caracterizar os processos utilizados durante a resolução de um problema, isto é, os processos de descoberta, construção e exploração de uma conjetura (Pedemonte, 2002). O processo de resolver um problema e o próprio método de raciocínio utilizado para conseguir a sua solução apresentam traços argumentativos (Banegas, 1998). Banegas (1998) observa que, às vezes, a própria solução do problema é o próprio argumento, acontecendo isso, em particular, quando a solução envolve a apresentação de cálculos ou equações algébricas, estas últimas consideradas por Knipping (2008) uma forma condensada de argumento. De facto, nesses casos, o processo seguido para obter a conclusão coincide com o processo utilizado para obter um argumento que suporta essa mesma conclusão.

3.2. A argumentação e a prova matemática

Ao usar-se a argumentação no campo da matemática, verifica-se a tendência de a relacionar com a prova matemática, a demonstração. De facto, em diferentes trabalhos de investigação no âmbito da educação matemática, a argumentação frequentemente surge associada à prova (Reid & Knipping, 2010). O interesse da educação matemática pelo estudo da argumentação e, consequentemente, o aumento de trabalhos de investigação nesta área, está relacionado não só com o reconhecimento, por parte da filosofia e da linguística, que a linguagem natural mais do que a linguagem formal é a base de pensamento e comunicação humana, mas também pelo reconhecimento da própria educação matemática da importância do processo social na aprendizagem (Duval, 1999).

Contudo, apesar do interesse manifestado pelos educadores matemáticos pela a importância da argumentação no ensino da matemática, a sua relação com a demonstração não é de todo pacífica, sendo por vezes incompatíveis as conclusões obtidas nas diferentes investigações empreendidas. De forma sumária, e de acordo com Reid e Knipping (2010), é possível, nos diferentes estudos realizados, identificar quatro conclusões. Por um lado, há estudos que explicitam que a argumentação é completamente distinta da demonstração, o que constitui uma das causas de os alunos compreenderem com dificuldades as demonstrações. Por outro lado, há estudos que referem que a argumentação está relacionada com a demonstração de forma complexa, mas é um obstáculo à sua aprendizagem. Outros estudos referem ainda que a argumentação é distinta da demonstração, mas compatível com a sua aprendizagem. Por fim, há estudos que indicam que a argumentação é essencial ao ensino e aprendizagem da demonstração.

De acordo com Balacheff (1999), esta diversidade que pode ser observada entre a problemática da argumentação e a sua relação com a matemática, nomeadamente, com a prova matemática é devida às diferentes conceções teóricas existentes sobre a argumentação. Assim, para este investigador (idem), a referência a uma ou a outra dessas conceções sobre a argumentação, provavelmente origina a adoção de diferentes posições em relação ao que um argumento pode representar na prática matemática, especialmente no ensino e na sua relação com a demonstração.

Para Balacheff (1999), existem três autores cujas teorias, pelo contraste das suas problemáticas e pelas suas diferenças, podem ser utilizadas para estabelecer um sistema de referência em relação ao qual se podem situar os trabalhos sobre argumentação: Chaïm Perelman, Stephen Toulmin e Oswald Ducrot. Enquanto que para Perelman a argumentação tem por objetivo convencer, para Toulmin a argumentação é encarada do ponto de vista estrutural, sendo as premissas do argumento aceites numa comunidade. Já para Ducrot a argumentação é colocada no coração da atividade do discurso e é dado enfoque às estruturas gramaticais. Embora defendam diferentes conceções teóricas sobre a argumentação, estes autores permitem uma possível classificação da argumentação: a argumentação é o que convence uma outra pessoa, a argumentação tem uma estrutura lógica aceite na comunidade e a argumentação está presente em todo o discurso e fundada sobre elementos gramaticais (Reid & Knipping, 2010).

Em termos do papel da argumentação na matemática, diversos autores apoiam-se em Perelman, uma vez que relacionam a argumentação como estando associada ao ato de convencer. Contudo, outros autores veem a argumentação como a explicação de um processo de raciocínio usado para atingir uma determinada conclusão.

Apesar de alguns autores considerarem que a demonstração tem características particulares e, portanto, diferentes das presentes na argumentação, Pedemonte (2002) considera que a demonstração é uma forma particular de argumentação. Tal como a argumentação, a demonstração é um raciocínio (Duval, 1995), construído com o intuito de validar um enunciado e, nessa medida, tem também, por natureza, um caráter justificativo (Pedemonte, 2002). Contudo, apesar de ser um processo que produz um discurso lógico, a argumentação não origina necessariamente um raciocínio dedutivo, ao contrário da demonstração que fornece uma justificativa no interior de um domínio teórico, ou seja, onde uma proposição é obtida a partir de um sistema axiomático (Pedemonte, 2002).

Embora aceite a existência de uma relação entre a argumentação e a demonstração e considere esta última uma forma particular de argumentação, Pedemonte (2002) refere que os processos de descoberta, construção e exploração de uma conjetura, utilizados na resolução de um problema, não são demonstrações, uma vez que os processos que justificam um enunciado não provêm sempre de uma demonstração. De facto, muitas vezes, as justificações em matemática são argumentações, embora nem todas as justificações matemáticas sejam consideradas argumentações matemáticas. Pedemonte (2002) realça, assim, uma particularidade da argumentação matemática, o seu caráter justificativo, que se exprime através de um raciocínio, tendo, portanto, um caráter de uma *justificação racional*. Esta investigadora (idem) observa ainda que os raciocínios matemáticos não podem ser reduzidos apenas aos raciocínios demonstrativos, pois existem raciocínios matemáticos específicos da argumentação que fornecem as razões da aceitação ou da refutação de certas proposições. No entanto, apesar do caráter justificativo da argumentação, esta destaca-se da explicação que visa fazer compreender e clarificar aspetos que possam não parecer evidentes (Yackel, 2001). Mais do que permitir compreender, a argumentação pretende convencer (Pedemonte, 2002) de uma forma racional.

Também Badegas (1998) observa que a análise de um argumento em matemática nem sempre está relacionada com a prova matemática. Para este investigador (idem), não há razão para que o conceito de argumento ou de argumentação que estes estejam exclusivamente ligados à lógica formal, à forma como são apresentadas as provas matemáticas, uma vez que «muitas das atividades e esforços humanos são argumentativos, mas não lógicos no sentido estrito.» (Krummheuer, 1998, p. 224). De facto, na matemática há atividades que têm um caráter argumentativo, mas não num sentido estritamente lógico. Thurston (1994) observa que os matemáticos pensam cuidadosamente e criticamente sobre ideias matemáticas e efetuam provas num determinado contexto social, e dirigidas a uma audiência particular, o que revela, segundo Badegas (1998) que a certeza matemática não surge apenas a partir da verificação formal de argumentos formais. Nesse sentido, e de acordo com Toulmin (2008), o domínio da comunicação racional seria estritamente restrito e a argumentação como uma forma possível de comunicação, baseada na racionalidade, irrelevante, se a dedução lógica formal de conclusões, o raciocínio demonstrativo, fossem a única forma legítima de argumentação.

O interesse pela argumentação surge, assim, associado ao interesse por formas de raciocínio que escapam a normas e lógicas pré-definidas (Duval, 1999), estando, portanto, a argumentação intimamente ligada à atividade discursiva, servindo-se da linguagem natural como ferramenta de comunicação.

Mas quais as raízes históricas da argumentação matemática? Situar a argumentação matemática na história da matemática não só permite refletir sobre o lugar da argumentação no desenvolvimento da matemática e, consequentemente, no ensino da matemática, mas também caracterizar a argumentação ao nível funcional e estrutural. Enquanto que uma análise funcional determina a finalidade da argumentação, a sua utilidade e o seu papel no interior de um discurso, ou seja, a natureza do raciocínio, uma análise estrutural permite identificar uma argumentação e definir a sua estrutura, isto é, caracterizar as suas diferentes formas.

3.3. Raízes históricas da argumentação

Sendo a argumentação uma atividade de comunicação, a argumentação não é uma atividade exclusiva da matemática, visto que se encontra presente na vida do dia a dia. O seu desenvolvimento é, portanto, favorecido por sociedades democráticas nas quais são permitidas e fomentadas discussões, debates e desacordos.

Os primeiros registos de uma teoria da argumentação surgem na Grécia Antiga, numa sociedade em que a palavra apareceu como ferramenta política fundamental para comunicar ideias e persuadir os outros (Pedemonte, 2002). Devido à sua condição geográfica, a Grécia não desenvolveu um governo central. A organização política dos gregos era a *polis* (cidade-estado). Nesse sentido, os governos variavam consoante as cidades-estado. Ccontudo, em qualquer uma delas, cada indivíduo estava sujeito à lei e, portanto, os cidadãos eram motivados a desenvolver capacidades de argumentação e de debate (Katz, 1993).

A Grécia Antiga marca o início da civilização ocidental e o começo do espírito científico, que procura explicar o Universo de uma forma racional. O estabelecimento de relações comerciais com outros povos e o facto de se terem fixado por todo o mediterrâneo oriental, proporcionou aos gregos o confronto com outras culturas e outros conhecimentos. Este contacto não só aguçou a curiosidade, como também incentivou e fomentou a procura de respostas a questões fundamentais acerca do mundo. Os pensadores gregos foram criando as suas próprias opções, não aceitando de forma passiva as respostas dadas pelos outros povos e, consciencializando-se, a pouco e pouco, de que o mundo à sua volta era inteligível e que podiam descobrir as suas características através da investigação racional. Desta forma tornaram-se ávidos em descobrir e expor teorias em diferentes campos como a física, a biologia, a medicina e a política, estando convencidos de que a matemática era uma das ciências primárias, a base para qualquer estudo do mundo físico (Katz, 1993).

Este fenómeno de tentar questionar e explicar a Natureza, procurando descobrir os elementos materiais e as forças que a determinam, foi acompanhado pelo florescer das cidades gregas, que obrigaram a uma nova organização geográfica e política, com leis e cidadão livres que decidiam o destino das mesmas. Surgiu uma nova visão do mundo, em que o homem grego pretendia ter domínio sobre as coisas, tanto da natureza como da sociedade. Exigia-se que as próprias leis fossem lógicas, e defender uma causa implicava, o recurso à argumentação para convencer os outros de que se respeitava a lei (Grimberg, 2008).

Os inícios da matemática grega estão ligados à formação das cidades e, naturalmente, à procura da explicação sobre o Universo, surgindo a ideia de que a matemática tem de ser demonstrada. O desenvolvimento de uma teoria da demonstração e, consequentemente, o surgimento de uma axiomatização da matemática, de acordo com Pedemonte (2002) foi a resposta a uma dupla necessidade: por um lado, descrever um saber; por outro obter a aceitabilidade do mesmo. Esta forma de organização axiomática-dedutiva da matemática e a preocupação com o rigor da prova ficaram bem patentes nos *Elementos* de Euclides.

Os *Elementos* foram o resultado de um esforço em organizar o conjunto dos diferentes saberes matemáticos adquiridos até àquele momento, da forma mais racional possível. Há vários historiadores da ciência e da matemática que propõem diferentes hipóteses para o facto de os gregos terem inventado a prova e procurado uma organização axiomática-dedutiva da matemática. A questão sócio-política vivida na Grécia, as questões internas da própria matemática e a influência filosófica são três das razões apontadas (Jahnke, 2010).

A questão sócio-política da Grécia democrática providenciou um sistema político e social no qual as diferentes partes disputavam os seus interesses por meio de argumentos. Houve, portanto, a criação de um contexto no qual o argumento lógico era valorizado (Reid & Knipping, 2010), constituindo a argumentação política quotidiana um modelo para o desenvolvimento da demonstração.

Por outro lado, há quem defenda que a demonstração surgiu quando os gregos foram confrontados com a necessidade de identificar e eliminar afirmações incorretas existentes na matemática babilónica e egípcia. Por exemplo, de acordo com van der Waerden (1988), a partir dos mesopotâmios e dos egípcios, os gregos tiveram conhecimento de diferentes fórmulas para determinar a área de um círculo. Para este historiador da matemática (idem), o facto de existirem diferentes resultados contraditórios deve ter providenciado uma forte motivação para os gregos, reexaminarem, de um modo crítico, as regras matemáticas usadas, por forma a chegarem a resultados corretos. Outros investigadores apontam o problema da incomensurabilidade da diagonal e do lado dum quadrado e a necessidade de ensinar matemática, como motivações para a ênfase dada pelos gregos à demonstração (Reid & Knipping, 2010). Já para Hanna e Barbeau (2002), o interesse dos gregos pela prova está relacionado com a natureza das entidades estudadas na matemática. De acordo com estes investigadores (idem), enquanto que para os antigos egípcios, mesopotâmios e chineses o peso da evidência obtida pela observação era suficiente para justificar as afirmações matemáticas, para os gregos antigos esta forma de encontrar a verdade na matemática era pouco satisfatória. Segundo estes autores (idem), os gregos entendiam, que ao contrário das outras ciências, a matemática frequentemente trabalhava com entidades que eram infinitas em extensão ou número, como o conjunto dos números naturais, ou abstratas, como triângulos e círculos. Assim sendo, existia a necessidade de em matemática se fazerem afirmações absolutas, isto é, afirmações que pudessem ser aplicadas a toda instância sem qualquer exceção.

Por fim, há quem aponte como razão, para os gregos iniciarem a procura das demonstrações de afirmações matemáticas, a existência de uma classe ociosa na Grécia, que tinha tempo para as atividades filosóficas e matemáticas, sem a necessidade imediata de encontrar uma aplicação prática para essas mesmas atividades (Reid & Knipping, 2010). Esta tese, que aponta a influência da filosofia no interesse dos gregos pela prova, uma vez que o raciocínio matemático era largamente discutido pelos filósofos gregos, encontra-se patente nos trabalhos de Platão e de Aristóteles, usando inclusive alguns autores o termo “reforma platónica da matemática”, para mostrar a influência deste filósofo na própria matemática (Jahnke, 2010).

Naturalmente que qualquer uma destas teses é plausível podendo até combinar-se entre si. No entanto, qualquer que tenha sido a razão, a origem da demonstração é atribuída aos gregos, cuja inovação se propagou posteriormente a outras culturas. De facto, a exigência da demonstração impôs-se no domínio dos números e das figuras geométricas, sendo de tal forma impulsionada que, segundo Barthélemy (2003), suplantou a própria lógica, ideal de rigor para o saber, a ciência e a filosofia. É, portanto, «(...) à matemática grega que se deve a ideia da prova matemática, uma ideia que está na base da matemática moderna e, por extensão, no fundamento da nossa civilização tecnológica moderna.» (Katz, 1993, p.43). No entanto, a Grécia Antiga distinguiu-se, ainda, por ter alimentado uma preocupação suplementar – a preocupação com a argumentação – incentivando à discussão como forma de exercitar a razão (Barthélemy, 2003).

3.3.1. Escolas jónica e pitagórica

A partir do século VI a.C. surgem os primeiros registos de estudos matemáticos na Grécia Antiga, intimamente associados a duas figuras, semi-lendárias, consideradas entre os primeiros matemáticos gregos, Tales de Mileto e Pitágoras de Samos. É de notar que não há documentos matemáticos desta época, nem anterior a ca. 300 a.C.. De facto, nenhum tratado matemático do período pré-euclideano sobreviveu na sua versão original. A maioria das obras desta época apenas é conhecida através de referências ou comentários escritos, durante o período alexandrino; «(…) na melhor das hipóteses, foram preservadas citações nem sempre absolutamente fiáveis, de certos trechos.» (Sá, 2000, p. 225).

A moderna matemática nasceu na atmosfera do racionalismo jónico, presente na escola Jónica, fundada por Tales de Mileto, tradicionalmente considerado o pai da matemática grega. Estamos perante uma matemática que colocava não só a questão «Como?», mas também a moderna questão científica do «Porquê?» (Struik, 1997).

Tales «(…) simboliza as circunstâncias sob as quais foram estabelecidos os fundamentos não só da nova matemática, mas também da ciência e da filosofia modernas.» (Struik, 1997, p.73). Aristóteles considerava Tales o fundador da filosofia e essa distinção pode ser justificada pelo facto de os filósofos jónicos procurarem obter uma explicação racional e sistemática das características do universo, isto é, reconhecerem que os fenómenos materiais são governados por leis inteligíveis. Nesse sentido, atribui-se-lhe geralmente o inaugurar de todo o empreendedorismo científico grego (Katz, 1993).

A nível matemático, toda a tradição atribui a Tales diversos conhecimentos de geometria, sendo-lhe associada a utilização de métodos dedutivos em geometria, métodos esses resultantes dos procedimentos dedutivos da filosofia grega (Eves, 1994). Nesses resultados geométricos, apontados como sendo de Tales, verifica-se que há a preocupação de que os enunciados não sejam «(…) meras regras práticas aplicadas a casos particulares, mas sim formulações gerais de índole teórica.» (Sá, 2000, p.227). O facto de um certo número de teoremas ser associado a Tales não significa que os tenha descoberto, uma vez que estes eram conhecidos dos egípcios e mesopotâmios. A razão de serem associados a Tales prende-se com o facto de lhe ser atribuído o esforço de apresentar uma prova para cada teorema. «Embora não se saiba exatamente como é que Tales "provou" estes resultados, parece claro que avançou alguns argumentos lógicos.» (Katz, 1993, p. 44). Nessa medida, o valor desses resultados geométricos está relacionado com o facto de serem baseados em raciocínios lógicos, e não apenas baseados na intuição e experimentação (Eves, 1994) De acordo com Anglin (1994) esta é uma diferença essencial entre a matemática pré-grega e grega. Segundo este investigador (idem), os gregos estabeleceram uma conexão lógica entre os seus resultados, deduzindo os teoremas a partir de um pequeno conjunto de afirmações ou *axiomas*. No entanto, Sá (2000) observa que embora seja de acreditar que Tales ou algum dos seus contemporâneos apresentassem algum tipo de justificação para os resultados geométricos obtidos, não é de crer que estivessem em condições de fornecer uma demonstração desses mesmos resultados. De acordo com este investigador, «é natural supor que a argumentação fosse uma repetição aproximada do processo de descoberta, com grande predomínio da intuição visual sobre a dedução lógica.» (Sá, 2000, p.227).

Tales surge como o primeiro estudioso de geometria que se compromete com uma forma de raciocínio dedutivo, embora considerada parcial e incompleta (Eves, 1994). Para Eves (1994, p. 8), «(...) o facto de o primeiro pensamento dedutivo ocorrer no campo da geometria (e não no da álgebra, por exemplo) inaugurou uma tradição em matemática que se manteve até tempos muito recentes.».

Contudo, a influência de Pitágoras, fundador da escola pitagórica em Cretona, foi maior e definitiva, devido principalmente à propagação dos seus ensinamentos através de seus seguidores (os pitagóricos) e admiradores, de entre os quais se destacou Platão.

Na procura de leis eternas do universo, os pitagóricos estudavam geometria, aritmética, astronomia e música, as quatro disciplinas que na Idade Média constituiriam o *quadrivium*. Contudo, era a aritmética, a ciência do *arithmos* (*número* em grego), que tinha para os pitagóricos[1] maior importância, sendo as restastes três encaradas como ciências redutíveis à aritmética. Os pitagóricos investigavam as relações e propriedades entre números, sendo o número, para Pitágoras e seus seguidores, a chave para a compreensão do mundo (Sá, 2000), acrescentando-lhes, assim, uma marca do seu misticismo ao colocá-los no centro de uma filosofia cósmica que tentava reduzir todas as relações fundamentais a relações numéricas (Struik, 1997). Aristóteles testemunha esta forma de encarar o universo por parte dos pitagóricos ao escrever na sua *Metafísica* que

> Os assim chamados Pitagóricos foram os primeiros a dedicar-se às matemáticas e a fazê-las avançar; e, como tinham sido educados nelas, pensaram que os princípios das matemáticas eram princípios de todas as coisas. Como, de entre estes princípios, os números são, por natureza, os primeiros, e como julgavam encontrar nos números, mais do que no fogo, na terra ou na água, semelhanças com as coisas que são e que devêm (...) como, além disso, viam nos números as propriedades e as razões da harmonia; enfim, como todas as outras coisas lhes pareciam, na sua inteira natureza, serem formadas à semelhança dos números, e os números lhes pareciam ser as realidades primordiais de toda a Natureza, eles consideraram que os princípios dos números eram elementos de todas as coisas, e que os céus eram uma razão musical e um número. (*in História da Matemática*, Estrada et al., 2000, p. 230)

Ao considerar o número como base do Universo, os pitagóricos entendiam que tudo podia ser contado, incluindo os comprimentos, necessitando, no entanto, para isso de uma medida. Ao assumir que, num determinado problema, se podia sempre encontrar uma medida, esta tornar-se-ia a unidade, logo não podia ser dividida. Esta incapacidade dos pitagóricos em reconhecerem a distinção fundamental entre número e grandeza, ou entre a indivisibilidade da unidade para o número e a infinita divisibilidade das medidas de grandeza como o comprimento, abalou a filosofia pitagórica (Katz, 1993). A existência de grandezas incomensuráveis foi, de facto, devastadora para a filosofia pitagórica. A crença dos

[1] Para os gregos, *número* (*arithmos*) corresponde ao nosso conceito de *número natural*.

pitagóricos que a essência de tudo, tanto na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida, podia ser explicada em termos de *arithmos*, isto é, das propriedades intrínsecas dos inteiros e suas razões, tinha sido colocada em causa, uma vez que a descoberta da incomensurabilidade mostrava que na geometria os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever simples propriedades básicas (Boyer, 2002). As circunstâncias que rodearam a primeira perceção da incomenurabilidade são incertas quanto a época da descoberta. Não se sabe, portanto, quando e como foi feita esta descoberta, embora existam diferentes hipóteses, apontadas por diversos historiadores. Contudo, Aristóteles nos seus *Segundos Analíticos*, apresenta uma prova considerada dentro do espírito pitagórico, apesar de utilizar a redução ao absurdo (Sá, 2000). A existência de tal prova pressupõe que por esta altura a noção de prova era central na conceção grega de matemática (Katz, 1993). Para Katz (1993), embora os gregos do século V a.C. reconhecessem explicitamente que determinados enunciados tinham que ser aceites sem provas e não haja qualquer evidência de que possuíssem todo o mecanismo de um sistema axiomático, com certeza que tinham decidido que alguma forma de argumentação lógica era necessária para determinar a verdade de um resultado particular.

A escola pitagórica foi responsável não só por estudos de novos resultados a respeito da aritmética e da geometria, mas também pelo estabelecimento da matemática como uma disciplina racional. De acordo com Miorim (1998), a nível educacional pode-se dizer que foi na escola pitagórica que a matemática, pela primeira vez, foi introduzida na educação grega e reconhecida como um elemento de grande valor formativo.

3.3.2. Escola eleata

Embora a escola pitagórica tenha tido diversos seguidores e admiradores (como Platão e mais tarde os neo-pitagóricos, século I d.C.), as conceções pitagóricas, no decorrer do século V a.C., foram sujeitas a críticas por parte de outras escolas que propunham sistemas alternativos (Sá, 2000).

Contemporânea da escola pitagórica, existia em Itália um outro centro filosófico importante, a escola eleata, fundada nos finais do século VI a.C. por Senófanes, tendo como princípio fundamental a unidade e a imutabilidade do ser (Vasconcellos, 2009). A esta escola pertenceram Parménides e Zenão de Elea, tendo o primeiro fundado uma corrente filosófica considerada a mais importante das que se opuseram ao pitagorismo (Sá, 2000).

De facto, são vários os aspetos da filosofia dos eleatas que se revestiram de grande importância para o desenvolvimento posterior da matemática (Sá, 2000), tais como o caráter ideal dos entes matemáticos e a estruturação axiomática das teorias matemáticas. Contudo, Sá (2000) observa que aos pensadores eleatas está associada a invenção da dialética e do método de *redução ao absurdo*, ou *análise indireta*, uma forma de provar uma proposição que consiste em aceitar, por momentos, a sua negação e daí deduzir a sua contradição, ou seja, considera-se que as condições impostas no enunciado não são satisfeitas. Partindo desta hipótese deduzem-se consequências absurdas, logo conclui-se que a hipótese é absurda e, portanto, a proposição inicial enunciada é verdadeira. Vasconcellos (2009) observa que a redução ao absurdo pode ser considerada um caso particular do método de Hipócrates designado por redução.

Parménides foi o primeiro filósofo a formular os princípios lógico de identidade e não contradição, que mais tarde seriam desenvolvidos por Aristóteles. Já o seu discípulo, Zenão, é visto como um grande dialecta, sendo considerado por Aristóteles como o fundador da dialética. Por volta de 450 a.C., Zenão acompanhou o seu professor e amigo Parménides a Atenas, onde conheceu Sócrates. A impressão causada por Zenão foi de tal ordem que Platão descreve esse encontro num dos seus livros, o diálogo *Parménides*, no qual Zenão tem uma discussão filosófica com Sócrates, nessa altura ainda jovem.

Zenão também foi autor de um livro onde apresentava 40 argumentos contra os pitagóricos. O seu objetivo era defender as ideias de Parménides, que apresentavam o universo como único, imutável e imóvel, pelo que movimento, mudança, tempo e pluralidade não seriam mais do que ilusões. Como seria de esperar, esta posição atraiu muitas críticas. Os argumentos indiretos de Zenão, forma de argumentação típica dos filósofos da escola eleata, tentavam mostrar que defender a posição contrária à de Parménides era contraditório e absurdo. Segundo Radice (1981, p. 44), Zenão «(…) não queria demonstrar a impossibilidade do movimento, mas reduzir ao absurdo as teses dos pitagóricos que compunham o contínuo com átomos (pontos) de dimensão finita», ou seja, pretendia mostrar que a teoria dos pitagóricos era incapaz de explicar o movimento. Na hipótese pitagórica, a soma de um número crescente de segmentos, ainda que cada vez mais pequenos, devia tender para o infinito, isto porque cada um conteria um número inteiro de átomos dotados de dimensão. Ou seja, para os pitagóricos isto equivaleria a efetuar a soma de infinitos números inteiros que naturalmente tenderia para o infinito.

Dos 40 argumentos de Zenão, apenas alguns chegaram até aos nossos dias, e mesmo sobre estes há alguma incerteza e confusão, nomeadamente, sobre o exato enunciado de cada argumento. Dos poucos argumentos de Zenão de que ainda hoje há vestígios, há quatro que aparentemente foram dirigidos contra a ideia do movimento, e que nos foram transmitidos por descrições dadas por Aristóteles: *dictomia*, *Aquiles*, *seta* e *estádio*.

Apesar de se poder considerar essas descrições pouco fiáveis, uma vez que Aristóteles não nutria grande consideração pelos eleatas, visto que ao contrário destes valorizava a informação obtida através dos sentidos, estes argumentos representaram um importante desafio ao longo de séculos para físicos, matemáticos e filósofos (Sá, 2000). De facto, embora Zenão não tenha sido um verdadeiro matemático, levantou questões que dizem respeito à matemática (Vasconcellos, 2009). Sobre esta ideia referimos, a título de exemplo, os argumentos da dicotomia e do Aquiles, pois embora não façam referência explicita a quantidades infinitesimais e ao infinito, podem ser interpretados como abordando a questão que hoje seria descrita como a convergência de uma série real (Sá, 2000; Vasconcellos, 2009). Contudo, para os matemáticos gregos, que não tinham uma real conceção de convergência ou infinito, estes raciocínios eram incompreensíveis. Aristóteles considerou estes argumentos de Zenão com o objetivo de os refutar, daí a discussão alargada nos seus trabalhos sobre as noções de infinito, indivisíveis, continuidade e singularidade (Katz, 1993).

De forma a esclarecer as intenções de Zenão, observem-se os argumentos da dicotomia e do Aquiles.

No argumento da dicotomia, Zenão afirma que não há movimento, uma vez que antes de um móvel percorrer um certo espaço tem de percorrer metade desse espaço. Contudo, antes de percorrer essa metade, o móvel tem de percorrer metade de metade desse espaço e assim indefinidamente. Portanto, o movimento não pode chegar a começar.

De facto, considerando o segmento de reta [AB] e designando por M_1 o ponto médio de [AB], por M_2 o ponto médio de [AM_1], por M_3 o ponto médio de [AM_2] e assim sucessivamente,

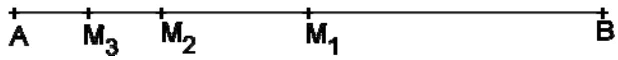


Figura 3.1. Bissecção sucessiva dum segmento de reta.

tem-se que $\overline{AB} = \overline{M_1B} + \overline{M_2M_1} + \overline{M_3M_2} + \ldots$, ou seja o segmento de reta AB decompõe-se em infinitos segmentos de reta. O argumento de Zenão chama a atenção para a possibilidade de uma grandeza ser igual à soma de infinitas grandezas. Em notação atual, temos

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{AB}}{4} + \frac{\overline{AB}}{8} + \frac{\overline{AB}}{16} + \frac{\overline{AB}}{32} + \ldots + \frac{\overline{AB}}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{AB}}{2^n}$$

No argumento do Aquiles, a situação é semelhante. Neste argumento, Zenão afirma que se, numa corrida, Aquiles der algum adianto a uma lenta tartaruga, então nunca a conseguirá vencer. De facto, quando Aquiles atingir o local de onde a tartaruga partiu, esta já terá avançado e encontrar-se-á noutro local mais à frente; e quando Aquiles atingir esse local, já a tartaruga realizou novo avanço e assim indefinidamente. Portanto, Aquiles nunca conseguirá alcançar a tartaruga.

O pretenso absurdo a que Zenão chega com estes dois argumentos resulta da possibilidade de decompor uma grandeza limitada numa infinidade de partes (Sá, 2000). Embora, como já referido, este tipo de questões não pudessem ser compreendidas em profundidade pelos gregos, esta forma de tratar a argumentação, adotada por Zenão, encerra uma relação próxima com a redução ao absurdo, sendo considerada uma das primeiras introduções deste método que mais tarde se tornará um dos processos de demonstração usado pelos matemáticos. Boyer (2002) observa que «(…) o método adotado por Zenão era dialético, antecipando Sócrates nesse modo indireto de argumento: partindo das premissas de seus oponentes, ele as reduzia ao absurdo.».

3.3.3. Escola de Quios

Ao longo dos séculos V e IV a.C., assistiu-se à axiomatização da matemática, encarada pelos historiadores como uma das manifestações mais originais da civilização grega e com maior importância para o desenvolvimento da ciência, sendo Hipócrates de Quios considerado o maior matemático do século V a.C. e o primeiro nome associado a esta tendência (Sá, 2000).

Fundador de uma escola de geometria em Atenas, através do *relato de Eudemo-Proclo*[2], sabe-se que Hipócrates foi o primeiro a ter composto o tratado *Elementos*, contudo nenhum tratado de Hipócrates é hoje conhecido. Conjeturando o seu conteúdo, através de relatos de comentadores gregos, julga-se que este tratado conteria resultados de geometria de tradição jónica e de aritmética de tradição pitagórica. Estes resultados mais "elementares" seriam a base para a dedução de outros resultados mais complexos, o que leva a supor que o tratado estivesse configurado de modo axiomático. Este tipo de composição mostra que, em meados

[2] Trata-se de uma curta lista de nomes e de brevíssimas indicações sobre as respetivas contribuições matemáticas. Não possuindo qualquer detalhe técnico, constitui a primeira descrição (hoje disponível) relativamente geral do desenvolvimento da matemática grega até ao tempo de Euclides (Sá, 2000).

do século V a.C., era já muito significativo o pendor axiomático da matemática (Sá, 2000). É ainda de observar que a contribuição de Hipócrates não se limitou apenas à composição do seu tratado *Elementos*, de uma forma axiomática, mas à generalização e emprego, como método, de um modo de demonstração designado por *redução* (Vasconcellos, 2009), método este que consiste em transformar um problema ou um teorema, noutro, cuja resolução ou demonstração permite, como consequência, a resolução ou demonstração da proposição primitiva.

De acordo com Sá (2000), o aperfeiçoamento da exposição dos conhecimentos num sistema dedutivo passou a ser uma das preocupações dos geómetras. Este esforço em relação à matemática na Antiguidade haveria de culminar com a publicação dos *Elementos* de Euclides.

3.3.4. Os sofistas

Tendo em consideração as inovações pedagógicas surgidas na Grécia Antiga, na segunda metade do século V a.C. apareceram os sofistas.

Após a guerra com os Persas, emerge uma nova situação política e social, com representação significativa em Atenas. Este novo clima social e político contribuiu para um grande desenvolvimento do comércio. Com esta nova realidade, a nobreza perde o seu estatuto para uma nova classe, a burguesia. Os sofistas, os primeiros professores pagos, vão dedicar-se ao ensino, na praça pública, dos filhos dos comerciantes.

O ensino realizado pelos sofistas não se situava na procura da verdade. Mestres na arte de eloquência, os sofistas ofereciam as suas lições a quem procurasse adquirir habilidade prática e alta cultura intelectual (Vasconcellos, 2009). Os jovens que procuravam este ensino eram referidos como *sofisticados*. Contudo, e de acordo com Vasconcellos (2009) os filósofos estabelecidos em Atenas censuravam os sofistas por causa da sua vaidade e pela pretensão de serem considerados possuidores de uma ciência ilimitada.

O mais antigo sofista, Protágoras de Abdera, considerado o sofista do relativismo, cuja máxima era "o homem é a medida de todas as coisas", propunha-se ensinar a arte da política por meio da persuasão e da arte do discurso, a retórica (Miorim, 1998). De acordo com Miorim (1998), a arte de persuasão de Protágoras baseava-se na hipótese de que numa discussão tanto era possível defender como acusar, uma vez que existem sempre prós e contras. Esta autora (idem) refere ainda que se utilizava um método de discussão cuja base provinha dos paradoxos de Zenão de Eleia.

A importância dada pelos sofistas ao ensino da matemática está relacionada com o facto de estes valorizarem a cultura em geral. Colocando sempre o enfoque na oratória, consideravam que um bom orador, para além de dominar as regras da retórica e as técnicas de persuasão, deveria versar e conhecer todos os assuntos, o que naturalmente incluía a matemática. É por esta razão que se atribui a popularização desta disciplina aos sofistas. Os sofistas «abordavam problemas de natureza matemática, como parte de uma investigação filosófica do mundo natural e moral, desenvolvendo uma matemática mais no espírito da compreensão que da utilidade.» (Struik, 1997, p. 75). Apesar de não desenvolverem muita matemática, segundo Struik (1997) seria para nós muito importante seguir as suas discussões, uma vez que a atitude mental dos sofistas permitiu-lhes a abordagem de os fundamentos do pensamento exato.

Contudo, algumas das ideias matemáticas dos sofistas foram, posteriormente, alvo de críticas por parte dos próprios matemáticos. Relativamente a Protágoras, rebateu-se a ideia de que não existiria alguma tangente que tocasse uma circunferência num só ponto. Quanto a Antifonte, criticou-se a ideia de que era possível quadrar o círculo, uma vez que se soubesse quadrar qualquer polígono, bastaria inscrever polígonos regulares no círculo aumentando indefinidamente os seus lados e, portanto, prosseguindo a construção até ao infinito, esses polígonos se confundiriam com a própria circunferência. Na proposição *Elementos* III, 2, Euclides responde à ideia de Protágoras ao referir que se num círculo forem tomados dois pontos arbitrários sobre a circunferência, os pontos pertencentes à corda que une esses dois pontos arbitrários encontram-se no interior do círculo. Também o método de exaustão, termo que aparece no século XVII introduzido pelo matemático jesuíta Grégoire de Saint-Vicent (Struik, 1997), é baseado na ideia de quadrar o círculo de Antifonte. Este método de demonstração surge na proposição 1 do Livro X dos *Elementos* de Euclides e mais tarde é utilizado por Arquimedes na demonstração da proposição 1 *Da Medida do Círculo*, de que todo o círculo equivale ao triângulo retângulo para o qual o raio é igual a um dos lados adjacentes ao ângulo reto e o perímetro é igual à base.

3.3.5. Sócrates

Os sofistas tinham como propósito o desenvolvimento da argumentação e da habilidade retórica como forma de convencer o outro, admitindo ser sempre possível, mediante uma determinada combinação de fatores e circunstâncias, validar determinada opinião, não existindo, portanto, uma verdade única. Contudo, os sofistas tiveram opositores entre os próprios filósofos de entre os quais se destacaram Sócrates e Platão.

Sócrates, apesar de divulgador de conhecimentos como os sofistas, e portanto, com um estilo de vida similar, não vendia os seus ensinamentos. Os seus discursos, baseados na perceção de que a sabedoria começa pelo reconhecimento da própria ignorância, procuravam sempre a verdade. Apesar de não guardar apreço pela matemática, a sua procura da verdade, notada pela contrariedade em que via o uso da retórica por parte dos sofistas, trouxe à luz da matemática contribuições importantes quanto ao modo de exposição dos argumentos. Através da dialética, Sócrates operava com perguntas e respostas, ou seja, a pesquisa procedia passo a passo, e não era possível avançar sem esclarecer o que ficava para trás. Enquanto que o sofista refutava por refutar, para ganhar a disputa verbal, Sócrates refutava para purificar a alma da sua ignorância.

Sócrates recorria à *ironia* e à *maiêutica* para argumentar com os seus interlocutores (discípulos e opositores). Para Sócrates, a filosofia não era possível enquanto o indivíduo não se voltasse para si próprio e reconhecesse as suas limitações. O autoconhecimento era um dos pontos fundamentais da filosofia socrática, daí o seu lema "conhece-te a ti mesmo". Sócrates entendia que a sabedoria começava pelo reconhecimento da própria ignorância. “Só sei que nada sei” era, para Sócrates, o princípio da sabedoria, atitude em que se assume a tarefa verdadeiramente filosófica de superar o enganoso saber baseado em idéias pré-concebidas.

A sua filosofia era desenvolvida mediante diálogos críticos com os seus interlocutores. Esses diálogos podem ser divididos em dois momentos básicos: a ironia (do grego *eironeia*, perguntar fingindo ignorar) e a maiêutica (de *maieutiké*, relativo ao parto, arte de trazer à luz), método socrático.

Através da ironia, expressão utilizada por Sócrates com um sentido muito diferente do usado nos nossos dias, Sócrates levava os seus interlocutores à convicção do erro, ou seja, a que estes confessassem as suas próprias contradições e ignorâncias. Sócrates costumava iniciar um diálogo fazendo perguntas e obtendo dessa forma as opiniões do interlocutor, opiniões essas que ele aparentemente aceitava. Depois, por meio de um interrogatório hábil, desenvolvia as opiniões originais do interlocutor, mostrando os erros e os absurdos das suas opiniões superficiais, através de consequências contraditórias ou absurdas dessas mesmas opiniões, o que lhe permitia que o interlocutor confessasse o seu erro ou a sua incapacidade para alcançar uma conclusão satisfatória. O seu objetivo inicial era demolir, nos seus interlocutores, o orgulho e a presunção do saber. Libertos do orgulho e da pretensão de que tudo sabiam, os interlocutores podiam iniciar o caminho da reconstrução das próprias ideias. Entrava-se, assim, na segunda fase do diálogo (Bruna, Andrade, & Strazynski, 1987).

3.3.6. Platão

Ao contrário de Sócrates, o seu discípulo Platão tinha grande admiração pela matemática. A *Academia* fundada por Platão no século IV a.C., tornou-se um grande centro de estudo e ensino de filosofia e ciência. «Não entre aqui quem não souber Geometria» era a inscrição que se podia ler no pórtico da Academia, o que revelava a grande importância que Platão dava ao estudo da matemática. Segundo Katz (1993), para Platão, um aluno que não soubesse geometria ignoraria lógica e, consequentemente, não seria capaz de entender a filosofia. O alto prestígio de Platão foi o principal promotor do desenvolvimento intelectual do seu tempo, atraíndo a Atenas os homens ávidos de saber e de todos os países e colónias gregas (Vasconcellos, 2009). De facto, à *Academia* pertenceram diversos e notáveis geómetras, sendo o seu papel considerado inspirador e guia de outros, como uma importante contibuição de Platão para a história da matemática (Boyer, 2002). Acresce referir que a influência que Platão exerceu sobre os seus contemporâneos bem como sobre os seus sucessores manifesta-se na objeção, por ele apresentada, relativamente ao uso, na geometria, de instrumentos diferentes da régua e do compasso. Esta objeção «(...) foi imediatamente aceite como um dogma respeitado por todos.» (Vasconcellos, 2009, p. 157)

Platão colocava a matemática na base de toda a ciência. Na *República*, o seu mais famoso tratado, Platão considera a matemática como parte da educação, sendo constituída por cinco assuntos: aritmética, geometria plana, geometria sólida, astronomia e harmonia (música) (Katz, 1993). Para Platão a geometria constituia «(…) um método próprio para dirigir a alma para o ser eterno, uma escola preparatória para um espírito científico, capaz de dirigir a sua atividade para as coisas sobre-humanas.» (Vasconcellos, 2009, p. 156). Assim, o conhecimento da geometria passou a ser tido como indispensável para a formação dos filósofos da sua escola, daí a inscrição no pórtico da Academia. Contudo, para a Platão, a importância do estudo da matemática residia no seu valor formativo para a mente humana, e não nas aplicações de índole utilitária (Sá, 2000), o que denota a predileção de Platão pelo estudo das matemáticas puras (Vasconcellos, 2009) sendo, portanto, as matemáticas a melhor fonte para a aplicação dos métodos de demonstração e de investigação (Vasconcellos, 2009). De facto, Platão deu «(…) um forte impulso à ciência, não só recomendando incessantemente a cultura das *ciências exatas*, mas tratando, nos seus escritos filosóficos, de múltiplos exemplos de *questões matemáticas* (…)» (Vasconcellos, 2009, p. 157). Mais do que basear a matemática na observação e na experimentação, os gregos basearam-na na lógica. Contudo, não só usaram argumentos lógicos, como refletiram sobre os seus próprios raciocínios e métodos. O próprio Platão refletiu sobre as ferramentas que podiam ser usadas em geometria (Reid & Knipping, 2010), sugerindo aos geómetras «(…) a conveniência de fundamentarem as demonstrações com a exposição duma série de *definições*, de *postulados* e *axiomas* cuidadosamente coordenados (…)» (Vasconcellos, 2009, p. 157). Além disso, classifica, «(…) de uma maneira sistemática, os *métodos* que podem ser empregados para tratar (…)» (Vasconcellos, 2009, p.157) dessas mesmas questões matemáticas, procedendo à distinção entre a *análise* e a *síntese*, «(…) expondo, sob uma forma geral e acessível a todos, o *método analítico* e o seu caráter eminentemente científico.» (Vasconcellos, 2009, p. 157). De acordo com Boyer (2002), supõe-se que Platão formalizou o método analítico como processo de demonstração, contudo Boyer (idem) observa que é pouco provável que tenha sido Platão o primeiro a notar a eficácia deste método, uma vez que ele está associado a um processo de descoberta. Este método de raciocínio consiste em começar por supor resolvido o problema ou demonstrado o teorema em questão,

> deduzindo, em seguida, desta hipótese resultados que, se são conhecidos como verdadeiros, e tais que, retomando a marcha inversa, se chega pela dedução à hipótese feita, nos levam a concluir ser esta exata: no caso de não se poder fazer a prova *sintética*, pela marcha inversa, nenhuma conclusão pode ser formulada. (Vasconcellos, 2009, p. 163)

Este método torna-se vantajoso, quando a cadeia de raciocínio que vai das premissas ao que se quer provar não é evidente (Boyer, 2001). É de observar que a demonstração por absurdo é um caso de análise indireta, pois em vez de se supor a questão resolvida, como na análise direta, supõe-se, ao contrário, que as condições impostas no enunciado não são satisfeitas.

Exemplificam-se, seguidamente, os métodos analítico e sintético.

Análise

Suponha-se que se pretende trissectar o ângulo ABC. Na análise, considera-se que já se tem o ângulo trissectado, ou seja, que $A\hat{B}V = 2V\hat{B}C$. Por A, traçam-se uma paralela e uma perpendicular a BC. Prolonga-se BV. Sejam E e D, respetivamente, os pontos de interseção de BV com a paralela e a perpendicular anteriormente construídas. Daqui resulta que $E\hat{B}C = A\hat{E}B$. Seja F o ponto médio de DE; então $\overline{FA} = \overline{FD} = \overline{FE}$, porque o $D\hat{A}E$ é reto, pelo que se pode inscrever numa circunferência, e, portanto, DE é diâmetro da circunferência que passa por A, D e E. Assim, o ▯[AFE] é isósceles e, portanto, $E\hat{A}F = F\hat{E}A$. Mas então, $A\hat{F}B = 2A\hat{E}B = 2E\hat{B}C = A\hat{B}V$ e, consequentemente, o ▯[AFB] também é isósceles, pelo que $\overline{AB} = \overline{AF}$. Logo, $\overline{DE} = 2\overline{AB}$. Tem-se, assim, um processo de descoberta que permite encontrar as condições necessárias para proceder à trissecção de um ângulo.

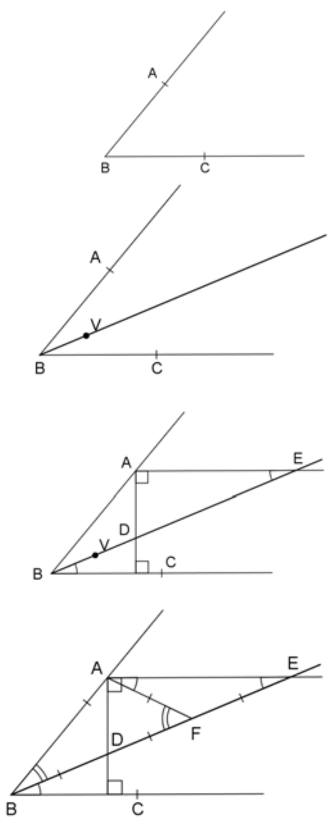


Figura 3.2. Método analítico.

Síntese

Através da síntese tem de se construir um ângulo que é a terça parte do ângulo dado e depois demonstrar que esse ângulo é de facto a terça parte.

Inicia-se o processo, considerando num dos lados do ângulo que se pretende trissectar um ponto, A, que não seja o vértice do ângulo. O vértice do ângulo designar-se-á por B, e traçam-se por A, respetivamente, uma paralela e uma perpendicular ao outro lado do ângulo, lado BC. De seguida insere-se um segmento de reta apontado para B, vértice do ângulo a trissectar, que intersete a paralela e a perpendicular anteriormente construídas nos pontos E e D, respetivamente, por forma a que $\overline{DE} = 2\overline{AB}$. Estamos perante uma construção por nêusis, pois é uma construção por uma inclinação.

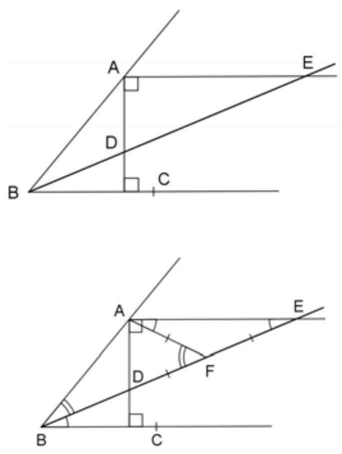


Figura 3.3. Método sintético.

Agora é preciso mostrar que esta construção é de facto a solução pretendida. Como AE //BC, por construção, o ângulo AEB é geometricamente igual ao ângulo EBC, ângulos alternos internos. Ora, o ângulo DAE é reto, portanto, pode ser inscrito numa semicircunferência de centro em F, ponto médio de DE, e que passa por D e E. Logo, $\overline{FA} = \overline{FD} = \overline{FE}$. Assim, o Δ[ADE] é isósceles e, portanto, $A\hat{F}B = 2A\hat{E}B = 2E\hat{B}C$. Ora, por construção $\overline{AB} = \overline{AF}$, portanto, o Δ[ABF] é isósceles e $A\hat{F}B = A\hat{B}E$, ou seja, $A\hat{B}E = 2E\hat{B}C$, portanto, $E\hat{B}C = \frac{1}{3}A\hat{B}C$.

Os tratados matemáticos que chegaram até nós apresentam sobretudo a versão *sintética* dos resultados. Em particular, os *Elementos* de Euclides tornaram-se o paradigma da apresentação sintética da matemática. A análise conhece-se por referências sobretudo de Papo e Proclo e por alguns vestígios do método de descoberta deixados pelos matemáticos no produto final sintético. Observe-se que as tentativas de reconstituição do método analítico dos gregos ocuparam os matemáticos do século XVII e ocuparam alguns historiadores de matemática de hoje. Por exemplo, para Viète e Fermat, o método analítico grego detinha a promessa de uma ferramenta poderosa de pesquisa matemática oferecendo ajuda na compreensão dos fundamentos do seu pensamento matemático (Mahoney, 1968).

De acordo com Grimberg (2008), o início da elaboração do discurso demonstrativo na matemática pode ser situado entre Parménides e Platão, uma vez que este último no seu tratado *República*, refere que os que tratam da geometria e da aritmética

> (...) pressupõem o par e o ímpar, as figuras, três espécies de ângulos e outras coisas da mesma familia para cada pesquisa diferente; que, tendo pressuposto estas coisas como se as conhecessem, não se dignam justificá-las nem a si próprios nem aos outros, considerando que elas são evidentes para todos; que, finalmente, a partir daí, deduzem o que se segue e acabam por alcançar, de forma consequente, a demonstração que tinham em vista. (Platão, 1997, p. 264)

De acordo com Grimberg (idem), este processo acompanha o próprio discurso filosófico de Platão, uma vez que para este filósofo a matemática é, muitas vezes, considerada como fonte de comparação e de inspiração nas suas reflexões. De facto, para Platão, todo o cidadão esclarecido devia saber matemática. Os seus próprios textos filosóficos apresentam diversos exemplos matemáticos, realçando que os elementos do saber matemático faziam parte do saber comum dos cidadãos gregos, o que demostra que, no começo, a matemática se inseria dentro de um processo social, político e ideológico.

3.3.7. Aristóteles

O aluno mais famoso da Academia de Platão foi Aristóteles (384 – 322 a.C.). Discípulo de Platão, Aristóteles estudou em Atenas, na *Academia*, durante cerca de vinte anos. Após a morte de seu mestre, deslocou-se para Pela, para se tornar professor do príncipe Alexandre, futuro Alexandre Magno, filho de Filipe II da Macedónia, regressando a Atenas após o início da grande empresa militar de

Alexandre. De novo em Atenas, Aristóteles não voltou a integrar a Academia, tendo fundado uma nova escola, o *Liceu*, a *Escola Peripatética*, assim designada pelo hábito que o mestre tinha de ensinar a passear (Vasconcellos, 2009). Segundo Sá (2000), os motivos que levaram Aristóteles a fundar uma nova escola prendem-se não só com as diferenças de opinião em relação aos novos dirigentes da *Academia*, mas também com as tendências idealistas do ensino ali ministrado. Contudo, apesar destas diferenças, Aristóteles manteve às matemáticas todo o prestígio até então adquirido, não só inserindo, à maneira de Platão, considerações geométricas entre as suas investigações físicas e filosóficas, mas valorizando, na sua *Metafísica*, aqueles que cultivavam o estudo das ciências exatas:

> É pois sem razão que os geómetras são acusados de ensinarem apenas quimeras e de não terem na sua ciência nada de bom e de belo. Eu, pelo contrário, sustento que eles, sem disso fazerem ostentação, ensinam coisas que são ao mesmo tempo muito boas e muito belas. Pois toda a bondade e toda a beleza não resultam forçosamente da ordem e da proporção? Ora de que coisas se ocupa o geómetra senão da ordem e da proporção? (*in História das Matemáticas na Antiguidade*, Vasconcellos, 2009, p. 164)

A obra de Aristóteles é muito vasta, constituindo uma verdadeira enciclopédia que compreende todos os ramos do conhecimento humano e sendo o *Organon* (o instrumento do conhecimento) o tratado de Aristóteles com maior repercussão na matemática (Sá, 2000). De acordo com este investigador (idem), o *Organon* trata-se do primeiro tratado de lógica de que há notícia.

Aristóteles é o primeiro autor que expõe uma conceção sistemática da argumentação (Oléron, 1983), em duas das suas obras: *Tópicos* e *Retórica*. Este interesse pela argumentação surge associado ao facto de pretender mostrar como os sofistas, considerados mestres da retórica e da oratória, procediam para enganar os cidadãos através de argumentos inadequados. Anteriormente, já Platão tinha abordado esta questão ao adotar a dialética como a argumentação que se diferencia da retórica pelo fim a que se destina, uma vez que permite ao ser humano a procura da verdade.

Enquanto que nos *Tópicos*, Aristóteles aborda a argumentação sob o prisma do raciocíno, contendo esta obra uma teoria do raciocínio dialético (Oléron, 1983), na *Retórica*, Aristóteles dedica-se a aspetos relativos à persuasão do auditório. Para Aristóteles,

> A retórica é a outra face da dialética; pois ambas se ocupam de questões mais ou menos ligadas ao conhecimento comum e não correspondem a nenhuma ciência em particular. De facto, todas as pessoas de alguma maneira participam de uma e de outra, pois todas elas tentam em certa medida questionar e sustentar um argumento [como na dialética], defender-se ou acusar [como na retórica] (Aristóteles, 2005, p.89)

Embora admita a utilidade da retórica e da dialética, ao investigar a estrutura da argumentação, Aristóteles entende que para alcançar o pensamento verdadeiro eram precisos procedimentos de prova e de demonstração – um método de discurso demonstrativo – propondo desta forma a analítica (mais tarde designada por lógica), como instrumento indispensável ao pensamento científico e filosófico.

Aristóteles estudou, assim, as diferentes formas de que os raciocínios se podem revestir, desenvolveu uma teoria dos *silogismos* e teorizou as regras a que deve obedecer a exposição dedutiva do saber (Sá, 2000).

Nos *Segundos Analíticos*, Aristóteles formulou o que habitualmente se chama o método dedutivo, que consiste em iniciar com proposições designadas por axiomas e depois provar proposições denominadas teoremas. Assim, cada afirmação numa prova tem de ser justificada ou por um axioma, ou por um teorema previamente demonstrado ou por princípios lógicos (Anglin, 1994). Ao formular as regras da lógica, Aristóteles exerceu grande influência no desenvolvimento ulterior dos métodos de exposição e tratamento das ciências matemáticas, sendo adotado por Euclides e tendo sido uma essencial característica na matemática. É de notar que «(…) os *Elementos* de Euclides haveriam de constituir um exemplo paradigmático do tratado científico de conceção aristotélica.» (Sá, 2000, p. 249).

De facto, encontram-se fragamentos que evidenciam a existência de argumentos lógicos nas obras matemáticas anteriores a Aristóteles, como por exemplo nas obras de Hipócrates de Quios. Fica, portanto, patente que desde, pelo menos, o século V a.C., os pensadores gregos procuravam desenvolver as noções de raciocínio lógico. Também ao nível da filosofia, existem muitos exemplos, destacando-se as obras filosóficas de Parménides e do seu discípulo Zenão de Eleia, que demonstram várias técnicas pormenorizadas de argumentação (Katz, 1993). Há exemplos de técnicas como *reductio ad absurdum* (redução ao absurdo), na qual se presume que uma proposição a ser provada é falsa e se deriva uma contradição, e o *modus tollens*, no qual se mostra primeiro que se A é verdade, então segue-se B, mostra-se a seguir que B não é verdade, e conclui-se finalmente que A não é verdade. No entanto, Aristóteles foi o primeiro a agarrar nas ideias desenvolvidas ao longo dos séculos anteriores e a codificar os princípios da argumentação lógica (Katz, 1993).

Retórica, dialética e analítica

A argumentação surge nas obras de Aristóteles como a coordenação de um processo racional e de uma atuação social (Oléron, 1983). Na obra *Tópicos*, Aristóteles encara-a como um raciocínio, contudo, este raciocínio não se concebe sem interlocutores, daí que a argumentação surja associada a uma necessidade particular, a de suscitar a adesão do interlocutor a uma dada opinião, consagrando, depois, na *Retórica* os aspetos relacionados com a persuasão de um auditório. A argumentação surge, portanto, com uma finalidade persuasiva intrínseca: a de convencer (Pedemonte, 2002). A argumentação desenvolveu-se, assim, com a função de responder à necessidade de persuadir um auditório, o que levou Aristóteles a distinguir três domínios onde se exercia a arte do discurso: a retórica, a dialética e a analítica. Enquanto que a retórica e a dialética eram duas formas de raciocínio não científico, formas de argumentação dialógica, isto é, dirigidas a um público, a analítica era uma forma de raciocínio científico, não necessariamente destinada a um público (Pedemonte, 2002).

A dialética e a retórica partilharam entre si a ambição de triunfar sobre o adversário, de o convencer ou persuadir. Na dialética, contudo, o interlocutor estava bem consciente do assunto da argumentação, sendo portanto capaz de responder às questões colocadas ou refutar os argumentos de quem argumentava; ao passo que na retórica o auditório era silencioso. Em ambas as situações, as conclusões obtidas não eram necessariamente verdadeiras, porque os pontos de partida poderiam não ser verdadeiros. No entanto, na argumentação dialética o locutor acreditava que as afirmações que defendia eram verdadeiras, ao passo que na retórica não era necessário estar convencido da verdade dessas afirmações, sendo o seu principal objetivo persuadir o auditório, independentemente do método ou estratégia implementada (Pedemonte, 2002). Desta forma, no raciocínio dialético, apesar de se poder não chegar a conclusões verdadeiras, quem argumenta parte de princípios que considera válidos, o que permite fazer uma correspondência entre o raciocínio dialético e a argumentação em matemática. Por outro lado, também é possível fazer uma correspondência entre o raciocínio analítico e a demonstração, uma vez que a partir de determinadas premissas e hipóteses se inferem conclusões verdadeiras. Pedemonte (2002) reforça esta ideia observando que, quando as matemáticas estão em construção, se procura verificar se um enunciado é verdadeiro ou se procura a solução de um problema; utiliza-se o raciocínio dialético, uma vez que as premissas podem não ser verdadeiras. Ou seja, contrariamente aos raciocínios analíticos, a argumentação dialética expressa-se através de argumentos sobre enunciados prováveis e premissas geralmente aceites.

Consistindo em argumentações que visam a aceitação ou a rejeição das teses em debate, os raciocínios dialéticos incluem argumentos mais ou menos fortes ou convincentes, e que nunca são puramente formais. Desta forma, no raciocínio dialético as conclusões apenas são verosímeis (Boavida, 2005b). Nesse sentido, quem faz uma argumentação em matemática acredita que os princípios de que parte são verdadeiros, o que implica a exclusão da retórica no desenvolvimento dessa argumentação (Pedemonte, 2002). Sendo a demonstração analítica, e a argumentação dialética, duas formas diferentes de raciocinar, ambas tinham em comum a finalidade de determinar a verdade, o que não acontecia com a retórica, cujo objetivo era «(...) persuadir o interlocutor sem necessariamente entrar na problemática da verdade, apoiando-se, por exemplo, nos sentimentos do auditório.» (Pedemonte, 2002, p. 26). A retórica era, por natureza intrínseca, persuasão.

Segundo Perelman (1993), o interesse de Aristóteles pelos raciocínios analíticos e dialéticos conduziu a que fosse considerado, na história da filosofia, respetivamente, como o pai da teoria da lógica formal e da teoria da argumentação. Contudo, Aristóteles não hierarquizou, no seu pensamento, estas duas formas de raciocínio, embora nos *Primeiros Analíticos* Aristóteles distinguisse o raciocínio apodítico do dialético.

> A pessoa que demonstra e a pessoa que faz a pergunta raciocinam supondo que um predicado pertence ou não pertence a um sujeito. De tal modo que uma premissa silogística é simplesmente a afirmação ou a negação de um predicado acerca de um sujeito; mas é demonstrativa se é verdadeira e aceite porque deduzida de premissas básicas, enquanto a premissa dialética é para a pessoa que faz a pergunta uma questão de saber qual de duas proposições contraditórias é a verdadeira e para a pessoa que raciocina a aceitação de uma proposição plausível ou geralmente tida por verdadeira. (*in O desenvolvimento da lógica*, Kneale & Kneale, 1962, p. 4)

No entanto, ao longo dos tempos, foi-se privilegiando o raciocínio analítico, tendo a dialética perdido o seu sentido original (Coelho, 2005). Frequentemente relegada para o plano dos sofismas, a dialética passou a ser identificada com as técnicas de persuasão, com o objetivo de convencer um auditório quaisquer que fossem as teses defendidas (Boavida, 2005b). Para Perelman (1993), a teoria da demonstração apoiada na lógica formal, identificada com os raciocínios analíticos de Aristóteles, negligencia os raciocínios dialéticos, considerando-os como estranhos à lógica. De facto, de acordo com Oléron (1983) o interesse pela argumentação, de acordo com a perspetiva definida por Aristóteles, não subsistiu quando surgiu o pensamento moderno. De acordo com Perelman, essa mudança de atitude deveu-se a Descartes, uma vez que para este matemático e filósofo o domínio da argumentação é o do verosímil, do plausível, do provável, na medida em que este escapa às certezas do cálculo (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 2005). Ora, esta conceção é nitidamente expressa por Descartes na primeira parte do *Discurso do Método*:

> E considerando como sobre uma mesma matéria pode haver opiniões diversas, defendidas por pessoas doutas, sem que possa haver mais do que uma que seja verdadeira, reputava quase como falso tudo o que era apenas verosímil. (Descartes, 1989, p. 62)

Foi ele que, fazendo da evidência o cunho da razão, só quis qualificar de racionais as demonstrações que, a partir de ideias claras e distintas, propagavam, com a ajuda de provas apodíticas, a evidência dos axiomas a todos os teoremas.

Silogismo

Além de definir a retórica, a dialética e a analítica como três formas de raciocínio, Aristóteles caracterizou-as através de uma estrutura comum, o silogismo (Pedemonte, 2002). Aristóteles acreditava que os argumentos lógicos deviam ser construídos a partir de silogismos, em que «um silogismo é um discurso em que, postas certas coisas, algo de diferente das coisas estabelecidas resulta necessariamente, pelo simples facto de serem» (Aristóteles, 1985, p. 1), ou seja, um silogismo consiste em determinadas afirmações que são assumidas como verdadeiras e outras, resultantes destas, que são então necessariamente verdadeiras também (Katz, 1993). Um silogismo é composto por três proposições, duas premissas e uma conclusão que relaciona as duas premissas, ou seja, num silogismo uma proposição é necessariamente deduzida a partir de duas premissas. Se se aceitarem como verdadeiras as premissas de um silogismo, tem-se de aceitar também a conclusão. Contudo, Aristóteles estava consciente de que a validade de um silogismo não implica a sua verdade, uma vez que um silogismo pode estar logicamente correto, mas partir de premissas falsas e conduzir, portanto, a uma proposição falsa.

Além de clarificar como lidar com silogismos, Aristóteles observou que o raciocínio silogístico tornava possível usar o "conhecimento antigo" para deduzir o novo. Apesar disso, Aristóteles observou que não se podiam obter todos os conhecimentos sob a forma de conclusões de um silogismo, uma vez que era necessário principiar em algum lado com verdades que fossem aceites sem discussão (Katz, 1993). Aristóteles fazia distinção entre as verdades básicas, próprias de cada ciência (postulados) e as que são comuns a todas as ciências (axiomas). Em geral, sempre que se define um objeto, tem de se provar a sua existência com recurso a axiomas e a conclusões anteriores que servirão de premissas.

Aristóteles também apresentou determinados princípios básicos de argumentação, princípios esses que os pensadores anteriores tinham usado de forma intuitiva (Katz, 1993). Um desses princípios é o que enuncia que uma determinada asserção não poder ser ao mesmo tempo verdadeira e falsa. Um outro é o que refere que uma asserção ter que ser verdadeira ou falsa, não existindo, portanto, outra possibilidade.

Pedemonte (2002) observa, assim, que o silogismo representa por um lado a primeira tentativa de definir uma estrutura da argumentação composta por três proposições, e por outro lado faz da argumentação uma expressão do raciocínio. Nesse sentido, Pedemonte (2002) refere que os princípios de argumentação propostos por Aristóteles permitem caracterizar a funcionalidade e a estrutura da argumentação em matemática. Tal como a dialética, a argumentação em matemática tem a função de convencer, partindo de premissas que se consideram verdadeiras, de forma a chegar a uma determinada conclusão. Por outro lado, o silogismo fornece um esquema para descrever a estrutura da argumentação. De facto, o silogismo representa o elemento de ligação entre a argumentação e a demonstração, uma vez que a demonstração é constituída por uma estrutura ternária: dados, enunciados e conclusão (Pedemonte, 2002).

Para Aristóteles, a argumentação lógica, de acordo com os seus métodos, era a única forma certa de alcançar o conhecimento científico (Katz, 1993). Aristóteles não contestou a possibilidade de haver outras formas de obter conhecimento, mas destacou a demonstração, através de uma série de silogismos, como a única forma através da qual se podia estar seguro do resultado obtido. Contudo, para alcançar conhecimento era necessário que as premissas ou axiomas fossem verdadeiros e bem conhecidos, isto é, um silogismo que não fosse produtor de conhecimento científico não poderia constituir uma demonstração (Katz, 1993).

Do que foi descrito sobressai que a natureza da argumentação encontra as suas raízes no raciocínio dialético de Aristóteles, apesar de este ter reservado para a retórica aspetos relativos à persuasão de um auditório, e que estruturalmente a argumentação é constituída por um sistema ternário comum à demonstração matemática. As regras de Aristóteles para alcançar o conhecimento começando por axiomas e usando demonstrações para obter novos resultados, tornaram-se o modelo para os matemáticos até à atualidade, sendo a questão da "verdade" dos axiomas básicos discutida pelos matemáticos e filósofos desde a época de Aristóteles (Katz, 1993). Apesar da ênfase dada por Aristóteles ao uso dos silogismos como as fundações dos argumentos lógicos, os matemáticos gregos aparentemente nunca os usaram. Contudo, a conceção aristotélica segundo a qual uma ciência demonstrativa devia assentar num elenco de primeiros princípios da teoria encontrará expressão na organização dos *Elementos* de Euclides.

3.3.8. Euclides de Alexandria

Por volta do ano 300 a.C., em Alexandria, capital do Egito helenizado, foram criadas, pelo rei Ptolomeu I, duas importantes instituições: o *Museu* e a *Biblioteca*. Enquanto que com o Museu se pretendeu criar um espaço onde os sábios pudessem dedicar-se à investigação, à discussão de ideias e ao ensino, com a criação da

Biblioteca pretendeu-se reunir todas as obras de cultura, independentemente do seu caráter literário, filosófico, matemático ou astronómico. Com o prestígio do Museu e da Biblioteca, Alexandria assumiu-se até à conquista árabe, no século VII, no principal centro cultural do mundo antigo, superando as escolas atenienses, como a Academia e o Liceu (Sá, 2000).

Neste século III a.C., período áureo da ciência helenística, surgiram três grandes matemáticos: Euclides, Arquimedes e Apolónio.

De Euclides de Alexandria pouco se sabe ao certo, tão pouco onde e quando nasceu; mesmo o nome da cidade que se costuma associar ao seu nome apenas indica o local provável onde estudou e ensinou. O próprio resumo histórico de Eudemo-Proclo apenas o situa no tempo por comparação com outros matemáticos,

> Este homem viveu sob o primeiro Ptolomeu; pois Arquimedes que viveu depois do primeiro Ptolomeu, menciona Euclides. Diz-se que um dia Ptolomeu perguntou a Euclides se não existia uma via mais curta para a geometria do que o *Ensino dos Elementos*, e que ele respondeu que em geometria não existia uma estrada para reis. Euclides é portanto mais recente do que os discípulos de Platão, mas mais antigo do que Arquimedes e do que Eratóstenes, sendo estes últimos contemporâneos, como Eratóstenes diz algures. (*in História da Matemática*, Estrada et al., 2000, p. 250)

Este relato fornece ainda informações importantes sobre a obra mais influente de todos os tempos da história da matemática, os *Elementos* de Euclides. Este tratado, composto por treze livros, sintetiza todo o saber matemático conhecido da época.

Os *Elementos* são uma compilação de resultados de autoria diversa, pelo que Euclides não deve ser considerado responsável pela descoberta da maioria dos teoremas ou das teorias que constituem o seu tratado. De acordo com o resumo de Eudemo-Proclo,

> Reunindo *Elementos*, Euclides coordenou muito de Eudoxo, aperfeiçoou muitos de Teeteto, e deu demonstrações irrefutáveis daqueles que os seus predecessores não haviam demonstrado com rigor.

> (...)
> Euclides era da opinião platónica e muito conhecedor da filosofia de Platão. Esta é aliás a razão pela qual apresentou a constituição das figuras platónicas i. e. dos poliedros regulares como o objetivo final do seu Ensino dos Elementos.
> (*in História da Matemática*, Estrada et al., 2000, p. 250)

É de observar que não existe um exemplar completo dos *Elementos* que date da época de Euclides. Contudo, dado o interesse suscitado pelo tratado e pelo facto de ser o livro adotado para o início do estudo da matemática até ao século XVIII, a obra teve uma enorme divulgação, com um número muito significativo de exemplares e de edições. Como não chegou até nós nenhuma versão original do texto em grego, a versão que se conhece resulta da ação de copistas, comentadores, tradutores, o que significa que se realizaram alterações ao texto original (acrescentamentos ou supressão de resultados, comentários, etc.). Observe-se que muitos dos manuscritos gregos existentes resultaram de edições comentadas por Teão de Alexandria, no século IV da nossa era. Acresce referir que durante muito tempo circulou uma versão dos *Elementos* com quize livros. No entanto, no século XIX, o historiador e filólogo dinamarquês J. L. Heiberg, analisando e comparando entre si diferentes edições dos *Elementos*, apresentou uma reconstituição credível do original grego do tratado de Euclides (Sá, 2000).

Organização dos *Elementos*

Um dos principais méritos dos *Elementos* é o de apresentar uma parte muito considerável dos conhecimentos matematicamente obtidos até ao momento, segundo uma organização dedutiva e unificada, axiomática, como se diz atualmente.

A organização dos *Elementos* enquadrava-se na conceção aristotélica, segundo a qual uma ciência demonstrativa devia assentar num elenco de primeiros princípios da teoria: *definições*, *noções comuns* ou *axiomas* e *postulados*. Daqui derivavam todas as outras proposições por via dedutiva, observando as leis do silogismo. Os princípios eram tratados como autoevidentes, não se lhes devendo qualquer explicação, ou seja, eram afirmações admitidas sem demonstração. As justificações reservavam-se para os teoremas, conclusões deduzidas dos princípios e cuja validade se submetia a uma prova. Além das definições, axiomas e postulados, apenas os teoremas anteriormente estabelecidos podiam ser chamados a intervir numa demonstração.

A ideia de apresentar primeiros princípios no início de uma teoria é anterior a Euclides. O próprio Aristóteles expôs nos *Segundos Analíticos* o que entendia por primeiros princípios:

> Eu chamo "primeiros princípios" em cada género àqueles factos que não podem ser provados. Assim, o significado de ambas as verdades primárias e os atributos demonstrados a partir delas é assumido; como para a sua existência, que os princípios devem ser assumidos, mas que os atributos devem ser provados (Segundos Analíticos). Por exemplo, assumimos o significado de "unidade", "linha reta" e "triângular; mas enquanto assumimos a existência de unidade e grandeza geométrica, o resto tem de ser provado. (*in Explanation and Proof in Mathematics*, Hanna, Jahnke et Pulte, 2010, p. 20)

Euclides dividiu os princípios dos *Elementos* em três grupos de afirmações – definições, postulados e noções comuns – que, de acordo com Szabó (1960), funcionavam como pontos de partida para a argumentação na obra. É de observar que esta distinção apresentada por Euclides nos *Elementos* era também conhecida de Aristóteles.

> Dos primeiros princípios utilizados nas ciências demonstrativas alguns são especiais para as ciências particulares, e alguns são comuns; (…) Princípios especiais, como a linha, ou reta, é de tal e tal natureza; princípios comuns, são como quando iguais são retirados de iguais, os restos iguais são iguais (*in Explanation and Proof in Mathematics*, Hanna, Jahnke et Pulte, 2010, p. 20)

Definições

As definições determinavam os objetos que iriam ser tratados nos *Elementos*, descrevendo os termos técnicos usados na exposição, não se pressupondo, em geral, que implicassem a existência dos entes descritos. As definições expressam, portanto, o que são os objetos ou, pelo menos, pretendem fazê-lo. Por exemplo, a primeira definição (*Elementos* I, definição 1) é a de *ponto*: um ponto é o que não tem partes. Contudo, esta definição não garante a existência deste ente definido. Seria necessário que houvesse à partida noções prévias. Observa-se, assim, que a geometria ainda está enraizada na perceção material: todos sabem que um ponto é um traço minúsculo, portanto, a sua definição mais não faz do que especificar aquilo que nos impomos pensar sobre a sua extensão (Barthélemy, 2003).

No que diz respeito aos postulados e às noções comuns (axiomas), estes implicavam afirmações sobre esses objetos a partir dos quais posteriores afirmações poderiam ser deduzidas; «(…) são as fundações de todo o edifício.» (Barthélemy, 2003, p. 43).

Postulados

Os postulados eram enunciados considerados verdadeiros, dos quais se poderiam deduzir as outras proposições; eram considerados os verdadeiros princípios (Barthélemy, 2003). Os postulados pressupunham, sem demonstração, que certas *construções primeiras* eram possíveis (Vasconcellos, 2009). No Livro I, a seguir às definições, Euclides fornece uma lista de cinco postulados:

Postulado 1: Traçar uma linha reta de qualquer ponto a qualquer ponto.
Postulado 2: Prolongar continuamente uma linha reta numa linha reta.
Postulado 3: Traçar um círculo com quaisquer centro e distância.
Postulado 4: Todos os ângulos retos são iguais entre si.

Postulado 5: Se uma linha reta incidir em duas linhas retas e fizer os ângulos internos do mesmo lado menores do que dois ângulos retos, então as duas linhas retas, se prolongadas indefinidamente, encontram-se do lado em que estão os ângulos menores do que dois ângulos retos.

As primeiras três afirmações, certamente de origem muito antiga, expressam a possibilidade teórica de realizar certas construções com «régua e compasso». Na verdade, nos primeiro e segundo postulados, as construções podem ser efetuadas utilizando apenas uma régua; no caso do terceiro postulado, a construção pode ser efetuada utilizando apenas um compasso. Sá (2000) observa que o papel preponderante que a régua e o compasso desempenharam, desde a Antiguidade Clássica, na geometria plana, surge da sua ligação aos três primeiros postulados dos *Elementos*. É de notar que são o primeiro e terceiro postulados que estabelecem, respetivamente, a existência de *linhas retas* e de *círculos*, entes estes apresentados por Euclides, anteriormente, nas definições.

A quarta afirmação enuncia uma propriedade, o que não acontece com as três primeiras, na qual se pede para admitir que se possam efetuar determinadas construções elementares relativas à reta e ao círculo. Neste quarto postulado, Euclides menciona a noção de *ângulo reto*, que será essencial na formulação do postulado seguinte. Contudo, é de notar que, da mesma forma que não postulou a existência de pontos, Euclides não postula nem demonstra a existência de ângulos retos.

O quinto postulado é menos simples. Também conhecido como *postulado das paralelas*, este quinto postulado é um dos mais notáveis traços dos *Elementos.* Uma vez que as primeiras vinte e oito proposições do Livro I são independentes do postulado das paralelas, muitos comentadores e sucessores de Euclides procuraram obter a sua demonstração, tendo porém concluído que, como os três grandes problemas da antiguidade (a trissecção do ângulo, a quadratura do círculo e a duplicação do cubo) esta é uma proposição impossível de verificar. Da negação de tal princípio nasceu, no século XIX, um novo sistema de geometria, as *geometrias* *não-euclidianas*. De acordo com Sá (2000) a inclusão do quinto postulado no pequeno conjunto de afirmações indemonstráveis, sobre que assenta a construção dedutiva do tratado, foi uma importante contribuição do próprio Euclides para o avanço da matemática.

Noções comuns ou axiomas

Os axiomas, ou noções comuns, eram enunciados mais gerais do que os postulados, sendo considerados universalmente aceites. As noções comuns afirmavam certas propriedades essenciais pertencentes às grandezas ou às figuras mais simples. Não são enunciados de lógica, mas incidem quase todos nas grandezas (ou quantidades), sem que esta noção seja em nada especificada.

Noção comum 1: Coisas que são iguais à mesma coisa são iguais entre si.
Noção comum 2: Se iguais forem adicionados a iguais então os todos são iguais.
Noção comum 3: Se iguais forem subtraídos de iguais então os restantes são iguais.
Noção comum 4: Coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si.
Noção comum 5: O todo é maior do que a parte.

É, no entanto, de observar, que a distinção entre postulados e noções comuns, nos tratados antigos, nem sempre é muito clara (Sá, 2000). De facto, na Grécia antiga, alguns matemáticos usavam indistintamente os termos noções comuns e postulados, donde, nos *Elementos*, o mesmo princípio aparecesse como noção comum ou postulado, consoante as edições da obra. Aristóteles fazia distinção entre axiomas e postulados, devendo os primeiros, segundo ele, ser convincentes por eles mesmos, enquanto que os segundos, menos óbvios, deviam ser objeto de assentimento (em latim, *postulare* significa pedir). Se Euclides partilhava ou não esta opinião, não é claro, mas modernamente não se faz qualquer distinção entre axiomas e postulados. Contudo, para Sá (2000), de acordo com a opinião mais generalizada, as noções comuns são princípios gerais, portanto, aplicáveis a todos os ramos do saber, enquanto os postulados se referem a cada uma das ciências em particular. Nos *Elementos*, a distinção ente postulados e noções comuns reflete a ideia que os postulados são afirmações específicas da geometria, enquanto que as noções comuns providenciam proposições verdadeiras para toda a matemática (Jahnke, 2010; Reid & Knipping, 2010). De acordo com Jahnke (2010), alguns historiadores enfatizam que os postulados podem ser considerados como afirmações de existência.

Teoremas e Problemas

Por forma a ilustrar o modo como Euclides utilizava estes primeiros princípios, considere-se a proposição I do Livro I dos *Elementos* que consiste em construir um triângulo equilátero sobre uma dada linha reta.

A demonstração apresentada por Euclides pode ser dividida em várias partes. Para os gregos, as proposições eram de dois tipos: teoremas e problemas. No caso dos teoremas, no enunciado aparecia a hipótese e a tese e seguidamente aparecia a demonstração do mesmo. No que diz respeito aos problemas, eram fornecidos dados e pedidos. A resolução do problema consistia numa construção seguida de uma demonstração, em que se provava que o elemento construído satisfazia as condições do enunciado.

Na proposição *Elementos* I, 1 estamos perante um problema: é dada uma linha reta[3] e pretende-se construir um triângulo equilátero sobre essa linha reta. Euclides inicia a resolução do problema construindo a figura pedida. Designa por AB a linha reta dada, sobre a qual se pretende descrever um triângulo equilátero. Com o centro A e raio igual ao comprimento do segmento AB descreve o círculo BCD, cuja construção é possível pelo postulado 3. Procede de igual modo no ponto B; com centro em B, e com raio igual ao comprimento do segmento BA descreve o círculo

[3] Os gregos utilizavam o termo "linha reta" para designar segmentos de reta.

ACE. Do ponto C, onde os círculos se cortam, traça, respetivamente, as retas CA e CB, o que é possível pelo postulado 1.

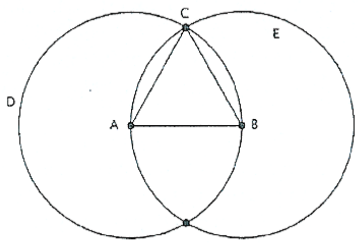


Figura 3.4. Elementos I, 1.

Observa então que o triângulo ABC construído é equilátero. Uma vez que o ponto A é o centro do círculo BCD, pela definição[4] 15, e usando a notação atual, $\overline{AC} = \overline{AB}$. De igual modo, observa que sendo o ponto B o centro do círculo CAE, $\overline{BC} = \overline{BA}$. Assim, e tendo em conta a noção comum 1, $\overline{CA} = \overline{CB}$. Logo, conclui que as três retas CA, AB e BC são iguais; e por consequência o triângulo ABC feito sobre a reta AB é equilátero.

Verifica-se, assim, que tanto os passos da construção como os passos da demonstração são justificados com referência aos primeiros princípios – noções comuns, postulados e definições. Estes princípios encontravam-se descritos no início de cada tratado. Contudo, é de observar que a maioria dos livros dos *Elementos* se inicia com definições, aparecendo as noções comuns e os postulados apenas no Livro I.

Apesar de Euclides ser muito rigoroso na forma como apresenta e demonstra as diversas proposições e teoremas que constituem os *Elementos*, esta primeira proposição apresenta uma falha lógica, uma vez que não é justificado a existência do ponto C. É de observar ainda que esta proposição aparece no fundo como um lema da proposição I, 2 (Sá, 2000).

[4] Definição 15: O círculo é uma figura plana contida por uma linha tal que todas as linhas retas incidindo nela desde um dos pontos no interior da figura são iguais entre si.

3.3.9. Primeiros princípios

Embora nos *Elementos* de Euclides os termos utilizados para designar os primeiros princípios sejam "definição", "postulado" e "noção comum", há a possibilidade de ter existido uma outra terminologia. Acresce referir que o próprio significado e função destes mesmos termos sofreu alteração ao longo dos tempos, encontrando-se inicialmente relacionados com a dialética.

Szabó (1960) observa que no comentário aos *Elementos* de Euclides, Proclo utilizou uma terminologia diferente. Em vez do termo definição utilizou o termo *hipótese*, e em vez de noção comum utilizou o termo axioma. Szabó justifica que esta diferença de terminologia utilizada por Proclo, estava relacionada com a terminologia presente nos manuscritos dos *Elementos* existentes na época deste comentador e que não chegaram até aos nossos dias (Jahnke, 2010). De acordo com Szabó (1960), os termos hipótese, postulado (*aitema*) e axioma eram comuns na dialética pré-euclidiana e pré-platónica, estando relacionados com a filosofia e a retórica. Para este investigador, os três conceitos de hipótese, postulado (aitema), e axioma tinham um significado semelhante na dialética pré-platónica e pré-aristotélica: designavam as proposições iniciais sobre as quais os participantes num debate dialético deviam concordar. Uma proposição inicialmente acordada era chamada de hipótese, contudo se os participante não concordavam ou se não fosse expressa alguma decisão, a proposição era chamada postulado ou axioma.

Definição ou hipótese

Para os filósofos clássicos gregos a dialética era entendida como a arte de trocar argumentos e contra-argumentos num diálogo, em que se debatia uma proposição controversa. O uso do conceito de hipótese como sinónimo de definição era comum na dialética pré-euclidiana e pré-platónica. Nesse sentido, o termo hipótese significava que os participantes num diálogo tinham inicialmente de concordar numa definição conjunta sobre o tema, antes de poderem entrar num discurso argumentativo sobre este. Assim, num debate dialético, os participantes introduziam hipóteses que eles consideravam fortes e esperavam que fossem aceites pelos outros participantes. Contudo, era possível propor hipóteses com a intenção de estas serem examinadas criticamente, o que permitia, num discurso filosófico, obter consequências plausíveis ou não plausíveis. Como é natural, as primeiras levavam à consolidação das hipóteses, enquanto que as segundas evidenciavam a sua fraqueza. O caso extremo de uma consequência não plausível seria uma contradição lógica, o que levaria necessariamente à rejeição da hipótese. Jahnke (2010) observa que o procedimento da prova indireta na matemática pode estar diretamente relacionado com este costume comum na filosofia, o que, de acordo com Szabó (1960) constitui uma explicação para a frequente ocorrência das provas indiretas, método de redução ao absurdo, na matemática dos primeiros períodos gregos.

É, no entanto, de notar que os gregos, incluindo Proclo, usavam o termo hipótese num sentido geral, próximo do significado que hoje lhe é atribuído: «A hipótese é o que está subjacente e consequentemente pode ser usada como fundamento de outra coisa qualquer.» (Jahnke, 2010, p. 18). O próprio Proclo (1970) refere que sendo a geometria uma ciência baseada em hipóteses e que demonstra as proposições posteriores a partir de determinados primeiros princípios, há a necessidade, de quem prepara uma introdução à geometria, de apresentar separadamente os princípios da ciência e as conclusões que resultam desses princípios.

Noção comum ou axioma e postulado

O conceito de noção comum é a tradução direta de um termo grego que designa "as ideias comuns a todos os seres humanos". De acordo com Szabó (1960), o termo deriva da filosofia estoica (300 A.C.) e tem a conotação de uma proposição da qual não se pode legitimamente duvidar. Proclo atribuiu igual significado ao termo axioma, que usa em vez de noção comum: «Estes são o que geralmente se chama axiomas indemonstráveis, na medida em que toda a gente os julga verdadeiros e ninguém os contesta.» (Proclo, 1970, p. 152).

Segundo Szabó (1960), o uso pré-aristotélico do termo axioma era bastante similar ao termo aitema (postulado). Axioma significava uma afirmação sobre a qual os participantes num debate concordavam ou cuja aceitação era indefinida. De acordo com Szabó (1960), as afirmações designadas nos *Elementos* de Euclides por axioma ou noções comuns, no princípio da filosofia grega, tinham sido questionadas, nomeadamente, por Zenão e a Escola Eleata (500 a.C.). Para este historiador (idem), a explícita compilação das afirmações designada pelo termo axioma ou noção comum, no início do período da construção dos elementos da matemática foi motivado pela intenção de rejeitar o criticismo de Zenão.

No tempo dos Eleatas, os termos axioma e postulado designavam proposições que eram aceites no início de um diálogo como base de uma argumentação. No decurso do diálogo, consequências eram desenhadas a partir destas proposições em ordem a examinar criticamente e a investigar se as consequências eram as desejadas. Consequências desejadas constituíam um forte argumento em favor da proposição. O caso extremo de uma consequência não desejada, ou seja, uma contradição lógica, levava necessariamente à rejeição da proposição. No entanto, no início de um diálogo o valor epistémico de um axioma ou postulado (aitema) podia ser deixado indefinido. Um axioma podia ser verdadeiro, ou provável ou mesmo errado. Apenas mais tarde, quando a filosofia dos eleatas se tornou mais fraca, é que as afirmações presentes nos axiomas se tornaram inquestionáveis (Jahnke, 2010). Desta forma, o conceito de axioma ganhou aceitação geral na filosofia grega e na matemática. Inicialmente estabelece-se na arte do discurso filosófico, desempenhando mais tarde um papel tanto na filosofia como na matemática.

Há, no entanto, uma concomitante mudança no seu estatuto epistemológico. No início do contexto dialético, o termo axioma designava uma proposição que no início de um debate podia ser aceite ou não. Contudo, o significado posterior, na matemática, é de uma afirmação que não pode ser provada, mas é absolutamente certa e, portanto, pode servir como um fundamento de uma organizada teoria dedutiva. Este significado final tornou-se o ponto de vista dominante da ciência ocidental e na filosofia.

De facto, num segundo período, começando com Platão e Aristóteles, os termos axioma e aitema (postulado) mudaram drasticamente o seu significado, passando a designar-se proposições consideradas absolutamente verdadeiras. Contudo, o valor epistémico de um axioma não era mais indefinido, mas definitivamente fixado. Esta mudança do valor epistémico surge quase de uma forma natural na matemática, uma vez que coincide com o início da construção das teorias matemáticas. Os axiomas tornaram-se verdadeiros uma vez por todas, e os matemáticos demonstraram interesse em deduzir muitas consequências a partir dessas possibilidades.

Baseando-se nas considerações de Szabó, Jahnke (2010) observa que a prática de um discurso racional providenciou um modelo para a organização de uma teoria da matemática de acordo com o método axiomático-dedutivo. Isto significa que a prova tem as suas raízes na comunicação, existindo, portanto, uma conexão entre a prova e a dialética, entendida esta última como uma arte de conduzir um diálogo. Esta arte argumentativa apontava para um discurso metódico e com regras que se concretizam nos termos definição, postulado e axioma.

Por outro lado, Jahnke (2010) sugere ainda o caráter universal da dialética, uma vez que qualquer problema podia ser assunto num discurso dialético, independentemente da disciplina ou mesmo do aspeto da vida que envolvesse. Desde um problema de ética, até à questão se o lado e a diagonal de um quadrado têm uma medida comum, todos os problemas podiam ser tratados num debate. Diferentes pessoas podiam falar sobre o respetivo tópico até onde estivessem preparadas para o fazer. Assim, a possibilidade de uma organização axiomática-dedutiva de um grupo de proposições não estava confinada à aritmética ou à geometria, mas em princípio podia ser aplicada a qualquer campo do conhecimento humano.

A formulação de um modelo axiomático e a insistência de que a geometria fosse sistematizada de acordo com este modelo são consideradas duas das grandes contribuições dadas pelos gregos antigos à matemática (Eves, 1994). De facto, os gregos antigos desenvolveram a noção de discurso lógico como uma sequência de afirmações obtidas por raciocínio dedutivo a partir de um conjunto de afirmações inicialmente aceites. Tanto as afirmações iniciais como as derivadas do discurso eram afirmações que envolviam termos especiais ou técnicos. Os significados desses termos deviam ser, portanto, claros para o leitor e, assim, os gregos sentiam que o discurso deveria iniciar-se com uma lista de explanações, as definições, desses termos técnicos. Depois dessas definições terem sido dadas, as afirmações iniciais, designadas por postulados ou definições comuns, deveriam ser enunciadas. Essas afirmações inicias, segundo os gregos, deveriam ser cuidadosamente escolhidas por forma a que a sua veracidade fosse aceite pelo leitor, tendo em atenção as definições previamente consideradas. Nesse sentido, os termos definição, postulado e noção comum não só desempenham um papel de destaque no desenvolvimento da argumentação, destacando, assim, a sua relação com a prova matemática, mas também evidenciam o caráter abrangente da própria argumentação, uma vez que permitiam versar qualquer assunto.

3.4. O mito de Euclides

Durante séculos, os *Elementos* estabeleceram o modelo da prova em matemática e até mesmo noutros domínios. A grande contribuição de Euclides foi a organização lógica dos seus *Elementos*. A sua estrutura axiomática, na qual tudo é cuidadosamente deduzido a partir de um pequeno número de definições e afirmações, sobretudo se perspetivada à luz da época em que foi composta, pode considerar-se magistral. No entanto, nos *Elementos* há muitos princípios que não são explicitamente expressos, embora implicitamente admitidos, como por exemplo, o caso da continuidade da reta ou da sua infinitude. É também de observar que nem todas as demonstrações apresentadas por Euclides usam o raciocínio dedutivo para deduzir proposições a partir de axiomas, postulados, definições, ou afirmações estabelecidas previamente (Reid & Knipping, 2010). Ocorrem, por vezes, situações em que são usados implicitamente axiomas ou afirmações que não foram previamente estabelecidas, argumentos não verbais e exemplos genéricos. Isto destaca o caráter visual e oral das demonstrações gregas (Netz, 1998, 1999), destacando o papel da argumentação na construção destes processos de prova, sendo a prova escrita um registo que apareceu posteriormente.

Do ponto de vista standard, as provas de Euclides são tomadas como modelos do rigor matemático, pois, por um lado são rigorosas, por outro lado estabelecem os teoremas com objetividade e certeza, recorrendo ao método dedutivo; daí designar-se este ponto de vista pelo "mito de Euclides". Acreditava-se, portanto, que os livros de Euclides continham verdades sobre o universo que eram claras e incontestáveis. Partindo de verdades autoevidentes e procedendo através de provas rigorosas, Euclides chegava ao conhecimento certo, objetivo e eterno, sendo até metade do século XIX um mito inquestionável. Contudo, uma análise mais atenta aos *Elementos* permite verificar que algumas provas dadas por Euclides utilizam afirmações que não foram previamente estabelecidas, algumas envolvem manipulações físicas e outras usam casos específicos para justificar conclusões gerais. De seguida, observar-se-á três exemplos de proposições dos *Elementos* em que se podem constatar estas situações.

Elementos I,1

Dada uma linha reta e pretende-se construir um triângulo equilátero sobre essa linha reta. (Heath, 1956)

A proposição I, 1, exibida anteriormente, apresenta uma falha lógica, uma vez que não é justificada a existência do ponto C.

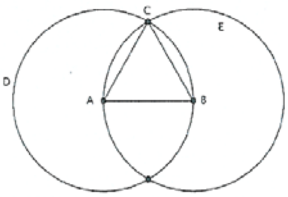


Figura 3.5. Elementos I, 1.

A partir do diagrama observa-se que existem dois pontos nessas condições, mas Euclides não fornece uma noção comum, um postulado ou uma definição para justificar em que condições a interseção existe ou se estes círculos satisfazem essas condições.

Elementos I, 4

Se dois triângulos tiverem dois lados iguais a dois lados, cada um a cada um; e os ângulos, compreendidos por estes lados, forem também iguais, as bases e os triângulos, e os mais ângulos, que são opostos a lados iguais, serão também iguais.

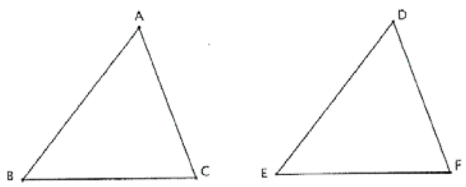


Figura 3.6. Elementos I, 4.

Euclides inicia a demonstração da proposição I, 4, designando por ABC e DEF os dois triângulos, considerando $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ e $B\hat{A}C = E\hat{D}F$. Euclides observa então que pondo o triângulo ABC sobre o triângulo DEF, de tal modo que o ponto A cai sobre o ponto D e a reta AB sobre a reta DE, o ponto B cairá sobre o ponto E, uma vez que $\overline{AB} = \overline{DE}$. Ajustando AB sobre DE, também a reta AC se ajustará sobre a reta DF, uma vez que o ângulo $B\hat{A}C = E\hat{D}F$. Como $\overline{AC} = \overline{DF}$, o ponto C cairá sobre F. Mas uma vez que B cai sobre E e C cai sobre F, a base BC ajustar-se-á sobre a base EF.

Euclides observa que se as bases não se ajustassem, apesar de B coincidir com E e C com F, então as duas bases compreenderiam espaço, o que não pode acontecer, porque duas linhas retas não compreendem espaço[5]. Logo, a base BC ajusta-se sobre a base EF e, por consequência, elas são iguais. Logo todo o triângulo ABC se ajusta sobre todo o triângulo DEF e, assim, são iguais; e os outros ângulos do primeiro triângulo também se ajustarão sobre os outros do segundo e são iguais; isto é o ângulo $A\hat{B}C = D\hat{E}F$, e $A\hat{C}B = D\hat{F}E$.

De acordo com Reid e Knipping (2010), embora esta prova apele à nossa imaginação, fazer coincidir o triângulo ABC com o triângulo DEF e depois observar as correspondências apresentadas por Euclides, sendo um procedimento fácil e bastante convincente, não é um método dedutivo como o preconizado por Aristóteles. De facto, raciocinar sobre evidências visuais era um dos pilares da matemática chinesa e hindu, mas que para os gregos estava fora de questão. Contudo, é evidente que a evidência visual foi a base da matemática grega, embora estes a abandonassem na fase inicial, mantiveram referências figurativas (Martzloff, 1997). Contudo, Netz (1998) sugere que o elemento visual não foi tão abandonado como escondido pelos gregos. Para este investigador (idem), há três estádios neste processo: desenhar um diagrama, um ensaio produzido à custa do diagrama, em que, por exemplo, são inseridas letras e onde ocorre, portanto, o processo argumentativo; e, por fim, a escrita da prova.

[5] Em algumas edições dos *Elementos* de Euclides, esta afirmação é designada por axioma 10. Contudo, de acordo com Proclo (Heath, 1908) este axioma foi introduzido após o tempo de Euclides, numa fase em que se procedeu a uma excessiva multiplicação de axiomas. Para Proclo, esta afirmação não poderá ser um axioma, visto que pertence à geometria; ora os axiomas têm caráter geral e não particular de uma ciência. De facto, este axioma é desnecessário uma vez que a afirmação está contida no significado do postulado 1, portanto não há qualquer dúvida na passagem de *Elementos* I, 4 “se a base BC não coincide com EF, duas linhas retas compreendem um espaço, o que é impossível”.

Elementos IX, 20

Os números primos são mais do que qualquer quantidade dada de números primos.

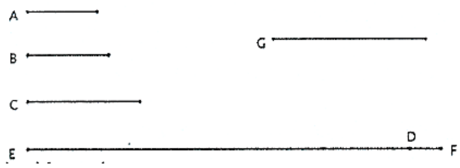


Figura 3.7. *Elementos* IX, 20.

A ideia da proposição IX, 20 é que por muitos primos que eu tenha em número finito, posso arranjar sempre mais. A forma como Euclides aborda esta questão é do ponto de vista do infinito potencial, uma vez que se recusa a usar o infinito atual nas demonstrações.

Para proceder à demonstração desta proposição, Euclides considera os números primos A, B e C. Euclides afirma que há mais números primos do que A, B e C. Pois tomando o menor número medido[6] por A, B e C e designando-o por DE, Euclides adiciona-o à unidade DF, observando que EF ou é primo ou não é primo.

Assim, se EF for primo, Euclides oberva que se encontrou números primos que são mais do que a quantidade dada A, B e C. Se EF não for primo, por *Elementos* VII, 31, EF é medido por algum número primo. Designando esse primo por G, Euclides observa que G não é nenhum dos primos A, B e C. Pois se fosse, como A, B e C medem DE, então G media DE, mas como também mede EF, G mediria o restante[7], ou seja, a unidade DF, o que é absurdo. Logo, G não é nenhum dos números A, B ou C e como, por hipótese, é primo, Euclides observa que encontrou os números primos A, B, C e G que são mais do que a quantidade dada A, B, C.

De acordo com Reid e Knipping (2010), esta prova permite observar duas coisas. Por um lado, Euclides apresenta um diagrama que não é necessário para

[6] Menor múltiplo comum.

[7] Se $p|a$ e $p|a+c \Rightarrow p|c$. Se $p|a$, então $\exists k_1$: $a = k_1 p$. De igual modo, se $p|a+c$, então $\exists k_2$: $a+c=k_2 p$. Logo, $a+c = k_2 p \Leftrightarrow k_1 p + c = k_2 p \Leftrightarrow c = (k_2 - k_1)p$, ou seja, $p|c$.

mostrar o pretendido. Para os próprios gregos as demonstrações estavam associadas às imagens, portanto, para eles se não existisse um diagrama não existia prova. A presença de diagramas, mesmo onde não eram precisos, pode também estar relacionado, como anteriormente referido, com as provas iniciais associadas a argumentos visuais.

Por outro lado, o facto de mostrar que se existem três primos, então existe um quarto, Euclides recorre a um caso específico para mostrar que se pode representar todos os casos. Este método de prova conhecido por usar um *exemplo genérico*, era uma técnica também usada pelos chineses. De facto, a escolha de 3 números primos em nada afeta a demonstração, visto que não usa este facto durante a mesma. Portanto, poderia usar 4 ou 5 ou mais números. A questão é que Euclides não possuía um método para representar simbolicamente uma quantidade indeterminada de números.

3.5. Arquimedes e Apolónio

Após Euclides, na matemática grega do século III a.C. e do início do século II a.C. destacaram-se duas figuras, respetivamente, Arquimedes de Siracusa e Apolónio de Perga, sendo cada uma herdeira de um aspeto diferente da matemática grega do século quarto (Katz, 1993).

Arquimedes é, sem dúvida, um dos nomes mais brilhantes da História da Matemática (Vasconcellos, 2009), e geralmente considerado o maior génio científico de toda a Antiguidade (Sá, 2000; Struik, 1997). Matemático, físico e engenheiro, Arquimedes conciliou o culto da investigação fundamental mais desinteressada com um invulgar talento para as aplicações de caráter prático (Sá, 2000), sendo esse seu interesse considerado ímpar se comparado com o «(...) desprezo a que tal interesse foi votado pela escola platónica dos seus contemporâneos.» (Struik, 1997, p. 93). Arquimedes, ao contrário dos seus antecessores, não era relutante em partilhar os seus métodos de descoberta, nem tinha receio de realizar cálculos e exibir, portanto, os seus resultados numéricos (Katz, 1993). Arquimedes diferia, assim, da maior parte dos matemáticos gregos pelas suas capacidades de cálculo, o que, de acordo com Struik (1997), indicia que a tradição platónica não dominou inteiramente a matemática helenista.

Apolónio, por seu lado, era magistral na generalização do domínio da análise a novos e difíceis problemas de construções geométricas. Os trabalhos de Arquimedes testemunham que, em meados do século III a.C., ainda se consideravam sobretudo cones de revolução de uma só folha e se obtinham os três tipos de cónicas (oxitomo, ortotomo e amblitomo) seccionando cones com diferentes ângulos no vértice por planos perpendiculares a uma geratriz[8]. Esta situação alterou-se com a publicação do tratado *Cónicas* de Apolónio (Sá, 2000). Uma obra em oito livros como fundamento para estas novas abordagens, na sua obra-prima *Cónicas*, Apolónio desenvolveu sinteticamente as propriedades importantes destas curvas, propriedades que seriam centrais no desenvolvimento de novas soluções para problemas como a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo (Katz, 1993). Originalmente, o tratado consistia em oito livros, mas o último encontra-se perdido. Os quatro primeiros livros do tratado são os únicos conhecidos na versão original grega, tendo os três livros seguintes sido preservados em tradução árabe. Contudo, nos princípios do século XVIII, o astrónomo Edmund Halley traduziu estes três tratados do árabe para grego e publicou uma edição completa do grande tratado de Apolónio, incluindo uma reconstituição do oitavo livro. Trata-se de uma obra extensa, contendo 387 proposições, e de leitura difícil, uma vez que a falta de uma notação simbólica torna pesado o estilo retótico dos enunciados e das demonstrações (Sá, 2000). No entanto, de acordo com Sá (2000), as *Cónicas* são, sem qualquer dúvida, a mais importante obra matemática de Apolónio. A sua influência foi enorme, constituindo o tratado por excelência sobre secções planas do cone na Antiguidade helenista, no Islão medieval e na Europa até ao fim da Renascença. No entanto, através de Papo de Alexandria (no prefácio do livro VII da *Coleção*

[8] Julga-se ser esta a abordagem iniciada por Menecmo.

Matemática), sabe-se que Apolónio escreveu várias outras obras de geometria, mas a maioria desses trabalhos encontra-se perdida (Sá, 2000). Por fim, acresce referir que, de acordo com Struik (1997), é em Apolónio que se encontra, pela primeira vez, e de uma forma explícita, o requisito das construções geométricas serem limitadas apenas ao uso do compasso e da régua não graduada, realçando que talvez esta não fosse uma exigência geral dos gregos.

3.5.1. O método de exaustão

Arquimedes escreveu vários tratados apresentando modelos matemáticos e aplicou os seus princípios físicos à invenção de vários dispositivos mecânicos (Katz, 1993). Na matemática, as contribuições de Arquimedes foram realizadas no domínio a que hoje se chamaria cálculo integral: teoremas sobre áreas de figuras planas e sobre volumes de corpos sólidos (Struik, 1997). Na descoberta dos novos resultados matemáticos, Arquimedes não só recorreu ao conhecimento reunido nos *Elementos* de Euclides, mas também inovou no modo como esse conhecimento era usado em métodos de investigação e era aplicado em novos campos da geometria. Uma das coisas que distingue o trabalho de Arquimedes do realizado por Euclides é o facto de Arquimedes ter, com frequência, apresentado o método de descoberta de um teorema e/ou análise da situação antes de apresentar uma prova rigorosa sintética (Katz, 1993).

A base matemática usada por Arquimedes foi o *método de exaustão*, que permite avaliar a equivalência entre áreas ou volumes de figuras geométricas, operando com aproximações por defeito ou por excesso. Estes argumentos iriam constituir os alicerces sobre os quais se estabeleceriam, no século XVIII, as primeiras justificativas para o conceito de limite.

O método de exaustão assenta em que, dada uma grandeza qualquer, esta pode ser subdividida indefinidamente. Este método é atribuído a Eudoxo de Cnido, do século IV a.C., como elaboração da abordagem apresentada pelo sofista Antifonte para quadrar o círculo. Segundo Antifonte, para resolver o problema da quadratura do círculo, bastaria inscrever num círculo polígonos regulares. Aumentando indefinidamente o número de lados desses polígonos, num determinado momento o polígono confundir-se-ia com o círculo e, assim, era possível quadrar o círculo (Vasconcellos, 2009). Contudo, este procedimento foi criticado por matemáticos da época, argumentando que se uma grandeza pudesse ser subdividida indefinidamente, seria impossível calcular daquele modo a área dessa grandeza (Eves, 1964).

O fundamento do método de exaustão encontra-se na primeira proposição do livro X dos *Elementos* Euclides, sendo por intermédio deste resultado que, na Antiguidade, se tratavam as questões relativas à convergência (Sá, 2000, p. 298):

> Dadas duas grandezas desiguais, se da maior se subtrair uma grandeza maior do que a sua metade, e do que sobrar uma grandeza maior do que a sua metade, e se este processo for repetido continuamente, sobrará uma grandeza menor do que a menor das grandezas dadas.

É de observar que o enunciado só faz sentido se as grandezas em causa forem do mesmo tipo.

O livro X dos *Elementos* de Euclides, tal como o livro V, tem sido um dos mais admirado dos treze livros de Euclides. Enquanto que o quinto livro dos *Elementos*, trata da teoria das proporções de Eudoxo, o décimo aborda os incomensuráveis.

A descoberta dos incomensuráveis tinha ameaçado a matemática de uma crise lógica, lançando dúvidas sobre as provas que recorressem ao uso da proporcionalidade (Boyer, 2004). Uma parte da crise resultante da incomensurabilidade foi enfrentada com sucesso, aplicando a teoria das proporções de Eudoxo, mas restava ainda o caso da comparação de configurações curvas e retilíneas. Uma das ideias surgidas foi a de tentar inscrever e circunscrever figuras retilíneas dentro e fora da figura curva, indo-se aumentando indefinidamente o número de lados. No entanto, o problema surgia pelo facto de não se saber terminar o argumento, já que o conceito de limite não era conhecido (Boyer, 2004). Contudo, a definição de proporcionalidade entre grandezas da mesma espécie[9] serviu de chave à resolução do problema, sendo através desta definição fácil de provar a proposição X, 1 que serve de base ao método de exaustão dos gregos. Esta proposição é aplicada no livro XII, por exemplo na prova da proposição *Elementos* XII, 2 «áreas de círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros». Esta é a primeira prova que se conhece que tenha sido realizada pelo método de exaustão (Sá, 2000) e de acordo com Boyer (2004) provavelmente a prova que se encontra nos *Elementos* é a de Eudoxo.

Observe-se a prova dada por Euclides de *Elementos* X, 1.

Sejam AB e C duas grandezas diferentes do mesmo tipo, em que AB é a maior (figura 3.8.). Quer-se mostrar que subtraindo a AB uma grandeza maior do que a sua metade e do que sobrar uma grandeza maior do que a sua metade e se este processo for repetido continuamente, sobrará uma grandeza menor do que a grandeza C.

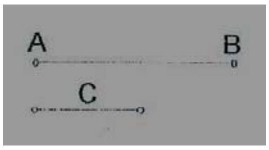


Figura 3.8. Elementos X, 1.

Sendo AB e C duas grandezas do mesmo tipo (isto é em que existe uma relação a respeito do tamanho), pela definição[10] 3 do livro V, existe uma razão entre as grandezas AB e C, ou seja, pela definição 4 do livro V, a grandeza C, se multiplicada, será a certo momento maior do que a grandeza AB.

Multiplicando C, seja DE um múltiplo de C maior do que AB. Dividindo DE em partes iguais a C, sejam DF, FG e GE essas partes (Figura 3.9.).

[9] *Elementos* V, definição 4: diz-se que têm uma razão as grandezas que são capazes, quando multiplicadas, de se exceder uma à outra.

[10] *Elementos* V, definição 3: Uma razão é uma espécie de relação a respeito do tamanho entre duas grandezas do mesmo tipo.

Figura 3.9. Elementos X, 1 (continuação).

De AB, subtraímos BH, uma grandeza maior que a metade de AB. De AH subtrai-se HK, uma grandeza maior do que a metade de AH (Figura 3.10.).

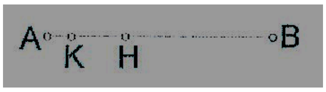


Figura 3.10. Elementos X, 1 (continuação).

O processo continua até que o número de divisões em AB seja igual ao número de divisões em DE.

Sejam, então, AK, KH e HB divisões iguais em quantidades a DF, FG e GE (Figura 3.11.).

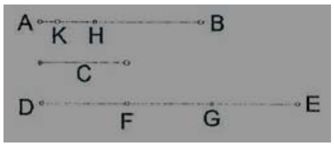


Figura 3.11. Elementos X, 1 (continuação).

Tem-se que:

– GE é menor do que a metade de DE, portanto DG é maior do que a metade de DE;

– BH é maior do que a metade de AB, portanto AH é menor do que a metade de AB.

Como DE é maior do que AB, tem-se que AH é menor do que DG.

Mas,

– FG é metade de DG, portanto DF também é metade de DG;

– KH é maior do que a metade de AH, portanto AK é menor do que a metade de AH.

Como DG é maior do que AH, tem-se que AK é menor do que DF. Ora, DF é igual a C, portanto C é maior do que AK. Assim, da grandeza AB sobrou a grandeza AK que é menor do que a menor das grandezas dadas, ou seja, que é menor do que C, com se pretendia demonstrar.

Como já foi observado, o termo exaustão apareceu pela primeira vez em Grégoire de Saint-Vincent, em 1647. Este método evitava as dificuldades dos infinitesimais renunciando simplesmente a eles, através da redução dos problemas que conduziam a infinitesimais a problemas que envolviam somente o uso da lógica formal (Silva & Silva, 2010).

O método de exaustão foi aprimorado por Arquimedes, que fez aplicações muito importantes com o referido método, as quais contribuíram para marcar a importância deste na matemática antiga e para o desenvolvimento de grande parte da matemática como a concebemos hoje. Nessa medida, a proposição X, 1 dos *Elementos* é conhecida como *princípio de Eudoxo-Arquimedes*, uma vez, que por um lado, na sua base contempla a teoria das proporções apresentada por Eudoxo de Cnido, e por outro lado, por Arquimedes ter sido o matemático que maior visibilidade lhe deu.

Este método, que se tornou o modelo grego nas demonstrações de cálculos de áreas e volumes, é completamente rigoroso. No entanto, o resultado, para ser provado, tinha de ser conhecido à partida. Tal facto levanta a questão: como eram descobertos esses resultados? De facto, os matemáticos do Renascimento criticaram os matemáticos gregos por estes não terem revelado os passos com que trilharam o caminho que os permitiu descobrir os seus resultados. No entanto, em relação ao trabalho de Arquimedes, foi descoberto em 1899 um palimpsesto contendo o método de descoberta, segundo o próprio Arquimedes. Esta obra de Arquimedes é conhecida por *O Método*. O manuscrito data do século X, mas a escrita foi parcialmente apagada no século XIII e o pergaminho reutilizado para um trabalho religioso. Contudo, o texto antigo encontra-se, em grande parte, ainda legível, tendo sido analisado por Heiberg que publicou o texto em 1906 (Katz, 1993).

3.5.2. *Da Medida do Círculo* e *O Método* de Arquimedes

No seus trabalhos, Arquimedes combinou a originalidade de raciocínio com mestria na técnica de cálculo e rigor nas demonstrações. Exemplo característico desse rigor é o uso correto do método de exaustão.

O breve tratado *Da Medida do Círculo*, constituído por duas proposições, contém resultados numéricos, contrariamente a qualquer assunto encontrado na obra de Euclides (Katz, 1993). Na primeira proposição Arquimedes demostrou que a área dum círculo é igual à área dum triângulo de base igual ao perímetro da circunferência do círculo e de altura igual ao raio do círculo.

No enunciado da proposição, Arquimedes fala de um *triângulo retângulo*, mas essa propriedade não intervém na demonstração do resultado (Sá, 2000). No entanto, com esta proposição, Arquimedes dá resposta à questão da quadratura do círculo, mostrando que a área de um círculo de raio dado pode ser determinada uma vez que se conheça também o perímetro (Katz, 1993).

Na demonstração desta proposição, Arquimedes utilizou basicamente o método de exaustão. Contudo, «(...) também nisso foi inovador, uma vez que à exaustão [...] da figura curvilínea por figuras poligonais inscritas, acrescentou a sua *compressão* por figuras poligonais circunscritas.» (Sá, 2000, p. 305). Nesta demonstração, Arquimedes, embora não as mencione explicitamente, utiliza a definição 4 de *Elementos* V e a proposição I de *Elementos* X. Quanto à ideia de utilizar figuras poligonais circunscritas à figura curvilínea dada, Arquimedes evita a manipulação de proporções semelhante à da segunda parte da prova da proposição *Elementos* XII, 2 (Sá, 2000).

O Método contém os processos relativos aos teoremas mecânicos de Arquimedes, nos quais descreve a via da descoberta dos seus resultados, que são demonstrados pelo método de exaustão. Arquimedes prosseguiu, assim, com os métodos de "limite" de Eudoxo, conseguindo não apenas aplicá-los à determinação de áreas e volumes de novas figuras, mas também desenvolvendo novas técnicas que permitiam que os resultados fossem prontamente obtidos (Katz, 1993).

Arquimedes fez aplicações práticas de resultados matemáticos nas suas descobertas, usando a pesagem de figuras geométricas. Contudo, no livro *O Método*, apresenta as provas das suas descobertas matemáticas usando dois métodos distintos: o *método mecânico* e o *método geométrico*. Arquimedes observou a diferença entre estes dois métodos (Katz, 1993). O método mecânico era útil para descobrir os teoremas e não para fornecer as respetivas provas. Já o método geométrico permitia apresentar as provas conforme o padrão de rigor aceite naquela época. Ao usar tanto o método mecânico como o método geométrico, Arquimedes expôs os resultados que investigou de forma sistematizada, escrevendo, no entanto, provas distintas. De acordo com Dijksterhuis (1987), Arquimedes não estava preparado para reconhecer que os dois casos permitiam a prova, uma vez que a falta de exatidão do método mecânico residia no caráter dos argumentos usados, ou seja, na aplicação dos *indivisíveis* e da *mecânica*. Assim, para satisfazer os padrões académicos da época, Arquimedes expôs as provas das suas descobertas sem usar nem *indivisíveis*, nem *mecânica* usando portanto a dupla redução ao absurdo e seguindo assim o modelo geométrico euclidiano.

Arquimedes manteve contactos epistolares com alguns matemáticos do Museu de Alexandria (Sá, 2000), nomeadamente, com Eratóstenes de Cirene. Nas suas obras é possível encontrar comentários do autor sobre a sua própria produção, seguidas de exposições técnicas. Em *O Método*, apresenta uma troca de correspondência entre Arquimedes e Eratóstenes, em que refere o modo como chegou a alguns resultados matemáticos, publicados anteriormente. Esta carta-prefácio elucida sobre os métodos de investigação e de exposição usados por Arquimedes (Vasconcellos, 2009).

> "Arquimedes a Eratóstenes, saúde!
> "Primeiramente enviei-te os enunciados de alguns teoremas descobertos por mim, convidando-te a achar as suas demonstrações que eu, naquele momento, te não comuniquei.
> [...] Mas conhecendo-te, como devo dizer, como sábio zeloso, filósofo distinto e grande admirador das investigações matemáticas, julguei conveniente escrever para teu uso e comunicar-te os particulares de um *método especial*, do qual quando estejas em plena posse, te poderás servir para descobrir certas *verdades matemáticas* por meio da *Mecânica*. De mais, eu vou-me persuadindo de que tal método não é menos útil para a própria *demonstração* dos *teoremas*.
> "De facto, com a ajuda da *Mecânica*, descobri frequentemente *proposições* que depois demonstrei por meio de Geometria (porque o *método* em questão não constitui uma verdadeira demonstração); visto que se torna mais fácil, depois de se ter adquirido, com tal método, uma ideia das questões, imaginar a sua demonstração, do que se procurasse esta sem alguma noção preliminar.
> "Pela mesma razão, acerca dos teoremas de que Eudóxio descobriu primeiro a demonstração – isto é, que *o cone é a terça parte do cilindro, a pirâmide a terça parte do prisma da mesma base e da mesma altura* – a honra deve ir em grande parte para Demócrito, que foi o primeiro a enunciar sem demonstração as proposições relativas a essas figuras. (*in História das Matemáticas na Antiguidade*, Vasconcellos, 2009, p. 261)

Arquimedes destaca a importância dos procedimentos prévios, como um meio para descobrir e expor os seus resultados. Para verificar as suas intuições, antes de as demonstrar pelo raciocínio teórico, Arquimedes "interroga" a realidade através da observação e da experiência. *O Método* contém a via de descoberta de Arquimedes, pela *mecânica*, de diversos resultados importantes sobre áreas e volumes, muitos dos quais se encontram rigorosamente provados noutro lugar. Arquimedes sabia que este método não fornecia uma prova rigorosa, porque nem os princípios mecânicos, nem as secções *indivisíveis* podiam figurar num argumento matemático formal (Katz, 1993). No prefácio de *O Método*, Arquimedes observou que a sua investigação, pelo dito método, não fornecia uma demonstração efetiva dos teoremas, portanto, estes tinham que ser posteriormente demonstrados pela geometria (Katz, 1993). É possível destacar no seu trabalho dois momentos na produção do conhecimento matemático: o de descobrir e o de demonstrar.

De acordo com Katz (1993), embora Arquimedes tenha usado o termo *indivisíveis* ao longo de *O Método*, não é possível encontrar qualquer explicação para o seu uso. Nesse sentido Katz (idem) observa que esta situação pode levar a acreditar que os seus contemporâneos, em particular os matemáticos em Alexandria com quem se correspondia, compreenderiam o uso de *indivisíveis* e talvez os usassem em argumentos semelhantes, embora soubessem que estes argumentos não constituiam uma prova geométrica rigorosa.

É o próprio Arquimedes quem preconiza o reconhecimento da utilidade do procedimento mecânico ou método da descoberta, em épocas futuras,

> "Pelo que respeita também aos teoremas que hoje publico, fiz a sua descoberta servindo-me do *método mecânico*. Por isso julgo dever expor-te tal método por duas razões: acima de tudo, porque, tendo feito alusão a ele noutro lugar, não queria ser acusado por alguém de ter falado sem fundamento, e, depois, porque entendo que essa publicação não será de medíocre utilidade para a nossa ciência. Pois que, sem dúvida, muitos sábios presentes e futuros, com o método que eu exporei, ficarão em condições de descobrir outros teoremas que não encontrei, ainda, no meu caminho". (*in História das Matemáticas na Antiguidade*, Vasconcellos, 2009, pp. 261 – 262)

Contudo, Arquimedes notou que era obviamente mais fácil elaborar a prova, quando previamente se adquire, pelo método, algum conhecimento das questões, do que encontrá-la sem qualquer conhecimento prévio. (Katz, 1993). No final da primeira proposição de *O Método*, é possível observar a posição de Arquimedes acerca do valor científico e espistemológico do seu procedimento, uma vez que conclui a sua exposição referindo que, embora o resultado enunciado não esteja efetivamente demonstrado, devido ao argumento usado, o próprio argumento fornece indicação de que o resultado é verdadeiro. Nesse sentido, será necessário o recurso à demonstração geométrica, demonstração essa já descoberta e publicada pelo próprio Arquimedes (Katz, 1993).

Apesar de descrever o método de descoberta dos seus resultados, Arquimedes não deixou de apresentar as demonstrações segundo o modelo em vigor. Esse aspeto torna-se significativo, por mostrar que a exposição teórica de um resultado matemático explicita também o contexto social, ou seja, é uma produção que obedece a preceitos académicos em vigor numa dada época e entre diferentes grupos. De acordo com Struik (1997), esta questão pode ser também o reflexo da vitória do idealismo platónico no domínio da filosofia da matemática. Para este autor (idem), *O Método* representava uma escola de raciocínio matemático que competia com a escola de Eudoxo. Associada ao nome de Demócrito de Abdera (Vasconcellos, 2009), o fundador da teoria atomista, a escola Atomista, estabelecida na Trácia, que data do período da crise dos incomensuráveis. Demócrito ocupou-se da investigação infinitesimal da composição geométrica dos corpos (Vasconcellos, 2009), sendo que nesta escola ter-se-ia introduzido a noção de *átomo geométrico*, em que se supunha que um segmento de reta, uma área ou um volume eram constituídos por um grande, mas finito, número de "átomos" indivisíveis. Nesse sentido, o cálculo de um volume consistia na soma dos volumes dos "átomos" constituintes desse corpo (Struik, 1997). Katz (2010, p. 144) observa que «(...) Arquimedes usa a mesma fraseologia que Demócrito usou dois séculos mais cedo, de que as secções indivisíveis de uma área plana ou um sólido "caracterizam" a figura inteira». Embora não existam provas de que alguma vez na Antiguidade se tivesse desenvolvido um método rigoroso sobre esta fundamentação, verifica-se que matemáticos, como Kepler, utilizaram as mesmas conceções, considerando a circunferência de um círculo decomposta num número muito grande de segmentos retilíneos muito pequenos. Para Struik (1997), a vantagem do *método atomista*, menos fundamentado, mas mais fértil, em comparação com o método de exaustão, mais rigoroso, mas relativamente estéril, consistia no facto de facilitar a descoberta de novos resultados. No entanto, Struik (idem) observa que de uma forma significativa em quase todos os textos clássicos foi utilizado o segundo método.

3.6. O impacto do legado de Euclides

Desde o Renascimento até ao século XIX, a matemática europeia prosseguiu o desenvolvimento dos trabalhos efetuados pelos gregos antigos (Reid & Knipping, 2010). O século XVI e o princípio do século XVII caracterizaram-se pela tentativa de recuperação dos escritos matemáticos gregos. Este interesse pelos clássicos, cedo levou à questão de saber como os antigos descobriam os seus resultados. Um dos motivos que levaram os matemáticos quinhentistas e seiscentistas à tentativa de recuperação do método analítico antigo foi o facto de se sentirem intrigados e muitas vezes frustrados com o estilo sintético grego que os privava do método que primeiramente teria sido utilizado na desoberta dos resultados. Prova desse sentimento de frustração é a afirmação de Descartes em 1629 na regra IV da obra *Regras para a Direção do Espírito*:

> Mas quando eu depois refleti como poderia ser que os primeiros pioneiros da Filosofia das eras passadas recusassem admitir no estudo da ciência quem não fosse versado em matemáticas, evidentemente acreditando que era este o mais indispensável exercício mental e de preparação para entender as outras ciências mais importantes, tive a confirmação da minha suspeita de que eles tinham um conhecimento de uma espécie de matemáticas bastantes diferentes das utilizadas correntemente no nosso tempo (...). Na verdade parece-me reconhecer certos traços desta verdadeira matemática em Papo e Diofanto, que não se consideravam como pertencentes ao período mais antigo, embora tivessem vivido muitos séculos antes do nosso tempo. Mas, na minha opinião esses autores tiveram uma espécie de baixa astúcia, deplorável de facto, suprimindo este conhecimento. (Mahoney, 1973, p. 31)

Naturalmente que, ao longo desse tempo, ocorreram diversas vicissitudes, nomeadamente, no que se refere ao rigor das provas matemáticas. A descoberta de novos métodos e teoremas nem sempre foi acompanhada com a respetiva e rigorosa prova matemática. Por exemplo, quando Newton e Leibniz introduziram o cálculo, as justificações dos seus métodos foram criticadas por não estarem de acordo com a abordagem de Euclides, sendo esta questão apenas resolvida no século XIX com Cauchy e Weierstrass, entre outros.

Ao mesmo tempo que surgiam críticas à falta de rigor da análise, ocorria um desenvolvimento na história da geometria: a invenção das geometrias não-euclidianas. De facto, até ao desenvolvimento das geometrias não-euclidianas, as objeções à obra de Euclides não tinham sido significativas. Até ao século XIX, Euclides e todos os seus sucessores supuseram que os seus postulados eram verdades universais e necessárias àcerca do espaço físico (Kneale & Kneale, 1962), sendo a geometria euclidiana considerada, nomeadamente por Descartes e Kant, um exemplo de conhecimento que era incontestavelmente verdadeiro (Reid & Knipping, 2010). O anúncio da possível construção por Lobachevsky, Bolyai e Gauss de uma geometria na qual um dos postulados de Euclides, o famoso quinto postulado, era falso, levantou a hipótese de se colocar em questão a própria geometria euclidiana. Naturalmente que também houve a forte tentação de assumir a existênca de algo de errado com as geometrias não-euclidianas, isto é, que existia algures uma contradição. Contudo, em 1871, Klein elimina essa possibilidade provando que se existia uma contradição na geometria não-euclidiana então também existia uma contradição na geometria euclidiana.

3.6.1. O surgimento das geometrias não-euclidianas

A descoberta das geometrias não-euclidianas desferiu um golpe na ideia de que as matemáticas afirmavam algo de verdadeiro sobre o mundo físico (Barthélemy, 2003). Embora se reconhecessem as retas da geometria grega como objetos ideais, diferentes por natureza de tudo o que pode ser percetível pelos nossos sentidos, considerava-se evidente que os teoremas bem demonstrados podiam ser utilizados com confiança nas operações materiais. O agricultor ou o astrónomo que nas suas observações ao medir os três ângulos internos de um triângulo encontrasse um total diferente de 180°, só podia colocar em causa os seus métodos, as suas observações ou os seus cálculos. Contudo, o aparecimento das geometrias não-euclidianas acabavam com esta certeza. É certo que a geometria euclidiana continuou a permanecer como referência em quase todos os casos; no entanto, ela perdeu o seu antigo estatuto de corpo de verdades incontestáveis. Barthélemy (2003) refere que é grande a tentação de dizer que uma proposição é verdadeira apenas porque foi bem deduzida dos axiomas. No entanto, observa que estes já não podem ser qualificados como verdadeiros senão por pura convenção. Houve, portanto, necessidade de uma nova abordagem que assegurasse os fundamentos da geometria e do resto da matemática. A descoberta das geometrias não-euclidianas causou uma verdadeira revolução científica na matemática, convergindo a atenção dos matemáticos para os fundamentos da geometria (Estrada, 2000). Para esta historiadora (idem), com o surgimento das geometrias não-euclidianas foi reexaminado o rigor dos *Elementos* de Euclides, tendo essa análise evidenciado as suas "falhas lógicas". Através dessa análise, foi notado que Euclides utilizou postulados que não explicitou, usou algumas definições pouco convincentes e, além disso, muitas demonstrações euclidianas foram feitas sobre figuras que, de certo modo, substituiam o enunciado explícito de axiomas (Estrada, 2000). De facto, com a descoberta das geometrias não-euclidianas surgiram novos sistemas axiomáticos, mais longos e mais elaborados do que o apresentado por Euclides, tentando, em certa medida, colmatar as "deficiências" deste.

3.6.2. A evolução da conceção do axioma

No início do contexto dialético, o termo axioma designava uma proposição que no princípio de um debate podia ser aceite ou não. Contudo, o significado posterior que tomou na matemática foi o de uma afirmação que por si própria não podia ser provada, mas que era absolutamente certa e, portanto, podia servir de fundamento numa teoria dedutiva organizada.

A exposição e a abordagem axiomática de Euclides não é só de importância histórica. Mais do que servir de inspiração para métodos filosóficos, como o *Discurso do Método* de Descartes, ou como modelo para outros tratados, como por exemplo a obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* de Newton, e, assim, ser considerado o livro de texto mais influente na história da matemática, a sua axiomática tornou-se um motivo central na própria matemática (Reid & Knipping, 2010). De facto, as estruturas da moderna matemática são frequentemente sistemas baseados em definições, axiomas e regras de inferência. Num sistema destes, uma proposição é considerada verdadeira se pode ser deduzida a partir de axiomas num número finito de passos lógicos usando as permitidas regras de inferência (Hanna & Barbeau 2002).

Na aceção mais clássica, o axioma era um princípio que, pela sua dignidade, dever-se-ia considerar verdadeiro, uma vez que, enunciado e entendido, detinha em si o imperativo que obrigava ao seu assentimento. Os axiomas ou noções comuns eram comuns a todas as ciências e eram afirmações caracterizadas pela sua indemonstrabilidade e evidência. Já os postulados eram específicos de cada ciência.

Este ponto de vista, de que os axiomas são absolutamente verdadeiros, foi dominante até ao século XIX (Jahnke, 2010), época em que esta aceção tradicional sofreu alterações. A conceção do axioma como proposição evidente ou universalmente aceite está impregnada de intuicionismo, não sendo unanimamente reconhecida. A possibilidade de diferentes postulados, originando sistemas dedutivos diferentes (como aconteceu, por exemplo, com o aparecimeno das geometrias não-euclidianas), levou, no nosso tempo, à abolição da diferença entre axiomas e postulados. Enquanto que a corrente intuicionista destaca a intuitividade e autoevidência dos axiomas, a corrente formalista destaca a sua formalidade. A corrente formalista recusa-se a inserir em qualquer axioma o predicado *verdadeiro*, porque um sistema lógico-dedutivo pode ser comparado a um jogo onde os axiomas são as regras do mesmo.

3.6.3. Logicismo, intuicionismo e formalismo

Nos finais do século XIX e princípios do século XX, a necessidade de organizar racionalmente as matemáticas, isto é, de lhes assegurar uma base simultaneamente única e inabalável, tornou-se um tema de reflexão importante, o que originou um novo enfoque na axiomatização.

Uma das orientações tomadas foi a tentativa de Bertand Russel fazer das matemáticas um simples prolongamento da lógica, como o pretendia Frege. Daí a designação de *logicismo* associada à sua posição. O logicismo sustenta que as leis da matemática são deriváveis da lógica ou são «redutíveis» às leis lógicas (Manno, 1972).

Uma outra via que fez escola ficou conhecida por *intuicionismo* ou ainda *construtivismo*, sendo o holandês Luitzen Brouwer o seu porta-voz mais conhecido. O termo construtivismo faz referência à exigência de que os objetos matemáticos sejam construídos num número finito de etapas, ainda que a duração do processo impeça uma realização efetiva. A designação de intuicionismo evoca a ideia, de Brouwer, de que haveria, antes das construções, uma intuição, num sentido kantiano, que constituiria a base dos primeiros objetos. As matemáticas construtivistas constituíram uma escola viva, mas bastante minoritária (Manno, 1972).

A par do logicismo e do intuicionismo, a tendência mais forte foi a que reconheceu Hilbert como primeira figura. Hilbert impulsionou o emprego sistemático de um método axiomático reformado, ficando conhecido por *formalismo*, sendo que os seus trabalhos foram considerados o expoente máximo do formalismo matemático (Manno, 1972). O objetivo do formalismo era restabelecer as afirmações tradicionais da matemática, através de afirmações formais em que elas próprias pudessem ser objetos de cálculo. Através do formalismo pretendia-se substituir as palavras por símbolos, de modo a que os raciocínios adquirissem a forma de simples cálculos realizados sobre estes mesmos símbolos. A matemática a partir de uma perspetiva formalista é uma manipulação de símbolos, sem qualquer referência a qualquer significado ou interpretação (Reid & Knipping, 2010). O formalismo define autonomamente não apenas os símbolos (números e sinais), mas também as «regras de formação» e de «transformação», isto é, as regras que indicam quais as combinações de sinais admitidas e quais as relações que as regulam

(Manno, 1972). Desta forma, de acordo com Kline (1972), a prova matemática consiste neste processo: a afirmação de uma fórmula, a afirmação de que esta fórmula implica outra, a afirmação de uma segunda fórmula. Para este investigador (idem), a sequência destes passos, nos quais as fórmulas ou as implicações estabelecidas são o resultado de axiomas ou conclusões, constituirá a prova de um teorema. Kline observa ainda que, do mesmo modo, a substituição de um símbolo por outro ou por um grupo de símbolos é uma operação permitida. Assim, as fórmulas são deduzidas pela aplicação de regras de manipulação de símbolos de fórmulas previamente estabelecidas.

3.6.4. Hilbert e os *Grundlagen der Geometrie*

O mais notável sistema de axiomas para a geometria euclidiana é o apresentado por David Hilbert, em 1899, na sua famosa obra *Grundlagen der Geometrie* (*Fundamentos da Geometria*), na qual a geometria euclidiana recebe uma nova exposição. De facto, o sistema apresentado por Hilbert talvez se possa considerar o mais intuitivo e próximo do espírito de Euclides. A distinção entre axiomas e postulados foi definitivamente suprimida. Todos os primeiros enunciados, os que se admitem de início numa construção, foram designados por *axiomas*, ainda que se tratasse, no fundo, de postulados. Com os *Grundlagen*, Hilbert tornou-se um dos principais representantes da «escola axiomática» que tanta influência teve na visão contemporânea da matemática e do seu ensino. Os *Grundlagen* vieram pôr em evidência a natureza hipotética-dedutiva da geometria euclidiana e contribuíram enormemente para a expansão do método axiomático, não só na geometria, mas também em outros ramos da matemática. Nos *Grundlagen* foi a vez da geometria, disciplina que registara extraordinário florescimento no século XIX, alcançar o caráter formal da álgebra e da análise. Naturalmente que os *Elementos* de Euclides possuíam uma estrutura dedutiva, mas, como foi referido anteriormente, continham hipóteses implícitas, definições sem grande sentido e “falhas lógicas”.

O sistema axiomático apresentado por Hilbert difere do de Euclides em duas características fundamentais: a introdução de conceitos primitivos e a não existência de axiomas admitidos implicitamente (Estrada, 2000). Hilbert reformulou a geometria euclidiana em vinte axiomas, distribuindo-os por cinco grupos: incidência, ordem, congruência, continuidade e paralelismo. Estes grupos traduziam a evolução sofrida pela própria geometria euclidiana ao longo do século XIX, e a nova perceção que se adquirira dela. Em termos gerais, o trabalho de Hilbert situou-se na confluência das duas preocupações: a reorganização da geometria euclidiana, fruto do interesse dispensado mais às próprias propriedades do que às figuras, e a necessidade de uma reconstrução sem falhas.

Embora os *Grundlagen der Geometrie* se iniciassem com uma frase de Kant – *Todo o conhecimento humano começa com intuições, passa a conceitos e termina com ideias* – o desenvolvimento da obra exprime uma visão antikantiana (Providência, 2000). Hilbert dava ênfase a que não deviam ser atribuídas aos termos não definidos outras propriedades além das enunciadas nos axiomas. O caráter empírico-dedutivo das antigas conceções geométricas devia ser posto de lado, havendo que entender pontos e retas como meros elementos de conjuntos dados. Os conceitos primitivos introduzidos por Hilbert são «pontos», «retas» e «planos», não sendo mais precisas intuições geométricas para provar resultados, encontrando-se as relações mútuas destes entes definidas apenas pelos axiomas (Estrada, 2000). Deste modo, «devemos ser capazes de dizer em qualquer altura – em vez de pontos, linhas retas e planos – mesas, cadeiras e canecas de cerveja» (Providência, 2000, p. 240), ou seja, a interpretação particular dos axiomas em termos do mundo real é irrelevante. É este sentido desta famosa citação de Hilbert que, segundo consta, foi proferida na estação de caminho de ferro de Berlim.

A principal preocupação hilbertiana era garantir a coerência das matemáticas, nomeadamente da aritmética. De facto no capítulo II dos *Grundlagen*, Hilbert mostra a consistência dos seus axiomas reduzindo o problema à consistência da aritmética, ou seja, reduziu a consistência da geometria euclidiana à consistência da aritmética (Estrada, 2000). Contudo, em 1931, foi demonstrado por Kurt Gödel que este programa, pelo menos como fora definido, não podia ser idealizado, uma vez que não é possível provar a consistência de uma teoria dedutiva dentro da própria teoria (Estrada, 2000). Porém, o trabalho de Hilbert não retira significado à matemática. Como Estrada (2000, p. 513) observa, «o aspeto intuitivo permanece e este continua a ser de facto o fio condutor de toda a investigação e descoberta.».

3.6.5. As consequências da metodologia euclidiana

De um modo muito informal, um sistema axiomático (ou dedutivo) requer: termos não definidos (ou primitivos), termos definidos, axiomas (ou postulados) e teoremas. É também necessário um sistema lógico, sendo que apenas as verdades expressas nos axiomas e as suas consequências logicamente deduzidas podem ser usadas nas demonstrações.

Com o formalizar da matemática, foi possível aos matemáticos restaurar e superar os standards de rigor que tinham sido estabelecidos durante o período clássico da matemática grega (Jones, 1996). O exemplo mais influente do formalismo como estilo de exposição matemática foi o trabalho desenvolvido, em França, por um grupo conhecido pelo nome Nicolas Bourbaki. O trabalho formalista desenvolvido nos fundamentos da matemática inspirou este grupo na aplicação da abordagem axiomática à teoria dos conjuntos, à álgebra, à topologia e à análise que, consequentemente, originou algumas das reformas no ensino da matemática. Através do pseudónimo Bourbaki, foram produzidos uma série de textos em teoria de conjuntos, álgebra e análise, que tiveram, nos anos 60 do século XX, uma enorme influência em todo o mundo (David & Hersh, 1981). De facto, o estilo formalista gradualmente penetrou no ensino das matemáticas não superiores, com o nome de "matemática moderna".

As questões relativas aos fundamentos da matemática, isto é, às afirmações que permitem estabelecer uma base para a indubitabilidade dessa construção lógica, dominaram a filosofia da matemática no século XX. Contudo, uma radical e diferente alternativa foi apresentada através do notável trabalho de Imre Lakatos (David & Hersh, 1981).

3.6.6. Lakatos: *Provas e Refutações*

É comum, entre muitos epistemólogos, distinguir entre ciências formais e ciências naturais. No entanto, o estudo da história da ciência tem colocado em questão esta separação entre a matemática e as ciências naturais, uma vez que existem registos históricos que permitem mostrar a estreita ligação entre ambas. De facto, esta ligação encontra-se presente na Grécia Antiga. Por exemplo, muitos dos resultados de geometria de Arquimedes têm a sua origem na tentativa de resolver problemas relativos ao equilíbrio de alavancas. Também no século XIX, a teoria das séries trigonométricas teve a sua origem nas tentativas de Fourier em resolver o problema da propagação do calor. Reciprocamente, a influência da matemática sobre as ciências empíricas é amplamente conhecida. Por exemplo, muitas questões desenvolvidas matematicamente, mais tarde, têm aplicações em outras áreas científicas, como, por exemplo, a análise dos movimentos predador-presa, pelo modelo de equações diferenciais de Lotka-Volterra; o recurso a transformadas de Lapace para modelação e análise de transferência de sistemas realimentados – sistemas eletrónicos de robótica.

Para Lakatos não existia diferenças entre o desenvolvimento das ciências naturais e o desenvolvimento da matemática (Molina, 2001).

Lakatos tentou aplicar à matemática a metodologia de conjeturas e refutações proposta por Popper para a ciência natural, dando, assim, um passo em frente, uma vez que Popper ainda considerava a matemática como um conjunto de enunciados incontestáveis, verdadeiros e não sujeitos a refutação (Molina, 2001). Também os trabalhos de George Pólya sobre heurística matemática inspiraram Lakatos (Molina, 2001). Pólya procurava determinar regras segundo as quais pudessem ser identificados os problemas matemáticos e as conjeturas (hipóteses) que tentam resolver esses problemas. Na visão de Pólya, a matemática não podia ser identificada como um sistema formal, em que, a partir de axiomas e regras, se derivavam os enunciados.

No seu livro *Provas e refutações: a lógica da descoberta matemática*, Lakatos apresentou uma diferente conceção da matemática. Na visão de Lakatos, a matemática não aparece como um reino de verdades eternas. Lakatos mostra como os próprios enunciados e provas matemáticos estão sujeitos à crítica e à revisão. De facto, na Antiguidade Clássica, há exemplos de "crítica matemática". Por exemplo, quando Apolónio escreveu o seu famoso tratado *Cónicas*, as secções cónicas eram já conhecidas, uma vez que Aristeu e Euclides tinham escrito, anteriormente, duas exposições gerais sobre este assunto. No entanto, tal como os *Elementos* de Euclides substituiu textos elementares anteriores, assim, no campo das cónicas, o tratado de Apolónio imperou perante todos os outros que abordavam esta temática, inclusive o trabalho sobre cónicas de Euclides. É de observar que na Antiguidade nenhuma tentativa parece ter sido feita para aperfeiçoá-lo (Boyer, 2002). Apolónio descreve os quatro primeiros livros como se formassem uma introdução elementar e supõe-se que muito desse material já havia aparecido em tratados anteriores sobre cónicas. No entanto, Apolónio, no Livro III, diz expressamente que alguns dos teoremas presentes neste livro são seus, pois Euclides não tinha completado os lugares ali considerados (Boyer, 2002), o que permite observar uma breve "crítica matemática" ao trabalho desenvolvido por Euclides.

No momento da publicação do ensaio *Provas e refutações,* era evidente que nenhum dos programas de fundamentação da matemática, que surgiram no início do século XX, tinha conseguido os seus objetivos. Nesse contexto, não é surpreendente que os filósofos interessados na matemática começassem a interessar-se, já na década de 60, por outras questões diferentes da tarefa de justificar o conhecimento matemático (Molina, 2001).

A posição de Lakatos dentro da filosofia da matemática foi singular. Lakatos não estava interessado em fundamentar a matemática no sentido de dar uma justificação do conhecimento matemático. Pelo contrário, manteve-se em oposição às três escolas clássicas de fundamentação da matemática – logicismo, formalismo e intuicionismo – as quais classificou sob o nome genérico de *justificacionismo* (Molina, 2001). Na visão de Lakatos, o justificacionismo na matemática caracteriza-se pela tentativa de restaurar o ideal euclidiano de teoria dedutiva. De facto, a formulação de conjeturas, a apresentação de explicações ou justificações matemáticas que não satisfaziam os cânones de rigor impostos às demonstrações e às práticas argumentativas envolvidas, em particular o estabelecimento de conjeturas razoáveis e os processos de comunicação entre os matemáticos, foram aspetos negligenciados por estas escolas.

Lakatos descreve, assim, o processo pelo qual ele considera que a matemática é descoberta, criticando a estrutura euclidiana das definições, postulados, teoremas e provas, bem como a redução da matemática à lógica formal (Reid & Knipping, 2010). A metodologia euclidiana desenvolve um certo estilo de apresentação, que Lakatos designa por "estilo dedutivo" (Lakatos, 1976). Este estilo inicia-se com uma meticulosa lista de axiomas, lemas e/ou definições, sendo que os axiomas e as definições frequentemente parecem artificiais e complicados. A lista de axiomas e definições é seguida por teoremas cuidadosamente ordenados, carregados de densas condições que parecem ser impossíveis de terem sido adivinhadas por alguém; os teoremas são seguidos das respetivas provas. Contudo, esta ordem de apresentação é quase totalmente o inverso da prática matemática. Para Lakatos, os matemáticos iniciam a sua atividade com conjeturas, sendo a prova um meio para analisar essas conjeturas. Esta última é parte de um processo que Lakatos designa por *prova-análise*. A próxima fase deste processo é o aparecimento de contraexemplos à conjetura. De acordo com Lakatos, estes contraexemplos poderão revelar não só definições problemáticas, como também afirmações escondidas. Lakatos divide os contraexemplos em três tipos: contraexemplos locais, mas não globais; contraexemplos tanto locais como globais; e contraexemplos globais, mas não locais.

Um contraexemplo que desafia um determinado argumento presente na prova, mas não na própria conjetura (Reid & Knipping, 2010) é designado por *contraexemplo local, mas não global* (David & Hersh, 1981). Neste sentido, este tipo de contraexemplos assinala que existe um problema com a prova, apontando, portanto, para a necessidade de uma afirmação escondida ser revelada, ou de uma definição ser alterada ou ainda para a necessidade de produzir uma nova prova (Reid & Knipping, 2010).

Um contraexemplo que desafia não só um argumento presente na prova, mas a própria conclusão é designado por *contraexemplo tanto local como global* (David & Hersh, 1981). Quando surge um contraexemplo deste segundo tipo, é necessário reexaminar a prova para localizar o passo da prova no qual é um contraexemplo local (Reid & Knipping, 2010). O aparecimento de contraexemplos tanto locais como globais é considerado por Lakatos o mais importante tipo de contraexemplos neste processo de prova-análise.

Um contraexemplo global, mas não local não contradiz qualquer etapa da prova, mas é um contraexemplo à conjetura. No que diz aos contraexemplos do terceiro tipo, estes só existem se o processo de prova-análise for inválido. Nesse sentido, a prova-análise é rigorosa ou válida e o correspondente teorema matemático verdadeiro se e só se não existem contraexemplos do terceiro tipo. A este critério Lakatos dá o nome de *Princípio de Retransmissão de Falsidade* (Lakatos, 1976).

Para Lakatos, o início do processo de prova-análise não está primeiramente interessado em provar a conjetura, mas sim em melhorar as definições ou axiomas nas quais elas são baseadas e têm significado. De acordo com Reid e Knipping (2010), os conceitos gerados através da prova são uma original e importante contribuição, de Lakatos, para a matemática. Esta contribuição de Lakatos permite-lhe destacar o facto de os axiomas e as definições frequentemente parecerem artificiais e complicados e os teoremas estarem carregados de densas condições.

Em *Provas e refutações*, Lakatos observa que a matemática, tal como as ciências naturais, é falível, contestável e também progride através da crítica e da correção das teorias, teorias essas que nunca estão inteiramente livres de ambiguidade ou possibilidade de erro. Para Lakatos, partindo de um problema ou uma conjetura, existe uma procura simultânea de provas e contraexemplos. Novas provas explicam velhos contraexemplos; novos contraexemplos destroem velhas provas. De acordo com Lakatos, a "prova" no contexto da matemática *informal* não significa um procedimento mecânico que nos leva a verdades numa cadeia inquebrável de afirmações e conclusões. Significa antes, explicações, justificações para tornar a conjetura plausível e convincente. Cada passo da prova é ele próprio objeto de criticismo, que pode ser um mero ceticismo ou a produção de um contraexemplo a um argumento particular (David & Hersh, 1981).

De acordo com Lakatos a apresentação da geometria de Euclides distorceu seriamente a natureza da descoberta matemática e o papel da prova na sua descoberta, ao inverter a ordem das coisas e escondendo a importância das conjeturas e contraexemplos. Enquanto a prova-análise de Lakatos conclui com teoremas, as provas de Euclides iniciam-se com eles. Para Lakatos, na metodologia euclidiana não há conjeturas, mas apenas teoremas (Reid & Knipping, 2010). Assim, Lakatos aplicou a sua análise analítica não à matemática formal, mas à matemática informal, considerada como a matemática no processo de crescimento e descoberta, que é claramente a matemática como é conhecida pelos matemáticos e estudantes de matemática. Para Lakatos, a matemática formal, à qual a filosofia se tinha dedicado, era de facto difícil de encontrar em qualquer lado que fosse fora dos textos e jornais de lógica simbólica (David & Hersh, 1981).

Para Lakatos, as ideias matemática são descobertas por um ato de criação no qual a lógica formal não está diretamente envolvida, o que realça a importância dos argumentos expressos em linguagem natural. Lakatos argumenta contra uma posição infalibilista da matemática e a favor de uma posição mais cética denominada "falibilista" o "quase empirista". Lakatos afirma que não só as verdades da matemática não são uma certeza à priori sobre o mundo, como elas também não são certeza dentro de um sistema de axiomas, porque o sistema de axiomas usado na matemática não está fixado (Reid & Knipping, 2010). Para Lakatos, isto significa que há uma mudança no papel da prova.

> Provas, mesmo que não provem, certamente ajudam a melhorar a nossa conjetura… O nosso método melhora provando. Esta unidade intrínseca entre a "lógica da descoberta" e a "lógica da justificação" é o mais importante aspeto do método. (Lakatos, 1976, p. 37)

Em Lakatos, a prova é uma parte do processo prova-análise, um ciclo de provas e refutações. Cada refutação ou contraexemplo a um teorema, pensado para ser estabelecido por uma prova, abre uma fase de criticismo do teorema, da sua prova, e das definições e afirmações sobre as quais elas são baseadas (Reid & Knipping, 2010). A matemática informal, quase-empírica, cresce através da melhoria incessante de suposições pela especulação e crítica, pela lógica da prova e refutações (Lakatos, 1976). O resultado deste criticismo melhora, assim, o teorema, as definições, os postulados e a prova.

Para Lakatos, os axiomas e as definições não são fixados, podendo ser questionados e renegociados, mas o método dedutivo por si é infalível. De facto, este é um requerimento do método de Lakatos de prova-análise por provas e refutações (Reid & Knipping, 2010). No entanto, Lakatos acredita que o método dedutivo considerado infalível pode ser questionado por aqueles que detêm uma filosofia socioconstrutivista da matemática, uma vez que estes podem afirmar que o método dedutivo é uma construção social e o que conta como um argumento dedutivo válido varia de comunidade para comunidade.

Para Lakatos, a filosofia preocupou-se durante muito tempo com a verdade e a certeza das suas conceções, fazendo da lógica e da matemática a base de sustentação para os seus métodos (Rezende, 2010). Contudo, de acordo com Perelman (1999), o discurso filosófico não é senão um diálogo dialético. A argumentação dialética não se baseia, como na lógica formal, em premissas necessárias, mas sim naquelas plausíveis ou mais aceites em determinados meios. Isso faz com que, também ao contrário da lógica, suas conclusões sejam apenas verosímeis, e não evidentes. O objeto de estudo da retórica, portanto, difere do da lógica.

3.7. A matemática e a filosofia de Descartes

Apesar do complexo projeto aristotélico, em que se identificam três domínios onde se exerce a arte do discurso – a retórica, a dialética e a analítica – a retórica e a dialética, ao longo da história do pensamento ocidental, foram caíndo num obscuro e profundo esquecimento (Rezende, 2010).

Tendo o seu início no final do século VI a.C., a filosofia teve o seu período áureo no tempo de Sócrates, Platão e Aristóteles, retomando de novo um papel de destaque no final do século XVI com o Renascimento. É de referir que durante a Idade Média a escolástica, filosofia da Igreja Católica, estabeleceu-se de forma preponderante. Contudo, no Renascimento, com a tentativa de recuperar a cultura antiga, surgem novos campos de atividade cultural, o que permitiu não só a procura do entendimento do conhecimento existente, mas também o fervilhar de novas ideias e teorias. Nessa linha de ação, surge Descartes.

Descartes interessou-se por todos os ramos do saber, desde a medicina à astronomia, à matemática e à física. A sua obra revela a profundidade dos seus estudos, não só com extenso conhecimento do saber antigo, designadamente da geometria, da física e da filosofia, mas também o conhecimento das mais recentes teorias e descobertas dos seus contemporâneos com quem estabeleceu intensa e profícua correspondência.

Em 1637, Descartes estabeleceu as regras para se obter o conhecimento universal, escrevendo o *Discurso do Método*, o discurso sobre a razão, no qual expôs a sua conceção racionalista do estudo da natureza. Este tratado continha três apêndices – *A Dióptrica*, *Os Meteoros* e *A Geometria* – sendo para Descartes os ensaios do seu método. Com este tratado, Descartes anunciou o seu programa de pesquisa filosófica, impondo-se como o "pai da filosofia moderna". A frase *cogito, ergo sum* (penso, logo existo), permite resumir o seu método de pesquisa filosófica.

Descartes estabeleceu o princípio da dúvida, afirmando que só temos certeza da nossa existência, e que tudo o que era aceite como verdade até então poderia ser questionado, uma vez que não era um conhecimento consistente, em virtude da ausência de uma sólida sustentação científica. Nesse sentido, Descartes procurava um método geral de pensamento capaz de facilitar as descobertas e encontrar a verdade nas ciências. Para Descartes, a matemática constituía o mais importante meio para compreender o universo, uma vez que as únicas ciências naturais conhecidas, até então, com algum grau de coerência sistemática eram a astronomia e a mecânica, sendo que a chave da sua compreensão era a própria matemática. Além disso, a matemática, com as suas proposições convincentes, constituía um brilhante exemplo de que a verdade podia ser encontrada na ciência. (Struik, 1993). O próprio Descartes refere que

> (…) entre todos quantos até agora procuraram a verdade nas ciências, somente os matemáticos puderam encontrar algumas demonstrações, ou seja, algumas razões certas e evidentes, (…) (Descartes, 1989, p. 73)

Assim, na execução do seu plano, Descartes afirma

> (…) que nenhuma dúvida tive de que deveria começar pelas mesmas [demonstrações] que eles [matemáticos] examinaram, ainda que não esperasse delas qualquer outra utilidade senão a de habituarem o meu espírito a alimentar-se de verdades, não se contentando nunca com falsas razões. (Descartes, 1989, p. 73)

De acordo com Struik (1993), e por razões diferentes, a filosofia mecanicista deste período chegou a uma conclusão semelhante à dos platónicos. Embora os platónicos acreditassem na harmonia do universo e os cartesianos acreditassem num método geral baseado na razão, consideraram a matemática como a rainha das ciências.

No *Discurso do Método*, Descartes estabelece os princípios da sua filosofia. Na segunda parte do tratado, Descartes refere:

> Quando mais jovem, havia-me dedicado um pouco, entre as partes da filosofia, à lógica, e, entre as matemáticas, à análise geométrica e à álgebra, três artes ou ciências que pareciam poder contribuir alguma coisa para o meu plano. Mas, ao examiná-las com cuidado, reparei que, quanto à lógica, os seus silogismos e a maior parte das suas regras, em vez de ensinar, servem antes para explicar a outrem as coisas que já se sabem (…).
> Depois, quanto à análise dos antigos e quanto à álgebra dos modernos, além de elas não se aplicarem senão a matérias muito abstratas e parecerem não ter qualquer utilidade, a primeira está sempre tão ligada à consideração das figuras, que não pode exercitar o entendimento sem cansar muito a imaginação, e a segunda sujeita-nos de tal modo a certas regras e a certos números, que faz dela uma arte confusa e obscura, que embaraça o espírito, em vez de ser uma ciência que o cultive. Foi por isso que pensei ser necessário procurar qualquer outro método, o qual incluindo as vantagens destas três ciências, estivesse isento dos seus defeitos. (Descartes, 1989, pp. 70–72)

Para Descartes, o seu método deveria combinar as vantagens presentes na lógica, geometria e álgebra, sendo, no entanto, isento dos seus defeitos.

> E, como o grande número das leis fornece, muitas vezes, desculpas aos vícios, de maneira que um Estado é muito melhor governado quando, tendo pouquíssimas leis, elas são rigorosamente cumpridas, analogamente, em lugar daquele grande número de preceitos que constituem a lógica, julguei que me bastariam os quatro seguintes, desde que eu tomasse a firme e constante resolução de não deixar uma só vez de os cumprir. (Descartes, 1989, p. 72)

Desta forma, Descartes propõe os quatro princípios fundamentais do Método que, em conjunto, podem ser consideradas o "coração" da sua filosofia.

> O primeiro consistia em nunca aceitar coisa alguma por verdadeira, sem que a conhecesse evidentemente como tal, ou seja, evitar cuidadosamente a precipitação e a prevenção [juízo precipitado], e não incluir nada mais nos meus juízos senão o que se apresentasse tão claramente e tão distintamente ao meu espírito, que não tivesse nenhuma ocasião de o pôr em dúvida [regra da evidência].
> O segundo consistia em dividir cada uma das dificuldades que examinava em tantas parcelas quantas fosse possível e fosse necessário, para melhor as resolver [regra da análise].

> O terceiro consistia em conduzir por ordem os meus pensamentos, começando pelos objetos mais simples e mais fáceis de conhecer para subir, pouco a pouco, gradualmente, até ao conhecimento dos mais complexos, não deixando de supor certa ordem entre aqueles que não se sucedem naturalmente uns aos outros [regra da ordem ou dedução].
> O último consistia em fazer sempre enumerações tão completas e revisões tão gerais, que tivesse a certeza de nada omitir [regra da enumeração ou indução]. (Descartes, 1989, p. 72 – 73)

Descartes esperava, por dúvida sistemática, chegar a ideias claras e precisas a partir das quais seria possível deduzir inúmeras conclusões válidas. Descartes procurava, assim, estabelecer regras universais para resolver problemas de toda natureza. Este seu pensamento pode ser observado em *A Geometria* quando estebelece um método que segundo ele resolve todos os problemas em geometria. Esse método é aplicado na resolução de um problema apresentado pelo comentador grego, dos séculos III-IV da nossa era, Papo de Alexandria. No Livro VII da sua grande obra *Coleção Matemática*, composta por oito livros dos quais estão perdidos o primeiro e parte do segundo, Papo, após ter-se detido algum tempo a enumerar tudo o que havia sido escrito em geometria pelos que o tinham precedido, apresenta uma questão que, segundo o próprio, nem Euclides, nem Apolónio, nem outro tinha sabido resolver inteiramente (Descartes, 2001). Este problema consistia na determinação de linhas curvas em que as distâncias de cada um dos seus pontos a algumas retas fixas mantivessem entre si relações constantes, sendo aquelas distâncias medidas segundo retas que formavam com as retas fixas ângulos constantes. No Livro II de *A Geometria*, Descartes apresenta o enunciado do referido problema.

> Sejam AB, AD, EF, GH, etc., várias linhas dadas de posição, e que seja preciso encontrar um ponto, como C, do qual se tirem outras linhas retas sobre as dadas, como CB, CD, CF e CH, de maneira a que os ângulos CBA, CDA, CFE, CHG, etc. sejam dados, e que o que for produzido por multiplicação duma parte destas linhas seja igual ao que for produzido pela multiplicação das outras, ou então que tenham qualquer outra proporção dada; pois isso não torna a questão nada mais difícil. (Descartes, 2001, p. 19)

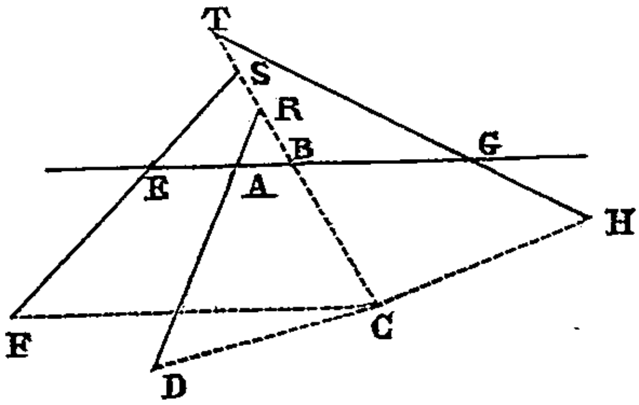


Figura 3.12. O problema do lugar geométrico dos quatro segmentos de reta.

Descartes resolve este problema aplicando o seu método. Resumidamente, esse método divide-se em três etapas. Em primeiro lugar, Descartes assume o problema resolvido, identificando todos os segmentos conhecidos e desconhecidos necessários para a resolução do problema. Após esta fase, Descartes estabelece uma equação que envolva essas variáveis. Por fim, Descartes procede à construção geométrica das soluções, com recurso à régua e compasso.

Euclides abordou o problema da determinação dessas linhas, ou lugares, mas em relação a três ou quatro retas fixas; já Papo generalizou o problema para um indeterminado número de retas fixas. Contudo, a inovação de Descartes consistiu em descobrir que se podia sempre deduzir o problema de Papo, qualquer que fosse o número de retas fixas, apenas a duas retas fixas. Graduando estas duas retas, estamos perante os dois eixos que constituem atualmente um sistema de coordenadas cartesianas no plano. É de observar que este sistema permite representar qualquer curva geométrica por uma equação algébrica, constituindo o alicerce da geometria analítica.

Ao valorizar as certezas como fins a serem atingidos e a matemática como modelo científico a ser seguido, Descartes acabou por se opor à retórica como forma legítima de produção de conhecimento. No entanto, a partir do século XIX, a retórica começou a ser reintegrada no horizonte filosófico e científico. Esta reintegração deveu-se, em grande parte, à obra de diversos autores que se dedicaram a entender a retórica através de uma perspetiva não cartesiana do saber, observando nesta arte as potencialidades que Aristóteles lhe tinha atribuído (Rezende, 2010).

4. A argumentação na educação matemática

A argumentação, plenamente reconhecida como objeto de pesquisa na civilização grega, sofreu ao longo dos séculos um período de latência. Contrariando esta tendência, na segunda metade do século XX são publicados dois tratados *Traité de l'Argumentation. La Nouvelle Rhétorique* (*Tratado da Argumentação. A Nova Retórica*), de Chaïm Perelman, em colaboração com Olbrechts-Tyteca, e *The Uses of Argument* (*Os Usos do Argumento*), de Stephen Toulmin, que contribuíram em grande medida para o renascimento contemporâneo da retórica. Na verdade, o aparecimento dos trabalhos de Perelman e Toulmin permitiram desencadear o renascimento da teoria da argumentação (Breton e Gauthier, 2000).

Embora o estudo desenvolvido por cada um destes dois filósofos, no âmbito da argumentação, assuma contornos diferentes, ambos recusam aceitar, no desenvolvimento da ciência, o corte entre as construções realizadas pelos lógicos e o esforço de racionalidade conduzido pelo pensamento não formal (Boavida, 2005b).

Em Perelman a noção de auditório constitui uma noção básica sobre a qual se orientam todas as atividades argumentativas, em Toulmin sobressai a importância atribuída ao campo da argumentação, isto é, ao contexto em que se desenvolve a argumentação. Para além disso, Toulmin procura ainda identificar um esquema geral que permita identificar os elementos presentes numa argumentação, aspeto esse ausente em Perelman. Com Toulmin, quando um enunciado é posto em causa, a função da argumentação é precisar o grau de verdade que lhe é atribuído, tendo em consideração os critérios de avaliação do domínio em que o discurso argumentativo se desenvolve. Pelo contrário, o estudo realizado por Perelman constrói-se em torno da adesão e não da verdade, não significando essa opção falta de preocupação com a questão da verdade. De facto, Perelman afirma que a condição necessária para tornar possível o desenvolvimento de uma teoria da argumentação passa pela separação dos aspetos do raciocínio relativos à verdade e à adesão.

As considerações desenvolvidas por Perelman e Toulmin são de tal modo cruciais no campo da argumentação que é, hoje, possível observar as influências dos seus estudos em diversos trabalhos empreendidos sobre argumentação no âmbito da educação matemática. A análise de estudos desenvolvidos no âmbito da argumentação em educação matemática, permite-nos verificar que a argumentação matemática apresenta características funcionais e características estruturais, sendo que as características funcionais determinam a finalidade da argumentação, a sua utilidade e o papel no interior de um discurso; e as características estruturais permitem definir a sua estrutura.

4.1. A nova retórica

Independentemente das diferenças existentes no pensamento de Perelman e de Toulmin, ambos criticaram fortemente a limitação da lógica à lógica formal, ocorrida sob a influência da lógica matemática e de perspetivas filosóficas logicistas e formalistas. O intuito desses tratados foi o de incrementar um conjunto de critérios e de procedimentos que permitissem analisar, interpretar, avaliar e aperfeiçoar os argumentos expressos em linguagem natural, procurando, assim, autonomizar o estudo da argumentação, de modo a poder contemplar diferentes raciocínios e não apenas os que se limitam à lógica formal. Para Perelman (1993), a teoria da demonstração apoiada na lógica formal, identificada com os raciocínios analíticos de Aristóteles, negligenciava os raciocínios dialéticos, considerando-os como estranhos à lógica. De acordo com Perelman (1993, p. 23),

> raciocinamos, mesmo quando não calculamos, aquando de uma deliberação íntima ou de uma discussão pública, apresentando argumentos a favor ou contra uma tese, criticando ou refutando uma crítica. Em todos estes casos, não se demonstra, como em matemática, mas argumenta-se.

De facto, o interesse pela argumentação, de acordo com a perspetiva definida por Aristóteles, não subsistiu quando surgiu o pensamento moderno (Oléron, 1983). Como já foi referido, o pensamento de Descartes teve um papel preponderante nessa mudança de atitude. Para este matemático/filósofo, o domínio da argumentação é o do verosímil, do plausível, do provável, dado que este campo escapa às certezas do cálculo. Ora a conceção nitidamente expressa por

Descartes na primeira parte do *Discurso do Método* era de considerar «(…) quase por falso tudo o que fosse apenas verosímil.» (Perelman, 1993, p. 25). Fazendo da evidência o cunho da razão, Descartes pretendeu apenas qualificar de racionais as demonstrações que, a partir de ideias claras e distintas, propagavam, com a ajuda de provas apodíticas, a evidência dos axiomas a todos os teoremas (Perelman e Olbrechts-Tyteca, 2005). Com Descartes a argumentação perde a sua condição de convencer, tal como preconizada em Aristóteles, admitindo somente aquilo que se pode provar de forma racional. Desta forma, Perelman (1993, p. 24) observa que para a lógica poder enquadrar o estudo do raciocínio sob todas as suas formas é importante «(…) completar a teoria da demonstração, desenvolvida pela lógica formal, com uma teoria da argumentação, estudando os raciocínios dialéticos de Aristóteles.».

A reflexão sobre estas questões permite, assim, posteriormente analisar o funcionamento da argumentação não matemática em processos de conhecimento matemático.

4.1.1. Chaïm Perelman

A obra de Perelman é reconhecidamente considerada como um marco do resgate da importância dos estudos retóricos, principalmente para a filosofia e para o campo jurídico. Influenciado por Aristóteles, Perelman procurou resgatar a obra retórica deste filósofo, apontando para a relevância da retórica, num momento histórico em que se começou a questionar a procura da verdade absoluta, e a multiplicidade de possibilidades surgiu como uma característica própria da sociedade (Rezende, 2010).

É através do *Tratado de Argumentação. A Nova Retórica*, que Perelman pretende reclamar a herança aristotélica. Esta intenção encontra-se bem patente na própria expressão utilizada como subtítulo do seu tratado – *A Nova Retórica* – bem como no primeiro parágrafo da introdução, no qual refere que o trabalho aí apresentado se trata da «publicação de um tratado consagrado à argumentação e a sua ligação a uma velha tradição, a da retórica e da dialética gregas (…)» (Perelman e Olbrechts-Tyteca, 2005, p. 1). As raízes deste tratado são claramente identificadas e remontam aos gregos, particularmente a Aristóteles, o que coloca a obra de Perelman na problemática grega sobre a retórica. Essa referência helénica, assumindo-se como um reatar de uma tradição rompida, constituiu uma rutura com a tradição da modernidade cartesiana. Com o seu tratado, Perelman pretende salvaguardar a racionalidade presente em todos aqueles raciocínios que, por fazerem intervir valores e pela sua aplicação situada e concreta, eram insuscetíveis de formalização.

Apontando que deliberar e argumentar são faculdades dos seres racionais, Perelman encara o seu tratado sobre argumentação como «(...) uma rutura com uma conceção de razão e do raciocínio, oriunda de Descartes, que marcou com seu cunho a filosofia ocidental dos últimos três séculos.» (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 2005, p. 1). Desta forma, para Perelman e Olbrechts-Tyteca (2005) não se trata mais de reduzir, como fez Descartes, toda a prova à evidência. Se assim fosse, não haveria espaço para uma teoria da argumentação. Para estes autores (idem) a maioria das decisões é tomada sem base numa evidência, ou em certeza clara, estando «(...) firmemente convencidos de que as crenças mais sólidas são as que não só são admitidas sem prova, mas também, muito amiúde, nem sequer são explicitadas.» (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 2005, p. 8). Perelman procura, assim, construir uma teoria da argumentação que seja capaz de fornecer à lógica o que falta à mesma, ou seja, uma teoria das decisões às quais as pessoas chegam através de raciocínios somente plausíveis, e não dotados de certeza (Rezende, 2010). O enfoque da retórica perelmaniana é feito na análise dos argumentos que efetivamente arquitetam decisões, combatendo a conceção de uma linguagem unívoca e aceitando, portanto, a multiplicidade (Rezende, 2010). Perelman resgata o pensamento aristotélico e dá novamente ao silogismo dialético a importância que ele possuía na obra do filósofo grego.

Para Aristóteles o silogismo dialético, expresso em premissas prováveis com conclusões verosímeis, e o silogismo analítico, baseado em proposições evidentes com conclusões verdadeiras, eram diferentes formas de raciocínio que não se encontravam hierarquisadas. De facto, «não se nota, no pensamento aristotélico, qualquer sugestão de hierarquia entre essas duas maneiras de raciocínio: elas não se excluem mutuamente, não se sobrepõem, não se substituem uma à outra.» (Coelho, 2005, p. XII).

A argumentação, o orador e o seu auditório

A argumentação exerce-se num universo onde reina a ambiguidade, o equívoco, a incerteza e o desacordo, aspetos que transparecem desde as primeiras análises de Aristóteles (Oléron). Ao contrário da demonstração, em que os símbolos utilizados são, em princípio, desprovidos de qualquer ambiguidade, a argumentação desenrola-se numa linguagem natural, cuja ambiguidade não se encontra, portanto, previamente excluída (Perelman, 1993).

Para Perelman, na vertente argumentativa o diferendo é o campo de eleição da retórica. Contrariamente ao que pretendia Descartes, para quem o diferendo era impossível, há que, retoricamente, pensar na possibilidade de existirem soluções diferentes sem que o erro seja inevitável. Perelman lembra que Descartes rejeitou o que dependia das opiniões (Óleron, 1983). Com efeito, no espírito cartesiano, o diferendo era o mais óbvio dos sinais do erro. De acordo com Descartes, sempre que dois homens emitiam sobre a mesma coisa um juízo contrário, isso significava que algum se tinha enganado, uma vez que se um dos dois tivesse uma visão clara e nítida sobre esse juízo, podê-lo-ia expor ao seu adversário, de tal modo que ela acabaria por forçar a convicção deste último (Óleron, 1983). Com efeito, argumentar num diferendo, sustentando uma opinião contra um adversário, é já reconhecê-lo como interlocutor, renunciando à violência da imposição e admitir no outro a dignidade de quem pode ser racionalmente convencido.

Em rutura com o racionalismo cartesiano, o trabalho de Perelman situa-se, portanto, na tradição mais antiga que remonta a Aristóteles, ao Aristóteles da retórica, mas também da dialética, esta última definida como "arte de dialogar" a partir de opiniões geralmente aceites. Ora, estas opiniões geralmente aceites são determinadas por um conjunto de indivíduos que a técnica retórica constitui em *auditório*. Essa noção central retirada por Perelman aos gregos, faz do auditório a questão principal, para a compreensão do discurso persuasivo. Para Perelman qualquer argumentação é desenvolvida em função de um auditório (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 2005). É essa razão pela qual o auditório é tão importante na consideração da retórica realizada por Perelman.

Numa demonstração matemática, os axiomas não estão em discussão; quer eles sejam considerados evidentes, verdadeiros ou simples hipóteses, não há qualquer preocupação em saber se eles são, ou não, aceites pelo auditório. Aliás, aquele que quisesse justificar a escolha dos axiomas deveria, como já Aristóteles notou nos seus *Tópicos*, recorrer à argumentação (Perelman, 1993). Como o fim de uma argumentação não é o deduzir consequências de certas premissas, mas provocar ou aumentar a adesão de um auditório às teses que se apresentam ao seu assentimento, ela nunca se desenvolve no vazio. Pressupõe, então, um contacto entre o orador e o auditório, mesmo que seja uma deliberação íntima (Perelman, 1993).

A argumentação propõe agir sobre um auditório, modificando as suas convicções ou suas disposições por meio de um discurso que se lhe dirige e que visa ganhar a adesão dos espíritos (Perelman, 1993). A argumentação não tem unicamente como finalidade a adesão puramente intelectual. Ela visa muito frequentemente incitar à ação ou pelo menos criar uma disposição para a ação (Perelman, 1993).

O orador dirige-se a todo e qualquer um, mas a argumentação propiciará, conforme o caso, efeitos diferentes e utilizará, de cada vez, os métodos apropriados, de acordo com o objeto do discurso, e o tipo de auditório para o qual se quer dirigir (Perelman, 1993). Perelman (1993) observa que o auditório não é necessariamente constituído por aqueles que o orador interpela expressamente. Por exemplo, Perelman (1993, p. 33) refere que «no Parlamento britânico, o orador dirige-se por princípio ao Presidente da Câmara, mas o seu discurso pode, realmente dirigir-se aos membros do seu partido, à opinião pública nacional ou internacional.». Portanto, para este filósofo,

> se se quer definir o auditório de forma útil para o desenvolvimento de uma teoria da argumentação, deve-se concebê-lo como um conjunto daqueles que o orador quer influenciar pela sua argumentação. (Perelman, 1993, p. 33).

Nesse sentido, este conjunto

> é muito variável e pode ir do próprio orador, no caso de uma deliberação íntima, quando se trata de tomar uma decisão numa situação delicada, até à Humanidade inteira ou, pelo menos, aos membros que são competentes e razoáveis e que eu qualifico como auditório universal, passando por uma verdade infinita de auditórios particulares (Perelman, 1993, pp. 33–34).

Perelman define, assim, o auditório como «(...) o conjunto daqueles que o orador quer influenciar pela sua argumentação.» (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 2005, p. 22). É o reconhecimento do interlocutor, por parte do orador/locutor, que faz do auditório, em grande parte, uma construção do orador. Este, portanto, delimita e constrói o universo daqueles que admite e consente como seu auditório. Nesse sentido, e em boa parte, toda a argumentação tem de ser construída a partir do que se definiu ser o seu destinatário, isto é, o seu auditório. É pois essencial à própria eficácia da argumentação o conhecimento psicológico, sociológico ou ideológico do auditório, o que destaca o papel central que a natureza do auditório tem, para Perelman, na argumentação.

O papel do auditório é fundamental, pois ao contrário do silogismo analítico, baseado em premissas verdadeiras ou hipotéticas que se desenvolve de forma impessoal e objetiva, o silogismo dialético depende, essencialmente, do auditório, uma vez que as premissas não podem ser aceites de forma impessoal, já que dependem da adesão dos interlocutores (Perelman, 1999). O mesmo autor considera, ao contrário de Aristóteles, que qualquer um pode ser interlocutor para uma argumentação, apresentando a ideia de *auditório universal*.

O auditório universal não é um facto comprovado, ou seja, não é constituído por todas as pessoas que serão convencidas pela argumentação (Rezende, 2010). O auditório universal, ao contrário, é imaginado pelo orador e no momento em que um argumento é apresentado abarca até mesmo aqueles que não participam efetivamente dele (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 2005). Esta ideia de um auditório com tais características permite imaginar que todos aqueles que compreenderem o orador deverão aderir às suas conclusões. De facto, o auditório universal permite contornar alguns inconvenientes trazidos pela ideia de auditório particular, uma vez que

> toda a argumentação que visa somente um auditório particular oferece um inconveniente, o de que o orador, precisamente na medida em que se

> adapta ao modo de ver dos seus ouvintes, arrisca-se a apoiar-se em teses que são estranhas, ou mesmo francamente opostas, às que admitem outras pessoas que não aquelas a quem, naquele momento, ele se dirige. (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 2005, p. 34)

Embora Perelman reconheça e admita a existência de três tipos de auditório – um constituído pela humanidade inteira, designado por auditório universal; outro formado apenas entre o locutor e o interlocutor a quem o primeiro se dirige, auditório individual; e, por fim, um outro constituído pelo próprio sujeito, designando por auditório íntimo – considera o auditório universal como o único modelo, sendo que os outros dois «(...) não são mais do que encarnações sempre precárias.» (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 2005, p. 34). Perelman entende, assim, o auditório universal como o modelo para todos os auditórios particulares, individuais ou íntimos.

Perelman considera essencial que se estabeleça um acordo prévio entre o orador e o interlocutor/auditório que diga respeito ao que mutuamente se concede e admite conjuntamente entre o orador e o seu auditório. Esse acordo exprime-se nas premissas da argumentação. Sem premissas acordadas, explícita ou implicitamente, não há argumentação possível, nem sequer comunicação.

No âmbito da lógica, o auditório e a sua opinião a respeito do orador não interferem em nada para a demonstração; no entanto, como Perelman realça, o auditório precisa, necessariamente, de ser considerado. Nesse sentido,

> para que a argumentação retórica possa desenvolver-se, é preciso que o orador dê valor à adesão alheia e que aquele que fala tenha a atenção daqueles a quem se dirige: é preciso que aquele que desenvolve a sua tese e aquele a quem quer conquistar já formem uma comunidade, e isso pelo próprio facto do compromisso das mentes em interessar-se pelo mesmo problema.». (Perelman, 1999, p. 70)

Uma vez que a retórica ambiciona a eficácia, Perelman observa que a procura de um argumento mais eficaz, aquele que produz a adesão do auditório ou do interlocutor, não significa que se pretende enganar o adversário. Contudo, se a eficácia é o fim do argumento retórico, Perelman (1999, p. 87) levanta a questão de como estabelecer «(...) um critério que nos permita distinguir o êxito do charlatão e o do filósofo eminente?». Para dar resposta a esta questão, Perelman recorre à capacidade de discernimento dos ouvintes e do auditório. São eles que, em última instância, devem ser capazes de separar aquele que procura enganar, daquele que procura estabelecer um conhecimento sério acerca da questão em causa.

Premissas da argumentação

Quando se argumenta pretende-se convencer alguém que, à partida, não partilha ou desconhece os pontos de vista do locutor. A argumentação procura, assim, suscitar a adesão de um auditório. Neste processo argumentativo é natural que o auditório mude de opinião consoante a evolução do próprio discurso. Desta forma, o discurso argumentativo desenvolve-se em função de um destinatário que influencia, direta ou indiretamente, a forma como evoluem os argumentos propostos sendo, portanto, a eficácia de um argumento sempre relativa ao auditório em questão. Toda a argumentação pressupõe, assim, um ajustamento às características do seu destinatário último. Contudo, é fundamental ter presente que os argumentos que persuadem um auditório em determinadas circunstâncias podem não convencer outro. Neste sentido, Perelman propõe quatro etapas da argumentação que, segundo este filósofo, todo o orador deve percorrer: assegurar-se que as premissas são admitidas pelo auditório; reforçar, se for caso disso, a sua presença no espírito do auditório; precisar o seu sentido e alcance; expor os argumentos em favor da tese que defende.

Como a argumentação diz respeito a teses às quais auditórios variados aderem com uma intensidade variável, o estatuto dos elementos que intervêm numa argumentação não pode ser rígido, como aconteceria num sistema formal; com efeito, este estatuto surge em função da adesão efetiva ou presumida do auditório (Perelman, 1993). Assim, a escolha das premissas da argumentação, dos dados pertinentes e de técnicas argumentativas eficazes deve ter em consideração o tipo de auditório que o orador pretende influenciar com a sua argumentação.

Todo o movimento de uma argumentação consiste em transpor a adesão inicial que o auditório tem relativamente a uma determinada opinião para uma outra de que o orador o quer convencer. Daí a importância do conhecimento que o orador deve possuir do seu auditório, das suas opiniões, das suas crenças, de tudo aquilo que ele admite. Essas devem ser as premissas da argumentação: as teses sobre as quais há um acordo. Deste modo, se um orador quiser que o seu discurso seja eficaz, deve adaptar-se ao seu auditório.

Na prática, um orador só deve escolher como ponto de partida dos seus raciocínios teses admitidas por aqueles a quem se dirige (Perelman, 1993).

> Na verdade, a finalidade da argumentação não é, como a da demonstração, provar a verdade da conclusão a partir da verdade das premissas, mas transferir para as conclusões a adesão concedida às premissas. Arriscando-se a fracassar na sua missão, o orador só deverá partir de premissas que beneficiem de uma adesão suficiente (…) (Perelman, 1993, p. 41)

Tipos de argumentos e técnicas argumentativas

É possível construir, a partir das ideias de Perelman, uma grelha de análise que permita identificar os argumentos, classificá-los e compreender a sua articulação, tentando medir a sua eficácia persuasiva. Perelman distinguiu três grandes grupos de argumentos: argumentos quase-lógicos, argumentos baseados na estrutura do real e argumentos que fundam a estrutura do real.

Os *argumentos quase-lógicos*, construindo-se à imagem de princípios lógicos, lembram os raciocínios formais de natureza lógica e ou matemática, no entanto, caraterizam-se pelo seu caráter não formal (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 2005). Entre os argumentos quase-lógicos encontram-se os que recorrem às estruturas lógicas, tais como a contradição, a identidade e a transitividade; e os que invocam relações matemáticas, como a relação entre a parte e o todo, do menor e do maior e da relação de frequência (Perelman & Olbrechts.Tyteca, 2005). Se bem que atualmente, de acordo com a perspetiva de Perelman, a primeira reação face a argumentos quase-lógicos seja a de destacar a sua fraqueza, quando comparados com modos mais formais de raciocínio, na Antiguidade «(…) quando o pensamento científico de feição matemática se encontrava menos desenvolvido, o recurso a argumentos quase lógicos era mais frequente.» (Perelman, 1993, p. 73).

Os *argumentos baseados na estrutura do real* constroem-se a partir, não do que o real é, no sentido ontológico, mas do que o auditório acredita que seja, significando tudo aquilo que é tido como facto, verdade ou suposição. Os argumentos fundados sobre a estrutura do real baseiam-se, assim, nas ligações existentes entre elementos do real. Nestes argumentos importa que haja acordos que impeçam que essas ligações sejam colocadas em causa para que a partir destes acordos se desenvolva a argumentação (Perelman, 1993). Perelman (1993) aponta duas formas diferentes de estruturar o real: as ligações de sucessão e as de coexistência. Enquanto que a argumentação baseada em ligações de sucessão alia um fenómeno às suas consequências e causas; a argumentação baseada em ligações de existência apoia-se em realidade de nível desigual. Um tipo de argumento situado no âmbito das ligações de coexistência é o argumento de autoridade que «utiliza atos ou juízos de uma pessoa ou de um grupo de pessoas como meio de prova a favor de uma tese.» (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 2005, p. 348). Contudo, Perelman (1993, p. 110) observa que «(…) quando se dispõe de um meio para provar uma verdade, ou estabelecer um facto de forma incontestada, a qualidade daquele que os afirma em nada modifica o estatuto da afirmação.». Assim, «o argumento de autoridade só tem interesse na ausência de prova demonstrativa.» (Perelman, 1993, p. 109).

Os *argumentos que fundam a estrutura do real* operam como que por indução, estabelecendo generalizações e regularidades, propondo modelos, exemplos e ilustrações a partir de casos particulares conhecidos. Os modelos representativos destes argumentos são os raciocínios pelo exemplo, analogia e metáfora. «Argumentar pelo exemplo é pressupor a existência de certas regularidades cujas regras fornecerão uma concretização.» (Perelman, 1993, p. 119). O recurso à analogia constitui «uma das características da comunicação e do raciocínio não-formais.» (Perelman, 1993, p. 127). No entanto, a analogia «difere da proporção puramente matemática na medida em que não estabelece a igualdade de duas relações, mas afirma uma similitude de correspondências.» (idem). No que diz respeito à metáfora, e apoiando-se no pensamento de Aristóteles, Perelman (1993, p. 132) considera-a «como uma figura que consiste em dar a um objeto um nome que convém a outro», podendo, no entanto, esta transferência operar-se de modos diversos. Por exemplo, «A partir da analogia "a velhice está para a vida assim como a noite para o dia", derivar-se-ão as metáforas "a velhice do dia", "o anoitecer da vida" ou "a velhice é uma noite".» (Perelman, 1993, p. 133). De acordo com Boavida (2005b, p. 49) as metáforas «(…) têm a potencialidade de suscitar e facilitar o entendimento de conceitos abstratos em termos de conceitos familiares e mais diretamente ligados a experiências concretas.».

Organização dos argumentos: seleção e ordenação

Na elaboração do discurso argumentativo estruturado com a finalidade de ser obter a adesão de um auditório, deverá ser tomada em atenção a escolha dos argumentos e a ordem pela qual estes são apresentados. Proceder a uma organização dos argumentos selecionados permite que o discurso argumentativo não seja construído sob uma acumulação desordenada de argumentos em número indefinido. De acordo com Perelman (1987), a pertinência e a força dos argumentos são duas noções específicas da argumentação e inevitáveis para se proceder criteriosamente à escolha de argumentos.

> A força de um argumento depende da adesão dos auditores às premissas da argumentação, da pertinência desta, da relação de proximidade ou distância que ela pode ter com a tese defendida, das objeções que se lhe poderiam opor, da maneira como se poderiam refutar. (Perelman, 1993, p. 152)

Ou seja, para Perelman, a força de um argumento não só está associada ao facto de este ser aceite pelo auditório, por ser evidente, necessário e autêntico, como também está associada ao facto de resistir a objeções. Assim, a força dos argumentos depende do auditório, das suas convicções e dos seus métodos de raciocínio (Perelman, 1993).

A teoria de argumentação advogada por Perelman e Olbrechts-Tyteca é um renovar da retórica aristotélica que Platin (1990) considerava ser argumentação sem recurso à noção de verdade. Perelman refere que o objetivo argumentativo não é a abordagem de uma verdade pré-determinada, mas a de uma abordagem que pretende influenciar um auditório. Desta forma, os argumentos podem ter uma estrutura modelada por uma situação retórica definida pela presença de um auditório, visto que a argumentação visa a obtenção da adesão daqueles a quem se dirige. Nesse sentido, a argumentação em Perelman e Olbrechts-Tyteca não faz apelo à racionalidade, uma vez que é desenvolvida inteiramente em relação ao auditório que se procura influenciar (Pedemonte, 2002). Contudo, Perelman propõe fazer intervir a *regra de justiça* na determinação da força de um argumento, uma vez que a regra de justiça exige aplicação de um tratamento idêntico para os seres ou situações que integrem a mesma categoria.

No que diz respeito à ordem pelo qual os argumentos devem ser apresentados, Perelman considera que quando o orador pode tomar essa decisão, tem a possibilidade de escolher com qual das três ordens tradicionalmente consideradas vai operar: iniciar a argumentação com os argumentos mais fortes e terminar com os mais fracos, a ordem inversa, ou iniciar e terminar com argumentos fortes. No entanto, e tendo em conta que a finalidade do discurso argumentativo é a de obter a adesão do auditório, o orador deverá adaptar a ordem dos argumentos a esta mesma finalidade. Perelman (1993) observa que cada argumento deve surgir no momento em que exerça maior efeito, tendo em atenção que o que persuade um auditório específico pode convencer ou não um outro. Perelman (idem) realça, deste modo, o permanente esforço de adaptação do orador ao auditório, revelando preocupação com as reações do público que, no debate, deverá passar de um papel passivo a participante.

O pensamento de Perelman influenciou um significativo número de pensadores em filosofia, que procuraram, também, dedicar-se ao estudo da retórica. Exemplo expressivo do retomar desse trabalho foi Stephen Toulmin, que trouxe contribuições importantíssimas para o tema da relação entre a lógica e a retórica.

4.1.2. Stephen Toulmin

A argumentação está intimamente ligada ao raciocínio e em consequência à ciência que se ocupa deste: a lógica. Sendo a argumentação em matemática um raciocínio lógico, esta pode ser decomposta em partes, os argumentos, ou seja, os passos de uma argumentação, que permitem analisar a sua estrutura (Pedemonte, 2002).

Em *Os usos do Argumento*, Toulmin procurou encontrar a forma de aplicar os argumentos lógicos à prática, isto é, ao modo como, em diferentes campos, os indivíduos recorrem a argumentos, uma vez que, historicamente, a lógica se desenvolveu em direção oposta a estas questões. De facto,

> (...) a ciência da lógica em toda a sua história tendeu a desenvolver-se numa direção que a afastava destas questões, para longe das questões práticas sobre o modo como temos ocasião de tratar e criticar os argumentos em diferentes campos, e na direção de uma completa autonomia, em que a lógica se torna estudo teórico autónomo, tão livre de preocupações práticas imediatas quanto certos ramos da matemática pura (...). (Toulmin, 2008, p. 2)

Assim, para Toulmin (2008) a questão central é a de saber de que modo a lógica pode continuar a ser uma ciência formal e ao mesmo tempo ser aplicada na avaliação dos argumentos que são usados na prática, ou seja, no quotidiano.

Embora a lógica tenha sido tratada por alguns autores como um ramo da psicologia, e por outros como um desenvolvimento da sociologia, Toulmin (2008) propõe pensar na lógica como jurisprudência generalizada. Embora Toulmin (2008) considere a perspetiva que encara a lógica do ponto de vista sociológico, observa que essa abordagem é insuficiente. Para este filósofo (idem), o costume não é o bastante para dar validade e autoridade a determinadas formas de argumentos. Toulmin procurou, assim, comparar a lógica ao campo do Direito.

Para Toulmin (2008) existe uma especial virtude neste paralelo entre a lógica e a jurisprudência: manter no centro desta ocorrência a *função crítica* da razão. A questão central para Toulmin passou a ser a dos procedimentos através dos quais as alegações são apresentadas, procurando dar à razão uma função crítica. Toulmin propõe que as regras da lógica não sejam sugestões nem generalizações, nem por outro lado se apliquem como leis inevitáveis, mas antes como «(...) padrões de realização que um homem, ao argumentar, pode alcançar mais ou menos plenamente, e pelos quais os seus argumentos podem ser julgados.» (Toulmin, 2008, p. 8). De acordo com Toulmin (2008, p. 11), um indivíduo que profere uma afirmação sugere que lhe seja dada atenção e que se acredite no que afirma, ou seja, «(...) um homem que afirma alguma coisa aspira a que a sua afirmação seja levada a sério (...)». No entanto, segundo Toulmin (2008), o levar a sério as asserções proferidas depende de várias circunstâncias, como a reputação e o crédito do indivíduo que faz as afirmações. De acordo com Rezende (2010), esta reputação está relacionada com o argumento de autoridade, figura retórica muito utilizada e frequente para dar mais peso à força de um argumento. Contudo, para Toulmin (2008), o facto de tais homens serem detentores de uma reputação de homens prudentes, e de nós acreditarmos no que eles afirmam, não implica que não se possa questionar se eles têm ou não direito à nossa confiança.

Na sua obra, Toulmin detém-se sobre um tipo específico de argumentos: os argumentos justificatórios, argumentos justificativos destinados a «(…) sustentar asserções, pelas estruturas através das quais poderão ser apresentados, pelo valor que podem pretender e pelo modo pelo qual se pode clarificá-los, avaliá-los e criticá-los.» (Toulmin, 2008, p. 12). Estes argumentos são submitidos a discussão como apoio de asserções, ou seja, com a função de corroborar essas afirmações (Toulmin, 2008). Nesse sentido, Toulmin introduz o termo técnico: campo de argumentação. Dois argumentos pertencem ao mesmo campo «(...) quando os dados e as conclusões em cada um dos argumentos são, respetivamente, do mesmo tipo lógico (...)» (Toulmin, 2008, p. 16).

Campo de argumentação

Com a introdução do campo de argumentação, Toulmin procura encontrar uma estrutura geral de argumentos que não se altere, independentemente do campo no qual se insere. Toulmin pretende saber quais as formas e os méritos presentes nos argumentos que não variam de acordo com os diferentes campos (elementos *campo-invariáveis*), podendo ser aplicados tanto por matemáticos e físicos, como por juristas e filósofos, ou em discussões do quotidiano; e aqueles que variam conforme o argumento seja pertencente a um ou a outro campo (elementos *campo-variáveis*) (Toulmin, 2008). Ao introduzir a noção de campo de argumentação, Toulmin consegue questionar o que é que na avaliação dos argumentos, nos critérios subjacentes a essa avaliação e na forma como se qualifica essa conclusão, varia em função do campo.

Tendo em atenção as diferentes características dos argumentos dos campo-invariáveis e campo-variáveis, Toulmin postula a existência de fases de um argumento, procedendo a uma comparação com os argumentos jurídicos (Rezende, 2010). De acordo com Toulmin (2008), os argumentos jurídicos apresentam três fases. A fase inicial, na qual se apresenta o problema e se formula com clareza a questão (a acusação e a defesa formulam as questões de forma clara); a fase seguinte, onde há a exposição dos indícios (onde as testemunhas de defesa ou de acusação são ouvidas) e a fase final, na qual se pronuncia a sentença. Para Toulmin, esta estrutura geral do argumento jurídico pode ser entendida como a estrutura dos argumentos justificatórios. Rezende (2010) observa que existe aqui uma semelhança com a estrutura do discurso proposta por Aristóteles, que aludia em primeiro lugar o apontamento da questão da qual se trataria, seguido da exposição dos motivos e factos relevantes e, por fim, de uma conclusão acerca da discussão, precedida de um resumo do que foi dito.

Com a formulação de um problema é necessário admitir uma série de soluções que se apresentam como candidatas para o problema que foi levantado. Assim, nessa fase inicial, deve-se valer das possibilidades que Toulmin considera como *termos modais*, por exemplo as expressões, "não pode", "provável" (mais provável que, menos provável que). Tais termos sugerem uma possibilidade, admitindo, então, que ela merece ser considerada como uma solução plausível (Toulmin, 2008). No entanto, de acordo com Toulmin, é necessário ter em atenção os *critérios* para o uso de um determinado termo modal, bem como a *força* que tal termo apresenta. Enquanto que os critérios para a aplicação do termo modal são campo-variáveis, uma vez que os motivos para justificar uma asserção variam de um campo para outro (Toulmin, 2008), a força de um termo modal é, por exemplo no caso dos termo modais "não pode" e "provável", campo-invariável, pois é a mesma independentemente do campo nas quais os modais se inserem. Para Toulmin (2008), todos os cânones de crítica e de avaliação dos argumentos são, na prática, dependentes do campo, enquanto que, no que respeita à sua força, nenhum dos termos de avaliação varia em função do campo.

A noção de campo de argumentação apresentada por Toulmin permite realçar que embora a argumentação se possa desenvolver em domínios muito diferentes, aquilo que é apropriado num domínio pode não o ser no outro. Nesse sentido, importa reconhecer que a validade de uma argumentação é uma noção interna e não externa ao campo, pelo que nenhuma argumentação será possível sem que a situemos num determinado campo, tendo em conta os saberes e as normas que permitam enraizar as justificações que sustentam o discurso argumentativo. Portanto, a argumentação em matemática, embora possa partilhar aspetos de outras áreas do conhecimento, terá especificidades próprias. Alicerçadas nestas noções, Toulmin elabora e propõe um modelo geral de análise da microestrutura de um argumento.

Modelo de análise de um argumento de acordo com Toulmin: dados, garantias e conclusão

O modelo de análise da microestrutura de um argumento, proposto por Toulmin, tem em linha de conta a estrutura ternária já considerada por Aristóteles nos seus silogismos.

Como foi referido, Aristóteles apresentou o silogismo como um modelo estrutural de um argumento, embora, atualmente, não possa ser considerado como um modelo descritivo geral dos argumentos, visto que os silogismos não tomam em consideração os argumentos dedutivos, e não são exaustivos, pois nem todos os argumentos são necessariamente silogismos (Pedemonte, 2002). Além disso, tal como observa Platin (1990) o silogismo não faz avançar o conhecimento, pois a conclusão está contida nas premissas. Por outro lado, o silogismo é construído independentemente do contexto, uma vez que, mesmo sendo válido logicamente, pode conduzir a conclusões erradas, visto que não tem em consideração o conteúdo (ou seja, valor lógico) das proposições. Apesar de ter noção destas considerações, Pedemonte (2002) observa que a teoria do silogismo é a primeira a fornecer um modelo para a estrutura de uma argumentação, sendo essa estrutura composta por três termos: duas premissas e uma conclusão.

Tendo em linha de conta a estrutura ternária dos silogismos de Aristóteles, Toulmin propôs um modelo de argumentação original, com o objetivo de descrever a “forma lógica” de um discurso racional (Pedemone, 2002). Toulmin desenvolveu este modelo com o intuito de reconstruir e analisar argumentos em diferentes campos, o que o tornou popular em diferentes áreas (Knipping, 2008). Um argumento no modelo de Toulmin (2008) é composto por um esquema ternário: o enunciado ou *conclusão* (C) dirigida a um interlocutor; os *dados* (D) que permitem justificar a conclusão; e a *garantia* (G), a permissão de inferência, que fornece uma regra ou princípio geral capaz de servir de justificação na passagem dos dados à conclusão.

Segundo Toulmin, quem emite uma asserção, tese ou conclusão, expõe-se a vê-la contestada. Para Pedemonte (2002), o primeiro passo num argumento é a expressão do ponto de vista do locutor, a conclusão, ou seja, o propósito do argumento. Toulmin (2008) questiona-se sobre o que estará envolvido no estabelecimento das conclusões através da produção de argumentos. A sua primeira resposta é que, para defender a afirmação proferida, o locutor deve apresentar dados que justifiquem e sustentem essa conclusão. Desta forma, os dados são significativos, pois são o ponto de partida de cada argumento, podendo ser constituídos por evidências, factos, informações e exemplos (Pedemonte, 2002). Os dados são considerados factos evidentes, que não são postos em causa, e que justificam a afirmação (conclusão) (Knipping, 2008), ou seja, é neles que a conclusão se pode enraizar, não sendo necessariamente dados empíricos (Boavida, 2005b). Sendo aceite o simples passo “dados – conclusão”, este representa um argumento racional (Knipping, 2008). Caso não exista acordo sobre a validade dos dados, será necessário proceder a uma nova argumentação que proporcione uma evidência aceitável (Boavida, 2005b).

Contudo, muitas vezes, apesar de existir acordo em relação aos dados, não é explícita a forma como estes apoiam a conclusão, ou seja, podem surgir dúvidas e questões sobre a natureza e a validade da passagem dos dados à conclusão (Boavida, 2005b). A questão não se coloca, assim, em apresentar mais informações, mas antes em especificar que regras, princípios ou licenças de inferência permitem chegar dos dados à conclusão (Toulmin, 2008). Toulmin (2008) refere que é necessário apresentar regras, princípios, enunciados, ou seja, proposições que permitam essa inferência, designando-as por garantias. As garantias funcionam como pontes sobre as quais se pode dar o passo inferencial (Toulmin, 2008), ou seja, funcionam como licenças de inferência, onde se enraízam as justificações que sustentam o discurso argumentativo (Boavida, 2005b). Segundo Toulmin (2008), as garantias correspondem às normas ou cânones práticos da argumentação de um dado campo. Pedemonte (2002) observa que a permissão de inferência é a parte do argumento que estabelece a relação lógica entre os dados e a conclusão, ou seja, a razão que pode levar à aceitação ou à refutação de um argumento. Para esta investigadora (idem), se um argumento não é aceite por um auditório é justamente a permissão de inferência, isto é, a garantia que é criticada e que pode ser refutada pelo auditório.

Esquematicamente o modelo de Toulmin pode ser expresso da seguinte forma:

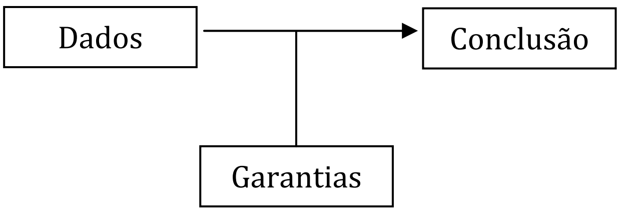


Figura 4.1. Representação da forma mínima de argumentação proposta por Toulmin.

Modelo de análise de um argumento segundo Toulmin: qualificadores, refutação e fundamentos

O esquema "dados – garantia – conclusão" é um esquema elementar da argumentação, representando "a forma mínima de argumentação" (Krummheuer, 1995), o qual Platin (1990) designa por "coração da argumentação". Contudo, estes elementos podem não ser suficientes para analisar um discurso argumentativo, uma vez que as garantias e os dados podem não permitir inferir a conclusão com a força necessária (Boavida, 2005b).

Carrilho (1992) menciona que a passagem dos dados à conclusão não é sempre válida, como acontece na lógica formal, sendo dependente do contexto em que surge. Por outro lado, Toulmin (2008, p. 93) observa que «há diversas espécies de garantias, suscetíveis de conferir uma força variável às conclusões que elas justificam.». Nesse sentido, existem garantias que permitem aceitar uma conclusão sem equívocos, isto se os dados apropriados estiverem reunidos, o que segundo Toulmin (2008) permite qualificar a conclusão por meio do advérbio "necessariamente". Contudo Toulmin (idem) refere que existem outras que autorizam a passagem dos dados às conclusões, mas provisoriamente, em determinadas condições, com exceções ou reservas. Nestes casos «podem intervir outros qualificadores modais como "provavelmente" ou "é verosímil que".» (Toulmin, 2008, p. 93). A articulação geral do discurso pode ser assim mais complexa, o que exige a presença de etapas auxiliares na análise do mesmo (Pedemonte, 2002).

Toulmin (2008) designou essas etapas por *qualificadores modais* (Q), os indicadores de força do argumento; *condições de exceção ou refutação* (R), a refutação potencial do enunciado conclusão; e *fundamento* (F) da garantia, o que suporta a permissão de inferência.

Em geral, os dados e as garantias não permitem inferir com um grau de certeza absoluta (Pedemonte, 2002). O qualificador indica a força que a garantia concede à passagem dos dados à conclusão (Toulmin, 2008), ou seja, o indicador de força do argumento, que embora possa não ser explícito permite a qualificação do argumento como "verdadeiro", "provável", entre outros (Pedemonte, 2002). Por outro lado, as condições de refutação assinalam as circunstâncias pelas quais será necessário anular a autoridade da permissão de inferência, isto é, da garantia (Toulmin, 2008). Em consequência, a permissão de inferência pode ser colocada em questão (Pedemonte, 2002), ou seja, pode ser questionada a validade da garantia enquanto "licença" de inferência que autoriza a passagem dos dados à conclusão (Boavida, 2005b), isto é, pode questionar-se se a própria garantia é aceitável. Desta forma, torna-se necessário firmar a garantia com um certo número de elementos justificativos que a sustentem, os fundamentos. O fundamento fortalece, assim, a aceitabilidade da garantia, indicando o motivo pelo qual ela é aceite como autoridade (Boavida, 2005b). De acordo com Pedemonte (2002), a existência de uma permissão de inferência entre dados e conclusão é justificada pela legitimidade da questão “Em que condições existe uma relação entre dados e conclusão?”. No entanto, para esta investigadora (idem) uma outra questão pode ser colocada: “Por que é que existe uma relação entre dados e conclusão?”, o que justifica a necessidade de um fundamento numa esquematização do argumento. O próprio Toulmin (2008) refere que mais do que a questão de saber se uma garantia pode ser aplicada a um caso particular, pode-se, geralmente, perguntar o porquê da autoridade dessa garantia, ou seja, qual o motivo de se aceitar essa garantia como autoridade. Sempre que a autoridade da permissão de inferência não é aceite, há a necessidade de apresentar um fundamento que legitimize a garantia e que, consequentemente, possa ajudar o auditório a compreender a própria permissão de inferência (Pedemonte, 2004).

Em suma, num argumento, tanto os dados como as garantias podem ser questionados. Apesar de serem considerados factos evidentes que justificam a conclusão, os dados podem ser questionados quanto à sua validade ou aceitabilidade em determinado contexto. Sempre que tal aconteça, isto é, que um dado necessite de ser justificado, é desenvolvido um novo argumento no qual esse dado é uma conclusão e assim seja considerado uma evidência aceitável; se houver dúvidas em relação à garantia, é produzido um fundamento (Knipping, 2008).

Assim, esquematicamente, o modelo proposto por Toulmin para analisar a microestrutura de um argumento é o seguinte:

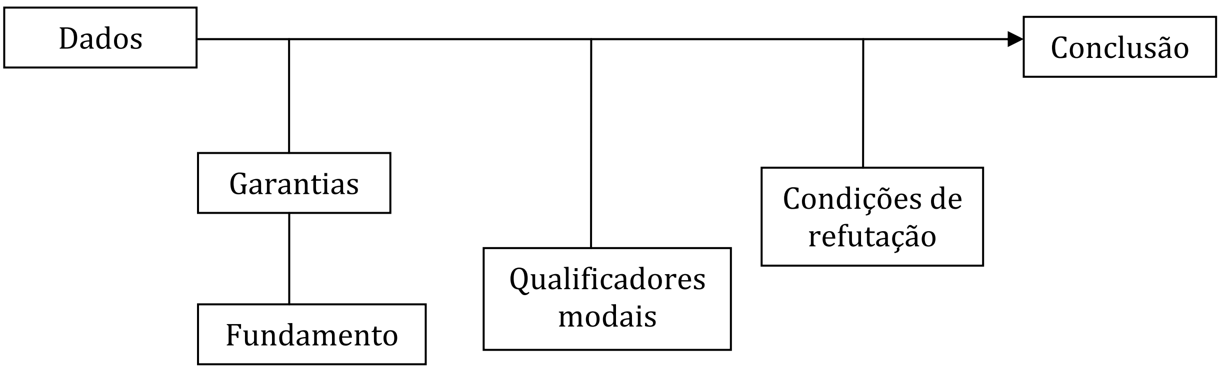


Figura 4.2. Modelo de análise da microestrutura de um argumento proposto por Toulmin.

Embora este seja o esquema proposto por Toulmin, o próprio (2008) observa que se fossem exigidas justificações de todas as garantias, dificilmente se poderia iniciar uma argumentação. De acordo com Toulmin, podem-se aceitar garantias sem colocar em causa o seu fundamento, o que permite observar que os dados, as garantias e a conclusão aparecem em qualquer argumento, o mesmo não acontecendo com os qualificadores, as condições de exceção ou refutação e o fundamento (Boavida, 2005b).

Breve reflexão sobre os elementos presentes num argumento de acordo com o modelo de Toulmin

Examinando atentamente o modelo proposto por Toulmin, Boavida (2005b, p. 74) considera que «(...) uma mesma frase pode ser enunciada para comunicar uma afirmação como para autorizar uma passagem num raciocínio e, em certos contextos, pode mesmo desempenhar esta dupla função», o que destaca a dificuldade de distinção entre dados e garantias. O próprio Toulmin (2008) refere que uma afirmação pode ser um dado, uma garantia e até os dois, dependendo do contexto. Boavida (2005b, p. 74) observa ainda que esta dificuldade não é única, «(...) porque os dados mencionados dependem das garantias que estão a ser escolhidas» e ao interagirem as pessoas não estruturam «(...) as suas contribuições com as categorias do esquema proposto por Toulmin.» (idem). Segundo Knipping (2008), Toulmin reconhece que a distinção entre dados e garantias pode não ser sempre clara, mas as suas funções são distintas; enquanto os dados exprimem um pedaço de informação, as garantias autorizam um passo num argumento (Toulmin, 2008). Segundo Toulmin (2008) os dados "fortalecem a base" sobre a qual o argumento específico é construído, enquanto que as garantias são gerais e atestam a "solidez de todos os argumentos do tipo apropriado".

No que diz respeito à diferenciação do fundamento e das garantias, o fundamento, representado sob o enunciado da garantia que sustenta, pode exprimir-se sob a forma de enunciados factuais, categóricos, ao passo que os enunciados das garantias são hipotéticos, semelhantes a pontes/passagens (Boavida, 2005b). Desta forma, Toulmin (2008) refere que embora o modelo apresentado não varie significativamente de um campo de argumentação para outro, as garantias e o tipo de fundamento requerido por estas dependem claramente do campo em que o discurso argumentativo se desenvolve. De facto, Krummheuer (1995) observa que um aspeto importante da argumentação é entender que a escolha e seleção de dados específicos, garantias e fundamentos está dependente do contexto social no qual o argumento é estabelecido. Desta forma, para uma determinada conclusão, dados bem sucedidos são determinados pela aceitação, por parte dos participantes no debate, sem mais qualquer questão (Forman et al., 1998). De igual modo, fundamentos bem sucedidos são usualmente pontos de acordo entre os intervenientes, no sentido em que constituem teorias, crenças ou mais geralmente perspetivas partilhadas por todos os que estão envolvidos na discussão (Forman et al., 1998).

> Assim, o sucesso de um argumento não depende apenas da correta aplicação de um algoritmo ou da sua solidez lógica, mas também do grau em que um conjunto de dados, garantias e fundamentos podem realmente convencer a audiência sobre a veracidade da conclusão. (Forman et al., 1998, p. 533)

Através do seu modelo, Toulmin parece entender a argumentação, «(...) como um tipo de atividade que decorre de uma ação cujo valor ou validade é questionado, o que requer a apresentação de elementos justificativos.» (Boavida, 2005b, p. 75). De facto, este modelo de argumentação permite dividir a argumentação nos seus argumentos e ao mesmo tempo visualizar as suas ligações (Pedemonte, 2002). Permite, portanto, mostrar como se articulam os elementos essenciais de uma argumentação, nomeadamente, como é que as argumentações secundárias se podem inserir numa argumentação principal (Boavida, 2005b). Como refere Boavida (idem), se uma garantia é contestada, nada impede que a consideremos como uma argumentação secundária ou preparatória; de igual modo, se os dados forem colocados em causa, pode atribuir-se-lhes o estatuto de uma conclusão potencial. Para esta investigadora (2005b), este modelo pode captar as estratégias usadas numa argumentação particular, permitindo avaliar essas estratégias dentro das regras do campo de argumentação, contribuindo para realçar as suas fraquezas ou potencialidades. Já para Pedemonte (2002), este modelo pode tornar-se útil para determinar o tipo de raciocínio (dedutivo, indutivo, abdutivo, etc.) subjacente à argumentação.

Argumentos analíticos e argumentos substanciais

No seu tratado, Toulmin realizou ainda uma importante diferenciação: a distinção entre *argumentos analíticos* e *argumentos substanciais*. Esta distinção resultou do facto de a lógica formal não ter tomado em consideração a relatividade da noção de argumentação e a pluralidade de percursos argumentativos (Boavida, 2005b). A lógica formal considerava apenas um tipo de argumentos: aqueles que, em virtude da sua forma, podiam ser considerados válidos ou não válidos. Toulmin denominou, assim, estes argumentos por *analíticos*, enquanto que os argumentos que têm em atenção a realidade, para que seja possível obter a sua conclusão, são designados por *substanciais*.

> Um argumento de D [dado] a C [conclusão] é chamado de analítico se e só se o fundamento para a garantia que autoriza esta inferência inclui, explicitamente ou implicitamente, a informação transmitida na própria conclusão. Quando isso acontece a afirmação 'D, B [fundamento] e também C' será como regra tautológica. [...] Quando o fundamento para a garantia não contiver a informação transmitida na conclusão, a afirmação 'D, B e também C' jamais será tautológica, e o argumento será um argumento substancial. (Toulmin, 2008, p. 116)

Nos argumentos substanciais, a conclusão não pode ser vista como um simples rearranjo do que é dito nos dados e nas justificações do argumento. Por isso, embora possa ser transparente a legitimidade da passagem à conclusão, estes argumentos jamais são tautológicos, contrariamente aos analíticos que em princípio são tautológicos. Argumentações analíticas são, assim, aquelas cujas conclusões não contêm nada que não esteja já potencialmente nas premissas por meio da dedução, ao passo que a argumentação substancial é informativa no sentido de que expande o significado das premissas (Krummheuer, 1998).

Contudo, para Toulmin, somente os argumentos matemáticos são totalmente analíticos e na prática, no quotidiano, os analíticos puros quase não são utilizados (Rezende, 2010). De facto, para Toulmin (2008) torna-se duvidoso que um autêntico argumento prático possa ser verdadeiramente analítico, uma vez que o objeto de um argumento é estabelecer conclusões de que não se está inteiramente certo, ligando-as a informações mais seguras. Na prática, a aceitabilidade de um argumento deve ser entendida num contexto. Ao contrário, os lógicos formais, na procura da universalidade e atemporalidade, não tomaram em conta tal contexto. Assim, o que Toulmin defende é que a formalidade analítica não deve ser critério para julgar os verdadeiros méritos de um argumento; no entanto, os lógicos foram-se tornando cada vez mais extremistas e obcecados pelo ideal universal e matemático que, segundo eles, a lógica deveria oferecer (Rezende, 2010). Desta forma, a versão mais branda da lógica formal, isto é, a versão menos radical, mesmo que inadequada também foi abandonada em prol de uma visão mais extrema. De acordo com Toulmin (2008), a forte rejeição que o aristotelismo sofreu no século XVII levou a que a versão menos extrema da lógica fosse rebatida, uma vez que era oriunda da visão aristotélica. Isso deveu-se, de acordo com Toulmin, principalmente:

> Sob uma série de aspetos, a revolução pela qual passou o pensamento no século XVII pode ser caracterizada como o renascimento do platonismo e uma rejeição do aristotelismo. Aquilo a que chamei de visão menos extrema, tanto da lógica como da geometria, é uma visão aristotélica, e a lógica medieval da afirmação era parte integrante da tradição aristotélica. Os 'novos pensadores' dos séculos XVI e XVII erigiram, em oposição a Aristóteles, as figuras de Pitágoras, Platão e, acima de todos, Euclides. Era sua ambição empregar métodos e modelos matemáticos em todas as especulações e, com frequência, podem ser encontrados a exprimir opiniões platónicas sobre o estatuto das entidades matemáticas. (Toulmin, 2008, pp. 167–168)

A rejeição do aristotelismo e o resgate do platonismo, caraterizados através das obras dos pensadores do século XVII, permitiram contestar a conceção lógica de Aristóteles, mas, principalmente, a sua conceção acerca da importância da retórica. A lógica aristotélica, das afirmações, foi, então, substituída pela lógica das proposições, uma vez que a primeira não oferecia o grau de certeza e universalidade que a segunda oferecia; grau este exigido pelos lógicos formais, que se baseavam, essencialmente, no modelo matemático (Rezende, 2010). Assim, a conceção de Aristóteles sobre a retórica foi excluída do ponto de vista da ciência. Se a conceção lógica aristotélica foi considerada insuficiente para a realização de uma lógica formal e dedutiva, na procura do mais alto grau de certeza, a conceção retórica era ainda mais insuficiente para oferecer tal certeza, como foi reconhecido, aliás, pelo próprio Aristóteles. Contudo, Toulmin (2008) propõe superar o ideal lógico, baseado no silogismo analítico, uma vez que os critérios analíticos são irrelevantes para a construção e validade dos argumentos substanciais, que são os mais utilizados na prática. De facto, este tipo de argumentação não tem a severidade lógica de uma dedução formal (Krummheuer, 1998). Como o próprio Toulmin (2008) destaca, a argumentação analítica não deve ser considerada como o tipo ideal de argumentação, sendo a argumentação substancial vista como contendo "buracos" lógicos, que devem ser remediados e que a transformam num parente pobre da primeira.

Tendo em consideração a perspetiva de Perelman, em que a argumentação está relacionada não com a autoevidência e a necessidade lógica das conclusões, mas com a arte de convencer e o campo do credível, do plausível e do provável, de acordo com Krummheuer (1998), pode afirmar-se que na base de uma teoria da argumentação estão as argumentações substanciais. Por meio de uma argumentação substancial, uma afirmação ou decisão é gradualmente apoiada, não de uma forma arbitrária, com afirmação autoevidente, mas através da realização de uma apresentação convincente de fundamentos, relações, explicações, justificações e qualificadores (Krummheuer, 1998).

A perspetiva de Toulmin acerca da lógica é importante, nomeadamente na defesa da retórica. Toulmin abre o caminho para a *possibilidade* na lógica, ao realçar o uso de *termos modais* de probabilidade (*possivelmente*, *provavelmente*, etc.) (Rezende, 2010). As certezas não são fáceis de serem encontradas e estabelecidas, sendo o mundo pautado por dúvidas, e por isso as possibilidades se tornam tão importantes, já que dão atenção ao imponderável, ao duvidoso, etc..

Como foi referido, para Toulmin, a lógica foi construída em torno de um ideal matemático e da certeza universal e atemporal. Assim, os lógicos afastaram-se da aplicação prática dos argumentos, uma vez que estes são articulados a partir das possibilidades, através de saltos lógicos. Nesse sentido, um dos grandes equívocos dos lógicos formais foi não perceber que a validade de um argumento é determinada pelo campo no qual está inserido, ou seja, a validade de um argumento é *campo-dependente*, e não *campo-invariável*. Esse ponto torna-se muito importante para o argumento retórico. Toulmin renovou, assim, o entendimento acerca da lógica, tornando-a menos desconexa com a argumentação do mundo real, propondo um modelo de análise de um argumento que pode ser aplicado independentemente do campo no qual este se insere.

4.2. A argumentação matemática na perspetiva de alguns educadores matemáticos

As influências dos estudos desenvolvidos por Perelman e Toulmin surgem de forma explícita nos trabalhos desenvolvidos sobre argumentação no âmbito da educação matemática. Nas últimas décadas, diversos investigadores desta área clarificaram o uso da argumentação e de argumentos, esclarecendo os conceitos chave das suas investigações com base nos trabalhos desenvolvidos por estes dois filósofos. É, no entanto, de observar que nos diferentes trabalhos de investigação realizados sobre argumentação, no âmbito da educação matemática, esta surge frequentemente associada à questão da prova matemática, nomeadamente na distinção/semelhança entre ambas e sobre a pertinência de uma abordagem à argumentação matemática com o intuito de promover a aprendizagem da prova matemática.

4.2.1. Raymond Duval

No âmbito da argumentação em matemática, destaca-se a investigação de Raymond Duval. A investigação de Duval assenta na distinção entre argumentação e prova. De acordo com a sua perspetiva, a argumentação está direcionada para convencer, enquanto a prova está associada ao raciocínio dedutivo, ao estabelecimento da verdade, e à escrita de textos de prova. Para Duval (1990) a argumentação emerge em qualquer situação de interação social, onde é necessário persuadir o interlocutor ou refutar uma tese, sendo, portanto, um raciocínio orientado com o objetivo de comunicar. Contudo, o pensamento dedutivo não funciona como o raciocínio argumentativo e o facto destes dois tipos de raciocínio usarem uma semelhante forma linguística, é para Duval (1991), uma das principais razões para os alunos não entenderem as exigências da prova matemática. Nesse sentido, Duval considera que a argumentação é um tipo de raciocínio que se opõe ao raciocínio exigido na prova matemática. Para Duval (1991), o raciocínio argumentativo tem regras implícitas, que realçam, por um lado, a estrutura da linguagem, por outro, as representações dos interlocutores, tornando essencial o conteúdo semântico das proposições. Pelo contrário, no raciocínio dedutivo o que é importante não é o conteúdo, mas o "estado operatório" de cada passo.

A investigação desenvolvida por Duval baseia-se no trabalho de Perelman, referindo este filósofo como uma das suas fontes, portanto não é de surpreender que, para Duval, a argumentação esteja associada à justificação e à tentativa de convencer alguém (Reid & Knipping, 2010). Para Duval (1992–199), a noção de argumentação está estritamente associada com a justificação ou tese, surgindo, assim, «(…) espontaneamente logo que exista um argumento com alguém.» (Duval, 1999, Parte I, §1). Assim, para Duval (1999), um argumento é considerado como uma razão que é avançada ou usada para justificar ou refutar uma proposição, envolvendo esta noção duas dimensões: o assunto e o contexto, englobando este último a motivação dessa escolha e o objetivo pretendido.

A motivação para argumentar e o objetivo pretendido, os quais Duval considera como o *contexto de produção* de um argumento, podem deferir e uma importante diferença na produção de contextos leva Duval (1999) a fazer a distinção ente *argumentação heurística* e *argumentação retórica*, sendo a argumentação heurística a que se encontra presente na matemática. De acordo com Duval (1999), em matemática o motivo e o objetivo de uma argumentação são específicos do problema que se pretende resolver, sendo os constrangimentos presentes no problema que determinam a escolha dos argumentos e não as crenças dos indivíduos em relação aos quais o argumento é direcionado: «a força de um argumento depende primeiramente de como é apropriado à situação e não da ressonância do universo da pessoa a quem é dirigida.» (Duval, 1999, Secção II.1, §5). Já fora do campo da matemática as crenças das pessoas a quem os argumentos são dirigidos são importantes e a argumentação retórica ocorre

> quando é uma questão de convencer alguém sobre uma decisão a ser tomada, a resolver um conflito de interesses ou a obter consenso sobre

> uma questão, existindo uma inversão da prioridade: toma-se primeiro em consideração convencer a pessoa a quem é endereçada. (Duval, 1999, Secção II.1, §5)

De acordo com Reid e Knipping (2010), nesta distinção entre argumentação heurística e retórica, surge uma mudança na forma como Duval considera a argumentação. Embora Duval considere a argumentação um tipo de raciocínio, no contexto de distinção entre a argumentação retórica e heurística, a argumentação parece ser simplesmente um argumento. Ou seja, enquanto uma argumentação heurística é um argumento que dá origem a um raciocínio dedutivo, uma argumentação retórica é um argumento que origina uma argumentação com um tipo de raciocínio não dedutivo, com o objetivo de convencer. Nesse sentido, há uma rutura entre a argumentação retórica e a argumentação heurística, o que consequentemente origina um hiato entre a argumentação e a prova. Para Duval (1999–1993) é importante não negligenciar essa rutura, visto que ensinar a argumentar, mesmo na forma mais desenvolvida, não é um caminho para aprender a demonstrar, sendo que esta rutura, entre a argumentação e a prova, é causa das dificuldades dos alunos no entendimento da prova matemática. Para Duval significados baseados em argumentos não dedutivos usados no dia a dia para convencer os outros não se tornam úteis para ajudar os alunos a entender a estrutura dedutiva formal da prova matemática. Para Reid e Knipping (2010) esta posição não se encontra distante das posições tomadas por outros investigadores. Por exemplo, Fischbein (1982) afirma que o conceito formal de prova está completamente à parte da corrente principal do comportamento, o que requer uma nova base de crenças, sendo esta distinta da base de outros tipos de raciocínio.

4.2.2. Nicolas Balacheff

Tomando inicialmente a posição de Duval, Nicolas Balacheff refere que a argumentação e a prova matemática não são da mesma natureza (Reid & Knipping, 2010). Para Balacheff (1991, pp.188-189), o objetivo da argumentação é, na interação, obter o acordo do outro e não, em primeiro lugar, estabelecer a verdade de alguma afirmação. Balacheff (idem) observa que o comportamento social é um processo aberto, isto é, permite o uso de qualquer tipo de meios; ao passo que na prova matemática há a necessidade de se ajustar às exigências do conhecimento tomado a partir de um corpo de conhecimento sobre o qual os matemáticos concordam. A posição de Balacheff baseia-se, assim, no trabalho de Perelman:

> enquanto que a prova matemática na sua forma mais perfeita é uma série de estruturas e de formas cuja progressão não pode ser desafiada, a argumentação tem um caráter não constrangedor. Ela leva o autor à hesitação, dúvida e liberdade de escolha; mesmo quando propõe soluções racionais, nada é garantido para alcançar a vitória (Perelman, 1970, p. 4)

No entanto, mais tarde Balacheff distancia-se desta posição (Reid & Knipping, 2010). Balacheff reconhece que a argumentação, isto é, o raciocínio não dedutivo é usado em matemática, pois

> a resolução de problemas [...] é o contexto no qual se desenvolvem as práticas argumentativas utilizando meios que podem ser usados noutros lugares (metáfora, a analogia, indução, etc.), mas que desaparecem na construção de um discurso aceitável no que diz respeito às regras específicas da matemática. (Balacheff, 1999, The risks of recognizing a "mathematical argumentation", §5)

Depois de tomar em consideração a rutura entre argumentação e prova, proposta por Duval, e o conceito de *unidade cognitiva* entre argumentação e prova, proposta por investigadores italianos, Balacheff (1999), a partir da perspetiva de ensino e aprendizagem, aponta uma terceira via:

> eu chego a apoiar nem a tese de continuidade nem a de rutura entre a argumentação e a prova em matemática (demonstração), mas a propor o reconhecimento da existência de uma relação que é complexa e que parte do significado de ambas: a argumentação constitui um obstáculo epistemológico à aprendizagem da prova matemática (demonstração) e mais geralmente da prova em matemática (Balacheff, 1999, Argumentation, epistemological obstacle to the teaching of mathematical proof, §5)

Para Reid e Knipping (2010), Balacheff faz a distinção entre três conceitos: argumentação, prova matemática (demonstração) e prova em matemática (verificação). Para estes autores (idem), torna-se claro que a verificação em matemática é, na mente de Balacheff, ainda distinta de convencer (argumentação). Nesse sentido, certamente que Balacheff estaria em desacordo com a posição de

Hersh (1993) de que na prática matemática, na vida real da vivência dos matemáticos, a prova constitui um argumento convincente, avaliada por juízos qualificados.

4.2.3. Nadia Douek

Nem todos os investigadores matemáticos apontam diferenças entre a argumentação e a prova matemática. Ao longo da última década, Nadia Douek escreveu diversos artigos sobre a argumentação e a prova em matemática. Douek (1999b) argumenta contra a pretensão de Duval de que existe uma rutura entre a argumentação e a prova matemática. A posição de Douek, baseada em diferentes definições, é que a prova matemática pode ser considerada um caso particular de argumentação. Douek rejeita, assim, a posição de Duval de que na diferença entre a argumentação e a prova matemática residem as dificuldades dos alunos na aprendizagem da prova matemática.

Para Douek (2002) a argumentação significa, por um lado, o processo individual ou coletivo que produz um discurso lógico, mas não necessariamente dedutivo, sobre um dado assunto, por outro lado, o texto produzido através deste processo. No que diz respeito ao argumento, para Douek (1999b) é a razão ou razões apresentadas a favor ou contra uma proposição, opinião ou medida, podendo ser verbais, dados numéricos, desenhos, etc. (1999b). Desta forma, para Douek (1999a), argumentação e argumentos estão ligados de tal forma que uma argumentação consiste em um ou mais argumentos conectados logicamente (1999b), relacionados por dedução, indução ou analogia (1999). Embora, de acordo com Reid e Knipping (2010) a definição de Duval e Douek para argumento seja quase semelhante, existe uma nítida distinção na forma como olham a argumentação. Para Douek a argumentação não é necessariamente dedutiva, enquanto que para Duval é necessariamente não dedutiva, visto que para este investigador o pensamento dedutivo não funciona como a argumentação.

4.2.4. Paolo Boero

Adotando as definições de Douek sobre argumentação e argumento, Paolo Boero (1999) discute o papel da argumentação em seis fases da atividade matemática: produção de uma conjetura; formulação da afirmação; exploração do conteúdo e limites de validade da conjetura; seleção e encadeamento de argumentos coerentes e teóricos numa cadeia dedutiva; organização dos encadeamentos de argumentos numa prova, que é aceitável de acordo com os standards da matemática corrente; e abordagem a uma prova formal. Nas duas primeiras fases, a argumentação diz respeito à análise interna (e eventualmente pública) da situação problemática, questionando a validade e o significado da descoberta de regularidades, hipóteses e discussão de possíveis formulações. Na terceira fase, Boero refere que a argumentação desempenha três papéis importantes: produção (ou resumo a partir da primeira fase) dos argumentos para validação, discussão da sua aceitabilidade, de acordo com os requerimentos da sua natureza (por exemplo, embora os argumentos empíricos sejam relevantes na primeira fase e mesmo na abordagem à validação, eles têm de ser progressivamente excluídos a partir desta fase) e consideração de possíveis ligações entre hipóteses e tese. Nesse sentido, para Boero, toda a terceira fase é de natureza argumentativa, sendo a quarta fase largamente argumentativa, especialmente no que diz respeito ao desenvolvimento do encadeamento argumentativo. De acordo com Boero, na quinta fase a argumentação pode também desempenhar um determinado papel, comparando o texto em produção com as correntes standards de rigor, organização textual, reunidas a partir da primeira fase. Para Boero a argumentação é, assim, uma parte de todas as fases da atividade matemática, incluindo a criação da prova formal (Reid & Knipping, 2010).

Boero (1999) faz também referência ao trabalho desenvolvido por Toulmin, considerando que se deve ter em atenção as conceções desenvolvidas por este filósofo. Contudo, essas conceções não lhe parecem satisfatórias quando se trata de analisar a argumentação nas atividades matemáticas, visto que a estrutura linguística da sequência de argumentos não é considerada em profundidade por Toulmin. Boero refere ainda a importância do conceito de unidade cognitiva, relacionando a argumentação da primeira fase – conjetura – à argumentação presente na terceira fase – exploração da conjetura.

Quando se realizam referências ao trabalho realizado pelos matemáticos, é colocada uma grande ênfase no momento do desenvolvimento de uma conjetura, contudo, Duval (1999) formula a seguinte questão: será que os argumentos que possibilitam a formulação de uma conjetura, permitem aos alunos encontrar a forma de a provar? De acordo com Reid e Knipping (2010, p. 160), um grupo de investigadores (do qual fazem parte, incluindo Boero, Douek, Mariotti, Pedemonte, Bartolini e Bussi) assume «(…) que existe um significativo corpo de evidências empíricas sugerindo que a formulação de uma conjetura torna possível encontrar os meios para a provar». Nesse sentido, estes investigadores propõem a existência de uma continuidade entre a produção de uma conjetura e a possibilidade de construção de uma prova, referindo esta continuidade como uma unidade cognitiva (Garuti et al., 1998). Observando as provas realizadas pelos alunos, Boero e os seus colegas encontram evidências experimentais de unidade cognitiva, visto que ao longo da produção de uma conjetura, os alunos, progressivamente, terminam a sua afirmação por meio de uma intensa atividade argumentativa, onde é possível observar justificações sobre a plausibilidade das suas escolhas. No entanto, subsequentemente, durante a etapa da comprovação da afirmação, o aluno encadeia este processo de uma forma coerente, organizando alguns dos argumentos já produzidos de acordo com uma cadeia lógica (Boero, Garuti, Lemut & Mariotti, 1996). De acordo com Reid e Knipping (2010), esta ideia de unidade cognitiva baseia-se em episódios da história da matemática, onde os processos de produzir uma conjetura e a construção de uma prova surgem entrelaçados. Por exemplo, o processo prova-análise de Lakatos (1976), um ciclo de provas e refutações, em que o aspeto mais importante deste método é a unidade intrínseca entre a "lógia da descoberta" e a "lógica da justificação".

4.2.5. Bettina Pedemonte

Nem todos os investigadores com trabalhos que abordam a questão da unidade cognitiva consideram a argumentação sob ponto de vista de Boero.

Bettina Pedemonte (2002) refere que durante a produção de diversos teoremas existem vários elementos de conteúdo semelhante tanto na argumentação como na prova, portanto, é frequente encontrar-se uma continuidade de conteúdo dos dois processos.

A investigação desenvolvida por Pedemonte (2002) foi realizada com o objetivo de proceder à comparação entre a argumentação abdutiva, que sustenta uma conjetura, e a respetiva prova. Esta investigadora, procedeu a uma análise estrutural entre a argumentação e a prova, recorrendo ao modelo de argumentação proposto por Toulmin, ferramenta essa que lhe permitiu detetar e analisar algumas estruturas, evidenciando quer continuidade, quer algumas lacunas entre a argumentação e a respetiva prova. Por outro lado, Pedemonte (2007) notou que a ideia de unidade cognitiva pode ser usada para prever e analisar algumas das dificuldades dos alunos na construção da prova. Ao contrário de Boero, na sua investigação Pedemonte (2007) restringe a argumentação ao processo de gerar uma conjetura, destacando que a atividade de argumentação favorece a construção de uma prova. Esta forma de olhar e usar a argumentação é oposta à pretensão de Duval de que a argumentação não proporciona um caminho à aprendizagem da prova.

Como referido, Pedemonte elege o modelo de argumentação proposto por Toulmin como ferramenta metodológica para analisar uma argumentação em matemática. A estrutura ternária da argumentação explicada por este modelo legitima a comparação entre a estrutura da argumentação e da demonstração produzida, o que leva Pedemonte a considerar a demonstração um caso particular de argumentação, sendo a garantia um axioma, uma definição ou teorema duma determinada teoria específica.

4.2.6. Götz Krummheuer

Também Götz Krummheuer escreveu extensamente sobre argumentação, elaborando um esquema de argumentação igualmente baseado no modelo de argumentação proposto por Toulmin. Embora utilize o trabalho de Toulmin como ponto de partida para os seus estudos sobre argumentação em matemática, é possível distinguir alguns traços da descrição da argumentação segundo Perelman: a argumentação como um processo de convencer alguém. Para Krummheuer a argumentação é um processo, isto é, um método ou técnica de linguagem de expressar uma determinada pretensão que reflete um ato de racionalidade, sendo o argumento o produto deste, isto é, a sequência final de afirmações aceites pelos participantes (Krummheuer, 1995). Para Krummheuer (1995), a argumentação está relacionada com a formulação do raciocínio utilizado, sendo que, de forma empírica, o conceito de argumentação está associado às interações observadas em salas de aula, relacionadas com explicações intencionais do raciocínio durante ou após o desenvolvimento de uma determinada solução.

De acordo com Reid e Knipping (2010), Krummheuer não estava explicitamente interessado na prova matemática, portanto, a sua descrição de argumentação torna claro o seu interesse em processos que levam à verificação de uma afirmação, os quais podem incluir a prova. Contudo, ao contrário da prova que é frequentemente vista com uma atividade pessoal e de caráter individual, Krummheuer (1995, p. 229) considera a argumentação como um processo social, isto é, «(…) um fenómeno social, em que os indivíduos cooperam, tentando ajustar as suas interações e interpretações pela verbalidade apresentando a racionalidade das suas ações.». Devido à natureza de interação social, a argumentação envolve, assim, vários participantes, o que leva Krummheuer (1995) a designá-la por *argumentação coletiva*.

De acordo com Reid e Knipping (2010), a abordagem realizada por Krummheuer à argumentação matemática é distinta das outras descritas, uma vez que ele não vê a argumentação a interferir com a aprendizagem da prova ou como suporte à aprendizagem da prova, mas sim como sendo essencial para aprender matemática. Para Krummheuer (2007) se se pensar em termos das interações presentes no quotidiano das situações existentes na sala de aula de matemática, a argumentação surge como um dos maiores traços dessas situações, ainda que tomando diferentes formas. No entanto, para Krummheuer (idem) a argumentação não deve ser olhada unicamente como um objetivo de ensino, no sentido de que se tem de projetar o ensino da matemática de uma forma que, em última análise, os alunos alcancem este objetivo e sejam capazes de argumentar a um nível matemático sofisticado: noção de “aprender a argumentar”. Contudo, em relação à aprendizagem matemática, este investigador observa que a participação em argumentações é uma condição prévia para a possibilidade de aprender. Neste sentido, a aprendizagem da matemática é uma aprendizagem argumentativa.

4.2.7. Erna Yackel e Paul Cobb

Partilhando em relação à argumentação, embora não explicitamente, uma opinião semelhante à de Krummheuer, Erna Yackel (2001) refere que se pode usar o esquema de argumentação elaborado por Krummheuer (1995), baseado no modelo de argumentação proposto por Toulmin, como uma ferramenta metodológica para demonstrar como a aprendizagem progride em contexto de sala de aula. Nesse sentido, no trabalho desenvolvido com os seus colegas Paul Cobb e Terry Wood, Yackel elabora o conceito de normas sociais, normas essas que sustentam as microculturas de sala de aula caracterizadas pela explicação, justificação e argumentação (Yackel, Cobb & Wood, 1991). Contudo, normas deste tipo são normas sociais gerais de sala de aula que se aplicam a qualquer área e não unicamente à matemática. Por exemplo, os alunos podem não só desafiar o pensamento e o raciocínio dos colegas como também justificar as suas próprias interpretações tanto em aulas de ciências, como de literatura ou de matemática. No entanto, Yackel e Cobb (1996) realçam a existência de normas que são específicas à participação em discussões matemáticas, que designam por normas sociomatemáticas.

Para estes investigadores (1996), normas sociomatemáticas são aspetos normativos de discussões matemáticas, específicos da atividade matemática dos alunos, sendo, portanto, distintos das normas sociais da sala de aula. Contudo, a distinção entre estas normas é subtil, pois as normas sociais e as normas sociomatemáticas estão profundamente entrelaçadas. Yackel e Cobb (1996) referem que é uma norma social os alunos explicarem e justificarem as suas soluções e os seus raciocínios, visto que as normas implicadas em justificar e explicar podem ser aplicadas em qualquer discurso, isto é, podem ser negociadas no âmbito do ensino e aprendizagem de qualquer conteúdo disciplinar. Contudo, Yackel e Cobb (idem) observam o que é considerado uma justificação ou explicação matemática aceitável, ou uma solução matematicamente diferente para um determinado problema é uma norma sociomatemática. As normas sociomatemáticas são, assim, aspetos intrínsecos da microcultura da aula de matemática, não sendo critérios predeterminados introduzidos na sala de aula a partir do exterior.

Yackel e Cobb (1996) observam ainda que as normas sociomatemáticas podem diferir substancialmente entre comunidades de sala de aula, uma vez que estas compreensões normativas são permanentemente aperfeiçoadas e modificadas pelos alunos e professor através das suas interações. Para Yackel e Cobb (1996) as normas sociomatemáticas regulam a argumentação matemática e influenciam as oportunidades de aprendizagem dos alunos. De acordo com estes investigadores (idem), por um lado permitem aos intervenientes compreender quais são os meios de argumentação considerados aceitáveis numa comunidade de discurso matemático, uma vez que os critérios de aceitabilidade de uma ideia são negociados, ou seja, são legitimados por explicações e justificações matematicamente aceitáveis. Por outro lado, os alunos ao saberem quando é apropriado contribuir e o que constitui uma contribuição matemática aceitável, desenvolvem a sua autonomia intelectual, pois utilizam as suas próprias capacidades intelectuais na tomada de decisões e de julgamentos matemáticos à medida que participam nas discussões da comunidade de sala de aula (Yackel & Cobb, 1996). Embora estes investigadores não façam referência, de forma explícita, à prova, torna-se claro que uma aceitável explicação e justificação matemática, pelo menos numa comunidade matemáticos, é uma prova matemática (Reid & Knipping, 2010).

4.2.8. Terry Wood

Embora inicialmente tenha trabalhado em conjunto com Yackel e Cobb, Terry Wood (1999) afasta-se, mais tarde, da abordagem da argumentação preconizada por esses investigadores, fornecendo algumas definições, de forma explícita, que clarificam a sua investigação.

Para esta investigadora (idem), o estudo sobre argumentação, por si desenvolvido, difere do exame realizado por Yackel, sobre o tipo de argumentos que as crianças oferecem quando estão em desacordo, e da análise de Krummheuer sobre quais os motivos das afirmações das crianças em situação de desacordo. Nesse sentido, Wood (1999) define argumento como uma mudança discursiva entre participantes com o propósito de convencer os outros através do uso de certos modos de pensamento e argumentação, como um processo interativo de saber como e quando participar nessa mudança.

4.2.9. Christine Knipping

A ideia de considerar a argumentação como um processo coletivo no qual os alunos e professor desenvolvem a prova matemática também é partilhada por Christine Knipping. Esta investigadora verifica que diferentes investigações realizadas, sobre as provas matemáticas efetuadas pelos alunos, têm destacado a existência de diferentes tipos de raciocínio e de argumentos nesses processos. Nesse sentido, para esta investigadora, analisar o discurso de sala de aula e as argumentações coletivas são importantes para melhor entender o tipo de provas existentes e a sua importância no processo de ensino e de aprendizagem.

Knipping procurou encontrar um método que permitisse revelar a racionalidade dos argumentos que são produzidos durante os processos de prova em contexto de sala de aula e, assim, definir quais as estruturas de argumentação presentes durante esses processos. Para Knipping, apenas a lógica matemática formal não consegue capturar esta racionalidade, portanto, há a necessidade de encontrar outras formas e revelar estas estruturas e os tipos de argumentos específicos que ocorrem em sala de aula. Assim, entender estas racionalidades e os constrangimentos contextuais que moldam estas argumentações podem ajudar a aperfeiçoar o esforço em ensinar a prova matemática (Knipping, 2008).

Knipping sugere um método através do qual se pode reconstruir e analisar as complexas argumentações presentes nos processos de prova. Propõe então três fases para esse processo: reconstruir a sequência e os significados dos diálogos em sala de aula; a analisar os argumentos e as estruturas de argumentação, e finalmente comparar estas estruturas de argumentação revelando a sua racionalidade. A segunda fase envolve dois movimentos. Em primeiro lugar analisar os argumentos locais com base no modelo funcional de argumentação proposto por Toulmin e em segundo lugar analisar a estrutura argumentativa global do processo de prova. De facto, Knipping destaca o modelo proposto por Toulmin como a ferramenta que permite caracterizar diferentes tipos de argumentos, incluindo os formais e os informais, presentes em contexto de sala de aula.

Tendo em consideração que os processos de prova em contexto de ensino e de aprendizagem envolvem uma sequência de afirmações, em que a passagem de uma afirmação para outra é geralmente não formal, Knipping considera que provar, em contexto de sala de aula de matemática, não é um raciocínio formal dedutivo. Portanto, não se torna evidente que a passagem de uma afirmação para outra possa ser descrita puramente como um reciclar de conclusões, isto é, conclusões que passam a dados no passo de inferência seguinte. Nesse sentido, torna-se importante descrever os diferentes tipos de argumentação presentes nos discursos de prova de sala de aula de matemática, através de uma análise dos diversos argumentos, em particular dos argumentos que são refutados em processos de prova e que não são evidentes na produção final da prova (Reid, Knipping & Crosby, 2008).

Enquanto que provar consiste em mostrar que as conclusões estabelecidas se obtêm a partir de um determinado conjunto de premissas, a refutação unicamente permite concluir que determinada afirmação não segue determinadas premissas, excetuando o caso da prova por contradição na qual se procura refutar uma afirmação em ordem a provar a sua negação. No entanto, embora as refutações pareçam estar pouco relacionadas com o ensino da prova, Knipping (2008) num trabalho desenvolvido com Reid e Crosby observa que estudar o tipo de refutações presentes num processo argumentativo permite revelar a racionalidade dos argumentos produzidos, pelos alunos, durante o processo de prova. A justificação, para o interesse e pertinência do estudo das refutações, reside no facto de que estas não só possibilitam a análise da forma como é efetuada a transição entre a lógica do dia a dia, que os alunos trazem para a sala de aula, e a lógica aceite em contexto de sala de aula, tendo em consideração as normas sociomatemáticas, mas também permite revelar qual o tipo de epistemologia de ensino presente em contexto de sala de aula. Para estes investigadores (idem), o papel desempenhado pelas refutações depende, de facto, de fatores epistemológicos. Por exemplo, para aqueles cujo enfoque seja a precisão lógica dos textos formais, as refutações não desempenham um importante papel, exceto, talvez, em casos especiais de provas por contradição. No entanto, outras epistemologias, na extensão do ponto de vista da matemática de Lakatos, são baseadas num ciclo de provas e refutações, em que as provas são sempre provisórias e as refutações fornecem o mecanismo para o melhoramento dos teoremas e das respetivas provas. Neste sentido, a prova está intrinsecamente ligada às refutações, e uma abordagem ao ensino da prova a partir desta perspetiva inclui uma exploração das refutações como um elemento essencial. Outra epistemologia na qual a prova é essencial é o conceito de unidade cognitiva, no qual os processos de argumentação podem incluir refutações que fornecem a base para o desenvolvimento da prova. Para Reid, Knipping e Crosby (2008) estudar o papel das refutações nos processos de prova de sala de aula torna-se importante não só na escolha da epistemologia, que destaca o importante papel das refutações (como por exemplo as epistemologias baseadas no trabalho desenvolvido por Lakatos e no conceito de unidade cognitiva), mas também na descrição e comparação da própria prática do professor, como uma forma de revelar a epistemologia implícita no seu ensino.

Reid, Knipping e Crosby (2008) observam que embora, o esqueleto básico proposto por Toulmin não considere refutações, este propõe um esquema mais complexo, onde as contempla, por forma a explorar como argumentos em diferentes campos baseados em diferentes critérios, dando exemplos de argumentos em que uma afirmação é verdadeira num campo, mas refutada noutro. Tendo em consideração o esquema básico de Toulmin, Reid, Knipping e Crosby (2008) propõem três formas nas quais um argumento pode envolver uma refutação: os dados de um argumento podem ser refutados, deixando em dúvida a conclusão; a garantia de um argumento pode ser refutada, deixando novamente a conclusão em dúvida; ou a própria conclusão pode ser refutada, implicando que os dados ou as garantias sejam inválidos, mas não especificando qual deles o é. Tendo em consideração o trabalho desenvolvido por Lakatos (1976) os dois primeiros casos são contraexemplos locais, enquanto o último é um contraexemplo global. No entanto, o interesse de Reid, Knipping e Crosby (2008) centra-se na lógica subjacente ao argumento e não especificamente nos dados, conclusões ou garantias.

De forma sumária, na tabela 4.1. são expostas as teorias citadas, as definições de argumentação e argumento e a relação entre argumentação e prova matemática, presentes nos trabalhos dos investigadores referidos.

Tabela 4.1. Noção de argumentação/argumento e relação argumentação/prova

Autor	*Teoria*	*Argumentação/argumento*	*argumentação/ prova*
Duval	Perelman	– argumentação é um raciocínio orientado com o objetivo de comunicar, associado à justificação e com o objetivo de convencer alguém – argumento é a razão avançada para justificar ou refutar uma proposição	não são da mesma natureza, existe, portanto, uma rutura cognitiva
Balacheff	Perelman	– argumentação é um comportamento social usado para convencer	argumentação é um obstáculo epistemológico à aprendizagem da prova matemática
Douek	Toulmin	– argumentação significa um processo individual ou coletivo que produz um discurso lógico, mas não necessariamente dedutivo sobre um dado assunto – argumento é uma razão ou razões apresentadas a favor ou contra uma proposição, opinião ou medida	prova matemática como caso particular da argumentação, não existindo uma rutura cognitiva entre ambas
Boero	Toulmin (breve referência)	– argumentação é uma parte de todas as fases da atividade matemática, incluindo a criação da prova final	unidade cognitiva entre argumentação e prova
Pedemonte	Toulmin	– argumentação é um processo de gerar uma conjetura	a argumentação proporciona um caminho à aprendizagem da prova matemática
Krummheuer, Yackel e Cobb	Toulmin Perelman (traços)	– argumentação é um processo, um método ou técnica de linguagem de expressar uma determinada pretensão que reflete um ato de racionalidade, portanto, um fenómeno social – argumento é a sequência final de afirmações aceites pelos participantes, o resultado da argumentação	a argumentação é essencial para a aprendizagem matemática, portanto, em particular para a aprendizagem da prova
Wood	Toulmin	– argumentação é um processo interativo de saber como e quando participar numa mudança discursiva – argumento é a mudança discursiva entre os participantes com o propósito de convencer os outros através do uso de certos modos de pensamento	
Knipping	Toulmin	A argumentação é um processo coletivo, podendo envolver refutações	a argumentação pode ajudar a aperfeiçoar o esforço em ensinar a prova matemática

4.3. Classificação de argumentos

Um dos mais importantes resultados da investigação em educação sobre a prova matemática é a possibilidade de entender melhor a diversidade de raciocínios e argumentos que ocorrem durante esse processo, em particular em contexto de sala de aula. Nesse sentido, diversos investigadores apresentam diferentes categorias, não existindo, contudo, um cruzamento dessas categorias nas diversas referências que abordam esta temática. Desta forma, existe a necessidade de definir uma estrutura que permita que os diversos sistemas de classificação possam ser considerados. Detendo-se no uso de representações em provas matemáticas e no uso de outros argumentos, Reid e Knipping (2010) fornecem uma forma de classificar argumentos. Estes investigadores estabelecem quatro categorias de argumentos que se podem distinguir pelo uso ou não uso de representações. A categoria em que exemplos específicos são usados, mas que não representam a classe na generalidade; a categoria em que exemplos específicos são usados como representações; a categoria em que palavras e símbolos são usados como representações; e a categoria em que símbolos e palavras são usados sem representar qualquer coisa específica. Reid e Knipping (2010) designam estas quatro categorias por empírica, genérica, simbólica e formal, referindo que no interior destas quatro categorias podem ser definidas subcategorias. No entanto, observam ainda que podem existir casos cuja classificação se situe na fronteira dessas categorias (tabela 4.2.).

4.3.1. Argumentos empíricos

Nos argumentos empíricos, os exemplos apresentados são não representativos, fazendo sentido apenas por eles próprios. Nesta categoria podem ser consideradas as seguintes subcategorias: *simples enumeração*, *extensão de um padrão*, *experiência crucial*, *género* ou *espécie* e *esquema percetual*.

Smith e Henderson (1959) designam por simples enumeração a subcategoria de argumentos empíricos em que uma característica é observada, num não exaustivo conjunto de exemplos e é generalizada a todos os objetos dos quais os exemplos são modelo. Bell (1976) designa esta subcategoria por extrapolação e Balacheff (1988, 1991) por empirismo intuitivo.

Smith e Henderson (1959) designam por extensão de um padrão a subcategoria em que é observado um padrão em exemplos consecutivos. Essa observação origina a predição de que o padrão continuará a ser observado em exemplos adicionais.

Experiência crucial é um tipo de argumento identificado por Balacheff (1988, 1991). Nesta subcategoria, uma característica de um único, mais ou menos típico, exemplo é atribuído ao todo. Contudo, Balacheff (1988) distingue este tipo de validação do empírico intuitivo, uma vez que os alunos colocam explicitamente o problema da generalidade e resolvem-no apostando na resolução de um caso particular.

Género ou espécie é descrito por Chazan (1993) como uma subcategoria dos argumentos empíricos na qual o conjunto em questão é dividido em subconjuntos de acordo com alguns atributos, e então, um exemplo de cada um dos subconjuntos é examinado. Se os exemplos de todos os subconjuntos partilham uma mesma característica, então essa característica é reclamada como sendo comum a todo o conjunto.

A maioria dos exemplos empíricos são numéricos, embora exemplos pictóricos e concretos possam servir de base a argumentos sem serem usados como representações. Esses argumentos encaixam-se na subcategoria esquema percetual proposta por Harel e Sowder (1998), em que um único exemplo pictórico é a justificação para uma determinada proposição.

Tabela 4.2. Classificação de argumentos

Categoria	*Subcategoria*
Argumentos empíricos (exemplos não representativos)	Simples enumeração Extensão de um padrão Experiência crucial Género ou espécie Esquema percetual
Entre o empírico e o genérico (entre exemplos não representativos e exemplos representativos)	Exaustão contraexemplo
Argumentos genéricos (exemplos como representações)	Exemplos numéricos Exemplos concretos Exemplos pictóricos Exemplos situacionais
Entre o genérico e o simbólico	Argumentos geométricos
Argumentos simbólicos (palavras e símbolos como representações)	Narrativa Simbólica
Entre o simbólico e o formal (entre símbolos representativos e não representativos)	Manipulativa
Argumentos formais (símbolos não representativos)	

4.3.2. Argumentos entre o empírico e o genérico

Alguns argumentos permanecem entre as categorias de argumentos empíricos (que não usam exemplos representativos) e a de argumentos genéricos (que usam exemplos representativos). Embora estes argumentos usem exemplos não representativos, ao contrário dos argumentos empíricos, estes exemplos são aceites como verificação na comunidade matemática. Para os matemáticos, exemplos não representativos podem ser usados em duas situações de prova: quando todos os exemplos são testados e se verifica que satisfazem a proposição em estudo; e quando um exemplo ao ser testado refuta essa mesma proposição. Essas duas situações são conhecidas por *prova por exaustão* e *refutação por um contraexemplo*.

Numa prova por exaustão todos os elementos de um conjunto finito são testados para ver se a proposição em questão é válida. Estas provas são também chamadas de provas por casos (Maher & Martino, 1996). Numa refutação por contraexemplo, quando se considera que uma propriedade se aplica a todos os elementos de um determinado conjunto, basta encontrar um elemento que não satisfaça esta propriedade para se poder refutar a afirmação geral.

4.3.3. Argumentos genéricos

Nos argumentos genéricos, os exemplos apresentados são representativos, uma vez que se pretende ver o geral no específico, daí se usar o termo genérico. De acordo com Reid e Knipping (2010) esta categoria, primeiramente descrita por Mason e Pimm (1984), surge de forma explícita no trabalho realizado por Balacheff (1988, 1991). Nesta categoria, de acordo com o tipo de exemplos envolvidos, podem ser consideradas as seguintes subcategorias: *exemplos numéricos*, *exemplos concretos*, *exemplos pictóricos* e *exemplos situacionais*.

Nos exemplos numéricos genéricos, a conjetura é interpretada em termos gerais, no entanto a sua prova é expressa num contexto particular (Harel & Sowder, 1998). Observa-se que antes do desenvolvimento da notação algébrica, os matemáticos não eram capazes de expressar justificações não-geométricas em termos gerais, portanto, faziam uso de números específicos no contexto onde agora se utiliza variáveis (Reid & Knipping, 2010). Um exemplo pode ser observado na prova de Euclides sobre a infinidade de números primos, presente em *Elementos* IX, 4.

Exemplos genéricos concretos, também designados por provas ação, consistem no uso de objetos concretos como exemplos representativos. Semadeni (1984) descreve a prova ação de uma determinada afirmação S da seguinte forma: (i) escolhe-se um caso especial da afirmação de S. O caso escolhido deve ser genérico (isto é, sem características especiais), mas não muito complicado e nem muito simples (exemplos triviais podem ser mais tarde difíceis de generalizar). Escolhe-se uma representação que permita ordenar e/ou uma representação icónica do caso; (ii) posteriormente, escolhem-se outros exemplos, considerando o esquema geral permanente, mas variando os constrangimentos envolvidos. Neste caso, verificar a afirmação, tentando usar o mesmo método anterior; (iii) Quando não houver necessidade de proceder a mais ações físicas, continuar a executá-las mentalmente até se estar convencido de que se sabe como funciona para mais exemplos; (iv) Por fim, tentar determinar a classe dos casos para os quais este método funciona.

Na subcategoria exemplos genéricos pictóricos, também designada por provas visuais, as ações são unicamente imaginadas, embora as figuras sejam usadas de forma direta. De facto, a diferença entre estes exemplos e os exemplos concretos é que, nestes últimos, o que é descrito por palavras é executado nos objetos representados nas figuras. Ou seja, provas visuais requerem ações executadas na mente, ao passo que as provas ação requerem ações físicas concretas (Reid & Knipping, 2010).

Nos exemplos genéricos situacionais, também designados por provas realmente orientadas, as ideias básicas apresentadas têm sentido na realidade, tornando-se acessíveis ao leitor (Blum & Kirsch, 1991). Neste tipo de exemplos usam-se tanto números específicos, como representações pictoriais, assemelhando-se, portanto, a argumentos baseados em exemplos numéricos e pictoriais.

4.3.4. Argumentos entre o genérico e o simbólico

Os *argumentos geométricos* surgem como a subcategoria típica dos argumentos situados entre o genérico e o simbólico. Brandford (1908) refere que os exemplos anteriores, pertencentes aos argumentos genéricos, são uma espécie preliminar e menos rígida de um ideal de prova científica. Contudo, não existe uma linha definida a dividir o tipo de argumentos genéricos do tipo de argumentos situados entre o genérico e o simbólico. Aliás, é, por vezes, difícil identificar uma linha que divida argumentos que usam exemplos como representações daqueles que usam palavras e símbolos como representações. Muitos argumentos que podem ser considerados protótipos de provas situam-se neste espaço, em particular a maioria das provas geométricas que não só fazem uso de palavras e símbolos, mas também se servem da figura genérica construída (Reid & Knipping, 2010). De facto, algumas características presentes numa determinada figura, conjuntamente com as premissas presentes no enunciado, permitem sustentar o argumento que está a ser produzido. Assim, a perceção sobre as características de uma figura suporta e, às vezes, até mesmo recoloca o mecanismo lógico do discurso (Herbst, 2004). Nesse sentido, Reid e Knipping (2010) realçam o papel das palavras neste tipo de argumentos, que recorrem à observação de uma figura genérica, destacando a descrição dada por Tall (1995, p. 8) sobre a forma como as palavras podem generalizar a figura genérica construída:

> As ideias da geometria euclidiana são inspiradas em representações visuais, mas são formuladas verbalmente para dar às provas uma maior generalidade. Um teorema na geometria euclidiana específica uma certa configuração geométrica. Uma figura desenhada a acompanhar o teorema é uma figura genérica que representa qualquer configuração satisfazendo a afirmação. A prova verbal aplica-se não apenas a uma figura específica desenhada, mas genericamente a toda a classe das representadas pelo teorema.

4.3.5. Argumentos simbólicos

Nos argumentos simbólicos, as palavras e os símbolos surgem como representações. Neste tipo de argumentos, embora o significado das palavras e símbolos possam não ser imediatamente óbvios, cada palavra e símbolo representam alguma coisa. Alguns argumentos usam unicamente ou principalmente palavras e são, por isso, designados por *narrativas*; outros usam menos palavras e mais símbolos específicos da matemática e, portanto, são designados por *simbólicos* (Healy & Hoyles, 2000).

4.3.6. Argumentos entre o simbólico e o formal

Em determinados argumentos, nomeadamente no decurso de um cálculo, alguns dos símbolos utilizados podem ser representações e outros podem ser usados sem representar coisa alguma. Este tipo de argumentos ocorre frequentemente na manipulação de expressões algébricas, isto é, quando as expressões algébricas são manipuladas para mostrar a equivalência a uma dada expressão. Os símbolos no início e final dessas expressões são representações, mas as expressões intermediárias podem incluir termos que não são representacionais.

4.3.7. Argumentos formais

Neste tipo de argumentos, os símbolos presentes são não representacionais. Os símbolos não representam nada em concreto e a regra é considerada puramente com a sintaxe do encadeamento e não do seu significado, no entanto, todas as afirmações e regras lógicas usadas são especificadas. Algumas palavras significantes são incluídas, mas não consideradas parte do argumento, servindo apelas para guiar o leitor (Reid & Knipping, 2010).

4.4. A funcionalidade da argumentação em matemática

A argumentação serve-se da linguagem natural como ferramenta de comunicação entre aquele que argumenta e o seu interlocutor, sendo, um processo de transmissão de conteúdos, ideias e de valores epistémicos[1]. Nesse sentido, no processo de construção de uma argumentação, os conteúdos mudam, as ideias vão tomando forma e há uma evolução dos valores epistémicos. Como refere Pedemonte (2002), numa argumentação há, um objetivo, o que define a sua orientação, e, consequentemente, a sua finalidade.

4.4.1. Argumentação em matemática: procura da verdade e justificação racional

A finalidade da argumentação em matemática não é apenas o resultado expresso das intenções do locutor, uma vez que se corre o risco de reduzir a argumentação em matemática ao campo da retórica preconizada por Aristóteles. De facto, em matemática argumenta-se quando se pretende convencer alguém (o próprio ou um interlocutor) da verdade de um enunciado, sendo, portanto, a argumentação um discurso construído com a finalidade de procurar a “verdade” (Pedemonte, 2002). Assim, ao longo do discurso argumentativo, as diversas razões

[1] O valor epistémico é o grau de certeza ou de convicção associado a uma proposição (Pedemonte, 2002)

expressas, quer pelo locutor quer pelo interlocutor, permitem a aceitação ou a refutação das diferentes afirmações presentes no discurso, o que realça o caráter justificativo dos argumentos. A argumentação caracteriza-se, portanto, por ter uma função justificativa, sendo referida por Toulmin (2008) como a primeira função na argumentação. Toulmin (idem) observa que a justificação é a função primária dos argumentos, e que as outras utilizações, ou seja as outras funções que se pretendem com os argumentos, são de certa forma secundárias e parasitas perante o seu papel justificativo que é primordial. Contudo, e uma vez que a racionalidade é considerada a característica fundamental de toda a argumentação, o caráter justificativo presente nos argumentos é expresso sob a forma de um raciocínio (Pedemonte, 2002). De facto, raciocina-se quando se procura mostrar a conformidade e a coerência entre as convicções do locutor e as opções a que elas conduzem, quando se apresentam as razões que justificam as afirmações ou posições, ou quando o próprio se tenta convencer a si mesmo ou aos outros do valor que sustenta a razoabilidade dessas mesmas posições (Boavida, 2005b). Das afirmações agora expostas decorre a ideia de que o discurso argumentativo pode ter uma dupla finalidade: a de convencer e a de persuadir (Pedemonte, 2002; Boavida, 2005b). Estas duas finalidades apresentam características bem distintas, uma vez que convencer visa modificar opiniões e crenças fazendo apelo à razão, tendo em conta o outro (o próprio ou o interlocutor); ao passo que a persuasão visa obter a adesão sem fazer apelo necessariamente à razão e sem ter em linha de conta o outro (Pedemonte, 2002). Nesse sentido, convencer implica persuadir e não o contrário, uma vez que a persuasão não é suficiente, nem mesmo legítima, no sentido de validar os raciocínios efetuados. Para Pedemonte (2002), uma argumentação é persuasiva no sentido em que se dirige a um auditório particular, seja um indivíduo, seja um pequeno grupo, com o intuito de o conduzir a acreditar, a fazer, ou a querer qualquer coisa, por todos os meios possíveis (retórica aristotélica). O próprio Perelman (1999) enuncia que não há argumentação que não tenha efeitos retóricos, contudo, quem argumenta pretende conduzir o interlocutor a reconhecer a verdade de um enunciado, ou seja, pretende convencer racionalmente o interlocutor, facto este que realça o caráter justificativo da argumentação. Argumentar em matemática é, portanto, convencer, isto é modificar a opinião dos outros com recurso à racionalidade. Desta forma, a argumentação em matemática é uma justificação racional.

4.4.2. Argumentação em matemática: auditório universal

Ao aceitar-se o caráter racional da argumentação e uma vez que argumentar pressupõe diálogo, discussão e escuta, com a finalidade de se obter daquele(s) a quem se dirige a adesão a determinadas posições, assume-se que a argumentação é necessariamente pessoal e situada (Boavida, 2005b). Nesse sentido, a noção de auditório, proposta por Perelman, é de extrema relevância, visto que sem auditório não é possível existir argumentação. O auditório determina, portanto, os critérios de aceitabilidade dos argumentos proferidos, desenvolvendo-se, portanto, a argumentação em função desse auditório. Em matemática, o interlocutor, ou seja o auditório, é a comunidade matemática, a turma ou aquele que argumenta (Pedemonte, 2002).

Como observado anteriormente, Perelman (1993) define auditório como o conjunto daqueles que o orador quer influenciar pela sua argumentação. Nesse sentido, esse conjunto pode ser singular (constituído apenas por um indivíduo que delibera apenas consigo próprio), pode ser constituído por alguém com quem se estabelece um diálogo ou por toda a humanidade, em que quem argumenta apela diretamente à razão. Neste último caso, Perelman (1993) designa-o por auditório universal. Contudo, Perelman (1993) observa que existem auditórios particulares, alguns altamente qualificados, como acontece, por exemplo, com os membros de uma academia, em que os membros são competentes e especializados, podendo assim ser considerados auditórios universais, uma vez que aspiram à universalidade. O auditório universal é, em primeiro lugar, uma construção ideal elaborada em função de um discurso que aspira ao consenso de todos os homens racionais sobre o que, nesse discurso, é dito (Grácio, 1993). Nesse sentido, a especificidade de um auditório universal é a de «(...) servir de critério, num dado momento, ao que possa ser considerado, por todos os homens sensatos como racional e que, como tal, suscite, sem controvérsia, a adesão e o assentimento de todos os homens de razão.» (Grácio, 1993, p. 92).

Sendo que em matemática, o auditório é a comunidade matemática e em contexto de sala de aula, uma turma ou quem argumenta, Pedemonte (2002, p. 31) refere que se está perante interlocutores universais e não particulares, uma vez que o locutor se dirige «(...) a um auditório racional que pode estar em acordo ou desacordo com aquele que argumenta, mas em todo o caso está apto a responder.». Desta forma, o auditório é determinante em toda a atividade argumentativa e é a natureza do auditório, ao qual se submetem os argumentos, que determina o caráter (aspeto) e o alcance das argumentações. Significa, assim, que o valor e a qualidade de uma argumentação depende também da qualidade do auditório que se consegue captar através do discurso (Boavida, 2005b). Nesse sentido, e tendo em conta as circunstâncias, há a necessidade de o orador se adaptar ao auditório, sendo o contexto matemático adequado para a utilização da regra de justiça preconizada por Perelman (Pedemonte, 2002).

4.4.3. O campo da argumentação em matemática

Num discurso argumentativo são múltiplas as afirmações que podem ser apresentadas, uma vez que são diferentes quer as razões que suscitaram a produção dessas afirmações, quer os caminhos utilizados no desenvolvimento dos próprios raciocínios justificativos (Pedemonte, 2002). Nesse sentido, a argumentação é modelada pelas características do contexto em que se exerce e onde se pretende fazer valer (Carrilho, 1992); ou seja, perante o caráter multiforme da argumentação, isto é, perante a pluralidade de domínios da argumentação é necessário ter em atenção o campo de argumentação, noção essa introduzida por Toulmin, com o objetivo de realçar o contexto particular de cada argumentação (Pedemonte, 2002). De facto, a validade de uma argumentação depende do domínio onde se desenvolve, pois dele depende, em grande parte, a pertinência da própria argumentação (Boavida, 2005b).

Ao introduzir a noção de campo de argumentação, Toulmin questionava-se, por um lado, sobre o que é que na forma e no valor dos argumentos é independente do campo, ou, pelo contrário, depende dele. Por outro lado, sobre o que é que varia, ou não, em função do campo, nos modos de avaliação dos argumentos, nos critérios subjacentes a esta avaliação e na forma como qualificamos as conclusões. Para Toulmin, não se tratava de saber se os critérios de avaliação dos argumentos eram comparáveis do ponto de vista do rigor, mas antes em que medida é que existiam critérios comuns que podiam servir para avaliar argumentos de campos diferentes (Boavida, 2005b). Evidentemente que a matemática não se constitui num campo único, pois são variados os diferentes campos da matemática que permitem caracterizar a argumentação em matemática. Por exemplo, uma argumentação em geometria não pertence ao mesmo campo que uma argumentação em álgebra. Contudo, de acordo com Pedemonte (2002), não se pode concluir que os argumentos pertencentes a diferentes campos não sejam comparáveis. Sob certos aspetos os argumentos podem ter características dependentes do seu campo, no entanto, podem ter outros aspetos independentes. Por exemplo, a avaliação dos argumentos é dependente do campo, mesmo se os termos de avaliação não variam em função do campo. Ou seja, o significado dos termos possível ou impossível é independente do campo, mas os critérios de possibilidade ou impossibilidade são dependentes. O próprio Toulmin (2008) exemplifica este facto referindo, como exemplos, a impossibilidade de fumar num determinado compartimento de uma carruagem de um comboio destinado a não fumadores e a impossibilidade da existência da raiz quadrada racional de 2, que, embora sejam duas impossibilidades, utilizam critérios diferentes nos dois campos para julgar essas mesmas impossibilidades. Nesse sentido, e de acordo com Pedemonte (2002), a argumentação em matemática teórica e a argumentação fornecida na construção de uma conjetura podem ter a mesma força para aquele que argumenta, mesmo se os critérios para avaliar não são os mesmos nos dois casos. Desta forma, Toulmin distingue duas componentes que regem esse funcionamento: a força e os critérios. Enquanto que a força marca o envolvimento do locutor naquilo que enuncia, ou seja, a força de uma conclusão é idêntica seja qual for o campo visado; a componente criterial depende do domínio considerado, ou seja, os critérios de possibilidade ou de impossibilidade e as normas através das quais julgamos estas modalidades não são invariantes, dependem, antes, do campo de argumentação em que nos situarmos (Boavida, 2005b). Como tal, Boavida (2005b) refere que a noção de campo de argumentação permite realçar que não é indiferente debruçar-se sobre os processos de argumentação matemática, científica, jurídica ou literária, visto que, tendo em consideração as ideias de Toulmim, se reconhece que a validade de uma argumentação é uma noção interna e não externa ao campo. Nesse sentido, a interrogação sobre a validade, a necessidade, o rigor ou a impossibilidade de certos argumentos ou conclusões, leva a colocar questões que se inscrevem nos limites de um dado campo; daí a pertinência de ver e descrever a argumentação própria deste campo tal como ela é, reconhecendo o seu modo de funcionamento (Boavida, 2005b).

Do descrito sobressai que a argumentação se pode desenvolver em diferentes domínios, e desta forma o que é apropriado num domínio pode não ser num outro. Daqui decorre que a argumentação só será possível se a situarmos num determinado campo, onde os saberes e as normas vigentes permitam apoiar e avaliar os passos de um raciocínio, ou seja, onde «(...) se enraízam as justificações que sustentam o discurso argumentativo.» (Boavida, 2005b, p. 66). Para esta investigadora (idem), a argumentação em matemática, embora possa partilhar aspetos com argumentações desenvolvidas noutras áreas de conhecimento, tem particularidades próprias associadas às especificidades desta área do conhecimento, nomeadamente, ao nível dos processos de produção do saber matemático. Daí o interesse de Toulmin em analisar a argumentação através de um modelo que fosse útil em todos os campos e que permitisse caracterizar a estrutura de toda argumentação e de explicitar os critérios da argumentação (Pedemonte, 2002).

4.5. A estrutura da argumentação em matemática

Embora a argumentação esteja intimamente ligada ao raciocínio e em consequência à ciência que se ocupa deste – a lógica –a argumentação não se move apenas no âmbito da lógica formal, sendo também uma manifestação da lógica natural (Grize, 1996). Apesar de Toulmin (2008) ter considerado que a argumentação não rejeita a lógica, mas é parte integrante da mesma, Grize (1996) considera que a lógica natural e a lógica formal estão completamente separadas, mesmo que apresentando em certos aspetos pontos de vista similares aos de Toulmin (Pedemonte, 2000). Para Grize (1996), a lógica formal ocupa-se da relação entre conceitos, ao passo que a lógica natural coloca em evidência a construção dos conceitos e as suas ligações. Nesse sentido, Grize opõe-se a restringir a lógica à lógica matemática, portanto, de acordo com Breton e Gauthier (2000), Grize contesta a pretensão de que a lógica matemática dita o saber.

Tendo em conta estas perspetivas, percebe-se que a argumentação em matemática não está necessariamente ligada à lógica formal, uma vez que a maior parte das argumentações em matemática recorre à linguagem natural. Assim, a lógica natural é extremamente vasta para descrever a argumentação em matemática, visto que a lógica natural surge como a lógica do discurso, um discurso que pode ser argumentativo, retórico, descritivo, explicativo, etc. (Pedemonte, 2002). Nesse sentido, e uma vez que o modelo de argumentação proposto por Toulmin não é um modelo lógico-matemático e permite analisar a estrutura funcional de argumentos racionais em geral (Knipping, 2008), é possível, recorrendo a este modelo, caracterizar a estrutura da argumentação em matemática, caracterização essa que pode ser realizada a dois níveis: a um nível local e a um nível global.

4.5.1. Análise local da estrutura de uma argumentação

O modelo de argumentação proposto por Toulmin permite proceder a uma análise local dos argumentos presentes numa argumentação em matemática. De facto, o modelo de análise da microestrutura de um argumento é uma das ideias de Toulmin mais usada e referida no âmbito da educação matemática, nomeadamente em trabalhos focados na argumentação e na prova matemática ou nas relações entre argumentação e a prova (Krummheuer, 1998; Forman et al., 1998; Balacheff, 1999; Duval, 1999; Pedemonte, 2002; Boavida, 2005b; Knipping, 2008).

Toulmin (2008) descreve a estrutura básica de argumentos racionais como o par: dado/ conclusão. A passagem do(s) dado(s) à conclusão pode ser colocada em causa, sendo, com frequência, explicitamente justificada através de uma garantia. Embora, por vezes, a distinção entre dados e garantias não seja clara, as suas funções são distintas. Enquanto a primeira transmite um conjunto de informações, a segunda autoriza o passo de inferência. Esta distinção entre dados, garantias e conclusão, permite a Toulmin fornecer os elementos do esqueleto de um padrão que permite analisar argumentos, em particular argumentos matemáticos. De facto, esta estrutura ternária de um argumento, também foi considerada por Aristóteles nos seus silogismos, o primeiro a fornecer uma estrutura da argumentação composta por três termos: duas premissas e uma conclusão.

No entanto, o modelo de argumentação proposto por Toulmin, acima de tudo, tem o objetivo de captar a "forma lógica" de um discurso racional (Pedemonte, 2002). Nesse sentido, este esquema elementar pode não ser suficiente para analisar determinados discursos argumentativos. Toulmin acrescenta, assim, três etapas auxiliares de análise do discurso: os qualificadores modais, as condições de refutação e o fundamento. Em particular, na argumentação em matemática estas etapas auxiliares surgem, respetivamente, como indicadores de força do argumento, como condições de exceção e como suporte à permissão de inferência, a garantia, tornando, assim, mais complexo o esquema proposto por Toulmin.

Embora este modelo proposto por Toulmin tenha sido concebido para analisar funções de elocuções particulares que se encontram ao nível das frases individuais, na sua obra, Toulmin, não faz qualquer referência à utilização deste modelo em situações educativas ou em outras que envolvam a produção de discursos coletivos (Boavida, 2005b). Contudo, Krummheuer (1995), baseando-se no modelo de análise da microestrutura de um argumento proposto por Toulmin, foca a sua investigação no caso específico da argumentação em matemática, ampliando a noção de argumentação do individual para o coletivo. O trabalho desenvolvido por Krummheuer permite destacar que a utilização do modelo de Toulmin requer uma análise muito fina do discurso e, eventualmente, de elementos não discursivos. Todavia, este investigador refere as potencialidades deste modelo na identificação da natureza dos contributos apresentados pelos alunos numa situação de argumentação coletiva, um processo, no entanto, mais complexo.

O modelo elaborado e proposto por Toulmin permite a análise da microestrutura de um argumento. No entanto, Toulmin (2008) compara um argumento a um organismo que possui simultaneamente um estrutura grosseira, anatómica, e uma estrutura mais fina, por assim dizer mais fisiológica. De facto, o objetivo de Toulmin foi explorar, identificar e caracterizar a estrutura fina, contudo Knipping (2008) observa que ao tomar-se em consideração as argumentações presentes em contexto de sala de aula, ambas as formas podem ser reconstruídas. Para Toulmin, as unidades anatómicas representam as fases gerais de um argumento, o que corresponde, em matemática, à fase inicial da leitura do problema, à fase da formulação, análise e eventual eliminação de soluções potenciais e à fase da apresentação final de uma conclusão. O modelo de Toulmin é, assim, útil para reconstruir um passo de argumento, permitindo selecionar argumentos distintos, nomeadamente em processos de prova. Um tal modelo de argumentação permite, portanto, fazer um corte da argumentação nos seus elementos e ao mesmo tempo permite ver os seus encadeamentos.

4.5.2. Análise global da estrutura de uma argumentação

Uma vez que para Toulmin (2008) um argumento é como um organismo, que possui tanto uma estrutura anatómica como uma estrutura fisiológica, o seu objetivo foi o de apenas explorar a estrutura mais fina da argumentação, ou seja, proceder a uma análise local de argumentos, visto que uma análise desta estrutura permitia já compreender a natureza dos processos argumentativos.

Embora tenha usado o modelo de Toulmin para analisar passos argumentativos individuais, Knipping (2008) refere que este modelo não se revela útil para analisar, em particular, a estrutura global dos processos de prova que ocorrem em contexto de sala de aula, dado que a complexidade das estruturas argumentativas aí existentes são caracterizadas pela sobreposição de argumentos e pelo desenvolvimento, em paralelo, de diferentes justificações para a conclusão desejada. Assim sendo, Knipping (2008) procurou estender o modelo de Toulmin, providenciando um modelo que permitisse também descrever a estrutura mais anatómica, que designou por *estrutura global de uma argumentação*. Com recurso ao modelo proposto por Toulmin, o método proposto por Knipping consiste em analisar discursos de prova em sala de aula identificando os passos individuais dos diferentes argumentos desde o(s) dado(s) à conclusão. Uma vez que as conclusões de certos passos são reutilizadas como dados no passo seguinte, estes diferentes passos formam correntes de argumentação (CA), contudo, estas correntes não podem ser consideradas passos lineares. De facto, as correntes de argumentação estão interconectadas em formas mais complexas, formando, em conjunto, uma estrutura de argumentação. Este método, proposto por Knipping, que permite reconstruir argumentos de uma forma global é baseado numa análise da estrutura mais fina capturada nos passos individuais da argumentação. Desta forma, Knipping (2008) e Reid e Knipping (2010) propõem quatro diferentes tipos de estrutura de argumentação: *estrutura-fonte*, *estrutura-reservatório*, *estrutura-espiral* e *estrutura-recolha* (tabela 4.3.).

Num discurso com uma estrutura-fonte, os argumentos e as ideias surgem a partir de variadas origens, tal como água que provém de muitas nascentes (Reid & Knipping, 2010). Uma estrutura desta natureza tem as seguintes características: as correntes de argumentação não estão ligadas à estrutura principal; existem argumentos paralelos para a mesma conclusão; os passos de argumentação têm mais do que um dado, cada qual sendo conclusão de uma corrente de argumentação; apresentam refutações. A estrutura-fonte é também caracterizada por, frequentemente, existirem passos de argumentação que têm explicitamente falta de garantias e dados, embora isto possa acontecer noutro tipo de estruturas de argumentação. Neste tipo de estrutura é possível ainda observar um efeito de funil no discurso argumentativo, isto é, no final da argumentação é desenvolvida unicamente uma cadeia de afirmações, em contraste com o início em que vários argumentos paralelos são considerados.

Numa estrutura-reservatório, as argumentações fluem para conclusões-alvo intermédias, conclusões essas que estruturam toda a argumentação em partes que são distintas e se autocontêm. Para Knipping (2008), estas afirmações que marcam a transição da primeira para a segunda parte do discurso são como reservatórios que detêm e purificam a água antes de permitir fluir para o próximo estádio. De acordo com Reid e Knipping (2010), a maioria das características listadas como características da estrutura-fonte não aparecem na estrutura-reservatório, com exceção dos passos de argumentação que têm mais do que um dado, sendo cada um destes conclusão de uma corrente de argumentação. Neste tipo de estrutura de argumentação, ocorrem passos de argumentação com falta explícita de garantias e dados, mas em menor frequência do que na estrutura-fonte. A característica mais importante da estrutura-reservatório, que a distingue a partir de uma simples cadeia de argumentos dedutivos, é o facto do raciocínio se mover para trás na estrutura lógica e depois, de novo, para a frente. As deduções iniciais levam a conclusões desejadas que depois pedem mais suporte de dados. Esta necessidade é feita, de forma explícita, pela identificação dos possíveis dados que, se puderem ser estabelecidos, podem levar às conclusões desejadas. Uma vez estes dados confirmados, mais deduções levam confiadamente à conclusão desejada. De acordo com Reid e Knipping (2010), isto caracteriza uma autocontida argumentação-reservatório que flui tanto para a frente, como para trás, em direção à conclusão objetivo.

No que diz respeito à estrutura-espiral, esta partilha algumas características da estrutura-fonte. Tal como na estrutura-fonte, as correntes de argumentação não estão conectadas à estrutura principal, existem argumentos paralelos para a mesma conclusão e os passos de argumentação têm mais de um dado, sendo cada um deles conclusão de uma cadeia de argumentação. É ainda possível detetar a presença de refutações na estrutura de argumentação. Contudo, a maior distinção entre a estrutura-espiral e a estrutura-fonte é a localização dos argumentos paralelos. Recordando que na estrutura-fonte os argumentos paralelos ocorrem no início do processo, e depois há um afunilar numa simples cadeia levando à conclusão final; na estrutura-espiral a conclusão final é repetidamente o objetivo de cadeias de argumentação paralelas. A conclusão é, portanto, provada uma vez e outra vez, de diferentes formas (Reid & Knipping, 2010).

Na estrutura-recolha, a argumentação inclui a recolha de uma grande quantidade de dados para suportar várias conclusões relacionadas. Mais do que serem apresentados inicialmente, os novos dados são introduzidos como necessidade e as conclusões não são especificadas com antecedência. Neste tipo de estrutura, à medida que o discurso argumentativo evolui, vai-se recolhendo a informação que se apresente como necessária. A estrutura-recolha difere da estrutura-fonte e da estrutura-espiral, pois não contém argumentos paralelos para uma única conclusão e as cadeias de argumentação estão conectadas com a estrutura principal. Contudo, tal como na estrutura-fonte existem muitos passos de argumentação que apresentam falta explícita de garantias ou dados. No que diz respeito à estrutura-reservatório a diferença consiste no facto de incluir refutações e do raciocínio presente não se mover para trás e depois, de novo, para a frente na estrutura lógica do discurso.

Tabela 4.3. Tipo de estruturas e respetivas características

Tipo de estrutura	*Características*
Estrutura-fonte	– as correntes de argumentação não estão ligadas à estrutura principal; – existem argumentos paralelos para a mesma conclusão; – os passos de argumentação têm mais do que um dado, cada qual sendo conclusão de uma corrente de argumentação; – apresentam refutações; – existem, com frequência, passos de argumentação que têm falta de garantias e dados; – no final da argumentação é desenvolvida unicamente uma cadeia de afirmações, designada por efeito funil.
Estrutura-reservatório	– os passos de argumentação têm mais do que um dado, cada qual sendo conclusão de uma corrente de argumentação; – existem, com alguma frequência, passos de argumentação que têm falta de garantias e dados; – o raciocínio move-se para trás na estrutura lógico e depois, de novo, para a frente, isto é, as deduções iniciais levam a conclusões desejadas que depois pedem mais suporte de dados.
Estrutura-espiral	– as correntes de argumentação não estão conectadas à estrutura principal; – existem argumentos paralelos para a mesma conclusão; – os passos de argumentação têm mais do que um dado, cada qual sendo conclusão de uma corrente de argumentação; – apresentam refutações; – no final da argumentação não é desenvolvida unicamente uma cadeia de afirmações, efeito funil, mas a conclusão final é obtida por diversas cadeias de argumentação.
Estrutura-recolha	– à medida que o discurso argumentativo evolui, vai-se recolhendo a informação que se apresente como necessária; – não contém argumentos paralelos para uma única conclusão; – as correntes de argumentação estão conectadas com a estrutura principal; – existem, com frequência, passos de argumentação que têm falta de garantias e dados; – apresentam refutações; – o raciocínio não se move para trás na estrutura lógico e depois, de novo, para a frente.

4.6. Alguns constrangimentos do pensamento de Toulmin na argumentação em matemática

Embora o pensamento de Toulmin e, em particular, o seu modelo de análise de microestrutura de um argumento seja reconhecido por diversos investigadores, do âmbito da educação matemática, e possa ser aplicado em questões relativas à argumentação em matemática, há limites que são apontados a determinados aspetos desse pensamento.

No modelo proposto por Toulmin para análise da microestrutura de um argumento não é aprofundada a estrutura linguística da sucessão de argumentos, aspeto esse considerado relevante, por Boero (1999), em argumentação matemática; por outro lado, Pedemonte (2002) observa que o modelo de Toulmin, embora permita representar os constituintes explícitos de uma argumentação, não permite representar aspetos implícitos envolvidos na argumentação que estão na base de um raciocínio e que podem ser observáveis a partir da resolução de um problema; por seu turno, Knipping (2008) refere que apenas usou o modelo de Toulmin para analisar passos argumentativos individuais. Na sua perspetiva, devido, em particular, à complexidade das estruturas argumentativas existentes, à sobreposição de argumentos e ao desenvolvimento, em paralelo, de diferentes justificações para uma determinada conclusão, o modelo de Toulmin não se revelou útil para analisar a estrutura global dos processos de prova, o que a levou a elaborar determinadas representações esquemáticas que permitissem proceder a uma análise da estrutura argumentativa global. Por fim há a referir o facto do modelo de análise de microestrutura de um argumento proposto por Toulmin refletir o estilo ocidental da argumentação, não sendo adequado para analisar determinados estilos tradicionais de comunicação em aulas de matemática, em particular em culturas orientais, nomeadamente no Japão (Sekiguchi, 2000), onde existem diferenças culturais na natureza da argumentação, tendo em consideração as diferentes abordagens à argumentação presentes na cultura ocidental. De facto, quando se discute a diversidade de abordagens sobre argumentação na educação matemática, todas as investigações apontadas são de trabalhos desenvolvidos em contextos de cultura ocidental. Sekiguchi e Miyazaki (2000) fornecem, assim, uma descrição do processo "hanashi-ai" como uma equivalência ao conceito de argumentação presente no ocidente. Baseando-se em Lakoff & Johnson (1980), para estes investigadores (idem), o modelo ocidental de Toulmin é sustentado numa metáfora de conflito e guerra, visto que toda a atividade argumentativa consiste em produzir conclusões, desafiá-las, voltar atrás fornecendo garantias e fundamentos que suportam as conclusões, criticar esses fundamentos, refutar algum criticismo, entre outros. Desta forma, os componentes presentes no modelo de Toulmin – dados, conclusões, garantias, fundamentos e refutações – funcionam como "armamentos" (Sekiguchi, 2002). Em contrate, "hanashi-ai" significa conversação e consulta mútua, não significando guerra, visto que as pessoas tentam evitar confrontações diretas, tentando colocar as suas opiniões de forma ambígua, o que permite retirar ou mudar facilmente de opinião quando os outros evidenciam oposição, uma vez que consideram que argumentar logicamente tem um caráter impessoal (Skiguchi & Miyazaki, 2000). Nesse sentido, os processos existentes em sala de aula onde ocorrem mudança de opinião são também designados de "hanashi-ai". Skiguchi (2002) observa que, em contexto de sala de aula, os alunos podem expressar oposição ou desacordo num determinando assunto, colocando em perigo a harmonia da turma, o que realça o importante papel do professor na gestão dessa situação. Em geral, o professor expressa respeito pelas ideias individuais dos alunos quer estas estejam certas ou erradas. O professor tenta, assim, usar o conflito entre as conclusões expressas pelos alunos como uma oportunidade para aprofundar o conhecimento destes sobre o assunto em questão, ou seja, o professor dirige o conflito não como um problema entre os alunos envolvidos, mas como um problema que permite o envolvimento de toda a turma. O conflito é, assim, partilhado entre todos os alunos da turma, encorajando todos a pensar no assunto. Toda a turma trabalha em conjunto para resolver o problema e a resolução obtida permite a recuperação da harmonia na comunidade de sala de aula. Sekiguchi (2002) refere ainda que os professores japoneses colocam, algumas vezes, problemas em aberto aos seus alunos. Encorajam os alunos a apresentar as suas ideias para resolver os problemas, pedindo-lhes que em "hanashi-ai" resolvam em pequenos grupos o problema proposto. Os alunos com frequência apresentam conjeturas, ideias e procedimentos errados produzindo diferentes soluções. O professor encoraja-os a comparar, entre si, as suas ideias e soluções. Nessas ocasiões podem surgir contraexemplos e contra-argumentos. O professor usa intencionalmente estas oportunidades para estimular o raciocínio dos alunos. A tradicional disciplina japonesa, influenciada pelo Budismo, toma ênfase na reflexão dos seus próprios erros e em apreciar a contribuição dos outros o que encoraja a cooperação entre os alunos. Embora o processo "hanashi-ai" possa, eventualmente, permitir concluir qual das soluções é a correta, a mais eficiente e elegante, a competição entre os alunos é geralmente desencorajada. Portanto, em princípio, em "hanashi-ai" não há vencedor nem vencido ao contrário do estilo de argumentação presente no ocidente (Sekiguchi, 2002).

4.7. A argumentação matemática em sala de aula

Apesar do interesse pelo valor da argumentação, em contexto matemático, ser amplamente reconhecido pela educação matemática, confirmado pela existência de vários estudos de investigação sobre esta temática (Krummheuer, 1995; Yackel & Cobb, 1996; Duval, 1999; Balacheff, 1999; Boero, 1999; Wood, 1999; Douek, 2002; Pedemonte, 2002; Boavida, Knipping, 2008), e pelas referências precisas nas orientações curriculares, tanto a nível nacional como internacional (Programa de Matemática do Ensino Básico – Ministério da Educação – e Princípios e Normas para a Matemática Escolar – NCTM), as atividades argumentativas em contexto de sala de aula, nos diferentes níveis de ensino, são, por vezes, pouco expressivas (Boavida, 2005a).

Desenvolver e discutir argumentos matemáticos, implica criar condições para que os alunos aprendam a raciocinar matematicamente. Contudo, raciocinar remete não só para calcular, mas também para usar a razão para compreender, examinar, julgar, avaliar, justificar e concluir (Boavida, 2008). Em matemática, não se raciocina apenas quando se prova algo, mas também quando se apresentam razões que justificam afirmações ou determinadas posições sobre a razoabilidade dessas mesmas justificações. Nessa medida, o raciocínio matemático é uma atividade partilhada (Yakel & Hanna, 2003), sendo a explicação, a justificação e a argumentação aspetos-chave dessa atividade, quando, em sala de aula, se valoriza o raciocínio (Boavida 2008).

Há então a necessidade de desenvolver hábitos de pensamento dos alunos, associado ao "porquê das coisas", remetendo assim para a importância de construir e manter uma cultura de sala de aula com determinadas características (Boavida, 2008). Aulas em que os alunos são encorajados a apresentar as suas ideias e em que todos contribuem, proporcionam ambientes ricos e estimulantes para a aprendizagem do raciocínio matemático (NCTM, 2007). Desta forma, é importante, por um lado, que as tarefas propostas envolvam os alunos em atividades de formulação, teste e prova de conjeturas. Para isso, há a necessidade dos alunos «(...) se sentirem confortáveis e seguros para assumir riscos e partilhar ideias emergentes e titubeantes.» (Boavida, 2008, p. 1). Por outro lado, também é importante que os alunos aprendam a explicar e a defender os seus modos de pensar e pontos de vista através da argumentação, analisando criticamente contribuições dos colegas e que cheguem a consensos fundamentados e matematicamente relevantes sobre o significado de ideias matemáticas (Boavida, 2008). Nesse sentido, além da capacidade de escuta, respeito, confiança e ajuda mútua são requeridas normas específicas à participação em discussões matemáticas, as referidas normas sociomatemáticas, (Yackel & Cobb, 1996; Krummheuer, 1998), de forma a que as justificações ou explicações sejam matematicamente aceitáveis.

4.7.1. A pertinência de uma cultura de argumentação

Embora seja reconhecida, pelos docentes, a importância de promover nos alunos capacidades como argumentar, explicar e justificar os raciocínios, constata-se que os jovens portugueses revelam «(...) uma fraca capacidade de argumentação, materializada nas justificações que apresentam (…)» (Ramalho, 2002, p. 52). De acordo com o estudo PISA 2000, os alunos «(…) generalizam situações sem proceder à sua verificação; recorrem à informação no quotidiano para fundamentar as suas respostas, sem que esta informação seja pertinente para o problema em causa; fundamentam as situações claramente excluídas pelas condições enunciadas.» (Ramalho, 2002, p. 52). Tendo em conta estes resultados e uma vez que ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da matemática, há necessidade de envolver os alunos em situações em que sejam obrigados a avaliar e justificar os seus raciocínios, bem como a analisar crítica e fundamentadamente as opiniões produzidas pelos seus colegas, de forma a que as diferentes justificações apresentadas sejam coerentes e matematicamente válidas. Ou seja, há necessidade de desenvolver atividades de argumentação, de modo a que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas e afirmações, mas que assumam a atitude de as tentar defender e justificar.

A argumentação surge como um contributo para a aprendizagem da matemática, uma vez que uma cultura de sala de aula onde se promove a argumentação suscita a participação dos alunos na sua aprendizagem (Krummheuer, 1998). Boavida (2005b) sugere assim a criação, em sala de aula, de uma *cultura de argumentação*, expressão essa também utilizada por Douek (2000), que se materializa na constituição e manutenção de uma comunidade de discurso matemático, tal como preconizada por Sherin (2002), na qual os alunos possam expressar não só as suas ideias, mas também interpretar e compreender as ideias que lhe são apresentadas, participando de forma construtiva em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos (ME, 2007). A criação de uma comunidade deste género pode fomentar a existência de contextos de argumentação, uma vez que os alunos defendem e argumentam sobre as ideias matemáticas. Boavida (2005b, pp. 94-95) sublinha

> (...) que o discurso desejável numa aula com uma cultura de argumentação envolve a apresentação, pelos alunos, de argumentos em defesa das suas ideias, a análise crítica de contribuições dos colegas, discussão da legitimidade matemática de cadeias de raciocínio, a expressão de desacordos quando existem e sua resolução, a fundamentação de posições com argumentos de caráter matemático, a avaliação de se é, ou não apropriado usar um determinado raciocínio na resolução de um problema a formulação de conjeturas e avaliação da sua plausibilidade e/ou validade destas conjeturas.

4.7.2. Criando contextos de argumentação em sala de aula

A aprendizagem matemática exige tanto compreensão, como capacidade de aplicar procedimentos, conceitos e processos, com vista a usar o conhecimento de um modo flexível, aplicando-o de forma apropriada a cada situação (NCTM, 2007). Assim, no ensino da matemática, não só estão em causa os conteúdos a lecionar, mas também os processos matemáticos que os alunos deverão aprender de modo a adquirirem e a utilizarem os conhecimentos sobre esses mesmos conteúdos.

O atual programa do Ensino Básico, além de proceder a uma reorganização dos temas matemáticos a lecionar, dá especial destaque aos processos matemáticos. Denominando-os por capacidades transversais – a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática – surgem como atividades fundamentais para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos. Ao serem transversais, estas capacidades percorrem todas as áreas temáticas, o que permite o seu desenvolvimento em diferentes conteúdos (NCTM, 2007). Este documento remete ainda, nas orientações metodológicas gerais, para a importância do aluno usufruir de diferentes tipos de experiências matemáticas, apontando, assim, para a realização de diferentes tipos de tarefas (ME, 2007). As tarefas surgem, deste modo, como veículos potenciadores do desenvolvimento das capacidades matemáticas e, naturalmente, dos próprios conteúdos.

Com a criação e a aplicação de diferentes tipos de tarefas, pretende-se criar na aula de matemática diferentes contextos e, portanto, condições favoráveis ao envolvimento dos alunos em experiências de aprendizagem que deem ênfase não só à resolução de problemas, mas também à explicação, fundamentação e comunicação de raciocínios, ou seja, pretende-se criar contextos onde se dá especial atenção ao pensamento e ao raciocínio matemáticos desenvolvido pelos alunos (Wood, 1999). No novo programa do Ensino Básico, o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e a promoção do raciocínio e da comunicação matemáticos, além de constituírem objetivos de aprendizagem centrais, constituem importantes orientações metodológicas para estruturar as atividades em sala de aula (ME, 2007). Nessa medida estão em causa, entre outras, a implementação de tarefas que proporcionem a análise e a reflexão dos raciocínios efetuados, tanto pelo próprio aluno como pelos colegas, o que obriga o professor a «(...) dar atenção aos raciocínios dos alunos, valorizando-os, procurando que eles os explicitem com clareza, que analisem e reajam aos raciocínios dos colegas» (ME, 2007, p. 9). Ao raciocinar matematicamente, usando conceitos, representações e procedimentos matemáticos, os alunos estão a desenvolver diferentes capacidades, nomeadamente as relacionadas com o desenvolvimento e discussão de argumentos matemáticos.

O raciocínio matemático, por um lado, envolve a construção de cadeias argumentativas que podem requerer apenas a justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa, ou a argumentações mais complexas com recurso à linguagem dos números, da álgebra e da geometria. Por outro lado, o raciocínio matemático emerge da discussão de ideias, processos e resultados matemáticos em contexto de comunicação escrita/oral, com recurso ou não à linguagem simbólica própria da matemática. Desta forma, o valor da argumentação, nas aulas de matemática, surge não só associada à ideia de explicação e justificação – convencer o outro – mas também relacionada com a própria discussão e avaliação das diferentes ideias expressas pelos alunos, mediante a realização de uma determinada tarefa, o que proporciona a aprendizagem do raciocínio matemático em ambientes ricos e estimulantes.

A partir do descrito, observa-se que o desenvolvimento da argumentação, em aula de matemática, é um processo complexo. Não só exige uma escolha e seleção cuidada da tarefa a propor, como condiciona a criação de um ambiente propício à sua implementação, tendo por objetivo a promoção de um espaço de partilha e discussão de ideias, onde o interesse central é o pensamento e o raciocínio matemático dos alunos.

Desenvolvendo uma comunidade de discurso matemático

Como foi referido, tanto as orientações preconizadas nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), como as orientações metodológicas gerais presentes no Novo Programa do Ensino Básico (ME, 2007) apelam a que os alunos, em contexto de sala de aula, sejam envolvidos em diferentes ambientes de aprendizagem, onde lhes sejam proporcionadas tarefas que os incentivem a fazer e a falar sobre matemática. Promover este tipo de ambientes implica a consciencialização dos alunos da importância e da necessidade de, na resolução das diferentes tarefas propostas, não só explicarem as suas próprias estratégias de resolução, mas também ouvirem e refletirem sobre as estratégias apresentadas pelos colegas (Forman, 2001). Para Sherin (2002) há, então, a necessidade de encontrar um equilíbrio entre um ambiente de sala de aula que esteja aberto às ideias dos alunos e que, ao mesmo tempo, seja um espaço de aprendizagem de conteúdo matemático específico. Esta investigadora (idem) sugere, assim, a criação de uma *comunidade de discurso* na sala de aula de matemática, que denomina por *comunidade de discurso matemático*.

Neste tipo de comunidade, onde o objetivo é facilitar as discussões em sala de aula, pretende-se que as ideias dos alunos estejam no centro de toda a atividade e que a matemática presente seja discutida de uma forma profunda e significativa. Deste modo, numa comunidade de discurso matemático estão em causa, por um lado, a forma como alunos e professores participam na discussão da aula, com questões, respostas e comentários, com vista a um consenso, o que é designado por *processo do discurso matemático*; por outro, o propósito matemático dessas mesmas questões, respostas e comentários surgidas ao longo do discurso, o *conteúdo do discurso matemático* (Sherin, 2002).

Assim, numa comunidade de discurso matemático não só estão presentes as normas que regem o discurso, isto é, quem fala e quando fala, e as estratégias discursivas usadas para apoiar a aprendizagem, como, por exemplo, o caso do *redizer* (Sherin 2002), mas é esperado que os alunos tomem um papel ativo e central na aprendizagem, isto é, que formulem e expliquem as suas ideias, respondam às questões dos seus colegas e trabalhem sobre as ideias destes. Ou seja, pretende-se que os alunos defendam e argumentem sobre ideias matemáticas, construam raciocínios juntamente com os seus pares, trabalhando de modo a chegar a um consenso sobre o significado das ideias matemáticas em questão (Sherin 2002).

As tarefas na promoção de contextos de argumentação

As tarefas a implementar em sala de aula, em particular numa comunidade de discurso matemático, deverão ser cuidadosamente escolhidas e selecionadas, de forma a suscitarem momentos de partilha, discussão e reflexão. De acordo com Stein e Smith (2009) as tarefas matemáticas usadas em contexto de sala de aula influenciam a aprendizagem dos alunos. Ponte (2005) realça que essa aprendizagem resulta da atividade que os alunos realizam e da reflexão que efetuam sobre essa mesma atividade. Desta forma, ao estarem envolvidos numa determinada atividade, os alunos realizam uma tarefa (Ponte, 2005) e, portanto, a tarefa pode ser definida «(...) como um segmento da atividade de sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia particular» (Stein & Smith, 2009, p. 22). Nessa medida, as tarefas a selecionar poderão ser de diversos tipos: exercícios, problemas, atividades de exploração, tarefas de modelação, investigações e projetos. Nessa medida, a estratégia de ensino escolhida e posta em prática pelo professor, durante uma aula, poderá contemplar a articulação de diferentes tipos de tarefas (Ponte, 2005), isto é, uma tarefa pode envolver vários problemas relacionados, diferentes subtarefas, ou um trabalho mais prolongado, sobre um único problema complexo (Stein & Smith, 2009). Sendo o objetivo da aplicação de uma tarefa em sala de aula proporcionar o desenvolvimento de uma determinada ideia, é necessário tomar em atenção que tarefa será mais apropriada a essa situação. Por exemplo, nos exercícios e problemas é indicado o que é dado e o que é pedido, sendo por isso consideradas tarefas fechadas, o que não acontece com o outro tipo de tarefas, nomeadamente, as atividades de exploração, as investigações e os projetos, que são designados por tarefas abertas (Ponte 2005). Embora nos exercícios, os alunos disponham de um processo imediato para os resolver, sendo por isso tarefas que têm a finalidade de consolidar os conhecimentos adquiridos pelos alunos, isso não acontece nos problemas, que comportam sempre um grau de dificuldade apreciável.» (Ponte, 2005, pp. 3 – 4).

Além da estrutura da tarefa a implementar, será necessário ter em atenção o grau de desafio da tarefa que se pretende aplicar, ou seja, se se pretende que os alunos executem um procedimento memorizado, de maneira rotineira (designada por tarefa de baixo nível), ou se por outro lado se pretende que os alunos pensem conceptualmente e façam conexões com significado matemático (designada por tarefa de alto nível) (Stein & Smith, 2009). Com efeito, proporcionar diferentes tipos de tarefas aos alunos conduz não só ao desenvolvimento de ideias implícitas sobre a natureza da Matemática (Stein & Smith, 2009), mas proporciona diferentes ambientes de aprendizagem. Apesar de os exercícios e os problemas apresentarem o mesmo grau de estrutura, pois ambos são tarefas fechadas, o grau de desafio é diferente. No caso dos exercícios o grau de desafio é reduzido, enquanto que nos problemas esse desafio é elevado (Ponte, 2005). De igual modo, nas tarefas abertas também é possível encontrar graus de desafio diferente. Ponte (2005) refere que as tarefas de exploração são mais fáceis, uma vez que permitem aos alunos começar logo a trabalhar sem muito planeamento, o que não acontece com as tarefas de investigação que requerem dos alunos uma participação ativa desde a primeira fase do processo (a formulação das questões a resolver) (Ponte, 2005).

Além destas duas dimensões das tarefas – estrutura e desafio – há ainda que considerar outras duas dimensões essenciais para a sua implementação e criação: a duração e o contexto (Ponte, 2005). Enquanto que os exercícios exigem uma duração curta, o tempo dos projetos é mais longo. Já os problemas e as tarefas de exploração e investigação têm um tempo intermédio de duração (Ponte, 2005). No que diz respeito ao contexto, as tarefas são enquadradas num contexto da realidade ou são formuladas em termos puramente matemáticos.

Criar um contexto de argumentação em sala de aula exige, portanto, uma atenção especial ao nível da criação das tarefas e da respetiva aplicação. Uma vez que se pretende valorizar o raciocínio e as estratégias de resolução dos alunos, deverão ser implementadas tarefas de nível elevado. Contudo, a sua implementação, por vezes, não corresponde ao nível de desafio inicialmente definido pelo professor, isto é, «às vezes, tarefas apresentadas para estimular o pensamento dos alunos em níveis elevados de exigência cognitiva mudam drasticamente de natureza quando os alunos trabalham realmente sobre elas.» (Stein & Smith, 2009, p. 24). Isto significa que a natureza das tarefas pode mudar desde o momento em que o professor as idealiza até ao momento em que os alunos a realizam. Stein e Smith (2009) distinguem três fases através das quais passa uma tarefa e que, consequentemente, são vistas como influências importantes na aprendizagem dos alunos. A primeira fase refere-se à forma como as tarefas aparecem nos materiais curriculares. A segunda fase está relacionada com a forma como as tarefas são apresentadas e enunciadas pelo professor e a terceira fase, considerada a mais influente na aprendizagem dos alunos, refere-se ao modo como as tarefas são realizadas pelos próprios alunos. No entanto surgem, por vezes, algumas dificuldades na implementação das tarefas. Essas dificuldades podem estar relacionadas não só com a falta de estrutura de uma tarefa, mas também com a falta de experiência dos alunos na realização de tarefas abertas, o que os impede de perceberem o que tinham de fazer. (Stein e Smith, 2009). Contudo, não basta selecionar boas tarefas, é necessário tomar em atenção a forma de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula (Ponte, 2005). Nessa medida, a orquestração em sala de aula toma um papel de relevo. A orquestração em sala de aula é uma estratégia posta em prática pelo professor, sendo a par da criação das tarefas um outro elemento central da gestão curricular em Matemática (Ponte, 2005).

Orquestrar discussões na promoção de contextos de argumentação

Quando se utilizam tarefas que exigem aos alunos um nível elevado de exigência cognitiva, «(...) os professores são confrontados com as múltiplas formas com que os alunos podem interpretar uma determinada situação problemática e com os múltiplos caminhos que os alunos podem tomar para clarificar e corrigir as suas ideias» (Doerr, 2006, p. 5). O professor desempenha, assim, o papel de observar as diferentes interpretações realizadas pelos alunos no desenvolvimento das suas estratégias de soluções. Contudo, também terá de apoiar os alunos na correção das suas ideias, em determinadas dimensões da situação problemática em questão (Doerr, 2006). Ou seja, mais do que usar uma *orientação avaliativa*, em que o objetivo é identificar, avaliar e corrigir os erros dos alunos, os professores deverão ouvir as ideias dos seus alunos com o objetivo de aceder aos seus raciocínios, procurando informações através de respostas elaboradas por estes, pedindo demonstrações ou explicações, e dar uma *orientação interpretativa ou hermenêutica* (Doerr, 2006). O professor é, então, confrontado com a necessidade de não só dar sentido à multiplicidade de ideias desenvolvidas pelos alunos, mas também de decidir como usá-las ao longo da aula.

Numa aula, as discussões podem ocorrer entre pares de alunos, pequenos grupos, professor e aluno/alunos particulares ou com toda a turma (Boavida, 2005b). Isto implica que o conhecimento do professor inclua não só o conhecimento matemático, o objetivo da aprendizagem, mas também o conhecimento das diferentes formas de desenvolvimento do raciocínio dos alunos (Doerr, 2006). Ouvir com o propósito de entender, mais do que avaliar, e apoiar mais do que guiar os alunos numa determinada trajetória particular, permite ao professor conduzir e sustentar o desenvolvimento das múltiplas ideias dos alunos. Desta forma, pedir aos alunos que descrevam e expliquem os seus raciocínios não só contribui para o professor entender os raciocínios em causa, mas também permite criar situações em que os alunos possam rever, avaliar e corrigir os seus próprios raciocínios e, consequentemente, possam mudar a forma como raciocinam sobre um determinado problema. Há, portanto, uma mudança do papel avaliativo do professor, pois os alunos passam a ter um papel ativo na avaliação das diferentes ideias surgidas (Doerr, 2006). Ao deixar-se guiar pelos alunos através de um caminho ou trajetória conhecida e ao aceitar a multiplicidade e diversidade de ideias dos alunos, o professor terá de envolvê-los na avaliação, correção e clarificação das suas ideias, o que segundo Doerr (2006) é incrivelmente útil ao desenvolvimento de uma tarefa.

Ponte (2005) distingue duas estratégias básicas no ensino da Matemática: o *ensino direto* e o *ensino-aprendizagem exploratório*. Enquanto no ensino direto o professor é quem fornece a informação, apresenta exemplos e comenta situações, no ensino-aprendizagem exploratório o professor deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem. (Ponte, 2005). Contudo, nesta estratégia de ensino também poderão existir momentos de exposição e sistematização das aprendizagens conduzidos pelo professor, uma vez que o que marca o ensino-aprendizagem exploratório são as atividades de exploração, a forma de trabalho preponderante na sala de aula (Ponte, 2005). Nesta estratégia de ensino, em que num primeiro momento, os alunos são chamados a um forte envolvimento, existe um segundo momento, que tendo por base o trabalho previamente realizado, possibilita a reflexão e discussão, com toda a turma, permitindo a sistematização de conceitos, a formalização e o estabelecimento de conexões matemáticas. (Ponte, 2005). De facto, os momentos de discussão assumem neste tipo de estratégia de ensino um papel preponderante (Ponte, 2005), visto que os alunos têm hipótese de apresentar o trabalho desenvolvido, partilhar as suas conjeturas e conclusões, justificando-as. Cria-se então um espaço, onde os alunos podem questionar os diferentes trabalhos apresentados, podendo o professor aproveitar para que os alunos procurarem clarificar conceitos e procedimentos, avaliem o valor dos argumentos e estabeleçam conexões dentro e fora da matemática. Desta forma, os momentos de discussão partilhados pelos alunos surgem como oportunidades fundamentais não só para a negociação de significados matemáticos, mas também para a construção de novo conhecimento (Ponte, 2005). Ponte (2005) refere que os momentos de discussão envolvem dois processos fundamentais, o confronto e a defesa, que permitem não só aprofundar a atividade desenvolvida, mas também formular novos problemas e conjeturas, valorizar o processo de justificação e de prova, ou seja, o envolvimento em raciocínios matemáticos.

Em ambientes de discussão há, portanto, a necessidade de criar uma atmosfera de sala de aula, onde o respeito mútuo e confiança permita aos alunos sentirem-se confortáveis a criticar o trabalho dos seus colegas e em correrem o risco de exporem os seus próprios erros. Além disso, é importante que a escolha e a seleção de tarefas possibilite aos alunos tomarem diferentes posições e encontrarem diferentes soluções, sendo depois encorajados pelos professores a optarem por uma determinada posição, defendendo-a, e tentando convencer os outros da sua correção através de evidências matemáticas (Stein, 2001). A discussão constitui, assim, um aspeto da comunicação e pressupõe um maior equilíbrio de participação entre alunos e professor, por forma a que os alunos disponham de uma margem de intervenção que, de uma forma individual ou coletiva, possa influenciar o rumo dos acontecimentos. No entanto, cabe ao professor, sempre que necessário, a responsabilidade de ser moderador (Ponte, 2005; Boavida, 2005b). O papel moderador do professor é destacado por Lampert (2001) no seu trabalho, referindo que este inclui diversos recursos como: decidir a quem dar a palavra, incluindo aos alunos que não estão a requerer atenção; ensinar e apoiar alunos particulares, mas mantendo toda a turma envolvida como um todo na discussão; manter a trajetória da discussão; e monitorizar a discussão de acordo com o horário da aula. No entanto, realça que o papel moderador do professor deve permitir a apresentação, por parte dos alunos, de contribuições espontâneas consideradas relevantes, criando um registo das ideias em discussão, quer um registo comum do caminho percorrido pela turma, quer um registo sobre aspetos da discussão.

Através do descrito constata-se que há diferentes modos de conduzir uma discussão e diversos aspetos que influenciam o rumo dessa mesma discussão. Contudo, em todo discurso argumentativo desenvolvido em contexto de sala de aula é importante que aos alunos seja solicitado que raciocinem, expliquem os seus raciocínios e tenham em consideração as asserções dos seus colegas e que as interpretem convenientemente (Boavida, 2005b). Orquestrar uma discussão proporciona, assim, uma situação que permite alinhar os alunos uns com os outros, tendo em atenção o conteúdo do trabalho em questão, e ao mesmo tempo socializá-los em formas particulares de falar e pensar (O'Connor & Michaels, 1996).

Uma vez que a estratégia de ensino-aprendizagem exploratório, permite o desenvolvimento de discussões matemáticas, promovendo o desenvolvimento de uma comunidade de discurso matemático, e consequentemente de um ambiente propício ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, é necessário encontrar boas tarefas que permitam despoletar situações de aprendizagem que constituam bons pontos de partida não só para o estudo de novos assuntos, mas também para a consolidação de determinados conteúdos. Contudo, a mesma tarefa pode não ter por parte dos alunos de diferentes turmas o mesmo grau de investimento da discussão (Stein, 2001), nem uma tarefa pode suscitar o mesmo grau de participação de toda a turma, o que implica, desse modo, não só a diversificação das tarefas, mas uma análise da turma em questão. O problema da seleção e articulação das tarefas não se esgota por isso, na sua diversificação, mas sim numa escolha que permita estabelecer um percurso de aprendizagem coerente, permitindo trabalhar com os alunos os diversos aspetos de conteúdos e processos (Ponte, 2005), o que inevitavelmente tem repercussões ao nível da criação de contextos de argumentação matemática em sala de aula.

5. Tópicos da história da geometria e da álgebra

Os mais antigos registos matemáticos conhecidos remontam às civilizações do Egito e da Mesopotâmia. Os papiros egípcios e a coleção de *tabuinhas* da Babilónia constituem um importante legado civilizacional revelador dos primórdios da matemática (Providência, 2000). Contudo, no período entre o império persa e as expedições de Alexandre, os gregos, em contacto com as civilizações potâmicas do Crescente Fértil, apreenderam os seus saberes e, submetendo-os às suas tão peculiares especulações, sobretudo pelo espírito novo empregue na abordagem desses conhecimentos, desenvolveram-nos de forma considerável (Barthélemy, 2003). Mas é na época helenística, em que Alexandria se tornou o grande centro intelectual do mundo mediterrâneo, que os sábios, de cultura grega, prosseguiram a tradição da Grécia clássica. É no entanto de observar que, apesar das descobertas matemáticas dos gregos, os romanos, posteriormente, quase não contribuíram para o desenvolvimento da matemática, embora esta esteja presente quando observamos as suas construções arquitetónicas, como estradas, pontes e aquedutos.

Naturalmente que as causas do primeiro desenvolvimento da matemática estiveram associadas às necessidades práticas e técnicas do dia a dia. Por um lado, havia a necessidade de calcular para negociar e cobrar impostos (administrar), o que remetia para a importância dos números e, consequentemente, da aritmética. Por outro lado existia a necessidade de proceder a medições e construções (arquitetura), o que destaca a importância do surgimento de uma ciência das formas, tanto planas como espaciais: a geometria. E com recurso a esta, com o objetivo de calendarizar, surgiu a astronomia.

5.1. Breve referência à Matemática do Egito e da Mesopotâmia

5.1.1. A geometria egípcia e mesopotâmica

Refere-se que a geometria, etimologicamente «medida da terra», terá sido inventada nas margens do rio Nilo, uma vez que após as cheias deste rio colocava-se o problema de restituir a cada agricultor a mesma parcela de terra. Embora este facto possa ser considerado uma suposição, constata-se que os egípcios possuíam uma geometria de caráter essencialmente prático. Disso são exemplo as pirâmides do Egito, onde se destaca a existência de conhecimentos de engenharia e de arquitetura. No entanto, no que diz respeito aos problemas geométricos, pode afirmar-se que no Antigo Egito os escribas sabiam determinar áreas de triângulos e de retângulos, volumes de celeiros de forma paralelepipédica, a área de um círculo e o volume de uma pirâmide truncada (Estrada, 2000a). Quanto à civilização mesopotâmica, a geometria parece não desempenhar um papel muito importante, embora seja possível encontrar problemas sobre figuras geométricas, problemas resolvidos através da aplicação do teorema de Pitágoras, problemas em que se determinam os lados de triângulos semelhantes, lados esses determinados pela proporcionalidade de lados sem, no entanto, explicitar a relação de semelhança como tal, problemas de divisões de campo numa herança, cálculo do número de tijolos necessários para construir um celeiro, problemas de áreas e volumes, e problemas de construção e alargamento de canais de irrigação (Estrada, 2000a). De facto, na Mesopotâmia era possível encontrar um sistema de canais, bastante engenhosos, construídos para conduzir a água do degelo das montanhas. Mais uma vez exigia-se o conhecimento de matemática, nomeadamente da sua aplicação, ao nível da arquitetura e da engenharia.

Apesar destas informações, é difícil de saber que tipo de matemática existia nestas civilizações, uma vez que são poucos os registos que chegaram até ao nosso tempo. Enquanto que no Egito os documentos eram escritos em papiro, um material bastante perecível, o material usado na Mesopotâmia era mais resistente, uma vez que se escrevia em placas de argila com um estilete, placas essas que depois eram cozidas em fornos ou ao Sol. Por esse facto, existe mais material da região da Mesopotâmia do que do Egito. No entanto, no que diz respeito à civilização egípcia, embora existam poucos documentos originais de conteúdo matemático, subsistiram cerca de uma dúzia, de onde se destacam, pelos conhecimentos matemáticos que encerram, o papiro de Rhind, o papiro de Moscovo, o papiro de Kahun, o papiro de Berlim e o Rolo de Couros das Matemáticas Egípcias (Estrada, 2000a).

5.1.2. A álgebra egípcia

Através dos documentos existentes percebe-se facilmente que a matemática destas civilizações não contemplava a demonstração, a generalidade (teoremas abstratos), nem existiam fórmulas, ou seja, regras gerais. Essencialmente, esses registos consistem em coleções de regras práticas, procedimentos casuísticos e rotinas, problemas de colheita, cobrança de impostos e heranças, cálculo de áreas e volumes, (Providência, 2000), ou seja, receitas que permitiam resolver determinado problema, sem no entanto apelar ao caráter abstrato que caracteriza a matemática. No entanto, é de observar que de entre os problemas apresentados nos documentos que hoje se conhecem e que se classificariam como algébricos, os problemas presentes nos papiros da civilização egípcia reduziam-se a equações do 1.° grau, enquanto que nos textos-problema da civilização mesopotâmica são resolvidas equações do 1.° grau, resolvidas de forma sistemática equações do 2.° grau, algumas do 3.° grau e até sistemas de equações (Estrada, 2000a).

Para resolver equações lineares, os egípcios utilizavam um método, que a partir dos fins do século XV foi designado por método de *falsa posição* ou *falsa suposição*. Este método consiste em assumir, de início, uma solução falsa, que depois é corrigida por forma a se obter a solução correta. De facto, para encontrar a solução do problema bastava multiplicar o valor inicialmente atribuído à incógnita pelo quociente entre o termo independente da equação que traduz o problema e o número que se obteve ao substituir a incógnita pelo valor inicialmente suposto. De acordo com Estrada (2000a), este método foi utilizado também pelos chineses e hindus, encontrando-se ainda presente nas resoluções apresentadas pelos matemáticos da Idade Média, Renascimento e até posteriormente. Esta historiadora refere ainda que este método figura nas Aritméticas (Práticas) portuguesas do século XVI.

Por exemplo, no problema 26 do Papiro de Rhind pretende-se encontrar uma determinada quantidade que, quando adicionada a $\frac{1}{4}$ dela própria, o resultado é 15.

O problema, em linguagem simbólica atual, traduz-se pela equação $x+\frac{1}{4}x=15$, em que x representa a quantidade desconhecida. A sequência das operações do escriba correspondia a assumir que a solução do problema era 4. Talvez a escolha do número 4, por parte do escriba, estivesse relacionada com o facto de $\frac{1}{4}$ de 4 ser um número inteiro. Assim, substituindo esse valor no primeiro membro da equação, obtinha-se 5 em vez de 15. O escriba observava então que para encontrar a resposta correta, teria de multiplicar 4 pelo quociente de 15 por 5, isto é, 3. Desta forma, multiplica o valor inicialmente assumido por 3, obtendo a solução correta, que é 12.

De acordo com Katz (1993), embora não haja estudos sobre a forma como o algoritmo foi descoberto, é evidente que os escribas egípcios compreenderam a ideia básica da relação linear entre duas quantidades, isto é, que uma alteração multiplicativa na primeira quantidade implica a mesma alteração multiplicativa na segunda.

No entanto, nem todos os problemas que aparecem nos papiros egípcios se traduzem sob a forma de equações lineares. Nos papiros de Kahun e de Berlim aparecem alguns problemas que se reduzem a equações quadráticas simples ou, mais especificamente, a um sistema de duas equações a duas incógnitas, em que uma das equações é linear e a outra é quadrática (Collette, 1973).

Por exemplo, no papiro de Berlim é proposto um problema que diz respeito a um quadrado de área 100 que é igual à soma das áreas de dois quadrados mais pequenos. Sabe-se ainda que o lado de um destes quadrados é $\frac{3}{4}$ do lado do outro. Pretende-se saber o lado de cada um dos quadrados mais pequenos.

Designando por x e y, respetivamente, os comprimentos dos lados dos quadrados mais pequenos, o problema pode ser traduzido em notação simbólica atual por $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x = \frac{3}{4}y \end{cases}$.

O método usado para resolver este tipo de problema é também o da falsa posição, embora, com as devidas adaptações, uma vez que além de uma equação linear, tem-se presente uma equação quadrática. Tal como acontecia anteriormente, com as equações lineares, também são atribuídos valores numéricos específicos às incógnitas que, embora reconhecidos como falsos, satisfazem a equação linear do problema. Ao substituir esses valores na outra equação e procedendo aos respetivos cálculos encontra-se a solução. No entanto, uma vez que se trata de uma equação quadrática, em vez de se multiplicar os valores supostos inicialmente pelo quociente entre o termo independente da equação quadrática e o valor que se obteve, multiplica-se pela raiz quadrada desse quociente.

A sequência de operações do escriba correspondia a assumir que y era igual a 1, portanto, x seria igual a $\frac{3}{4}$. Assim, procedendo à substituição destes valores na equação quadrática, obtinha que a soma das áreas dos dois quadrados era $\frac{25}{16}$. No entanto, como esta soma deveria ser 100, o escriba refere que dever-se-ia tomar a raiz quadrada de $\frac{25}{16}$, ou seja, $\frac{5}{4}$, e a raiz quadrada de 100, ou seja, 10; portanto, dividindo 10 por $\frac{5}{4}$ obtém-se 8 que, multiplicado pelos valores inicialmente supostos, 1 e $\frac{3}{4}$, dá origem a 8 e 6. De facto, é necessário determinar a razão entre o valor correto dos lados e o valor assumido. Designando por k esse valor, $x = k \times 1$ e $y = k \times \frac{3}{4}$, logo $x^2 + y^2 = \frac{25}{16}k^2$ e para a soma das áreas dos dois quadrados ser 100, isto é, $x^2 + y^2 = 100$, será $\frac{25}{16}k^2 = 100$, ou seja, $\frac{5}{4}k = 10$. Portanto, o quociente de 10 por $\frac{5}{4}$ é o valor de k, ou seja, 8, que, no contexto do problema, coincide com o valor do lado do quadrado maior.

Dados os escassos documentos sobre a matemática egípcia, com frequência coloca-se a questão da existência de elementos científicos na matemática desta civilização. Embora haja autores que refiram que os problemas presentes nos papiros não sejam uma mera coleção de problemas práticos e que denotam o interesse dos egípcios por estudar matemática e outros assuntos pelo seu próprio gosto (A. B. Chance in Fauvel & Gray, 1987), há outros que referem que «as dificuldades de cálculo com um tão rudimentar sistema de numeração e métodos primitivos impediram qualquer avanço ou interesse em desenvolver a ciência pelo seu próprio gosto.» (G. J. Toomer in Fauvel & Gray, 1987, p. 24), sendo que «(...) os textos disponíveis evidenciam uma matemática egípcia de objetivos muito limitados, embora com alguma sofisticação dentro desses limites.» (Struik, 1997, p. 56). De facto, no que diz respeito à notação algébrica, nenhuma das civilizações antigas possuía qualquer simbologia para as operações ou incógnitas que se usam atualmente. Contudo, os escribas egípcios eram capazes de resolver problemas, recorrendo simplesmente a técnicas verbais (Katz, 2010). No entanto, os documentos não nos dizem como é que descobriram os métodos que usavam. Nesse sentido, de acordo com Katz (in APM, 1996), se simplesmente tivessem feito uma suposição correta, então poder-se-ia dizer que não tinham uma matemática "científica". Todavia, para este historiador (idem), se «(...) usaram alguma forma de argumento – não necessariamente um argumento baseado num raciocínio lógico escrito a partir de axiomas explícitos (...)» (p. 51), então isso significa que se pode concluir que a matemática egípcia tinha um suporte "científico". Também Gillings (1982, p. 233), comentando os métodos que os egípcios usavam para lidar com a resolução de equações, refere que

> os estudiosos da história e filosofia da ciência do século vinte, ao considerar as contribuições dos antigos Egípcios, se inclinam para a atitude moderna de que um argumento ou prova lógica deve ser simbólico para ser considerado rigoroso, e que um ou dois exemplos específicos usando números escolhidos não podem ser considerados cientificamente sólidos.

No entanto, para Gillings (idem),

> um argumento não simbólico pode ser rigoroso, mesmo quando dado para um valor particular da variável; as condições para o rigor são que o valor particular da variável seja *típico* e que uma generalização posterior para *qualquer* valor seja *imediata*.

o que exprime uma opinião favorável à existência de elementos científicos na matemática egípcia.

5.1.3. A álgebra mesopotâmica

Enquanto que na álgebra egípcia não se ia muito além da resolução de equações lineares, na Mesopotâmia há um certo pensamento algébrico, o que permitia, nomeadamente, a resolução de equações do segundo grau. No entanto, o modo como expressam essas resoluções é sob a forma de receita, isto é, não há uma dedução da fórmula resolvente das equações do segundo grau completas. De facto, «a maior mestria dos escribas babilónicos na resolução de equações revela-se nas equações quadráticas.» (Estrada, 2000b, p. 80).

No que diz respeito ao sistema de numeração, enquanto que os egípcios utilizavam um sistema de numeração de base 10, do tipo repetitivo, análogo ao dos romanos (Estrada, 2000a), os mesopotâmicos usavam um sistema de numeração posicional, de base 60 (Estrada, 2000b). No entanto, esta civilização utilizava apenas dois símbolos, 𒁹 (=1) e 𒌋 (=10), o que obrigava a usar um sistema repetitivo, para representar os elementos componentes 𒁹 de cada ordem no número. Por exemplo, na matemática babilónica, o mesmo símbolo pode representar uma unidade, ou 60 unidades (a base) ou uma potência de base, de expoente positivo ou negativo. Outra ambiguidade do sistema sexagesimal posicional babilónico resulta da falta da vírgula 𒌋𒌋 sexagesimal e, portanto, da indicação do valor absoluto do número (Estrada, 2000b). Desta forma, podia representar 20 ou 20 × 60 (=1200) ou $\frac{20}{60}\left(=\frac{1}{3}\right)$ ou $\frac{20}{60^2}\left(=\frac{1}{180}\right)$. O sistema sexagesimal é assim usado na escrita de números inteiros como na de números fracionários. O historiador Otto Neugebauer introduz, assim, uma convenção que consiste em separar a parte inteira da parte fracionária por ponto e vírgula e separar as unidades das diferentes ordens decimais por vírgula (Estrada, 2000b). Segundo esta convenção, observem-se exemplos de números escritos na base 60:

$$5{,}43{,}21 = 5 \times 60^2 + 43 \times 60 + 21 \text{ e } 1{,}23;27{,}11 = 1 \times 60 + 23 + \frac{27}{60} + \frac{11}{60^2}.$$

Esta civilização estudou e desenvolveu de forma significativa a teoria da resolução deste tipo de equações, podendo-se afirmar que resolviam qualquer equação do segundo grau completa, por processos que correspondem à aplicação da atual fórmula resolvente para equações do segundo grau, embora não existisse o conceito de zero, nem de número negativo. Na verdade, os escribas da Antiga Babilónia desenvolveram uma notável habilidade algébrica, introduzindo determinadas operações algébricas, como transpor termos de uma equação e multiplicar ambos os membros de uma equação por quantidades iguais. No entanto, uma vez que apenas eram considerados coeficientes positivos, as equações quadráticas completas dividiam-se em três tipos: $x^2 + px = q$, $x^2 = px + q$, $x^2 + q = px$ (com $p, q < 0$).

Equações do tipo $x^2 + px = q$

Considere-se o problema número 1 da placa BM[1] 13901, transcrevendo a tradução de Thureau-Dangin (*in História da Matemática*, Estrada et al. 2000, p. 81).

> Adicionei a superfície e o lado do meu quadrado: 0;45.
> Tu porás 1, a unidade.
> Tu fracionarás em 2 e obterás 0;30.
> Tu cruzarás 0;30 e obterás 0;15 juntarás 0;15 a 0;45 e obterás 1.
> [1] é o quadrado de 1.
> Tu subtrairás 0;30, que tu quadraste de 1 e obterás 0;30 que é o lado do quadrado.

Em linguagem algébrica atual, tendo em consideração a tradução realizada por Thureau-Dangin, o problema proposto pode ser traduzido algebricamente por $x^2 + x = 0;45$, em que x representa o lado do quadrado, o que corresponde a uma equação do tipo $x^2 + px = q$, com $p = 1$. Através das instruções do escriba, Thureau-Dangin procede a uma interpretação algébrica que permite resolver qualquer equação do tipo $x^2 + px = q$, sintetizada na tabela 5.1..

De acordo com Estrada (2000b), o método indicado pelos escribas corresponde, do ponto de vista algébrico, a "completar um quadrado", isto é, a resolver uma equação do 2.° grau sem aplicação da fórmula resolvente, ou seja, a transformar o 1.° membro da equação num quadrado. Contudo, os documentos matemáticos provenientes da civilização mesopotâmica não fornecem, em geral, indicações quanto ao algoritmo usado, isto é, o modo como eram obtidas as soluções dos problemas propostos.

[1] Placa arquivada no *British Museum*. As placas babilónicas são usualmente referenciadas por siglas, que indicam o local onde estão arquivadas, e um número de série.

Tabela 5.1. Interpretação algébrica do problema número 1 da placa BM 13901

Operações indicadas pelo escriba	*Interpretação*
$\frac{1}{2}\times 1 = 0;30$	Partindo da equação $x^2 + px = q$ considera-se $\frac{p}{2}$. No presente caso $p = 1$
$(0;30)^2 = 0;15$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2$
$0;15 + 0;45 = 1$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$
$1 = 1^2$	$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$
$1 - 0;30 = 0;30$ resposta: 0;30	$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$

No entanto, o historiador Jens Høyrup procedendo a uma análise filológica rigorosa, integrada no contexto da Antiga Babilónia, conclui, por um lado, que a equação diz respeito à adição de duas áreas: a área de um quadrado de lado desconhecido x e a área de um retângulo de lados x e 1. Por outro lado, que as instruções do escriba correspondem a operações concretas na «*geometria do corta e cola*», geometria intuitiva: cortar a meio o retângulo que se adiciona ao quadrado e deslocar uma das partes para formar um *gnómon*[2]; completar o quadrado geométrico pela adjunção de outro quadrado; determinar o lado do quadrado maior e finalmente, o lado do quadrado desconhecido.

Assim, de acordo com a interpretação de Jens Høyrup, geometricamente a equação $x^2 + px = q$, seria resolvida da seguinte forma:

[2] Termo que assumiu, com diferentes autores, vários significados ao longo dos tempos, sendo um conceito importante na matemática grega (Sá, 2000). Neste caso, *gnómon* é a figura que acrescentada a um quadrado permite obter outro quadrado.

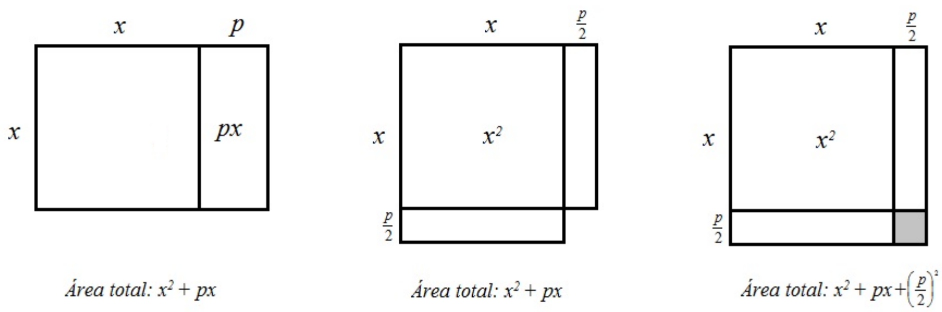


Figura 5.1. Interpretação geométrica do problema número 1 da placa BM 13901.

Como $x^2 + px = q$, a área do quadrado de lado $x+\frac{p}{2}$ é $q+\left(\frac{p}{2}\right)^2$, logo $x+\frac{p}{2}=\sqrt{q+\left(\frac{p}{2}\right)^2}$, portanto, o lado do quadrado procurado é $x=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}-\frac{p}{2}$.

Equações do tipo $x^2 = px + q$ (ou $x^2 - px = q$)

Considere-se o problema número 2 da BM 13901 (*in História da Matemática*, Estrada et al. 2000, p. 82).

> Da superfície do meu quadrado tirei o lado: 14,30.
> 1, tu pões; fracionas 1 em dois: 0;30 e 0;30 tu constróis; 0;15 tu juntas a 14,30: 14,30;15. A raiz quadrada de 14,30;15 é 29;30.
> 0;30 que tu construíste juntas a 29;30.
> 30 é o lado.

Tendo em consideração a interpretação do problema e das instruções do escriba, Jens Høyrup traduz este problema algebricamente por $x^2 - x = 14{,}30$, em que x representa o lado do quadrado, o que corresponde a uma equação do tipo $x^2 - px = q$, com $p = 1$. A interpretação algébrica efetuada por Jens Høyrup permite resolver qualquer equação do tipo $x^2 - px = q$, e pode ser sintetizada no quadro seguinte:

Tabela 5.2. Interpretação algébrica do problema número 2 da placa BM 13901

Operações indicadas pelo escriba	*Interpretação*
$\frac{1}{2}\times 1 = 0;30$	Partindo da equação $x^2 - px = q$ considera-se $\frac{p}{2}$. No presente caso $p = 1$
$(0;30)^2 = 0;15$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2$
0;15 + 14,30 = 14,30;15	$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$
$\sqrt{14,30;15} = 29;30$	$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$,
29;30 + 0;30 = 30 resposta: 30	$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$

Embora admita a presente interpretação algébrica, Jens Høyrup afirma que «tal não traduz o procedimento preconizado nem o pensamento subjacente.» (Estrada, 2000b, p. 83). Para Jens Høyrup o problema e as instruções do escriba devem ser interpretados geometricamente. Nesse sentido, a equação pode ser traduzida como a diferença entre duas áreas: a área de um quadrado de lado desconhecido x e a área de um retângulo de lados x e 1. Quanto às instruções do escriba, estas correspondem, de novo, a operações concretas: tirar à área do quadrado de lado desconhecido a área do retângulo de lados 1 e x; transformar o retângulo que resta num gnómon como no problema anterior; completar o quadrado maior pela adjunção de um quadrado menor; determinar o lado do quadrado maior e finalmente o lado do quadrado desconhecido.

Assim, de acordo com a interpretação de Jens Høyrup, geometricamente a equação $x^2 - px = q$, seria resolvida da seguinte forma:

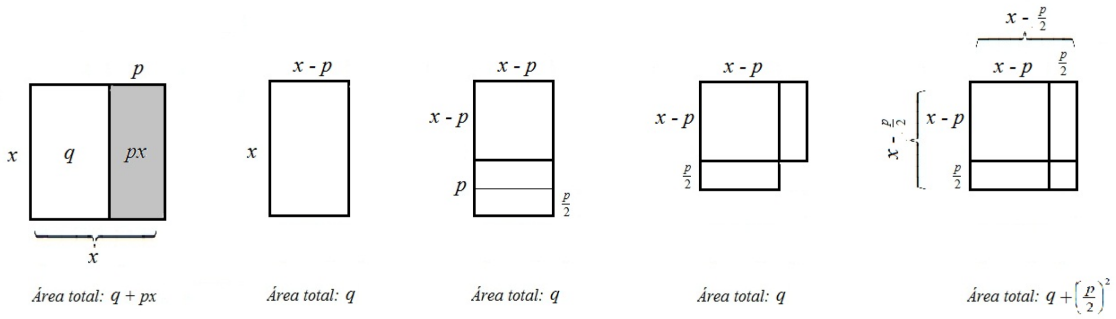


Figura 5.2. Interpretação geométrica do problema número 2 da placa BM 13901.

Como área do quadrado de lado $x-\frac{p}{2}$ é $q+\left(\frac{p}{2}\right)^2$, logo $x-\frac{p}{2}=\sqrt{q+\left(\frac{p}{2}\right)^2}$, portanto, o lado do quadrado procurado é $x=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}+\frac{p}{2}$.

Equações do tipo $x^2 + q = px$

No que diz respeito à resolução das equações do tipo $x^2 + q = px$, estas eram reduzidas a um sistema de duas equações, em que se pretendia determinar duas quantidades tais que $\begin{cases} x+y=p \\ x.y=q \end{cases}$, isto é, procuravam-se as dimensões de um retângulo de que se conhecia o semiperímetro e a área. De facto, esta equação pode ter duas soluções positivas que correspondem aos valores das incógnitas na solução do sistema. Assim, os problemas traduzidos pela equação $x^2 + q = px$ eram colocados em termos geométricos (procura dum retângulo), o que evitava considerar problemas com mais do que uma solução.

Considere-se o problema da placa YBC[3] 4663 em que se pretendia determinar as dimensões de um retângulo, em que a soma do comprimento e da largura é 6;30 e a área é 7;30.

[3] Placa pertencente à Coleção Babilónica da Universidade de Yale nos E.U.A..

Representando por x e y as dimensões procuradas, este enunciado pode ser traduzido pelo sistema $\begin{cases} x + y = 6;30 \\ x.y = 7;30 \end{cases}$, que é equivalente a $\begin{cases} x = 6;30 - y \\ x.y = 7:30 \end{cases}$. Tendo em conta as instruções dadas pelo escriba, a respetiva interpretação algébrica permite resolver qualquer equação do tipo $x^2 + q = px$, e pode ser sintetizada na tabela 5.3.. Antes de se proceder à interpretação algébrica das instruções dadas pelo escriba é de referir que os escribas da Antiga Babilónia, do ponto de vista aritmético-algébrico, conheciam a identidade: $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy$, donde tiravam que $\frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy}$ e $\frac{x+y}{2} = \sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + xy}$ (Estrada, 2000b).

Tabela 5.3. Interpretação algébrica do problema da placa YBC 4663

Instruções do escriba	**Interpretação**
Divide 6;30 a meio e o resultado é 3;15	$\frac{x+y}{2} = \frac{6;30}{2} = 3;15$
Multiplica 3;15 por 3;15: o resultado é 10;33,45	$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 10;33,45$
Subtrai 7;30 de 10;33,45 e o resultado é 3;3,45	$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = 3;3,45$
3;3,45 é o quadrado de 1;45	$\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} = 1;45$
Junta 3;15, que foi o que multiplicaste, a 1;45: o resultado é 5, o comprimento do retângulo	$\frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{2} = x = 5$
Retira de 3;15, que foi o que multiplicaste, 1;45: o resultado é 1;30, a largura do retângulo	$\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = y = 1;30$

Em termos de geometria intuitiva, Jens Høyrup, propõe a seguinte interpretação para a resolução do sistema $\begin{cases} x + y = p \\ x.y = q \end{cases}$ (Estrada, 2000b):

– trata-se de um retângulo de lados desconhecidos x e y em que o semiperímetro é p e a área é q;

– seja M o ponto médio do segmento de comprimento $x + y$, o retângulo de lados x e y corresponde ao retângulo de lados y e $\frac{x+y}{2}$ e ao retângulo de lados y e $\frac{x-y}{2}$;

– desloca-se uma das partes do retângulo (o retângulo de lados y e $\frac{x-y}{2}$) para formar um *gnómon*;

– a este *gnómon* é acrescentado um quadrado de lado $\frac{x-y}{2}$, formando um quadrado de lado $\frac{p}{2}$.

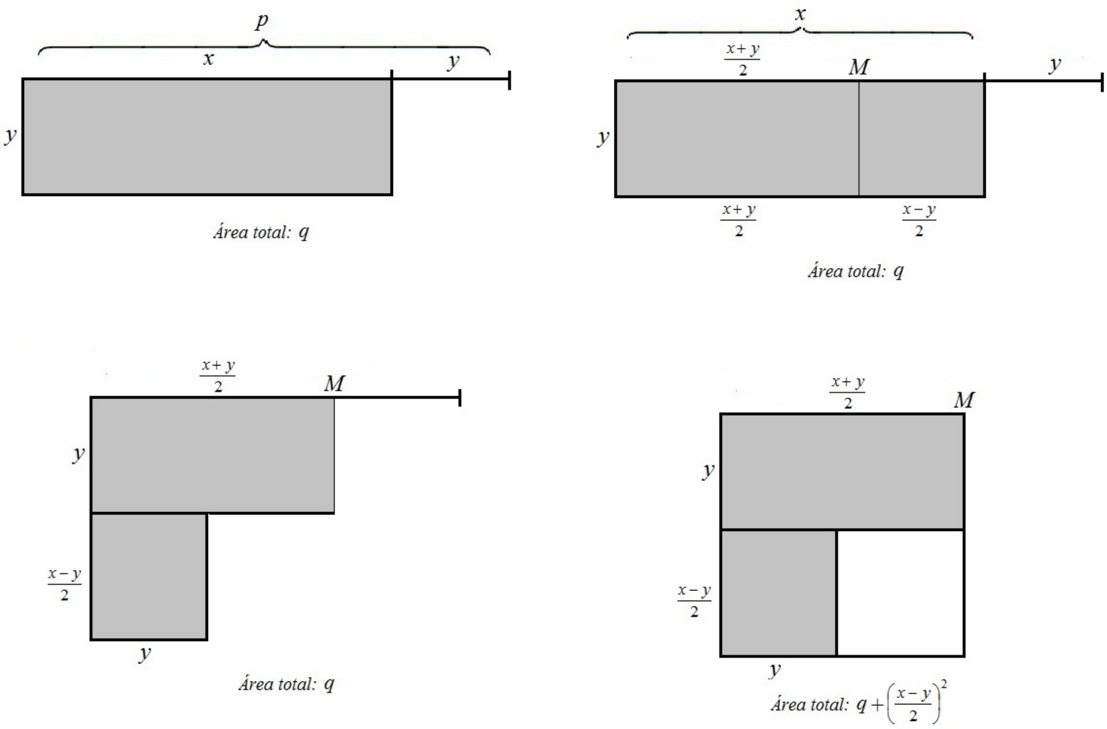


Figura 5.3. Interpretação geométrica do problema da placa YBC 4663.

Como $\frac{x+y}{2}=\frac{p}{2}$, $q+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2$, o que é equivalente a $\frac{x-y}{2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$.

Assim, $x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ e $y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$, são as duas soluções da equação $x^2 + q = px$.

Através destes exemplos é possível confirmar a habilidade algébrica dos babilónios, permitindo-lhes resolver toda e qualquer equação quadrática. Contudo, os escribas da Antiga Babilónia resolvem problemas bem mais complicados do que este. De acordo com Estrada (2000b), utilizam aquilo que se traduz em termos atuais por artifícios de cálculo, fazendo ainda o equivalente ao que hoje se chama *mudança de variáveis*. Os escribas da Antiga Babilónia resolviam também certas equações e sistemas do 3.° grau, desde que por eliminação fosse possível obter uma equação do tipo $x^3 + x^2 = a$ (Estrada, 2000b). Por fim, é de observar que este sucesso em resolver equações do 2.° grau, sistemas e até mesmo equações do 3.° grau foi obtido à margem do uso de qualquer simbolismo algébrico (Cajori, 1991). É ainda de referir que não são conhecidos problemas do quotidiano dos mesopotâmios que os obrigassem a desenvolver de uma forma tão clara a resolução das equações quadráticas, o que, de acordo com Boyer (1996), levanta a questão do utilitarismo associado a esta civilização.

Esta mestria, atribuída aos escribas babilónicos, na resolução de equações do 2.° grau é considerado, por muitos historiadores, um tratamento algébrico no sentido atual do termo. Contudo, há historiadores que veem este tratamento algébrico como fonte inspiradora em estudos posteriores (Estrada, 2000b). De facto, «é no legado das antigas escolas babilónicas que permanece o fundamento autêntico e a pedra angular dos sistemas de álgebra, tanto gregos como árabes.» (S. Gandz, in *Osiris*, citado na nota 1, *in História da Matemática*, Estrada et al. 2000, p. 101). Nesse sentido, sem o conhecimento deste antigo legado babilónico, a origem e o desenvolvimento inicial da ciência não pode ser entendida. Bochner (1996) considera notável o facto dos babilónios possuírem algoritmos tão avançados, mas sem terem as respetivas construções intelectuais. Nas matemáticas babilónicas não é possível encontrar nem uma estrutura lógica, baseada em princípios que garantam aceitação num ou noutro fundamento, nem o conceito de demonstração, nem a consideração de questões como as que ocorrem quando se determinam as condições de solubilidade de um problema (Kline, 1972, p.14). De facto, essas construções intelectuais só serão criadas pelos Gregos que introduzirão reflexões próprias sobre as várias áreas da matemática.

Do que foi descrito sobressai que existe matemática nestas civilizações, que tanto pode ser encontrada nos poucos documentos que possuímos, como através dos vestígios das construções arquitetónicas efetuadas por estes povos. Contudo, os registos existentes indicam apenas um conjunto de receitas, prescrições de passos a dar na resolução de um determinado problema, não mostrando a forma de chegar a essas mesmas receitas. Pelo contrário a matemática da Grécia Antiga, tal como a matemática atual, preocupa-se com a generalização e com o rigor, procurando a demonstração.

5.2. A matemática na Grécia Antiga

Na moderna aceção da Ciência, a matemática surgiu na Grécia nos séculos V e IV a.C., sendo Tales de Mileto e Pitágoras de Samos os seus precursores. Contudo, não existem fontes que nos possam dar um panorama do desenvolvimento inicial da matemática grega. De facto, a primeira obra completa de autoria grega são os *Elementos* de Euclides escritos por volta de 300 a.C.. No entanto, há pequenos fragmentos transmitidos por autores posteriores, não necessariamente matemáticos, que nos revelam a atividade matemática existente entre 600 e 300 a.C.. O platonista Proclo de Lícia escreveu um *Comentário aos Elementos de Euclides*, de que apenas chegou até nós, completa, a parte relativa ao livro I, que tem excecional interesse e importância «(...) pelo grande número de úteis e felizes citações colhidas em autoridades de toda a competência (...)», como Eudemo, Herão e Papo, e pelo «(…) o facto de ser o primeiro ensaio que podemos conhecer [...] sobre *Filosofia das matemáticas.*» (Vasconcellos, 2009, p.383, em itálico no original). Proclo transcreve um relato de Eudemo de Rodes, que representa um documento precioso para o conhecimento do desenvolvimento e progressos da geometria grega.

5.2.1. Tales de Mileto e Hípias de Elis

No relato de Eudemo podem encontrar-se várias referências a diversos matemáticos gregos. Esse documento refere que Tales esteve no Egito e que daí levou os conhecimentos de geometria para a Grécia. Eudemo refere ainda que Tales descobriu muitas coisas, dando a conhecer as suas descobertas aos seus sucessores, tratando-as de um modo mais geral (formulando teoremas) e outros de modo mais sensível (o sentido primitivo da geometria, com recurso a desenhos e figuras). Esta afirmação de que Tales ensinou geometria aos seus sucessores, associa-o à criação de uma escola jónica de matemática (Sá, 2000). Toda a tradição atribui a Tales diversos conhecimentos de geometria, como ter descoberto a previsão de um eclipse solar e a medição da altura de uma pirâmide no Egito, e conhecer que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale dois retos, que os ângulos da base de qualquer triângulo isósceles são iguais, que ângulos inscritos numa semicircunferência são retos e o caso ângulo-lado-ângulo (ALA), um dos critérios de igualdade de triângulos. Nestes resultados verifica-se que há preocupações bem diferentes das dos egípcios e dos mesopotâmios, uma vez que os enunciados já não são apenas regras práticas e aplicadas a casos particulares, mas sim formulações gerais de caráter teórico (Sá, 2000).

Prosseguindo com a leitura deste relato, encontramos um outro matemático Hípias de Elis, um sofista, que descobriu a primeira curva notável da matemática a seguir à reta e à circunferência: a quadratriz. A quadratiz permite a trissecção de um ângulo, e assim resolver, mecanicamente, um dos três famosos problemas geométricos da Antiguidade, contundo, sem recorrer apenas à régua e ao compasso. Mais tarde Dinóstrato reconheceu que esta curva era aplicável à quadratura do círculo, daí o nome de *quadratriz* (Vasconcellos, 2009).

5.2.2. Pitágoras de Samos e a escola pitagórica

De acordo com relato de Eudemo, depois destes matemáticos surgiu Pitágoras que transformou esta filosofia (a geometria) numa educação livre. Segundo Eudemo, Pitágoras examinou de cima os princípios da geometria e investigou os seus teoremas de uma forma imaterial e intelectual. Enquanto que para Tales havia um princípio material que explicava o Universo, a água; para os pitagóricos, discípulos de Pitágoras, existia um princípio imaterial, o número, daí a famosa divisa deste grupo de filósofos «tudo é número», tendo, assim, a aritmética ganho um estatuto superior à geometria. Contudo, e apesar da importância dada à aritmética, os gregos, neste caso os pitagóricos, só trabalhavam com números inteiros maiores ou iguais a um. No entanto, no Egito falava-se de $3+\frac{1}{7}$ e na Mesopotâmia trabalhava-se com o sistema sexagesimal.

Um pouco de aritmética pitagórica

Os pitagóricos sabiam determinar o máximo divisor comum de dois números. Desconhece-se o motivo que os terá levado a preocupar-se com esta determinação, mas uma vez que a proporcionalidade era um conceito fundamental da matemática antiga; para operar com razões de números (naturais), a noção de máximo divisor comum tornava-se muito útil.

Este resultado está na base de um processo conhecido pelo nome de *subtração recíproca* (*antifairese* ou *antanairese*) que permite determinar o máximo divisor comum de dois números naturais. De acordo com este processo, dados dois números naturais distintos, eles são substituídos pelo menor deles e pela diferença entre ambos, sendo este procedimento repetido até se obterem dois números iguais. Este valor é o máximo divisor comum dos números inicialmente dados.

Exemplificando, considerem-se os números 42 e 15. O processo de subtração recíproca dá origem aos seguintes pares de números:

Tabela 5.4. Processo de subtração recíproca

Processo		*Justificação*
42	15	
27	15	uma vez que 27 = 42 – 15
12	15	uma vez que 12 = 27 – 15
12	3	uma vez que 3 = 15 – 12
9	3	uma vez que 9 = 12 – 3
6	3	uma vez que 6 = 9 – 3
3	3	uma vez que 3 = 6 – 3

Portanto, 3 é o máximo divisor comum de 42 e 15.

Observe-se que este processo pitagórico para calcular o máximo divisor comum entre dois números pode ser condensado da seguinte forma, usualmente conhecida por *algoritmo de Euclides*.

Tabela 5.5. Cálculo do máximo divisor comum de dois números

Algoritmo de Euclides
$42 = 15 \times 2 + 12$
$15 = 12 \times 1 + 3$
$12 = 3 \times 4 + 0$

Justifique-se a validade do processo pitagórico. Para o fazer será necessário mostrar, por um lado, que este processo termina ao fim de um número finito de passos, ou seja, que se é sempre conduzido a um par de números iguais; por outro lado, que quando se tiver esse par de números iguais, de facto é esse o máximo divisor comum dos dois números iniciais.

Quando se passa de um par de números para o par seguinte, o menor dos números é mantido, enquanto que o maior é substituído por um outro número menor que ele. Nesse sentido, os maiores números de cada um dos sucessivos pares formam uma sequência estritamente decrescente de números naturais que é necessariamente finita.

Por outro lado, o número a que o processo conduz é o máximo divisor comum dos dois números iniciais, uma vez que os divisores comuns dos números de cada par são mantidos em cada passo do processo de subtração recíproca. Assim sendo, os divisores comuns do par inicial são exatamente os divisores comuns do par final. Mas como o último par é constituído por dois números iguais, o maior divisor comum a esse par é o próprio número. Logo, ele será também o máximo divisor comum do par de números inicialmente dado.

Vejamos que, de facto, dados dois números m e n, com $n < m$, os divisores comuns de m e n são exatamente os divisores comuns de n e $m - n$.

Seja d um número natural divisor de n e m. Existem números naturais p e q tais que $m = p \times d$ e $n = q \times d$. Como $n < m$, então $q < p$. Assim, existem dois números naturais q e $p - q$ tais que $n = q \times d$ e $m - n = p \times d - q \times d = (p - q) \times d$, ou seja, d é divisor de n e de $m - n$. Reciprocamente, seja d um número natural divisor de n e de $m - n$. Existem números naturais s e t tais que $n = s \times d$ e $m - n = t \times d$. Logo, existem os números naturais s e $s + t$ tais que $n = s \times d$ e $m = n + (m - n) = s \times d + t \times d = (s + t) \times d$, ou seja, d é divisor de m e de n.

Os pitagóricos consideravam, assim, em coerência com o seu princípio de que «tudo é número», que munidos da aritmética estavam preparados para resolver todo o tipo de questões, nomeadamente, as de caráter geométrico.

Comensurabilidade e incomensurabilidade de grandezas

Para os pitagóricos a aritmética tomava primazia entre as ciências, surgindo a geometria como uma ciência subordinada à aritmética. Portanto, os dois contextos (aritmético e geométrico) não deveriam aparecer como distintos (Sá, 2000). Nesse sentido, tal como os números admitem sempre uma unidade como divisor comum, os pitagóricos consideravam que duas grandezas do mesmo tipo, grandezas *homogéneas*, admitiriam sempre uma medida comum, o que permite observar que num período mais remoto a geometria pitagórica assentava no pressuposto da *comensurabilidade* das grandezas (Sá, 2000). Por exemplo, afirmar que a relação entre um determinado segmento de reta CD e o segmento de reta AB é a mesma que de três para dois, significa que metade de AB está contida exatamente três vezes em CD. Assim, duas grandezas dizem-se comensuráveis se admitem uma medida em comum, caso contrário dizem-se *incomensuráveis*. Por outras palavras, dadas duas grandezas α e β do mesmo tipo, elas são comensuráveis se existir uma terceira grandeza do mesmo tipo, u, e existirem números naturais m e n tais que

$$\alpha = \underbrace{u + u + \ldots + u}_{m\ vezes} \Leftrightarrow \alpha = mu \text{ e } \beta = \underbrace{u + u + \ldots + u}_{n\ vezes} \Leftrightarrow \alpha = nu$$

Naturalmente que a questão que se colocou foi a de saber se todas as relações entre grandezas podem expressar-se através de uma relação de números, ou seja, se, dadas grandezas do mesmo tipo, existe uma medida comum para elas.

A incomensurabilidade e a subtração recíproca

Não se conhece a data em que se tomou consciência da existência de grandezas incomensuráveis, nem em que tipo de figuras foi descoberta a incomensurabilidade. Esta ocorre em figuras geométricas muito simples e supõe-se que as primeiras grandezas incomensuráveis a serem observadas tenham sido segmentos de reta (Sá, 2000). Tomando em consideração o relato de Eudemo-Proclo, situa-se esta descoberta, com alguma probabilidade, na segunda metade do século V, uma vez que este refere que foi Pitágoras quem descobriu a dificuldade dos irracionais, dificuldade essa traduzida pelo embaraço que os pitagóricos tiveram em assumir a incomensurabilidade na sua filosofia.

É natural que os geómetras pitagóricos tenham procurado saber, por exemplo, qual a razão entre o lado e a diagonal de um quadrado (Sá, 2000). Nesse sentido, terão procurado uma medida comum entre estas duas grandezas e naturalmente que o procedimento habitual seria aplicar a subtração recíproca aos dois segmentos de reta em questão. De acordo com Sá (2000, p. 239)

> a subtração recíproca não era apenas usada para determinar o máximo divisor comum de dois números naturais, mas também para determinar a máxima medida comum de duas quaisquer grandezas do mesmo tipo (dois segmentos de reta, dois ângulos, dois volumes, etc.).

Com recurso à notação algébrica atual, observe-se o procedimento atribuído aos pitagóricos.

Considere-se o quadrado [ABCD] da figura, com lado de comprimento l e diagonal de comprimento d.

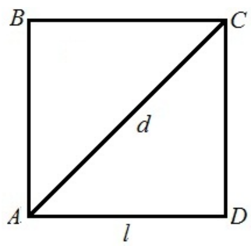


Figura 5.4. Quadrado de lado l e diagonal d.

Para aplicar o processo de subtração recíproca aos segmentos de reta de comprimentos l e d, há a necessidade de construir o segmento de reta de comprimento $d - l$ (notar que $l < d$).

Tabela 5.6. Processo de subtração recíproca entre o lado e a diagonal de um quadrado

Processo	
l	d
l	$d - l$

Sobre a diagonal [AC] do quadrado, marque-se o segmento de reta [AE] de comprimento igual a l. Logo, $\overline{EC} = d - l$ e, portanto, obtém-se geometricamente o segundo par de segmentos do processo de subtração recíproca.

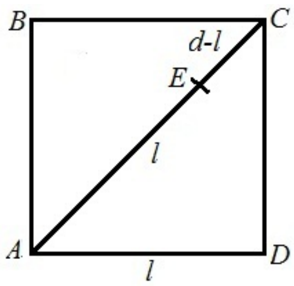


Figura 5.5. Subtração recíproca do lado e da diagonal de um quadrado.

Ora, pela desigualdade triangular $d < l + l$, ou seja, $d - l < l$. Portanto, aplicando o processo de subtração recíproca, temos que um dos elementos do terceiro par de segmentos neste processo é $l - (d - l) = 2l - d$.

Tabela 5.7. Processo de subtração recíproca do lado e da diagonal de um quadrado (continuação)

Processo	
l	d
l	$d - l$
$2l - d$	$d - l$

Para construir este segmento de reta, $2l - d$, traça-se pelo ponto E uma perpendicular à diagonal [AC] e designe-se por F o ponto de interseção dessa perpendicular com o lado [CD]. Ora, $E\hat{C}F = 45^\circ$ e $C\hat{E}F = 90^\circ$, portanto, o Δ[ECF] é isósceles, logo $\overline{EC} = \overline{EF}$. Além disso, os triângulo [AEF] e [ADF] são congruentes, uma vez que são ambos triângulos retângulos e têm a hipotenusa e um dos catetos (o cateto maior) respetivamente iguais, portanto, $\overline{EF} = \overline{FD}$; consequentemente, $\overline{EC} = \overline{FD}$. Assim, como $\overline{EC} = d - l$, também $\overline{FD} = d - l$; logo, $\overline{FC} = l - (d - l) = 2l - d$ e, portanto, obtém-se geometricamente o terceiro par de segmentos do processo de subtração recíproca.

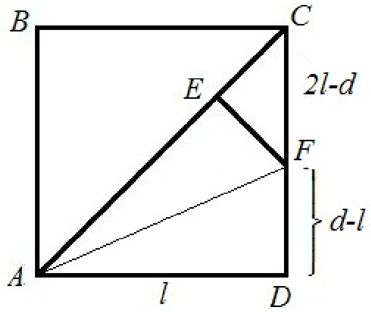


Figura 5.6. Subtração recíproca do lado e da diagonal de um quadrado (continuação).

Mas os segmentos de reta que ocorrem no terceiro par do processo de subtração recíproca são, tal como os do primeiro par, o lado e a diagonal do quadrado formado pelos lados [EC] e [EF]. E de igual modo se se continuar com o processo de subtração recíproca, ao fim de mais dois passos se obtém um novo par de segmentos de reta que são o lado e a diagonal de um mesmo quadrado.

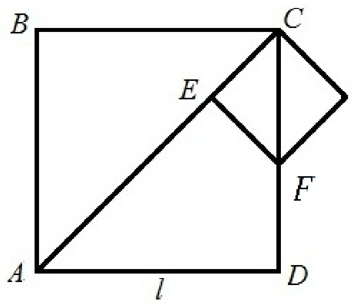


Figura 5.7. Subtração recíproca do lado e da diagonal de um quadrado (continuação).

Ou seja, este processo de subtração recíproca não termina e, portanto, nunca se obterão dois segmentos de reta iguais. Logo, este processo é infinito o que significa que os segmentos de reta de comprimento *l* e *d* são incomensuráveis. Isto, porque caso *l* e *d* fossem comensuráveis, o processo seria finito, pois

$$\exists\, u \text{ (segmento de reta) e } \exists\, m, n \in IN : l = mu \wedge d = nu$$

e o processo de subtração recíproca, ao fim de um número de passos não superior a *n*, conduziria a dois segmentos de reta iguais.

Observe-se que este caso, do lado de um quadrado e da sua diagonal, apresenta uma regularidade que permite concluir de uma forma rápida que o processo é infinito. Esta regularidade provém de se obterem, ao fim de dois passos, o lado e a diagonal de um outro quadrado; como todos os quadrados são semelhantes entre si, a razão entre l e d é igual à razão entre $d - l$ e $2l - d$. No entanto, na maioria dos casos, como refere Sá (2000), após ter levado a cabo um certo número de passos, o que se pode concluir é que o processo ainda não terminou. Há também historiadores que consideram que a descoberta da incomensurabilidade não surgiu com o quadrado, mas com o pentágono, uma vez que se unirmos as diagonais do pentágono obtemos um pentagrama, o símbolo dos pitagóricos.

Prova indireta da incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado

Podem ser reconstruídas, no entanto, outras demonstrações da incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado. De acordo com Sá (2000), certas passagens dos *Segundos Analíticos* de Aristóteles, têm sido interpretadas como afirmando que se o lado e a diagonal de um quadrado fossem comensuráveis então os números pares seriam iguais aos números ímpares. A prova apresentada, embora dentro do espírito pitagórico, utiliza a redução ao absurdo. É possível que se trate do primeiro caso de demonstração por redução ao absurdo de uma proposição estritamente matemática (Sá, 2000).

Considera-se um quadrado de comprimento l e cuja diagonal meça d.

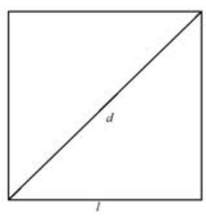


Figura 5.8. Quadrado de comprimento l e diagonal d.

Admite-se que estes dois segmentos, lado e diagonal, são comensuráveis, portanto existe um segmento de reta u que é medida comum de l e d, logo existem números naturais m e n de tal modo que $l = mu$ e $d = nu$. Ora, m e n podem ser escolhidos por forma a que não sejam ambos pares; porque, se m e n fossem ambos números pares, então $2u$ ainda era uma medida comum a l e a d. Assim, existiam números naturais k_1 e k_2 tal que

$$l = k_1 \times 2u \text{ e } d = k_2 \times 2u.$$

Ora, se k_1 e k_2 fossem ambos pares, então $4u$ seria uma medida comum a l e a d. Tomando sucessivamente os segmentos $8u$, $16u$, $32u$, ..., acabar-se-ia por obter segmentos maiores do que l e d e que, portanto, não os poderiam medir.

Considere-se um novo quadrado de comprimento d.

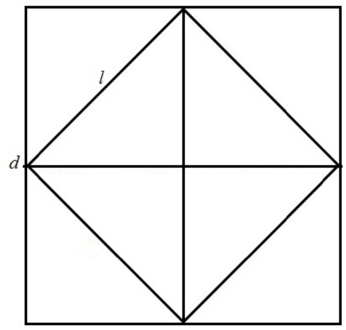


Figura 5.9. Quadrado de lado d que tem área dupla da do quadrado de lado l.

Observa-se que este quadrado tem área dupla do quadrado inicial, uma vez que este novo quadrado se decompõe em oito triângulos retângulos todos iguais, enquanto que o quadrado inicial se decompõe apenas em quatro desses triângulos. De facto, trata-se de um caso particular do teorema de Pitágoras e, segundo Sá (2000), provavelmente conhecido muito antes de se possuir uma demonstração do caso geral. Assim, as áreas dos dois quadrados são também comensuráveis, pois $\frac{d^2}{l^2} = 2$, e, portanto, $d^2 = 2l^2$. Logo, como $l = mu$ e $d = nu$, tem-se $n^2 = 2m^2$ e, portanto, n^2 é par e, consequentemente, n é par, uma vez que um número é par se e somente se o seu quadrado for par. Assim, m será ímpar. Ora, sendo n par, $n = 2k$, com $k \in$ IN, portanto, $n^2 = 4k^2$ e por conseguinte $m^2 = 2k^2$, ou seja, m^2 é par e, portanto, m é par.

Há, portanto, uma contradição: por um lado, m é ímpar, por outro lado, m é par. Deste modo, está provado, por redução ao absurdo, que o lado e a diagonal do quadrado não são comensuráveis.

De acordo com Sá (2000), não é de crer que esta demonstração corresponda ao modo como foi descoberta a incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado. Para este investigador (idem), muito dificilmente um geómetra se lembraria de recorrer ao raciocínio indireto se não suspeitasse da incomensurabilidade das grandezas. Nesse sentido é mais plausível que a descoberta tenha sido realizada através de uma via mais direta, como por exemplo a subtração recíproca. A demonstração por redução ao absurdo deve ter surgido mais tarde, com o objetivo de evitar a referência à infinitude do processo da subtração recíproca, uma vez que o infinito constituía, para os gregos, uma dificuldade.

5.2.3. Consequências da descoberta da incomensurabilidade

Com a descoberta da incomensurabilidade, os princípios da filosofia pitagórica foram profundamente abalados. O facto de nem todos os segmentos de reta admitirem uma medida em comum, significava que nem todas as questões da geometria se podiam reduzir à aritmética e, consequentemente, nem tudo era número. Nesse sentido, tornou-se necessário abordar as questões da geometria por outra via, ocorrendo a separação dos domínios do numérico e do geométrico. Por exemplo, as demonstrações da geometria que recorriam ao uso da teoria das proporções tiveram de ser abandonadas, uma vez que não era lícito aplicar às grandezas aquilo que se sabia acerca dos números naturais (Sá, 2000). Observe-se a forma como se supõe que os pitagóricos demonstravam os teoremas de Tales e de Pitágoras.

Teorema de Tales

Se se cortarem os lados de um ângulo por um feixe de paralelas, os triângulos formados terão os lados proporcionais.

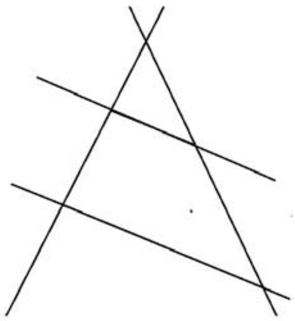


Figura 5.10. Representação geométrica do teorema de Tales.

Considere-se em primeiro lugar um caso particular do Teorema de Tales:

$$\overline{OA} = \overline{AB} \Rightarrow \overline{OC} = \overline{CD}.$$

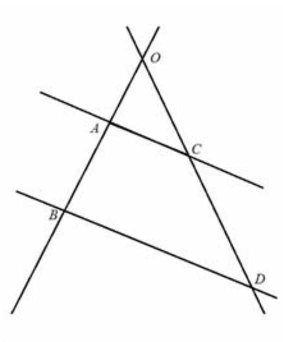


Figura 5.11. Caso particular do teorema de Tales.

Trace-se, pelo ponto C, uma reta paralela a [OA]. Seja E o ponto de interseção dessa reta com a reta [BD].

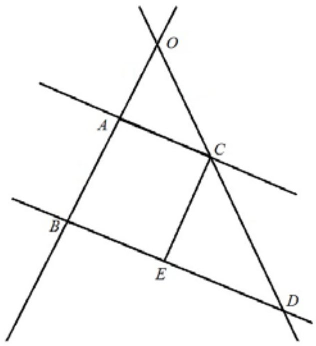


Figura 5.12. Caso particular do teorema de Tales.

Ora, [ABEC] é um paralelogramo, pois [AC] // [BE] e, por construção, [AB] // [CE], e como num paralelogramo os lados opostos são iguais, $\overline{AB} = \overline{CE}$. Logo, como $\overline{OA} = \overline{AB}$, então $\overline{OA} = \overline{CE}$. Portanto, os triângulos [OAC] e [CED] são geometricamente iguais, pois são iguais os ângulos adjacentes a esses lados, a saber $O\hat{A}C = C\hat{E}D$ e $A\hat{O}C = E\hat{C}D$, respetivamente ângulos agudos de lados paralelos. Logo, $\overline{OC} = \overline{CD}$.

Vejamos agora o caso geral. Pretende-se mostrar que: $AC \,//\, BD \Rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CD}}$.

Para os pitagóricos, mostrar esta proporcionalidade significava considerar um certo segmento de reta *u* que coubesse um certo número exato de vezes em [OA] e [AB]. Sejam *m* e *n* números naturais tais que $\overline{OA} = mu$ e $\overline{AB} = nu$.

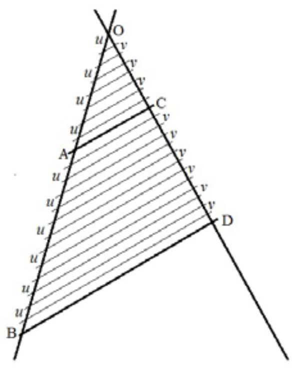


Figura 5.13. O caso comensurável do teorema de Tales.

Traçam-se paralelas a [AC] e a [BD], como na figura, que pelo resultado anterior vão determinar segmentos de reta iguais entre si, ou seja, designando por v esse segmento de reta, $\overline{OC} = mv$ e $\overline{CD} = nv$. Portanto, $\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{mu}{nu} = \frac{m}{n}$ e $\frac{\overline{OC}}{\overline{CD}} = \frac{mv}{nv} = \frac{m}{n}$, logo obtém-se a proporcionalidade pretendida: $\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CD}}$.

Ora, com a descoberta da incomensurabilidade, a suposição que era possível considerar um segmento de reta u que cabia um certo número exato de vezes em [AO] e [AB] não era legitima. Portanto, a demonstração falhava. De facto, os primeiros pitagóricos possuíam apenas os conceitos aritméticos de razão e proporção. Com a descoberta da incomensurabilidade, a teoria pitagórica das proporções estava posta em causa.

Teorema de Pitágoras

Ao contrário do teorema de Tales, no teorema de Pitágoras o conceito de proporção não surge no enunciado, mas julga-se que surgia no argumento demonstrativo usado pelos primeiros pitagóricos.

Suponha-se que se tem um triângulo [ABC], como o da figura, retângulo em A. Seja H o pé da perpendicular baixada do vértice A.

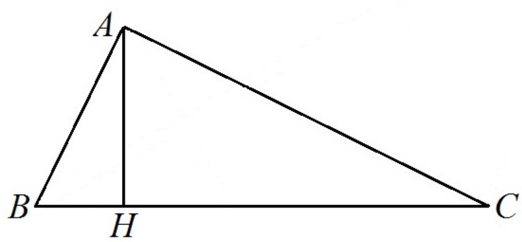


Figura 5.14. Os teoremas da altura e dos catetos.

Ora, os triângulos Δ[ABC], Δ[HBA] e Δ[HAC] são semelhantes. Da semelhança dos triângulos Δ[ABC] e Δ[HBA], tem-se que $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BH}}$ e da semelhança dos triângulos Δ[ABC] e Δ[HAC], $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HC}}$. Portanto, num triângulo retângulo, qualquer cateto é meio proporcional entre a hipotenusa e a sua projeção ortogonal sobre a hipotenusa. Este resultado é conhecido como *teorema dos catetos*.

É de observar que da semelhança dos triângulos Δ[HBA] e Δ[HAC], tem-se que $\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HC}}$. Portanto, num triângulo retângulo, a altura relativamente à hipotenusa é meio proporcional entre os dois segmentos de reta que determina na hipotenusa. Este resultado é conhecido como *teorema da altura*.

Pensa-se que os pitagóricos deduziam o teorema de Pitágoras à custa do teorema dos catetos. Uma vez que $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \overline{BC}\,.\,\overline{BH}$ e $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HC}} \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \overline{BC}\,.\,\overline{HC}$, vem que

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}\,.\,\overline{BH} + \overline{BC}\,.\overline{HC} = \overline{BC}\,.\left(\overline{BH} + \overline{HC}\right) = \overline{BC}^2 .$$

Geometricamente:

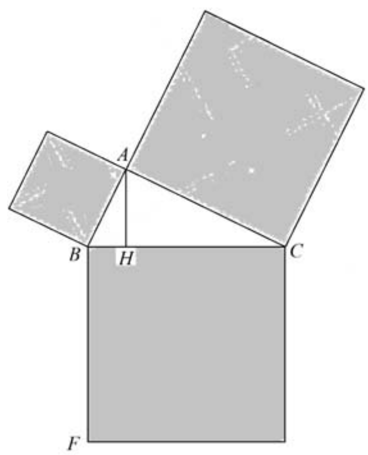


Figura 5.15. O teorema de Pitágoras.

No entanto, com a descoberta da incomensurabilidade, esta demonstração teria deixar de ser válida. Não pela inferência, mas porque faz uso dos conceitos de razão e proporcionalidade.

É de notar que enquanto no teorema de Tales no enunciado se encontra o termo proporção no teorema de Pitágoras isso não acontece, apenas aparece esse conceito na demonstração.

No entanto, no livro I dos *Elementos* de Euclides, na proposição 47, Euclides apresenta uma demonstração do teorema de Pitágoras sem recurso à teoria das proporções. A proposição seguinte, *Elementos* I, 48, a última deste primeiro livro, é o recíproco do teorema de Pitágoras.

Euclides considera um triângulo [ABC] retângulo em A e traça a altura do triângulo por A. Sobre um dos catetos e a hipotenusa constrói dois quadrados, considerando os triângulos [EBC] e [ABG].

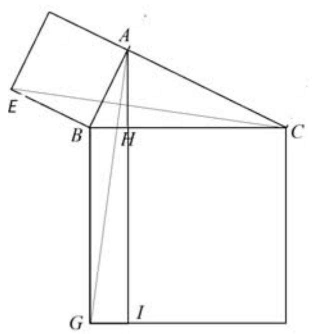


Figura 5.16. O Teorema de Pitágoras, Elementos I, 47.

Ora, os triângulos [EBC] e [ABG] são geometricamente iguais, porque $\overline{BC} = \overline{BG}$ e $\overline{EB} = \overline{AB}$, visto que são lados, respetivamente, dos mesmos quadrados.

Além disso, $E\hat{B}C = A\hat{B}G$. Assim, estes triângulos têm a mesma área e, portanto, os respetivos dobros são iguais.

Euclides observa também que a área do quadrado [ABEF] é o dobro da área do triângulo [EBC]. Com efeito,

$$A_{\square[ABEF]} = A_{\square[ETCF]} - A_{\square[BTCA]} = 2A_{\Delta[ETC]} - 2A_{\Delta[BCT]} = 2A_{\Delta[BEC]} .$$

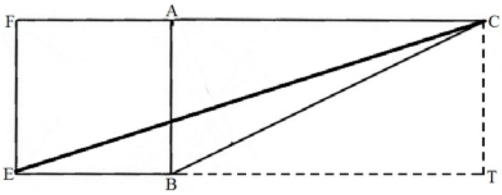


Figura 5.17. Relação entre a área de um quadrado e de um triângulo com a mesma base e altura.

Por razão análoga, a área do retângulo [BHGI] é o dobro da área do triângulo [GBA]. Portanto, são iguais as áreas do quadrado [ABEF] e do retângulo [BHGI].

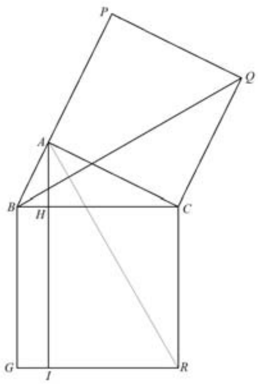


Figura 5.18. O teorema de Pitágoras, Elementos I, 47 (continuação).

Analogamente, Euclides refere que os triângulos [BCQ] e [ACR] são congruentes e, portanto, a área do quadrado [ACPQ] é igual à área do retângulo [CRIH].

Logo, a soma das áreas dos dois quadrados sobre os catetos é igual à soma das áreas dos dois retângulos, ou seja, à área do quadrado [BGRC].

Como foi referido, a descoberta da incomensurabilidade teve consequências para a matemática grega, em particular para a matemática pitagórica. Descobriu-se que a aritmética não era uma ferramenta intelectual suficiente para abordar todas as questões, nomeadamente ao nível das proporções. Perante isto surgiram duas atitudes mentais, abrindo duas vias no estudo da matemática:

– tentar falar da geometria sem falar da proporcionalidade, o que originou o aparecimento de um novo método de prova, bem como dum novo ramo da matemática, usualmente designado por *geometria das áreas*, que permitiu estabelecer os mesmos teoremas sem recorrer ao conceito de proporcionalidade;

– procurar uma *nova teoria das proporções*, aplicável a grandezas quer comensuráveis quer incomensuráveis.

A matemática divide-se então em dois domínios distintos: a aritmética, a ciência dos números, ou seja do discreto; e a geometria, a ciência das grandezas, ou seja do contínuo. Isto, contudo, não significou que não se desenvolvesse a aritmética; apenas gerou novos campos de investigação na geometria. Uma vez que os matemáticos continuavam convencidos da validade das proposições, cujas demonstrações tinham sido colocadas em causa, procuravam demonstrações alternativas.

Alguns historiadores atuais designam esta separação entre a aritmética e a geometria por "divórcio grego", uma vez que se tratou de uma separação profunda ao nível de fundamentos, métodos e objetivos entre os dois ramos da matemática. Sá (2000, p. 247) refere que «este "divórcio" marcou toda a matemática grega pós-pitagórica e, na verdade, toda a matemática islâmica e europeia até ao século XVII».

É, no entanto, de observar que apesar da crise de fundamentos, surgida com a descoberta da incomensurabilidade, os matemáticos do século V a.C. continuaram os seus trabalhos; um exemplo é Hipócrates de Quios, contemporâneo da descoberta da incomensurabilidade, cujo trabalho não foi perturbado pelo evento (Sá, 2000).

5.2.4. A geometria das áreas

O aparecimento das técnicas da geometria das áreas surgiu como uma alternativa aos métodos de prova dos teoremas anteriormente estabelecidos no contexto da teoria pitagórica das proporções, tendo as noções de *aplicação de uma área a um segmento de reta* e de *quadratura* ganho um papel preponderante na resolução de problemas geométricos. Embora não esteja provado que o aparecimento da geometria das áreas resultou da descoberta da incomensurabilidade, não há dúvida que permitiu reformular com êxito as demonstrações de vários teoremas da geometria pitagórica.

Aplicações de áreas

Dados três segmentos de reta a, b e c, construir um quarto segmento de reta x de tal modo que $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$. Este problema corresponde ao problema da determinação do quarto proporcional. Geometricamente para a construção do segmento de reta x, usando o teorema de Tales, procede-se da seguinte forma:

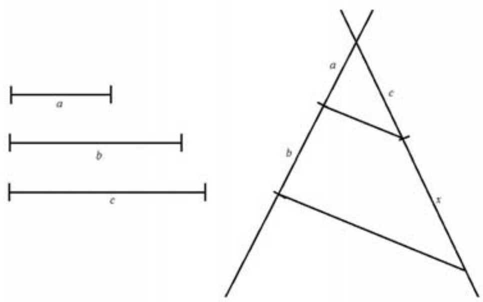


Figura 5.19. Construção geométrica do quarto proporcional.

A determinação do quarto proporcional envolvia a noção de proporcionalidade. Para contornar esta questão, os pitagóricos procederam a uma outra interpretação geométrica. Considerando um retângulo de lados b e c e um segmento de reta a, pretendiam construir um outro retângulo cuja área fosse igual à do retângulo dado e tivesse um dos lados de comprimento igual a *a*. Desta forma, a essência do problema "salvava-se", deixando este problema de se chamar o problema do quarto proporcional e passando a designar-se por um problema de aplicação de área. A resolução apresentada utilizava o conceito de *decomposição da diagonal* de um paralelogramo; conceito esse que desempenhou um papel de relevo na criação dos métodos da geometria das áreas (Sá, 2000).

Sejam [ABCD] um paralelogramo e K um ponto da diagonal AC. Sejam E e F os pontos de interseção da paralela a BC por K com os lados AB e CD, respetivamente, e G e H os pontos de interseção da paralela a AB por K com os lados BC e AD, respetivamente. Os paralelogramos [AEKH] e [KGCF] são semelhantes entre si e ao paralelogramo inicial, [ABCD]; as suas diagonais AK e KC estão contidas na diagonal AC do paralelogramo [ABCD]. A uma decomposição deste tipo designa-se por uma decomposição na diagonal. Na terminologia de Euclides, os paralelogramos [AEKH] e [KGCF] designam-se por paralelogramos na diagonal e os paralelogramos [EBGK] e [HKFD] por paralelogramos complementares (Sá, 2000).

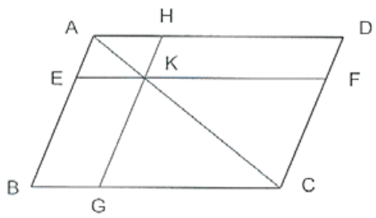


Figura 5.20. Decomposição na diagonal.

Uma vez que qualquer diagonal de um paralelogramo o divide em dois triângulos congruentes (e, portanto, com a mesma área), estabelece-se o seguinte resultado: em qualquer paralelogramo, os complementares dos paralelogramos na diagonal são iguais entre si.

Assim, na resolução do problema supracitado, dado um retângulo de lados *b* e *c* e um segmento de reta *a*, o procedimento geométrico consistia em prolongar um dos lados do retângulo cujo comprimento fosse igual ao segmento *a*. Traçando uma paralela ao outro lado do retângulo, procedia-se geometricamente como na figura seguinte:

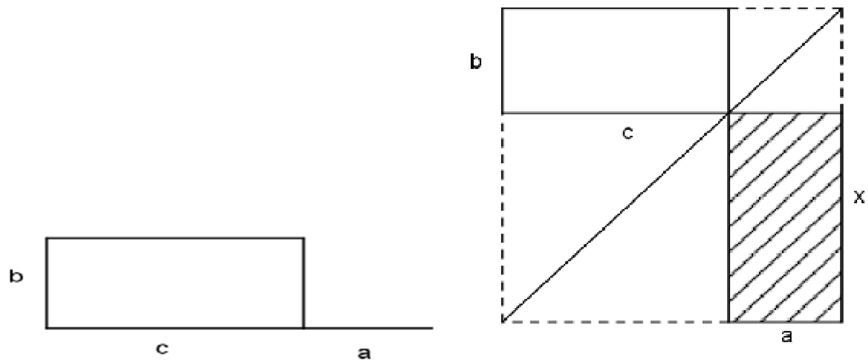


Figura 5.21. Aplicação de um retângulo a um segmento de reta.

O retângulo sombreado corresponde ao retângulo procurado (retângulo cuja área é igual à do retângulo dado e com um dos lados de comprimento igual a a).

Aplicar uma figura retilínea a um segmento de reta, consistia em construir um retângulo sobre esse segmento que tivesse a mesma área da figura retilínea dada. No entanto, por vezes, a aplicação era feita não ao segmento exato, mas a um outro menor ou maior do que o segmento de reta dado; nesses casos, dizia-se que a aplicação era feita, respetivamente, por defeito ou por excesso. Por exemplo, sejam s um segmento de reta e A uma figura plana. Aplicar A a s por defeito é construir um retângulo com um dos lados menor do que s e com área igual à de A. Designando por x e y os lados desse retângulo, em que s contém estritamente y e que ambos têm uma extremidade em comum; o retângulo de lados $s - y$ e x, diz-se o defeito da aplicação.

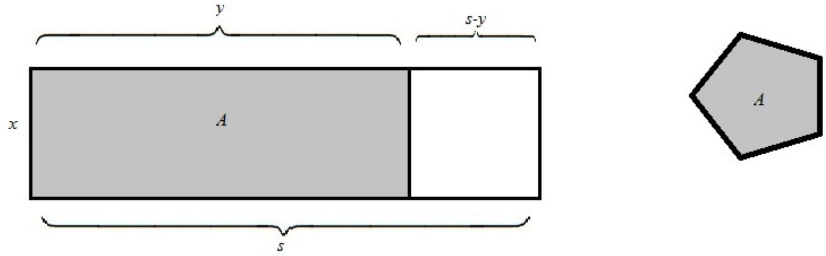


Figura 5.22. Aplicação de uma área por defeito.

Os historiadores acreditam que, inicialmente, os conceitos e os resultados relativos à geometria das áreas diziam respeito a retângulos. Portanto, os pitagóricos teriam desenvolvido o conceito de aplicação, a um segmento de reta s, de um retângulo com área igual à de uma figura plana A. Contudo, nos *Elementos* de Euclides encontra-se a generalização desses conceitos e resultados ao caso dos paralelogramos. Esta sistemática generalização pode-se explicar pelo facto de se atribuir a Euclides a teoria das paralelas (Sá, 2000).

Quadraturas

Dados dois segmentos de reta a e b, construir um terceiro segmento de reta y tal que $\frac{a}{y}=\frac{y}{b}$. Este problema corresponde ao problema da determinação do meio proporcional. Geometricamente, a construção do segmento de reta y envolvia a construção da figura:

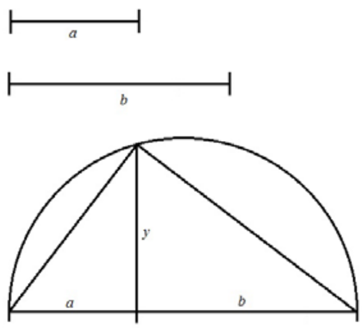


Figura 5.23. Construção geométrica do meio proporcional.

sendo esta justificada com recurso ao teorema da altura, uma vez que os triângulos, respetivamente, de lados a e y e y e b são semelhantes. Portanto, $\frac{a}{y}=\frac{y}{b}$.

Também a determinação do meio proporcional envolvia a noção de proporcionalidade. Novamente para contornar esta questão, a interpretação geométrica dada pelos pitagóricos consistia em considerar um retângulo de lados a

e b e construir um quadrado com a mesma área. Este tipo de construção era designado por quadratura.

O procedimento para esta quadratura podia ser efetuado por dois processos diferentes: construindo um quadrado justaposto ao retângulo dado ou traçando um quadrado num dos extremos do retângulo.

Procedendo à quadratura pelo primeiro procedimento, considerava-se um retângulo e construía-se um quadrado justaposto a esse retângulo.

Figura 5.24. Construção de um quadrado justaposto a um retângulo dado.

Dividindo a figura plana constituída por estas duas figuras a meio, procedia-se geometricamente como na figura seguinte:

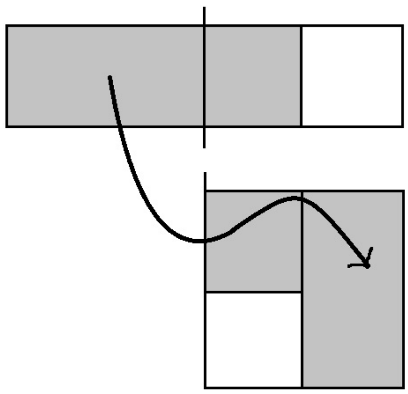


Figura 5.25. Construção de um gnómon.

O *gnómon* na figura corresponde à diferença de dois quadrados, portanto, através da aplicação do teorema de Pitágoras construía-se um quadrado com área igual ao retângulo inicialmente dado.

A ideia da geometria das áreas era manter a área dada, mas dando-lhe uma outra forma. A geometria das áreas tomou, assim, um importante papel na geometria pitagórica, sendo o teorema de Pitágoras um teorema fundamental desta teoria, uma vez que permite somar e subtrair quadrados obtendo sempre um quadrado. De facto, a quadratura de figuras planas constituiu um dos problemas a que se dedicaram os geómetras gregos. Euclides, no livro I, apresenta a forma de transformar qualquer figura plana poligonal num retângulo de igual área e com um lado arbitrariamente escolhido; estudando, no livro II, a transformação de qualquer figura plana poligonal num quadrado de igual área. Desta forma, os problemas de aplicação de área e de quadratura estão completamente resolvidos nos *Elementos* de Euclides para o caso dos polígonos.

Álgebra geométrica dos gregos

Constituído apenas por catorze proposições, o segundo livro dos *Elementos* é o menor dos treze livros que compõem o tratado de Euclides. A generalidade dos historiadores atribui à escola pitagórica os resultados expostos neste segundo livro, parecendo ser o seu conteúdo, de um modo geral, mais antigo do que o livro I (Sá, 2000). A leitura e análise deste livro permitem uma interpretação algébrica da geometria grega, não sendo, no entanto, a legitimidade dessa interpretação uma opinião unânime entre os historiadores da matemática. Ainda hoje, os especialistas discutem, entre si, sobre a existência ou não de um *raciocínio de tipo algébrico* na matemática grega (Sá, 2000).

Do final do século XIX até à década de 70 do século XX vigorou a teoria de que o livro II era um livro de álgebra, sendo designado por *álgebra geométrica dos gregos*. Os historiadores que defendem esta opinião, referem que os gregos (Euclides e outros) queriam transmitir resultados de álgebra, mas como não dispunham de uma simbologia adequada às representações algébricas, serviam-se da geometria para exprimir esses resultados algébricos. Portanto, a geometria era a linguagem da álgebra. Contudo, outros historiadores referem que até Diofanto não há pensamento algébrico na matemática grega, sendo que a origem das proposições do livro *Elementos* II se encontra em problemas de índole geométrica e não algébrica. Para estes especialistas, só mais tarde, nomeadamente os árabes, na Idade Média, «(…) teriam constatado que as técnicas da geometria das áreas podiam ser utilizadas também para representar situações ocorrentes em problemas algébricos e para descobrir e demonstrar procedimentos resolutivos de equações.» (Sá, 2000, p. 276).

Tendo em consideração a opinião de muitos dos historiadores da matemática que sugerem uma interpretação aritmético-algébrica da geometria grega, observem-se quatro proposições do segundo livro dos *Elementos*.

Elementos II, 1: Dadas duas linhas retas, se uma delas for cortada num número qualquer de segmentos então o retângulo contido pelas duas linhas retas é igual aos retângulos contidos pela linha reta não cortada e por cada um dos segmentos.

No contexto algébrico, esta proposição pode ser interpretada como a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição.

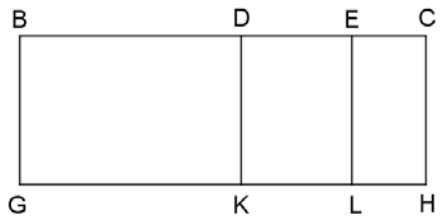


Figura 5.26. Versão geométrica da distributividade da multiplicação relativamente à adição (de segmentos de reta): diagrama relativo à proposição Elementos II, 1.

Elementos II, 4: Se uma linha reta for cortada ao acaso então o quadrado sobre o todo é igual aos quadrados sobre os segmentos e duas vezes o retângulo contido pelos segmentos.

Esta proposição também admite uma interpretação algébrica, podendo ser entendida como a expressão para o quadrado de uma soma.

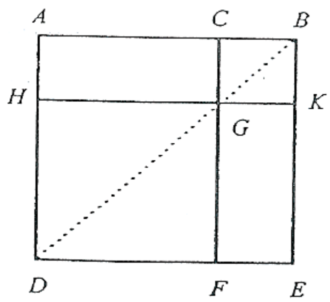


Figura 5.27. Versão geométrica da fórmula para o quadrado de uma soma (de segmentos de reta): diagrama relativo à proposição Elementos II,4.

Na base desta interpretação aritmético-algébrica está a possibilidade de encarar a justaposição de segmentos de reta dados como uma adição e a construção de um retângulo de lados iguais a dois segmentos de reta dados como uma multiplicação (Sá, 2000).

Também as proposições *Elementos* II, 5 e *Elementos* II, 6 podem ser interpretadas como exprimindo a relação algébrica conhecida por diferença de dois quadrados. No entanto, estas duas proposições abordam a questão das quadraturas, no presente caso a quadratura de retângulos.

Elementos II, 5: Se uma linha reta for cortada em segmentos iguais e em segmentos desiguais, então o retângulo contido pelos segmentos desiguais, juntamente com o quadrado sobre a linha reta entre os pontos de secção, é igual ao quadrado sobre a metade.

Euclides inicia a demonstração desta proposição referindo que se cortar o segmento AB, respetivamente, em segmentos iguais, sendo C o ponto médio do segmento de reta AB, e em segmentos desiguais, designando por D um ponto do segmento AB diferente de C, então, em notação simbólica atual, $AD \, . \, DB + CD^2 = CB^2$.

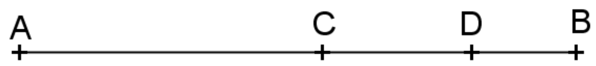


Figura 5.28. Divisão do segmento de reta AB em segmentos iguais (C ponto médio) e segmentos desiguais (D ponto de AB diferente de C).

Euclides procede então à construção do quadrado [CEFB] sobre o segmento CB e considera a decomposição na diagonal representada na figura:

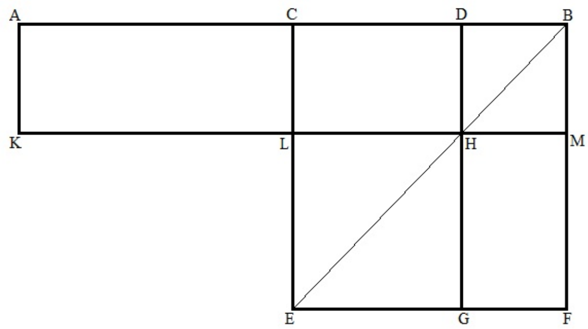


Figura 5.29. Versão geométrica da fórmula para a diferença de dois quadrados (de segmentos de reta): diagrama relativo à proposição Elementos II, 5.

Euclides observa que decompondo o retângulo [AKHD] nos retângulos [AKLC] e [CLHD], os retângulos [AKLC] e [CLMB] têm a mesma área (porque C é o ponto médio de [AB]), bem como os retângulos [CLHD] e [HGFM] (porque são retângulos complementares na decomposição na diagonal). Portanto, o retângulo [AKHD] e o *gnómon* [CLHGFB] têm a mesma área. Assim, o retângulo [AKHD] (de lado AD e DH) e o quadrado LEGH (de lado CD), tomados conjuntamente, têm a mesma área que o quadrado [CEFB] (de lado CB). Ora, DH é igual a DB, pela decomposição da diagonal.

Na interpretação algébrica, se se designar AC por a e CD por b, a proposição é traduzida por $(a + b) \,.\, (a - b) + b^2 = a^2$, ou seja, $(a + b) \,.\, (a - b) = a^2 - b^2$.

A proposição *Elementos* II, 6 é complementar da proposição *Elementos* II, 5.

Elementos II, 6: Se uma linha reta for bissetada e uma outra linha reta lhe for acrescentada no seu prolongamento, então o retângulo contido pelo todo com a linha reta acrescentada, juntamente com o quadrado sobre a metade, é igual ao quadrado sobre a linha reta constituída pela metade e pela linha reta acrescentada.

Estas proposições têm uma grande importância histórica, sobretudo pelo uso que delas haveriam de fazer os matemáticos árabes na Idade Média (Sá, 2000). De facto, estas duas proposições podem ser interpretadas como justificações geométricas das resoluções algébricas típicas de uma equação quadrática (Katz, 1993).

No caso de *Elementos* II, 5, considerando AB igual a b e designado DB por x, tem-se $(b-x)x+\left(\frac{b}{2}-x\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2$, ou seja, $(b-x)x=\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}-x\right)^2$.

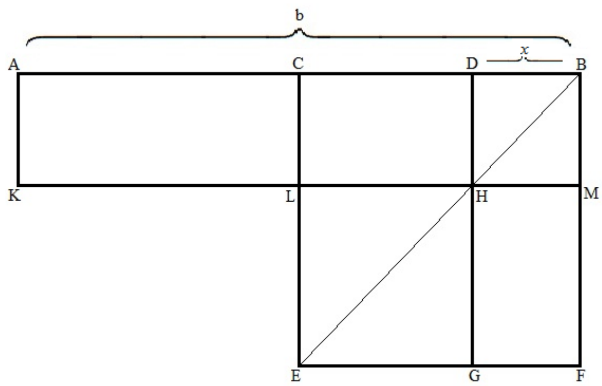


Figura 5.30. Resolução geométrica da equação quadrática $bx - x^2 = c$: diagrama relativo à proposição Elementos II, 5.

Desta forma, a equação quadrática $bx - x^2 = c$ pode ser resolvida igualando $\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}-x\right)^2$ a c, e obtendo $x=\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$. Katz (1993) observa ainda que, considerando AD igual a y e DB igual a x, a equação $bx - x^2 = c$ pode ser traduzida no sistema babilónico, atrás mencionado, por $x + y = b$ e $xy = c$.

É de notar que quando se pretende aplicar um retângulo, de área igual à de uma figura plana A, a um segmento de reta s, procura-se um segmento de reta x tal que o retângulo de lados s e x tenha a área de A. Nesse sentido, a aplicação a s de um retângulo de área A corresponde a encontrar x que satisfaça a seguinte igualdade $s.x = A$, o que corresponde a uma divisão. Do mesmo modo, para quadrar uma figura plana A, procura-se um segmento de reta x tal que o quadrado de lado x tenha a área de A. Assim, a quadratura de A corresponde a encontrar x que satisfaça a igualdade seguinte: $x^2 = A$, o que irá corresponder a uma extração de uma raiz quadrada. As aplicações de áreas a segmentos de reta e as quadraturas de figuras planas são, assim, suscetíveis de serem encaradas em sentido aritmético-algébrico (Sá, 2000). É claro que no caso de a figura plana A ser um retângulo, as aplicações de áreas e as quadraturas podem ser formulada em termos de proporcionalidade. Como já observado, aplicar um retângulo a um segmento de reta equivale a construir o quarto proporcional e quadrar um retângulo equivale a construir o meio proporcional.

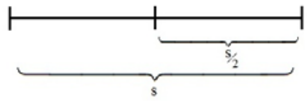
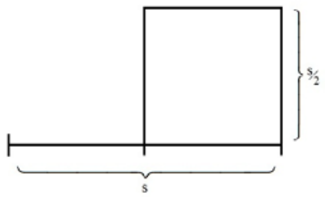
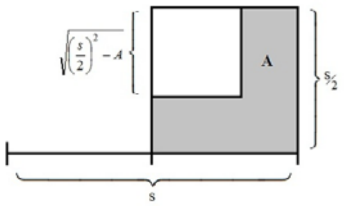
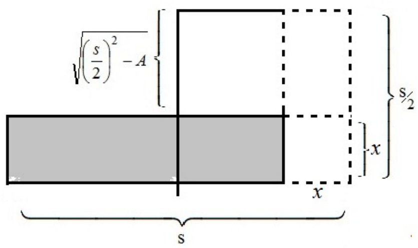
De entre as restantes proposições do livro II dos *Elementos,* há a destacar a proposição 11, uma vez que não se trata de uma igualdade entre expressões quadráticas, mas da resolução de uma equação quadrática concreta, cuja solução conduz à conhecida *divina proporção*.

No entanto, é no livro VI dos *Elementos* que Euclides se dedica à resolução, embora de forma geométrica, das equações do 2.° grau. As proposições 28 e 29 do livro VI dos *Elementos* são as que apresentam tais resoluções, resoluções essas geométricas baseando-se em aplicações de áreas, sendo que a proposição 27 do mesmo livro dá a condição de resolubilidade da proposição 28. Note-se que proposições 28 e 29 são uma generalização do método de aplicação de áreas, pois a base sólida para as proporções é dada no livro II, sendo os retângulos substituídos, agora, por paralelogramos.

Em *Elementos* VI, 28, Euclides pretende aplicar a uma linha reta dada um paralelogramo igual a uma figura retilínea dada e deficiente por uma figura paralelogrâmica semelhante a uma dada (em que a figura retilínea dada não pode ser maior do que o paralelogramo descrito sobre a metade da linha reta e semelhante ao defeito). No caso de *Elementos* VI, 29, pretende aplicar um paralelogramo igual a uma figura retilínea dada por excesso, de tal modo que o excesso seja uma figura paralelogrâmica semelhante a uma dada. Supõe-se, no entanto, que os pitagóricos tenham formulado estes mesmos problemas, mas em que o defeito ou o excesso fosse um quadrado. De facto, as proposições 28 e 29 do livro VI são uma generalização desta situação.

Considere-se o caso particular de *Elementos* VI, 28, em que se pretende aplicar uma área A a um segmento s em que o defeito é quadrado. Em sentido algébrico, este problema corresponde a procurar x de tal modo que $x^2 + A = sx$ (equação do tipo $x^2 + q = px$), ou seja, corresponde a resolver uma equação do 2.° grau, ou equivalentemente, a resolver o sistema $\begin{cases} x + y = s \\ x.y = A \end{cases}$ (problema que pode ser visto como o de procurar um retângulo, sendo dada a soma e o produto dos seus lados; um problema semelhante aos que pareciam no contexto matemático da Babilónia). Tendo em consideração o procedimento e construção geométricos realizados, a respetiva interpretação algébrica permite resolver a equação $x^2 + A = sx$ e pode ser sintetizada no quadro seguinte:

Tabela 5.8. Interpretação algébrica do procedimento geométrico presente em Elementos VI, 28

Procedimento geométrico	Construção geométrica	Interpretação algébrica
Dividir a meio o segmento de reta s		$\frac{s}{2}$ comprimento do lado do quadrado construído sobre a metade de s
Construir um quadrado de lado igual a metade de s		$\left(\frac{s}{2}\right)^2$ área desse quadrado
Construir um outro quadrado que seja igual à diferença entre o quadrado anteriormente construído e a área dada A		$\left(\frac{s}{2}\right)^2 - A$ área do quadrado que igual à diferença entre o quadrado anteriormente construído e a área dada A
Procedendo como na figura, observa-se que a sombreado encontra-se a solução procurada: aplicação de A a s por defeito, em que o defeito é um quadrado		o lado procurado x é dado por $x = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - A}$

É no entanto de observar que só é possível encontrar o valor de x, se $\left(\frac{s}{2}\right)^2 > A$. Esta questão seria resolvida através da versão pitagórica dos *Elementos* VI, 27: de todos os retângulos que se podem aplicar por defeito a um segmentos de reta, com defeito quadrado, o maior é o quadrado cujo lado é metade do segmento de reta dado.

5.2.5. A teoria das proporções de Eudoxo

A descoberta dos incomensuráveis ameaçou a matemática grega de uma crise lógica, lançando, portanto, dúvidas sobre as provas que usavam o conceito de proporcionalidade. O aparecimento da geometria das áreas permitiu contornar algumas questões, contudo, não resolveu todas as dificuldades criadas à geometria pitagórica pela descoberta da incomensurabilidade, sentindo-se ainda a necessidade de uma teoria das proporções que fosse também válida para grandezas incomensuráveis. A procura de uma teoria das proporções alternativa à pitagórica originou uma série de investigações matemáticas na Antiga Grécia. Seria Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) quem, aprofundando as investigações de Teeteto de Atenas (417-369 a.C.) sobre a proporcionalidade, viria a formular uma nova teoria das proporções, que Euclides iria expor no livro V dos *Elementos* e que se revelaria da maior importância histórica (Sá, 2000). Contudo, será no livro VI que Euclides se dedica ao estudo da semelhança de figuras, aplicando a teoria geral das proporções exposta no livro V. Entre as diversas proposições presentes no livro VI, destacam-se *Elementos* VI, 1, que ilustra a definição eudoxeana de proporção entre dois comprimentos e duas áreas; *Elementos* VI, 2, onde é possível estabelecer o caso geral do teorema dito de Tales; *Elementos VI*, 12 e *Elementos* VI, 13, onde se apresentam, respetivamente, as construções geométricas do quarto proporcional e do meio proporcional para segmentos de reta.

Livro V dos *Elementos*

Na definição 3 do livro V, Euclides define *razão* afirmando que é uma espécie de relação a respeito do tamanho entre duas grandezas do mesmo tipo, referindo, na definição 4, que *têm uma razão* as grandezas que são capazes, quando multiplicadas, de se exceder uma à outra. Portanto, Euclides caracteriza, de forma inequívoca, duas grandezas do mesmo tipo (dois comprimentos, duas áreas ou dois volumes), isto é, duas grandezas *homogéneas*. Traduzindo em notação simbólica atual, duas grandezas α e β são do mesmo tipo se existem dois números naturais m e n de tal modo que $m\alpha > \beta$ e $n\beta > \alpha$. No entanto, é na definição 5 que assenta a teoria das proporções. Nesta definição, Euclides refere que grandezas *estão na mesma razão*, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando, dados quaisquer equimúltiplos da primeira e da terceira e dados quaisquer equimúltiplos da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos simultaneamente excedem, são simultaneamente iguais ou ficam simultaneamente aquém dos últimos. Esta definição é consolidada na definição 6, do mesmo livro, em que Euclides define que grandezas que têm a mesma razão dizem-se *proporcionais*. De acordo com estas duas últimas definições, em notação atual, a proporcionalidade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ significa que, quaisquer que sejam os números naturais m e n, se $ma < nb$, então $mc < nd$; e se $ma = nb$, então $mc = nd$; e se $ma > nb$, então $mc > nd$. Do ponto de vista lógico, estas duas definições reduzem «(...) a noção de proporção entre dois pares de grandezas homogéneas à noção de ordem entre múltiplos dessas grandezas.» (Sá, 2000, p. 287) Na definição 7, Euclides refere que quando, dos equimúltiplos, o múltiplo da primeira grandeza excede o múltiplo da segunda, mas o múltiplo da terceira não excede o múltiplo da quarta, diz-se que a primeira *tem uma razão maior* para a segunda do que a terceira tem para a quarta. Em notação atual, de acordo com esta definição, dizer que $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, então significa dizer que existem dois números naturais m e n tal que é verdadeira a desigualdade $ma > nb$, mas não o é a desigualdade $mc > nd$.

Livro VI dos *Elementos*

Em *Elementos* VI, 1, Euclides ilustra a definição eudoxeana de proporção entre dois comprimentos e duas áreas.

Elementos VI, 1: Triângulos e paralelogramos sob a mesma altura estão entre si como as suas bases.

Considere-se o caso dos triângulos, pois o caso dos paralelogramos é um corolário imediato daquele.

Sejam T_1 e T_2 dois triângulos com a mesma altura e b_1 e b_2, respetivamente, as bases de T_1 e T_2 , como na figura (nota: $r//s$).

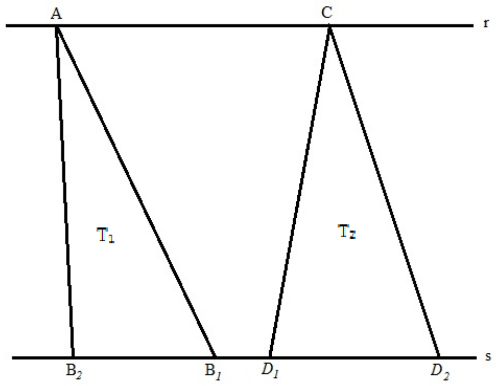


Figura 5.31. Triângulos T_1 e T_2 com a mesma altura e bases, respetivamente, b_1 e b_2.

Na reta *r*, considerem-se *m* segmentos de reta iguais a b_1 e *n* segmentos de reta iguais a b_2, como na figura.

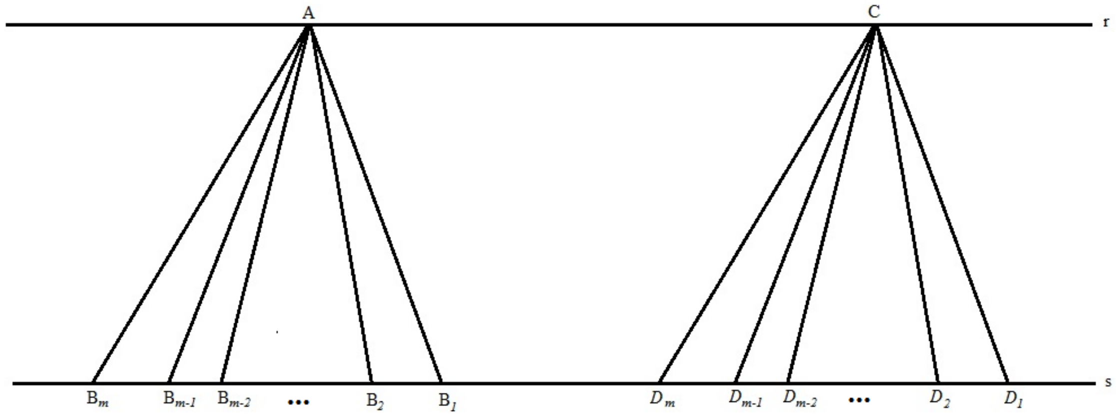


Figura 5.32. Comparação entre equimúltiplos de T_1 e b_1 e equimúltiplos de T_2 e b_2, respetivamente.

Pretende-se mostrar que $\frac{T_1}{T_2}=\frac{b_1}{b_2}$. Através da observação figura, conclui-se que o comprimento do segmento de reta B_1B_m é *m* vezes o comprimento de b_1 e o comprimento do segmento de reta D_1D_n é *n* vezes o comprimento de b_2. Além disso os triângulos representados *n*a figura de base igual a b1 têm todos a mesma área, porque além de terem a mesma base, têm a mesma altura. De igual modo, todos os triângulos representados na figura de base igual a *b*2 têm todos a m

Ora, se $mb_1 > nb_2$ então, como os triângulos $[AB_1B_m]$ e $[BD_1D_n]$ têm a mesma altura, o triângulo $[AB_1B_m]$ é maior do que o triângulo $[BD_1D_n]$, ou seja, $mT_1 > nT_2$.

Analogamente, se $mb_1 = nb_2$, os triângulos $[AB_1B_m]$ e $[BD_1D_n]$ são iguais, portanto, $mT_1 = nT_2$. Finalmente, se mb1 < nb2 então o triângulo [AB1Bm] é menor do que o triângulo [BD1Dn], logo mT1 < nT2. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{b_1}{b_2}$ P

Em *Elementos* VI, 2 é possível estabelecer o caso geral do teorema dito de Tales. De facto, o resultado conhecido pelo nome de teorema de Tales é a primeira parte desta proposição, podendo ser deduzido como um simples corolário da proposição anterior.

Elementos VI, 2: Se for desenhada uma linha reta paralela a um dos lados de um triângulo, ela dividirá os lados do triângulo proporcionalmente; e se os lados do triângulo forem divididos proporcionalmente então a linha unindo os pontos de secção será paralela ao restante lado do triângulo.

Observe-se a demonstração, dada por Euclides, da primeira parte desta proposição:

Sejam ABC um triângulo e D e E os pontos em que uma paralela ao lado BC interseta os lados AB e AC, respetivamente. Pretende-se provar que $\frac{BD}{DA} = \frac{CE}{EA}$.

Tracem-se as retas BE e CD e designem-se por T_1, T_2 e T_3 , respetivamente, os triângulos [BDE], [CDE] e [ADE].

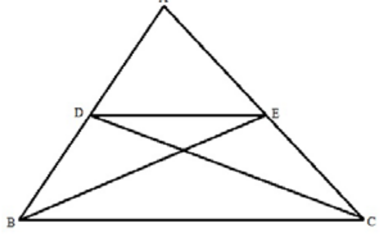


Figura 5.33. Construção geométrica utilizada na demonstração euclidiana do teorema dito de Tales.

Ora, os triângulos [BDE] e [CDE] têm a mesma área, pois têm a mesma base (o segmento DE) e a mesma altura (a distância entre as paralelas BC e DE), portanto, $T_1 = T_2$. Por *Elementos* VI, 1, triângulos sob a mesma altura estão entre si como as suas bases, portanto, como os triângulos [DBE] e [ADE] têm a mesma altura, $\frac{BD}{AD} = \frac{T_1}{T_3}$. De igual modo se conclui que $\frac{CE}{AE} = \frac{T_2}{T_3}$. Como $T_1 = T_2$, então $\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$.

5.2.6. Construções com régua não graduada e compasso e os três problemas clássicos da geometria grega

Influenciada pelas investigações feitas para tentar resolver a questão da incomensurabilidade, uma parte substancial do percurso efetuado pela matemática grega esteve subordinado à geometria. Nesse sentido, o raciocínio matemático dos gregos baseava-se, quase unicamente, em formas e figuras geométricas. Um segmento de reta representava também o seu próprio comprimento; o produto de dois segmentos de reta representava uma área retangular; o produto de três segmentos de reta representava um volume paralelepipédico. Isto é, as operações aritméticas eram efetuadas através das construções geométricas, por exemplo, se a e b representavam dois segmentos, então ab representava a área do retângulo de lados a e b. Os gregos criaram, assim, uma nova representação geométrica de grandezas – a representação por meio de superfícies – cujo estudo e teoria constituem a parte da matemática grega designada por álgebra geométrica (Vasconcellos, 2009) ou geometria das áreas.

Dado o interesse dos gregos pelo estudo da geometria, a régua não graduada e o compasso tomaram um papel relevante nas construções geométricas realizadas pelos geómetras gregos. No entanto, por vezes, necessitavam «(…) de recorrer a construções que não conseguiam reduzir ao traçado e ao prolongamento de retas e ao traçado de circunferências e que, portanto, exigiam instrumentos de tipo diferente.» (Sá, 2000, p. 280). É de observar que embora em Apolónio se encontre de forma explícita o requisito de que as construções geométricas devem ser limitadas apenas à régua não graduada e ao compasso, de acordo com Struik (1997) esta não era, de facto, uma exigência geral dos gregos.

Ao se falar em construções com régua não graduada e compasso está-se a referir aos três primeiros postulados dos *Elementos* de Euclides. De facto, estes postulados são a base destas construções, sendo muitas vezes designadas por construções euclidianas. Contudo, nos *Elementos* não há qualquer referência ao compasso ou a quaisquer outros instrumentos, assumindo Euclides, simplesmente, que linhas retas podem ser construídas dados dois pontos e prolongadas, e que uma circunferência pode ser construída dado o seu centro e passando por um outro ponto. A régua não tem, portanto, propriedades métricas e o compasso é de pontas "caídas", contrariamente ao compasso de pontas fixas. Contudo, a possibilidade de transposição de comprimentos é assegurada por *Elementos* I, 2.

Para os geómetras gregos, um problema resolúvel com régua não graduada e compasso era um problema cuja solução consistia em construir os elementos desconhecidos, a partir dos elementos geométricos conhecidos, apenas com recurso à régua não graduada e ao compasso. Isto significava que só se podiam executar construções que se fundamentassem nos três primeiros postulados dos *Elementos* de Euclides. Este tipo de pensamento levou Papo de Alexandria (importante comentador dos séculos III-IV da nossa era), atendendo aos meios pelos quais é possível construir uma solução, a classificar os problemas geométricos em três tipos. Designou por *planos*, os problemas que apenas podem ser resolvidos por meio de linhas retas e circunferências, uma vez que as curvas referidas têm a sua origem num plano; os que envolviam na sua resolução superfícies cónicas, designou-os por problemas *sólidos,* porque faziam uso de superfícies de figuras sólidas; e aos que envolviam, na sua construção, curvas que se obtêm de superfícies menos regulares e de movimentos mais complexos, designou-os por *lineares*.

Apesar da crise de fundamentos, surgida com a descoberta da incomensurabilidade, nem todos os matemáticos pararam de desenvolver os seus trabalhos. É neste período que se inicia o estudo de três problemas geométricos que, durante mais de dois mil anos, desafiaram o poder inventivo de inúmeros matemáticos. Durante séculos diversas soluções foram propostas para a resolução destes problemas geométricos, mas, contudo, não estavam de acordo com as regras exigidas, presumivelmente colocadas na Academia de Platão, onde se admitiam apenas construções com régua não graduada e compasso. Estes problemas ficaram famosos, talvez por serem os primeiros onde surgiram grandes dificuldades de resolução, de acordo com as regras inicialmente colocadas. São conhecidos pelos *Três Problemas Clássicos da Geometria Grega*: *trissecção do ângulo* (problema que consiste em dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais); *duplicação do cubo* (problema que consiste em construir a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado); e *quadratura do círculo* (problema que consiste em construir um quadrado cuja área é igual à de um círculo dado).

Não conseguindo resolver estes três problemas apenas com recurso à régua não graduada e ao compasso, os gregos procuraram encontrar outro tipo de curvas, que não a reta e a circunferência, que lhes permitissem encontrar a respetiva solução geométrica. Deste modo, o desenvolvimento da matemática na Antiga Grécia foi, também, motivada por este esforço. Por exemplo, o problema da quadratura do círculo, embora remontando ao antigo Egito, suscitou o estudo, por parte de Hipócrates de Quios, da quadratura de lúnulas, primeira quadratura rigorosa de uma área curvilínea (Boyer, 2002); originou o aparecimento de uma curva descrita por via cinemática, a quadratriz de Hípias de Elis; e promoveu os estudos de Arquimedes através da espiral (Vasconcellos, 2009). No que diz respeito à trissecção do ângulo, a quadratriz de Hípias, também conhecida por trissectriz, permite reduzir a multissecção de um ângulo agudo à multissecção de um segmento de reta. A espiral de Arquimedes é um outro exemplo de uma outra curva que pode ser utilizada para a multissecção de um ângulo, em particular, para a trissecção (Vasconcellos, 2009). Há ainda as soluções para a trissecção do ângulo, transmitidas por Papo, que fazem uso de cónicas. Quanto à duplicação do cubo, o primeiro contributo para a resolução do problema foi de Hipócrates de Quios, que reduziu este problema a um outro: a procura de dois meios proporcionais entre a aresta do cubo dado e o seu dobro (Vasconcellos, 2009). A partir desta contribuição de Hipócrates, os esforços dos matemáticos vão no sentido de procurar os dois meios proporcionais em causa. A solução apresentada por Arquitas de Tarento é uma solução tridimensional, que envolve três superfícies de revolução (Vasconcellos, 2009). A solução que Menecmo apresentou para encontrar os meios proporcionais, referidos por Hipócrates, faz uso de curvas que se podem obter pela interseção dum cone de base circular com um plano. Nesse sentido, pensa-se que foram as investigações efetuadas por Menecmo, para solucionar o problema em estudo, que o levaram à descoberta das secções cónicas (Vasconcellos, 2009). Também Eutócio de Áscalon atribui a Platão uma solução para o problema da duplicação do cubo, com recurso a um engenho mecânico — o *esquadro de Platão* — que faz uso de uma determinada configuração de triângulos retângulos (Sá, 2000). No entanto, esta não é a única solução conhecida através de engenhos mecânicos. Eratóstenes de Cirene construiu um engenho, com o intuito de resolver este problema, engenho esse conhecido pelo nome de *mesolábio*, que tem como base uma configuração de triângulos semelhantes que deslizam sobrepondo-se, permitindo construir os dois segmentos em proporção contínua entre a aresta do cubo dado e o seu dobro (Sá, 2000). Também a concoide de Nicomedes aparece associada ao problema da duplicação do cubo (Vasconcellos, 2009). Uma outra solução por meio de uma curva, legada pelos gregos, faz uso da cissóide de Diocles. A solução apresentada por este matemático parece ter influenciado outras soluções, nomeadamente, as soluções de Esporo e Papo.

Os problemas clássicos da geometria grega originaram, assim, um pretexto para estudar curvas mais complexas que a reta e a circunferência, e em particular suscitaram o estudo das cónicas. De facto, os problemas da trissecção do ângulo e da duplicação do cubo têm alguns pontos em comum. Ambos podem ser resolvidos através de secções cónicas e quando traduzidos em linguagem algébrica exprimem-se por equações cúbicas.

Embora nos *Elementos* de Euclides se encontrem vários problemas de construções geométricas, cujas soluções podem ser obtidas com o uso exclusivo da régua não graduada e do compasso, isso não acontece com estes três problemas clássicos da geometria grega. Papo, no prefácio ao livro III da sua *Coleção Matemática,* sugere que estes problemas talvez sejam impossíveis de resolver com os instrumentos euclidianos. No entanto, a impossibilidade de resolução destes problemas geométricos só foi completamente esclarecida no final do século XIX, depois dos trabalhos de Abel (1802-1829) e Gauss (1777-1855) sobre a resolução de equações algébricas por meio de radicais (Boyer, 1989; Katz, 1993). A demonstração da impossibilidade deve-se ao facto de que as únicas medidas que se podem obter nas construções com régua não graduada e compasso, são as que se podem obter através da adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas a partir de números naturais. A procura de solução para estes, e outros problemas geométricos permitiu que, aos longos dos tempos, inesperados e interessantes desenvolvimentos matemáticos surgissem e novos horizontes despontassem, nomeadamente no desenvolvimento da álgebra: por um lado a tendência para aperfeiçoar o simbolismo algébrico, de modo a tornar o trabalho com operações e equações mais simples; por outro lado, o esforço para compreender a natureza de novos conjuntos de números introduzidos e a respetiva formalização.

5.2.7. A *Aritmética* de Diofanto

A partir do século IV, a ciência antiga entrou em fase de decadência (Sá, 2000,). Embora Alexandria permanecesse o centro da matemática antiga, continuando a produzir trabalhos originais, as compilações e os comentários tornaram-se cada vez mais a forma de ciência predominante (Struik, 1997). Para Struik (1997), o modo geométrico primitivo de expressão e a falta de uma notação algébrica tornou quase impossível qualquer avanço das matemáticas para além das secções cónicas. No entanto, de acordo com este historiador (idem), a matemática de Alexandria não era puramente “grega” no sentido euclidiano-platónico tradicional. A par das demonstrações geométricas abstratas, foram-se desenvolvendo a aritmética computacional e a álgebra do tipo egito-babilónica.

A necessidade de uma notação mais sofisticada surgiu, assim, associada à resolução de equações algébricas. Embora os egípcios resolvessem equações do primeiro grau e algumas equações particulares do segundo grau e os babilónios conhecessem o método para resolver qualquer equação do segundo grau, estas civilizações não possuíam notações nem fórmulas gerais. Os gregos também resolviam estes tipos de equações por métodos geométricos, contudo, é no século III d.C. na *Aritmética* de Diofanto que se encontra pela primeira vez o uso de uma letra para representar a incógnita numa equação. A partir da *Coleção* de Papo de Alexandria não se registam grandes desenvolvimentos no campo da geometria, sendo no campo da teoria dos números que surgem novos progressos. No entanto, não se inserindo na corrente dominante da ciência grega, a obra de Diofanto pode ter sofrido a influência de antigas práticas matemáticas, em particular da aritmética egípcia e da álgebra mesopotâmica (Sá, 2000).

Pouco se conhece sobre a vida de Diofanto. Supõe-se que viveu na Alexandria no século III d.C. e, de acordo com o epigrama 126 do Livro XIV da *Antologia Grega*, terá morrido com 84 anos de idade (Katz, 1993), sendo através da *Aritmética* que a influência matemática de Diofanto alcançou os nossos dias (Katz, 1993). Para Vasconcellos (2009), Diofanto representa na história da aritmética um papel semelhante ao de Euclides na geometria e de Ptolemeu na astronomia.

A *Aritmética* de Diofanto era composta por treze livros, tendo seis deles chegado à atualidade na versão original (Struik, 1997). Mais tarde, foram descobertos outros quatro, escritos em árabe, embora o estilo de resolução dos problemas seja diferente dos de origem grega. Katz (1993) refere que, nos livros encontrados em árabe, os passos da resolução dos problemas são explicados detalhadamente. Para este autor, é possível que «(...) o trabalho árabe seja uma tradução não do original de Diofanto, mas de um comentário sobre a *Aritmética* escrito por Hipatia por volta do ano 400 [d.C.].» (Katz, 1993, p. 163).

Diofanto iniciou a *Aritmética* com um longo preâmbulo onde expôs quais os conhecimentos indispensáveis para a leitura e entendimento do tratado. Começou por definir *número* como um composto de *unidades*, indo mais longe que Euclides ao englobar nesta definição todos os racionais positivos e, de seguida, apresentou uma nomenclatura para potências de quantidades desconhecidas e inversos dessas potências até ao sexto grau (Eecke, 1959).

Para Diofanto, entre os números existiam: os *quadrados*, que eram obtidos a partir da multiplicação de um número (o lado do quadrado) por si próprio; os *cubos*, formados a partir da multiplicação de um quadrado pelo seu próprio lado; os *quadrado-quadrados*, que eram o produto dos quadrados por si próprios; os *quadrado-cubos*, obtidos a partir da multiplicação de um quadrado por um cubo formado a partir do mesmo lado; e os *cubo-cubos*, que eram o produto dos cubos por si próprios. Acresce que Diofanto considerava ainda que a adição, subtração, multiplicação e divisão destes números constituíam a maior parte dos problemas aritméticos (Eecke 1959). Deste modo, e de acordo com Diofanto, a resolução de problemas aritméticos envolvendo este tipo de números suscitava a necessidade de uma simbologia própria (Katz, 1993).

Diofanto designou a quantidade desconhecida por *aritmos*[4] representando-a pelo símbolo ς (última letra da palavra grega $\alpha\rho\iota\theta\mu o$ς). Diofanto representou ainda o quadrado de uma quantidade desconhecida por Δ^y (com origem em *dynamos* = *potência*, neste caso *quadrado*); o cubo por K^y (com origem em *kybos* = *cubo*) (Mahoney, 1973); o quadrado-quadrado por $\Delta^y\Delta$; o quadrado-cubo por ΔK e o cubo-cubo por K^yK. As potências inversas eram definidas utilizando os símbolos atrás descritos com a marca χ. Por exemplo, $\frac{1}{x^2}$ era representado por $\Delta^y\chi$ (inverso do quadrado de *aritmo*). Diofanto introduziu também um símbolo, $\overset{o}{M}$ (com origem em *mónadas* = *unidades*), para representar as unidades.

[4] Em grego: αριθμος, que significa *número*.

Diofanto continuou a introdução da sua *Aritmética*, definindo os resultados da multiplicação e divisão entre as diversas potências de quantidades desconhecidas.

Ainda em relação à sua nomenclatura, Diofanto definiu o símbolo ⋔ para notar as subtrações. Numa dada expressão os termos a somar eram meramente justapostos. O mesmo acontecia com os termos a subtrair, mas estes eram precedidos pelo símbolo ⋔. Assim, a expressão $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ na notação de Diofanto escrevia-se na forma $K^y \alpha \varsigma \gamma$ ⋔ $\Delta^y \gamma \overset{o}{M} \alpha$, com $\alpha = 1$ e $\gamma = 3$. Observe-se que os gregos usavam os sucessivos símbolos do alfabeto para representar números (Struik, 1997).

Apesar de usar termos subtrativos nas suas expressões algébricas e de ser conhecedor das regras de multiplicação de números com sinal menos, Diofanto não trabalhava com números negativos. Aliás, para ele, estes números não existiam, resultando apenas das regras necessárias para multiplicar expressões algébricas envolvendo subtrações (Katz, 1993). De facto, em todas as proposições que constituem este tratado, tanto os dados como as soluções procuradas são, exclusivamente, números racionais positivos (Sá, 2000). Segundo Eecke (1959), Diofanto seguiu a tradição da época, na medida em que aceitava e trabalhava apenas com números racionais positivos. Assim, sempre que um problema tinha como solução um número negativo, apelidava-o de "absurdo"; e se a solução fosse um número irracional ou imaginário, era tido como impossível.

A *Aritmética* contém uma coleção muito variada de problemas, alguns dos quais são resolvidos de modo bastante engenhoso, apesar de, na maioria das vezes, a solução ser particularizada. A maioria dos problemas conduz a equações indeterminadas, cujo tratamento revela que Diofanto era conhecedor da álgebra babilónica ou mesmo da indiana (Struik 1997). Contudo, o tipo de processos de resolução usados por Diofanto mostra um certo aperfeiçoamento em relação às álgebras orientais. De facto, nestas, as equações e as próprias resoluções eram redigidas de uma forma retórica, enquanto que Diofanto usava certas abreviaturas para os vários termos envolvidos nas equações e nas respetivas resoluções (Katz 1993). Embora tenha introduzido algumas abreviaturas e símbolos, sendo na *Aritmética* que se encontra pela primeira vez uma utilização sistemática de símbolos algébricos (Struik, 1997), Diofanto resolveu os problemas utilizando um discurso contínuo, dando explicações e resoluções usando texto corrido, à semelhança do que acontecia com os seus antecessores. O facto de os sinais usados por Diofanto serem meras abreviaturas (Klein, 1968) levou Nesselmann (1969, p.302) a designar este procedimento por *álgebra sincopada* que é uma transição da *álgebra retórica* para a moderna *álgebra simbólica*. Esta utilização sistemática de símbolos algébricos permitiu a resolução de problemas de maior complexidade. Uma outra característica que distingue a *Aritmética* de Diofanto da generalidade dos tratados gregos de matemática, provém do estilo das "demonstrações", que parecem mais ilustrações das proposições enunciadas, uma vez que Diofanto, de modo a não deixar dúvidas quanto à validade geral do argumento, escolhe casos particulares concretos (Sá, 2000).

A *Aritmética* de Diofanto apresenta uma coleção de problemas que incidem, de forma explícita, na resolução de equações do 1.º e 2.º graus, e por vezes de grau superior, envolvendo uma ou mais incógnitas (Mahammed, 1995). Os problemas expostos são puramente algébricos e o tratamento apresentado, apesar de por vezes recorrer à geometria, baseia-se essencialmente em métodos analíticos (Smith, 1953,). Radford (1993) observa que, do ponto de vista conceptual, o procedimento de Diofanto é totalmente diferente dos procedimentos usados na falsa posição na geometria de colagem, geometria intuitiva. Em Diofanto, o *aritmo* é colocado em evidência nos cálculos, não sendo esta incógnita como nos processos aritméticos, o ponto de chegada dos cálculos, ou como acontece no caso da geometria intuitiva, um ponto de referência estático no desenvolvimento do problema. De facto, é uma quantidade que é operada como se fosse um número conhecido.

A título de ilustração apresentar-se-ão o problema 30 do livro I e o problema 8 do livro II. O primeiro problema envolve a resolução de uma equação do 2.° grau determinada, enquanto que o segundo a resolução de uma equação do 2.° grau indeterminada. De facto, os problemas 27 a 30 do livro I *da Aritmética* são os primeiros problemas apresentados por Diofanto que se reduzem a equações do 2.º grau completas. Na apresentação da sua resolução, Diofanto utiliza um artifício que permite transformá-las em equações do 2.º grau incompletas, cuja resolução se torna imediata. Tal artifício consiste (independentemente do número de equações, do grau dessas equações e do número de incógnitas envolvidas no problema) em designar uma certa quantidade desconhecida (uma nova incógnita por excelência) por *aritmo*. De seguida, as várias incógnitas do problema são escritas em função dessa nova incógnita e/ou são feitas substituições de entre as várias equações ou, como no caso das equações indeterminadas, são tomados casos particulares, de modo a reduzir tudo a uma só equação, com uma só incógnita (o *aritmo*) nunca com grau superior ao segundo. Note-se que a escolha do *aritmo* não era arbitrária. Ao invés, era feita de forma a que, no final, se obtivesse uma equação nas condições acima referidas. Após calcular o valor do *aritmo* era fácil determinar as várias soluções do problema (Eecke, 1959).

Aritmética I, 30: Encontrar dois números tais que a sua diferença e o seu produto formem números dados. (Eecke, 1959)

Em notação simbólica atual, dados a e b racionais positivos, o problema tem a formulação geral $x - y = a$ e $x \,.\, y = b$, em que x e y são os números procurados. Como tanto os dados como as soluções dos problemas eram apenas números racionais positivos, Diofanto iniciou a resolução deste problema considerando a seguinte condição de resolubilidade: «a soma do quádruplo do produto dos dois números com o quadrado da sua diferença forma um quadrado (…)» (Eecke, 1959, p. 40). De facto, resolvendo o sistema $\begin{cases} x - y = a \\ x.y = b \end{cases}$, $y = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b}$ e $x = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b}$, porque $\sqrt{a^2 + 4b} > \sqrt{a^2} = a$ e x e y têm de ser positivos. No entanto, estas raízes só são racionais, se $a^2 + 4b$ for o quadrado de um número racional.

Diofanto resolveu o problema, propondo para diferença dos dois números 4 unidades e para o seu produto 96 unidades[5] (Eecke, 1959). Neste caso, o problema resume-se a resolver o sistema $\begin{cases} x - y = 4 \\ x.y = 96 \end{cases}$, que é equivalente quer à equação $x^2 = 4x + 96$ que é do tipo $x^2 = px + q$, quer à equação $y^2 + 4y = 96$ que é do tipo $x^2 + px = q$. Considerando a soma dos dois números igual a 2 *aritmos* e como a sua diferença era 4 unidades, Diofanto observou que o maior número era igual a 1 *aritmo* mais 2 unidades e o menor número era 1 *aritmo* menos 2 unidades. Deste modo, o produto dos números era 1 *quadrado de aritmo* menos 4 unidades e, portanto, igual a 96 unidades, donde se obtinha que 1 *aritmo* era igual a 10 unidades. Diofanto concluía assim que o maior número era 12 unidades e o menor 8 unidades (Eeke, 1959).

Observe-se que x e y podem ser obtidos à custa de $x = \sqrt{96 + 2^2} + \frac{4}{2}$ e $x = \sqrt{96 + 2^2} - \frac{4}{2}$ que correspondem a $x = \sqrt{xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2} + \frac{x-y}{2}$ e $y = \sqrt{xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2} - \frac{x-y}{2}$. Resulta, assim, que $x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} + \frac{p}{2}$ e $y = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$, as fórmulas usadas anteriormente pelos mesopotâmios para resolverem as equações do 2.° grau destes dois tipos.

O primeiro problema do 2.° grau indeterminado que aparece nos livros de Diofanto é o problema 8 do livro II. Também neste tipo de problemas, o autor escreve as várias incógnitas em função da incógnita suplementar a que ele chama *aritmo*. Diofanto propõe então dividir um quadrado proposto em dois quadrados (Eecke, 1959).

Trata-se de um problema famoso na história da matemática. Segundo Eecke, foi este problema que deu lugar a uma nota célebre de Fermat escrita na margem do seu exemplar da edição greco-latina de Diofanto, publicada pela primeira vez por

[5] É de notar que $4 \times 96 + 4^2 = 400 = 20^2$.

Bachet de Meziriac, em Paris, em 1621. Esta nota enuncia da maneira seguinte o que se designa por *grande teorema de Fermat*: «(...) é impossível dividir um cubo em dois cubos, ou um biquadrado em dois biquadrados, ou mais geralmente, uma potência qualquer, exceto o quadrado, em duas potências tendo o mesmo expoente. Eu descobri uma demonstração verdadeiramente maravilhosa deste facto; mas a margem é muito pequena para a conter» (...)». (Eecke, 1959). Por outras palavras, o teorema de Fermat refere que a equação $x^n + y^n = z^n$ não pode ser resolvida em números racionais para nenhuma potência expressa por um número $n > 2$. Este enunciado ficou conhecido como o *grande teorema de Fermat*, constituindo um verdadeiro desafio para os matemáticos até ter sido provado em 1994 por Andrew Wiles.

Na resolução deste problema, Diofanto propôs-se dividir 16 em dois quadrados (Eecke, 1959). Designando um dos números procurados por 1 *quadrado de aritmo*, Diofanto observou que o outro número seria 16 menos 1 *quadrado de aritmo* e, portanto, seria necessário que 16 menos 1 quadrado de *artimo* fosse um quadrado. Construindo um quadrado a partir da diferença entre um número qualquer de *aritmos* e a raiz do quadrado que se pretende dividir, Diofanto especificou-o como sendo o quadrado da diferença entre 2 *aritmos* e 4 unidades. Por conseguinte, igualou-o ao segundo quadrado procurado, isto é, a 16 unidades menos 1 quadrado de *aritmo*. Associando termos semelhantes com termos semelhantes, Diofanto obteve 5 quadrados de *aritmo* igual a 16 *artimos*, donde 1 *artimo* era igual a $\frac{16}{5}$ e, portanto, os números procurados eram $\frac{256}{25}$ e $\frac{144}{25}$ (Eecke, 1959). De facto, $\frac{256}{25}+\frac{144}{25}=\frac{400}{25}=16$. É de observar que a escolha de $2x - 4$ é para que, quando elevada ao quadrado, possa igualar-se a $16 - x^2$ e por conseguinte possa cortar-se o 16, obtendo uma equação do 2.° grau incompleta em x. Registe-se ainda que, embora se procurem dois números, Diofanto exprime um deles em função do outro, o que lhe permite resolver o problema fazendo uso de uma incógnita apenas.

Com a sua *Aritmética*, Diofanto mostrou na resolução dos seus problemas um alto grau de habilidade matemática e de engenho, mas não sistematizou o estudo da álgebra (Mahammed, 1995; Struik, 1997), uma vez que reduziu todos os tipos de equações a casos particulares que sabia resolver (Cajori, 1991). Embora Diofanto não tenha generalizado os diferentes métodos, segundo Boyer (1989), o estudo em termos numéricos de tantos problemas, por vezes muito semelhantes, indicia uma tentativa de conseguir tal generalização. Apesar da sua válida contribuição ao nível da álgebra, esta, em Diofanto, aparece como um instrumento de resolver problemas, não constituindo uma disciplina autónoma. Foi com os árabes, nomeadamente com al-Khwarizmi, que a álgebra se assumiu como tal (Radford, 1993).

5.3. A matemática na Civilização Islâmica

Durante séculos, nas regiões onde a cultura helénica tinha florescido, não surgiram contribuições dignas de nota para o avanço da matemática. O reaparecimento dos ideais científicos helénicos resultaria do precioso contributo do império islâmico, sendo estes responsáveis pela transmissão dos conhecimentos matemáticos gregos ao ocidente europeu (Sá, 2000).

No século VII da era Cristã, os árabes empreenderam a conquista do Próximo Oriente, à qual se seguiram as conquistas do Norte de África e da Península Ibérica. Alexandria foi tomada em 640 d.C., mas uma certa vida intelectual continuou a existir. De facto, neste império, a tradição grega foi cultivada, em particular por uma escola de sábios árabes, *Casa da Sabedoria* de Bagdad (século IX), que traduziu fielmente, estudou e comentou os clássicos gregos, como por exemplo as obras de Euclides, Arquimedes, Apolónio, Herão, Ptolomeu e Diofanto.

Ao assimilar e fundir estes conhecimentos com outros oriundos de outras proveniências, nomeadamente os provenientes da civilização hindu (Sá, 2000), estas cópias e traduções conservaram muitos clássicos gregos que, de outra forma, se teriam perdido (Struik, 1997).

De todos os campos em que os matemáticos islâmicos deram contribuições relevantes sobressai o campo da álgebra (Estrada, 2000c), uma vez que esta civilização criou as bases e toda uma estrutura sólida para que este ramo da matemática pudesse desenvolver-se como uma verdadeira Ciência.

Os árabes, na tradição das antigas escolas de escribas da Mesopotâmia, não só transmitiram técnicas de resolução de equações, mas também foram inovadores. O conceito de demonstração, apreendido dos geómetras gregos, foi estendido à álgebra, sendo as equações pela primeira vez estudadas como entes matemáticos próprios e não apenas como resultantes da resolução de problemas (Estrada, 2000c). Dos vários matemáticos árabes responsáveis por todos estes progressos há a destacar o nome de al-Khwarizmi, Tabit ibn-Qurra e Abu-Kamil.

Embora não tenha sido o único a empreender estudos sobre a álgebra, al-Khwarizmi foi o responsável por escrever o primeiro tratado sobre álgebra, no Islão, que denominou por *Tratado Conciso sobre o Cálculo por al-jabr e al-muqabala*. Considerado como o iniciador da teoria da resolução das equações algébricas (Estrada, 2000c), os historiadores de matemática unanimemente admitem que foi com este pequeno tratado que se deu o nascimento oficial da álgebra como disciplina e com tudo o que lhe é adjacente: nome, objetos, algoritmos, demonstrações, aplicações etc. (Hébert, 1995; Djebar, 1998). Por esse motivo al-Khwarizmi é considerado por muitos o *pai da álgebra*, sendo de referir que foi da deturpação do termo *al-jabr*, presente no título deste tratado de al-Khwarizmi, e da extensão do nome à resolução das equações que, no século XIV, surgiu a palavra *álgebra*.

O termo *al-jabr* significa restauração, reposição, e consiste em adicionar a ambos os membros de uma equação termos iguais aos que são afetados do sinal negativo. Por exemplo, na notação simbólica atual, a equação $x^2 - 3 = 2x$ transforma-se por *al-jabr* em $x^2 = 2x + 3$. Já o termo *al-muqabala* significa comparação e consiste numa redução de termos positivos numa equação, subtraindo termos iguais aos dois membros. Por exemplo, a equação $x^2 + 5x = 6 + 3x$ transforma-se por al-muqabala em $x^2 + 2x = 6$. É de observar que estes dois processos já tinham sido usados por

Diofanto na sua *Aritmética*, embora este não lhes tenha dado qualquer nome (Sesiano, 1990).

No que diz respeito ao conteúdo do seu livro de *Álgebra*, al-Khwarizmi iniciou esta obra por identificar os objetos da álgebra, dizendo que existem três classes de números: *o Dirham* (unidade monetária árabe) que representava os números simples, o dinheiro que se possui; o *Gizr* ou *Say* que designava a raiz, a incógnita, a coisa; o *Mal* que era o nome dado ao quadrado da coisa ou a um determinado montante. Estas quantidades eram vistas pelo autor como sendo objetos matemáticos puros, desligados de um objeto concreto (Estrada, 2000c).

Quanto à estrutura do livro, este encontra-se dividido em três partes. Na primeira parte, al-Khwarizmi procede à classificação de equações (lineares e quadráticas), dividindo-a em seis tipos. Esta divisão resulta de al-Khwarizmi apenas considerar coeficientes e soluções positivas e das diferentes combinações possíveis entre os números das três classes existentes. Estes seis tipos de equações podiam ainda ser divididos em dois conjuntos: equações simples e equações combinadas. Em notação simbólica atual, são equações simples: $ax^2 = bx$ (quadrados iguais a raízes); $ax^2 = c$ (quadrados iguais a números); $bx = c$ (raízes iguais a números). São equações combinadas: $ax^2 + bx = c$ (quadrados e raízes iguais a números); $ax^2 + c = bx$ (quadrados e números iguais a raízes) e $bx + c = ax^2$ (raízes e números iguais a quadrados). É, no entanto, de observar que os números que aparecem nas equações, e que hoje se chamam coeficientes, não eram vistos como números que estavam a multiplicar pela raiz ou pelo quadrado, mas sim como as quantidades de raízes ou de quadrados que estavam envolvidas no problema. Ainda nesta primeira parte, al-Khwarizmi apresenta os algoritmos para resolver estes seis tipos de equações, bem como as demonstrações geométricas destes mesmos algoritmos. Também apresenta as regras para multiplicar monómios e binómios e fazer operações com radicais quadráticos. Seguidamente, al-Khwarizmi apresenta problemas cuja tradução algébrica é redutível a um dos seis tipos iniciais, por meio da *al-jabr* e da *al-muqabala*, processos esses que permitem reduzir uma qualquer equação quadrática à forma canónica. Al-Khwarizmi termina esta primeira parte com uma exposição sobre a *regra de três*. É de referir que, ao contrário do que acontecia nas equações da Antiga Babilónia e em Diofanto de Alexandria, todos os algoritmos pressupõem que o coeficiente do termo em x^2 seja igual à unidade (Estrada, 2000c). A segunda parte desta obra é dedicada a questões de geometria prática, em particular no que se refere ao cálculo de áreas e de volumes. E a terceira parte, a mais extensa, consiste em vários problemas sobre legados e respetiva resolução.

Na sua obra, al-Khwarizmi apresenta a álgebra de uma forma simples e prática, sendo o seu conteúdo bastante próximo da álgebra elementar dos nossos dias. De facto, este livro era destinado ao público em geral, tendo al-Khwarizmi, no prefácio do mesmo, expresso tal facto. Para al-Khwarizmi este trabalho continha tudo o que existia de mais fácil e mais útil em aritmética, nomeadamente do que era necessário para proceder à repartição de heranças, donativos, partilhas, tomada de decisões, tanto no comércio como noutras transações, estando estas relacionadas com a medição de terrenos, escavações de canais, cálculos geométricos ou quaisquer outros aspetos que pudessem surgir de novo (Radford, 1993).

Tendo em consideração que os tratados árabes não usam qualquer símbolo algébrico nem sinais numéricos, (Sesiano, 1990), al-Khwarizmi usa uma linguagem retórica, sem usar, portanto, qualquer simbolismo. Embora respeite o princípio grego de homogeneidade das dimensões (Youschkevitch, 1976), al-Khwarizmi não considera as raízes nulas nem negativas das equações, mas aceita as raízes irracionais, que ele designa em árabe por «*asamm*», que significa *mudo* ou *cego* (Estrada, 2000c).

Quanto às fontes utilizadas por al-Khwarizmi, que no seu tratado não credita a si próprio quaisquer descobertas novas (Estrada, 2000c), é geralmente aceite que detinha conhecimentos do legado babilónico e das fontes hindus e gregas (Youschkevitch, 1976; van der Waerden, 1985; Berggren, 1986). No entanto, Estrada (2000c) refere que tem sido difícil precisar a medida em que tais fontes o influenciaram. Por exemplo, é possível observar que nas equações combinadas era dado o caso geral, mas a resolução algébrica, o algoritmo, era apresentada através de um exemplo numérico concreto, sendo estas resoluções idênticas às dadas pelos mesopotâmios, o que para Hébert (1995) significa que al-Khwarizmi possuía conhecimentos dessa civilização. Katz (1993) observa que estas demonstrações geométricas parecem ser muito semelhantes aos argumentos geométricos babilónicos, a partir dos quais nasceram os algoritmos algébricos. Acresce ainda observar que depois de resolver os problemas de uma forma algébrica, al-Khwarizmi apresentava sempre uma demonstração geométrica. De acordo com Djebar (1998), al-Khwarizmi pensava que era necessário demonstrar geometricamente os seus resultados, o que demonstra uma nítida influência do rigor grego. No entanto, Estrada (2000c) observa que estas demonstrações geométricas de al-Khwarizmi têm muito pouca relação com o rigor do método dedutivo dos geómetras gregos, nomeadamente da influência do rigor euclidiano. Esta investigadora (idem) refere que na época da *Álgebra* de al-Khwarizmi já existia uma tradução árabe dos *Elementos* de Euclides. Contudo, embora al-Khwarizmi apresentasse os algoritmos e as demonstrações geométricas para casos particulares, isso não significava que não tivesse consciência de que o seu raciocínio fosse válido para as outras equações do mesmo tipo (Youschkevitch, 1976).

Independentemente da herança cultural recebida e do impacto desses legados na construção da sua obra, al-Khwarizmi imprimiu o seu próprio cunho, devido às inovações introduzidas que se manifestaram em novos conceitos, nomeadamente o conceito de equação e de classificação de equações. Al-Khwarizmi mostra que na equação do quinto tipo $x^2 + c = bx$, esta pode ter duas raízes positivas, uma única raiz (raiz dupla) ou pode ser impossível (Estrada, 2000c). Também na *Álgebra* de al-Khwarizmi aparecem pela primeira vez as formas canónicas, assim como a introdução do conceito de incógnita, a que chama *raiz* ou *coisa*, no sentido de algo a determinar e que está relacionada com a solução obtida por meio de um algoritmo. Ao passo que na Antiga Babilónia existiam problemas que conduziam a equações, em al-Khwarizmi os problemas ilustram as equações que surgem como entes matemáticos próprios (Estrada, 2000c). De facto, um dos progressos da obra de al-Khwarizmi foi a introdução das equações na resolução dos seus problemas. As equações serviram inclusivamente de base a toda a sua obra. No caso das equações simples, as resoluções foram dadas através de exemplos, sem apresentar qualquer demonstração, talvez por estas demonstrações já serem conhecidas da restante comunidade matemática. No entanto, em relação às equações combinadas, al-Khwarizmi não só apresentou o algoritmo mas a respetiva demonstração geométrica. De seguida, analisa-se, a título de exemplo, a forma como al-Khwarizmi resolveu equações do 2.° grau do 4.° tipo.

O problema proposto por al-Khwarizmi era o seguinte: um quadrado e dez raízes da mesma quantidade perfazem trinta e nove *dirhams*; quer dizer, qual deve ser o quadrado que quando acrescentado de dez raízes perfaz trinta e nove.

Em linguagem simbólica atual, este problema pode ser traduzido pela equação seguinte: $x^2 + 10x = 39$ que é do tipo $x^2 + px = q$. Al-Khwarizmi apresenta o seguinte algoritmo:

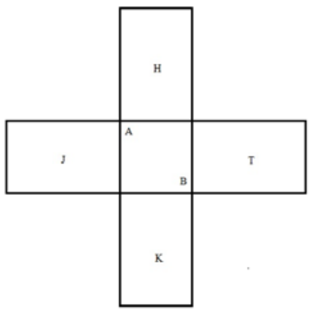
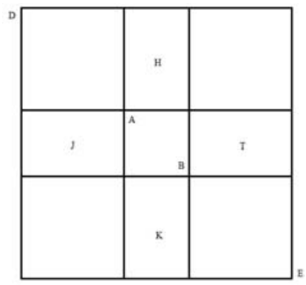
> Divide por 2 o número de raízes, que dá 5. Isto multiplica por si próprio que dá 25. Junta isto a 39; a soma é 64. Agora toma a raiz que é 8 e subtrai dela metade do número de raízes que é 5. O resto é 3. Esta é raiz do quadrado que tu procuraste, o quadrado é 9. (Fauvel & Gray, 1987, p. 229, in História da Matemática, Estrada et al., 2000, p. 418).

Posteriormente, al-Khwarizmi apresenta uma demonstração geométrica desta regra. Tendo em consideração as transformações e construções geométricas realizadas, a respetiva interpretação algébrica permite resolver a equação $x^2 + 10x = 39$ e pode ser sintetizada na tabela 5.9..

É de observar que para este mesmo problema, al-Khwarizmi apresenta ainda uma outra prova geométrica, correspondendo esta exatamente ao algoritmo apresentado.

Inicia por desenhar um quadrado de lado desconhecido que designa por AB, acrescentando-lhe sobre dois dos lados consecutivos desse quadrado dois retângulos de lado 5, retângulos BG e BD. Esta construção resulta do facto de al-Khwarizmi pretender acrescentar 10 raízes ($10x$) ao quadrado (x^2) e de dividir essas 10 raízes por 2, obtendo 5 raízes ($5x$). Al-Khwarizmi completa então o quadrado maior juntando o quadrado BH, que tem área 25. Assim, observa que a área do quadrado maior é 64, portanto, extraindo a raiz quadrada o lado deste quadrado é 8. Subtraindo 5, que era o lado do retângulo acrescentado, obtém 3 para raiz, logo o quadrado é 9.

Tabela 5.9. Interpretação algébrica das transformações e construções geométricas preconizadas por al-Khwarizmi.

Transformações geométricas preconizadas por al-Khwarizmi	**Construções geométricas**	**Transformações algébricas correspondentes em notação simbólica atual**
- Construção um quadrado de lado desconhecido designado por AB; - Cálculo da quarta parte de 10 que é $\frac{5}{2}$; - Construção sobre cada um dos lados do quadrado inicial de um retângulo em que o outro lado mede $\frac{5}{2}$ (retângulos H, J, T e K). - Observação que a área obtida por esta construção corresponde a 39;		$x^2 + 10x = 39 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 + 4 \times \frac{10}{4} x = 39$
- Observação que a área de cada um dos quadrados dos cantos da figura, de lado $\frac{5}{2}$, é $\frac{25}{4}$; - Junção destes quatro quadrados à figura anterior, observando que se obtém um quadrado maior, DE, de área 39 mais 25, ou seja, 64;		$\Leftrightarrow x^2 + 4 \times \frac{10}{4} x + 4.\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 39 + 4.\left(\frac{5}{2}\right)^2$ $\Leftrightarrow \left(x + 2 \times \frac{5}{2}\right)^2 = 64$
- Extração da raiz quadrada de 64, determinando-se o lado deste quadrado maior, donde subtraindo 5 se obtém o lado do quadrado desconhecido que é 3, portanto, a área do quadrado procurado é 9.		$\Leftrightarrow x + 2 \times \frac{5}{2} = 8 \Leftrightarrow x = 3$

Tabit ibn-Qurra e Abu-Kamil também escreveram obras sobre álgebra, na sequência e linha de al-Khwarizmi (Estrada, 2000c). Na obra intitulada *Sobre a Verificação de Problemas de Álgebra por Demonstrações Geométricas*, Tabit ibn-Qurra justifica os algoritmos por provas geométricas que baseia diretamente nos *Elementos* de Euclides. Além disso, nas suas provas, faz demonstrações para o caso geral e não para casos particulares (Estrada, 2000c).

O matemático egípcio Abu-Kamil também escreveu uma obra de álgebra que foi muito influente, *O livro completo sobre [o processo de] restauração e comparação,* embora hoje em dia seja conhecido por *O livro completo sobre álgebra.* De acordo com Youschkevitch (1976), no período que se seguiu à morte de al-Khwarizmi, foi este o matemático que mais progressos fez no campo da álgebra, tanto a nível teórico como prático, chegando a ser conhecido como «calculador egípcio».

O livro de álgebra de Abu Kamil pouco difere na sua estrutura do livro de al-Khwarizmi (Herbert, 1995). A obra de Abu-Kamil é também um trabalho em linguagem retórica, trata as equações dos seis tipos iniciais de al-Khwarizmi, mas resolve também equações biquadráticas, introduz várias incógnitas (embora use o discurso contínuo e não recorra a qualquer símbolo), utiliza sistematicamente coeficientes e raízes que podem ser irracionais (embora continuem a ser consideradas apenas as positivas) e aceita que um segmento de reta possa representar um número, a coisa ou o quadrado da coisa (Youschkevitch, 1976; Herbert, 1995; Estrada, 2000c). No que diz respeito às demonstrações geométricas, estas seguem na linha demonstrativa rigorosa de Tabit ibn-Qurra, com base explícita no livro II dos *Elementos* de Euclides (Youschkevitch, 1976; Estrada, 2000c). Contudo, apesar do rigor das suas demonstrações geométricas. Abu-Kamil não fica limitado pelo princípio homogeneidade de dimensões; uma vez que para ele segmentos e superfícies tanto podiam designar números como a primeira ou a segunda potências da incógnita (Katz, 1993). Assim, Abu-Kamil renuncia às exigências clássicas da respetiva homogeneidade de dimensões nas demonstrações geométricas (Youschkevitch, 1976). Além disso, vai muito além de al-Khwarizmi nas operações com radicais quadráticos (Estrada, 2000c).

5.4. O despontar da álgebra simbólica

À medida que as cidades europeias, nomeadamente as da Península Ibérica, regressavam à soberania cristã, muitos sábios em toda a Europa começaram a traduzir do árabe para o latim tanto obras originais árabes, como as gregas que tinham sido traduzidas para árabe (Estrada, 2000c). De extrema importância, este trabalho de tradução permitiu que a Europa Medieval contactasse, pela primeira vez, com as culturas grega e islâmica. De acordo com Estrada (2000c, p. 409) estes trabalhos traduzidos «foram tão importantes para o mundo ocidental como o tinham sido para a civilização islâmica as traduções em árabe feitas na Casa da Sabedoria em Bagdad.». No entanto, para o avanço da ciência medieval não só contribuíram a tradução do árabe para o latim, passando muitas vezes pelo hebreu, de grande parte das obras dos clássicos gregos e de algumas obras dos árabes, mas também a criação das universidades nos finais do século XII e durante o século XIII (Silva, 2000).

A *Álgebra* de al-Khwarizmi é, assim, conhecida e divulgada na Europa a partir das traduções latinas dos séculos XII e XIII, de outros textos nela inspirados e também a partir do *Liber Abaci* de Leonardo de Pisa, um autor também conhecido por Fibonacci (Estrada, 2000c). De facto, no Ocidente, a ciência da álgebra foi iniciada por Leonardo de Pisa que no início do século XIII viajou para lá do Mediterrâneo e ao interessar-se pelo sistema de numeração adotado pelos árabes importou-o para o ocidente, onde o promoveu. Muitos historiadores consideram Fibonacci como o matemático mais produtivo da Idade Média, devido à compilação de obras matemáticas que possibilitaram a propagação e implementação dos conhecimentos árabes, apesar de não lhe ser atribuído a descoberta de métodos originais de resolução de equações (Silva, 2000).

5.4.1. Contribuições dos matemáticos italianos do século XVI

Nos séculos XII-XIV, as cidades da Europa Ocidental cresceram e desenvolveram-se, incompatibilizando-se com o sistema feudal (Struik, 1997). Ressurgiu a necessidade da expansão do comércio e consequentes transações monetárias, recuperando-se gradualmente as relações comerciais com o Oriente. Estas trocas comerciais possibilitaram, assim, uma gradual tomada de contacto com a tradição clássica baseada em traduções a partir do árabe (Struik, 1997). Houve um incremento deste contacto a partir de 1453 com a queda de Constantinopla e, por conseguinte, com o fim do Império Bizantino, que levaram ao deslocamento para o Ocidente de inúmeras famílias cultas. Estas transportaram consigo textos científicos gregos originais, o que possibilitou aos sábios latinos um contacto mais direto com os clássicos gregos.

Com a crescente atividade comercial nas cidades de Florença, Génova, Milão, Pisa e Veneza, os algebristas italianos da Renascença sentiram necessidade não de uma matemática baseada no *quadrivium*[6], mas de novas ferramentas para o cálculo e resolução dos problemas emergentes da atividade económica. Sendo estas necessidades matemáticas de interesse essencialmente prático, a aritmética e a álgebra passaram a ser ensinadas por «mestres de cálculo»[7] fora das Universidades. Uma parte do desenvolvimento matemático surgiu assim do florescer do comércio e respetivas consequências: navegação e astronomia. No entanto, o acesso aos trabalhos clássicos proporcionou aos algebristas italianos a ultrapassagem dos limites estabelecidos nessas mesmas obras. Exemplo desta determinação em ir mais além do que os antigos foi a procura da solução geral de equações do terceiro grau.

Os gregos e os orientais já se tinham debruçado sobre este problema, tendo-o resolvido apenas para alguns casos numéricos. No século XII a equação do terceiro grau tinha já sido estudada pelos árabes que reduziam a resolução de qualquer equação deste tipo à interseção de cónicas, tendo sido Omar Khayyam (1048-1131) quem, pela primeira vez, fez esse tratamento de forma exaustiva. Mas a descoberta da solução da equação cúbica surgiu na Itália apenas em 1515 através de Scipione del Ferro (1465-1526). Scipione del Ferro descobriu um método, possivelmente obtido a partir das obras árabes (Silva, 2000), de resolução das equações cúbicas, em notação simbólica atual, do tipo $x^3 = px + q$, com p e q positivos. Del Ferro nunca publicou as suas soluções, mantendo em segredo a sua descoberta. Contudo, antes

---

[6] Conjunto de quatro disciplinas - aritmética, geometria, astronomia e música - que os pitagóricos estudavam a fim de entenderem as leis do Universo (Struik, 1997, 78). Nas Universidades medievais europeias esta era ainda a base do estudo científico.

[7] Na Itália ficaram conhecidos por *Maestri d'abbaco* (abacistas), pelo uso do antigo ábaco (Katz, 1993, 314).

da sua morte, revelou o seu método, para descobrir as soluções das equações cúbicas, ao seu discípulo António Maria Fiore. A fama desta descoberta tornou-se conhecida e, mais tarde, em 1535 Niccolò Tartaglia (ca.1499-1557), antes dum duelo matemático com Fiore, redescobriu esse método, mas também guardou segredo. Só mais tarde revelou as suas ideias a Girolamo Cardano (1501-1576) que, sem o consultar, as publicou na sua *Ars magna* (1545), publicação que originou uma controvérsia entre Tartaglia e Cardano (Katz, 1993).

Nesta época, os matemáticos reduziam as equações cúbicas, em notação simbólica atual, a três tipos: $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$ e $x^3 + q = px$, onde p e q eram números positivos, uma vez que sabiam reduzir uma equação com termo em x^2 a uma outra sem tal termo, através duma substituição de variável. No entanto, é de notar que tanto Tartaglia como Cardano não fizeram uso da álgebra sincopada.

Para resolver a equação $x^3 + px = q$, com p, q > 0, Tartaglia assumia, em notação simbólica atual, que uma das raízes era da forma $x = u - v$. Portanto, substituindo x por $u - v$, na equação dada, obtinha-se

$$(u-v)^3 + p(u-v) = q \Leftrightarrow u^3 - v^3 + (u-v)(p-3uv) = q.$$

Tartaglia impunha então uma nova condição sobre u e v: $3uv = p$; logo u e v podiam ser determinados através do sistema

$$\begin{cases} 3uv = p \\ u^3 - v^3 = q \end{cases}.$$

Tomando $z = u^3$, tem-se $\begin{cases} v = \dfrac{p}{3u} \\ z - v^3 = q \end{cases}$,

donde

$$z - \left(\frac{p}{3u}\right)^3 = q \Leftrightarrow z^2 - qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0,$$

ou seja, $z > 0$ se

$$z = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Assim,

$$u=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}+\frac{q}{2}} \text{ e } v=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}-\frac{q}{2}},$$

portanto,

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}+\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}-\frac{q}{2}}.$$

No caso da resolução da equação $x^3=px+q$, com p, q > 0, usando a igualdade $x=u+v$ e por processo análogo ao anterior, uma das raízes obtém-se através da fórmula:

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

No entanto, esta solução originou na época algumas dificuldades, visto que, se $\left(\frac{q}{2}\right)^2<\left(\frac{p}{3}\right)^3$, então aparece a raiz quadrada de um número negativo e a fórmula tornava-se sem sentido, em virtude da solução não ser um número real. Por outro lado, algumas equações do tipo $x^3=px+q$, em que $\left(\frac{q}{2}\right)^2<\left(\frac{p}{3}\right)^3$, apresentavam soluções reais. Por exemplo, a equação $x^3=15x+4$, apresenta a raiz x = 4 e, no entanto, $\left(\frac{4}{2}\right)^2<\left(\frac{15}{3}\right)^3$. Desta forma, não se podia estipular que apenas existiriam soluções para as equações do tipo $x^3=px+q$, se $\left(\frac{q}{2}\right)^2\geq\left(\frac{p}{3}\right)^3$. O caso em que $\left(\frac{q}{2}\right)^2<\left(\frac{p}{3}\right)^3$ ficou conhecido por *caso irredutível* da fórmula de Cardano.

Os algebristas italianos da Renascença levaram, portanto, o desenvolvimento da sua ciência tão longe quanto foi possível com a simbologia de que dispunham. A resolução geral da equação do terceiro grau foi realizada por Scipione del Ferro e pelos seus sucessores, tendo Ludovico Ferrari resolvido as de quarto grau. Contudo, as de quinto grau resistiram a todas as tentativas. No entanto, nenhuma destas resoluções adquiriu a forma geral que hoje se conhece, por exemplo, para a resolução de equações de segundo grau. Para estes matemáticos, os coeficientes eram sempre números particulares, não designando a incógnita por uma letra e, portanto, não existiam fórmulas propriamente ditas. À semelhança dos árabes, os italianos e os seus discípulos imediatos enunciavam o problema e a sua resolução de uma forma retórica.

Ao tratar a equação do terceiro grau, pareceu aos matemáticos italianos que se podiam calcular as soluções, também designadas por raízes, desde que, em determinadas circunstâncias, se utilizassem raízes quadradas de números negativos, o que era considerado uma manifesta transgressão. Embora tomando algumas precauções aparentes, Raffaele Bombelli considera na sua *Algebra* (1572) novos números a que chama «più di meno» e «meno di meno», que em termos atuais são o «*i*» e «– *i*» e que representavam, respetivamente, $\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$ (Silva, 2000). Estes números seriam, em breve, designados por *imaginários*, tendo a denominação de *números complexos* surgido mais tarde, fruto de uma plena aceitação (Barthélemy, 2003). Durante dois séculos, os matemáticos iriam utilizar abertamente o que tomavam, neste momento, como um simples artifício. É, no entanto, de referir que o uso de raízes quadradas de números negativos não constituía novidade, pois Cardano tinha-os introduzido em alguns problemas. Contudo, este matemático limitou-se a utilizá-los como meros auxiliares de cálculo, designando-os por impossíveis ou imaginários, manipulando-os com alguma hesitação. Ao passo que Bombelli entregou-se a este assunto sem constrangimentos, estabelecendo regras para operar com esses números, contribuindo de forma determinante para o seu desenvolvimento (Silva, 2000).

Bombelli ocupou-se do estudo do caso irredutível na equação do terceiro grau, tendo na sua obra identificado «uma espécie de raiz cúbica» que lhe permitiu generalizar o uso da fórmula de Tartaglia-Cardano ao caso irredutível da equação do terceiro grau. Por exemplo na resolução da equação, atrás mencionada, $x^3 = 15x + 4$, uma equação do tipo $x^3 = px + q$, verifica-se a condição $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$, uma vez que $\left(\frac{4}{2}\right)^2 < \left(\frac{15}{3}\right)^3$. Ao aplicar a fórmula de Tartaglia-Cardano para resolver a equação proposta, obtém-se $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, onde aparece a raiz quadrada de um número negativo. Para resolver o problema, Bombelli procurou uma expressão da forma $a + b\sqrt{-1}$, cujo cubo fosse $2 + \sqrt{-121}$ e outra da forma $a - b\sqrt{-1}$, cujo cubo fosse $2 - \sqrt{-121}$. Para trabalhar com estes novos números, Bombelli introduziu na sua *Algebra* um conjunto de regras operatórias envolvendo estes novos entes matemáticos e dando-lhes ainda um tratamento operatório análogo aos dos números. Desta forma, conseguiu determinar para *a* e *b*, respetivamente os valores 2 e 1 e, portanto, obter o valor 4 como solução da equação.

Apesar, de ao longo dos séculos, ter existido uma superioridade da geometria nos domínios da investigação, uma nova dinâmica estava lançada a favor das resoluções numéricas, sendo o motor desta dinâmica o reconhecimento do poder dos novos tipos de cálculo (Barthélemy, 2003). Paralelamente ao desenvolvimento das técnicas numéricas e às extensões da noção de número, os métodos que constituíam a álgebra beneficiavam de uma permanente atenção, por parte dos matemáticos. Contudo, o seu estatuto era original e híbrido, enraizando-se ao mesmo tempo na aritmética e na geometria. A álgebra constituía um desenvolvimento de cada uma delas, tendo estes dois ramos, pelo menos, a problemática comum, ou seja, determinar uma grandeza, através do conhecimento de uma determinada condição (Barthélemy, 2003).

Embora existisse uma atividade comercial que proporcionava o desenvolvimento de novas formas do pensamento matemático, nomeadamente da álgebra, o século XVI e o princípio do século XVII caracterizaram-se também pela tentativa de recuperação dos escritos matemáticos gregos.

Os algebristas dos finais do século XVI estavam, portanto, familiarizados com alguns trabalhos gregos (já recuperados), com certas manipulações algébricas e conheciam as soluções das equações algébricas de terceiro e até mesmo de quarto grau (Katz, 1993). Mas os enunciados dos problemas e os processos de resolução eram apresentados na linguagem corrente (*álgebra retórica*) e, por consequência, as manipulações algébricas tornavam-se de difícil acompanhamento e pouco práticas. Salienta-se o facto de existirem já no final do século XV alguns autores que usavam símbolos para quantidades desconhecidas e potências (Boyer, 1956), destacando-se o francês Nicolas Chuquet (ca.1445-ca.1500), com o *Triparty en la science des nombres* de 1484, e o italiano Luca Pacioli (1445-1517), com a *Summa de arithmetica* de 1494. Em ambos os trabalhos existe um crescente uso de abreviaturas (*álgebra sincopada*). No século seguinte, os algebristas italianos - entre os quais se destacaram Nicolò Tartaglia (1506-1557), Hieronimo Cardano (1501-1576) com a *Ars Magna* e Rafaelle Bombelli (1526-1572) com *L'AIgebra* – continuaram com o uso de letras e abreviaturas para operações e relações (Boyer, 1956).

Os séculos XVI e XVII são marcados pelo interesse e recuperação dos problemas clássicos e pelo avanço notável da álgebra, quer a nível da simplificação dos processos aritméticos, quer a nível da simbologia. Um dos motores deste desenvolvimento da álgebra foi a procura de uma «estrada real» para a geometria através do uso de técnicas algébricas, ou seja, a tentativa de resolução de problemas geométricos através da aplicação da álgebra – algebrização da geometria (Boyer, 1956). Mas, apesar do uso de algumas abreviaturas, os algebristas do século XVI não usavam ainda símbolos para coeficientes, o que obrigava a ilustrar os processos de resolução de um determinado problema com exemplos concretos. Isto é, os algoritmos nunca eram apresentados de uma forma geral, mas sim através de exemplos numéricos (Katz, 1993). Não existiam portanto fórmulas redigidas de maneira a poderem generalizar os problemas. Para tal ser possível, necessitava-se de uma nova álgebra: a *álgebra simbólica.* Um dos primeiros matemáticos que tentou fazer uma introdução a esta nova álgebra foi François Viète (1540-1603).

5.4.2. François Viète

Seguindo a tendência da época de recuperar o método de pesquisa dos antigos, a análise dos geómetras clássicos, Viète esforçou-se por identificar a análise grega com a nova álgebra, pretendendo expor esta última com clareza e simplicidade (Katz, 1993). Deste modo, utilizou os termos *zetética* e *porística* da análise clássica tendo reformulado os respetivos métodos. Além disso, introduziu um terceiro método de análise, a *exegética.*

Com esta identificação análise/álgebra Viète criou uma nova arte de cálculo simbólico, a *logística especiosa,* que se destacou por estabelecer uma rígida distinção entre quantidades dadas e desconhecidas. Esta nova forma de distinção permitiu-lhe abordar um amplo conjunto de problemas. Viète proveu a sua arte analítica com as ferramentas que lhe permitiam a correta descoberta em matemática: o seu objetivo (Peyroux, 1990). Viète realça esta sua intenção no final da *Introdução à Arte Analítica* (1591):

> Finalmente, a arte analítica, dotada com as três formas de análise: a zetética, a porística e a exegética, reclama para si o maior problema de todos, que é resolver todos os problemas. (Peyroux, 1990, p. 33)

Torna-se claro que o objetivo de Viète era, através da sua arte analítica, não deixar nenhum problema insolúvel. Contudo, Viète necessitava de uma simbologia que facilitasse a abordagem a todo o tipo de problemas. Desta forma, na *Introdução à Arte Analítica*, apresentou uma das suas mais importantes contribuições para a álgebra: uma nova forma de simbolismo (Katz, 1993).

Grandezas conhecidas e desconhecidas

Desde os primórdios do seu uso na Mesopotâmia que a álgebra constituía uma forma sofisticada de resolução de problemas aritméticos. Ela baseava-se nas quatro operações aritméticas – adição, subtração, multiplicação e divisão – no cálculo de potências e na extração de raízes, e dirigia-se apenas à resolução de problemas envolvendo quantidades numéricas, sem qualquer tentativa de generalização (Mahoney, 1973).

Com a descoberta das soluções gerais das equações cúbicas e quárticas, obtidas por meio de cálculos algébricos em vez de interseção de cónicas, surgiu uma certa confiança no uso das operações algébricas para a resolução de problemas, independentemente do seu significado geométrico, o que originou o consequente desenvolvimento de uma teoria elementar das equações (Boyer, 1956). Certas relações simples entre as raízes de uma equação e os seus coeficientes eram já conhecidas, mas a sua generalização requeria a formalização das quantidades algébricas e das operações executadas (Boyer, 1956). Assim, uma generalização pressupunha a libertação do tratamento dos casos especiais de equações, o que só foi possível com o desenvolvimento de símbolos e abreviaturas para quantidades desconhecidas (incógnitas e potências de incógnitas) como para operações e relações (Boyer, 1989). A ideia de representar quantidades por letras não era inteiramente nova, já que se encontrava presente entre hindus e gregos, e mesmo entre alguns algebristas do século XVI, nomeadamente Bombelli e Bonasoni (Boyer, 1956). Mas «(...) não existia um modo de distinguir as grandezas assumidas como conhecidas das quantidades que se pretendiam encontrar.» (Boyer, 1989, p. 341). Este é um dos pontos em que Viète é inovador[8], ao introduzir uma «(...) convenção tão simples como proveitosa.» (Boyer, 1989, p. 341) na sua *Introdução*:

> E isso é necessário para ajudar com alguma arte, pelo símbolo constante e perpétuo, e unificado, de modo que as quantidades dadas sejam distinguidas das incertezas procuradas, como denotando as quantidades procuradas pelo elemento A ou por uma outra vogal E, I, O, U, Y, os dados pelos elementos B, G, D ou por outras consoantes. (Viète, 1970, p. 8)

[8] Boyer (1956, pp. 58-59) refere que «Bonasoni também usou letras para representar tanto quantidades conhecidas como desconhecidas, o que representa uma importante antecipação à notação inovadora de Viète. Mas o seu trabalho nunca foi publicado e por essa razão a sua influência é questionável.».

Este novo sistema de notação[9] (simbolismo literal) tornou possível divorciar a álgebra de um estilo de exposição enraizado em exemplos e algoritmos verbais, permitindo assim tratar um dado problema de uma forma geral (Mahoney, 1973). É no entanto de referir que, nos seus exemplos numéricos, Viète não utilizava as vogais para denotar as quantidades desconhecidas. Em seu lugar encontra-se tanto a letra N, a primeira letra da palavra latina *numerus* (número), como as consoantes iniciais das palavras que designavam as potências de grandezas desconhecidas (Scott, 1958). Assim, como exemplo, as expressões $x^2 + 8x$ e $84x - x^3$ eram representadas por Viète, respetivamente, do seguinte modo: $1Q + 8N$ e $84N - 1C$ (Viète, 1970).

Segundo Boyer (1989), encontra-se pela primeira vez, nesta convenção dada por Viète, uma clara distinção entre o conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida (incógnita). Na verdade, ao representar quantidades conhecidas ou dadas por consoantes e quantidades desconhecidas por vogais, Viète preparou o caminho para a distinção de três tipos de grandezas na álgebra: números dados, parâmetros e variáveis (Boyer, 1956). Contudo, Viète não falou de parâmetros ou variáveis e a sua notação vogal/consoante tinha como objetivo a distinção entre o que era tomado como desconhecido e o que era dado como conhecido, e não a distinção entre grandezas variáveis e fixas (Boyer, 1956). A interpretação das vogais como variáveis surgiu só mais tarde, segundo Boyer (1956), quando essas foram aplicadas a representações gráficas de equações indeterminadas. Para este autor, em Viète as vogais eram interpretadas como grandezas desconhecidas fixas e não como variáveis no sentido de símbolos representando qualquer valor de uma classe de quantidades, embora esta interpretação das vogais como variáveis tenha sido uma natural consequência da notação literal de Viète.

[9] Esta convenção difere da que viria a ser proposta por Descartes, em que as últimas letras do alfabeto (x, y, z, ...) são usadas para representar grandezas desconhecidas enquanto as primeiras letras do alfabeto (a, b, c, ...) representam grandezas conhecidas.

A logística especiosa de Viète

Como se referiu, Viète não foi o primeiro a representar quantidades por letras e, de igual modo, não foi o primeiro a usar símbolos em equações[10]. Parece, no entanto, que Viète criou a prática do uso de letras como coeficientes de termos numa equação (Boyer, 1956), libertando assim a álgebra da necessidade de lidar com exemplos particulares que envolviam coeficientes numéricos específicos. Esta «(...) libertação da álgebra (...)» (Mahoney, 1973, p. 35) teve consequências de longo alcance, que tornaram possível a construção de uma teoria geral das equações (Boyer, 1956). Assim, a eliminação de coeficientes numéricos específicos numa equação permitiu que na resolução da mesma se tomasse atenção, não só à solução, mas também aos métodos de resolução e à estrutura da própria equação (Mahoney, 1973). A tomada em consideração dos métodos de resolução possibilitou examinar o modo como esses processos podiam ser aplicados a outras quantidades (não só numéricas), alargando, deste modo, a resolução de equações a outro tipo de problemas, por exemplo, problemas envolvendo segmentos de reta, ângulos, etc. (Mahoney, 1973). Para isso era necessário que as operações fossem definidas de uma forma apropriada. De facto,

> (...) através do seu simbolismo literal, a arte analítica de Viète sugeriu a sua aplicabilidade a problemas envolvendo qualquer tipo de objetos nos quais se poderia definir a soma, a diferença, o produto, o quociente, a potência e a raiz. (Mahoney, 1973, p. 36)

A arte analítica de Viète contrastava, assim, com a vulgar *logistice numerosa* (*logística numérica*), constituindo, portanto, uma nova logística que Viète designou por *logistice speciosa* (*logística especiosa*). Enquanto que a primeira[11] utilizava números, a *logística especiosa* utilizava símbolos ou sinais para coisas (espécies),

[10] Vestígios de álgebra literal são encontrados nos trabalhos de Bombelli (Boyer, 1956).

[11] Segundo Struik (1997), a *logística numérica* era a arte de cálculo, distinta da aritmética. Para este autor, os matemáticos gregos faziam esta distinção, ao considerar a aritmética como a ciência dos números e a logística como um cálculo matemático.

como, por exemplo, letras do alfabeto (Peyroux, 1990). Estes símbolos representavam tanto grandezas geométricas como numéricas (Itard, Bouveresse & Salle, 1977), o que levou Viète a considerar que

> (...) a logística especiosa, recentemente descoberta, é de longe mais frutífera e poderosa que a logística numérica. (Witmer, 1983, p. 13)

A arte analítica de Viète originou e incentivou a investigação da estrutura das equações e, consequentemente, a resolução das mesmas. Através do uso de vogais/consoantes para representar quantidades desconhecidas/conhecidas num determinado problema, e dado que se se serviu desta distinção para estabelecer a sua *logística especiosa*, Viète abordou diversos problemas de uma forma geral sem a necessidade de os resolver através de exemplos específicos, baseados na *logística numérica*. Deste modo, o caráter geral da sua escrita permitiu-lhe construir equações gerais, isto é, com coeficientes literais, o que criou a necessidade de encontrar métodos genéricos de modo a resolver essas mesmas equações algébricas.

Zetética, ***porística*** **e** ***exegética*** **e a teoria das equações**

Apesar de ser no tratado *Investigação e Correção de Equações* que Viète expõe as suas considerações e resultados sobre a estrutura e resolução de equações, na *In Artem Analyticem Isagoge* (*Introdução à Arte Analítica*) introduz os elementos da análise – *zetética*, *porística* e *exegética* – que para ele têm um papel importante na construção e resolução dessas mesmas equações. Esta ligação da arte analítica à análise tradicional encontra-se bem patente na *Introdução à Arte Analítica*, que Viète inicia com uma discussão sobre a análise, "reavivando" os métodos de análise expostos por Papo na sua *Coleção*. Aos dois tipos de análise mencionados por Papo – *zetética* e *porística* – Viète acrescenta um terceiro denominado por *rética* ou *exegética*[12]. Enquanto que, para Viète, as duas formas de análise anteriores se concentravam mais nos processos de construção do que nas regras de resolução de uma equação, o seu terceiro método de análise executava as funções de resolução de uma equação, isto é, consistia no procedimento que permitia a uma grandeza desconhecida ser determinada através da resolução de uma equação. A partir desta divisão da análise em *zetética*, *porística* e *exegética*, segundo Boyer (1956), vê-se uma nova aplicação do termo "análise". Para Platão e Papo, a análise correspondia à ordem das ideias numa demonstração; indicava o caminho da investigação, sendo a síntese a própria exposição. Viète, por outro lado, ao considerar a análise dividida em *zetética*, *porística* e *exegética*, tentou identificá-las com a álgebra, o que lhe permitia a correta descoberta em matemática: o seu objetivo (Peyroux, 1990), já que para ele a álgebra parecia ser o instrumento apropriado para o caminho analítico da geometria (Boyer, 1959).

Princípio da homogeneidade

Viète aplicou sistematicamente a álgebra na resolução de problemas geométricos (Boyer, 1956). Esta associação da geometria à álgebra levou Viète a manter-se fiel ao princípio grego da homogeneidade (Struik, 1997). Ao adotar a interpretação clássica grega sobre as quatro operações básicas no universo da geometria, Viète confrontou-se com um elemento estranho à álgebra numérica: a dimensão (Mahoney, 1973). Ao aderir ao princípio grego da homogeneidade, Viète reconheceu o aspeto dimensional das operações quando interpretadas geometricamente, considerando a lei dos termos homogéneos como

> A primeira e perpétua lei das equações ou proporções [em que] (…) termos homogéneos têm de ser comparados com termos homogéneos. (Peyroux, 1990, p. 19)

[12] Segundo Busard (1991), o uso dos termos *rética* ou *exegética* estava relacionado com as grandezas que se estariam a utilizar; para grandezas numéricas usar-se-ia o termo *rética*, para grandezas geométricas o termo usado seria *exegética*.

Pelo princípio da homogeneidade, o resultado da adição e subtração de grandezas homogéneas ainda era, para Viète, uma grandeza homogénea às primeiras, o produto de duas quaisquer grandezas era heterogéneo a ambas e o quociente de grandezas era heterogéneo ao dividendo[13].

De acordo com os dados de certo problema, grandezas dadas ou procuradas eram combinadas numa equação, através da adição, subtração, multiplicação e divisão, obedecendo sempre à lei dos termos homogéneos (Peyroux, 1990). Para Viète, toda a equação tinha de ser homogénea em termos de variáveis e coeficientes, uma vez que as grandezas conhecidas e desconhecidas, numa dada expressão, possuíam dimensão geométrica (Boyer, 1956). Consequentemente, todas as equações da arte analítica de Viète possuíam dimensão, que estava relacionada com o grau da equação. Por exemplo, a resolução de uma equação cúbica correspondia à construção de um sólido no espaço de três dimensões (Mahoney, 1973). Segundo Boyer (1956), na própria terminologia de Viète para quantidades conhecidas e desconhecidas se vê a ligação entre as operações algébricas e a visualização geométrica. De facto, no capítulo III da *Introdução à Arte Analítica*, Viète designou as potências de grandezas desconhecidas (para Viète termos escalares) por *latus* ou *radix*, *quadratum*, *cubus*, *quadrato-quadratum*, *quadrato-cubus*, *cubo-cubus*, *quadrato-quadrato-cubus*, *quadrato-cubo-cubus*, *cubo-cubo-cubus*, etc.[14] (Viète, 1970). Seguidamente, e de modo a poder aplicar o princípio da homogeneidade, Viète definiu os géneros das grandezas conhecidas (para Viète grandezas de comparação[15]) enunciando-os pela mesma ordem dos termos escalares: *longitudo* ou *latitudo*, *planum*, *solidum*, *plano-planum*, *plano-solidum*, *solido-solidum*, *plano-*

---

[13] Segundo Viète, muita da obscuridade até aí verificada na álgebra ter-se-ia ficado a dever ao facto de não se terem seguido estas regras (Peyroux, 1990)

[14] Em notação atual, respetivamente x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9, etc., sendo x uma incógnita. De facto, são grandezas continuamente proporcionais.

[15] Do latim *magnitudines comparatæ*, embora muitas vezes referido por Viète como *homogenei comparationis* (*homogéneos de comparação*). Segundo Witmer (1983), em ambos os casos eram os termos com os quais a variável (valor desconhecido) era equacionada ou comparada. É de referir, de acordo com Klein (1968), que estas grandezas de comparação não eram simplesmente grandezas do tipo *B*, *C planum*, *D solidum*, etc., mas poderiam ser também produto de uma grandeza conhecida por uma desconhecida. Por exemplo, o produto de *B* por *A quad.* era um *sólido* e, portanto, podia ser equacionado ou comparado com *A cubus*.

plano-solidum, *plano-solido-solidum*, *solido-solido-solidum*, etc. (Viète, 1970). Assim, através destas definições, a equação

$$x^2 + bx = c$$

na escrita de Viète seria da forma

A quad. + *A in B* é igual a *C planum*.

Regras elementares relativas a equações

Para Viète, de acordo com a natureza do que se pretendia encontrar (incógnita), isto é, tendo em atenção se o objetivo era encontrar um lado, um plano, um sólido, etc. e mediante as afirmações do problema, as grandezas procuradas eram combinadas e comparadas com as grandezas dadas através das operações aritméticas descritas na *Introdução à Arte Analítica* e respeitando sempre o princípio da homogeneidade (Peyroux, 1990); uma equação era, portanto, uma comparação entre grandezas desconhecidas e conhecidas do mesmo género (Peyroux, 1990).

Na *Introdução à Arte Analítica*, Viète apresentou algumas regras elementares relativas a equações. Estas regras ficaram estabelecidas em três proposições do capítulo V com o nome de: *Antithesis*, *Hypobibasmus* e *Parabolismus*.

Antithesis (transposição) era uma mudança de membro de termos que afetam ou são afetados, sendo a mudança efetuada com o sinal contrário da afetação. A *antithesis* correspondia ao que os algebristas árabes chamavam *al-jabr* (Waerden, 1985). Viète afirmou que esta operação mantém uma equação inalterada, o que certamente significa que se passa a uma equação equivalente, ou seja, a uma equação que traduz o mesmo problema. Como "demonstração" desta invariância, apresentou o seguinte exemplo:

Considerando *A quadratum* – *D planum* igual a *G quadratum* – *B in A*, Viète afirmou que

A quadratum + *B in A* era igual a *G quadratum* + *D planum*

e a equação não se alterava por esta transposição com os sinais de afetação contrários (Peyroux, 1990).

Com efeito, uma vez que

A quadratum – *D planum* é igual a *G quadratum* – *B in A*,

Viète adicionou *D planum* + *B in A* a ambos os lados da equação. Então,
A quadratum – *D planum* + *D planum* + *B in A* era igual a *G quadratum* – *B in A* + *D planum* + *B in A*.

Uma vez que a afetação negativa em cada lado da equação cancela uma positiva: de um lado da equação desaparece a afetação *D planum*, do outro desaparece a afetação *B in A*. Deste modo, obtém-se

A quadratum + *B in A* igual a *G quadratum* + *D planum*.

Hypobibasmus (abaixamento de grau) era um abaixamento da potência e dos termos de menor ordem (observando a ordem da sequência dos termos escalares) até o termo de menor grau se tornar um homogéneo ao qual os outros termos se podiam comparar. Uma equação não sofria alterações por abaixamento de grau, tendo-o Viète "demonstrado" da seguinte forma:

Considerando *A cubus* + *B in A quadratum* igual a *Z planum in A*, Viète afirmou que, por abaixamento de grau,

A quadratum + *B in A* era igual a *Z planum*,

pois todos aqueles sólidos, na equação dada, eram divididos por um divisor comum, neste caso *A*, um processo já estabelecido que não alterava uma equação (Peyroux 1990).

O processo referido foi estabelecido no capítulo II da *Introdução à Arte Analítica*, em que Viète aceitou como provadas algumas regras fundamentais das equações e proporções. Entre essas regras estava a referida por Viète:

> Uma equação ou proporção não é alterada quando é multiplicada ou dividida pelos mesmos fatores. (Peyroux, 1990, p.18)

Parabolismus (redução) era a divisão de todos os termos de uma equação pela grandeza que multiplicava o termo escalar de maior grau, isto é, a divisão de uma equação pelo coeficiente do termo de maior grau, correspondendo ao que os algebristas árabes chamavam *al-radd* (Sesiano, 1990). Assim, uma equação não era alterada por redução, o que Viète "demonstrou" do seguinte modo:

Considerando *B in A quadratum* + *D planum in A* igual a *Z solidum*, Viète afirmou que, por redução,

$$A\ quadratum + \frac{D\ planum\ in\ A}{B} \text{ era igual a } \frac{Z\ solidum}{B},$$

pois todos aqueles sólidos na equação dada eram divididos por um divisor comum, um processo já referido que não altera uma equação (Peyroux, 1990).

Do modo como Viète definiu estas operações, observa-se que a diferença entre o emprego de *Hypobibasmus* e *Parabolismus* reside simplesmente na grandeza que divide ambos os membros de uma equação. Enquanto que por *Hypobibasmus* esse divisor é a incógnita, por *Parabolismus* o divisor é uma grandeza dada conhecida.

A arte analítica de Viète contribuiu, assim, para o desenvolvimento da álgebra, fomentando o interesse pela teoria das equações. De facto, os vários trabalhos que abrangem a *Arte Analítica*[16] ilustram essa motivação. Por exemplo as *Notas Preliminares* continham diversas manipulações algébricas, como por exemplo, em linguagem simbólica atual, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2$ (Mahoney, 1973), que mais tarde Viète usaria na transformação de equações nas formas canónicas, um dos assuntos abordados na sua teoria das equações (Mahoney, 1973). Na verdade, «(...) como um resultado da formulação dos objetivos

[16] Nome por que ficou conhecida a compilação dos vários tratados de Viète (Katz 1993).

e processos [dados] por Viète, a "arte dos cossistas" tornou-se a "doutrina das equações"» (Mahoney, 1973, p. 36), isto é, a arte analítica permitiu que, além do processo de resolução das equações (a procura do valor desconhecido, a *cosa),* se desse importância ao estudo da estrutura das mesmas.

De modo a dar consistência à sua teoria das equações e consequentemente ao seu programa analítico, Viète necessitava de mostrar a aplicabilidade e o alcance da sua *logística especiosa,* o seu sistema de cálculo simbólico. Assim, com base neste sistema, em 1593, Viète publicou *Zeteticorum Libri Quinque (Cinco Livros das Zetéticas)* que, segundo Busard (1991), provavelmente foi completado em 1591. Neste trabalho Viète debruçou-se sobre uma vasta extensão de problemas algébricos tradicionais tirados de várias fontes, tanto antigas como suas contemporâneas (Katz, 1993), e traduziu-os em equações usando o seu método simbólico de cálculo, isto é, a sua arte analítica. De facto, em cada problema Viète deduziu, de acordo com o que estabeleceu na sua *Introdução,* uma equação em termos de quantidades conhecidas e desconhecidas (Katz, 1993). Muitos desses problemas algébricos foram extraídos da *Aritmética* de Diofanto, uma vez que «(...) Viète acreditava que [a *Aritmética*] era um trabalho clássico sobre álgebra que, até certo ponto, mostrava a análise oculta dos gregos.» (Katz, 1993, p. 342). O tratado *Cinco Livros das Zetéticas* oferecia, assim, uma amostra da aplicabilidade da *logística especiosa,* contrastando-a com a *Aritmética* de Diofanto que, para Viète, ficava dentro dos limites da *logística numérica* (Busard, 1991). Viète considerou, assim, vários problemas da *Aritmética* de Diofanto, criando portanto um certo paralelismo entre os dois trabalhos, sendo uma prova desse paralelismo o facto de Viète ter iniciado o primeiro livro e terminado o quinto livro das suas *Zetéticas* com o mesmo problema com que Diofanto iniciou o primeiro e concluiu o quinto livro da sua *Aritmética* (Busard, 1991; Katz, 1993). No entanto, Viète estava também familiarizado com os trabalhos de outros autores, nomeadamente com as obras de Cardano – *De numerorum proprietatibus, (Das propriedades dos Números) Ars magna (A Grande Arte) e Ars magna arithmeticæ (A Grande Arte da Aritmética)* – mencionando o nome deste último nos problemas II, 21 e II, 22 das *Zetéticas.*

Ilustrando o paralelismo entre a *Aritmética* de Diofanto e os *Cinco Livros das Zetéticas* de Viète, observem-se os problemas I, 1 e II, 3.

Em *Zetéticas* I, 1, Viète propôs-se determinar duas raízes, dadas a sua diferença e a sua soma. Este problema tinha sido já proposto e resolvido por Diofanto em *Aritmética* 1,1: dividir um número dado em dois números em que a diferença também é dada. (Eecke 1959).

Diofanto tinha resolvido este problema, tomando 100 como o número dado e 40 como a diferença dada ente as partes. Resolveu, então, o problema considerando que o número mais pequeno era 1 *aritmo*; portanto, o maior número era 1 *aritmo* mais 40 unidades. Como consequência, a soma dos dois números era 2 *aritmos* mais 40 unidades. Igualando a 110 e associando termos semelhantes a termos semelhantes, obteve 2 *artimos* igual a 60 unidades e, portanto, o *aritmo* valia 30 unidades. Assim, os números procurados eram 30 e 70.

Observe-se agora a resolução dada por Viète.

A partir dos dados do problema e usando a sua *logística especiosa,* Viète tomou B como a diferença entre as duas raízes e D como a sua soma. Repare-se na completa generalidade da abordagem de Viète, fruto da *logística especiosa,* enquanto que a *logística numérica* tinha forçado Diofanto a escolher valores particulares (40 para a diferença e 100 para a soma).

Considerando A a menor raiz[17], a maior raiz era $A + B$. Logo, a soma das raízes era $2A + B$ e, portanto, $2A + B$ era igual a D. Por transposição, $2A$ *era* igual a $D - B$ e, dividindo ambos os membros por 2,

$$A \text{ era igual a } \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}B \ .$$

Viète considerou ainda que, se E fosse a maior raiz, a menor raiz era $E - B$. Logo, a soma das raizes era $2E - B$ e, portanto, $2E - B$ era igual a D.

[17] Segundo a sua *logística especiosa* Viète designava as quantidades desconhecidas por vogais. Observe-se ainda que a vogal A de Viète corresponde em Diofanto a 1 *aritmo.*

Por transposição,

$$2E \text{ era igual a } D + B$$

e, dividindo ambos os membros por 2,

$$E \text{ era igual a } \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}B \ .$$

Viète concluía assim que se podiam encontrar duas raízes, dadas a sua diferença e a sua soma. Com efeito,

> A metade da soma das raízes menos a metade da sua diferença é igual à raiz mais pequena; e as mesmas adicionadas é a maior raiz. (Peyroux, 1990, p. 78)

Viète termina esta proposição, exemplificando numericamente a solução encontrada. Tomando B igual a 40 e D igual a 100, A seria igual a 30 e E a 70. A escolha destes números comprova mais uma vez a ligação de Viète à *Aritmética* de Diofanto, pois são os mesmos que foram usados pelo matemático de Alexandria na resolução deste problema.

Em *Zetéticas* II, 3 pretendia-se encontrar os lados de um retângulo, dados o próprio retângulo e a diferença entre os lados. Este problema encontrava-se também proposto e resolvido em *Aritmética* I, 30: encontrar dois números de tal modo que a sua diferença e o seu produto formem números dados (Eecke 1959).

Em notação atual, dados a e b, o problema tem a formulação geral $x - y = a$ e $x.y = b$, em que x *e* y são os números procurados. Viète observou que já tinha sido mostrado que o quadrado da soma das raízes menos o quadrado da diferença era igual ao quádruplo do produto das raízes. Apesar de Viète não o mencionar, este resultado corresponde ao teorema da proposição 13 das *Notas Preliminares.* Aplicando transposição, Viète determinava o quadrado da soma dos lados e, portanto, a soma dos lados, pois por hipótese eram dados o produto e a diferença entre os lados. Assim, tendo a soma e a diferença dos lados, e aplicando *Zetéticas* I, 1, Viète determinava os lados procurados. É de observar que Viète não necessitou de considerar condições de resolubilidade.

A teoria das equações de Viète

Viète necessitava, portanto, de construir uma teoria geral que lhe permitisse transformar e resolver qualquer tipo de equações. Foi no tratado *De Æquationum Recognitione et Emendatione Tractatus Duo* (*Dois Tratados sobre a Investigação e Correção de Equações*) que Viète expôs uma grande parte das suas considerações e resultados sobre essa teoria.

Este tratado, considerado como um importante marco no desenvolvimento da teoria das equações, foi publicado postumamente em 1615 pelo escocês Alexander Anderson, abordando, entre outros assuntos, métodos gerais para resolver equações do terceiro e quarto grau e fornecendo informações sobre certas relações entre coeficientes e raízes de uma equação. Além dos diversos assuntos tratados, este trabalho permite observar que Viète estava familiarizado com alguns métodos já utilizados pelos seus antecessores, nomeadamente, Ferrari e Cardano. Na verdade, através da arte analítica, Viète pôde, neste tratado, expor e justificar os procedimentos que permitiam que uma variedade de equações pudessem ser reduzidas a um pequeno número de equações na forma canónica para as quais a solução geral era conhecida. Desta forma, e de acordo com Mahoney (1973), este tratado constitui a tradução de Viète para a arte analítica do aspeto mais poderoso da análise tradicional, isto é, reduzir um problema desconhecido a um conhecido.

O tratado *Investigação e Correção de Equações* inicia-se com um prefácio de Alexander Anderson, o editor, onde este exalta a sagacidade do espírito de Viète e justifica o motivo que o levou a editar este trabalho, uma vez que o próprio autor não o fez em vida. Segundo Anderson, apesar deste tratado não se encontrar inteiramente "polido", talvez pela morte prematura do autor ou pelo facto deste se encontrar extremamente absorvido com serviços oficiais, é útil à escola de matemáticos, visto que até então não se tinha publicado nada do género (Peyroux

1990). Anderson termina desculpando-se desta sua audácia, em publicar um trabalho sem ser revisto pelo próprio autor, mas devido à sua utilidade é de opinião que este tem mais valor publicado do que servindo apenas para um grupo restrito (Peyroux 1990).

Este tratado é constituído por dois trabalhos: "Investigação de Equações", dividido em vinte e um capítulos, em que Viète se debruça sobre a estrutura das equações; e "Correção de Equações", de catorze capítulos, em que Viète discute vários métodos para transformar equações noutras cujo processo de resolução fosse conhecido. Segundo Busard (1991) e Ritter (in Witmer (1983), a "Correção de Equações" contém a matéria contemplada num tratado desaparecido, *Ad Logisticem Speciosam Notæ Posteriores* (*Notas Posteriores em Logística Especiosa*).

5.5. O aparecimento da geometria analítica

Com este tipo de terminologia, Viète não hesitou em ir além da terceira dimensão (Boyer 1956). De facto, para ele, a arte analítica era aplicável a problemas que envolvessem equações de grau superior a três:

> Na verdade, pelo menos aos olhos de Viète, uma das belezas da arte analítica residia na capacidade de descrever tais mecanismos de modo abstrato e de revelar a sua ligação a problemas de grau superior. (Mahoney, 1973, 42)

De modo a justificar a aplicabilidade da sua arte analítica a problemas de grau superior, Viète introduziu certos processos mecânicos utilizando, segundo Boyer (1956), instrumentos semelhantes ao antigo *mesolábio*[18] de Eratóstenes (276-196 a.C.). Estes instrumentos eram usados para construir dois, três, quatro, etc. meios proporcionais entre dois segmentos de reta dados. Segundo Mahoney (1973),

[18] Instrumento mecânico que permitia a construção dos dois meios proporcionais e que resolvia o problema da duplicação do cubo.

é natural que Viète tenha considerado estes processos, uma vez que Papo na sua *Coleção* tinha fornecido as correspondentes construções “mecânicas”. Contudo, a arte analítica apresentava algumas limitações, nomeadamente o respeito pelo princípio de homogeneidade, o que não permitiu resolver problemas que envolvessem operações entre grandezas de diferente dimensão. Por outro lado, o interesse em resolver equações numa só incógnita e, consequentemente, reduzir problemas a equações desse tipo inibiu o estudo de certas questões, como se verificava nas que envolviam lugares geométricos. É de notar que problemas envolvendo, por exemplo, lugares geométricos no plano, além de sugerirem o uso de eixos referenciais quando expressos em simbolismos algébricos, apresentam-se sob a forma de uma equação em duas incógnitas, em que uma é representada em função da outra (Boyer, 1959). Acontece que este tipo de relações funcionais não era considerado na altura de Viète; e como, no estudo das equações, Viète se restringiu àquelas que envolviam uma única grandeza desconhecida (incógnita), compreende-se por que é que na sua aplicação da álgebra à geometria não terá incluído problemas de lugares geométricos (Boyer, 1959). Naturalmente que a exclusão do estudo destes problemas contribuiu, de certa forma, para que Viète não necessitasse de usar um sistema de coordenadas, sendo considerada por Boyer (1959) uma das razões pelas quais Viète não inventou a geometria analítica, embora o seu trabalho desempenhasse um papel preparatório preponderante nessa direção e no desenvolvimento de ideias algébricas. De facto, o simbolismo literal de Viète, com a possibilidade que oferecia de operar sobre as incógnitas, sugeria a identificação da álgebra com o método analítico dos antigos. Esta ideia de encarar a álgebra como um método de descoberta em geometria acabaria por conduzir à criação da geometria analítica por Pierre de Fermat (1601-1665) e por René Descartes (1596-1650) (Sá, 2000).

O trabalho realizado por Viète possibilitou a escrita de equações e suas propriedades e, a partir daí, as expressões algébricas passaram a ser objetos de operações matemáticas. Apesar do avanço proporcionado pelos estudos de Viète e da beleza da álgebra elaborada por ele, esta ainda estava incompleta e a álgebra de Descartes veio não apenas completá-la, mas também complementá-la, ao possibilitar a síntese entre a geometria e a álgebra, agora de uma maneira sistematizada e formal, transformando a álgebra geométrica dos gregos numa geometria algébrica, utilizando os principais objetos algébricos, as equações, para representar entes geométricos, como retas, curvas, planos, sólidos, entre outros.

De facto, o simbolismo literal de Viète permitia operar sobre as expressões algébricas de modo eficaz. Ao representar por letras tanto os dados como as incógnitas dos problemas, Viète aplicava-lhes as operações usuais da aritmética e em consequência, a álgebra deixou de se ocupar apenas de problemas numéricos particulares. Assim, passaram a considerar-se tipos gerais de equações e a estudar-se a relação entre o tipo de problema e o tipo de equação que se lhe associava. Acresce referir que as letras que figuravam nas expressões algébricas e nas equações tanto podiam significar números positivos como grandezas geométricas (Sá, 2000).

Com Descartes e Fermat aparecem as primeiras aplicações sistemáticas do "método das coordenadas", que mais tarde se designará por *geometria analítica*, que permite uma fecunda identificação da geometria com a álgebra (Queiró, 1993). A essência das ideias de Descartes e Fermat, quando aplicadas ao plano, consiste em estabelecer uma correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de números reais, viabilizando, assim, uma correspondência entre curvas do plano e equações em duas variáveis. Deste modo, é possível estabelecer uma correspondência entre as propriedades algébricas e analíticas da equação em duas variáveis e as propriedades geométricas da curva associada. Contudo, estes dois matemáticos abordaram a questão de forma diferente. Enquanto Fermat partia de uma equação e depois descrevia a curva correspondente, Descartes a partir da descrição geométrica de uma curva descobria a equação correspondente (Katz, 2010).

Há algumas divergências de opinião sobre quem inventou a geometria analítica bem como sobre a época em que se deu tal invenção. Foi observado que os gregos se dedicaram à geometria das áreas, álgebra geométrica, e que muitos dos resultados de Apolónio, embora este não possuísse o método atual de coordenadas, porque não tinha notação algébrica, podem ser transcritos imediatamente em linguagem de coordenadas. Também no século XIV Nicole Oresme antecipou outros aspetos da geometria analítica ao representar graficamente certas leis. Antes de a geometria analítica poder desempenhar o seu papel de forma plena, teve de esperar o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos. Assim, vários historiadores consideram as contribuições decisivas realizadas no século XVII pelos franceses René Descartes e Pierre de Fermat como a origem essencial deste ramo da matemática.

5.5.1. Pierre Fermat

A ideia de Fermat, exposta em *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* (Introdução aos Lugares Geométricos Planos e Sólidos), escrito em 1637, ou talvez até antes, mas só publicado em 1679, era a de fazer corresponder um ponto P dum plano a dois segmentos de reta a e e. O primeiro segmento, a, era marcado sobre uma reta fixa r do plano, a partir dum certo ponto origem O, e o outro segmento, e, era elevado sobre r, segundo um ângulo fixo, e terminando no ponto P. Assim, a cada ponto P do plano ficam associados uma abcissa a e uma ordenada e, e vice-versa.

Os pontos que constituem um dado lugar geométrico podiam, portanto, ser caracterizados por relações de tipo algébrico entre as suas abcissas e ordenadas. Fermat estabeleceu, assim, uma correspondência entre entidades de natureza geométrica e algébrica, o que lhe permitiu afirmar que qualquer equação nas incógnitas a e e determina um lugar geométrico dos pontos cujas abcissas e ordenadas satisfazem a dita equação. Deste modo, poder-se-ia estudar as propriedades da curva (objeto geométrico) através das propriedades da equação correspondente (objeto algébrico) (Sá, 2000).

5.5.2. René Descartes

A conceção da geometria analítica efetuada por Descartes foi exposta em *La Géométrie* (*A Geometria*), um tratado publicado, em 1637, em apêndice ao *Discours de la Méthode* (*Discurso do Método)*, com o objetivo de demonstrar a aplicação dos seus métodos de raciocínio à geometria. No *Discurso do Método*, Descartes discute os méritos da geometria e da álgebra, sem mostrar, no entanto, preferência por alguma delas (Descartes, 1989).

> Depois, quanto à análise dos antigos e quanto à álgebra dos modernos, além de elas não se aplicarem senão a matérias mais abstratas e parecerem não ter qualquer utilidade, a primeira está sempre tão ligada à consideração das figuras, que não pode exercitar o entendimento sem cansar muito a imaginação, e a segunda sujeita-nos de tal modo a certas regras e a certos números, que se fez dela uma arte confusa e obscura, que embaraça o espírito, em vez de ser uma ciência que o cultive. (Descartes 1989, pp.71-72)

Para Descartes, o objetivo do seu método era, por um lado, através de processos algébricos libertar a geometria das figuras e, por outro lado, dar significado às operações da álgebra por meio de interpretações geométricas. Nesse sentido, o método presente em *A Geometria* consistia em traduzir numa equação algébrica um determinado problema geométrico e, depois, tendo simplificado ao máximo essa equação, resolvê-la de forma geométrica. Tal como Fermat, Descartes estudou os trabalhos de Viète e neles via a chave para a compreensão da análise dos gregos. Contudo, em vez de relacionar a álgebra com a geometria através do estudo de lugares geométricos, Descartes preocupou-se em demonstrar esta relação através da construção geométrica de soluções para equações algébricas, seguindo a tradição antiga, uma tradição que também tinha sido continuada pelos matemáticos islâmicos (Katz, 1993).

A Geometria divide-se em três livros, tratando-se da única publicação matemática de Descartes. O primeiro livro contém uma explicação de alguns dos princípios da geometria algébrica, revelando um avanço em relação aos procedimentos efetuados pelos gregos. Como já foi observado, o raciocínio matemático dos gregos baseava-se, quase unicamente, em formas e figuras geométricas: um segmento de reta representava também o seu próprio comprimento; o produto de dois segmentos de reta representava uma área retangular; o produto de três segmentos de reta representava um volume paralelepipédico (Boyer, 1989). No entanto, para Descartes, x^2 não sugeria uma área, mas antes o quarto termo da proporção $1:x=x:x^2$, suscetível, portanto, de ser representado por um segmento de reta. Descartes iniciou a *Geometria* por uma aritmetização dos segmentos de reta, mostrando, para além das usuais adição e subtração, que fixando um segmento de reta unitário era «(…) possível definir também operações internas de multiplicação, divisão e radiciação de segmentos de reta.» (Sá, 2000, p. 558). De facto, usando um segmento unitário é possível, desta forma, representar qualquer potência de uma variável, ou um produto de variáveis, por meio de um segmento de reta. Com esta arimetização dos segmentos de reta, Descartes libertava-se do princípio da homogeneidade, que dominava a geometria desde a Antiguidade (Sá, 2000). Os termos a^2 e a^3 são representados por Descartes como segmentos de reta, em lugar de quadrados e cubos geométricos. Assim, Descartes pôde também considerar potências de grau mais elevado sem se preocupar com a sua falta de significado geométrico. Deste modo, expressões como $\sqrt[3]{a^2b^2-b}$ (onde a e b representam segmentos de reta e o segmento unidade é conhecido) ganharam sentido:

> (…) assim, se há que extrair a raiz cúbica de *aabb* – *b*, deve considerar-se que a quantidade *aabb* está dividida uma vez pela unidade, e que a outra quantidade *b* está multiplicada duas vezes pela mesma unidade. (Descartes, 2001, p. 7)

Para além de libertar a álgebra do princípio grego da homogeneidade, Descartes não segue a distinção vogal/consoante proposta por Viète para designar as quantidades desconhecidas/conhecidas, e propõe uma outra, que consiste em designar as incógnitas pelas últimas letras do alfabeto e as constantes pelas primeiras letras do alfabeto (Katz, 1993). Após proceder à aritmetização dos segmentos de reta, Descartes abordou questões do tipo algébrico nesse universo. Segundo Smith (1951), a ideia fundamental de Descartes não era revolucionar a geometria, mas sim elucidar a álgebra através da intuição geométrica e dos seus conceitos, ou seja, fazer o tratamento gráfico das equações. Desta forma apresentou no livro I a resolução geométrica dos três tipos de equações do 2.º grau completas: $x^2 + bx = c$, $x^2 = bx + c$ e $x^2 + c = bx$, com os coeficientes e soluções positivas. O segundo livro de *A Geometria* apresenta, entre outros assuntos, uma classificação de curvas e um método para construir tangentes a uma curva num ponto dado. Os problemas de tangentes desempenhavam um importante papel na investigação matemática do século XVII; no entanto, na *Geometria* Descartes restringiu o seu estudo às curvas algébricas, isto é, curvas que admitiam uma equação do tipo polinomial (Sá, 2000). O terceiro livro de *A Geometria* aborda a resolução de equações de grau maior do que dois. Descartes mostra como descobrir, caso existam, raízes racionais, como baixar o grau de uma equação quando se conhece uma raiz, como aumentar ou diminuir o valor das raízes de uma equação sem as conhecer, como eliminar o segundo termo de uma equação, como determinar o número de possíveis raízes “verdadeiras” ou “falsas”, isto é, positivas ou negativas, através da regra de sinais de Descartes, e como determinar a solução algébrica de equações cúbicas e de quarto grau.

Na exposição da geometria analítica de Descartes, fica claro que os pensamentos deste autor estavam longe das considerações práticas que hoje estão frequentemente associadas ao uso de coordenadas. Descartes não estabeleceu um sistema de coordenadas com o propósito de localizar pontos, nem pensou nas coordenadas como pares de números, sendo que nas figuras que surgem no livro não se encontram de forma explícita os eixos coordenados.

No que diz respeito à simbologia utilizada por Descartes, a notação usada era basta próxima da atual. O uso de letras do começo do alfabeto para os parâmetros e das do fim para incógnitas, a notação para potências a^3, a^4 e, assim, sucessivamente, o uso dos símbolos germânicos + e – , permitem registar que toda a nossa notação essencial foi estabelecida por Descartes (Waerden, 1985). Por exemplo, na parte relativa às equações do 2.º grau, a simbologia apresentada por Descartes difere da atual apenas em dois aspetos: a utilização de yy para designar y^2 e o símbolo $\propto$ para representar o sinal de = (Smith, 1953). Ainda no que diz respeito às equações do 2.º grau, embora Descartes, em parte, ainda utilizasse o discurso contínuo na resolução das equações, é de observar que há uma predominância da notação simbólica. De facto, no primeiro dos três livros, Descartes resolve problemas geométricos que requerem apenas o uso de retas e círculos, as curvas euclidianas standard. Contudo, os processos algébricas utilizados por Descartes fazem com que as técnicas euclidianas pareçam modernas na sua utilização (Katz, 1993).

Por exemplo para construir a solução da equação quadrática $z^2 = az + bb$, Descartes constrói o triângulo retângulo NLM em que LM é igual a b, raiz quadrada da quantidade conhecida bb, e LN é igual a $\frac{a}{2}$, a metade da outra quantidade conhecida que está multiplicada pela linha desconhecida z. Então, Descartes prolonga MN, a base do triângulo NLM, até a um ponto que designa por O de tal forma que NO seja igual a NL. Observa, então, que toda a linha procurada z é OM e exprime z na forma: $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, apresentando a seguinte figura:

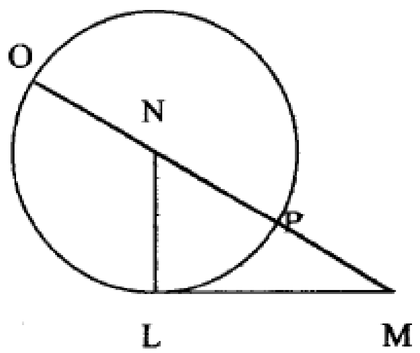


Figura 5.34. Resolução geométrica da equação quadrática $z^2 = az + bb$, segundo Descartes.

Descartes explica a forma de obter a solução, embora não apresente qualquer justificação. No entanto, Descartes podia deduzir essa justificação a partir de *Elementos* III, 36, de Euclides, que corresponde ao conceito moderno de potência de um ponto relativamente a uma circunferência. Notar que os triângulos MPL e MLO são semelhantes, porque têm um ângulo em comum (ângulo com vértice em M) e os ângulos MLP e MOL são geometricamente iguais. Logo, os lados correspondentes são proporcionais: $\frac{ML}{MO} = \frac{MP}{ML}$ e, portanto, $ML^2 = MP \times MO$ que é o que a proposição *Elementos* II, 36 afirma. Na notação apresentada por Descartes, LM = b e LN = $\frac{a}{2}$; assim, $(MO - a) \times MO = bb$, ou seja, $MO^2 = a \times MO + bb$. Logo, MO satisfaz a equação $z^2 = az + bb$, sendo, portanto, a solução procurada. Para deduzir a expressão algébrica final apresentada por Descartes, é suficiente aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo NLM. Uma vez que $MN^2 = LM^2 + NM^2$, tem-se $(MO - NO)^2 = LM^2 + NM^2$, ou seja,

$$\left(z - \frac{a}{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow z - \frac{a}{2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}\,.$$

A outra solução não é apresentada, uma vez que é negativa.

5.6. Dificuldades dos alunos na aprendizagem da geometria e da álgebra como reflexo da evolução histórica de conceitos e procedimentos

Através desta breve resenha histórica, observa-se o importante papel desempenhado pela geometria na evolução do estudo da matemática e a íntima relação desta com o desenvolvimento da álgebra. Inicialmente associada a questões de índole prática, o interesse pelo estudo da geometria originou o progresso, em diferentes civilizações, de variadas técnicas geométricas que proporcionaram, em particular na civilização grega, uma profunda atividade demonstrativa, tendo sido, durante muito tempo, os *Elementos* de Euclides a obra de ensino de referência. Esta orientação teve, no entanto, o inconveniente de submeter o estudo do quantitativo à geometria, entendida, durante séculos, como ciência dominante. Embora existam registos históricos do desenvolvimento algébrico em diferentes civilizações –

egípcia, mesopotâmica, grega e árabe – o estatuto e independência da álgebra só ocorre ao longo dos séculos XVII e XVIII, quando os matemáticos se debruçaram a estudar as equações algébricas, uma vez que o conhecimento adquirido no final da Renascença lhes permitia o tratamento geral de equações através do emprego duma simbologia condensada; a aceitação de raízes de todo o tipo, incluindo as imaginárias; e a manipulação de cálculos de diferente tipo de grandezas, designando-as por diferentes letras, como se se tratassem de números. Contudo, a geometria e a álgebra, com uma história tão longa, e fruto da atividade humana, passaram necessariamente por muitas fases, vicissitudes e crises. De facto, os contextos em que as questões geométricas e algébricas foram colocadas e as formas como foram expressas, tanto a nível de problemas como a nível de raciocínios resolutivos, foram mudando ao longo dos séculos.

A partir de uma análise da construção histórica dos diversos conceitos e procedimentos, quer geométricos quer algébricos, é possível encontrar evidências de fragmentos que demonstram não só as diferentes fases desses domínios, mas também as próprias vicissitudes e crises presentes nesse desenvolvimento. Esta breve resenha histórica evidencia o facto de que uma boa ideia pode tardar a ser aceite, porque, por um lado, o seu promotor pode não possuir reputação que assegure as influências necessárias; por outro lado, podem ainda não se encontrar estabelecidos os alicerces necessários à fundamentação teórica dessa mesma ideia. Além disso, observando o percurso histórico de determinados conceitos e procedimentos, é possível ainda identificar certas dificuldades e constrangimentos. É, ainda, possível registar não só os esforços realizados por diferentes matemáticos na fundamentação desses conceitos e procedimentos, mas também as consequências resultantes da procura de fundamentações, o que, por vezes, originou novas descobertas e o desenvolvimento de outras áreas de estudo. Por exemplo, a crise dos incomensuráveis, que abalou os princípios da filosofia pitagórica, acabou por se tornar produtiva, possibilitando o aparecimento da geometria das áreas e de uma nova teoria das proporções. Impasses célebres, como a quadratura do círculo, a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo, permitiram o desenvolvimento e a construção de diversos mecanismos de aplicação e, ainda na geometria, o aparecimento das geometrias não-euclidianas que surgiram como consequência da procura da prova do quinto postulado de Euclides. No campo da álgebra, quando Abel provou que as equações do quinto grau não podiam ser resolvidas por radicais (Barthélemy, 2003), originou o aparecimento da teoria de grupos (Queiró, 2000) e a incessante procura da prova do teorema de Fermat, que demorou aproximadamente três séculos e meio para ser demonstrado, proporcionando inúmeras investigações, que resultaram no aparecimento de novas áreas temáticas de estudo da matemática.

O conhecimento do desenvolvimento histórico da matemática permite, portanto, reconhecer as dificuldades inerentes ao processo de construção do conhecimento matemático. Procedendo a uma reconstrução da evolução histórica de conceitos e procedimentos, a perceção do seu desenvolvimento pode possibilitar a superação de determinados conflitos cognitivos, uma vez que estes se encontram presentes ao longo das diferentes etapas de construção do conhecimento. Nessa medida, os obstáculos enfrentados pelos alunos na aprendizagem da geometria e da álgebra podem ser reflexo da transformação gradual e progressiva dos conceitos e procedimentos destes dois domínios, sendo por isso considerados obstáculos epistemológicos. De acordo com Brousseau (1983), os obstáculos manifestam-se por erros, pela incompreensão de certos problemas ou pela impossibilidade de os resolver com eficácia. Nesse sentido, os obstáculos epistemológicos são inerentes ao saber e identificáveis nas dificuldades encontradas pelos matemáticos para os superar ao longo da história. São, assim, barreiras, estorvos, impedimentos que tiveram um papel importante no desenvolvimento histórico do conhecimento. Desta forma, analisar as condições e as razões históricas das dificuldades e o tempo necessário para os matemáticos procederem a determinadas mudanças, nomeadamente às que envolveram uma passagem do entendimento intuitivo ao formal, pode ajudar a predizer e a interpretar as dificuldades dos alunos em realizarem essas mudanças em contexto de sala de aula (Katz et al., 2000).

Inúmeros alunos apresentam dificuldades associadas ao pensamento geométrico e algébrico. As dificuldades de aprendizagem em geometria estão, em muitos casos, associadas à questão da *visualização* geométrica. De facto, na resolução de um problema geométrico, a construção de uma figura auxiliar, como suporte intuitivo, e a capacidade de uma boa visualização geométrica do problema em causa, poderão permitir uma melhor compreensão do mesmo, isto é, poderão conduzir à construção de conjeturas e, consequentemente, influenciar o processo de resolução. No entanto, embora as figuras possam constituir um suporte intuitivo importante na resolução de problemas geométricos, nomeadamente porque permitem a exploração do problema, por vezes apresentam-se como um obstáculo. De acordo com o desenho efetuado, podem-se inserir ou abandonar hipóteses ou construir figuras particulares o que pode impedir de "ver", nas figuras, as relações ou propriedades gerais tendo em consideração as hipóteses inicialmente dadas (Duval, 1995). Uma das possíveis razões para a dificuldade manifestada pelos alunos em resolver problemas geométricos relaciona-se com o facto de estes, por vezes, considerarem desnecessário mostrar determinadas propriedades quando as mesmas se "veem" na figura. Esta dificuldade surge muito associada às questões de provas geométricas (Duval, 1995). Muitas vezes, a resolução de problemas geométricos traduz ainda uma dificuldade associada à coordenação de diferentes registos de representação. O facto de ser necessário recorrer a figuras geométricas, à linguagem corrente e a certas representações algébricas, origina que o tratamento dos conhecimentos, envolvidos na resolução de um determinado problema, não se opere de forma espontânea (Duval, 1995). Para Duval (1988), a resolução de problemas geométricos exige uma forma de raciocínio que implica a referência à axiomática local, a qual se desenvolve no registo da língua natural. De facto, alguns termos da geometria pouco usados na linguagem corrente são, muitas vezes, a base da confusão entre hipóteses e conclusão, teorema e teorema recíproco. Os alunos podem raciocinar corretamente e encontrar a solução do problema, mas apresentarem dificuldade em responder com argumentos precisos. Dentro desse contexto, a leitura incorreta de definições leva à incompreensão dos objetos matemáticos presentes. Uma outra dificuldade manifestada pelos alunos no estudo da geometria está associada ao uso do raciocínio indireto, raciocínio pelo absurdo, sendo considerado, por vários autores, um obstáculo à aprendizagem da demonstração (Duval, 1995).

O rigor evidenciado pela geometria grega traduz-se nos diferentes métodos de prova apresentados, nomeadamente na forma sintética de exposição. No entanto, segundo Netz (1998) os diagramas que acompanhavam as provas sugerem que esses foram construídos antes de estas serem escritas, o que indica que o elemento visual não foi tão abandonado como escondido pelos gregos. Neste sentido, no pensamento geométrico grego é possível identificar três fases (Netz, 1998): a fase em que se desenha a figura, diagrama ou esquema; a fase onde ocorre o processo argumentativo, isto é, em que se produz um ensaio à custa do esquema já desenhado, na qual são, por exemplo, inseridas letras na figura; e, por fim, a fase final, a produção escrita do problema ou prova. Contudo, nos *Elementos* de Euclides é possível observar a presença de diagramas que não são necessários para mostrar o pretendido. De facto, para os gregos as demonstrações estavam associadas às imagens, portanto, para eles se não existisse um diagrama não existia prova. Assim, a presença de diagramas, mesmo onde não eram precisos, corrobora a importância de as provas iniciais estarem associadas a argumentos visuais. Provavelmente a especial atenção dada pelos gregos às construções geométricas tenha sido o facto de cada uma dessas construções servir como uma espécie de prova de existência para a figura ou conceito envolvido.

Embora o rigor euclidiano e, consequentemente a geometria euclidiana, tenham sido durante séculos elemento de referência, a descoberta das geometrias não-euclidianas desferiu um golpe na ideia de que as matemáticas afirmavam algo de verdadeiro sobre o mundo físico (Barthélemy, 2003). É certo que a geometria euclidiana continuou a permanecer como referência em quase todos os casos, mas perdeu o seu antigo estatuto de corpo de verdades incontestáveis. Houve, portanto, necessidade de uma nova abordagem que assegurasse os fundamentos da geometria e do resto da matemática. A descoberta das geometrias não-euclidianas causou uma verdadeira revolução científica na matemática, fazendo convergir a atenção dos matemáticos para os fundamentos da geometria (Estrada, 2000d).

No que diz respeito à álgebra, há alunos capazes de operar com símbolos matemáticos e, contudo, incapazes de proceder a generalizações. No entanto, há outros que manifestam dificuldades relativas à não compreensão das técnicas algébricas, aliadas ao não entendimento dos conceitos algébricos. Deste modo, destacam-se dois níveis de dificuldade na aprendizagem da álgebra: nível da *linguagem algébrica* e nível da *realização de cálculos algébricos*.

O conhecimento da linguagem algébrica está associado à interpretação de enunciados de problemas, que exige tradução da linguagem natural para a linguagem matemática. Muitas vezes as dificuldades evidenciadas pelos alunos estão associadas à tradução de situações da linguagem corrente para a linguagem formal, ou seja, as dificuldades assentam ao nível da interpretação de enunciados. Não sendo capazes de interpretar, os alunos não conseguirão representar formalmente a situação problemática em questão. Neste sentido, muitos alunos manifestam dificuldades na resolução de problemas algébricos bastante simples (Lochhead e Mestre, 1995). No entanto, além da tradução algébrica dos problemas, a resolução dos mesmos vai exigir que o aluno utilize conhecimentos que fazem parte do campo dos procedimentos algébricos. Os alunos deparam-se, assim, com um cenário totalmente novo e algumas vezes contraditório em relação aos procedimentos aritméticos com os quais operam frequentemente. De facto, um dos fatores considerados influentes na apropriação, por parte dos alunos, dos conceitos algébricos é a relação entre a álgebra e a aritmética. Para Oliveira (2002), algumas barreiras existentes no estudo da álgebra surgem, por um lado, como consequência dos alunos transportarem para o contexto algébrico dificuldades herdadas da aprendizagem do contexto aritmético, por outro, por estenderem para o estudo algébrico procedimentos aritméticos que não são aplicáveis no novo contexto.

Acresce ainda referir que a álgebra constitui uma significativa área de generalização e abstração, possibilitando a aquisição de ferramentas que permitem resolver diversos problemas. Os alunos que não têm familiaridade com a linguagem algébrica (compreensão da linguagem simbólica) e apresentam dificuldades em proceder à realização de cálculos algébricos (apreensão dos conceitos algébricos), regra geral não conseguem utilizar os símbolos matemáticos como uma linguagem auxiliar no raciocínio matemático, não compreendendo, portanto, os procedimentos que compõem as transformações de expressões algébricas e, consequentemente, não desenvolvem a habilidade para fazer generalizações, podendo estar sujeitos a um fraco desempenho em atividades matemáticas que exigem um grau mais elevado de abstração.

Embora a álgebra compreenda um campo de estudo muito amplo, o seu desenvolvimento pode ser dividido em duas fases: a álgebra antiga, centrada no estudo das equações e nos métodos para as resolver, e a álgebra moderna, que se ocupa do estudo das estruturas matemáticas, como grupos, anéis, corpos, etc.. O período denominado por álgebra antiga teve como característica principal a invenção gradual da linguagem simbólica e o estudo de equações. Nesse período, o desenvolvimento da linguagem algébrica evoluiu passando por três estádios. O desenvolvimento histórico da atividade algébrica iniciou-se com o período da álgebra retórica, fase em que as resoluções eram apresentadas de forma verbal, descritas por palavras, caracterizadas pela descrição de procedimentos, em que as instruções verbais fornecidas eram aplicadas a uma sequência de casos específicos. Ao período retórico sucedeu um outro, o sincopado, em que são adotadas algumas abreviaturas. Por fim, surgiu o período o simbólico, em que o poder de síntese das expressões é transmitido por símbolos.

Passando por, aproximadamente, duzentos anos de aperfeiçoamento com a utilização de diversas simbologias e por um processo de padronização de notação que se tornou estável por volta do século XVIII (Queiró, 1993), a evolução na notação simbólica possibilitou um aprofundamento do pensamento algébrico ao passar da "solução manipulativa de equações" para o estudo de suas propriedades teóricas (Barthélemy, 2003). O desenvolvimento dos números complexos foi de extrema importância para a generalização das relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial, e a procura de uma solução algébrica para equações polinomiais de grau superior a quatro conduziu à formulação dos fundamentos da álgebra moderna, resultante dos estudos sobre as estruturas algébricas iniciados por Abel e Galois (Queiró, 2000).

Ao proceder-se a uma leitura histórica da construção da ciência, verifica-se que os investigadores, quando iniciam uma pesquisa, observam os factos, conjeturam hipóteses, realizam experiências e, por fim, propõem procedimentos e definições precisas dos conceitos. Este é o método de descoberta, um método analítico, diferente daquele que é apresentado muitas vezes em contexto de sala de aula, de caráter sintético, em que se parte das definições, e se enunciam e apresentam leis e deduções. Uma vez que o conhecimento matemático é historicamente construído, e, portanto, está em permanente evolução, o ensino da matemática precisa de incorporar essa perspetiva, permitindo aos alunos reconhecer as contribuições que a história da matemática oferece para compreender as informações e se posicionar perante elas.

Em níveis mais elementares os alunos têm com frequência dificuldades em fazer a passagem da resolução de problemas concretos usando palavras e números para problemas mais complicados nos quais é necessário designar as quantidades desconhecidas. Historicamente verifica-se que esta foi uma mudança conceptual difícil. O facto de os alunos sentirem dificuldades análogas à que os matemáticos sentiram no passado assume especial relevância no ensino de conceitos e procedimentos (Katz et al., 2000), nomeadamente do âmbito da geometria e da álgebra. O rigor progressivo no estudo da geometria, as suas relações com o desenvolvimento da álgebra e o longo tempo para a estruturação da linguagem algébrica implica que naturalmente os alunos evidenciam dificuldades em assimilar toda a informação presente nos conceitos e procedimentos destas temáticas.

As linguagens geométrica e algébrica são formas específicas de pensamento e de representação do mundo, intimamente associadas ao raciocínio matemático, cuja aplicação possibilita uma interpretação concreta dos elementos abstratos. Tanto os entes geométricos como a simbologia algébrica representam formas de linguagem precisa e essencial para a expressão do pensamento matemático. No entanto, estas formas específicas de pensamento utilizam conceitos e regras específicas, às quais estão associadas as dificuldades, nomeadamente aos níveis da generalização e abstração. O pensamento abstrato opera com conceitos que podem ser descritos por palavras, esquemas e símbolos; portanto, para o desenvolvimento da abstração, é necessária uma adaptação à linguagem empregue. A linguagem possibilita, assim, elevar aspetos concretos do mundo para o domínio do pensamento, o que permite atingir o campo conceptual. Sendo a escola responsável pela promoção da aprendizagem dos conceitos científicos historicamente elaborados, esta tem um papel mediador no processo de aquisição e desenvolvimento de linguagens que levam à abstração. Assim, uma abordagem histórica do desenvolvimento da geometria e da álgebra pode propiciar aos alunos a participação na construção da linguagem simbólica e de conhecimentos geométricos e algébricos. Um percurso pela história da evolução do pensamento geométrico e algébrico pode conduzir os alunos à produção de novos significados em relação a estas duas áreas, e, consequentemente, amenizar dificuldades relativas à abstração e à generalização. O conhecimento do desenvolvimento histórico permite, assim, perceber, não só a forma como se procedeu ao progresso destas duas áreas, mas também as dificuldades associadas à construção histórica dos conceitos e procedimentos geométricos e algébricos. Nesse sentido, é necessário que o trabalho de conceitos e procedimentos, quer geométricos, quer algébricos, seja também gradual, passando por uma fundamentação contextualizada, a fim de que sejam apropriados de forma efetiva pelos alunos. Contudo, o objetivo não se reduz a apresentar e a reproduzir historicamente conceitos ou procedimentos, mas também tendo em conta a evolução histórica, social e cultural, as negociações de significado envolvidas nos diversos contextos sociais e as mudanças conceptuais ocorridas ao longo do tempo, a recriar e a redescobrir conceitos ou procedimentos a partir de discussões, em contexto de sala de aula, sobre a objetividade e a validade universal da matemática, clarificando ideias e aprofundando-as. A história da matemática surge, assim, como um recurso útil para entender o processo de formação do pensamento matemático e para explorar a forma como esse pensamento poder ser usado para desenhar atividades de sala de aula (Radford, 2000).

II. Parte empírica

6. Metodologia

O presente estudo segue uma metodologia qualitativa, no quadro do paradigma de investigação interpretativo, optando-se por um design de estudo de caso.

Este capítulo, organizado em duas grandes secções, descreve as opções metodológicas que permitiram desenvolver todo o trabalho e o modo como este foi concebido e realizado. Justificam-se, assim, as opções metodológicas do estudo, iniciando-se por descrever a natureza das investigações qualitativas, justificando a adoção do paradigma interpretativo e do design de estudo de caso; apresentam-se as características gerais do plano de investigação desta pesquisa, os participantes, os instrumentos e os procedimentos a utilizar na recolha de dados e, finalmente, expõem-se os processos de análise de dados.

6.1. Opções metodológicas

A escolha da metodologia a utilizar numa determinada investigação educacional depende não só dos objetivos e do tipo de questões do estudo, mas também da natureza do fenómeno estudado e das condições em que este mesmo fenómeno decorre. Nesse sentido, optou-se por uma investigação de caráter qualitativo de cunho interpretativo, uma vez que se pretende reconstituir a experiência vivida pelos participantes (Erikson, 1986).

6.1.1. Estudos qualitativos

Os estudos de natureza qualitativa evidenciam as qualidades do indivíduo, os processos e os significados que não são medidos em termos de quantidade, ganhos, intensidade ou frequência (Bogdan & Biklen, 1994; Denzin & Lincoln, 2005). Bogdan e Biklen (1994) sublinham que o ponto fundamental da investigação qualitativa é o facto de se deter naquilo que os sujeitos envolvidos experimentam, no modo como interpretam as suas experiências e na forma como estruturam o mundo social em que vivem. Nesse sentido, quer Bogdan & Biklen

(1999) quer Patton (1987) enumeram um conjunto de características da investigação qualitativa realçando: o seu caráter descritivo (uma vez que se procura compreender as situações na sua globalidade e complexidade); a valorização do ambiente natural dos fenómenos (visto que incidem em processos e atividades que ocorrem naturalmente); a atitude indutiva (parte-se de dados e não de premissas, sendo orientadas para a exploração e descoberta a partir de categorias e dimensões de análise emergentes de observações abertas); o contacto direto com as situações em estudo; a importância dada ao processo de investigação (ou seja, adota-se uma visão dinâmica das situações, focando os processos de desenvolvimento e procurando captar as mudanças e os resultados inesperados que vão ocorrendo, por contraposição à valorização exclusiva dos resultados); e a importância primordial do significado (procura-se estudar as situações em profundidade e com pormenor).

A escolha do paradigma interpretativo esteve não só relacionada com a temática do estudo, como também com o tipo de questões de investigação e com a convicção da relevância deste paradigma para o tipo de investigação em Educação que se pretendia empreender. A escolha desta metodologia possibilita o estudo sistemático de um fenómeno específico, como um programa, um acontecimento, uma pessoa, um processo, uma instituição ou um grupo social (Merriam, 1988). Nesse sentido, em contexto de sala de aula, este tipo de pesquisa qualitativa com cunho interpretativo permite descobrir como as decisões e ações de todos os participantes constituem um ambiente de aprendizagem, sendo a interpretação dos significados o resultado de escolhas humanas compostas por ligações sucessivas numa cadeia de interação social. De facto, o paradigma interpretativo introduz uma dimensão que se distancia dos cânones positivistas clássicos, isto porque não visa o estabelecimento de relações causa-efeito, não se orienta para a verificação de leis gerais, nem para a previsão de comportamentos, mas, antes, para o desenvolvimento do conhecimento em situações inseridas em determinados contextos, conhecimento esse que assume um caráter plural, feito a muitas vozes e inevitavelmente fragmentado (Cohen & Manion, 1990). Assim, o objetivo numa investigação qualitativa de paradigma interpretativo situa-se na clarificação do significado humano da vida social (Erikson, 1989), ou seja, o investigador tem de ser capaz de participar na atividade que investiga e, ao mesmo tempo, de modo distanciado, refletir sobre a mesma (Eisenhart, 1988). Acresce referir que a adoção de um paradigma de investigação não é uma escolha neutra, uma vez que o paradigma e o problema se condicionam mutuamente (Strauss & Corbin, 1990). Portanto, o sucesso de um projeto de investigação supõe, antes de mais, uma harmonização coerente entre ambos. Além disso, nas escolhas subjacentes a essa adoção está associado o próprio modo de olhar do investigador, incluindo a sua experiência e prática profissional (Dezin & Lincoln, 1994). De facto, o paradigma interpretativo valoriza a explicação e a compreensão holística das diferentes situações, realça o caráter complexo e essencialmente humano da atividade de interpretação do real e destaca o papel privilegiado que nessa atividade toma o plano da intersubjetividade, plano esse que resulta do encontro e interação de múltiplos atores sociais entre os quais se inclui o próprio investigador (Martinho, 2007).

O paradigma interpretativo inscreve-se na corrente mais ampla da investigação qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994), sendo consensual o reconhecimento das profundas implicações que este paradigma e, de uma forma mais geral, a abordagem qualitativa, tem tido na investigação em Educação. Ludke e André (1986) destacam não só a natureza descritiva dos dados que a investigação qualitativa permite recolher, mas também a sua capacidade de focar a realidade de uma forma complexa e contextualizada. Para Woods (1999) esta abordagem qualitativa tem constituído uma verdadeira revolução, revolução essa que passa essencialmente pelos estudos centrados no professor e nas suas conceções, práticas e desenvolvimento profissional. Dentro do paradigma interpretativo, a análise de narrativas e os estudos de casos são, por certo, os dois tipos de abordagem mais comuns para descrever a realidade de forma complexa e contextualizada.

6.1.2. Estudo de caso

No âmbito da investigação qualitativa que se propõe realizar, optou-se pelo estudo de caso, uma vez que se pretende analisar o modo como a integração de tarefas do âmbito da história da matemática, em contexto de sala de aula, influencia a capacidade de raciocínio e argumentação dos alunos, procurando, assim, conhecer a realidade tal como ela é vista pelos próprios participantes (Ponte, 2006).

O estudo de caso enquadra-se no âmbito de uma investigação empírica (Yin, 1989) com um tipo de abordagem de investigação que se traduz por um registo e análise intensiva e holística de uma dada situação ou fenómeno empírico (Merriam, 1988; Stake, 1994). De acordo com Patton (1987), um estudo de caso procura descrever uma unidade de análise com pormenor e em profundidade, de forma contextualizada e de um modo holístico, podendo o "caso", a unidade de análise, ser uma pessoa, um acontecimento, um programa ou uma comunidade. Nesse sentido, um estudo de caso pode ser intrínseco (quando se foca na situação particular que se pretende estudar), instrumental (quando o caso é usado como meio para compreender uma problemática mais vasta) ou agregado (quando procede à agregação de vários casos instrumentais) (Stake, 1994). No entanto, num estudo de caso, a preocupação não é a produção de enunciados que possam constituir leis generalizáveis. Jorgensen (1989) refere que os estudos de caso podem provocar conceitos e generalizações, formulados como teorias interpretativas, que podem ser usadas para examinar criticamente hipóteses e teorias existentes que permitem, portanto, sustentar decisões práticas. Contudo, não procuram estabelecer teorias, nem explicar, predizer ou controlar fenómenos. Nesse sentido, o conhecimento que é produzido é de uma natureza muito diferente do conhecimento que metodologias de tipo quantitativo podem gerar (Abrantes, 1994).

Independentemente se é intrínseco, instrumental ou agregado, a base do estudo de caso é o seu caráter empírico, onde prevalece a perspetiva interpretativa, nomeadamente do "como" e do "porquê", um elevado nível de aprofundamento e detalhe, o contacto direto e geralmente prolongado no tempo com as situações e pessoas em causa e a perspetiva dinâmica que não se reduz às evoluções imprevisíveis das situações (Yin, 1989). Nesse sentido, o estudo de caso, ao preocupar-se com a procura do que numa situação particular surge como único e fundamental, permite uma melhor compreensão dos fenómenos ou situações em análise (Ponte, 2006). Merriam (1988) observa ainda que o caráter heurístico do estudo de caso não se refere apenas ao investigador que o estabelece e conduz. Para esta investigadora, o estudo de caso pode iluminar a compreensão do leitor sobre o fenómeno em estudo e, desse modo, contribuir para a descoberta de novos significados. Seja qual for a abordagem concreta em que se realiza o paradigma interpretativo, este tem implicações consistentes na forma como se entende o papel do investigador e como se avalia a validade e fiabilidade, ou seja, a credibilidade dos resultados.

6.1.3. Participação do investigador

Patton (1987) regista que os dados de natureza qualitativa assumem, essencialmente, a forma de descrições pormenorizadas de situações, acontecimentos, pessoas, interações e comportamentos observados; citações diretas de pessoas sobre as suas experiências, atitudes, convicções e pensamentos; e excertos ou passagens inteiras de registos, documentos, correspondência e histórias de casos. Esses dados podem, portanto, ser obtidos a partir de diversos métodos, destacando-se as observações, as entrevistas e os documentos (registos produzidos no decorrer da investigação). No caso das observações, o investigador pode assumir desde uma posição totalmente externa em relação ao que se pretende observar, até um papel de interveniente ativo. De facto, quando se pretende descrever de um modo compreensivo e exaustivo um fenómeno, a observação participante surge como um instrumento de recolha de dados fundamental (Jorgensen, 1989). Uma observação cuidadosa permite observar e analisar situações em que os motivos, as atitudes, as crenças e os valores dependem muito, se não quase totalmente da atividade humana (Merriam, 1988).

O paradigma interpretativo ao valorizar o papel que nessa atividade toma o plano da intersubjetividade, que resulta da interação de múltiplos atores sociais, entre os quais se inclui o investigador, contesta a possibilidade do investigador assumir um ponto de observação externo, pretensamente neutro. O investigador situa-se no interior do processo onde a investigação decorre. Esta perspetiva, do papel do investigador e da sua relação com as diferentes pessoas envolvidas no estudo, levanta questões de alguma complexidade ao nível não só da credibilidade do estudo, mas também do próprio processo de investigação. Aliás, como observa Martinho (2007, p. 100) «(…) o lugar do estudo é o da intersubjetividade que se estabelece entre ele e as outras pessoas envolvidas. Os próprios papéis sociais acabam por ser confrontados e (re-)determinados pela dinâmica das interações.».

O envolvimento do investigador permite, por um lado, viver os acontecimentos por dentro e, portanto, consegue uma maior proximidade em relação às pessoas, estabelecendo com elas relações de colaboração e mesmo laços de amizade. De acordo com Jorgensen (1989), esta relação de colaboração tem a potencialidade de aumentar a validade dos dados que podem surgir a partir de conversas casuais e entrevistas informais, para além de entrevistas formais e questionários que possam ocorrer. No entanto, e por outro lado, o envolvimento do investigador pode acarretar problemas ao desenvolvimento da investigação. O investigador pode não ter tempo e condições para manter um registo sistemático das observações efetuadas, assumindo sobretudo o papel de apoiante das pessoas com quem trabalha. A excessiva intimidade entre o investigador e os participantes pode ser criadora de significados, podendo conduzir à viciação das observações (comprometendo, por exemplo, a espontaneidade dos discursos) ou mesmo a um enviesamento dos caminhos (McCracken, 1988). Apesar disso, é de observar que independentemente da intimidade estabelecida entre o investigador e os participantes, os próprios sentimentos e preconceitos do investigador podem originar enviesamentos (Bogdan & Biklen, 1999).

É de realçar, no entanto, a importância das características pessoais e da experiência do investigador no desenvolvimento da investigação (Evertson & Green, 1986). Como refere Ponte (2006), a perspicácia do investigador na observação e a pertinência na análise são, portanto, características fundamentais para o sucesso da investigação.

Salienta-se, ainda, que em investigação qualitativa, se deve ter em particular atenção os aspetos de natureza ética envolvidos (Tuckman, 2002), sendo o papel do investigador um papel determinante. Nestes aspetos insere-se a necessidade de obter um consentimento informado dos participantes. Qualquer dos termos do acordo estabelecido deve ser respeitado pelo investigador em qualquer fase do processo de investigação. As regras do jogo devem ser claras e negociadas (Santos, 2000) e deve-se resguardar a privacidade dos intervenientes (Bogdan & Biklen, 1999; Merriam, 1988). É, portanto, necessário ter em atenção eventuais implicações, do acesso público ao estudo, para os participantes ou para terceiros e considerar a existência de um benefício partilhado entre investigador e participantes. Ainda do ponto de vista ético, e de acordo com Fontana e Frey (1994), é, igualmente relevante, a autoinibição do investigador na emissão de juízos de valor sobre o objeto de estudo. O investigador deve assumir mais uma postura interpretativa do que avaliativa. Um outro aspeto ético relevante numa investigação diz respeito à fidelidade aos dados obtidos. Bogdan e Biklen (1999) observam que o investigador se deve cingir aos resultados que recolheu, mantendo a autenticidade desses resultados, mesmo que estes possam parecer contrários àquilo que desejava. Todos os aspetos éticos a tomar em consideração no processo e no produto da investigação devem, portanto, ser regidos por um profundo respeito, respetivamente, pelos participantes e pela comunidade. A consciência dos riscos por parte do investigador e a explicitação entre todos dos objetivos do estudo são, assim, condições essenciais para os evitar.

Tendo em conta o problema do estudo e as características do presente trabalho de investigação, justifica-se que a observação participante tenha sido considerada muito importante e que se tenha procurado criar condições para que o investigador estivesse naturalmente envolvido na experiência desenvolvida ao nível da turma. Para isso, muito terá contribuído o facto do professor investigador ser professor da turma envolvida no estudo, o que levou a que os alunos continuassem a interagir naturalmente com o investigador, recorrendo ao mesmo para esclarecer dúvidas ou proceder a algum comentário, encarando, assim, o estudo a desenvolver como um trabalho integrado nas habituais práticas de ensino do próprio professor.

6.1.4. Credibilidade

Na discussão sobre a qualidade de uma investigação surgem, em geral, as noções de validade (interna e externa) e de fiabilidade. A fonte de legitimação científica das investigações conduzidas no paradigma interpretativo, pela sua própria natureza, é, necessariamente, distinta da adotada nas ciências exatas ou mesmo nas abordagens de caráter mais circunscrito e quantitativo presente nas ciências humanas. De acordo com Goetz e LeCompte (1984), o paradigma interpretativo é essencialmente, no sentido lato da palavra, indutivo, partindo da realidade empírica que se procura compreender e não de premissas a verificar. Desta forma, a credibilidade dos seus resultados baseia-se num conjunto diversificado de fatores que incluem, de acordo com Ponte (2006), a validade conceptual que supõe a caracterização dos conceitos-chave e dos critérios de classificação de dados e a construção progressiva de um património de conhecimentos que aos poucos vai permitindo a emergência de explicações de caráter menos particular. Segundo Denzin (1989) a postura do investigador que, no início, clarifica as suas motivações e conceções de modo a tornar explícito o seu impacto no estudo, também permite sustentar a credibilidade dos resultados, bem como os fatores associados à validade interna e externa.

Num estudo de caso qualitativo, a validade interna está associada à questão de saber até que ponto o investigador foi capaz de aceder às perspetivas dos participantes e refletir sobre os significados que estes atribuem aos conceitos em estudo (Jorgensen, 1989). Neste sentido, a possibilidade de atingir um elevado grau de validade é um dos pontos fortes de um estudo de caso (Abrantes, 1994). Assim, torna-se útil que o investigador clarifique os seus pressupostos e objetivos, utilize estratégias como observações repetidas ou prolongadas no tempo, recorra a múltiplas fontes de dados, e verifique as descrições efetuadas pelos participantes envolvidos no estudo (Merriam, 1988). Goetz e LeCompte (1984) referem que o envolvimento dos participantes no próprio processo interpretativo permite credibilizar a investigação. Para Ponte (2006), este fator, essencial para validar o estudo, está associado à validade interna, uma vez que as conclusões refletem a realidade reconhecida pelos participantes e não apenas pelo investigador.

No que diz respeito à validade externa, esta está relacionada com a possibilidade de generalização dos resultados obtidos (Tuckman, 2002). Abrantes (1994) observa que num estudo de caso, este conceito pode ser entendido de várias formas: os resultados são hipóteses de trabalho e não conclusões; é possível confrontar o estudo com outros; a generalização fica a cargo do leitor que o faz à luz da sua própria experiência. Desta forma, a validade externa, ou seja, a comparabilidade com outros estudos é um fator de credibilidade (Ludke e André, 1986; Erikson, 1989) o que segundo Goetz e LeCompte (1984) supõe a definição clara dos objetivos, limites e métodos de cada um.

Finalmente, a fiabilidade diz respeito à presunção de que o estudo produz os mesmos resultados se for repetido, eventualmente, por outro investigador. Contudo, uma vez que os estudos de caso incidem muitas vezes sobre situações complexas e de características únicas, os métodos utilizados estão relacionados com as condições particulares do fenómeno em estudo. Nesse sentido, espera-se que, atendendo aos dados, os resultados obtidos façam sentido, o que para isso contribui a consideração de determinados procedimentos, como a explicação clara da posição do investigador, do contexto da situação e da combinação de métodos de recolha de dados efetuada (Lincoln e Guba, citados em Merriam, 1988).

Assim, num estudo de caso, pode ser conveniente recorrer a uma variedade de métodos de recolha de dados, incluindo, por vezes, alguns de natureza quantitativa, de modo a completar a informação recolhida e aumentar a sua validade. O uso de uma forma combinada, dos múltiplos métodos de recolha de dados, triangulação, constitui uma prática útil, em especial quando se lida com uma situação complexa. Como sublinha Patton (1987, p. 60), utilizar vários métodos permite «combinar os pontos fortes e corrigir as deficiências de cada uma das fontes de dados». Embora possam ser utilizadas várias estratégias para escolher os casos a estudar, a decisão deve ser tomada tendo em consideração cada situação particular, ou seja, de acordo com as circunstâncias e os objetivos específicos da investigação que se pretende realizar.

6.2. Conceção e desenvolvimento do estudo

Tendo em consideração a importância de planear e desenvolver etapas que permitam garantir a qualidade de uma investigação, os critérios de credibilidade, fiabilidade e objetividade assumem-se como procedimentos que contribuem para a verificação dessa mesma qualidade, sendo que no presente trabalho foram usadas diversas técnicas que, como referido anteriormente, permitem validar o estudo.

No que diz respeito ao critério de credibilidade, procedeu-se a observações prolongadas no tempo, uma vez que o estudo foi desenvolvido durante dois anos letivos com uma mesma turma do professor investigador; recorreu-se ainda a uma diversidade de instrumentos de recolha de dados, o que permitiu fazer uma triangulação dos mesmos. Na triangulação, os dados obtidos a partir das diferentes técnicas são comparados de modo a validar as categorias definidas (Erlandson et al., 1993), ou seja, a utilização de diferentes métodos refletem uma tentativa de assegurar uma compreensão em profundidade do fenómeno em estudo (Denzin e Lincoln, 1994). Neste trabalho foram utilizados vários métodos de recolha de dados que se podem agrupar em dois tipos: observação (gravações de áudio e vídeo realizadas na aula) e análise documental.

Em relação à possibilidade de generalização dos resultados obtidos, critério de transferência, Erlandson et al. (1993) consideram que nos estudos qualitativos, a transferência é facilitada pela descrição detalhada dos dados e do contexto a que eles se referem. De facto, ao descrever-se, em múltiplos níveis de abstração, a base de dados, facilita-se os julgamentos de transferência por potenciais utilizadores. Procurando-se seguir as recomendações destes autores, no presente trabalho, o contexto e os dados recolhidos foram descritos de uma forma detalhada de modo a clarificar sobre a situação em estudo e sobre as condições em que se obtinham determinados resultados. Por outro lado, os resultados obtidos foram discutidos à luz dos conhecimentos teóricos relacionados com as questões do estudo.

No que diz respeito aos dois últimos critérios de qualidade, os critérios de fiabilidade e de objetividade, estes estão associados à ideia não só de que se o estudo fosse repetido produziria os mesmos efeitos, mas também com o facto dos seus resultados serem o produto de uma investigação não viciada pelo investigador (Erlandson et al., 1993). Merriam (1988), citando Lincon e Cuba (1985), considera que mais importante do que outros obterem os mesmos resultados é conseguir que estes concordem com os resultados, ou seja, tendo em conta os dados, os resultados façam sentido. Erlandson et al. (1993) observa ainda que numa investigação qualitativa, o investigador não procura assegurar que as suas observações estejam isentas da sua contaminação, mas o que o preocupa é que os dados se confirmem mutuamente. De entre as técnicas sugeridas por vários autores para assegurar estes dois critérios de qualidade, foram usadas as técnicas propostas por Merriam (1988): a triangulação e a explicitação da posição do investigador. Este último aspeto, que inclui a fundamentação teórica que suporta o estudo, a sua posição em relação ao grupo que estuda, os critérios de escolha dos participantes, a descrição destes e do contexto em que decorreu a recolha de dados será explanado ao longo deste subcapítulo.

Nesta investigação, analisa-se o trabalho desenvolvido por alunos do ensino básico durante a realização de um conjunto de tarefas, aplicadas ao longo de dois anos letivos consecutivos a uma mesma turma, de forma a enquadrar o estudo no contexto educativo dos oitavo e nono anos de escolaridade. O trabalho desenvolvido pelos alunos teve um papel central na abordagem dos temas que constam do currículo oficial, sendo no plano metodológico, a constituição dos trabalhos de grupo, uma importante etapa. O propósito essencial deste trabalho é compreender e interpretar determinados fenómenos, nomeadamente a forma como os alunos desenvolvem a argumentação matemática tendo por base a resolução de tarefas do âmbito da história da matemática; estabelecer ligações entre a história e a argumentação matemática e gerar hipóteses explicativas para a importância da integração da história no ensino da matemática. Este estudo assume, assim, um caráter interpretativo uma vez que ao gerar hipóteses que explicam certos fenómenos, procura-se relacionar a evolução dos alunos nos vários aspetos, que são centrais no estudo, com as experiências de aprendizagem que foram proporcionadas aos alunos.

A escolha e/ou conceção das tarefas, o apoio dado aos alunos e as decisões relativas à gestão de sala de aula, foram da responsabilidade do investigador, professor da respetiva turma. Durante as aulas em que foram concretizadas as diferentes tarefas propostas, o professor circulou pela sala apoiando, sempre que necessário, os diferentes grupos de alunos. Nas discussões finais em grande grupo, os alunos desempenharam um papel ativo, embora essas discussões fossem orientadas pelo professor investigador.

6.2.1. Conceção da investigação

A investigação estrutura-se num estudo de caso elaborado no contexto de aplicação de um conjunto de seis tarefas, do âmbito da história da matemática, a uma turma do ensino básico durante os oitavo e nono anos de escolaridade. Trata-se, assim, de uma investigação empírica que investiga uma turma dentro de um contexto real. Na classificação de Stake (1994), trata-se de um estudo instrumental, uma vez que o caso é entendido como um meio para aprofundar ou refinar uma determinada teoria, isto é, o caso em si tem um interesse secundário na medida em que é visto como facilitador da compreensão de um outro fenómeno, no presente estudo a integração da história da matemática no fomento de uma cultura de argumentação em sala de aula. A investigação é conduzida pelas questões de investigação por nós definidas anteriormente.

Na seleção/construção das tarefas procurou-se, logo de início, proceder a um enquadramento histórico dos temas lecionados nos oitavo e nono anos, optando-se por procurar selecionar/construir tarefas do âmbito da história da geometria e da álgebra, uma vez que, nestes anos de escolaridade, se procede a um aprofundamento destas temáticas. Ainda ao nível da construção das tarefas procurou-se que estas fossem constituídas por atividades que promovessem situações de argumentação matemática, isto é, situações que envolvessem a apresentação, por parte dos alunos, de argumentos em defesa das suas ideias, que analisassem criticamente as contribuições dos seus pares e se debruçassem também sobre a legitimidade matemática dos diferentes raciocínios produzidos. Nesse sentido, para este estudo, foram delineadas diferentes tarefas: umas organizadas com o objetivo de introduzir determinados conceitos, outras propostas com o intuito de aplicar e aprofundar conceitos e procedimentos já lecionados. Foram então selecionados do tema geometria, os tópicos teorema de Pitágoras (demonstração e utilização), semelhança (semelhança de triângulos) e quadriláteros (propriedades); e do tema álgebra, os tópicos operações com polinómios, equações do 1.° grau a uma incógnita, equações literais e equações do 2.° grau a uma incógnita. A planificação das tarefas encontra-se estruturada na tabela 6.1..

Tabela 6.1. Planificação das tarefas

Tarefa	*Temas*	*Objetivos específicos contemplados*	*Bloco (90 minutos)*
Casos notáveis da multiplicação – quadrado de um binómio	Álgebra Geometria	– compreender o caso notável da multiplicação (quadrado de um binómio). – classificar quadriláteros e investigar as suas propriedades.	1
Construções geométricas	Geometria Álgebra	– compor e decompor polígonos. – resolver problemas no plano aplicando o teorema de Pitágoras.	1
Teorema de Pitágoras	Geometria	– demonstrar o teorema de Pitágoras. – determinar a área de superfícies.	1
Equações	Álgebra	- resolver equações do 1.° grau. - resolver equações literais. - utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios.	2
Duas torres, duas aves e uma fonte	Álgebra Geometria	– resolver problemas no plano aplicando o teorema de Pitágoras. – utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios. – resolver equações do 1.° grau. – compreender e aplicar os critérios de semelhança de triângulos e usá-los na resolução de problemas.	2
Equações do 2.° grau	Álgebra Geometria	– compor e decompor polígonos. – descobrir a fórmula resolvente das equações do 2.° grau. – resolver equações do 2.° grau a uma incógnita.	5

No que diz respeito a cada uma das tarefas propostas, tendo em conta as suas especificidades, estas foram estruturadas em diferentes partes. Nas tabelas de 6.2. a 6.7., procede-se a uma descrição detalhada das atividades presentes nas diferentes tarefas e em cada uma das partes.

Tabela 6.2. Descrição da tarefa casos notáveis da multiplicação

Parte	*Descrição*	*Tempo (45 minutos)*
I	Leitura e análise de Elementos II,4 de Euclides.	1
II	Dados dois segmentos a e b, construir um quadrado de lado $a + b$, determinando, por dois processos diferentes, a expressão algébrica que traduz a área do quadrado de lado $a + b$.	1

Tabela 6.3. Descrição da tarefa construções geométricas

Parte	*Descrição*	*Tempo (45 minutos)*
I	Usando uma régua não graduada e um compasso, construir um quadrado cuja área seja igual à soma das áreas dos quadrados dados.	1
II	Usando uma régua não graduada e um compasso, de um quadrado cuja área seja igual à diferença entre as áreas de dois quadrados dados.	1

Tabela 6.4. Descrição da tarefa Teorema de Pitágoras

Parte	*Descrição*	*Tempo (45 minutos)*
I	Apresentação de uma construção geométrica que integra a demonstração geométrica do teorema de Pitágoras apresentada pelo vigésimo presidente dos EUA, James Abraham Garfield.	1
II	Apresentação de uma construção geométrica que integra a demonstração geométrica do teorema de Pitágoras, uma das duas demonstrações geométricas atribuídas ao matemático indiano Bhaskara.	1
III	Apresentação de uma construção geométrica que integra a demonstração geométrica do teorema de Pitágoras, a segunda das demonstrações geométricas atribuídas ao matemático indiano Bhaskara.	1

Tabela 6.5. Descrição da tarefa equações

Parte	*Descrição*	*Tempo (45 minutos)*
I	Resolução do problema: determinar dois números cuja soma seja 20 e que a diferença entre os seus quadrados seja 80.	1
II	Leitura e análise da resolução do mesmo problema, apresentada por Diofanto em *Aritmética*, I, 29.	1
III	Leitura e análise da resolução do mesmo problema, apresentada por Pedro Nunes no *Libro de algebra en arithmetica y geometria*.	1

É de notar que em relação à tarefa teorema de Pitágoras, embora dividida em três partes, foi apenas distribuída a cada grupo uma demonstração geométrica do teorema. Neste sentido, apenas na fase final de discussão (45 minutos), cada grupo ficou a conhecer as demonstrações analisadas pelos outros grupos.

Tabela 6.6. Descrição da tarefa duas torres, duas aves e uma fonte

Parte	*Descrição*	*Tempo (45 minutos)*
I	Resolução do problema: Duas aves estão no cimo de duas torres, uma das torres tem 30 metros de altura, a outra 40, e distam entre si apenas 50 metros; entre as torres está uma fonte. A um determinado instante as duas aves descem voando a partir das duas torres à mesma velocidade chegando ao mesmo tempo ao centro da referida fonte. A que distância se encontra a fonte das duas torres?	1
II	Leitura e análise da resolução do mesmo problema, apresentada por Fibonacci no livro *Liber abaci* (método de falsa posição).	1
III	Leitura e análise da resolução do mesmo problema, apresentada por Fibonacci no livro *Liber abaci* (resolução geométrica).	1
IV	Leitura e análise da resolução do mesmo problema, apresentada por Gaspar Nicolas no *Tratado da Pratica Darismetyca*.	1

No que diz respeito à tarefa equações do 2.° grau, esta tarefa corresponde a uma sequência de ensino encontrando-se dividida em sete partes, sendo a parte V baseada numa interpretação, em termos de geometria intuitiva, realizada pelo historiador Jens Høyrup, a partir de uma análise filológica do contexto matemático da Antiga Babilónia. As partes I a V foram realizadas em pequenos grupos de trabalho, tendo sido discutidas em grande grupo no final da realização de cada uma. No que diz respeito às partes VI e VII, estas foram realizadas em grupo turma. A sequência de ensino[1] foi desenvolvida de acordo com o itinerário descrito na tabela 6.7..

Observa-se que a interpretação em termos de geometria intuitiva, presente na parte III desta sequência, constitui uma introdução às técnicas presentes na geometria *do corta e cola*, uma vez que a interpretação apresentada pelo historiador Jens Høyrup, a partir de uma análise filológica do contexto matemático da Antiga Babilónia, surge apenas na parte V. É ainda de referir que a determinação da fórmula resolvente para as equações do 2.° grau surge apenas após a resolução da tarefa VII, uma vez que a fórmula previamente introduzida

[1] Sequência baseada numa proposta apresentada por Luis Radford e Georges Guérette em Second degree Equations in the Classroom: A Babylonian Approach in *Using History to Teach Mathematics: An International Perspetive*, Katz, 2000, pp.61-75.

resultou de uma interpretação algébrica a partir de uma situação geométrica, portanto, o motivo pelo qual na fórmula obtida previamente não se considerar a parte negativa do binómio discriminante.

Tabela 6.7. Descrição da tarefa equações do 2.° grau

Parte	*Descrição*	*Tempo (45 minutos)*
I	Resolução do problema: determinar as dimensões de um retângulo cujo semiperímetro é 20 e cuja área é 96;	2
II	Leitura e análise da resolução do mesmo problema, apresentada por Diofanto em *Aritmética*, I, 27;	
III	Interpretação, com recurso a material manipulável, em termos de *geometria do corta e cola*, geometria intuitiva;	2
IV	Resolução de um novo problema: dado um retângulo com comprimento 10 e largura desconhecida; desenha-se um quadrado de lado igual à largura desconhecida do retângulo dado; sabendo que a soma da área do retângulo com a área do quadrado é 39, determinar a largura do retângulo inicial.	
V	Utilização de uma diferente técnica de geometria intuitiva, baseada na interpretação geométrica, para o problema proposto na parte IV, realizada pelo historiador Jens Høyrup;	2
VI	Generalização do procedimento presente na parte V, isto é, considerando que o retângulo dado tem comprimento b e que a soma da área do retângulo com a área do quadrado de lado igual à largura do retângulo inicial é c, determinar a largura do retângulo inicial;	4
VII	Determinação das fórmulas das equações $ax^2 + bx = c$ e $ax^2 + bx + c = 0$, tendo em consideração a resolução da parte VI da tarefa e resolução do exercício: sem resolver a equação verificar quais dos seguintes números 1, 2 e 3 são soluções da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$. Seguidamente, aplicando a fórmula que obtiveram anteriormente, determinar a solução da equação. Por fim, e tendo em conta este último exercício e a última fórmula obtida, determinar a fórmula resolvente das equações do 2.º grau.	

No que diz respeito ao tempo sugerido, nas tabelas, para a realização de cada uma destas partes constitui apenas uma indicação, uma vez que a duração desta sequência pode variar, pontualmente, consoante o desempenho matemático dos alunos.

Em relação ao processo desenvolvido, foi dada não só uma atenção particular à participação dos alunos no decurso da resolução das tarefas propostas, mas também à avaliação que os mesmos efetuaram sobre o trabalho realizado.

Esta avaliação consistiu numa reflexão crítica final realizada após a conclusão de cada tarefa. Deste modo, a recolha de elementos teve como objetivo perceber de que forma o envolvimento dos alunos em tarefas do âmbito da história da matemática influencia a sua capacidade de argumentação matemática.

6.2.2. Participantes no estudo

A escola onde decorre este estudo situa-se numa freguesia do Concelho de Penafiel, uma região localizada na parte mais central do distrito do Porto, com uma área de aproximadamente 212,8 km^2. No que concerne à estrutura de emprego, por setor de atividade económica, constata-se que o setor secundário absorve a maior fatia de mão de obra, o setor terciário absorve uma outra grande percentagem, sendo a percentagem de indivíduos que trabalham no setor primário residual. Apesar do seu peso decrescente, a agricultura constitui ainda um forte sustentáculo no Concelho de Penafiel, dado que representa uma atividade secundária e complementar orientada principalmente para o autoconsumo (produção de culturas sazonais-policultura), mas também representa a única forma de subsistência para uma faixa substancial da população concelhia, principalmente a que apresenta uma idade mais avançada. Em termos sociais e culturais a maioria dos agregados situa-se no nível médio/baixo. Está-se perante contextos familiares muito homogéneos quanto ao capital escolar, caracterizado por baixas capitações, numa escala que vai desde o analfabetismo, ainda que residual, até aos nove anos de escolaridade, atingidos estes pelos seus membros mais jovens. São raros os contextos familiares em que os pais possuam o nono ano de escolaridade, habilitações académicas médias (ensino secundário e/ou profissional) ou superiores. Neste sentido, torna-se importante apresentar a esta comunidade educativa iniciativas de ensino e aprendizagem que valorizem a cultura matemática, que concorram para minimizar os problemas de aprendizagem desta ciência e que revalorizem a escola, que reforcem o combate ao insucesso, ao abandono escolar e à exclusão social num Concelho onde é frequente o abandono e o trabalho infantil.

Uma vez que se pretende estudar a forma como a integração da história da matemática fomenta uma cultura de argumentação em contexto de sala de aula escolheu-se uma turma para desenvolver a investigação. A turma escolhida resulta do facto de a mesma ser já turma do professor investigador deste estudo e a única turma do oitavo e nono ano que o professor lecionou nesses dois anos letivos. A Direção da escola e os Encarregados de Educação dos alunos da turma foram informados das linhas de orientação deste estudo, tendo-lhes sido solicitada a respetiva autorização. No que diz respeito ao Departamento Curricular de Matemática e das Ciências Experimentais da Escola, o professor informou o coordenador do mesmo, tendo procedido às reformulações das planificações, definidas em Conselho de Disciplina de Matemática, no Projeto Curricular da respetiva turma.

Um dos aspetos a ter em conta na decisão de conduzir um estudo qualitativo é a acessibilidade, entendida, não só, em termos da localização geográfica como na capacidade de ter acesso a um contexto e de conseguir que os seus elementos-chave cooperem com o investigador (Erlandson et al., 1993). De facto, a Diretora da escola, a quem se explicou as principais características do trabalho que pretendia desenvolver, para além de concordar que a investigação se realizasse na escola, mostrou, ao longo dos dois anos letivos, interesse, facilitando condições para que o mesmo pudesse atingir os seus objetivos, nomeadamente na manutenção do professor investigador como professor da turma nos dois anos letivos consecutivos. No que diz respeito aos alunos, estes mostraram-se bastante recetivos em relação ao trabalho que se pretendia realizar (cujas principais características lhes foram explicadas no início), mostrando toda a disponibilidade e empenho em colaborar com este estudo. Como refere Erlandson et al. (1993), os investigadores que conduzem investigações qualitativas precisam de mostrar que podem conduzir a investigação de tal forma que nem o contexto nem as pessoas nele incluídas serão lesadas. Nesse sentido, precisam de apresentar a todos os intervenientes no estudo os objetivos e procedimentos da investigação em curso.

Tabela 6.8. Calendarização do estudo

Ano letivo	*1.º período*	*2.º período*	*3.º período*
2008/2009	Revisão de literatura Elaboração das tarefas: casos notáveis, construções geométricas e teorema de Pitágoras	Revisão de literatura Elaboração das tarefas: equações, duas torres, duas aves e uma fonte Recolha de dados das tarefas: casos notáveis, construções geométricas e teorema de Pitágoras Análise de dados (1.ª fase)	Revisão de literatura Recolha de dados das tarefas: equações, duas torres, duas aves e uma fonte Análise de dados (1.ª fase)
2009/2010	Revisão de literatura Elaboração da tarefa equações do 2.° grau Redação da dissertação	Revisão de literatura Redação da dissertação	Revisão de literatura Recolha de dados das tarefa: equações do 2.° grau Análise de dados (1.ª fase) Redação da dissertação
2010/2011	Revisão de literatura Análise de dados (2.ª fase) Redação da dissertação	Revisão de literatura Análise de dados (2.ª fase) Redação da dissertação	Revisão de literatura Análise de dados (2.ª fase) Redação da dissertação
2011/2012	Revisão de literatura Análise de dados (3.ª fase) Redação da dissertação	Análise de dados (3.ª fase) Redação da dissertação	Análise de dados (3.ª fase) Redação da dissertação
2012/2013	Redação da dissertação (conclusões)		

A turma era constituída por 27 alunos (17 raparigas e 10 rapazes) com idades compreendidas entre os 12 e os 14 no oitavo ano e os 13 e os 15 no nono ano. Embora não existissem alunos repetentes, três alunos ao longo do seu percurso escolar já tinham sido retidos uma vez. Apesar das dificuldades que alguns dos alunos desta turma apresentavam, nomeadamente a matemática e língua portuguesa, a maioria dos alunos é interessada e participativa, envolvendo-se ativamente nas tarefas que lhes são propostas. É de referir que embora trabalhadores, por vezes, são um pouco conversadores, o que prejudica em algumas circunstâncias a sua concentração na realização das tarefas, em particular em tarefas em que sejam propostos trabalho de grupo ou pares. Para o presente estudo foram selecionados os trabalhos realizados pelos diferentes grupos, desta turma, por forma a permitir categorizar os diferentes dados recolhidos. O estudo, cuja calendarização se encontra na tabela 6.8., estrutura-se num estudo de caso sobre a argumentação matemática no contexto de aplicação de um conjunto de tarefas do âmbito da história da matemática, envolvendo uma turma no 8.° e 9.° anos de escolaridade do ensino básico.

6.2.3. Recolha de dados

Tendo em consideração as recomendações expressas por Yin (1989), em que nos estudos de caso é desejável dispor de uma variedade de fontes de informação, não se limitando, portanto, a uma única fonte de evidências, nesta investigação utilizaram-se vários métodos de recolha de dados por forma a que fosse possível obter informações diversificadas para uma descrição mais detalhada e completa do objeto de estudo. Uma vez que os estudos de caso qualitativos, usualmente, têm por base dados obtidos a partir de entrevistas, observações e análise documental (Merriam, 1988), tendo em conta o estudo que se pretende realizar, optou-se pela observação do trabalho realizado pelos alunos (através de registos, notas de campo, efetuado pelo investigador, e gravações de áudio e vídeo em contexto de sala de aula) e análise dos documentos produzidos pelos alunos.

Observação de aulas

A argumentação matemática estabelecida em contexto de sala de aula assume grande importância para o conteúdo da investigação proposta. Nesse sentido, a observação das aulas em que foram aplicadas as tarefas elaboradas pelo investigador, constituíram um elemento de recolha de dados essencial, sendo sujeitas não só à gravação de áudio e de vídeo, mas também complementadas com as notas de campo efetuadas pelo próprio investigador. De facto, para o sucesso de um estudo de caráter qualitativo é fundamental que o investigador observe e registe de forma objetiva e de modo sistemático as diferentes fases do estudo a que se propôs (Bogdan e Biklen, 1994). A observação participante surge, para alguns investigadores, como o melhor processo de recolha de dados em estudos de caso (Merriam, 1988; Bogdan e Biklen, 1999).

A observação da turma permite obter contributos para a compreensão do modo como as diferentes tarefas propostas contribuem para o desenvolvimento da argumentação matemática dos alunos. Assim, tendo em conta as atitudes dos alunos, as questões colocadas, as estratégias seguidas, as intervenções mais significativas dos alunos, durante a realização e a discussão das tarefas foram registados os aspetos que se destacam nas aulas. Nesse sentido, procurou-se organizar as notas do que tinha sido observado no mesmo dia em que ocorreu a observação. No entanto, é de referir que, por vezes, foi difícil tomar algumas notas, em particular no decorrer dos trabalhos de grupo, uma vez que o investigador circulava pela sala e apoiava os alunos.

Gravações de áudio e vídeo

Embora haja consciência de que a utilização de gravações de áudio e de vídeo possa ter um caráter obstrutivo, e tal como refere Merriam (1988), seja conveniente evitar o seu uso, o facto do investigador ser professor da turma permitiu que as gravações de áudio e de vídeo fossem bem aceites e, uma vez que iriam ser usadas em bastantes ocasiões, fossem progressivamente consideradas como naturais. Apenas é de registar que na aplicação da primeira tarefa em que este método de recolha de dados foi usado, é que se sentiu que alguns alunos o notavam. Depois, pareceram esquecer-se do gravador e do vídeo e discutiam entre si e com o professor tal como era habitual. Ao longo do estudo, as gravações tornaram-se de tal modo frequentes que os alunos as assumiram claramente como uma coisa trivial. É ainda de observar que as gravações recolhidas permitiram ao investigador observar as aulas com algum distanciamento.

Todos os momentos de introdução, resolução e discussão das tarefas foram registadas em vídeo. O investigador visionou todos estes registos e transcreveu as partes que considerou mais importantes. Nas aulas em que as tarefas eram exploradas em grupo turma a câmara de vídeo estava fixa, embora se recorresse a um gravador áudio para obter informações mais detalhadas. Depois, o investigador ouvia toda a gravação e transcrevia todos os episódios que se enquadrassem nos aspetos elencados. O investigador procurou proceder às transcrições tão depressa quanto possível para minimizar o perigo do esquecimento. Por vezes, a transcrição tornava-se mais complicada dado o cruzamento de vozes e a simultaneidade da fala. Para a transcrição foi útil o conhecimento das vozes respetivas bem como a perceção e conhecimento dos assuntos em causa. Por esta razão o investigador optou sempre por fazer as restantes transcrição sem ajuda. O tempo gasto a fazer as transcrições revelou-se, por vezes, excessivo, mas foi sendo reduzindo com a experiência. Com a evolução da investigação, e a concomitante análise de dados, o investigador tornou-se mais seletivo naquilo que transcreveu, deixando cair aspetos laterais com mais firmeza.

Documentos

Neste trabalho foram analisados diversos tipos de documentos. De facto, vários autores apontam para a importância de recolher informações a partir da análise de um conjunto variados de documentos. Embora as entrevistas e as observações estejam associadas ao propósito da investigação que se está a realizar, nos documentos, frequentemente isto não se verifica, uma vez que habitualmente existem ou são produzidos independentemente dos propósitos da investigação que se está a realizar (Merriam, 1988). No entanto, Yin (1989) observa que nos estudos de caso, os documentos são uma fonte de recolha de dados que deve ser usada, referindo que o seu uso permite corroborar e confirmar a evidência sugerida por outro tipo de fontes de dados.

São de diversa natureza os documentos que servem de suporte a este estudo. Para análise dos discursos argumentativos produzidos pelos alunos durante a resolução das tarefas, além dos registos de áudio e vídeo, tomou-se em consideração os diferentes registos escritos efetuados pelos alunos. Estes registos contemplam não só as resoluções realizadas em grupo e as respetivas apresentações orais, mas também as resoluções realizadas durante as discussões em grande grupo. No que diz respeito à avaliação dos alunos sobre a realização de tarefas do âmbito da história da matemática foram consideradas as reflexões críticas finais realizadas após a conclusão de cada tarefa, em que os alunos expressam as suas opiniões sobre a realização deste tipo de tarefas, bem como as dificuldades sentidas na resolução das mesmas.

Como síntese da dinâmica de recolha de dados que esteve por detrás deste estudo, apresenta-se a tabela 6.9., onde se representam, de uma forma abreviada, os métodos de recolha de dados e a respetiva descrição.

Tabela 6.9. Métodos de recolha de dados e respetiva descrição

Método de recolha de dados	*Descrição*
Observação	Notas de campo Gravações de áudio e vídeo (durante a realização e discussão das tarefas uma câmara de vídeo e um gravador áudio, com o objetivo de obter informações mais detalhadas na realização das tarefas em grupos)
Documentos	Documentos produzidos pelos alunos: resoluções das tarefas e reflexão crítica final realizada pelos alunos

A recolha de dados realizou-se no 2.º e 3.º períodos do ano letivo 2008/2009 e no 3.º período do ano letivo de 2009/2010, como pode ser observado na tabela 6.8., apresentada na secção anterior.

6.2.4. Análise de dados

Neste estudo, a análise de dados foi realizada ao longo de todo o processo de investigação, sendo adotado o modelo de análise interativo proposto por Huberman e Miles (1994).

A análise de dados tem por objetivo interpretar o diverso material recolhido, para que este seja organizado de modo a ser partilhado de forma clara e inteligível. Embora, o objetivo da análise de dados seja interpretar o material recolhido à luz das questões do estudo, a análise surge logo no início da recolha de dados (Merriam, 1988), sendo que numa investigação qualitativa essa recolha e a análise podem ocorrer simultaneamente. De facto, embora a recolha e a análise de dados ocorram em momentos distintos, numa investigação qualitativa, elas devem estar intimamente ligadas (Merriam, 1988; Yin, 1989; Erlandson et al., 1993). Assim, a partir de uma primeira análise podem resultar novas propostas o que, consequentemente, podem originar a reformulação das próprias questões de investigação. Esta íntima relação entre a recolha e análise dos dados constituiu uma preocupação ligada ao trabalho de investigação, procurando-se que esta recolha e a análise fossem realizadas em sintonia, podendo mesmo uma ser reformulada em função da outra.

As notas de campo da observação de aulas, a observação dos registos áudio e vídeo realizados nas aulas, e respetivas transcrições, e os textos elaborados pelos alunos (resoluções e reflexões finais) constituíram a substância dos dados disponíveis. Desta forma, e visando a análise dos dados, todo o material foi organizado e categorizado, tendo o desenvolvimento de categorias envolvido um olhar para as regularidades recorrentes nos dados (Merriam, 1988). Procurou-se estabelecer de seguida relações entre as diferentes categorias, o que implicou o surgimento de novas subcategorias. Assim, a partir de um conjunto preliminar de categorias de análise – tipos de argumentos produzidos, análise local de argumentações, análise global de argumentações, dificuldades manifestadas pelos alunos, avaliação realizada pelos alunos – foram acrescentadas subcategorias, por forma a proceder a uma análise mais profunda e detalhada. Nesse sentido, no processo de análise de dados é possível distinguir várias fases.

De facto, os procedimentos de análise de dados envolvem diferentes fases até à construção do texto interpretativo que corporiza o caso de estudo, sendo o principal objetivo deste processo reduzir o volume significativo de dados, provenientes da recolha, num menor conjunto de dados referenciáveis na escrita do caso. De acordo com Goetz e LeCompte (1984) a seleção de dados deve atender à complexidade dos fenómenos e dos contextos, por forma a reconstruir as vivências dos participantes na investigação, relativamente ao fenómeno estudado. Para estes autores (idem), esta seleção deve, portanto, incorporar o sentido da plenitude da informação recolhida, através de referências significativas dos dados, ou seja, sem falhas nem sobreposições. Numa primeira fase, o investigador deve, de forma cuidada e tendo em consideração o problema em estudo e as questões de investigação, examinar todos os dados e organizá-los por forma a identificar situações discrepantes e padrões e regularidades (Goetz & LeCompte, 1984). Ao proceder a esta organização inicial dos dados, em consideração com as categorias pré-definidas, isolam-se segmentos representativos e eliminam-se os segmentos menos relevantes ou com o mesmo significado. Através desta organização dos dados, emergem padrões com vista à estabilização das categorias inerentes às temáticas resultantes das questões de investigação. Assim, a partir desta primeira seleção torna-se possível identificar os extratos que sejam mais significativos e que ilustram melhor as perspetivas dos participantes sobre o fenómeno em estudo (Guerreiro, 2011), o que possibilita a subdivisão de cada uma das categorias gerais em categorias mais finas de contornos mais estreitos. Também esta significativa redução de dados permite, posteriormente ao investigador, comparar as diferentes categorias e os diferentes sentidos com o objetivo de clarificar algumas sobreposições e delimitar os seus significados. Enquadradas na temática estudada e na fundamentação teórica apresentada, as categorias e as subcategorias emergem dos dados mediante um processo interpretativo (Guerreiro, 2011). De acordo com Goetz e LeCompte (1984) e Fiorentini e Lorenzato, (2006) as categorias e as subcategorias permitem, assim, caracterizar a temática em estudo e analisar o próprio processo de investigação. Este processo de organização de dados corresponde ao processo de construção de um puzzle sugerido por Goetz e LeCompte (1984). De acordo com Goetz e LeCompte (1984), numa primeira fase, constrói-se a moldura do puzzle, isolando as peças com as mesmas tonalidades, posteriormente, dando sentido a cada um dos conjuntos de peças, formam-se partes do puzzle e, por fim, inter-relacionasse as diferentes partes numa lógica de unidade de construção.

Tendo em conta estas considerações, neste estudo, o processo de análise de dados foi realizado ao longo de três fases (ver tabela 6.10.). A primeira fase, que medeia entre a aplicação da primeira tarefa, 2.° Período de 2009, e a aplicação da última tarefa 3.° Período de 2010, correspondeu à leitura e classificação de todo o material quer transcrito quer produzido pelos alunos, tendo em conta as categorias gerais inicialmente consideradas. A segunda fase de análise, que decorreu durante o ano lectico 2010/2011, tomou contornos mais estreitos, procedendo-se à subdivisão de cada uma das categorias gerais em categorias mais finas. Por fim, na terceira fase de análise procurou-se uma clarificação dos contornos, procedendo-se não só a uma leitura integral de todo o material compilado – transcrições dos registos de áudio e vídeo das aulas, notas de campo, materiais produzidos pelos alunos – mas também a uma nova subcategorização, em algumas subcategorias, por forma a permitir uma análise mais profunda e detalhada. Foi então estabelecido um confronto com a versão já escrita, o que levou a que se procedesse a uma nova reestruturação da escrita e da organização do caso em estudo, com o objetivo de tornar mais explícito o tipo de influências que as tarefas do âmbito da história da matemática têm no desenvolvimento da argumentação matemática dos alunos em contexto de sala de aula.

Tabela 6.10. Desdobramento das categorias ao longo das fases de recolha de dados

1.ª fase	*2.ª fase*	*3.ª fase*
Tipos de argumentos produzidos	argumentos empíricos argumentos entre o empírico e o genérico argumentos genéricos argumentos entre o genérico e o simbólico argumentos simbólicos argumentos entre o simbólico e o formal	
Argumentação: análise local	formas simples	
	forma complexa	– refutação de uma conclusão – conclusão obtida à custa de uma refutação – refutação de um dado escolhido
Argumentação: análise global	estrutura-fonte estrutura-reservatório estrutura-espiral	
Dificuldades manifestadas pelos alunos	linguagem	– interpretação de textos de fontes primárias
	compreensão matemática	– interpretação geométrica e de conceitos – linguagem algébrica – realização de procedimentos algébricos – interpretação de textos de fontes primárias
	argumentação	– iniciação de um processo de justificação – apresentação de justificações – garantias que não legitimam um passo de argumentação por falta de dados
Avaliação realizada pelos alunos	aprendizagem matemática	– aprender a matéria – comparar diferentes estratégias – importância da comunicação e da argumentação – conexão entre diferentes áreas
	predisposição perante a matemática	– interpretação da notação – desafio em resolver problemas – interesse e entusiasmo
	desenvolvimento da natureza da matemática e da sua atividade	– linguagem matemática usada – uma outra forma de olhar a matemática
	apreciação da matemática como um esforço cultural	– perceção que do desenvolvimento da matemática – conhecimento do nome e biografias

7. Apresentação de resultados

Neste capítulo, dividido em sete secções, pretende-se apresentar os resultados da investigação realizada. Nas seis primeiras secções analisa-se, por tarefa, o trabalho realizado pelos alunos no decorrer da aplicação das mesmas. Esta análise é efetuada de acordo com as categorias definidas no capítulo anterior: tipo de argumentos produzidos pelos alunos; análise local e global de argumentações; dificuldades manifestadas pelos alunos e avaliação realizada pelos alunos. Na última secção, e tendo em conta estas categorias, procede-se a uma leitura cruzada das diferentes tarefas.

A turma envolvida no estudo, ao longo da aplicação das tarefas, foi dividida em seis grupos de trabalho. Os grupos foram constituídos tendo em consideração o lugar ocupado pelos alunos em sala de aula, garantindo-se unicamente a existência de alguma heterogeneidade nessa constituição. É de referir que, ao longo dos dois anos em que se realizou o presente estudo, quatro desses grupos evidenciaram, na realização das diferentes tarefas, maior facilidade de participação quer ao nível da interação discursiva, quer ao nível da produção de registos escritos. No entanto, foi notória, por parte dos grupos que inicialmente demonstram um menor participação, um crescente envolvimento quer nas discussões quer nas reflexões.

7.1. Casos notáveis da multiplicação: quadrado de um binómio

A presente tarefa, dividida em duas partes, teve como objetivo a formulação do caso notável da multiplicação – quadrado de um binómio – através da leitura, interpretação e análise da proposição 4 dos *Elementos* II de Euclides. A tarefa foi desenvolvida de acordo com o seguinte itinerário:

Parte I – construção geométrica da figura sugerida por Euclides e resposta a algumas questões que permitissem aos alunos, através da construção geométrica efetuada, justificar a validade da afirmação de Euclides: "se uma linha reta for cortada em duas partes quaisquer; será o quadrado da toda igual ao quadrado das partes juntamente com o retângulo das mesmas partes tomado duas vezes".

Parte II – obtenção do caso notável da multiplicação – quadrado de um binómio – através da construção de um quadrado de lado $a + b$, sendo dados os dois segmentos de reta a e b, e da representação algébrica de duas expressões, diferentes, que traduzissem a área desse mesmo quadrado.

No final da realização da tarefa em pequenos grupos, foram apresentadas oralmente e por escrito (em acetato ou com recurso ao quadro de giz) as conclusões em grande grupo.

7.1.1. Tipo de argumentos produzidos

Ao longo da resolução desta tarefa, os alunos produziram variados argumentos, sendo possível identificar diferentes tipos de argumentos para a mesma questão.

Argumentos entre o genérico e o simbólico

Na resolução da primeira questão da parte I – "será o quadrilátero [CGKB] um quadrado?" – é possível verificar que a maioria dos grupos recorre ao uso de palavras e símbolos, tendo em consideração a observação da figura geométrica construída. Uma vez que cada grupo construiu a sua figura, satisfazendo as condições dadas no enunciado, esta torna-se genérica, sendo, portanto, os argumentos produzidos, pelos diferentes grupos, aplicáveis não apenas à figura específica, por si, desenhada, mas genericamente a todas construídas. Desta forma, é possível destacar o papel que a figura toma no suporte da construção dos *argumentos geométricos*, nomeadamente na manutenção do mecanismo lógico do discurso. Observe-se um excerto do registo final apresentado pelo grupo G2, na resposta à questão 1 da parte I, bem como da figura desenhada que acompanha essa mesma justificação.

É um quadrado porque a diagonal BD divide o quadrado ADEB e também divide o ∢ IB̂L ao meio, o ∢ era de 90° então a diagonal dividiu-o em 2 iguais de 45°. O ângulo SĜM = 45° porque a soma dos ângulos internos é de 180°, 90°+45°+45°. O triângulo é isósceles.

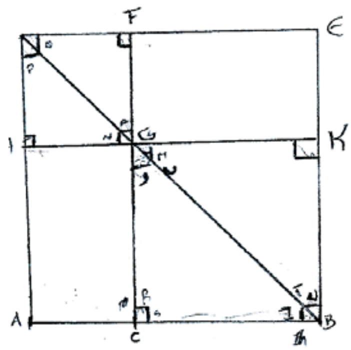


Figura 7.1.1. Excerto final do registo escrito pelo grupo G2.

Argumentos genéricos

Também na parte II da tarefa é possível encontrar registos de argumentos. Neste momento da tarefa era pedido aos alunos que dados dois segmentos a e b, construíssem um quadrado de lado $a + b$ e, seguidamente, apresentassem duas expressões algébricas diferentes que permitissem traduzir a área do quadrado de lado $a + b$. Como referido, com a realização desta tarefa pretendia-se que os alunos, com recurso a uma interpretação geométrica, baseada na proposição 4 do Livro II dos *Elementos* de Euclides, obtivessem a expressão algébrica conhecida por quadrado de um binómio: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

De uma forma geral, todos os grupos de alunos traduziram a área do quadrado de lado $a + b$ através da expressão algébrica $(a + b) \times (a + b)$ ou $(a + b)^2$.

No entanto, a expressão algébrica $a^2 + 2ab + b^2$, para traduzir a área do referido quadrado, foi obtida por dois processos diferentes.

Observe-se um excerto do diálogo estabelecido entre o professor e grupo G1.

(19) Professor: Agora têm que encontrar outra maneira. Olhem para o que fizeram atrás [referindo-se à parte I da tarefa].
Surge um burburinho e antes que dispersem, o professor retoma a palavra.
(20) Professor: O que fizemos aqui nesta figura? [apontando para a figura construída na primeira parte da tarefa].
(21) Nuno: Construímos quadriláteros…
Durante algum tempo todos olham para a folha de papel com a figura construída e a expressão já encontrada até que o Miguel intervém, interrogando?
(22) Miguel: Vamos dividir?!
(23) Rui: Então?
(24) Miguel: Tipo… aqui e por aqui [apontando para a figura construída, o Miguel começa a traçar segmentos que unem os lados opostos da figura, pelos pontos de junção dos segmentos a e b]. Ups!
(25) Rui: Aqui é mais abaixo [a figura não tinha sido bem desenhada].
(26) Nuno: Põe isto mais abaixo.
Procedem à retificação da figura.
(27) Nuno: Ora liga lá Miguel.
O Miguel une os tais pontos e no final,
(28) Pedro: Dá três retângulos e um quadrado.
(29) Professor: Era o que dava aqui? [apontando para a figura da primeira parte].
(30) Miguel: Quatro quadriláteros.
(31) Nuno e Pedro: Não!
(32) Nuno: Aqui dava, dois quadrados mais pequenos e dois retângulos.
(33) Miguel: É igual aqui.
(34) Nuno: Sim… Dois quadrados e dois retângulos [apontando para os quadriláteros desenhados]. Pois, quatro quadriláteros.

Através deste excerto pode-se observar que os alunos do grupo G1, baseando-se no processo apresentado por Euclides, nos *Elementos* II, 4, construíram uma figura semelhante à de Euclides. Ou seja, a partir do quadrado construído obtiveram quatro quadriláteros, respetivamente, dois quadrados e dois retângulos.

Observe-se agora a forma como este grupo de alunos conseguiu obter a outra expressão que permite traduzir algebricamente a área do quadrado construído.

(35) Professor: Então qual é a área de cada uma destas figuras?

(36) Nuno: É $a \times b$.
(37) Professor: Então escreve para se ver.
Momento de silêncio. Vendo o pequeno impasse o professor aponta para uma das figuras obtidas pela divisão da figura inicial e pergunta:
(38) Professor: Qual é a área desta figura? [apontando para o quadrado lado a]
(39) Nuno: É $a \times a$.
(40) Professor: Que dá…
(41) Nuno: a^2. O que é que eu disse? [e começa a escrever a^2]
(42) Miguel: Mete ali dentro, mete ali dentro! [apontando para o interior da figura] a^2.
O Nuno escreve no interior do quadrado de lado a, $a \times a = a^2$.
(43) Pedro: [apontando para um dos retângulos] $b \times a$ é igual a $b \times a$.
(44) Nuno: $a \times b$?
(45) Miguel: ab.
O Nuno escreve $a \times b = ab$.
(46) Nuno: Neste é $b \times b$ [apontando para o quadrado de lado b].
(47) Rui: b^2.
(48) Pedro: Aqui é igual [apontando para o outro retângulo].
O Nuno escreve $b \times a = ab$.
(49) Professor: Então, o que era pedido? Já não me lembro.
(50) Nuno: A expressão algébrica que traduz a área do quadrado de lado $a + b$.
(51) Professor: Sim. E de quantas maneiras?
(52) Nuno: Duas.
(53) Professor: Então qual foram as que encontraram?
(54) Nuno: Esta [apontando para uma das figuras obtidas pela divisão do quadrado inicial] e esta [apontando para a expressão algébrica escrita inicialmente].
(55) Miguel: Não! Esta! [apontando para as figuras obtidas].
(56) Professor: E qual é esta? [apontando para as figuras obtidas pela divisão]
Momento de silêncio.
E escrevem $a^2 + b^2$.
(57) Nuno: Tinha certo!
(58) Professor: E está certo?
(59) Miguel: Não! Temos de somar os equiláteros.
(60) Professor: Os equiláteros?!
(61) Pedro: Somar os retângulos e depois somar os quadrados.
(62) Miguel: Oh, os quadriláteros!
(63) Professor: É uma maneira, não é? Então como é que se escreve isso?
(64) Miguel: a^2 mais... ab,
(65) Pedro: Mais…
(66) Nuno: ab.
(67) Pedro: E este quadrado? [apontando para o quadrado de lado b]
(68) Rui: b^2.
(69) Nuno: Mais ab.
(70) Professor: Quantos?
(71) Nuno: Dois [e escrevem $a^2 + b^2 + ab + ab$].
(72) Professor: E ab com ab?...
(73) Nuno: ab ao quadrado!
(74) Professor: É?
(75) Nuno: Espere aí stôr, deixe pensar!
Breve momento de silêncio.
(76) Miguel: $2ab$.
(77) Nuno: $2ab$ [confirmando a resposta do Miguel]. Posso escrever Pedro? [e escrevem $a^2 + b^2 + 2ab$]

(78) Professor: Agora leiam a proposição e tentem relacionar com o que acabaram de escrever.

Através dos excertos apresentados pode-se observar que o tipo de argumento presente no discurso, para deduzir a expressão algébrica, $a^2 + 2ab + b^2$, é preponderantemente *genérico* sendo o exemplo apresentado *genérico pictórico*. De facto, na primeira fase, construção da figura (§34), e na própria obtenção das expressões algébricas que traduzem a área de cada quadrilátero que compõe o quadrado de lado $a + b$ (§39, §43 e §46) – a figura toma um papel relevante, o que realça o caráter visual do argumento, *argumento genérico pictórico*, uma vez que a figura permite visualizar o geral no específico, dado que a e b podem tomar qualquer valor. É, portanto, de observar que a perceção que os alunos têm da figura construída, permiti-lhes sustentar e ao mesmo tempo obter a expressão algébrica pretendida. Por fim, há a registar o facto dos alunos apresentarem uma simplificação da expressão algébrica obtida, isto é, $a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + b^2 + 2ab$. É de observar que esta simplificação é obtida através de uma manipulação algébrica e não por observação da figura, o que evidencia, no final, um argumento simbólico.

Seguidamente apresenta-se o registo final apresentado pelo grupo G1.

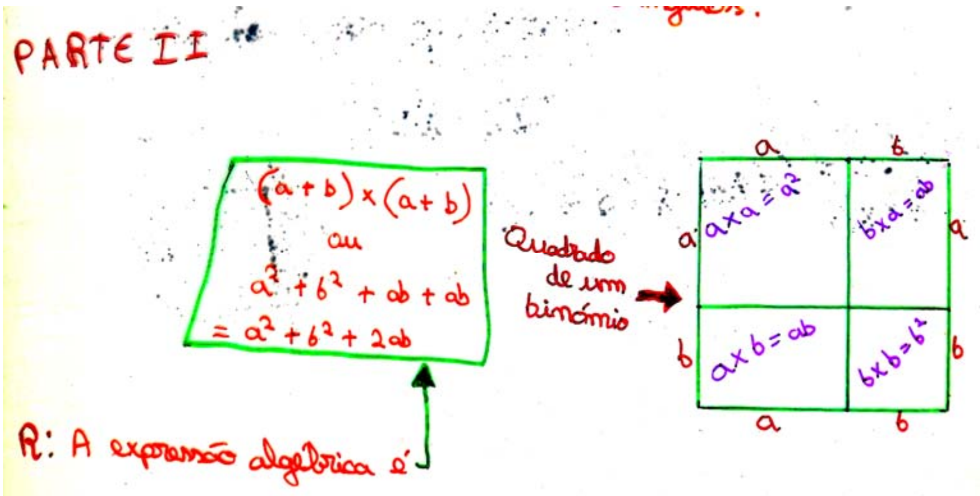


Figura 7.1.2. Registo escrito final apresentado pelo grupo G1.

Argumentos entre o simbólico e o formal

O grupo G2, contudo, apresentou um processo diferente para obter a outra expressão que permitisse traduzir a área do quadrado $a + b$. Ao aproximar-se deste grupo, o professor verifica que estes já têm desenhada a figura e que mantêm, entre si, o seguinte diálogo:

(1) Emanuel: A área é a mais b [começa a escrever $a + b$], não é Daniel? [e continua] Vezes b mais a [e escreve $b + a$].
No papel está escrito $a + b \times b + a$
(2) Andreia: Exatamente!
O Emanuel coloca os parênteses em falta, obtendo a expressão $(a + b) \times (b + a)$.
(3) Daniel: Que esquisito!
(4) Emanuel: Agora temos de por isto simplificado.
(5) Nélson: Por que é que ali está trocado, ó Emanuel? [e aponta para $b + a$] – não obtendo resposta, prossegue – Ali está primeiro está a e depois está b, e ali está b e depois está a.
(6) Andreia: Ah!
(7) Nélson: Esquece!
Enquanto isso o Emanuel simplifica a expressão e escreve $ab + a^2 + b^2 + ba$, expressão essa obtida com recurso à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Os alunos têm, então, escrito na sua folha a seguinte igualdade:

$$(a + b) \times (b + a) = ab + a^2 + b^2 + ba\ ,$$

portanto, duas expressões que permitem traduzir a área do quadrado de lado $a + b$. Através do excerto apresentado, observa-se que a segunda expressão é obtida de forma algébrica, sem recurso à figura desenhada. O professor interroga, assim, os elementos do grupo G2 sobre o processo utilizado para obter esta segunda expressão.

(8) Professor: Então, aqui está uma forma [apontando para $(a + b) \times (b + a)$]. Como é que obtiveram esta? [apontando para $ab + a^2 + b^2 + ba$]
(9) Daniel: Por isto [apontando para $(a + b) \times (b + a)$]. Multiplicando esta por esta [apontando para $(a + b) \times (b + a)$].
(10) Professor: Então isto que está aqui [apontando para as duas expressões algébricas] não pode ser associado à figura?
(11) Emanuel: Aqui? [apontando para a figura desenhada]
(12) Emanuel: [apontando para $(a + b) \times (b + a)$] Dá-me a área deste quadrado [apontando para o quadrado desenhado de lado $a + b$].
(13) Daniel: Ao quadrado [apontando para a^2] é este! [e aponta para o quadrado de lado a]
Enquanto isso, o Emanuel começa a identificar as áreas.
(14) Daniel: Depois tem o b^2 que é este! [e aponta para o retângulo de lados a e b]. Não…
(15) Emanuel: Não!
(16) Nélson: Não é este! [E aponta para o quadrado de lado b].
(17) Daniel: O b^2 é este. [Reforçando o que disse o Nélson].

(18) Nélson e Emanuel: Depois tem *ab* [o Emanuel continua a identificar as figuras]
(19) Nélson: E este *ab* [apontando para o retângulo de lado *a* e *b* que ainda não estava identificado].
(20) Emanuel: Este é *ba*.
(21) Professor: E *ba* é a mesma coisa que…
(22) Nélson, Daniel, Emanuel e Andreia: *ab*!
(23) Professor: Então agora observem de novo a proposição de Euclides.

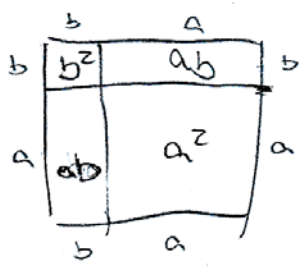


Figura 7.1.3. Construção geométrica efetuada pelo grupo G2.

Embora os alunos tenham obtido a segunda expressão algébrica por um processo algébrico, através da questão colocada pelo professor, associaram as áreas dos quadriláteros presentes na figura desenhada, respetivamente, a cada parcela da expressão algébrica. Contudo, uma vez que esta associação não ocorreu, inicialmente, pela análise da figura desenhada, o professor sugere de novo a leitura de *Elementos* II, 4, por forma a que os alunos possam verificar se existe alguma relação entre a representação geométrica e a representação algébrica.

Os alunos voltam a ler a proposição. O Daniel lê em voz alta para os colegas.
(24) Daniel: Se uma linha reta for cortada em duas partes quaisquer. Uma linha reta foi cortada.
(25) Emanuel: Aqui e aqui, não?
(26) Professor: Uma linha reta foi cortada…
(27) Emanuel [interrompendo o professor]: Só foi cortada uma vez [e aponta].
(28) Professor: Sim. Continuem. O que diz a proposição?
(29) Daniel [voltando a ler a proposição]: Será o quadrado de toda igual aos quadrados das partes?
(30) Professor: Então, qual é o quadrado do todo?
(31) Emanuel: a^2.
O professor repete a pergunta.
(32) Nélson: É isto tudo [e aponta para o quadrado de lado $a + b$].
(33) Professor: E corresponde a quem na vossa fórmula?
(34) Emanuel: A tudo.
(35) Professor: Tudo o quê?
(36) Emanuel: A isto [e aponta para a expressão $(a + b) \times (b + a)$].
(37) Professor: E vai ser igual a…

(38) Daniel: Aos quadrados das partes juntamente com retângulo das mesmas partes tomado duas vezes.
(39) Professor: Quais são os quadrados das partes?
(40) Nélson: Deve ser este e este [apontando respetivamente para a^2 e b^2].
(41) Professor: E os retângulos?
(42) Nélson: Este e este [apontando para *ba* e *ab*, respetivamente].
(43) Professor: Então?
(44) Daniel: Duas vezes?! [momento de silêncio] Duas vezes que é isto [apontando para $(a + b) \times (b + a)$… não? [olhando para a reação dos colegas].
Breve momento de silêncio e o professor, vendo a dúvida do Daniel e a hesitação dos colegas, pergunta.
(45) Professor: Como é que aparece as duas vezes?
(46) Nélson: Deve ser este e este duas vezes, apontando para os retângulos
(47) Emanuel [interrompendo o Nélson]: Porque isto é 2 vezes *ba* ou $2ab$ [e escreve $2ba$].
Vendo o olhar desconfiado dos colegas, o professor questiona o Emanuel.
(48) Professor: Este com este [apontando para os *ab* da expressão anteriormente obtida].
(49) Emanuel: Vou fazer o próximo passo (e escreve $ab + a^2 + b^2 + ba = a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + b^2 + 2ab$)

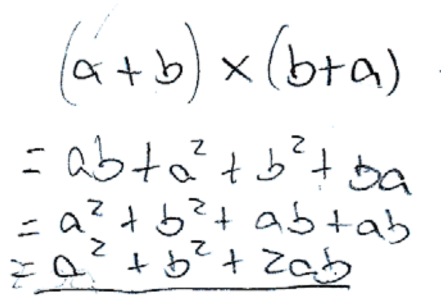


Figura 7.1.4. Simplificação algébrica efetuada pelo grupo G2.

(50) [Enquanto isso, o Daniel diz] Daniel: Não estou a perceber é a última parte… o retângulo das partes somado duas vezes… [momento de silêncio] temos de somar isto [apontando para os retângulos de lados *a* e *b*] duas vezes? [Continua a pensar e diz] Tomados duas vezes...
(51) Professor: Isto é um retângulo [apontando para um retângulo de lados *a* e *b*], não é?
(52) Nélson: Sim!
(53) Professor: Duas vezes?
(54) Daniel: Duas vezes, dá estes dois [apontando para os retângulos de lados *a* e *b*].
(55) Emanuel: Dá dois quadrados.
(56) Professor: Diz, dois… ?
(57) Emanuel: Dá dois retângulos.
(58) Daniel: Estes aqui [apontando para os retângulos de lados *a* e *b* presentes na figura].
(59) Emanuel: É o que eu fiz. Faltava o próximo passo.

Através deste excerto pode-se observar que um dos alunos não consegue relacionar a expressão algébrica $2ab$ com a expressão “tomar o retângulo duas vezes”. Mais uma vez um dos elementos do grupo justifica essa relação através de uma *manipulação algébrica*. Este tipo de justificação evidencia que o tipo de argumentos presentes situa-se entre o *simbólico e o formal*. Inicialmente a expressão algébrica $(a + b) \times (b + a)$ representa a área da figura construída, no entanto, através do cálculo algébrico, os alunos obtêm a igualdade $ab + a^2 + b^2 + ba$. Com recurso à figura, os alunos associam cada expressão a um dos elementos da mesma, contudo, novamente justificando por cálculos algébricos, obtêm a igualdade:

$$a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Seguidamente apresenta-se o registo final apresentado por este grupo de trabalho.

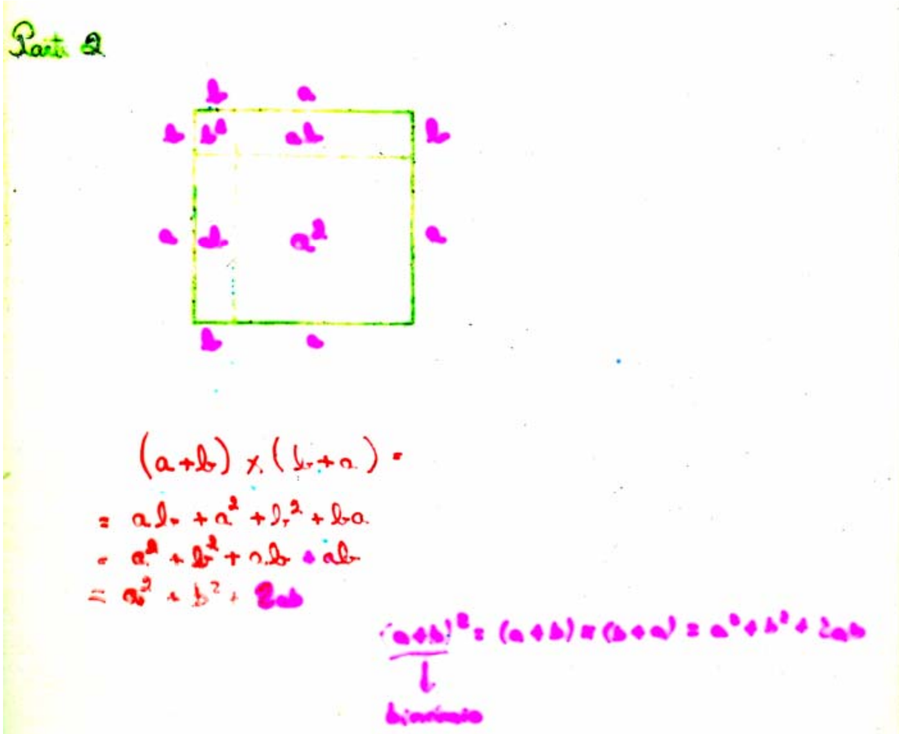


Figura 7.1.5. Registo final escrito apresentado pelo grupo G2.

7.1.2. Argumentação: análise local

No que diz respeito à primeira questão da parte I da tarefa, em que era pedido para justificar que o quadrilátero [CGKB] era um quadrado, através dos vários argumentos apresentados, é possível proceder a uma reconstrução funcional das diferentes afirmações produzidas pelos alunos. Da análise dos diferentes discursos argumentativos observam-se não só formas simples de argumentação, em que os elementos funcionais identificados correspondem aos elementos constituintes do chamado "coração da argumentação", mas também formas mais complexas de argumentação, em que os elementos funcionais presentes contemplam, nomeadamente, refutações. Observe-se os argumentos presentes na justificação apresentada pelo grupo G2.

Forma complexa

Refutação de uma conclusão

Após algum trabalho em grupo, o grupo G2 volta a questionar o professor, surgindo um novo diálogo. É de observar que, inicialmente, este grupo de alunos já tinha interpelado o professor sobre a questão 1, tendo apresentado um conjunto de garantias – «um quadrilátero tem quatro lados», «um quadrado tem os lados iguais» e «um quadrado tem todos os ângulos retos» – que não legitimavam o passo "dado $\rightarrow$ conclusão", isto é, «[CGKB] é um quadrilátero» $\rightarrow$ «[CGKB] é um quadrado», visto que não apresentaram quaisquer dados que permitissem proceder a esta inferência. Nesse sentido, o professor solicita aos alunos que pensem mais um pouco, tendo em conta as afirmações proferidas. No entanto, os alunos não conseguem resolver a questão e questionam o professor, surgindo um novo diálogo entre o grupo G2 e o professor. O primeiro excerto deste diálogo pode, para uma análise mais fácil, ser dividido em duas partes. Na primeira parte, os alunos, em diálogo com o professor, concluem que os ângulos internos do quadrilátero [CGKB] são retos. No entanto, esta conclusão não é sustentada apenas com um dado e uma garantia, mas através de um fundamento da própria garantia. Na segunda parte do diálogo, os alunos utilizam a conclusão obtida anteriormente, isto é que os ângulos internos do quadrilátero [CGKB] são retos, como um novo dado, no próximo passo de raciocínio.

(34) Daniel: A um deixamos [referindo-se à primeira questão da Parte I].
(35) Professor: Então?
(36) Daniel: Porque tem os lados paralelos.
(37) Professor: E isso faz com que… [o professor é interrompido pelos alunos]
(38) Nélson e Daniel: Que [a figura] seja um quadrado!
(39) Professor: Por que é que [a figura] tem os lados paralelos?
(40) Nélson: Porque tem ângulos de 90°.
(41) Professor: Mas como é que sabem que os lados são paralelos?

(42) Emanuel: Isso é fácil [pegando em duas borrachas, o Emanuel coloca-as sob a forma de esquadria]
(43) Professor: Como é que me podem garantir que os lados são paralelos?
(44) Emanuel: Porque… segundo a lei do Euclides [referindo-se ao parágrafo do início da demonstração da proposição II, 4] ao desenhar a figura os lados são paralelos.
(45) Professor: Então têm uma justificação. E …
(46) Nélson: Escreve, opa!

Através deste excerto, verifica-se que os alunos, de uma forma implícita, tomam em consideração um novo dado: [ADEB] é um quadrado por construção. A garantia apresentada pelos alunos para justificar que os ângulos internos do quadrilátero [CGKB] são retos, está relacionada com o facto de os seus lados serem paralelos ao quadrado [ADEB] (§36), inicialmente construído. No entanto, o professor pede um fundamento para esta garantia. Os alunos afirmam que os lados do quadrilátero [CGKB] são paralelos aos lados do quadrado [ADEB] pela forma como foi construída a figura: "segundo a lei do Euclides" (§44). Neste caso, a figura toma um papel importante na justificação do seu raciocínio, tendo, portanto, o argumento um caráter visual.

De acordo com o modelo de Toulmin, o argumento presente no raciocínio efetuado pelo grupo G2, na primeira parte deste diálogo, pode ser esquematizado da seguinte forma:

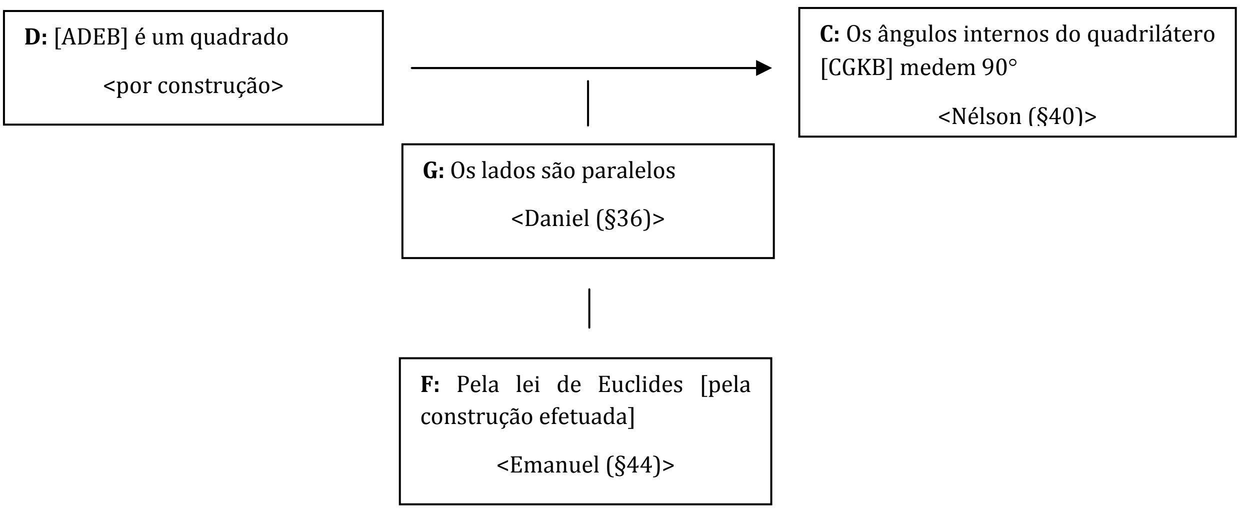


Figura 7.1.6. Representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio do grupo G2 na primeira parte do diálogo.

Esta conclusão obtida, de que os ângulos internos do quadrilátero [CGKB] são retos, é utilizada como um novo dado no próximo passo de raciocínio. Uma vez que têm a garantia, já expressa numa fase inicial, que num quadrado os ângulos internos são retos, os alunos concluem que [CGKB] é um quadrado. Contudo, não apresentam qualquer dado, nem garantia (§48). Nesse sentido, os alunos são questionados pelo professor, surgindo, assim, uma refutação ao raciocínio expresso.

(47) Professor: Só?
(48) Daniel: E chega! [O quadrilátero em causa é um quadrado]
(49) Professor: Ai chega? Basta ter os lados paralelos para ser um quadrado? Então, e o retângulo? Como são os lados?
(50) Nélson: São paralelos!
(51) Professor: Mas é um retângulo, não um quadrado.
(52) Nélson: Pois… é preciso [apontando para a figura] ter os ângulos todos iguais e retos.
(53) Emanuel: O retângulo também tem!
(54) Nélson: Mas não tem os lados todos iguais! [corrigindo prontamente a afirmação]

Através deste excerto, observa-se que a conclusão obtida no raciocínio anterior, isto é, que os ângulos internos do quadrilátero [CGKB] medem 90°, passou ao estatuto de dado, nesta fase do diálogo. Com este dado e a garantia já expressa num diálogo estabelecido anteriormente, com o professor, de que um quadrado tem os ângulos todos retos, os alunos consideram que o quadrilátero [CGKB] é um quadrado (§48). No entanto, após a intervenção do professor, em que este os questiona sobre uma outra figura geométrica (§49), os alunos apresentam uma refutação para essa sua afirmação (§54): não basta que os ângulos internos do quadrilátero [CGKB] sejam retos para concluir que é um quadrado, pois o retângulo também tem ângulos internos retos, é necessário, portanto, que os seus lados sejam geometricamente iguais. Mais uma vez estamos perante um argumento conceptual, uma vez que as justificações apresentadas são do campo conceptual: relações matemáticas entre conceitos.

De acordo com o modelo de Toulmin, o argumento presente no raciocínio efetuado pelo grupo G2, na segunda parte deste diálogo, pode ser esquematizado da seguinte forma:

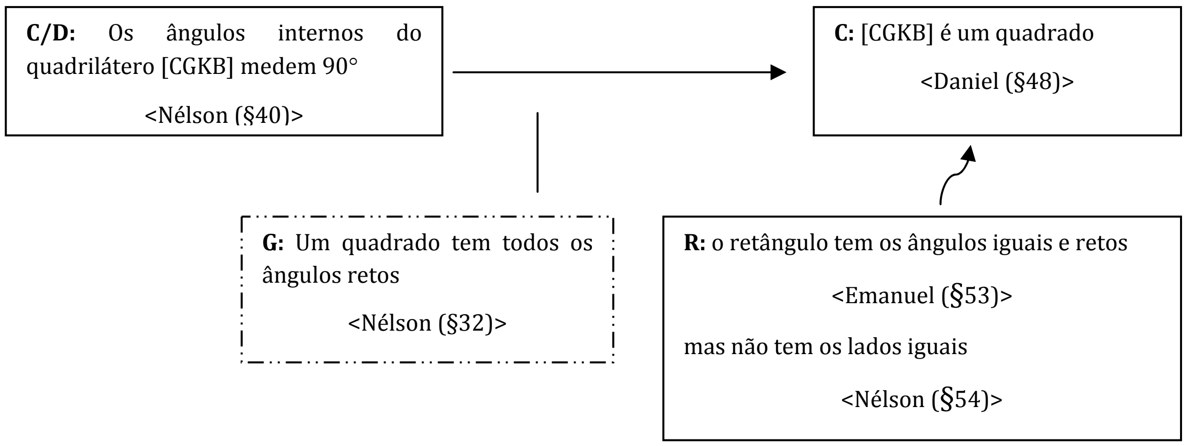


Figura 7.1.7. Representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio do grupo G2 na segunda parte do diálogo.

É de notar que a linha que limita a caixa que contém garantia apresentada no esquema do argumento da figura 6 não é contínua, uma vez que esta afirmação já tinha sido introduzida num diálogo anterior, portanto, encontrando-se implícita neste momento da discussão.

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes no raciocínio efetuado pelo grupo G2 podem ser esquematizados da seguinte forma:

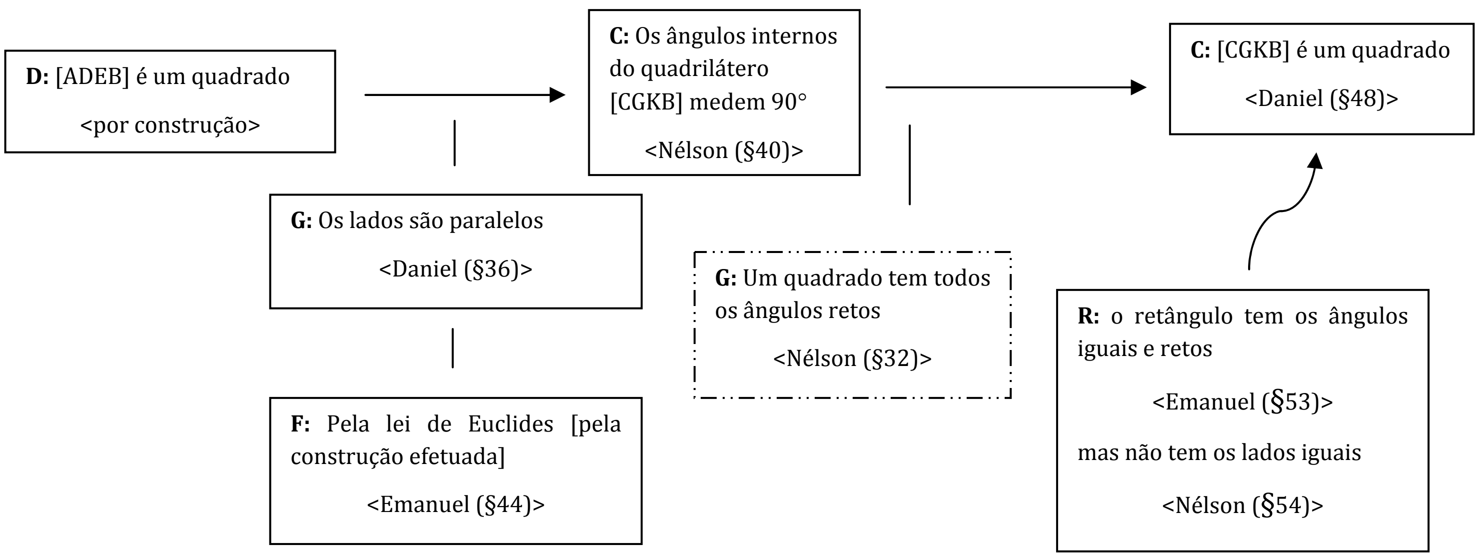


Figura 7.1.8. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio do grupo G2 (CA-2).

Forma simples

Após a refutação da afirmação proferida, o diálogo entre o professor e os alunos continua. Observe-se o próximo excerto:

(55) Professor: Então vamos lá, o que é que concluíram? Acabaram de dizer. Pela construção…
(56) Nélson: Ó Emanuel o que disseste, diz!
(57) Emanuel: Aquilo da lei [referindo-se novamente à proposição II, 4 dos *Elementos*]
(58) Daniel: Fizemos uma figura com dois retângulos e dois quadrados.
(59) Professor: Sim… mas aquilo que vos mandaram construir foram quadriláteros…
(60) Nélson, Emanuel e Andreia: Paralelos! [interrompendo o professor]
(61) Professor: Então, se os lados [dos quadriláteros] são paralelos, os ângulos são…
(62) Emanuel e Andreia: iguais…
(63) Professor: de…
(64) Emanuel: 90°.
(65) Professor: Ok! Agora continuem. O que falta? Já descobriram que os ângulos são de 90°. Para ser um quadrado o que é necessário?
(66) Emanuel: A diagonal…
(67) Nélson: Ter os lados todos iguais [interrompendo o Emanuel].
(68) Emanuel: E a diagonal [apontando para o segmento BG]. A diagonal não conta para nada, pois não?
(69) Daniel: Ter os lados todos iguais.
(70) Nélson: Foi o que eu disse.
(71) Professor: Então, vamos lá verificar que tem os lados todos iguais.

Conscientes que precisam de mostrar que os lados do quadrilátero [CGKB] são iguais, o diálogo prossegue. É apresentado, por parte dos alunos, um novo dado: o facto de [BG] ser uma diagonal do quadrilátero [BCGK] (§68).

Mais uma vez os alunos tentam medir.
(72) Professor: Sem isso. Vocês sabem fazer essas coisas. (…) Pensem um bocadinho.
Momento de silêncio
(73) Nélson: Traçamos uma diagonal.
(74) Professor: Sim. Está traçada.
Momento de silêncio.
(75) Professor: Então, traçaste a diagonal. Que figura é que obtiveste?
(76) Emanuel e Nélson: Triângulos.
(77) Professor: Então, o que querem mostrar?
Momento de silêncio
(78) Nélson: Quero mostrar que os triângulos [apontando para os triângulos BCG e BKG]… se juntar são iguais.
(79) Professor: Então, se os triângulos forem iguais, o que significa?
(80) Emanuel: Tem um lado igual.
(81) Professor: Qual lado?

(82) Emanuel: A hipotenusa.
(83) Professor: Sim, tem um lado igual [apontando para BG]. E estes lados [apontando, respetivamente, para os lados BK e GK] são iguais?
(84) Nélson: E um ângulo reto e dois ângulos…
(85) Emanuel: Têm dois ângulos em comum. Este [apontando para o ângulo CGB] e este [apontando para o ângulo GBK]. Este [apontando para o ângulo CBG] e este [apontando para o ângulo KGB].

Através deste excerto, observa-se que os alunos recorrendo à diagonal do quadrilátero [CGKB] pretendem mostrar que os triângulos [BCG] e [BKG] são geometricamente iguais (§78). Os alunos concluem, assim, que os triângulos [BCG] e [BKG] têm um ângulo reto e dois ângulos em comum (§84 e §85) não explicitando, contudo, que garantia apoia esta conclusão. Utilizando esta conclusão como um novo dado e pelo facto destes triângulos terem um lado igual (§80) concluem que os triângulos são geometricamente iguais. Novamente, não explicitam a garantia que suporta esta conclusão. Embora as garantias necessárias para obter a conclusão de que "os triângulos [BCG] e [BKG] são geometricamente iguais" não sejam explícitas no decorrer do diálogo, a sequência das afirmações proferidas permitem concluir que foram desenvolvidas de uma forma visual com recurso às relações geométricas presentes na figura.

De acordo com o modelo de Toulmin, o argumento presente no raciocínio efetuado pelo grupo G2 pode ser esquematizado da seguinte forma:

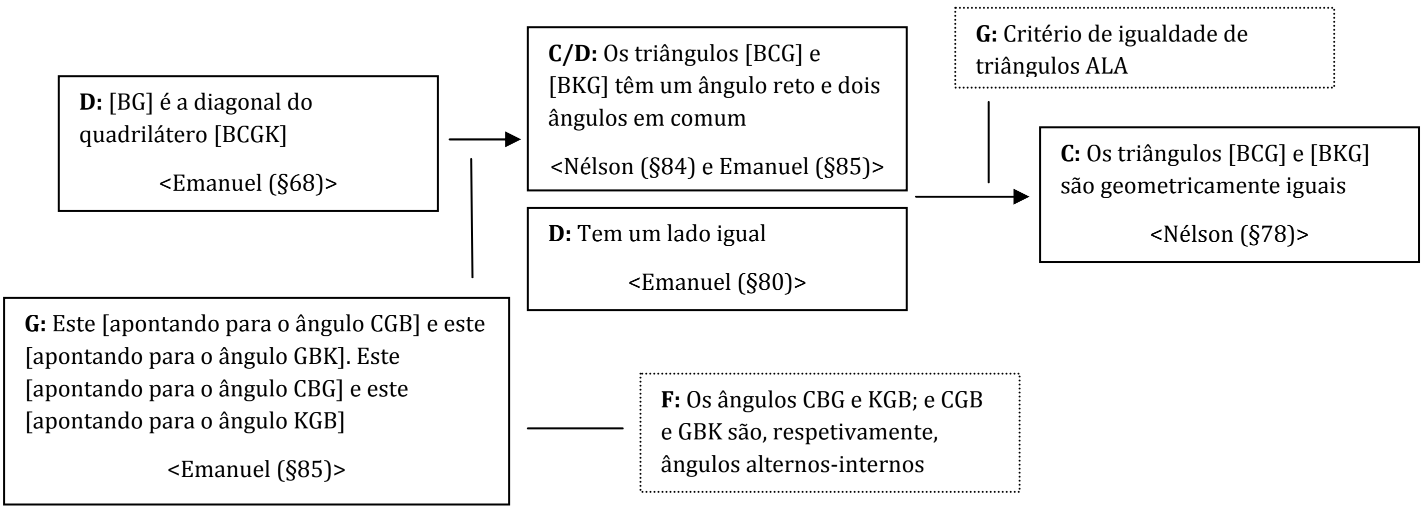


Figura 7.1.9. Representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio do grupo G2 (CA-3).

Embora a conclusão obtida pelos alunos esteja correta, o facto dos triângulos [BCG] e [BKG] serem geometricamente iguais, não significa que estes sejam isósceles e, portanto, que o quadrilátero [BCGK] seja um quadrado. O professor pede então aos alunos que se concentrem na análise de um dos triângulos (§86), sendo surpreendido pela pronta resposta de um deles: «É um triângulo isósceles.» (§87). Não surgindo de forma explícita no diálogo, esta resposta revela que os alunos entendem que a conclusão obtida anteriormente não é suficiente como dado para o pretendido. De facto, sendo cada um dos triângulos isósceles, como são geometricamente iguais, o quadrilátero [BCGK] será um quadrado. Observe-se a continuação do diálogo:

[…]
(86) Professor: Olhem só para um dos triângulos
Um dos alunos tapa o triângulo [BKG]
(87) Emanuel: É um triângulo [retângulo] isósceles.
(88) Professor: Então tens de mostrar que o triângulo é isósceles.
Momento de silêncio

Contudo, é a partir de um novo diálogo estabelecido entre professor e alunos que estes concluem o seu raciocínio.

(100) Professor: Diz!
(101) Daniel: Não conseguimos fazer a um.
(102) Emanuel: Tem alguma coisa a ver com esses lados serem perpendiculares? [apontando para a figura]
Momento de silêncio. Dada a ausência de respostas o professor intervém.
(103) Professor: O que é isto [apontando para o segmento de reta BD]?
(104) Nélson e Emanuel: Diagonal…
(105) Emanuel: [continuando] do quadrado maior [quadrado ABED].
(106) Professor: Pronto. E o que faz a diagonal do quadrado maior?
(107) Nélson: Divide o quadrado em dois triângulos.
(108) Professor: E são…?
(109) Nélson: Isósceles.
(110) Professor: Então o que podem saber sobre os ângulos?
(111) Nélson: Este [apontando para ângulo CBG] é igual a este [apontando para ângulo HDG]… E este [apontando para ângulo BAD] é igual a este [apontando para ângulo BED].
(112) Professor: Está bem, mas o que é que vocês querem mostrar?
(113) Nélson: Que é um quadrado.
(114) Professor: Sim, percebi. Mas, então este ângulo [apontando para o ângulo CBG] é igual a…
(115) Nélson: A este aqui em cima [apontando para o ângulo HDG]
(116) Professor: E este [apontando para o ângulo CGB], será que é igual a este [apontando para o ângulo CBG]?

(117) Nélson: Este [apontando para o ângulo CGK] é igual a este [apontando para o ângulo HGF], porque são ângulos verticalmente opostos.
(118) Daniel: Mas também é igual aquele [apontando para o ângulo KBC].
(119) Emanuel: Este [apontando para o ângulo CGB] é igual a este [apontando para o ângulo CBG].
(120) Professor: Porquê?
[...]
(121) Nélson: É...
(122) Emanuel: A diagonal divide...
[...]
(123) Nélson: Se isto é um ângulo reto [apontando para o ângulo ABE] a diagonal vai traçar a meio e vai dividir 45° para cada lado. Percebeu?
(124) Professor: Sim, eu percebi. Estás a dizer que este [apontando para o ângulo CBG] mede 45°. Então quanto é que mede este [apontando para o ângulo CGB]?
(125) Nélson, Emanuel e Daniel: 45°.
(126) Nélson: 45° para este lado [apontando para o ângulo CGB] e 45° para este lado [apontando para o ângulo CBG].
(127) Emanuel: E 90° aqui [apontando para o ângulo BCG].
(128) Professor: Então se é, o que é significa?
(129) Nélson: Que [a figura] é um quadrado.
(130) Professor: Porquê?
(131) Emanuel: Que este lado [apontando para o segmento GC] é igual a este [apontando para o segmento CB].
(132) Professor: Porquê?
(133) Nélson e Emanuel: Porque este ângulo [apontando para o ângulo CBG] é igual a este [apontando para o ângulo CGB].
(134) Daniel: Significa que a figura é um quadrado.
(135) Professor: Agora é só escreverem o que estiveram a dizer.

O professor retoma o diálogo com o grupo, focando novamente a afirmação de que [DB] é a diagonal [DB] do quadrado [ADEB] (§103). Os alunos referem que os triângulos [ADB] e [DEB] são isósceles (§109). O professor questiona, então, sobre o que podem afirmar em relação aos ângulos (§110). No entanto, o grupo divaga em relação à figura, fornecendo informações, não pertinentes para o que se pretende mostrar. O professor volta a centrar o grupo na questão em causa (§112) – mostrar que o quadrilátero [CGKB] é um quadrado – captando a atenção dos alunos num determinado aspeto da figura (§114). Contudo um dos elementos do grupo continua a divagar, não respondendo ao que foi perguntado (§117), até que um dos elementos se centra num dos aspetos observado pelo professor (§119). O raciocínio apresentado pelos alunos resume-se a observar que se [BD] é a diagonal do quadrado construído [ABED] (§104) o ângulo BGC mede 45° (§125), porque o ângulo CBG mede 45° (§123), visto que a diagonal de um quadrado divide-o em dois triângulos isósceles (§107) e (§109). Como num triângulo, a ângulos iguais correspondem lados iguais, o triângulo [BCG] é isósceles e, portanto, o quadrilátero [CGKB] é um quadrado (§129) e (§134). É de observar que ao longo desta interação discursiva, as conclusões obtidas passam a dados, tendo por isso uma dupla função na cadeia de raciocínio. É ainda de observar que algumas garantias são implícitas, existindo, por vezes, dados e garantias que se encontram presentes em fases anteriores desta discussão. Acresce referir que neste diálogo os argumentos presentes, por um lado, são de natureza conceptual, por exemplo o fundamento apresentado em (§107) e (§109); por outro, são de caráter visual, uma vez que se refere a propriedades específicas da figura, por exemplo (§123) e (§131).

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes no raciocínio efetuado pelo grupo G2, na fase final, podem ser esquematizados da seguinte forma:

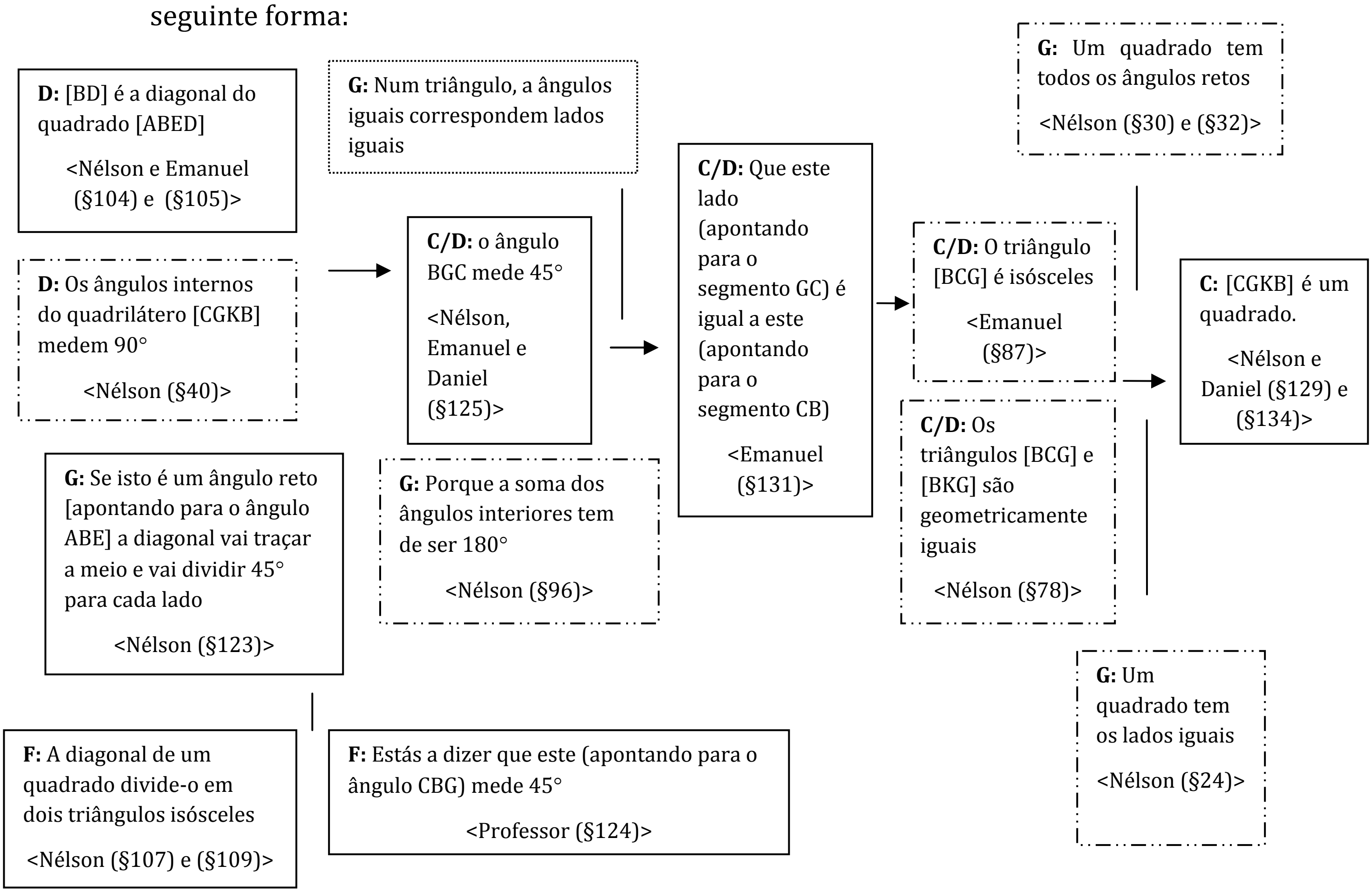


Figura 7.1.10. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio do grupo G2 na fase final (CA-4 e CA-5).

É de notar que a linha que limita a caixa que contém garantia – "Num triângulo a ângulos iguais correspondem lados iguais" – apresentada no esquema do argumento da figura 7.1.10 é a tracejada, uma vez que esta afirmação não foi explicitamente referida, embora seja implícita para a conclusão realizada pelos alunos. Mais uma vez estão presentes dados e garantias que foram expressas noutras fases do diálogo estabelecido.

7.1.3. Argumentação: análise global

Tendo em conta o diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G2, durante a realização da questão 1 da parte I, é possível representar globalmente os diversos argumentos presentes neste discurso argumentativo e, posteriormente, proceder à análise global da sua estrutura. Dada a complexidade do discurso argumentativo, a representação esquemática desenvolvida por Knipping (2008) permite descrever com detalhe os diferentes argumentos presentes nesse discurso. De forma, a ilustrar a representação esquemática proposta por Knipping (idem) ao presente discurso mantido entre o professor e o grupo G2, e uma vez que este tipo de representação será utilizado para representar discursos argumentativos presentes nas tarefas posteriores desta investigação, todas as afirmações presentes na argumentação são representadas por círculos, losangos e retângulos. É de observar que estes diferentes símbolos não representam apenas as diferentes funções (dado, garantia, fundamento, refutação e conclusão) que as afirmações têm num discurso argumentativo, que anteriormente, nos esquemas de Toulmin, se designaram, respetivamente, por D, G, F, R e C, mas também o estatuto que essas afirmações têm no interior da estrutura global da argumentação. Exemplificando, a conclusão final é representada por um retângulo preto, os retângulos brancos representam conclusões alvo em estádios intermédios no interior da argumentação global (pontos finais dos estádios), que se tornarão pontos de partida, portanto, dados (D) num próximo argumento. Os dados e as conclusões que não têm um objetivo intermédio são representados por círculos. As garantias e os fundamentos são simbolizados por losangos. Antes de se proceder à representação global do discurso argumentativo do grupo G2, exemplifica-se o esquema proposto por Knipping a uma corrente de argumentação (CA-2) presente na interação discursiva:

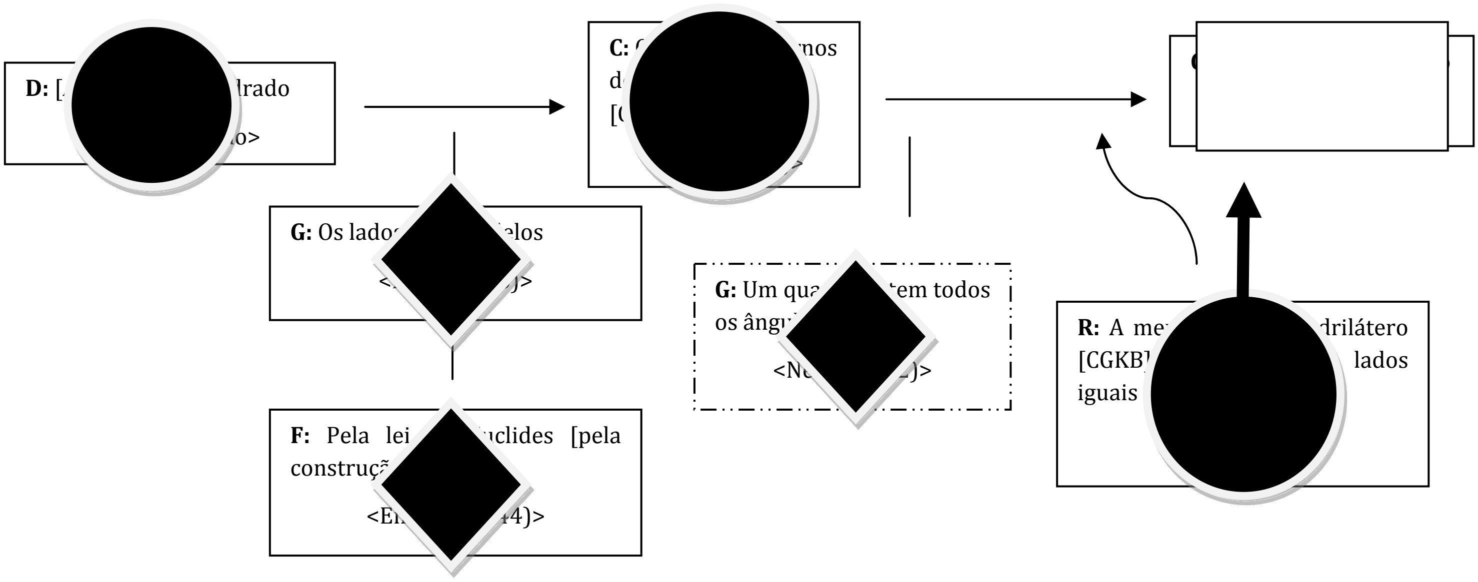


Figura 7.1.11. Representação esquemática de CA-2.

Assim, a representação esquemática global do discurso argumentativo do grupo G2 pode ser traduzido da forma seguinte:

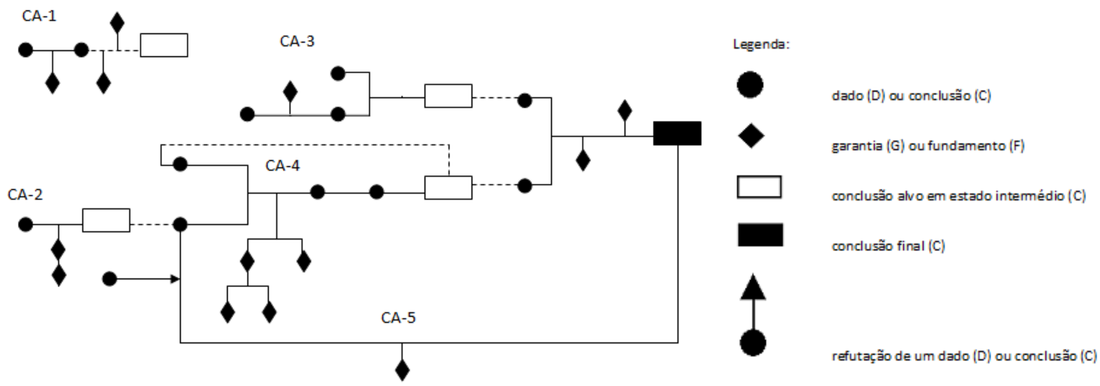


Figura 7.1.12. Representação esquemática global do discurso argumentativo do grupo G2.

Através de uma análise global desta argumentação, pode-se observar que na sua estrutura existem argumentos onde uma afirmação (conclusão) é deduzida a partir de uma outra afirmação (dado), através de conceitos matemáticos e fundamentos lógicos (garantias e fundamentos). Por exemplo, observar os argumentos presentes nas correntes de argumentação CA-2 e CA-3. É ainda de notar que na estrutura desta argumentação, por vezes, uma afirmação estabelecida como conclusão, num próximo argumento, assume a função de dado. Esta situação, por exemplo, pode ser observada nas correntes de argumentação CA-3 e CA-4. Observa-se ainda a presença de uma refutação (CA-2), é possível encontrar passos de argumentação que têm falta de garantias (CA-3), e existe uma corrente de argumentação que não se encontra ligada à estrutura principal (CA-1). Por fim, é de referir que no final da argumentação é percetível o efeito funil. Nesse sentido, esta estrutura de argumentação evidencia a maioria das características que caracterizam a *estrutura-fonte*. No entanto, é possível observar uma característica típica da *estrutura-reservatório*, uma vez que, por vezes, o raciocínio argumentativo, por vezes, move-se inversamente na estrutura lógica do discurso. Por exemplo, inicialmente (CA-1), os alunos referem duas garantias que permitem concluir que o quadrilátero [CGKB] é um quadrado, contudo não apresentam quaisquer dados (diferentes do dado presente no enunciado) que permitam estabelecer o passo "dado → conclusão". Também em CA-4, os alunos referem que «o triângulo retângulo é isósceles» (§87), o que permite concluir o pretendido, contudo, necessitam de encontrar dados que permitam sustentar essa afirmação, o que inverte o movimento lógico do discurso.

7.1.4. Dificuldades manifestadas pelos alunos

Linguagem

Ao nível da interpretação do texto de Euclides

O facto da linguagem e a notação usada por Euclides serem diferentes da atual, constituiu uma dificuldade inicial na realização da tarefa:

O mais difícil para mim foi compreender os texto que Euclides escreveu.

Figura 7.1.13. Excerto da avaliação final realizada pelo Emanuel, grupo G2.

Compreensão matemática

Ao nível da interpretação geométrica e de conceitos

Os alunos manifestaram dificuldades em descrever, através de uma breve composição, a proposição II, 4 dos *Elementos* de Euclides a partir da construção apresentada e dos resultados obtidos. Esta dificuldade pode ser observada através de uma das partes do diálogo estabelecido entre o professor e os elementos do grupo G1:

(1) Nuno: Concluí que tinha 3 quadriláteros.
(2) Professor: 3 quadriláteros?
(3) Nuno: Sim.
(4) Professor: Quais são os quadriláteros?
(5) Nuno: Este aqui [apontando] CGKB, HDFG e ADEB.
(6) Professor: Mas ADEB é o quadrilátero grande! E dentro, quantos quadriláteros têm?
(7) Nuno e Pedro: 2.
(8) Professor: Só 2?
(9) Miguel: Foi o que eu vos disse. Aqui estes [apontando para AHGC e GFEK] também acho que são quadriláteros.
(10) Professor: O que é que são quadriláteros?
(11) Nuno: Têm que ter os ângulos todos iguais.
(12) Pedro: Não, têm de ter dois lados iguais e…
(13) Professor: O que é um triângulo?
(14) Rui: Um triângulo?...
(15) Pedro: É um trilátero!
(16) Professor: É uma figura que tem quantos lados?
(17) Pedro e Nuno: 3.
(18) Professor: E um quadrilátero?
(19) Nuno e Pedro: 4.
(20) Miguel: Estás a ver, eu bem te disse.
(21) Nuno: Ó stôr estes aqui [apontando para os quadriláteros AHGC e GFEK] também são?
(22) Miguel: Claro!
[…]
(23) Nuno: A partir de um quadrado grande obtive dois quadrados mais pequenos e dois retângulos.

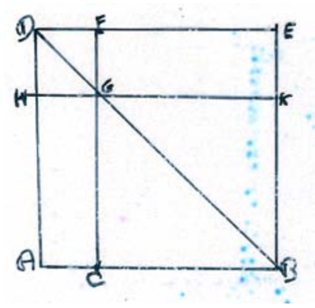


Figura 7.1.14. Figura desenhada pelo grupo G1.

A dificuldade manifestada por estes alunos está relacionada, não só com a interpretação geométrica da figura, mas também com o próprio conceito de quadrilátero. Para este grupo de alunos, o facto de nas perguntas 1 e 2, da parte I da tarefa, se fazer referência, apenas, aos quadriláteros [CGKB] e [HDFG] e uma vez que a figura construída foi o quadrado [ADEB], estes não prestaram atenção aos restantes quadriláteros presentes na figura, a saber os retângulos [AHGC] e [GFEK]. Além disso, percebe-se, através deste pequeno excerto, que alguns elementos do grupo manifestam, inicialmente, algumas dificuldades em exprimir o conceito de quadrilátero (§11 e §12).

Argumentação

Ao nível da iniciação de um processo de justificação

A primeira questão, da parte I da tarefa, suscitou dificuldades aos alunos:

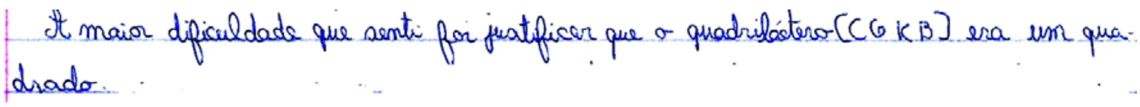

A maior dificuldade que senti foi justificar que o quadrilátero [CGKB] era um quadrado.

Figura 7.1.15. Excerto da avaliação final realizada pelo Daniel, grupo G2.

Nesta questão era pedido para justificar que o quadrilátero [CGKB] era um quadrado. Para os alunos, a dificuldade consistiu em perceber quais as razões que deviam apresentar por forma a justificarem que o quadrilátero [CGKB] era de facto um quadrado. Visualmente, para eles, era evidente e a primeira ideia que surgiu foi medir figura. Contudo, tendo em conta os instrumentos utilizados pelos gregos, a régua era não graduada. As dificuldades em perceber o que fazer e como proceder podem ser observadas através de uma das partes do diálogo estabelecido entre o professor e os elementos do grupo G2 na resolução da questão 1 da parte I da tarefa:

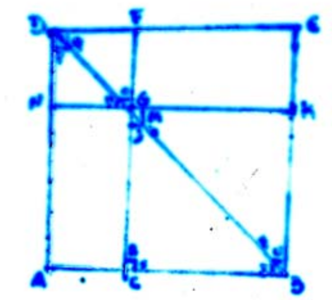


Figura 7.1.16. Figura desenhada, no acetato, pelo grupo G2.

(1) Emanuel: Ó stôr o que é que fazemos aqui? [apontando para a folha onde resolve a tarefa]
(2) Professor: Diz? [o professor aproxima-se]
(3) Emanuel: Temos que por as medidas disto? [apontando para a figura construída] Para justificar…
(4) Professor: Que medidas? Justificar o quê? [o professor aproxima-se do grupo do Emanuel]
(5) Emanuel: Se é um quadrilátero.
(6) Daniel: Um quadrado! [interrompendo o Emanuel]
Momento de silêncio
(7) Emanuel: Sim, se é um quadrado.
(8) Professor: Mostra então a figura.
(9) Emanuel: Esta [percorrendo com o lápis os lados da figura]

Neste pequeno excerto, do diálogo estabelecido entre professor e o grupo de alunos, observa-se que estes, uma vez que a figura dada não apresentava quaisquer medidas, pretendiam proceder à respetiva medição de modo a mostrar que a figura dada era um quadrado (§3). Esta tentativa de apoiar as suas justificações com recurso à medição da figura, também é possível observar ao longo de outras fases do diálogo com os elementos deste grupo (§26). Observem-se os dois excertos:

(22) Professor: Então o que é que vos falta provar?
(22) Daniel: Que é um quadrado.

(23) Professor: E é?
(24) Nélson: É, porque tem os lados todos iguais.
(25) Professor: Como é que sabes?
(26) Nélson: Se medir.
(27) Professor: Se medir? Mas a régua é não graduada!
(28) Emanuel: Ninguém tem régua!... [virando-se para o Nélson e sorrindo esconde a régua debaixo da mesa]
[…]
(68) Emanuel: E a diagonal. A diagonal não conta para nada, pois não?
(69) Daniel: Ter os lados todos iguais.
(70) Nélson: Foi o que eu disse.
(71) Professor: Então, vamos lá verificar que tem os lados todos iguais.
Mais uma vez os alunos tentam medir.
(72) Professor: Sem isso. Vocês sabem fazer essas coisas. […] Pensem um bocadinho.

Através da leitura destes excertos, verifica-se que a falta de dados numéricos, na figura, constituiu uma dificuldade para os alunos apresentarem dados e garantias que permitissem concluir que o quadrilátero [CGKB] era um quadrado. Os alunos reconhecem que para o quadrilátero [CGKB] ser um quadrado é necessário que tenha os lados geometricamente iguais, no entanto, numa fase inicial, para os alunos, o processo de justificação resume-se à medição da figura (§27 – §26).

Esta dificuldade em justificar que o quadrilátero [CGKB] era um quadrado também foi expressa, no final, pelo grupo G3 que refere:

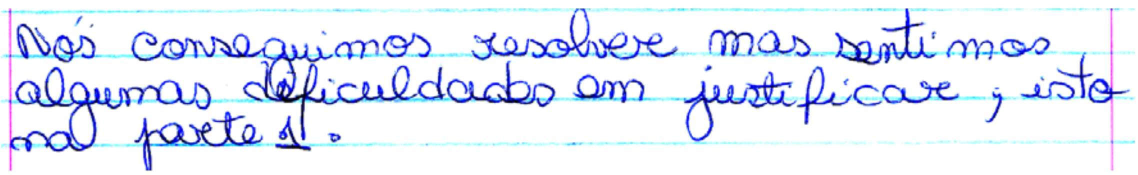

Nós conseguimos resolver mas sentimos algumas deficuldades em justificar, isto na parte 1.

Figura 7.1.17. Excerto da avaliação final escrita realizada pelo grupo G3.

Mais uma vez a razão apontada foi a falta de medidas na figura.

Ao nível da apresentação de justificações

Os alunos revelaram ainda dificuldades na forma de justificar os seus raciocínios. No excerto seguinte, do diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G2, na resolução da questão 1 da parte I da tarefa, os alunos, por um lado, não só utilizam os dados presentes na tese como hipótese, como, por outro lado, generalizam determinada conclusão, com recurso a uma determinada propriedade dos triângulos.

(89) Daniel: É isósceles…
(90) Emanuel: Se tem um ângulo de 90°, os outros têm de ter 45°.
(91) Professor: Como é que sabes que os outros têm 45°?
(92) Andreia: Porque têm os dois lados iguais.
(93) Professor: Mas isso é o que queres mostrar.
(94) Emanuel: O lado deste triângulo [apontando para triângulo BCG] está a dividir o quadrado [apontando para o quadrilátero CGKB].
(95) Professor: Mas assim estás a dizer-me que já é um quadrado.
(96) Nélson: Porque a soma dos ângulos interiores tem de dar 180°.
(97) Professor: Claro, mas isso não quer dizer que este [apontando para os ângulo] seja obrigatoriamente 45° e 45°.
(98) Nélson: Pois está bem… prontos!
(99) Professor: Pensem mais um bocadinho… continuem.

A análise deste excerto permite observar que os alunos apresentam alguma dificuldade em exibir justificações que permitam concluir que o triângulo [BCG] é isósceles. Por um lado, mencionam que [GB] é a diagonal do quadrado [CGKB] (§94), assumindo que este quadrilátero é já um quadrado, ou seja, usando como hipótese o que pretendem mostrar. Por outro, uma vez que o ângulo BCG é reto, concluem que os ângulos CBG e CGB medem ambos 45°, recorrendo ao facto de que a soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180° (§96). Contudo, esta generalização não é correta. Em ambas as situações o professor faz observações que os levam a refletir nas afirmações expressas (§93, §95 e §97). Nesta fase, embora os alunos mostrem consciência que têm de mostrar que o triângulo [BCG] é isósceles, não apresentam dados nem garantias que sustentem este facto.

Garantias que não legitimam um passo da argumentação por falta de dados

Ao nível da argumentação desenvolvida pelo grupo G2 é possível observar uma corrente de argumentação em que as garantias, por falta de dados, não legitimam o passo de argumentação. Observe-se o seguinte excerto do diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G2 na resolução da questão 1 da parte I da tarefa:

(10) Professor: Queres mostrar então que a figura é um…?
(11) Emanuel: Quadrado.
(12) Nélson: Quadrilátero! [respondendo ao mesmo tempo que o Emanuel]
(13) Daniel e Emanuel: Quadrado! [reiteram em conjunto]
(14) Professor: É a mesma coisa?
(15) Daniel: Quadrilátero já é!
(16) Professor: O que é um quadrilátero Nélson?
(17) Nélson: Hum...
(18) Emanuel: Tem quatro lados.
(19) Daniel: É uma figura que tem quatro lados.
(20) Professor: Então, a figura tem quatro lados?
(21) Todos: Sim.
(22) Professor: Então o que é que vos falta provar?
(22) Daniel: Que é um quadrado.
(23) Professor: E é?
(24) Nélson: É, porque tem os lados todos iguais.
(25) Professor: Como é que sabes?
(26) Nélson: Se medir.
(27) Professor: Se medir? Mas a régua é não graduada!
(28) Emanuel: Ninguém tem régua!... [virando-se para o Nélson e sorrindo esconde a régua debaixo da mesa]
O professor retoma a resposta dada pelo Nélson.
(29) Professor: Basta que os lados sejam todos iguais para ser um quadrado?
(30) Nélson: E os ângulos!...
(31) Professor: O que é que queres dizer com os ângulos?
(32) Nélson: Têm de ser retos.
(33) Professor: Então continuem. Já sabem o que têm de mostrar.

Através do excerto apresentado pode-se observar que os alunos, tendo em atenção a informação dada no enunciado, reconhecem que [CGKB] tem quatro lados, por ser um quadrilátero (§15, §18 e §19), contudo, esta conclusão, apesar de poder ser utilizada como dado, uma vez que o quadrado é uma figura geométrica plana com quatro lados, não permite concluir o pretendido, que [CGKB] é um quadrado. São, portanto, precisos novos dados e, até mesmo, garantias que permitam concluir que [CGKB] é um quadrado. Contudo, este grupo de alunos não exibe nenhum dado, baseado na figura ou no enunciado, mas apresenta uma garantia: para o quadrilátero [CGKB] ser um quadrado é necessário que tenha os quatro lados iguais (§24). Contudo, o professor questiona se a garantia apresentada é suficiente, isto é, se o quadrilátero [CGKB] tiver os quatro lados iguais é possível concluir que é um quadrado (§29), ao que os alunos respondem com uma outra garantia: é necessário que também tenha os ângulos todos retos

(§32). Através deste pequeno excerto, observa-se que os alunos apenas se limitam a apresentar afirmações factuais e categóricas, garantias, não exibindo quaisquer dados, diferentes do apresentado no enunciado, que permitam a aplicação destas garantias como apoio à conclusão desejada: o quadrilátero [CGKB] é um quadrado. De facto, embora as garantias apresentadas pertençam ao campo dos conceitos matemáticos, o que permite concluir que o argumento presente tem caráter conceptual, não legitima o passo "[CGKB] tem quatro lados" → "[CGKB] é um quadrado". Acresce observar que apesar de as garantias muitas vezes se encontrarem implícitas nos argumentos, no presente caso, há a necessidade de apresentar novos dados que permitam viabilizar este passo.

De acordo com o modelo de Toulmin, o argumento presente no raciocínio efetuado pelo grupo G2, pode ser esquematizado da forma seguinte:

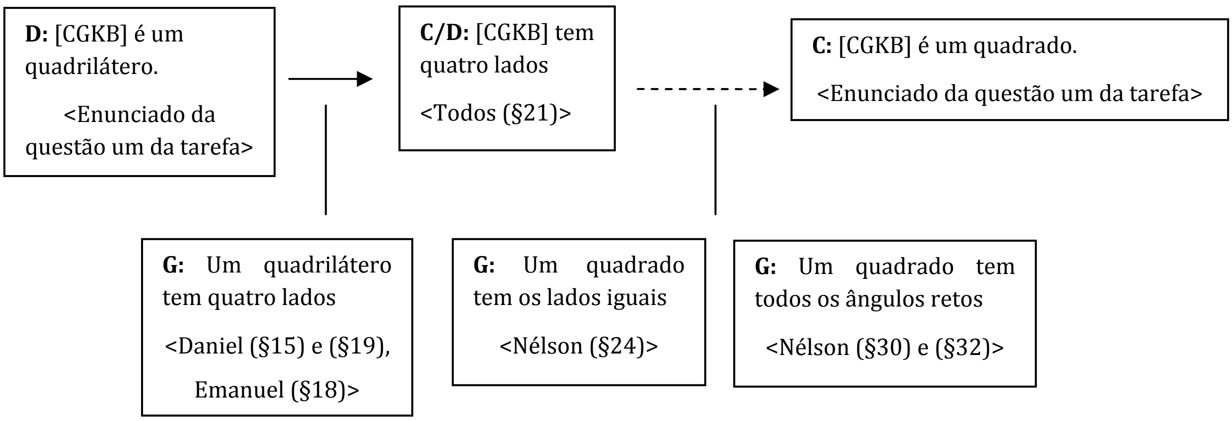
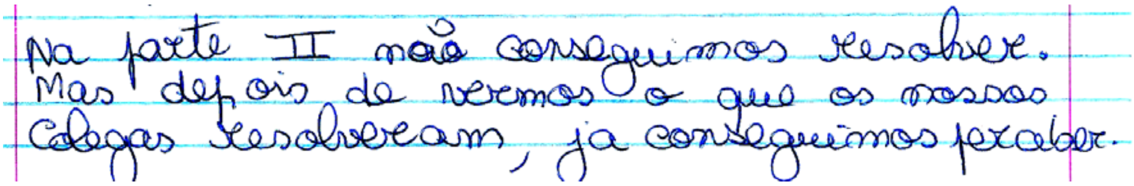


Figura 7.1.18. Representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio do grupo G2 (CA-1).

A seta a tracejado presente na representação esquemática, pretende realçar que o passo "dado → conclusão" não é legitimado pelas garantias apresentadas.

7.1.5. Avaliação realizada pelos alunos

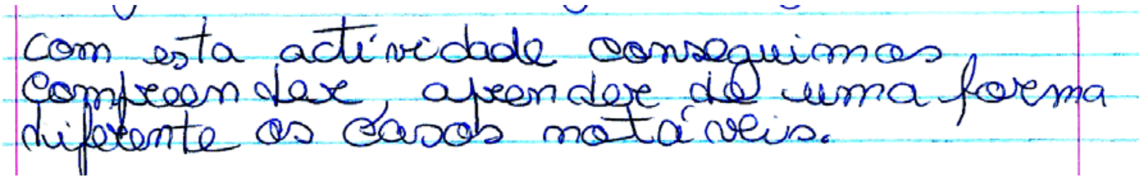
Ao nível da *aprendizagem da matemática*, os alunos destacam a importância da apresentação oral, em grande grupo, como forma de compreender a realização da tarefa proposta e a ultrapassar as dificuldades sentidas. O grupo G3 refere:



Na parte II não conseguimos resolver. Mas depois de vermos o que os nossos colegas resolveram, já conseguimos perceber.

Figura 7.1.19. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G3 (continuação).

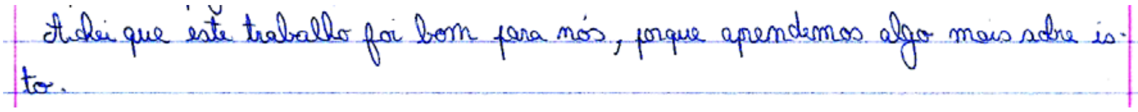
Ainda nas reflexões finais, alguns grupos referem que a realização desta tarefa permitiu aprender de uma forma diferente os casos notáveis da multiplicação, no presente caso o quadrado de um binómio. O grupo G3 observa que:



Com esta actividade conseguimos compreender, aprender de uma forma diferente os casos notáveis.

Figura 7.1.20. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G3 (continuação).

Já a Diana do grupo G4 refere que esta tarefa lhe permitiu aprender um pouco mais sobre os casos notáveis:



Achei que este trabalho foi bom para nós, porque aprendemos algo mais sobre isto.

Figura 7.1.21. Excerto da avaliação final realizada pela Diana, grupo G4.

Estes excertos permitem observar que o interesse dos alunos, pela realização desta tarefa, vai mais longe do que um fator de motivação, uma vez que lhes permitiu uma melhor compreensão dos conceitos e procedimentos, tendo, por isso, um efeito significativo na sua aprendizagem. Embora nestas reflexões não esteja explícito o motivo das suas afirmações – «compreender, aprender de uma forma diferente» e «aprendemos algo mais sobre isto» – estas estão relacionadas com o facto de a "descoberta" do caso notável ter sido obtida através de uma interpretação geométrica. No entanto, o grupo G2 refere de forma explícita esta conexão entre a geometria e a álgebra:

Através deste exercício, ficamos a saber que Euclides foi um grande matemático que utilizou a álgebra, como forma simplificada para usar na geometria.
Gostei muito deste exercício, porque fiquei a conhecer mais coisas sobre matemática e aprendi o "quadrado de um binómio".

Figura 7.1.22. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G2 (continuação).

Esta conexão também se encontra presente na síntese escrita final apresentada pelo grupo G1, ao associar a área de um quadrado composto por quatro quadriláteros (dois quadrados e dois retângulos geometricamente iguais) ao quadrado de um binómio:

A proposição II mostra a escrita da representação da área de um quadrado através do quadrado do binómio.
A figura é composta por quatro quadriláteros, o binómio que demonstra a área da figura é $(a+b)^2$.

$$(a+b)^2 = (a+b)\times(b+a) = a^2+b^2+2ab$$

Figura 7.1.23. Registo escrito apresentado pelo grupo G1.

Ao nível da *predisposição perante a matemática* é possível observar o interesse e o entusiasmo na realização da tarefa. O Emanuel do grupo G2 refere que:

Acho que todos os alunos gostaram deste exercício e desta aula.
Foi muito interessante!

Figura 7.1.24. Excerto da avaliação final realizada pelo Emanuel, grupo G2.

Este aluno refere ainda que gostou de desenhar a figura, que permite ilustrar a proposição de Euclides, e, posteriormente, observar o resultado final.

Gostei muito de construir a figura através do texto, e por fim ver o resultado final.

Figura 7.1.25. Excerto da avaliação final realizada pelo Emanuel, grupo G2 (continuação).

Também o grupo G4, na sua reflexão final, observa que:

Foi uma experiência diferente e muito divertida em que descobrimos a Fórmula do quadrado do binómio

$\rightarrow (a+b)^2 = a^2+2\times b\times a+b^2$

Figura 7.1.26. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G4.

Por fim, há a registar a observação realizada pelo Daniel do Grupo G2:

O que mais gostei de fazer foi quando fui explicar as coisas que sabia para responder à pergunta em questão.

Figura 7.1.27. Excerto da avaliação final realizada pelo Daniel, grupo G2.

Esta reflexão permite destacar o papel que a integração da história da matemática tem em estimular o discurso em contexto de sala de aula, uma vez que cria a oportunidade para desenvolver a arte de discutir, justificar as suas próprias opiniões e apresentar o seu próprio raciocínio aos outros.

7.2. Construções geométricas

A presente tarefa, dividida em duas partes, teve como objetivo que, em grupo, os alunos procedessem a determinadas construções geométricas, com recurso a dois instrumentos de desenho – o compasso e a régua (não graduada). O compasso seria utilizado para desenhar circunferências e a régua para traçar retas. Não era objetivo desta tarefa introduzir conceitos, mas sim proporcionar aos alunos a realização de duas tarefas de caráter geométrico que, por um lado, lhes permitisse desenvolver alguma destreza na manipulação de material de desenho e que, por outro, com o recurso a esse material de desenho, pudessem resolver os problemas propostos recorrendo à interpretação geométrica do teorema de Pitágoras. A tarefa foi desenvolvida de acordo com o seguinte itinerário:

Parte I – construção de um quadrado cuja área fosse igual à soma das áreas de dois quadrados dados.

Parte II – construção de um quadrado cuja área fosse igual à diferença entre as áreas de dois quadrados dados.

É de observar que enquanto na primeira parte da tarefa o lado do quadrado procurado é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são os lados dos quadrados dados; na segunda parte da tarefa, procura-se a área de um quadrado cujo lado é o cateto de um triângulo retângulo cuja hipotenusa e outro cateto são, respetivamente, os lados dos dois quadrados dados.

No final da realização da tarefa em pequenos grupos, foram apresentadas oralmente e por escrito (com recurso ao quadro de giz ou em suporte papel) as conclusões em grande grupo.

7.2.1. Tipo de argumentos produzidos

Com a realização desta tarefa pretendia-se que os alunos, com recurso à régua não graduada e ao compasso, procedessem à construção geométrica de quadrados cuja área fosse igual à soma das áreas de dois quadrados dados, ou à diferença entre as áreas de dois quadrados dados. A construção pretendida baseia-se na interpretação geométrica do teorema de Pitágoras: num triângulo retângulo, o quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma dos quadrados construídos sobre os catetos. A descoberta da solução dos dois problemas apresentados suscitou o aparecimento de diversos argumentos.

Argumentos genéricos

Na resolução do problema da parte I da tarefa, o grupo G4 sugere como solução do problema a construção de uma quadrado cujo lado fosse formado pela soma de cada um dos lados dos dois quadrados dados. Esta solução sugerida pelo grupo G4 será alvo de refutação dos restantes grupos. Por exemplo, a refutação apresentada pelo grupo G1 permite observar que a figura toma um papel relevante na construção do seu argumento, o que realça o caráter visual do mesmo, sendo o exemplo apresentado *genérico pictórico*. Observe-se o excerto do diálogo entre o professor e os elementos do grupo G1:

(1) Professor: O que é que fizeram para obter isso?
(2) Nuno: Fizemos com as medidas que já disseram. E a figura não dá porque aparecem dois retângulos.
(3) Professor: Então o que acontece?
(4) Rui: Nós queríamos a área destes dois quadrados, só que aparece a área destes dois retângulos.
(5) Nuno: Por esta forma não dá!

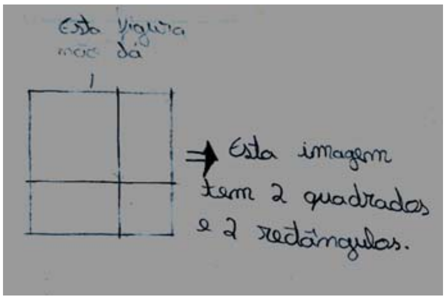


Figura 7.2.1. Construção geométrica apresentada pelo grupo G1.

Argumentos entre o genérico e o simbólico

Também a refutação apresentada pelo grupo G2 à construção efetuada pelo grupo G4 na parte I da tarefa, permite observar que a figura toma um papel relevante na construção do seu *argumento geométrico*, contudo, este é de caráter narrativo, não sendo suportado por qualquer construção geométrica ou simbolismo. Desta forma, é possível destacar o papel que a figura toma no suporte da construção do argumento geométrico, nomeadamente na manutenção do mecanismo lógico do discurso. Observe-se o excerto do diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G2:

(3) Daniel: A Carla disse que era pegar na medida deste [apontando para o lado do quadrado maior] e deste [apontando para o lado do quadrado menor] e sabíamos um lado, depois construíamos o resto do quadrado. Mas para nós termos a área destes dois quadrados era calcular o lado vezes o lado deste [apontando para o quadrado maior] mais lado vezes lado deste [apontando para o quadrado menor] e depois era que somávamos a área dos dois, pois como a Carla disse não ia dar a área.
[…]
(6) Daniel: Ia dar maior!

Argumentos entre o genérico e o simbólico/ e o simbólico e o formal

Na refutação à construção efetuada pelo grupo G4, na realização da parte I da tarefa, o grupo G3 indica duas expressões que para este grupo traduzem a área do quadrado procurado. Designando por a e b, respetivamente, os lados dos quadrados dados, este grupo observa que $a^2 + b^2$ será a expressão que traduzirá a área do quadrado procurado, visto que pelo enunciado procura-se um quadrado cuja área seja igual à soma das áreas dos quadrados dados. No entanto, através da construção efetuada pelo grupo G4, o grupo G3 observa que a expressão que traduz a área desta figura é $(a + b)^2$.

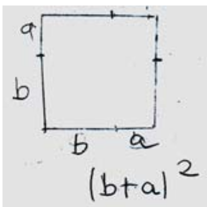


Figura 7.2.2. Construção geométrica e expressão que traduz a respetiva área apresentadas pelo grupo G3.

Embora, os argumentos apresentados resultem da análise das figuras (quadrados dados e quadrado construído pelo grupo G4), sendo, portanto, argumentos que situam *entre o genérico e o simbólico*, a refutação à solução apresentada pelo grupo G4 ocorre a partir de uma simplificação algébrica da expressão $(a + b)^2$, o que evidencia argumentos *entre o simbólico e o formal*, visto que os alunos observam que $(a + b)^2$ é um caso notável e, portanto, simplificam a expressão, observando que a construção efetuada pelo grupo G4 não é válida. Observe-se um excerto do diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G3:

(26) Professor: [...] Isto que está aqui não é um caso notável?
(27) Cláudio: Sim!
(28) Professor: E como é que era resolvido o caso notável, lembram-se?
(29) Paula e Cláudio: [ao mesmo tempo que escrevem] $b^2 + 2 \times b \times a + a^2$.

Na segunda parte da tarefa, o grupo G4 apresentou uma solução para o problema que consistia em desenhar um segmento de reta cujo comprimento fosse igual à diferença entre o comprimento do lado do quadrado maior e o comprimento do quadrado mais pequeno (que se encontra no interior). Para este grupo, esse segmento seria, portanto, o lado do quadrado procurado. Contudo, após alguma reflexão, em grupo, sobre o procedimento efetuado, estes alunos estabelecem um novo diálogo com o professor, o que permite verificar a forma como os alunos rejeitam a construção efetuada, anteriormente, como solução do problema. Na folha de papel, os alunos designam, respetivamente, por a e b os lados dos dois quadrados dados.

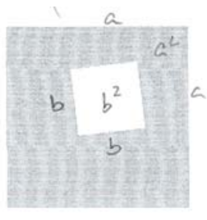


Figura 7.2.3. Designação dos lados dos quadrados dados, segundo o grupo G4.

Com base na figura, este grupo de alunos regista que a área procurada pode ser expressa pela expressão $a^2 - b^2$.

(17) Diana: Dava $a - b$ de lado [referindo-se ao comprimento do lado do quadrado por eles construído]
(18) Professor: Sim.
(19) Diana: Era a deste todo [apontando para o segmento marcado] menos o b deste.
(20) Professor: Sim. A área então é aquilo que está ali, não é? [apontando para as expressões escritas, referindo-se a $(a - b)(a - b)$]
(21) Diana: Então calculámos e vimos que não dava igual, por que $a^2 - b^2$ é diferente de $(a - b)(a - b)$ [expressão essa que as alunas simplificaram igualando a $a^2 - ab - ab + b^2$]

$$\begin{gathered} a^2 - b^2 \\ \neq \\ (a-b)\,(a-b) \\ \parallel \\ a^2 - ab - ab + b^2 \end{gathered}$$

Figura 7.2.4. Simplificação algébrica efetuada pelo grupo G4.

Embora, inicialmente, este grupo de alunos tenha realizado, a construção geométrica é com recurso a um processo algébrico que justifica a impossibilidade de tal construção ser solução do problema. Nesse sentido, apesar da figura tomar um papel relevante, o que realça o caráter visual do argumento, *genérico pictórico*, a perceção que os alunos têm da figura construída, permite-lhes sustentar e ao mesmo tempo estabelecer o mecanismo lógico do discurso e, assim, obter a expressão algébrica que traduz a área da figura: $(a - b)^2$, o que evidencia um argumento situado *entre o genérico e o simbólico*. Contudo, é com recurso à *manipulação* algébrica que os elementos do grupo G4 justificam a impossibilidade da construção. Este tipo de justificação evidencia um argumento que se situa *entre* o *simbólico e o formal*. A expressão algébrica $(a - b)^2$ que representa a área da figura construída, corresponde a $a^2 - ab - ab + b^2$, sendo, portanto, diferente do pretendido: $a^2 - b^2$; que lhes permite refutar a construção geométrica.

Ainda nesta na segunda parte da tarefa, durante a descoberta da solução do problema, é possível verificar que no fundamento à garantia apresentada pelo Nélson do grupo G2, a justificação exposta pelo grupo G3 evidencia um argumento que se situa também *entre* o *simbólico e o formal*. Estes alunos justificam essa afirmação, verificando a validade da igualdade $(b^2 - a^2) + a^2 = b^2$.

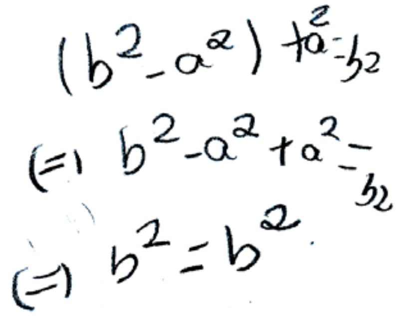


Figura 7.2.5. Verificação efetuada pelo grupo G3.

7.2.2. Argumentação: análise local

Tendo em consideração a resolução apresentada pelos alunos, durante a realização da tarefa, é possível proceder a uma reconstrução funcional das diferentes afirmações produzidas pelos alunos. Da análise dos diferentes discursos argumentativos observam-se não só formas simples de argumentação, em que os elementos funcionais identificados correspondem aos elementos constituintes do chamado "coração da argumentação", mas também formas mais complexas de argumentação, em que os elementos funcionais presentes contemplam, nomeadamente refutações.

Na resolução da parte I da tarefa, é possível identificar formas simples e complexas de argumentação. Como será exemplificado, as formas mais complexas surgem como resultado de refutações a uma conclusão.

Forma simples

Observe-se o excerto do diálogo entre o professor e o grupo G4, em que este grupo apresenta uma proposta de resolução para o problema da parte I da tarefa:

(1) Carla: [com o compasso] E posemos o bico aqui [num dos vértices] no quadrado e medimos até acabar o lado do quadrado.
(2) Professor: Sim.
(3) Carla: E marcamos numa folha [referindo-se ao comprimento medido]

(4) Professor: Sim.
(5) Carla: E com a régua traçamos uma reta. Depois fizemos igual [o mesmo procedimento que o realizado anteriormente] no outro quadrado e traçamos… e juntamos as duas retas.
(6) Professo: Humm…
(7) Carla: E já está traçado um lado do quadrado [pretendido], agora temos de traçar mais os outros 3 para ficar um quadrado cuja área…
(8) Professor: É a soma dessas áreas? [referindo-se ao quadrado que pretendem construir]
(9) Carla: Sim, a área é igual à soma das áreas dos quadrados [dados].
(10) Professor: Então construam [esse quadrado] e vejam se assim é.
(11) Carla: Tá stôr!

Para este grupo, o lado do quadrado procurado é igual à soma de cada um dos lados dos quadrados dados (§7). O grupo explica como procede à construção do quadrado, (§1) e (§5), referindo que este satisfaz o pedido: a área é igual à soma dos quadrados obtidos (§9). Contudo, este grupo não apresenta qualquer garantia que permita justificar esta sua afirmação. Surge então uma questão: o processo apresentado permite, de facto, construir o quadrado pretendido?

De acordo com o modelo de Toulmin, o argumento presente no raciocínio apresentado pelo grupo G4, pode ser esquematizados da seguinte forma:

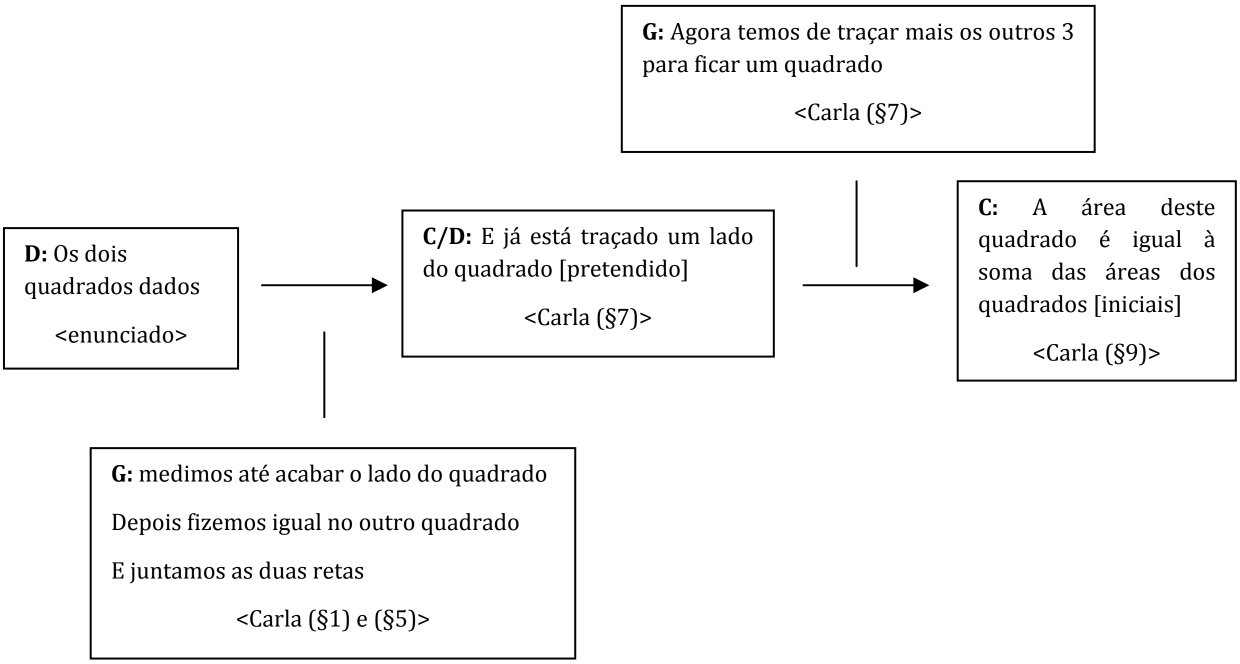


Figura 7.2.6. Representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio do grupo G3 (CA-1).

Ainda na parte I da tarefa é possível verificar o modo como os alunos resolvem o problema em causa. O grupo G1 apresenta um esboço que considera a solução do problema. Observe-se o diálogo entre os alunos do grupo e professor:

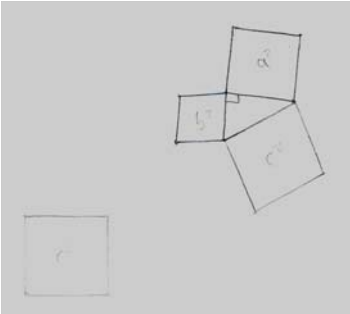


Figura 7.2.7. Esboço realizado pelo grupo G1.

(1) Professor: Expliquem lá como apareceu isto aqui. [referindo-se à figura desenhada pelos alunos no papel]
(2) Miguel: Isto? [apontando para a figura]
(3) Professor: Sim.
(4) Pedro: Foi o que nós demos.
(5) Miguel: Quando nós demos o teorema de Pitágoras, este quadrado mais este quadrado [apontando para os quadrados mais pequenos] era igual a este quadrado [quadrado construído sobre a hipotenusa].
(6) Professor: E isso ajuda em alguma coisa que nós queremos fazer?
(7) Pedro: Eu acho que sim!
(8) Professor: O que é que vocês querem?
[...] O professor é interrompido por alunos de outro grupo. Retomando o diálogo:
(9) Professor: Diz!
(10) Miguel: Isto é a área deste [quadrado construído sobre a hipotenusa] é igual à soma das áreas destes quadrados [apontando para os quadrados inicialmente dados].
(11) Professor: É o que é pedido?
(12) Miguel: É!
(13) Professor: Então o que é preciso fazer?
(14) Pedro: O teorema de Pitágoras.
(15) Professor: Sim, mas está aqui o esboço, o Miguel fez o esboço, então como é que vocês vão resolver o problema?
Momento de silêncio
(16) Rui: Vamos somar estes dois [quadrados] que tem de dar este [quadrado maior].
(17) Professor: Pronto e isso dá porquê?
(18) Rui: Por causa do teorema de Pitágoras
(19) Professor: Então têm de construir. Vamos lá fazer a construção com régua e compasso.

Após os alunos terem efetuado a construção da figura com régua e compasso, o professor interroga os alunos sobre a construção realizada:

(20) Professor: Isto aqui é um triângulo, o que é tem de ser? É preciso que ele seja? O teorema de Pitágoras é válido em que triângulos?

(21) Nuno: Retângulos.
(22) Professor: E este triângulo é retângulo?
(23) Nuno: Aqui! [aponta para o ângulo formado pelos lados dos quadrados inicialmente dados]
(24) Professor: Então expliquem qual foi a vossa ideia? Vocês viram que o processo anterior não funcionava e...
(25) Nuno: A partir deste triângulo fizemos este quadrado [apontando para o quadrado construído sobre um dos catetos do triângulo de comprimento igual ao lado de um dos quadrados inicialmente dados], este [apontando para o quadrado construído sobre o outro cateto de comprimento igual ao lado do outro quadrado inicialmente dado] e com a medida deste [apontando para a hipotenusa] fizemos este quadrado.
(26) Professor: E como é que obtiveram a medida destes?
Momento de silêncio
(27) Nuno: Hum...
(28) Rui: Pegámos no compasso já que não podia ser com a régua e medimos.

O diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G1 pode ser dividido em duas partes. Na primeira parte, os alunos apresentam um esboço geométrico da solução do problema e justificam o procedimento realizado, referindo que existe uma relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo [retângulo] (§5) – a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos – relação geométrica estudada pelos alunos, anteriormente, durante a abordagem do teorema de Pitágoras. Para os alunos, basta, assim, construir um triângulo [retângulo] cujas medidas dos catetos sejam o comprimento dos lados dos quadrados inicialmente dados, uma vez que pelo teorema de Pitágoras o quadrado construído sobre a hipotenusa satisfaz o pedido (§14) e (§18). Contudo, embora os alunos assinalem, na figura, que o triângulo é retângulo, na primeira parte do diálogo não explicitam esse facto. No entanto, na segunda parte do diálogo, os alunos apresentam já a construção efetuada com régua e compasso. Quando confrontados com a questão, colocada pelo professor (§20), do tipo de triângulo em causa, respondem prontamente que este tem de ser retângulo (§21). O diálogo termina com a explicação, por parte dos alunos, de todo o procedimento efetuado, em que os alunos observam a necessidade de recorrer ao compasso para proceder à medição dos comprimentos (§28).

De acordo com o modelo de Toulmin, o argumento presente no raciocínio efetuado pelo grupo G1, pode ser esquematizado da seguinte forma:

D: Os dois quadrados dados

<enunciado>

C: triângulo retângulo de catetos igual, respetivamente, aos comprimentos dos lados dos quadrados dados, em que o quadrado sobre a hipotenusa é a solução pretendida

<esboço da figura>, <Nuno (§25)>

G: Quando nós demos o teorema de Pitágoras, este quadrado mais este quadrado [apontando para os quadrados mais pequenos] era igual a este quadrado [quadrado construído sobre a hipotenusa].

<Miguel (§1) e (§5)>

F: [o teorema de Pitágoras é válido em triângulos] retângulos.

<Nuno (§21)>

Figura 7.2.8. Representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio do grupo G1 (CA-5).

Forma complexa

Refutação de uma conclusão

A proposta sugerida pelo grupo G4 levou a que os outros grupos analisassem este processo apresentado, surgindo, então, três refutações à construção efetuada pelo grupo G4.

O grupo G2 não concorda com a construção sugerida pelo grupo G4, uma vez que consideram que a área do quadrado construído é maior que a soma das áreas dos dois quadrados inicialmente dados, contudo, este grupo não apresenta nenhuma garantia ou fundamento que permita sustentar esta afirmação.

(1) Daniel: Para nós sabermos a área de um quadrado temos de fazer lado vezes o lado.
(2) Professor: Sim.
(3) Daniel: A Carla disse que era pegar na medida deste [apontando para o lado do quadrado maior] e deste [apontando para o lado do quadrado menor] e sabíamos um lado, depois construíamos o resto do quadrado. Mas para nós termos a área destes dois quadrados era calcular o lado vezes o lado deste [apontando para o quadrado maior] mais lado vezes lado deste [apontando para o quadrado menor] e depois era que somávamos a área dos dois, pois como a Carla disse não ia dar a área.

(4) Professor: Ia dar o quê, maior ou menor?
(5) Emanuel: Maior.
(6) Daniel: Ia dar maior!

O grupo G2 revela perceber o que tem de fazer, explicando o procedimento que devia ser realizado (§3). Neste sentido, considera que o procedimento realizado pelo grupo da Carla não permite obter o quadrado desejado, uma vez que a sua área é maior que a soma da área dos quadrados inicialmente dados (§5) e (§6). No entanto, não é apresentada qualquer garantia ou fundamento para esta refutação à conclusão do grupo de trabalho número quatro.

De acordo com o modelo de Toulmin, o argumento presente no raciocínio efetuado pelo grupo G2, pode ser esquematizado da seguinte forma:

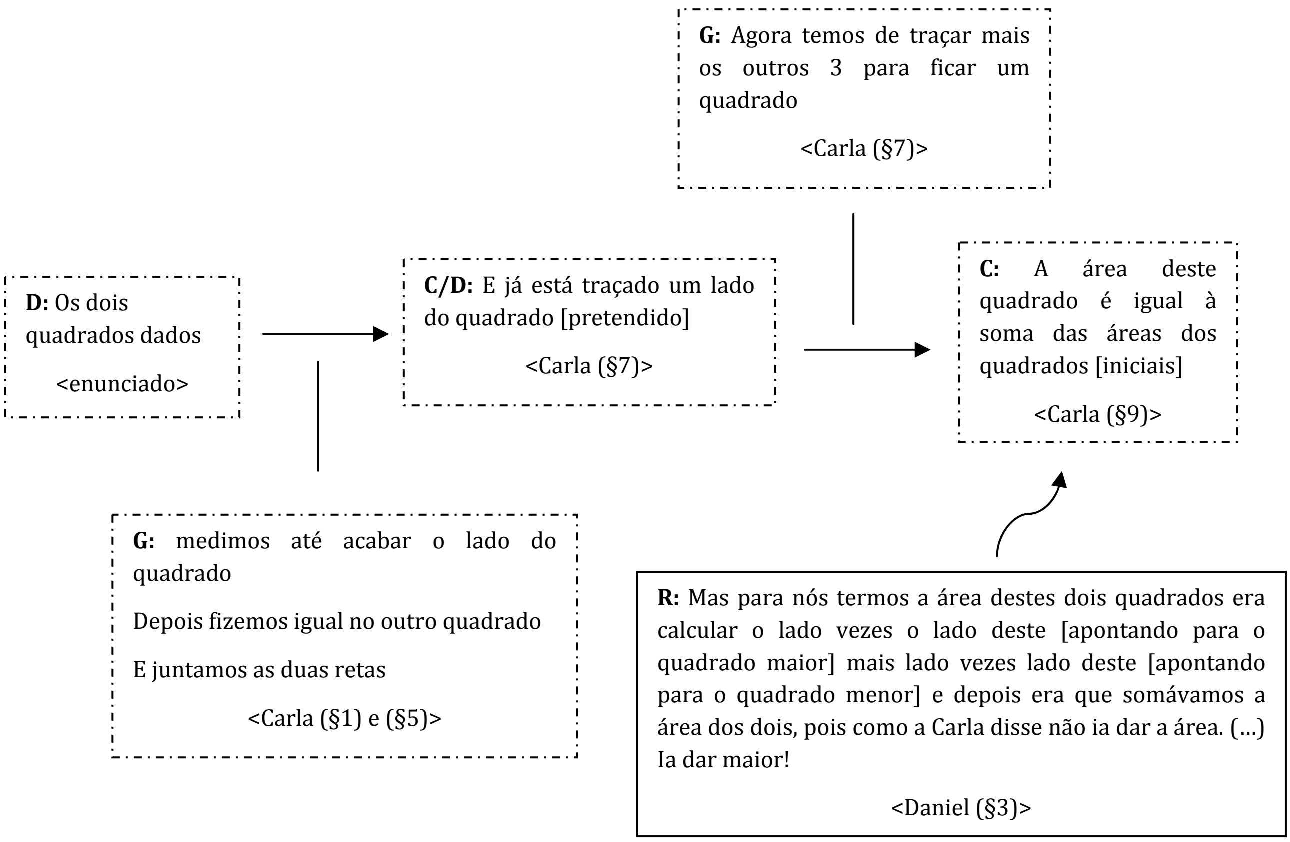


Figura 7.2.9. Representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio do grupo G2 (CA-2).

É de notar que a existência de linhas não contínuas a limitar determinadas caixas, está relacionada com o facto de essas afirmações já terem sido introduzidas anteriormente, encontrando-se, portanto, implícitas neste momento.

Contrariamente ao grupo anterior, os grupos G1 e G3 procedem à construção do quadrado, de acordo com o processo sugerido pelo grupo G4.

Embora proceda à construção do quadrado, posteriormente, o grupo G1, procede à divisão do quadrado em quatro quadriláteros.

[…]
(2) Nuno: Fizemos com as medidas que já disseram. E a figura não dá porque aparecem dois retângulos.
[…]
(4) Rui: Nós queríamos a área destes dois quadrados [referindo-se aos quadrado inicialmente dados], só que aparece a área destes dois retângulos
(5) Nuno: Por esta forma não dá!

Embora não seja explícito no diálogo, os alunos recorrem à divisão do quadrado (Figura 7.2.1.) de acordo com o processo descrito por Euclides em *Elementos* II, 4, tarefa essa resolvida em aulas anteriores. Para este grupo de alunos, o quadrado construído não satisfaz o pedido, uma vez que na decomposição da figura em quadriláteros se obtêm dois quadrados (de área igual à dos quadrados dados) e dois retângulos (§2) e (§4). É de notar que estes alunos, de uma forma implícita, reconhecem que os dois quadrados obtidos, através da decomposição da figura em quatro quadriláteros, têm a mesma área que os quadrados inicialmente dados.

De acordo com o modelo de Toulmin, o argumento presente no raciocínio apresentado pelo grupo G1, pode ser esquematizado da seguinte forma:

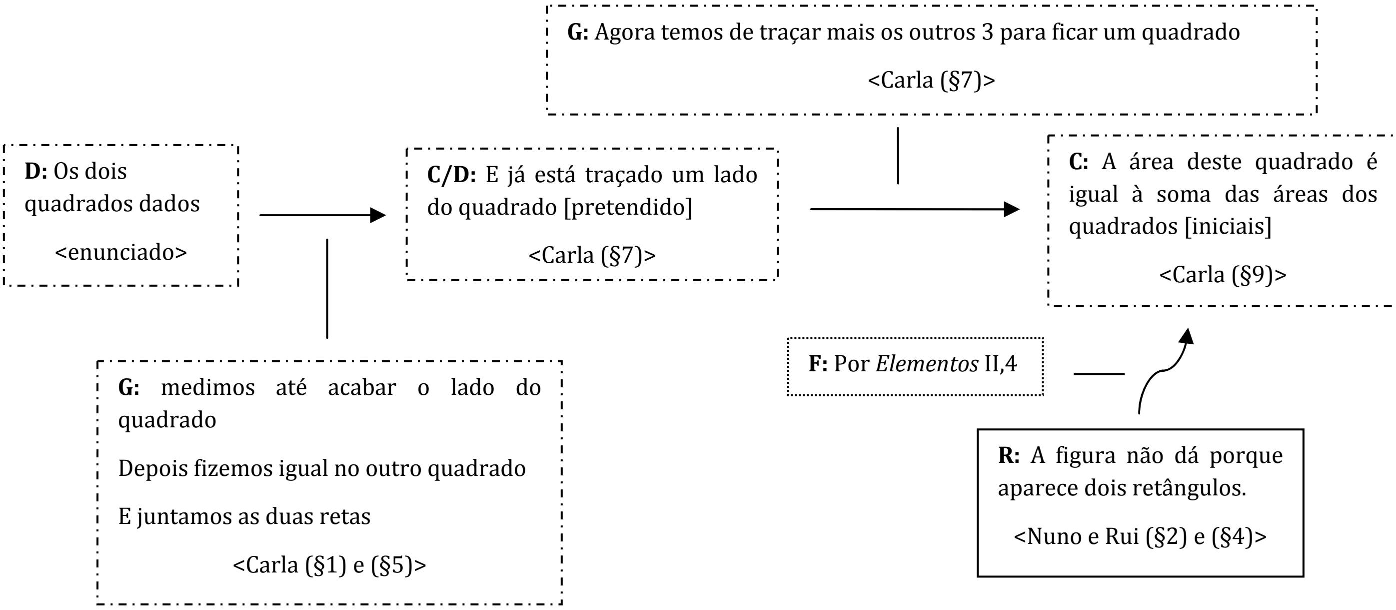


Figura 7.2.10. Representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio do grupo G1 (CA-3).

É de notar que a existência de linhas não contínuas a limitar determinadas caixas, está relacionada com o facto de essas afirmações já terem sido introduzidas anteriormente, encontrando-se, portanto, implícitas neste momento. A linha a tracejada presente, no fundamento à refutação, deve-se ao facto dos alunos não terem expresso essa afirmação de forma implícita.

Tal como o grupo G1, o grupo G3 também construiu o quadrado através do processo sugerido pelo grupo G4. O professor questiona este grupo se de facto esse quadrado construído satisfaz o pedido (§1) e (§2). Inicialmente os elementos do grupo consideram que a área do quadrado construído é igual à soma das áreas dos dois quadrados inicialmente dados (§3). No entanto, o professor pede para justificarem essa afirmação, pedindo ao grupo que o convença (§4). Uma aluna do grupo aceita o desafio e o diálogo prossegue:

(1) Professor: Acham que este quadrado que vocês construíram [apontando para o quadrado construído pelos alunos] é a soma destas duas áreas? [apontando para os quadrados dados].
Uma vez que os alunos não respondem, o professor volta a perguntar:
(2) Professor: A área deste [apontando para o quadrado construído] é a soma destes dois [apontando para os quadrados inicialmente dados]?
(3) Paula: Eu acho que sim!
(4) Professor: Então como é que me podes justificar que sim?... Como é que tu me convences Paula?
(5) Paula: A área destes dois [quadrados] é a área destes dois lados vezes...
(6) Professor: A área do quadrado é lado vezes lado.
(7) Paula: Então, vai ser este [apontando para o lado quadrado maior] mais este [apontando para o quadrado de lado menor] vezes...
(8) Professor: Põe letras, talvez seja melhor!
A Paula designa por a o lado do quadrado menor e por b o lado quadrado maior, escrevendo nos lados dos quadrados inicialmente dados.
(9) Professor: Então diz-me qual é área do lado deste [apontando para o quadrado maior] se faz favor?
(10) Paula: É b vezes b.
(11) Professor: Que dá quanto?
(12) Paula: b^2.
(13) Professor. Então escreve aí dentro [apontando para o quadrado maior]. Ok! E desse?
(14) Paula: É a^2 [a Paula escreve esta expressão dentro do quadrado menor].

Figura 7.2.11. Designação escolhida para os lados dos quadrados dados, segundo o grupo G3.

(15) Professor: E deste então? [apontando para o quadrado construído]
(16) Paula: Deste vai ser …
(17) Cláudio: [interrompendo] *ab* ao quadrado.
Enquanto isso a Paula coloca as letras correspondentes nos lados do quadrado grande.
(18) Paula: A área deste vai ser *ba*... [e escreve na folha]
(19) Professor: *ba* ou $b + a$?
(20) Paula: $b + a$ ao quadrado.
(21) Professor: Como é que escreves isso?
A Paula escreve $(b + a)^2$
(22) Professor: E tu achas que isto [apontando para a expressão escrita] é a área deste mais este? [apontando para os dois quadrados dados]
(23) Paula: Sim.
Momento de silêncio
(24) Professor: Sim ou não? Estão a perceber a pergunta?
(25) Paula: Eu acho que é.
(26) Professor: Ai é? Isto que está aqui não é um caso notável?
(27) Cláudio: Sim!
(28) Professor: E como é que era resolvido o caso notável, lembram-se?
(29) Paula e Cláudio: [ao mesmo tempo que escrevem] $b^2 + 2 \times b \times a + a^2$.
(30) Professor: E acham que isto [apontando para a expressão escrita] é a mesma coisa que este com este [apontando para as expressões escritas no interior de cada um dos quadrados dados].
(31) Paula: Não! [muito prontamente]
(32) Professor: Então achas que pode ser essa construção?
(33) Paula: Não!

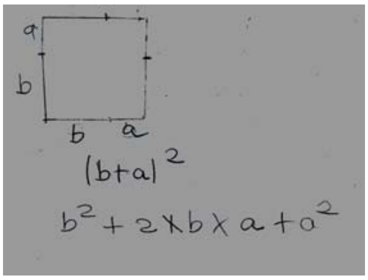


Figura 7.2.12. Figura final apresentada pelo grupo G3.

Embora, inicialmente, este grupo de alunos considere que a construção geométrica efetuada é solução do problema, aceita o desafio do professor em procurar uma justificação que valide a construção realizada, ou seja, aceita procurar uma garantia que legitime a construção executada como solução do problema. Contudo, em vez de encontrar uma garantia que apoie a construção efetuada, este grupo encontra uma refutação para a mesma. No entanto, ao contrário do grupo G1, em que a refutação apresentada é de caráter geométrica, a refutação deste grupo é de caráter algébrica.

Sugerida pelo professor a utilização de letras para designar os comprimentos dos lados dos quadrados dados (§8), estes alunos, facilmente, indicam a expressão da área desses mesmos quadrados (§12) e (§14). Os alunos determinam, assim, através de uma expressão algébrica, a expressão do comprimento do lado do quadrado construído e, consequentemente, indicam a expressão da sua área (§20). Para os alunos existem assim duas expressões que permitem traduzir a área dos dois quadrados: $a^2 + b^2$ (o que consideram à partida como válido) e $(b + a)^2$ (a conclusão que chegaram através do diálogo com o professor). O professor questiona-os se de facto estas duas expressões são iguais (§22). Inicialmente os alunos consideram essa igualdade verdadeira (§23), contudo, após o professor chamar atenção para o facto de $(b + a)^2$ ser um caso notável (§26), os alunos recordam o conceito e simplificam a expressão obtendo $b^2 + 2 \times b \times a + a^2$ (§29), o que os permite concluir que a área do quadrado construído não é igual à soma das áreas dos quadrados inicialmente dados (§31) e (§33).

De acordo com o modelo de Toulmin, o argumento presente no raciocínio efetuado pelo grupo G3, pode ser esquematizados da seguinte forma:

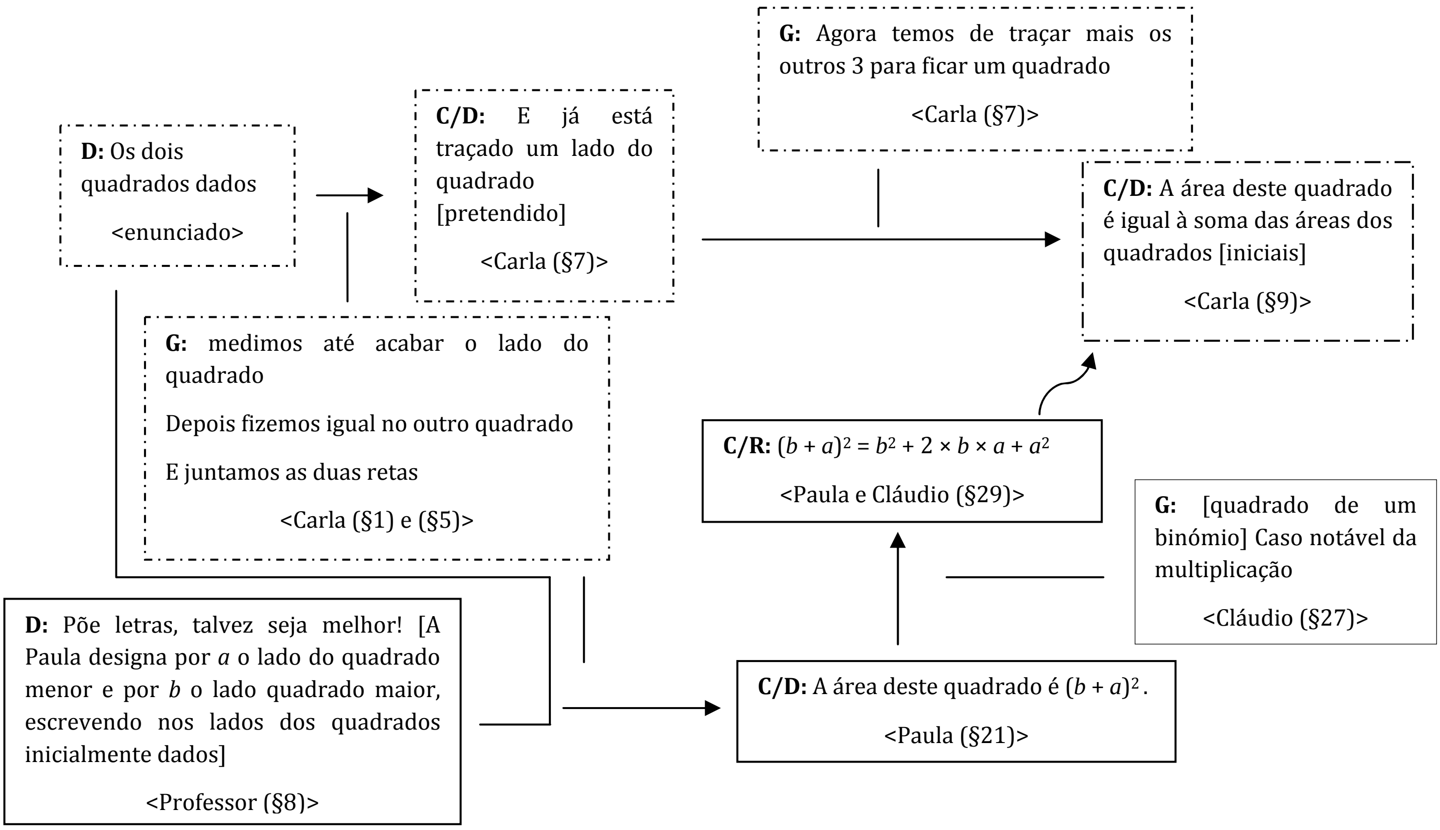


Figura 7.2.13. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio do grupo G3 (CA-4).

É de notar que a existência de linhas não contínuas a limitar determinadas caixas, está relacionada com o facto de essas afirmações já terem sido introduzidas anteriormente, encontrando-se, portanto, implícitas neste momento.

Na resolução da parte II da tarefa, também é possível identificar formas simples e complexas de argumentação. Tal como anteriormente, a forma mais complexa surge como resultado de uma refutação a uma conclusão.

Forma simples

O grupo G4 apresentou uma proposta de resolução da parte II da tarefa. Este grupo de alunos, na sua folha de trabalho, construiu um quadrado que na sua opinião satisfazia o pretendido. O professor interroga, então, o grupo sobre o procedimento utilizado para construir o quadrado apresentado. Observe-se o diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G4:

(1) Sara: Eu medi daqui até aqui [comprimento do quadrado maior] com o compasso [executando o procedimento].
(2) Professor: Sim.
(3) Sara: E fiz a mesma coisa daqui a aqui [aluna marca um segmento de reta com o comprimento do lado do quadrado maior].
(4) Professor: Hum.
(5) Sara: Depois fui ao quadrado mais pequeno e fiz o mesmo e depois cheguei aqui [ao segmento desenhado] e tirei. Este é um lado do quadrado.
(6) Professor: Hum.
(7) Sara: E uni para fazer o quadrado.
(8) Professor: E achas que este quadrado tem a área daquela parte sombreada?
(9) Sara: Sim, acho que sim.
(10) Professor: Agora tens de tentar mostrar que isso é verdade.

Para este grupo de alunos, a solução do problema consistie em desenhar um segmento de reta cujo comprimento seja igual à diferença entre o comprimento do lado do quadrado maior e o comprimento do lado do quadrado mais pequeno (que se encontra no interior) (§1), (§3) e (§5). Esse segmento é o lado do quadrado procurado, bastando, portanto, fazer a respetiva construção (§7). Uma vez que construíram o quadrado e consideram que o mesmo satisfaz o pedido, o professor pede aos alunos que justifiquem o seu procedimento (§10).

De acordo com o modelo de Toulmin, o argumento presente no raciocínio efetuado pelo grupo G4, pode ser esquematizado da seguinte forma:

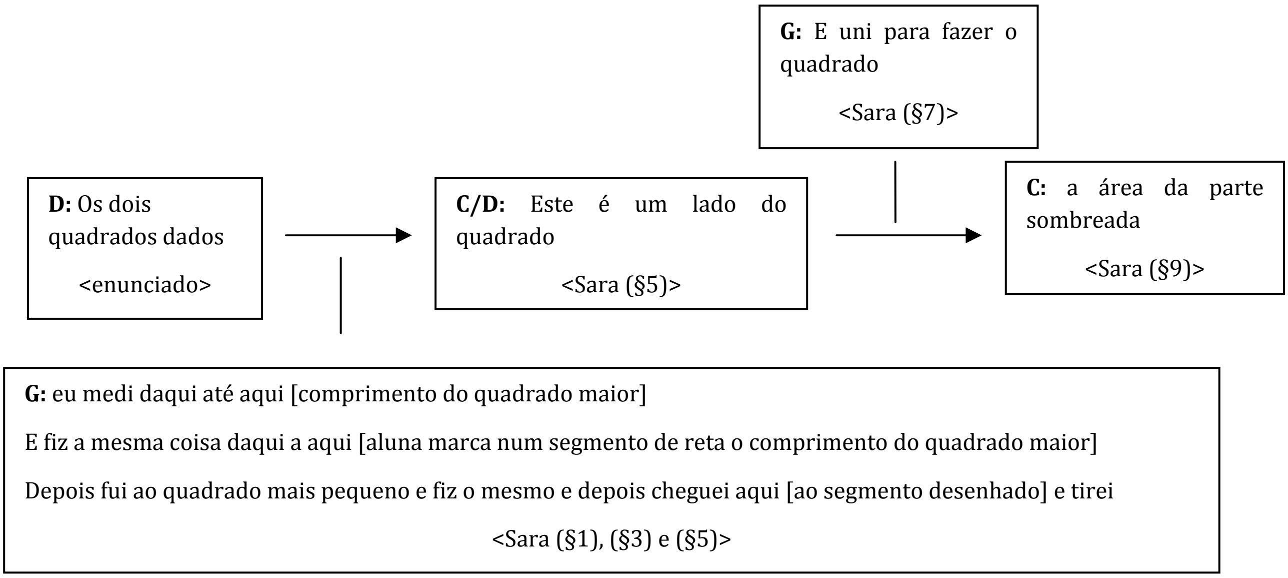


Figura 7.2.14. *Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio do grupo G4 (CA'-1).*

A existência da linha a tracejada, deve-se ao facto dos alunos não terem expresso essa afirmação de forma implícita.

Forma complexa

Refutação de uma conclusão

Após algum tempo de discussão entre si, este grupo de alunos estabelece um novo diálogo com o professor. O diálogo seguinte permite verificar a forma como os alunos rejeitam a construção efetuada como solução do problema.

(11) Diana: Nós fizemos… Na própria figura fizemos… se este lado medir, se este lado maior medir a [designando por a a medida do lado do quadrado maior] e este também [referindo-se ao outro lado do mesmo quadrado] dá a^2 [referindo-se à área do quadrado maior]
(12) Professor: Ou seja, isso é o quê?
(13) Diana: A área do [quadrado] grande. Se o pequeno medir b [referindo-se ao comprimento do lado mais pequeno] dá b^2.
(14) Professor: Sim.
(15) Diana: Só que depois na figura que nós… que nós construímos... [referindo-se ao quadrado construído pelo grupo]

(16) Professor: Sim.
(17) Diana: Dava $a - b$ de lado [referindo-se ao comprimento do lado]
(18) Professor: Sim.
(19) Diana: Era a deste todo [apontando para o segmento marcado] menos o b deste.
(20) Professor: Sim. A área então é aquilo que está ali, não é? [apontando para as expressões escritas, referindo-se a $(a - b)(a - b)$]
(21) Diana: Então calculámos e vimos que não dava igual, por que $a^2 - b^2$ é diferente de $(a - b)(a - b)$ [expressão essa que as alunas simplificaram igualando a $a^2 - ab - ab + b^2$]

Através da análise do diálogo estabelecido entre professor e este grupo de alunos, verifica-se que estes rejeitam a construção anteriormente, por si, realizada. É de observar que o raciocínio apresentado, para justificar esta sua decisão, é de cariz algébrico. Designando por a e b, respetivamente, os comprimentos dos lados do quadrado maior e menor, os alunos indicam que a área de cada um dos quadrados é, respetivamente, a^2 e b^2, (§11) e (§13). Logo, a área da parte sombreada seria $a^2 - b^2$. Contudo, este grupo de alunos não o afirma nesta fase do diálogo, embora o explicite mais tarde (§21). Fazendo referência ao quadrado construído, observa que o comprimento do lado desse quadrado é $a - b$ (§17) e, portanto, a área desse quadrado seria $(a - b)(a - b)$ que é igual a $a^2 - ab - ab + b^2$, diferente do pedido $a^2 - b^2$.

De acordo com o modelo de Toulmin, o argumento presente no raciocínio efetuado pelo grupo G4, pode ser esquematizado da seguinte forma:

G: eu medi daqui até aqui [comprimento do quadrado maior]

E fiz a mesma coisa daqui a aqui [aluna marca num segmento de reta o comprimento do quadrado maior]

Depois fui ao quadrado mais pequeno e fiz o mesmo e depois cheguei aqui [ao segmento desenhado] e tirei

<Sara (§1), (§3) e (§5)>

G: E uni para fazer o quadrado

<Sara (§7)>

D: Os dois quadrados dados

<enunciado>

C/D: Este é um lado do quadrado

<Sara (§5)>]

C: [o quadrado construído é] a área da parte sombreada

<Sara (§9)>

D: se este lado maior medir a [designando por a a medida do lado do quadrado maior]

Se o pequeno medir b [referindo-se ao comprimento do lado mais pequeno]

<Diana (§11) e (§13)>

C/D: a figura que nós, que nós construímos... [referindo-se ao quadrado construído pelo grupo]

Dava $a - b$ de lado [referindo-se ao comprimento do lado]

<Diana (§15) e (§17)>

C/R: [área do quadrado construído] $(a - b)(a - b)$ [expressão essa que as alunas simplificaram igualando a $a^2 - ab - ab + b^2$] que é diferente de $a^2 - b^2$

<Diana (§21)>

Figura 7.2.15. *Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio do grupo G4 (CA'-2).*

É de notar que a existência de linhas não contínuas a limitar determinadas caixas, está relacionada com o facto de essas afirmações já terem sido introduzidas anteriormente, encontrando-se, portanto, implícitas neste momento.

Ainda nesta segunda parte, foi possível verificar a forma como um grupo G2 resolveu o problema. Este grupo, na folha de trabalho, tinha desenhado um triângulo retângulo.

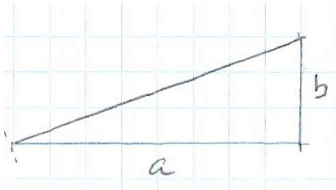


Figura 7.2.16. Esboço realizado pelo grupo G2.

É então estabelecido um diálogo entre o professor e este grupo de alunos:

(1) Professor: Como é que construíste este triângulo?
(2) Emanuel: O *a* [apontando para o cateto de lado *a*] é esta, o comprimento do quadrado maior, o *b* é o quadrado menor.
(3) Professor: Hum... O que é que isto vai implicar?
(4) Emanuel: Para descobrir a área…

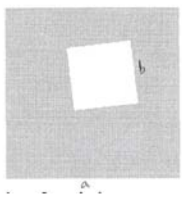


Figura 7.2.17. Designação escolhida para os lados dos quadrados dados, segundo o grupo G2.

Através deste pequeno excerto, verifica-se que o grupo G2 pretende recorrer ao processo utilizado na primeira parte da tarefa (§2), ou seja, constrói um triângulo retângulo de catetos *a* e *b*, respetivamente, os comprimentos dos lados dos quadrados dados.

Passado algum tempo, chamado por um elemento deste grupo, o professor observa a construção realizada por estes alunos. Sobre os lados do triângulo retângulo estão construídos três quadrados.

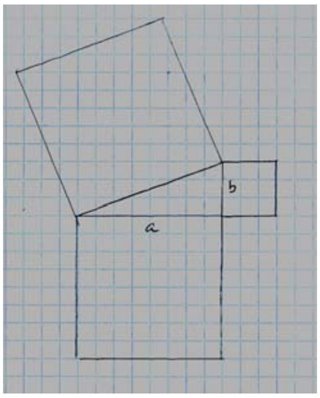


Figura 7.2.18. Construção realizada pelo grupo G2.

Estabelece-se, assim, o seguinte diálogo entre o professor e o grupo G2:

(5) Professor: Diz Nélson, que eu não percebi.
(6) Emanuel: Nem eu!
(7) Nélson: Este [apontando para o quadrado de comprimento *a*] vem para aqui [apontando para o quadrado construído sobre a hipotenusa].
(8) Professor: Sim.
(9) Nelson: Depois, a este [referindo-se ao quadrado de lado *a* que colocaria sobre a hipotenusa] tirando este [o quadrado de comprimento *b*] vai dar a área da coisa.
(10) Professor: Que coisa?
(11) Nélson: Deste sombreado [apontando para a parte sombreada da figura]
(12) Professor: Perceberam o que Nélson está a dizer, ou não?
(13) Emanuel: Este [apontando para o cateto de comprimento *a*] é a hipotenusa. Em vez de ser o cateto é a hipotenusa.
(14) Professor: Então façam lá a ver se funciona.
(15) Daniel: Pois, porque assim este [apontando para o quadrado construído sobre um cateto] com este [apontando para o quadrado sobre o outro cateto] vai dar a área toda.
(16) Professor: O que vocês estavam a fazer funcionava ou não?
(17) Andreia: Não!
(18) Professor: Porque estavam a quê?
(19) Daniel: Estávamos a fazer a área dos dois.
(20) Emanuel: A soma…
(21) Professor: A soma das áreas dos dois [quadrados].

Nesta fase do diálogo, observa-se que o Nélson considera que o processo que foi efetuado não permite resolver o problema (§7) e (§9). Para este aluno, o triângulo retângulo a construir deveria ter a hipotenusa de medida igual ao comprimento do lado do maior quadrado dado e um dos catetos de medida igual ao comprimento do lado do menor quadrado dado. Ao fazer esta troca, o aluno considera que o quadrado procurado é o quadrado construído sobre o cateto deste triângulo retângulo. Contudo, este aluno não apresenta qualquer fundamento que permita apoiar a sua ideia. Embora o Daniel não apresente um fundamento a esta conclusão, apresenta uma refutação à construção inicialmente efetuada, ao observar que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa (§15) e, portanto, se aplicassem este processo estavam a fazer a soma das áreas dos dois quadrados dados (§19), o que não satisfazia o pedido (§17).

No entanto, o fundamento para a garantia dada pelo Nélson será dado pelo grupo G3 durante a discussão em grande grupo. Este grupo de alunos, no entanto, designa por a o comprimento do lado do quadrado menor e por b o comprimento do quadrado maior, portanto, sendo a e b, respetivamente, os comprimentos de um cateto e da hipotenusa de um triângulo retângulo, o quadrado formado sobre o outro cateto é o quadrado procurado, uma vez que a área é $b^2 - a^2$, a área da parte sombreada. Estes alunos justificam essa afirmação, verificando que a relação de igualdade $(b^2 - a^2) + a^2 = b^2$ é verdadeira:

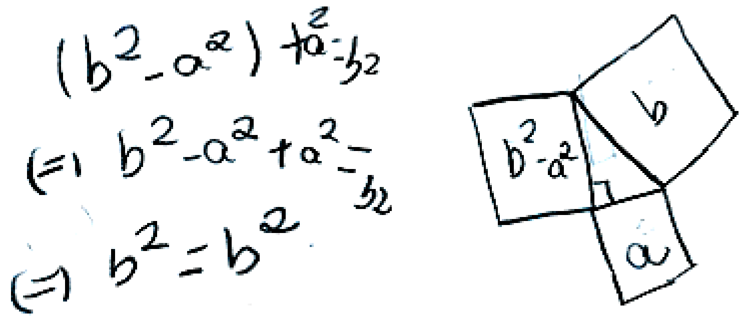


Figura 7.2.19. Verificação algébrica e geométrica efetuada pelo grupo G3.

De acordo com o modelo de Toulmin, o argumento presente no raciocínio efetuado pelo grupo G2, pode ser esquematizado da seguinte forma:

R: assim este [apontando para o quadrado construído sobre um cateto] com este [apontando para o quadrado sobre o outro cateto] vai dar a área toda. [...] Estávamos a fazer a área dos dois.

<Daniel (§15) e (§19)>

C: triângulo retângulo de catetos igual, respetivamente, aos comprimentos dos lados dos quadrados dados, em que o quadrado sobre a hipotenusa é a solução pretendida

<esboço da figura>

D: Os dois quadrados dados

<enunciado>

C: triângulo retângulo em que este [apontando para o quadrado de comprimento *a*] vem para aqui [apontando para o quadrado construído sobre a hipotenusa], um dos catetos é *b* e o outro cateto é o comprimento do quadrado procurado

<Nélson (§7)>

F: uma vez que é válida a relação de igualdade $(a^2 - b^2) + b^2 = a^2$

<Grupo G3>

G: Depois, a este [referindo-se ao quadrado de lado *a* que colocaria sobre a hipotenusa] tirando este [o quadrado de comprimento *b*] vai dar a área da coisa.
[...] Deste sombreado [apontando para a parte sombreada da figura]

<Nélson (§9) e (§11)>

Figura 7.2.20. *Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio do grupo G2 (CA'-3).*

É de notar que a linha a tracejada que limita uma das caixas deste esquema está relacionada com o facto de esta afirmação ter sido introduzida posteriormente na discussão em grande grupo.

7.2.3. Argumentação: análise global

Construções geométricas – parte I

Tendo em conta o diálogo estabelecido entre o professor e os diferentes grupos durante a realização da parte I da tarefa, é possível representar globalmente os diversos argumentos presentes nessa interação discursiva e, posteriormente, proceder à análise global da sua estrutura. Assim, a representação esquemática global do discurso argumentativo presente na resolução da parte I da tarefa pode ser traduzido da forma seguinte:

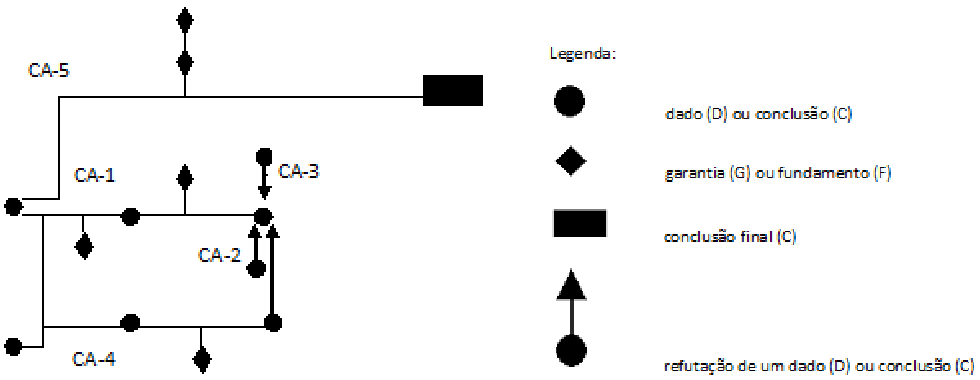


Figura 7.2.21. *Representação esquemática global do discurso argumentativo presente na realização da parte I da tarefa.*

Através de uma análise global a esta argumentação, pode-se observar que na sua estrutura existem argumentos onde uma afirmação (conclusão) é deduzida a partir de uma outra afirmação (dado) através de conceitos matemáticos e fundamentos lógicos (garantias e fundamentos). Por exemplo, os argumentos presentes nas correntes de argumentação CA-1, CA-4 e CA-5. É ainda de notar que na estrutura desta argumentação, por vezes, uma afirmação estabelecida como conclusão, num próximo argumento, assume a função de dado. Por exemplo, esta situação pode ser observada nas correntes de argumentação CA-1 e CA-4. Observa-se ainda a presença de várias refutações (CA-2, CA-3 e CA-4) e é possível encontrar passos de argumentação que têm falta de garantias (CA-3). Nesse sentido, esta estrutura de argumentação evidencia a maioria das características que caracterizam a *estrutura-fonte*. De facto, as refutações presentes nesta argumentação revelam que a conjetura formulada por um grupo de alunos foi examinada por toda a turma. Embora a conjetura apresentada fosse falsa e, consequentemente, refutada através de uma diversidade de justificações, que foram apreciadas e encorajadas pelo professor, estas tornaram-se frutuosas na procura da solução do problema.

Construções geométricas – parte II

Tendo em conta o diálogo estabelecido entre o professor e os diferentes grupos durante a realização da parte II da tarefa, também é possível representar globalmente os diversos argumentos presentes nesse discurso argumentativo e, posteriormente, proceder à análise global da sua estrutura. Assim, a representação esquemática global do discurso argumentativo na resolução da parte II da tarefa pode ser traduzido da forma seguinte:

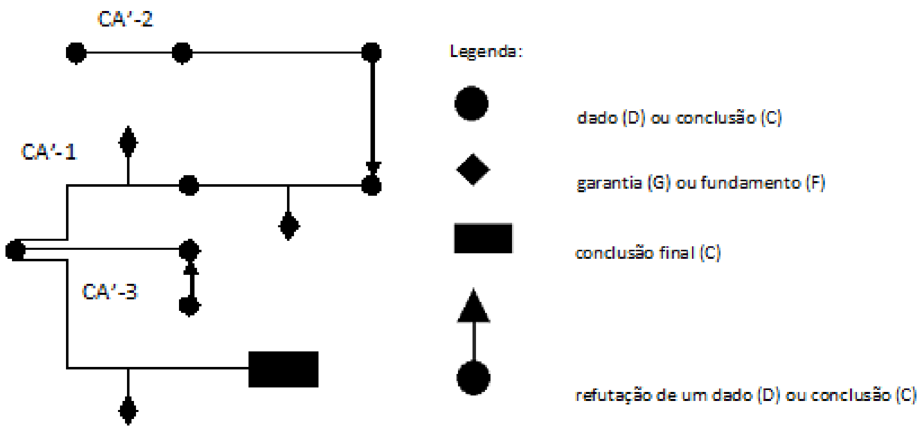


Figura 7.2.22. *Representação esquemática global do discurso argumentativo presente na realização da parte II da tarefa.*

Através de uma análise global a esta argumentação pode-se observar que na sua estrutura existem argumentos onde uma afirmação (conclusão) é deduzida a partir de uma outra afirmação (dado) através de fundamentos geométricos e lógicos (garantias e fundamentos). Por exemplo, os argumentos presentes nas correntes de argumentação CA'-1 e CA'-3. É ainda de notar que na estrutura desta argumentação, por vezes, uma afirmação estabelecida como conclusão, num próximo argumento, assume a função de dado. Por exemplo, esta situação pode ser observada nas correntes de argumentação CA'-1 e CA'-2. Observa-se ainda a presença de refutações (CA'-2 e CA'-3) e é possível encontrar passos de argumentação que têm falta de garantias (CA'-2). Nesse sentido, esta estrutura de argumentação evidencia a maioria das características que caracterizam a *estrutura-fonte*. Mais uma vez, as refutações presentes nesta argumentação revelam que a conjetura formulada por um grupo de alunos foi examinada por toda a turma. Embora a conjetura apresentada fosse falsa e, consequentemente, refutada através de uma diversidade de justificações, que foram apreciadas e encorajadas pelo professor, estas tornaram-se frutuosas na procura da solução do problema.

7.2.4. Dificuldades manifestadas pelos alunos

Compreensão matemática

Ao nível da interpretação geométrica e de conceitos

Os alunos manifestaram dificuldades em iniciar o processo de construção geométrico proposto na tarefa. Estas dificuldades não só estiveram associadas à utilização dos instrumentos de desenho (por exemplo, na construção de segmentos perpendiculares a uma reta dada, com recurso ao compasso), mas também ao facto de nas figuras dadas não aparecerem quaisquer indicações de medidas. Estas dificuldades foram não só referidas na avaliação final realizada pelos alunos ao trabalho efetuado, mas também nos diferentes diálogos estabelecidos entre o professor e os alunos. Por exemplo, o grupo G4 refere que:

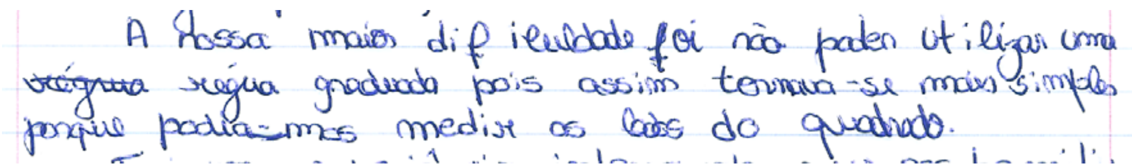

A nossa maior dificuldade foi não poder utilizar uma ~~régua~~ régua graduada pois assim tornava-se mais simples porque podíamos medir os lados do quadrado.

Figura 7.2.23. Excerto da avaliação final escrita realizada pelo grupo G4.

dificuldade essa também expressa pelo grupo G3:

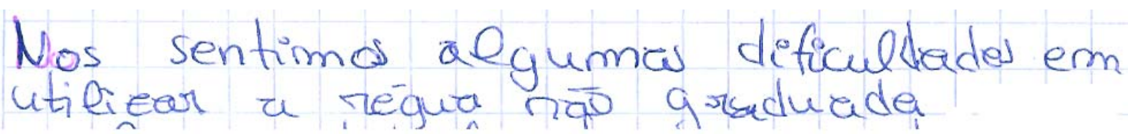

Nos sentimos algumas dificuldades em utilizar a régua não graduada

Figura 7.2.24. Excerto da avaliação final escrita realizada pelo grupo G4.

Através do excerto do diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G2, é possível observar que a não existência de medidas constituiu uma dificuldade:

(1) Daniel: Ó stôr, como é que se faz a área sem se saber as medidas?
[…]
(2) Professor: Ajuda saber as medidas?
(3) Daniel: Se meter assim [abrindo o compasso com a abertura efetuada colocando sobre a régua graduada]
(4) Professor: Não! Não precisas de fazer isso. Coloca lá o compasso sobre um dos lados do quadrado.
O Daniel coloca a ponta seca do compasso sobre um dos vértices do quadrado e abre o compasso com abertura igual ao comprimento de um dos lados.
(5) Professor: Sabes que a medida do lado é essa [referindo-se à abertura do compasso], não sabes?
(6) Daniel: Hum! [acenando com a cabeça] E agora como é que vou calcular isto?!

Para o Daniel, o facto de desconhecer o valor dos comprimentos dos quadrados dados, significava que não poderia determinar o valor da área de cada um dos quadrados dados e, assim, obter a área do quadrado pretendido (§1). O Daniel tenta contornar a questão e uma vez que tem a consciência de que a abertura do compasso permite fixar um comprimento, pretende obter a medida desse valor e, depois, com recurso a uma régua graduada determinar, os respetivos comprimentos (§3). Contudo, este procedimento não é permitido (§4).

Para o grupo G1 uma das dificuldades centrou-se na questão de somar, geometricamente, as áreas dos quadrados dados.

(1) Pedro: É preciso descobrir a área de dois quadrados…
(2) Professor: Sim?
(3) Pedro: Depois…
(4) Nuno [interrompendo o Pedro]: Temos de somar uma com a outra…
(5) Pedro: E construir um quadrado com a mesma área.
(6) Professor: Queres construir um quadrado com a mesma…
(7) Nuno [interrompendo o professor]: Área, destas duas juntas? [apontando para os dois quadrado dados]
(8) Professor: Certo!
Momento de silêncio.
(9) Professor: Então como é que acham que podem fazer?
(10) Nuno: Era melhor só somar retas!

Através da análise deste diálogo, entre o grupo G1 e o professor, verifica-se que os alunos revelam compreender o que fazer: desenhar um quadrado cuja área fosse a soma das áreas dos dois quadrados dados (§1), (§4) e (§5). Contudo, isto significava que era preciso somar áreas, o que consideram algo mais complicado, pois, para eles, seria mais fácil, geometricamente, somar segmentos de reta (§10).

Esta dificuldade também é registada na avaliação final escrita efetuada pelo Emanuel do grupo G2:

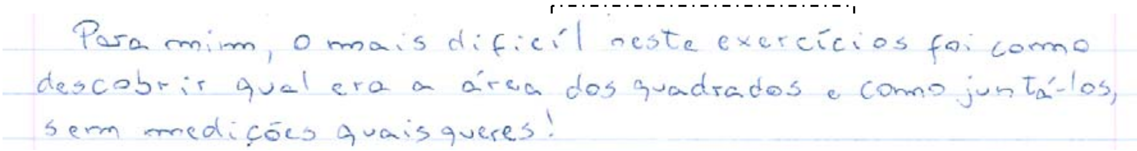

Para mim, o mais difícil neste exercícios foi como descobrir qual era a área dos quadrados e como juntá-los, sem medições quaisqueres!

Figura 7.2.25. Excerto da avaliação final realizada pelo Emanuel, grupo G2.

Por fim, é de observar que foi na realização da parte II da tarefa que os alunos tiveram maiores dificuldades. Esta dificuldade é expressa na avaliação final realizada pelos diferentes grupos. O grupo G4 refere que as dificuldades que sentiu em encontrar a solução

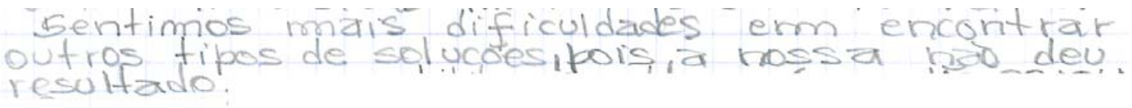

Sentimos mais dificuldades em encontrar outros tipos de soluções, pois, a nossa não deu resultado.

Figura 7.2.26. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G4 (continuação).

Já os elementos do grupo G3 referem que a sua dificuldade na realização da parte II da tarefa residiu na aplicação do teorema de Pitágoras, por forma a determinar um quadrado como diferença de quadrados.

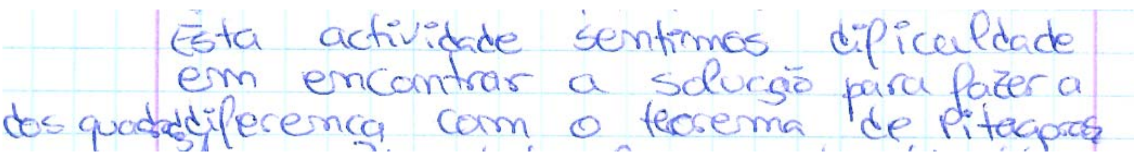

Esta actividade sentimos dificuldade em encontrar a solução para fazer a dos quad diferença com o teorema de Pitagoras

Figura 7.2.27. Excerto da avaliação final escrita pelo grupo G3 (continuação).

7.2.5. Avaliação realizada pelos alunos

Ao nível da *aprendizagem da matemática*, os alunos destacam a importância do trabalho de grupo na realização da tarefa proposta, o que lhes permitiu ultrapassar as dificuldades sentidas. O grupo G3 refere:

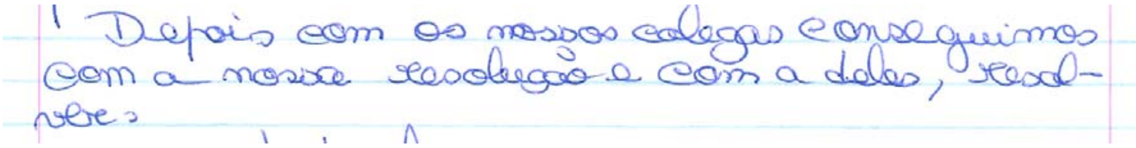

' Depois com os nossos colegas conseguimos com a nossa resolução e com a deles, resol-vere.

Figura 7.2.28. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G3 (continuação).

Para este grupo de alunos, quer o trabalho desenvolvido nos pequenos grupos quer a discussão realizada em grande grupo permitiu a correta resolução da tarefa proposta, o que destaca a importância da comunicação e argumentação no desenvolvimento dos diferentes raciocínios.

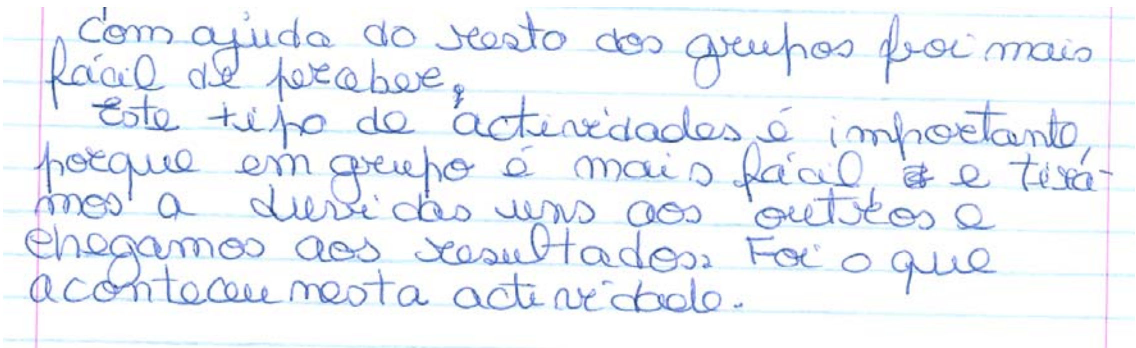

Com ajuda do resto dos grupos foi mais fácil de perceber,
Este tipo de actividades é importante, porque em grupo é mais fácil ~~e~~ e tirámos a duvidas uns aos outros e chegamos aos resultados. Foi o que aconteceu nesta actividade.

Figura 7.2.29. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G3 (continuação).

Ainda a partir das avaliações finais, escritas pelos alunos, é possível realçar que a realização desta tarefa possibilitou aos alunos tanto a aplicação como a relacionação da matéria dada, permitindo-lhes uma aprendizagem significativa, no presente caso sobre o teorema de Pitágoras e os casos notáveis. O grupo G4 refere que depois quando vimos a resolução no quadro e chegámos à conclusão que não era (de) assim tão difícil tinha-mos era de ter pensado na matéria dada assim conseguia-mos resolver a tarefa.

Figura 7.2.30. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G4 (continuação).

O Emanuel do grupo G2 também refere que esta tarefa os ajudou a compreender melhor o teorema de Pitágoras e os casos notáveis.

Gostei muito deste exercício e de o resolver conjuntamente com o meu grupo. Foi divertido e interessante e ajudou-nos a compreender melhor o Teorema de Pitágoras e os casos notáveis e perceber como mesmo sem os instrumentos que usámos na aula conseguiam resolver exercícios, que nos parecem impossíveis.

Figura 7.2.31. Excerto da avaliação final realizada pelo Emanuel, grupo G2 (continuação).

Já o grupo G1 aponta a importância desta tarefa para a consolidação da matéria anterior.

Nesta actividade ficamos aprender que com problemas podemos resolver com a matéria anterior.

Figura 7.2.32. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G1.

Ainda ao nível da aprendizagem da matéria, os alunos do grupo G5 referem que

Com esta tarefa conseguimos comprovar que só o necessário é uma régua não graduada e um compasso para resolver problemas com áreas.

Figura 7.2.33. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G5.

o que destaca a perceção dos alunos sobre a potencialidade da utilização de material de desenho na resolução de problemas de matemática.

Ao nível da *predisposição perante a matemática* é possível observar o interesse e o entusiasmo dos alunos na realização da tarefa. O Emanuel do grupo G2 refere que «gostei muito deste exercício e de o resolver conjuntamente com o meu grupo. Foi divertido e interessante» (Figura 7.2.31.), no entanto, este aluno refere ainda:

A melhor parte foi quando encontrámos a solução e o debate sobre o exercício com a turma.
Aguardamos pelo próximo exercício!

Figura 7.2.34. Excerto escrito da avaliação final realizada pelo Emanuel, grupo G2 (continuação).

Este excerto permite observar o papel que a história da matemática tem em promover e estimular o discurso em contexto de sala de aula, uma vez que cria a oportunidade para os alunos desenvolverem a arte de discutir e de justificar as suas próprias opiniões e de apresentarem o seu próprio raciocínio aos restantes colegas da turma.

Este entusiasmo também é partilhado pelos outros grupos. O grupo G4 que no seu registo final observa que

Foi uma experiência interessante que nos permitiu construir um quadrado de uma maneira diferente do que costumamos construir no dia-a-dia.

Figura 7.2.35. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G4 (continuação).

Ao nível da *apreciação da matemática como um esforço cultural*, através dos registos escritos produzidos pelos diferentes grupos, é possível observar a perceção que os alunos têm sobre o desenvolvimento da matemática, nomeadamente, sobre a forma como os gregos antigos resolviam os problemas geométricos. O grupo G4 refere

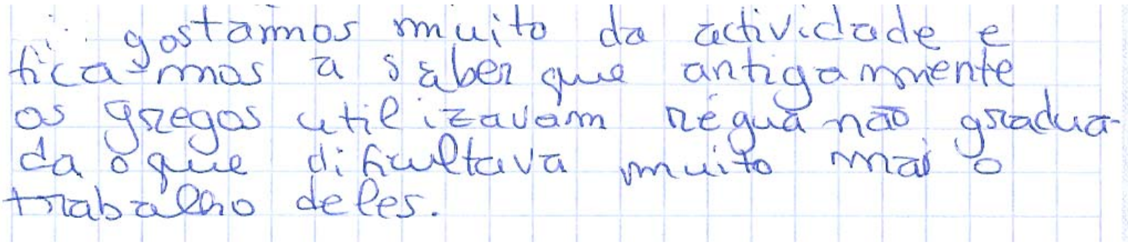

∴ gostamos muito da actividade e ficamos a saber que antigamente os gregos utilizavam régua não gradua-da o que dificultava muito mai o trabalho deles.

Figura 7.2.36. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G4 (continuação).

Também o grupo G2 observa que:

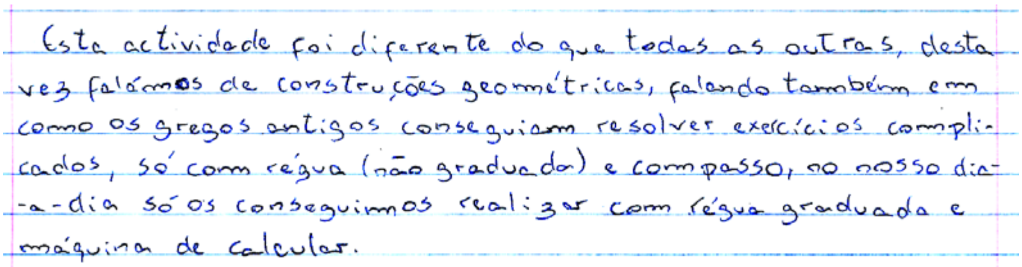

Esta actividade foi diferente do que todas as outras, desta vez falámos de construções geométricas, falando também em como os gregos antigos conseguiam resolver exercícios compli-cados, só com régua (não graduada) e compasso, no nosso dia-a-dia só os conseguimos realizar com régua graduada e máquina de calcular.

Figura 7.2.37. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G2.

Ao nível do *desenvolvimento da visão da natureza da matemática e da sua atividade*, os alunos destacam a utilização dos instrumentos de desenho na resolução da tarefa, em particular da régua não graduada.

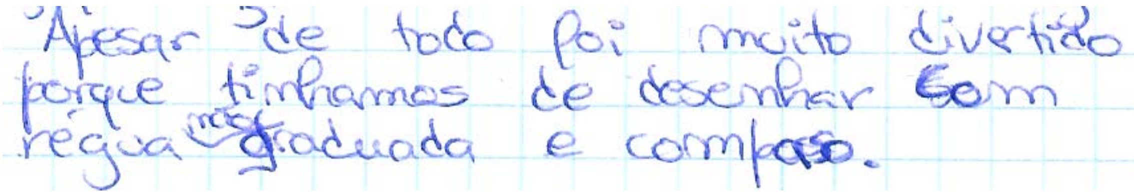

Apesar de todo foi muito divertido porque tínhamos de desenhar com régua não graduada e compasso.

Figura 7.2.38. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G4 (continuação).

A realização desta tarefa também proporcionou aos alunos uma outra forma de olhar a matemática e a atividade matemática, em particular sobre técnicas e métodos usados num determinado período da história da matemática e sobre o papel visual e intuitivo das abordagens não formais na resolução de problemas. O grupo G1 regista que

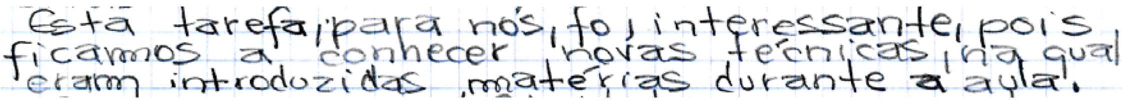

Está tarefa, para nós, foi interessante, pois ficamos a conhecer novas técnicas, na qual eram introduzidas matérias durante a aula.

Figura 7.2.39. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G1 (continuação).

7.3. Teorema de Pitágoras

A presente tarefa, dividida em três partes, teve como objetivo que, em grupo, os alunos, a partir de três construções geométricas apresentadas, deduzissem o teorema de Pitágoras. Estas construções integram três demonstrações geométricas do teorema de Pitágoras, respetivamente, a apresentada pelo vigésimo presidente dos EUA, James Abraham Garfield, e as duas provas atribuídas ao matemático indiano Bhaskara. Uma vez que a turma se encontrava dividida em seis grupos, distribuiu-se a mesma demonstração geométrica por cada dois grupos. Neste sentido, apenas na fase final de discussão, cada grupo ficaria a conhecer as demonstrações analisadas pelos outros grupos.

A cada grupo foi apresentada uma determinada construção geométrica, obtida à custa de um triângulo retângulo de hipotenusa c e catetos a e b, respetivamente. Pretendia-se que os alunos respondessem a um conjunto de questões propostas, por forma a poderem concluir que através da construção apresentada e dos resultados previamente obtidos, nas respostas às questões colocadas, pudessem obter a igualdade $c^2 = a^2 + b^2$ e, assim, verificarem que em qualquer triângulo retângulo é válida a relação algébrica conhecida por teorema de Pitágoras.

No final da realização da tarefa em pequenos grupos, foram apresentadas oralmente e por escrito (com recurso ao quadro de giz ou em suporte papel) as conclusões em grande grupo.

7.3.1. Tipo de argumentos produzidos

Com a realização desta tarefa pretendia-se que os alunos, a partir de três construções geométricas apresentadas, deduzissem o teorema de Pitágoras. Cada construção geométrica apresentada baseava-se na "movimentação" de um triângulo retângulo de hipotenusa c e catetos a e b, respetivamente. Aos alunos era pedido que respondessem a um conjunto de questões baseadas na análise da figura, com o intuito de deduzirem a relação algébrica $c^2 = a^2 + b^2$, o que corresponde a enunciar o teorema de Pitágoras. A descoberta desta relação a partir das três construções apresentadas suscitou o aparecimento de diversos argumentos.

Na parte da tarefa que apresentava a construção geométrica de Garfield, foram propostas diversas questões. Uma das questões apresentadas consistia em mostrar que o triângulo [BDA] era retângulo e nas outras era pedido que os alunos que determinassem por dois processos diferentes a área do trapézio da figura e que, posteriormente, igualassem as expressões obtidas, simplificando a igualdade obtida.

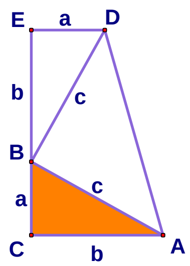


Figura 7.3.1. Última figura apresentada no enunciado da parte I da tarefa.

Nos argumentos apresentados para mostrar que o triângulo [ABD] era retângulo, foi possível verificar dois tipos de argumentos: argumentos empíricos, através da apresentação de um exemplo não representativo, e argumento entre o genérico e o simbólico. Na apresentação de argumentos para responder às outras duas questões, foi possível verificar dois tipos de argumentos: argumentos genéricos pictóricos e argumentos entre o simbólico e o formal.

Argumentos empíricos

Numa fase do diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G2, durante a procura da justificação de que o triângulo [ABD] é reto, os alunos deste grupo constroem um retângulo à custa dos triângulos [ABC] e [BED]. Através da figura, os alunos observam que os ângulos CBA e EBD são complementares e, portanto, o ângulo DBA terá de ser reto. Contudo, este grupo de alunos não apresenta qualquer garantia que permita sustentar esta afirmação, sendo a justificação apenas baseada num *esquema percetual*, ou seja, na perceção visual da figura construída.

Argumentos genéricos

No que diz respeito à apresentação de duas expressões que representem a área do trapézio [ACED], verifica-se que as mesmas se baseiam na análise da figura. Por um lado, os alunos procedem à aplicação da fórmula da área de um trapézio:

$$\frac{B+b}{2}\times h = \frac{b+a}{2}\times(b+a)$$

Figura 7.3.2. Expressão da área do trapézio [ACED], através da aplicação da fórmula da área de um trapézio, registo apresentado pelo grupo G2.

Por outro lado, os alunos observam que o trapézio [ACED] pode ser decomposto em três triângulos, [ABC], [ABD] e [BDE], e, portanto, a área do trapézio corresponde à soma das áreas desses três triângulos:

$$\left(\frac{b\times a}{2}\right)+\left(\frac{c\times c}{2}\right)+\left(\frac{a\times b}{2}\right)$$

Figura 7.3.3. Área do trapézio [ACED] obtida através da decomposição da figura em três triângulos, registo apresentado pelo grupo G2.

Verifica-se, assim, que o argumento apresentado é *genérico pictórico*, uma vez que a figura toma um papel relevante, realçando o caráter visual do argumento.

Argumentos entre o genérico e o simbólico

Posteriormente, para concluir que o triângulo [ABD] é retângulo em B, este grupo de alunos apresenta um outro argumento. Observe-se o registo escrito final apresentado por este grupo.

1- Sim, o triângulo [BDA] é rectângulo. Para o triângulo [BDA] ser um triângulo rectângulo, o ∢DBA tem que ter 90º e para isso os ângulos ∢EBD e ∢CBA juntos têm que ter 90º. O ∢EBD é igual ao ∢CAD e o ∢CBA é igual ao ∢EDB, por isso o ∢EBD e o ∢CBA juntos dão 90º e então o ∢DBA é de 90º, porque juntos formam um ângulo raso, por isso o Δ[BDA] é rectângulo.

Figura 7.3.4. Registo final apresentado pelo grupo G2.

A partir da análise deste registo escrito, observa-se que a figura toma um papel especial no discurso argumentativo, contudo, a perceção que os alunos têm da figura construída, permiti-lhes sustentar e ao mesmo tempo estabelecer o mecanismo lógico do discurso e, assim, justificar, com *argumentos geométricos*, o pretendido, o que evidencia um argumento situado *entre o genérico e o simbólico*. É de notar que os alunos não justificam a congruência, respetivamente, dos ângulos EBD e CAB e CBA e EDB. No entanto, no diálogo estabelecido com o professor justificam essa congruência, visto que os triângulos são geometricamente iguais: «São os dois iguais, segundo as informações que temos» (§19).

Argumentos entre o simbólico e o formal

Na simplificação da igualdade das expressões obtidas, o argumento apresentado pelos alunos situa-se *entre o simbólico e o formal*, uma vez que este grupo de alunos procede a uma manipulação algébrica das expressões presentes. É de observar que apesar os símbolos iniciais e finais expressarem representações geométricas, as expressões intermédias incluem termos não representativos.

3- $\frac{b+a}{2} \times (b+a) = \left(\frac{b \times a}{2}\right) + \left(\frac{c \times c}{2}\right) + \left(\frac{a \times b}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(b+a) \times (b+a)}{\cancel{2}} = \frac{2(a \times b)}{\cancel{2}} + \frac{c \times c}{\cancel{2}}$

$\Leftrightarrow (b+a) \times (b+a) = (2b \times a) + c \times c$

$\Leftrightarrow b^2 + \cancel{ab} + \cancel{ab} + a^2 = \cancel{2ab} + c^2$

$\Leftrightarrow b^2 + a^2 = c^2$

Figura 7.3.5. Simplificação da igualdade obtida à custa das duas expressões que traduzem a área do trapézio [ACED], registo final apresentado pelo grupo G2.

Na parte da tarefa em que se apresentavam as construções geométricas apresentadas por Bhaskara foi igualmente pedido aos alunos que determinassem, por dois processos diferentes, a área do quadrado maior da figura apresentada e que, posteriormente, igualassem as expressões obtidas, simplificando a igualdade obtida. As construções apresentadas em ambas as tarefas diferem na forma como são dispostos os triângulos seguintes:

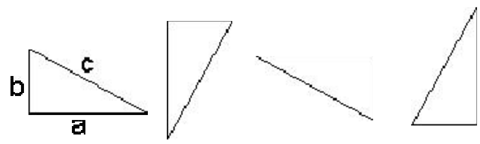
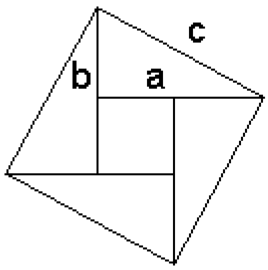
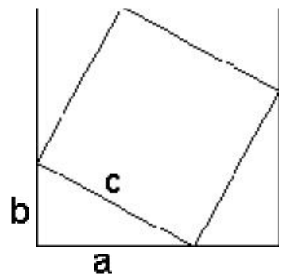


Figura 7.3.6. Sequência de quatro triângulos rectângulos, em que no primeiro triângulo, a e b são os catetos e c é a hipotenusa e os restantes triângulos são obtidos rodando o primeiro, respetivamente, 90⁰, 180⁰ e 270⁰, enunciado da parte II e III da tarefa.

Dispondo os triângulos como nas figuras da tabela seguinte, obtém-se um quadrado de lado *c*.

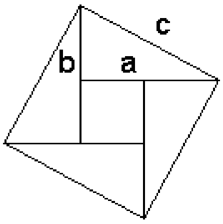
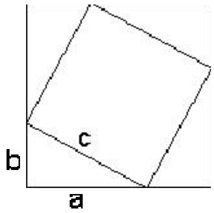
Tabela 7.3.1. Figuras apresentadas no enunciado das partes II e III da tarefa

figura presente na parte II da tarefa	*figura presente na parte III da tarefa*
	

Argumentos genéricos

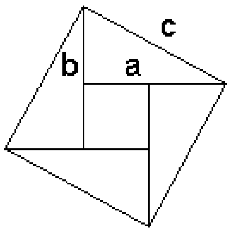
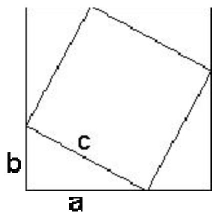
No que diz respeito à apresentação de duas expressões que traduzam a área do quadrado maior das figuras, verifica-se que as mesmas são obtidas através da análise da figura. Uma das expressões é obtida pela aplicação da fórmula da área do quadrado:

Tabela 7.3.2. Registos dos grupos G3 e G1, respetivamente, referentes à parte II e III da tarefa

parte II da tarefa	*parte III da tarefa*
 $c \times c = c^2$	 $(a+b)\times(a+b)$

Por outro lado, tendo em conta a figura do enunciado, os grupos G3 e G1 observam que o quadrado maior da figura pode ser decomposto em quatro triângulos, e um quadrado mais pequeno, portanto, a área do quadrado maior corresponde à soma das áreas desses quatro triângulos e quadrado mais pequeno:

Tabela 7.3.3. Registos dos grupos G3 e G1, respetivamente, referentes à parte II e III da tarefa (continuação)

parte II da tarefa	*parte III da tarefa*
 $(a-b)\times(a-b)+(\frac{ab}{2}\times 4)$	 $\frac{a\times b}{2}\times 4 + c^2$

A partir dos registos efetuados por estes grupos, verifica-se que figura toma um papel relevante na determinação das expressões que traduzem a área do quadrado. Os argumentos apresentados são do tipo *genérico pictórico*, o que realça o caráter visual dos argumentos.

Argumentos entre o simbólico e o formal

No entanto, ao igualarem as expressões que traduzem a área do quadrado maior, os argumentos presentes situam-se entre o simbólico e o formal, uma vez que os alunos procedem a uma manipulação algébrica dos termos presentes. Embora os símbolos iniciais e finais expressem representações geométricas, as expressões intermédias incluem termos não representativos.

O grupo G3 apresenta no final da realização da tarefa o seguinte registo escrito:

Área do □ maior → $c \times c = c^2$

ou

$$(a^2+b^2-2ab) + \left(\frac{ab}{2} \times 4\right)$$
$$= (a^2+b^2-2ab) + \left(\frac{4ab}{2}\right)$$
$$= (a^2+b^2-2ab) + 2ab$$
$$= a^2+b^2 - \cancel{2ab} + \cancel{2ab}$$
$$= a^2+b^2$$

Figura 7.3.7. Registo final apresentado pelo grupo G3.

uma vez que

A área de cada Δ é → $\frac{a \times b}{2} = \frac{ab}{2}$

Área do □ pequeno → $(a-b) \times (a-b)$

$$= a^2 - ab + b^2 - ab$$
$$= a^2 + b^2 - ab - ab$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab$$

Figura 7.3.8. Justificação presente no registo final apresentado pelo grupo G3.

donde concluí que

Concluímos que todo este problema deu resultado à fórmula do Teorema de Pitágoras.

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Figura 7.3.9. Conclusão expressa no registo final apresentado pelo grupo G3.

Também o grupo G1 evidencia o tipo de argumentos presentes na simplificação da igualdade obtida à custa das duas expressões anteriormente obtidas.

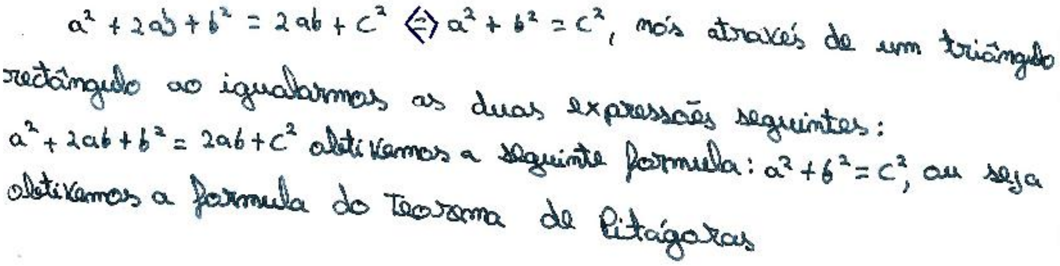

$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$, nós através de um triângulo rectângulo ao igualarmos as duas expressões seguintes: $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$ obtivemos a seguinte formula: $a^2 + b^2 = c^2$, ou seja obtivemos a formula do Teorema de Pitágoras

Figura 7.3.10. Registo final apresentado pelo grupo G1.

uma vez que


$(a+b)\times(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $\frac{a \times b}{2} \times 4 = 2ab$

Figura 7.3.11. Justificação presente no registo final apresentado pelo grupo G1.

7.3.2. Argumentação: análise local

No que diz respeito à resolução desta tarefa, é possível proceder a uma reconstrução funcional das diferentes afirmações produzidas pelos alunos, nomeadamente na resolução da parte I da tarefa. Da análise dos diferentes discursos argumentativos presentes é possível identificar formas simples de argumentação, em que os elementos funcionais identificados correspondem aos elementos constituintes do chamado "coração da argumentação".

Forma simples

Em relação à pergunta 1, da parte I da tarefa, que abordava a prova geométrica do teorema de Pitágoras apresentada por James Garfield, foi pedido aos alunos que verificassem se o triângulo [ABD] era retângulo. Na discussão estabelecida entre o grupo G2 e o professor é possível observar diferentes argumentos no conjunto de afirmações apresentadas pelos elementos deste grupo por forma a justificarem o pedido. Observe-se o início do diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G2:

(1) Professor: Qual é a vossa dúvida. Expliquem-me lá!
(2) Nélson: A dúvida é que a gente não sabe isto [apontando para a pergunta número um]
Momento de silêncio
(3) Daniel: Eles são ângulos… são ângulos verticalmente opostos.
(4) Professor: O que é que vocês querem mostrar, que não percebi?
(5) Nélson: Queremos mostrar que estes dois ângulos [apontando para os ângulos EBD e CBA] são 90°.
(6) Professor: Por que é que queres mostrar que a soma desses dois ângulos são 90°?
(7) Nélson: Porque é para mostrar que este aqui [apontando para o ângulo DBA] é reto.

Nesta primeira fase do diálogo, embora os alunos refiram que não sabem responder à pergunta (§2), através do diálogo estabelecido, o professor percebe que estes têm plena consciência do que é pedido para fazer. Para este grupo de alunos, e tendo em consideração a figura dada, para o triângulo [ABD] ser retângulo é necessário que a soma das amplitudes dos ângulos CBA e EBD seja 90° (§5) e, portanto, por consequência o ângulo DBA será reto (§7). Contudo, os alunos não explicitam o porquê desta implicação: se a soma das amplitudes dos ângulos CBA e EBD é 90°, então o ângulo DBA é reto. De facto, mais tarde, os alunos irão explicitar a razão de tal implicação. Assim, nesta fase, apesar de evidenciarem o que pretendem fazer, os alunos manifestam algumas dificuldades em garantir a passagem dos dados à conclusão desejada, apresentando garantias que não são válidas, tendo em conta figura dada (§3).

De acordo com o modelo de Toulmin, o argumento presente no raciocínio apresentado pelo grupo G2, pode ser esquematizados da seguinte forma:

D: Os três triângulos dados: [ABC], [BDE] e [BDA]
<enunciado>

→

C/D: estes dois ângulos [apontando para os ângulos EBD e CBA] são 90°.
<Nélson (§5)>

→

C/D: este aqui [apontando para o ângulo DBA] é reto
<Nélson (§7)>

→

C: O triângulo [ABD] é retângulo
<enunciado>

Figura 7.3.12. Representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio do grupo G2 (CA-1).

Através da observação desta representação esquemática, verifica-se que as afirmações que os alunos querem mostrar – "que estes dois ângulos [apontando para os ângulos EBD e CBA] são 90°” (§5) – e – “que este aqui [apontando para o ângulo DBA] é reto” (§7) – embora sejam conclusões constituem dados na cadeia argumentativa. Observa-se ainda que os alunos não apresentam qualquer garantia ou fundamento que permita suportar a relação “dados” $\rightarrow$ “conclusão”.

No caso da linha a tracejada da conclusão final, deve-se ao facto dos alunos não terem expresso essa afirmação de forma implícita.

Passado algum tempo, ao observar que estes progrediram na tentativa de justificar as suas conclusões, o professor retoma o diálogo com este grupo de alunos.

(8) Emanuel: Com estes dois triângulos [apontando para os triângulos BED e BCA da figura] formei um retângulo.
(9) Professor: E por que é que isso serve?
(10) Emanuel: Estava a mostrar que este ângulo [apontando para o ângulo CBA] mais este [apontando para o ângulo EBD] medem 90°. Se for, este [apontando para o ângulo DBA no triângulo da figura dada] também mede.
(11) Professor: E já conseguiste mostrar isto?
(12) Emanuel: Acho que já…
(13) Daniel: Podemos usar o compasso?
(14) Nélson: Já, porque este aqui [apontando para ângulo CBA] e este aqui [apontando para o ângulo EBD] dão 45° [apontando para um dos ângulos internos do retângulo]. Vão ter 45° cada um.

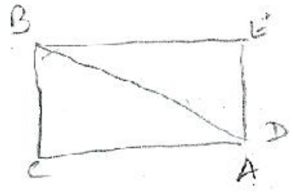


Figura 7.3.13. Esboço realizado pelo grupo G2.

A justificação apresentada por este grupo de alunos para justificar que a soma das amplitudes dos ângulos CBA e EBD é 90°, baseia-se num argumento geométrico: a possibilidade de construir um retângulo à custa dos dois triângulos dados (§8), triângulos [BED] e [BCA]. Para estes alunos, através dessa construção é possível fazer uma correspondência entre os ângulos em causa e, assim, visualizar a igualdade pretendida, que a soma das amplitudes dos ângulos CBA e EBD é 90°

(§10). Contudo, os alunos não expressam qualquer garantia que permita a realização de tal construção. Há, no entanto, um dos alunos que pretende particularizar as amplitudes dos ângulos em causa, referindo que ambos medem 45° (§14). O professor pede então aos alunos que pensem um pouco melhor no que acabaram de dizer, procurando uma justificação para a possibilidade de fazer tal construção. No que diz respeito à observação proferida pelo Nélson, o professor deixa a questão em aberto, deixando para os alunos a discussão se os ângulos em causa medem ou não 45°.

De acordo com o modelo de Toulmin, o argumento presente no raciocínio apresentado pelo grupo G2, pode ser esquematizados da seguinte forma:

D: Os três triângulos dados: [ABC], [BDE] e [BDA]
<enunciado>

→

C/D: Com estes dois triângulos [apontando para os triângulos BED e BCA da figura] formei um retângulo.
<Emanuel (§8)>

→

C/D: este ângulo [apontando para o ângulo CBA] mais este [apontando para o ângulo EBD] medem 90°.
<Emanuel (§10)>

→

C/D: este [apontando para o ângulo DBA no triângulo da figura dada] também mede [90°].
<Emanuel (§10)>

→

C: O triângulo [BDA] é retângulo
<enunciado>

Figura 7.3.14. Representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio do grupo G2 (CA-2).

Mais uma vez a linha a tracejada na conclusão final, deve-se ao facto dos alunos não exprimirem esta afirmação de forma implícita.

Após algum momento de discussão em grupo, o professor apercebe-se que este grupo de alunos encontrou uma garantia que permite justificar o passo “dado” → “conclusão”, estabelecendo-se um novo diálogo.

(15) Professor: Expliquem lá o que estavam a pensar.
(16) Emanuel [virando-se para o Daniel]: Pega no desenho!
[…]
Uma vez que ficam em silêncio, o professor retoma o diálogo.
(17) Professor: Este triângulo [apontando para o triângulo ABC] é…
(18) Daniel: Retângulo… e este também [apontando para o triângulo BED].
(19) Emanuel: São os dois iguais, segundo as informações que temos.
(20) Professor: Sim.
(21) Emanuel: Então este ângulo [apontando para o ângulo CBA] corresponde a este [apontando para o ângulo EDB].
(22) Daniel: E este [apontando para o ângulo CAB] a este [apontando para o ângulo EBD].

(23) Emanuel: Como estes dois [apontando para os ângulos CAB e ABC] têm de medir 90° como este [apontando para o ângulo ACB]. Então estes [apontando para os ângulos EBD e EDB] também são de 90°.
(24) Professor: Então?
(25) Emanuel: Então este [apontando para o ângulo CBA] mais este [apontando para o ângulo EBD] têm 90°.
(26) Professor: Então por que é que aquele que procuram [apontando para o ângulo DBA] tem de medir 90°?
(27) Emanuel: Porque este ângulo [apontando para o ângulo CBE] é de 180°.
(28) Professor: Por que é que é de 180°?
(29) Daniel: Porque é um ângulo raso.
(30) Professor: Sim.
(31) Emanuel: Se estes dois… se este bocado mede 90°, aquele também tem que medir 90°.

Através deste excerto, é possível verificar a forma como os alunos justificam os diferentes argumentos proferidos. Uma vez que os triângulos dados são geometricamente iguais (§19), há uma correspondência entre os ângulos internos dos dois triângulos, o ângulo CBA é geometricamente igual ao ângulo EDB (§21) e o ângulo CAB é geometricamente igual ao ângulo EBD (§22). Assim, como a soma das amplitudes dos ângulos CBA e BAC é 90°, uma vez que o triângulo [CBA] é retângulo (§23) e, embora sem explicitarem, a soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180°. De igual modo, a soma das amplitudes dos ângulos EBD e EDB também é 90°. Através da igualdade dos ângulos correspondentes, a soma das amplitudes dos ângulos CBA e EBD também é 90° (§25). Como o ângulo EBC é raso (§27) e (§29), o ângulo DBA é reto (§31), logo, o triângulo [DBA] é retângulo.

É de notar que a justificação apresentada neste excerto permite concluir o desejado, contudo os alunos não retomam a justificação proposta anteriormente, baseada na construção do retângulo. Posteriormente, o professor em conversa com os alunos pergunta o motivo de eles não retomarem a justificação baseada na construção referida para justificar a soma de 90°. Não referindo por que é que optaram por a outra justificação, os alunos consideram que tal construção é válida, uma vez que os triângulos da figura, [ABC] e [BDE] são geometricamente iguais, o que é expresso nesse excerto. No entanto, o professor lembra-lhes o caso dos paralelogramos não retângulos, uma vez que podem ser constituídos à custa de dois triângulos geometricamente iguais e, no entanto, os ângulos internos não são retos. Contudo, um dos alunos observa que neste caso os triângulos são retângulos logo, seria possível fazer tal construção.

De acordo com o modelo de Toulmin, o argumento presente no raciocínio apresentado pelo grupo G2, pode ser esquematizados da seguinte forma:

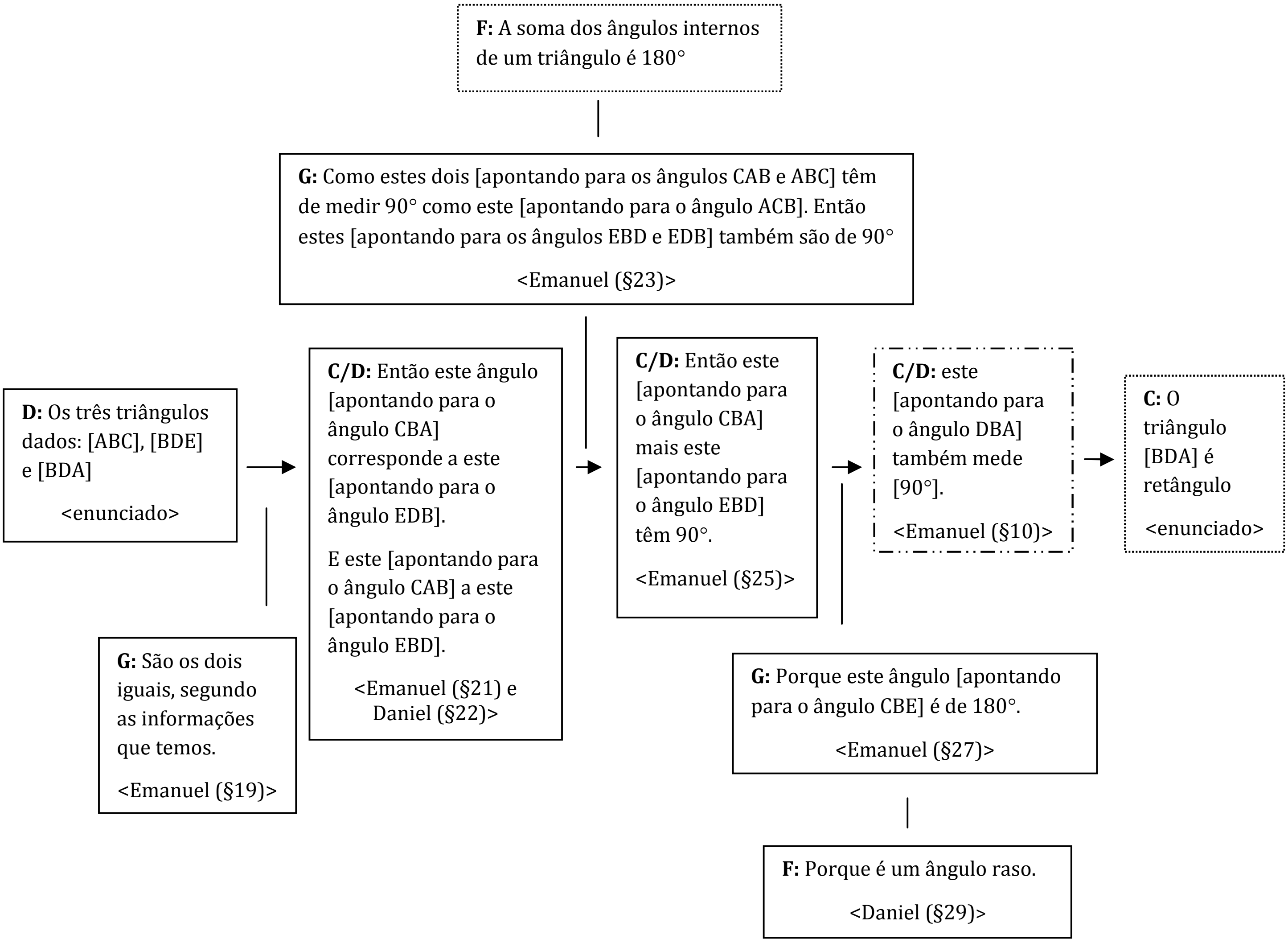


Figura 7.3.15. Representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio do grupo G2 (CA-3).

É de notar que a linha que limita a caixa que contém a afirmação "este [apontando para o ângulo DBA] também mede [90°]" não é contínua, uma vez que esta afirmação já tinha sido introduzida num diálogo anterior, portanto, encontrando-se implícita neste momento da discussão. A linha a tracejada na conclusão final num fundamento, deve-se ao facto dos alunos não exprimirem esta afirmação de forma implícita.

7.3.3. Argumentação: análise global

Tendo em conta o diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G2 é possível representar globalmente os diversos argumentos presentes nesse discurso argumentativo e, posteriormente, proceder à análise global da sua estrutura. Assim, a representação esquemática global do discurso argumentativo na resolução da parte I da tarefa pode ser traduzido da forma seguinte:

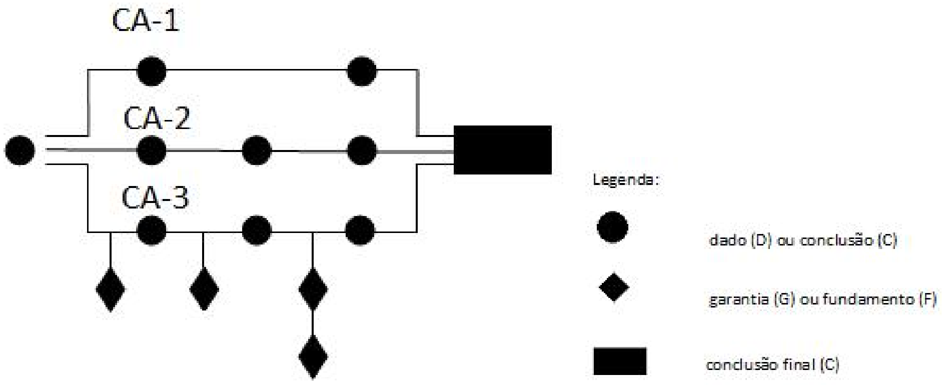


Figura 7.3.16. Representação esquemática global do discurso argumentativo do grupo G2.

Através de uma análise global desta argumentação, pode-se observar que na sua estrutura existem argumentos onde uma afirmação (conclusão) é deduzida a partir de uma outra afirmação (dado), através de conceitos matemáticos e fundamentos lógicos (garantias e fundamentos). Por exemplo, os argumentos presentes nas correntes de argumentação CA-3. É ainda de notar que na estrutura desta argumentação, por vezes, uma afirmação estabelecida como conclusão, num próximo argumento, assume a função de dado. Por exemplo, esta situação pode ser observada nas correntes de argumentação CA-1, CA-2 e CA-3. Observa-se ainda a presença de passos de argumentação que têm falta de garantias (CA-1 e CA-2) e de argumentos paralelos para a mesma conclusão (CA-1, CA-2 e CA-3). Contudo, não existem refutações, nem no final da argumentação é percetível o efeito funil. Nesse sentido, esta estrutura de argumentação evidencia a maioria das características que caracterizam a *estrutura-espiral*, em particular porque a conclusão é obtida de diferentes formas.

7.3.4. Dificuldades manifestadas pelos alunos

Compreensão matemática

Ao nível da interpretação geométrica e de conceitos

Na abordagem da prova geométrica proposta por James Garfield, o grupo G2 constrói um retângulo à custa de dois triângulos retângulos geometricamente iguais (Figura 7.3.12.). Para estes alunos, a construção desse retângulo permite mostrar que a soma da amplitude dos ângulos CBA e EBD era 90°. Um dos alunos deste grupo refere, então, que cada um destes ângulos mede 45°. Contudo, esta afirmação não é válida, o que manifesta a pouca clareza no que diz respeito às propriedades dos quadriláteros, nomeadamente dos paralelogramos. De facto, embora as diagonais do retângulo se bissetem, não são bissetrizes dos ângulos internos.

Argumentação

Ao nível da apresentação de justificações

Os alunos revelaram ainda dificuldades na forma de justificar os seus raciocínios. Ambos os grupos que abordaram a prova geométrica apresentada por James Garfield referem que sentiram dificuldades em responder à primeira questão dessa parte da tarefa.

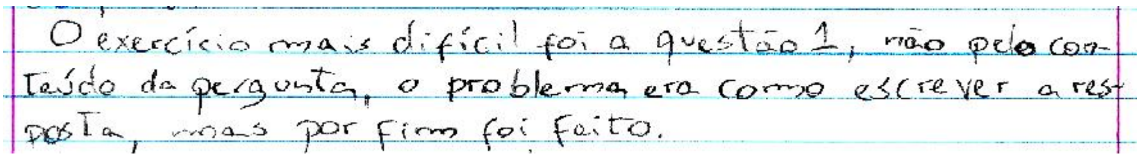

O exercício mais difícil foi a questão 1, não pelo con-
teúdo da pergunta, o problema era como escrever a res-
posta, mas por fim foi feito.

Figura 7.3.17. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G2.

Para mim, foi dificil
arranjar as justificações
para mostrar que o triângulo
era rectângulo. A figura permitia
ver, mas é dificil pôr por escrito a
dizer o porquê.

Figura 7.3.18. Excerto da avaliação final realizada pela Sara, grupo G4.

Para estes alunos, a maior dificuldade foi em encontrar garantias que permitissem justificar as diferentes afirmações apresentadas. Embora os alunos entendam a questão e até visualizem geometricamente a resposta, manifestam dificuldades em apresentar razões que justifiquem as suas afirmações ou até determinadas posições sobre a razoabilidade dessas mesmas justificações. É assim visível uma fraca capacidade de argumentação materializada não só na falta de justificações apresentadas, mas também no tipo de estrutura de argumentação presente no diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G2. O tipo de estrutura-espiral, com características semelhantes à estrutura-fonte, em particular caracteriza-se pela posição dos argumentos paralelos. No presente caso, não há um afunilar numa simples cadeia levando à conclusão final, mas a conclusão final é obtida a partir de três cadeias de argumentação, embora em duas delas (CA-1 e CA-2) não estejam presentes garantias nem fundamentos que permitam sustentar a conclusão desejada. De facto, na sua avaliação individual final, o Daniel, do grupo G2, refere que a justificação necessária para mostrar que o triângulo [ABD] era retângulo era usar os critérios de igualdade de triângulos, garantia essa que se encontra presente em CA-3.

Para mim o mais dificil de fazer foi fazer a pergunta 1 onde ~~tinhad~~ tinhamos que
justificar que o △[BDA] era rectângulo. Nessa pergunta ~~temos~~ tivemos que usar a igual
dade de triângulos, para justificar que havia um ângulo rectângulo.

Figura 7.3.19. Excerto da avaliação final realizada pelo Daniel, grupo G2.

7.3.5. Avaliação realizada pelos alunos

Ao nível da *aprendizagem da matemática*, os alunos destacam a importância do trabalho de grupo na realização da tarefa proposta, o que realça a importância da comunicação e argumentação no desenvolvimento dos diferentes raciocínios. O grupo G4 refere que

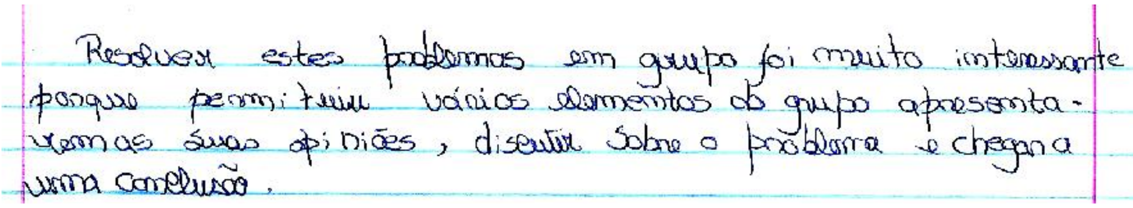
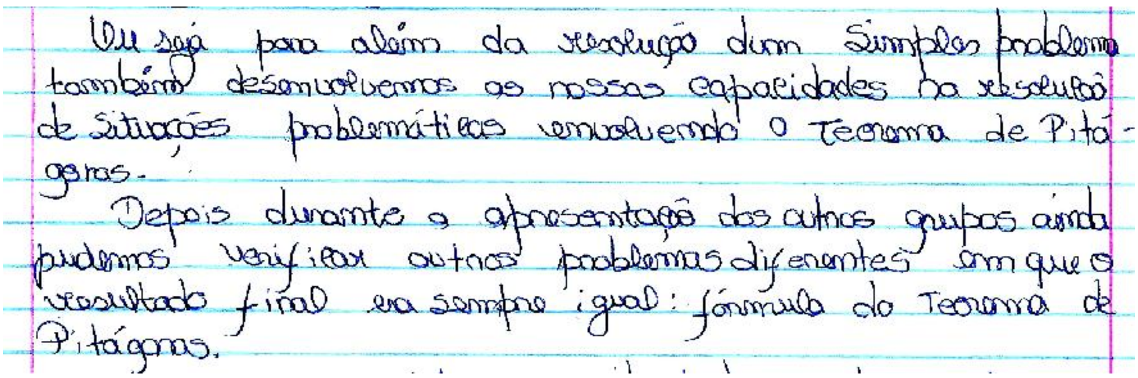

Resolver estes problemas em grupo foi muito interessante porque permitiu vários elementos do grupo apresenta-rem as suas opiniões, discutir sobre o problema e chegar a uma conclusão.

Figura 7.3.20. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G4.

Contudo, este grupo refere ainda que a realização desta tarefa permitiu desenvolver a capacidade de resolver problemas, aplicando o teorema de Pitágoras, bem como a possibilidade de comparar diferentes estratégias de resolução, visto que nem todos os grupos tinham o mesmo problema para resolver.


Ou seja para além da resolução dum simples problema também desenvolvemos as nossas capacidades na resolução de situações problemáticas envolvendo o Teorema de Pitá-goras.

Depois durante a apresentação dos outros grupos ainda pudemos verificar outros problemas diferentes em que o resultado final era sempre igual: fórmula do Teorema de Pitágoras.

Figura 7.3.21. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G4 (continuação).

Também no seu registo final, o grupo G2 refere que esta tarefa permitiu não só aprender melhor o teorema de Pitágoras, mas também a partir de uma construção geométrica, envolvendo triângulos, obter a relação algébrica $c^2 = a^2 + b^2$, o que evidencia a presença da conexão entre a geometria e a álgebra.

Este exercício ajudou-nos a compreender melhor o teorema de Pitágoras, este problema consistia, em através de uma construsão geométrica responder a uma série de questões, que no fim iríamos através de cálculos chegar à fórmula do teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$, e formulas a prova dada por James Abraham Garfield.

Figura 7.3.22. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G2 (continuação).

Ainda ao nível da aprendizagem matemática, nos acetatos apresentados na discussão em grande grupo, os alunos destacam as formas como podem provar o teorema de Pitágoras.

Através da construção apresentada, que com a junção de 3 triângulos se formou um trapézio, através dos 2 processos distintos de fazer a sua área, igualados, o resultado final deu a fórmula do teorema de Pitágoras. Haviam 2 processos para fazer a área do trapézio: ou $\frac{B+b}{2} \times h$, ou a soma da área dos 3 triângulos; que depois de igualados estes 2 processos, e a expressão (igualdade) simplificada, o resultado final foi a fórmula do Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$.

Figura 7.3.23. Registo escrito da apresentação oral do grupo G2 da parte I da tarefa.

Nós obtivemos o Teorema de Pitágoras porque se adicionar-mos a área dos 4 triângulos, mais o quadrado pequeno e se calcular-mos a área do quadrado maior obtemos a fórmula do Teorema de Pitágoras ($c^2 = a^2 + b^2$).

Figura 7.3.24. Registo escrito da apresentação oral do grupo G3 da parte II da tarefa.

Nós podemos provar o teorema de Pitágoras através dos resultados obtidos porque ao encontrar-mos a área do triângulo e do quadrado pequeno conseguimos encontrar as duas expressões que igualamos e obtivemos a formula: $a^2 + b^2 = c^2$, que é a formula do Teorema de Pitágoras.

Figura 7.3.25. Registo escrito da apresentação oral do grupo G1 da parte III da tarefa.

No entanto, no registo final, o grupo G5 observa que a diferença entre as construções geométricas apresentadas por Bhaskara, tendo em conta as provas geométricas apresentadas nas partes II e III está no facto de apesar ambas as construções usarem quatro triângulos, o quadrado pequeno mudou de posição, isto pela disposição da figura.

Depois de vermos a resolução dos outros grupos vimos que o Bhaskara conseguiu obter o teorema de Pitágoras de duas formas diferentes, porque colocou os triângulos de maneira diferente, obtendo o quadradinho em sítios diferentes.

Figura 7.3.26. Excerto da avaliação final do grupo G5.

Ao nível da *predisposição perante a matemática* é possível observar o interesse e o entusiasmo dos alunos na realização da tarefa.

Foi uma experiência muito interessante, gostamos de participar!

Figura 7.3.27. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G4 (continuação).

Os alunos destacam ainda o que mais gostaram de resolver. O Daniel, do grupo G2, refere que

O que mais gostei de fazer foi 2, onde tínhamos que arranjar duas expressões (dois processos diferentes para determinar a área do trapézio. Um dos processos foi calcular a área do trapézio normalmente, a fórmula habitual.

Figura 7.3.28. Excerto da avaliação final realizada pelo Daniel, grupo G2 (continuação).

Já o Emanuel, deste mesmo grupo, refere que

A melhor parte do trabalho foi quando no fim, na questão 3 a resposta final foi a formula do teorema de Pitágoras.

Figura 7.3.29. Excerto da avaliação final realizada pelo Emanuel, grupo G2.

Contudo, na sua avaliação final o Emanuel, do grupo G2, refere que

Gostei muito deste trabalho, acho que nos ajudou a compreender as variadas formas em que o Teorema de Pitágoras pode ser utilizado.

Figura 7.3.30. Excerto da avaliação final realizada pelo Emanuel, grupo G2 (continuação).

Este excerto permite observar que o interesse deste aluno vai mais longe do que um fator de motivação, uma vez que lhe permitiu uma melhor compreensão do teorema de Pitágoras, tendo, por isso, um efeito significativo na sua aprendizagem.

Ao nível da *apreciação da matemática como um esforço cultural*, através dos registos escritos produzidos pelos diferentes grupos, é possível observar a perceção que os alunos têm sobre o desenvolvimento da matemática, nomeadamente, sobre as diferentes provas do teorema de Pitágoras.

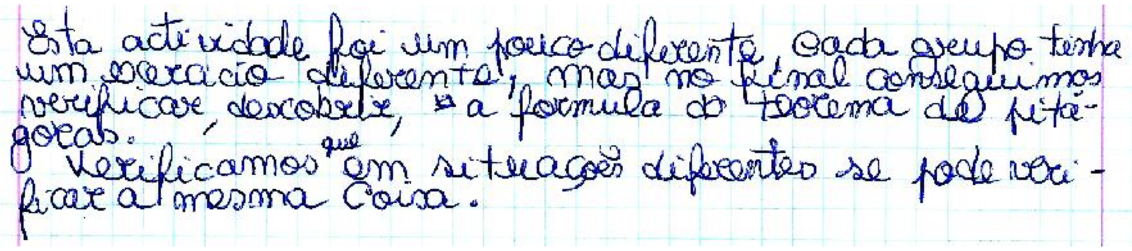

Esta actividade foi um pouco diferente, cada grupo tinha um exercício diferente, mas no final conseguimos verificar, descobrir, a formula do teorema de pitá-goras.
Verificamos que em situações diferentes se pode veri-ficar a mesma Coisa.

Figura 7.3.31. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G3.

Ao observarem que «em situações diferentes se pode verificar a mesma coisa», os alunos destacam a oportunidade conhecer diferentes tipos de abordagem para o mesmo problema, nomeadamente, sobre as abordagens efetuadas em relação à matemática no interior de culturas menos conhecidas como a indiana.

Ao nível do *desenvolvimento da visão da natureza da matemática e da sua atividade* é de registar a observação final realizada pelo Daniel do grupo G2:

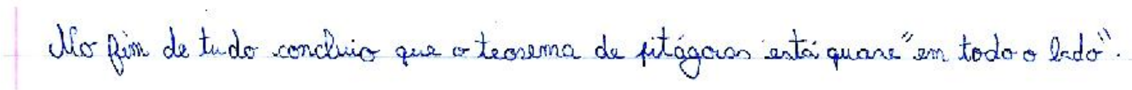

No fim de tudo concluio que o teorema de pitágoras está quase "em todo o lado".

Figura 7.3.32. Excerto da avaliação final realizada pelo Daniel, grupo G2 (continuação).

O motivo de o Daniel se referir ao teorema de Pitágoras como estando em quase "todo o lado", resulta do facto da realização desta tarefa ter proporcionado aos alunos uma outra forma de olhar a matemática e a atividade matemática, em particular sobre as técnicas e métodos de prova usados na demonstração do teorema de Pitágoras, destacando o papel visual e intuitivo das abordagens não formais na resolução de problemas. Ao contactar com as diferentes provas geométricas do teorema de Pitágoras, os alunos foram encorajados a formular as suas próprias questões, fazer conjeturas e a testá-las. Os alunos tiveram, assim, a oportunidade de se confrontarem com a natureza evolucionária do conhecimento matemático, nomeadamente, sobre determinados conceitos como o de prova, rigor e evidência.

7.4. Equações

A presente tarefa, dividida em três partes, teve como objetivo que, em grupo, os alunos resolvessem e apresentassem a respetiva estratégia de resolução do problema: determinar dois números cuja soma fosse 20 e que a diferença entre os seus quadrados fosse 80. Posteriormente, era pedido aos alunos que interpretassem e analisassem as resoluções apresentadas por Diofanto e Pedro Nunes, respetivamente, para este mesmo problema e que as confrontassem com as suas resoluções iniciais, tendo em conta a estratégia e a notação utilizada por cada um destes matemáticos. Para cada uma das resoluções foi apresentado o texto original, com a respetiva tradução. É de referir que embora os números considerados no problema apresentado e resolvido por Pedro Nunes fossem diferentes, o problema é igual ao proposto aos alunos e que também tinha sido resolvido por Diofanto. A tarefa foi desenvolvida de acordo com o seguinte itinerário:

Parte I – resolução do problema e descrição da estratégia de resolução.

Partes II e III – leitura, análise e discussão das resoluções apresentadas, respetivamente, por Diofanto e Pedro Nunes.

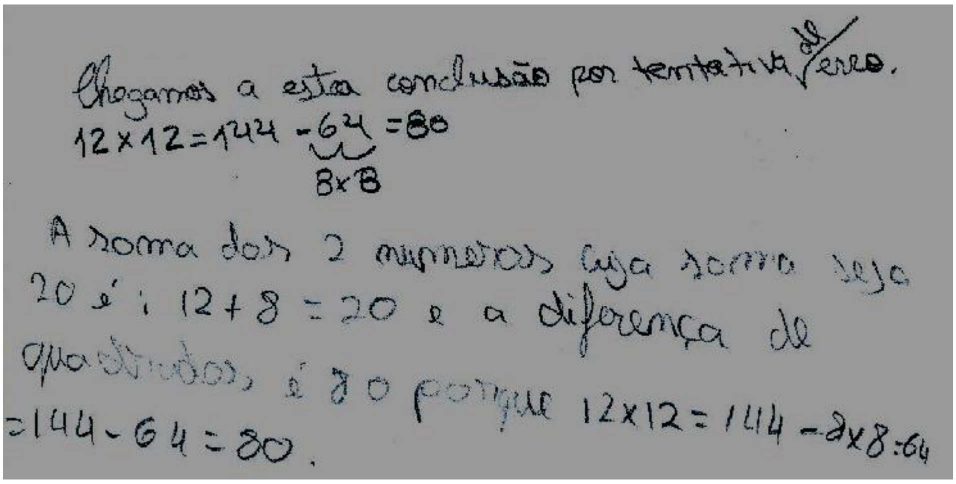
No final da realização da tarefa em pequenos grupos, foram apresentadas oralmente e por escrito (em acetato ou com recurso ao quadro de giz) as conclusões em grande grupo.

7.4.1. Tipo de argumentos produzidos (na resolução do problema)

Com a realização desta tarefa pretendia-se que os alunos, não só resolvessem o problema proposto, mas que, posteriormente, analisassem duas resoluções do mesmo problema, efetuadas por dois matemáticos, e que as confrontassem com a sua estratégia de resolução. A descoberta da solução do problema suscitou, assim, o aparecimento de diversos argumentos.

Argumentos empíricos

Usando o processo de tentativa e erro, o grupo G1 refere que foi testando "à sorte" os números, *simples enumeração*, até determinar os números procurados.



Chegamos a esta conclusão por tentativa de/erro.

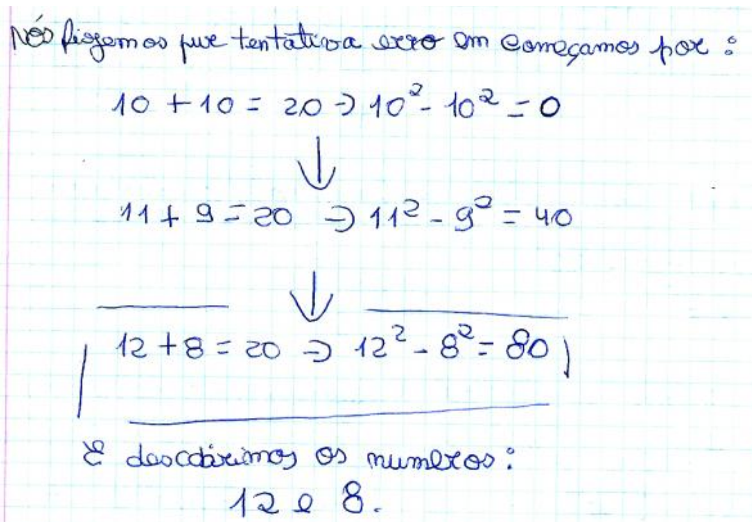
$12 \times 12 = 144 - \underbrace{64}_{8\times 8} = 80$

A soma dos 2 numeros cuja soma seja 20 é: $12+8=20$ e a diferença de quadrados, é 80 porque $12\times12=144 - 8\times8=64$ $=144-64=80$.

Figura 7.4.1. Processo de resolução apresentado pelo grupo G1.

Argumentos entre o empírico e o genérico

Embora também utilize o processo de tentativa e erro, o grupo G3 define um procedimento para determinar as soluções do problema. Observe-se a forma como descrevem o seu procedimento:



Nós fizemos por tentativa erro em começamos por:

$10+10=20 \Rightarrow 10^2-10^2=0$

$\Downarrow$

$11+9=20 \Rightarrow 11^2-9^2=40$

$\Downarrow$

$12+8=20 \Rightarrow 12^2-8^2=80$

E descobrimos os numeros:

12 e 8.

Figura 7.4.2. Processo de resolução apresentado pelo grupo G3.

Através da análise deste registo, observa-se que grupo G3 define uma estratégia inicial. Considerando o 10 como sendo os números procurados, uma vez que a soma é 20, os alunos observam que a diferença entre os seus quadrados é zero, portanto, refutam a sua suposição. É no entanto de observar que a refutação não surgiu do facto dos números procurados terem de ser diferentes. Mantendo em consideração a condição de que a soma desses números é 20, os alunos observam que um desses números tem de ser maior do que 10 e outro menor, portanto, supõem que os números procurados são o 11 e o 9, respetivamente. Contudo, uma vez que a diferença entre os seus quadrados não é 80, os alunos consideram o par de números seguinte, 12 e 8, que satisfaz o pedido. Embora os alunos reconheçam que os números procurados têm de ser menores do que 20, sendo um deles maior e o outro menor do que 10, respetivamente, uma vez que a soma dos números procurados tem de ser 20; o facto de os alunos procederem ao teste de todas as possibilidades sugere a procura de soluções por um *processo de exaustão*.

Argumentos simbólicos/e entre o simbólico e o formal

Usando um processo algébrico, o grupo G2 inicia a resolução do problema designando por x os números procurados.

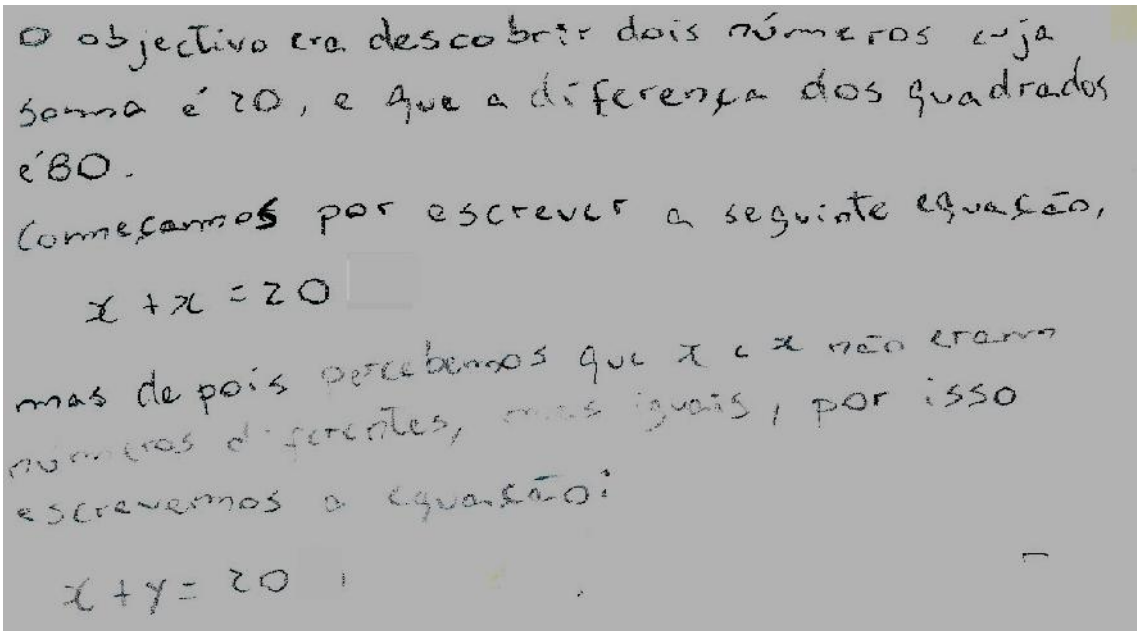

O objectivo era descobrir dois números cuja soma é 20, e que a diferença dos quadrados é 80.
Começamos por escrever a seguinte equação,
$x + x = 20$
mas depois percebemos que x e x não eram números diferentes, mas iguais, por isso escrevemos a equação:
$x + y = 20$

Figura 7.4.3. Processo de resolução apresentado pelo grupo G2.

No entanto, este grupo de alunos refuta a sua opção inicial, visto que os números procurados não podem ser iguais. Desta forma, designam por x e y esses números e tendo em conta uma das condições do problema, que a soma dos números procurados é 20, representam simbolicamente esta condição estabelecendo a equação $x + y = 20$.

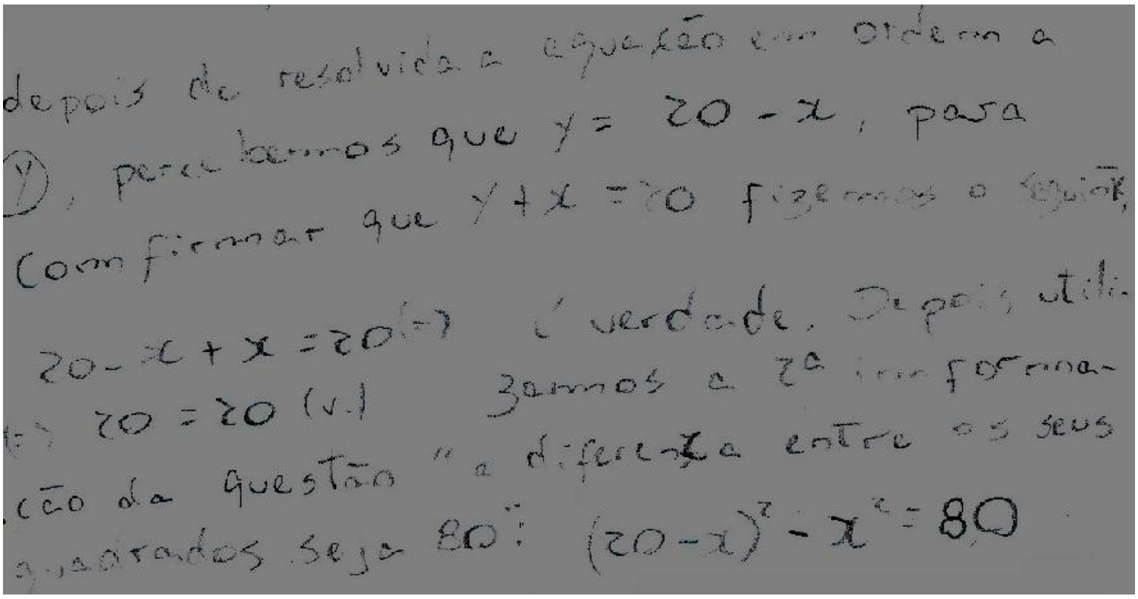

depois de resolvida a equação em ordem a (y), percebemos que $y = 20 - x$, para confirmar que $y + x = 20$ fizemos o seguinte,
$20 - x + x = 20 \Leftrightarrow 20 = 20$ (v.) é verdade. Depois utilizamos a 2ª informação da questão "a diferença entre os seus quadrados seja 80": $(20-x)^2 - x^2 = 80$

Figura7.4.4. Processo de resolução apresentado pelo grupo G2 (continuação).

Resolvendo a equação em ordem a *y*, os alunos observam que se *x* designar um dos números procurados, o outro será representado por 20 – *x*, procedendo à verificação desta sua escolha.

Seguidamente, os alunos referem que utilizando a segunda informação presente no enunciado é possível estabelecer uma nova equação que posteriormente resolvem.

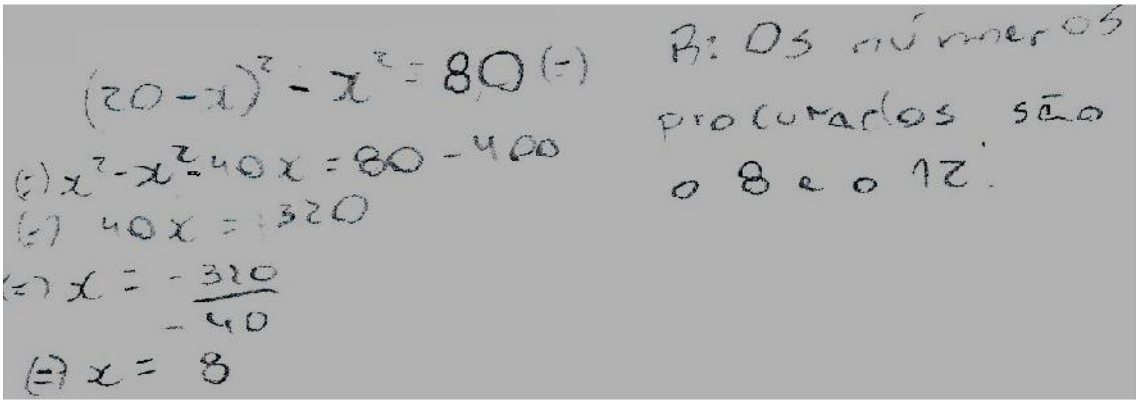


Figura 7.4.5. Processo de resolução apresentado pelo grupo G2 (continuação).

Através da análise deste registo escrito, observa-se que os alunos procedem à representação simbólica dos dados presentes no enunciado, o que mostra a presença de argumentos *simbólicos*. Contudo, a descoberta da solução do problema resulta da resolução da equação estabelecida, o que evidencia argumentos *entre* o *simbólico e o formal*.

7.4.2. Argumentação: análise local (na resolução do problema)

No que diz respeito à resolução do problema proposto nesta tarefa, é possível proceder a uma reconstrução funcional das diferentes afirmações produzidas pelos alunos. Da análise dos diferentes discursos argumentativos observam-se não só formas simples de argumentação, em que os elementos funcionais identificados correspondem aos elementos constituintes do chamado "coração da argumentação", mas também formas mais complexas de argumentação, em que os elementos funcionais presentes contemplam, nomeadamente refutações.

Foram dois os processos apresentados pelos alunos para resolver o problema proposto. Através do processo de tentativa e erro, usado pelo grupo G3, é possível, de acordo com o modelo de Toulmin, esquematizar o argumento presente no raciocínio apresentado por este grupo da seguinte forma:

Forma complexa

Conclusão obtida à custa de uma refutação

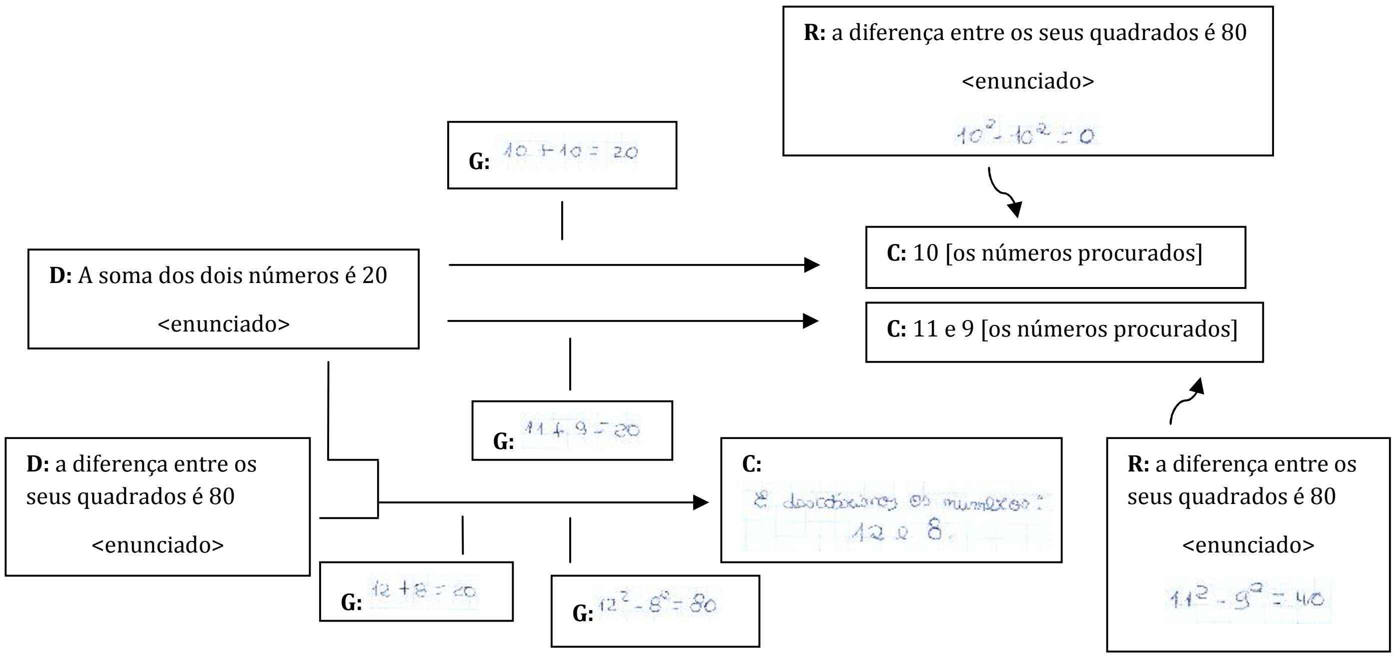


Figura 7.4.6. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio do grupo G3.

No que diz respeito ao grupo G2, este utilizou um processo algébrico para resolver o problema proposto. Na resolução algébrica é possível observar diferentes argumentos no conjunto de afirmações apresentadas pelos alunos por forma a justificar seu o raciocínio pedido. Observe-se os argumentos presentes na justificação apresentada pelo grupo G2, durante o diálogo estabelecido com o professor:

(1) Professor: Quais são os dados do problema? O que é que vocês procuram?
(2) Emanuel: Dois números…
(3) Nélson: ao quadrado [interrompendo o Emanuel]

(4) Emanuel e Daniel: Não!
(5) Emanuel: Que somados…
(6) Daniel: Dois números que somados dão 20 e que a diferença entre os seus quadrados vai dar 80 [interrompendo o Emanuel]
(7) Professor: Então tentem escrever esta informação que têm.
[…]
O Daniel escreve na folha $x + x = 20$
(8) Professor: Se escreverem x e x…
(9) Emanuel: Estamos a escrever o mesmo número!
(10) Professor: E têm que ser o mesmo número?
(11) Emanuel: Não. Fica x e y [e escreve na folha $x + y = 20$]
(12) Professor: Pronto.
(13) Daniel: Pois era isto que estava a tentar fazer há um bocado, mas que não sabia como havia de dizer. A sério! [vendo o ar desconfiado dos colegas]

Neste primeiro excerto estamos perante uma refutação. Uma vez que a soma dos números procurados é igual a 20, designando por x os números procurados, um dos alunos escreve a equação seguinte: $x + x = 20$. No entanto, após a intervenção do professor (§8), esta afirmação é refutada por outro aluno, que refere que ao escrever $x + x = 20$ se está a escrever o mesmo número (§9). Assim, os alunos designam por x e y os números procurados, estabelecendo a equação $x + y = 20$ (§11).

De acordo com o modelo de Toulmin, o argumento presente no raciocínio efetuado pelo grupo G2, na primeira parte deste diálogo, pode ser esquematizado da seguinte forma:

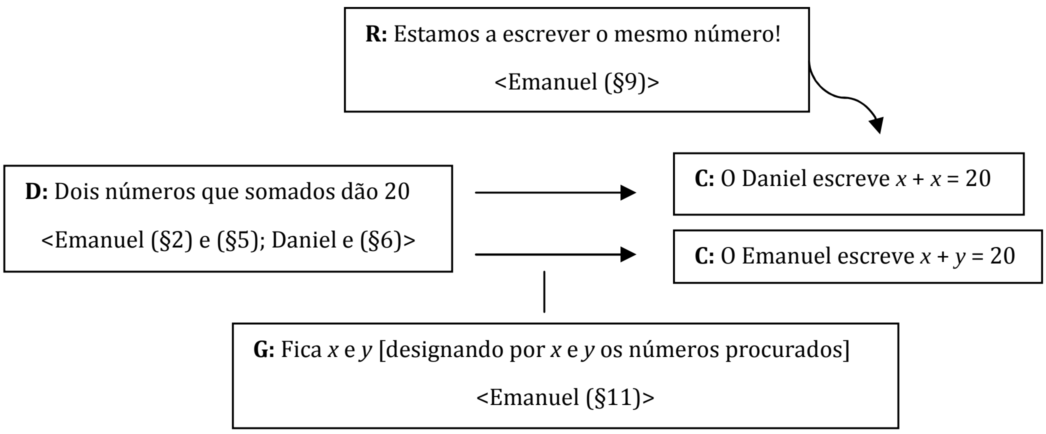


Figura 7.4.7. Representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio do grupo G2 na primeira parte do diálogo (CA-1).

Formas simples

Ao escreverem $x + y = 20$, os alunos estão perante uma equação do 1.° grau a duas incógnitas. O professor pergunta, então, como resolvem esta equação (§14), prosseguindo o diálogo:

(14) Professor: E tu sabes resolver uma equação com duas incógnitas?
Os alunos ficam a pensar um pouco na questão colocada.
(15) Daniel: Não.
(16) Professor: Então, como posso…
(17) Daniel: Fatorizar!
(18) Professor: Fatorizar?
Momento de silêncio e o Emanuel começa a escrever alguma coisa.
(19) Professor: O que é que estás a fazer Emanuel?
(20) Emanuel: Estou a resolver esta equação em ordem a y.
(21) Daniel: Vai dar $20 - x$ [escrevem $y = 20 - x$]
(22) Daniel: Agora podemos usar isto…
Momento de silêncio
(23) Professor: Sim, agora o que fazem com isto?
Momento de silêncio
(24) Professor: Então como é que são os números? Quais são os números que procuram?
Momento de silêncio:
(25) Daniel: $20 - x$ e…
(26) Emanuel: E o y.
(27) Professor: O y?
(28) Daniel: [virando-se para o Emanuel] não o x!
Os alunos fazem então a verificação da equação por eles construída, ou seja, verificam se de facto x e $20 - x$ forem as expressões dos números procurados, a soma é 20.

Embora um dos alunos refira erradamente que tem de "fatorizar a equação", outro aluno refere que resolve a equação em ordem a y, $y = 20 - x$. Contudo, esta afirmação servirá de dado à conclusão de que os números procurados poderão ser representados por $20 - x$ (§25) e x (§28), uma vez que há a garantia de que $x + 20 - x = 20$. É de observar que na sua resolução, Diofanto também procederá a uma verificação deste género por forma a mostrar que os números por si designados satisfazem o pedido.

De acordo com o modelo de Toulmin, o argumento presente no raciocínio efetuado pelo grupo G2, na segunda parte deste diálogo, pode ser esquematizado da seguinte forma:

D: O Emanuel escreve $x + y = 20$

C/D: Vai dar 20 – x [escrevem $y = 20 - x$]

<Daniel (§21)>

C: [os números procurados são] 20 – x e x

<Daniel (§25) e (§28)>

G: [resolvendo] esta equação em ordem a y

<Emanuel (§20)>

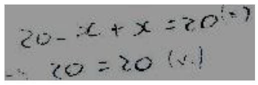
G: 

Figura 7.4.8. Representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio do grupo G2 na segunda parte do diálogo (CA-2).

Após terem concluído que x e 20 – x eram expressões que representavam os números procurados, o professor questiona os alunos sobre se há mais alguma informação no enunciado que permita determinar esses números (§29).

(29) Professor: Agora há mais alguma informação no enunciado do problema?
(30) Emanuel: Que a diferença entre os quadrados desses números…
(31) Nélson: Dá 80…
(32) Emanuel: É 80!
(33) Professor: Então como é que escrevem isso?
(34) Emanuel: 20 – x ao quadrado menos x ao quadrado é igual a 80 [e escreve $(20 - x)^2 - x^2 = 80$]

Os alunos fazem referência ao facto de a diferença entre os quadrados dos números procurados ser 80, escrevendo $(20 - x)^2 - x^2 = 80$, pelo facto de os números procurados serem x e 20 – x.

De acordo com o modelo de Toulmin, o argumento presente no raciocínio efetuado pelo grupo G2 pode ser esquematizado da seguinte forma:

D: [os números procurados são] 20 – x e x

<Daniel (§25) e (§28)>

D: Que a diferença entre os quadrados desses números… é 80

<Emanuel e Nélson (§30), (§31) e (§32)>

C: 20 – x ao quadrado menos x ao quadrado é igual a 80 [e escreve $(20 - x)^2 - x^2 = 80$]

<Emanuel (§34)>

Figura 7.4.9. Representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio do grupo G2 (CA-3).

É de notar que a linha que limita a caixa que contém um dos dados apresentados no esquema não é contínua, uma vez que esta afirmação já tinha sido introduzida no diálogo anterior, portanto, encontrando-se implícita neste momento da discussão.

Os alunos obtêm assim uma equação do 2.° grau a uma incógnita, reconhecendo que o próximo passo será resolver a equação (§36).

(35) Professor: E agora?
(36) Emanuel: Podemos resolver esta equação.
Os alunos resolvem a equação e no final da resolução retomam o diálogo.
(37) Emanuel: x é igual a 8.
(38) Daniel: Já sabemos um!
(39) Professor: Qual é o outro, então?
(40) Emanuel: É 12.
(41) Professor: Porquê?
(42) Emanuel: Sabemos o x…
Momento do silêncio
(43) Professor: Pronto, e qual era o outro número?
(44) Emanuel: O y.
(45) Professor: Quanto é o y, então?
(46) Emanuel: y é 20 menos x.
(47) Professor: Quanto é o x?
(48) Emanuel: 8.
(49) Nélson: 20 menos 8 dá 12.
(50) Emanuel: Já está!

Os alunos resolvem a equação, determinando o valor de x que é igual a 8. Uma vez que $y = 20 - x$, o outro número procurado será o 12.

De acordo com o modelo de Toulmin, o argumento presente no raciocínio efetuado pelo grupo G2, na parte final do diálogo, pode ser esquematizado da seguinte forma:

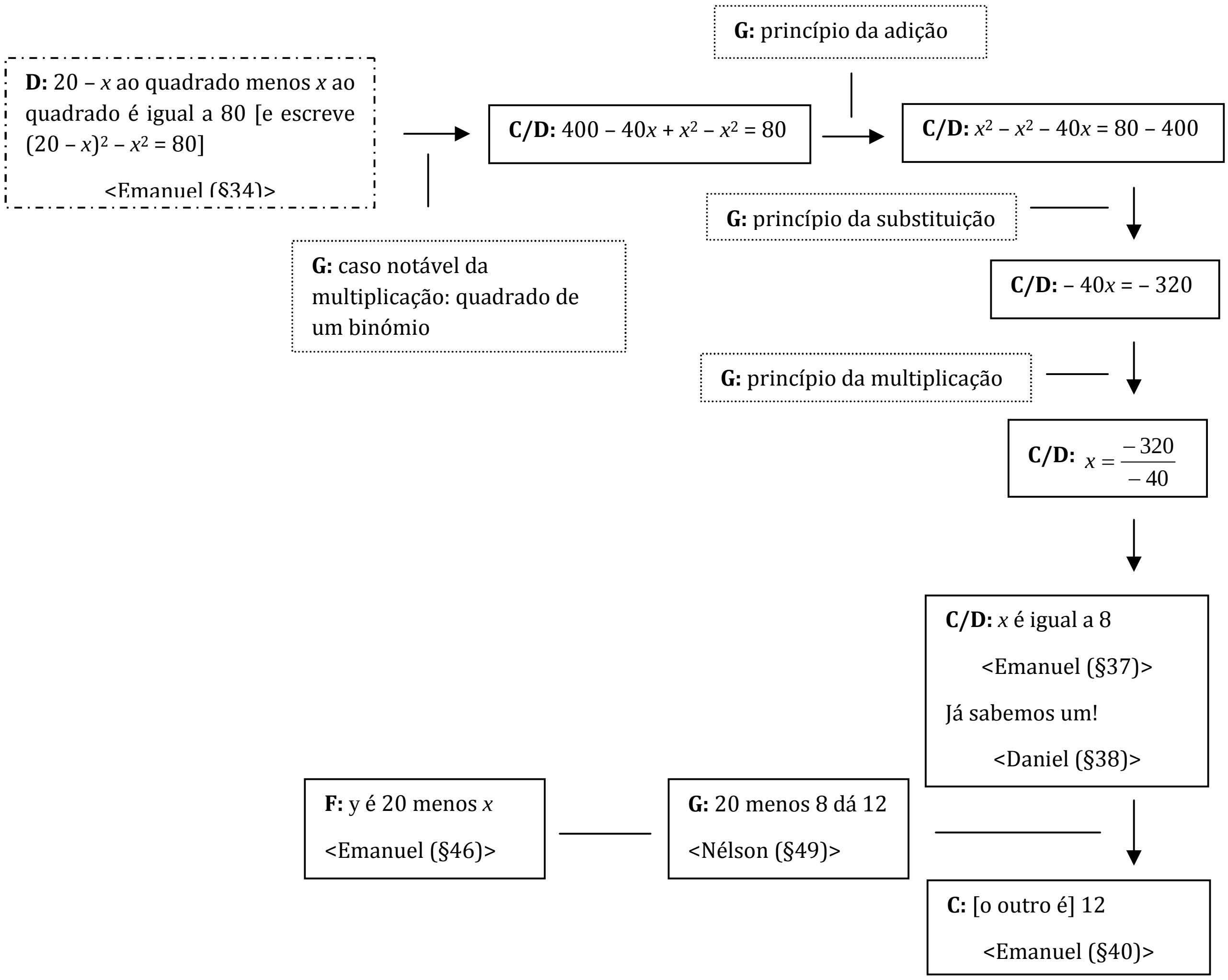
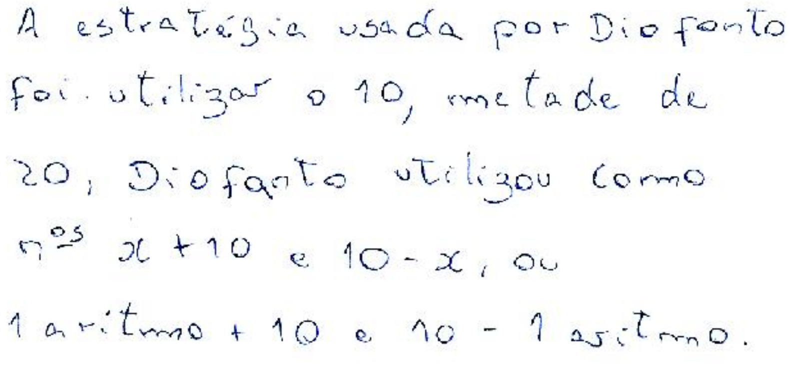


Figura 7.4.10. Representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio do grupo G2 na parte final do diálogo (CA-4).

7.4.3. Argumentação: análise local (na leitura e interpretação de raciocínios presentes em fontes primárias)

Na segunda parte da tarefa, os diferentes grupos procederam à leitura, análise e interpretação das resoluções apresentadas, respetivamente, por Diofanto e Pedro Nunes. Através da análise dos registos efetuados pelos diferentes grupos é possível proceder a uma reconstrução funcional das diferentes afirmações produzidas pelos alunos, tendo por base, respetivamente, as resoluções apresentadas pelos dois matemáticos.

Observe-se os registos efetuados pelo grupo G2 sobre a resolução de Diofanto.

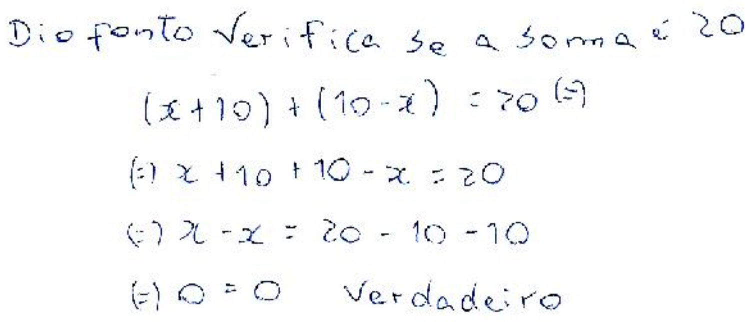


A estratégia usada por Diofonto foi utilizar o 10, metade de 20, Diofanto utilizou como nºs $x+10$ e $10-x$, ou 1 aritmo + 10 e 10 - 1 aritmo.

Figura 7.4.11. Registo escrito efetuado pelo grupo G2 sobre a interpretação da resolução apresentada por Diofanto.

Este grupo de alunos inicia o seu registo escrito traduzindo em notação simbólica atual os números procurados, designando por x o aritmo. Observa-se ainda que os alunos tentam justificar o porquê Diofanto ter designado por 1 aritmo e 10 unidades um dos números e outro por 10 unidades menos 1 aritmo. Para estes alunos, a escolha do 10 resulta do facto de ser metade de 20, a soma dos números procurados. Contudo, mais tarde, os alunos fundamentam esta escolha de Diofanto (figura 7.4.39).

Posteriormente, os alunos procedem à verificação da escolha efetuada. Isto é, que a soma dos números é 20.



Diofonto verifica se a soma é 20

$(x+10)+(10-x)=20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+10+10-x=20$

$\Leftrightarrow x-x=20-10-10$

$\Leftrightarrow 0=0$ Verdadeiro

Figura 7.4.12. Registo escrito efetuado pelo grupo G2 sobre a interpretação da resolução apresentada por Diofanto (continuação).

Os alunos registam então que a diferença entre os quadrados dos números procurados ser 40 aritmos.

depois Diofanto fez a diferença dos quadrados que é 40 aritmos

$$(x+10)^2-(10-x)^2=$$
$$=x^2+20x+100-(100-20x+x^2)$$
$$=\cancel{x^2}+20x+\cancel{100}-\cancel{100}+20x-\cancel{x^2}$$
$$=40x$$

Figura 7.4.13. Registo escrito efetuado pelo grupo G2 sobre a interpretação da resolução apresentada por Diofanto (continuação).

Uma vez que a diferença entre os quadrados dos números procurados é 80, os alunos igualam a 40 aritmos e obtêm que o artimo é 2.

mas a diferença dos quadrados tb é 80

$$40x=80$$
$$x=\frac{80}{40}=2$$

Figura 7.4.14. Registo escrito efetuado pelo grupo G2 sobre a interpretação da resolução apresentada por Diofanto (continuação).

Portanto, procedendo às substituições respetivas, os alunos identificam os números procurados: 12 e 8.

$$x+10=2+10=12$$
$$10-x=10-2=8$$

Figura 7.4.15. Registo escrito efetuado pelo grupo G2 sobre a interpretação da resolução apresentada por Diofanto (continuação).

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes na interpretação realizada pelo grupo G2 à resolução apresentada por Diofanto podem ser esquematizados da seguinte forma:

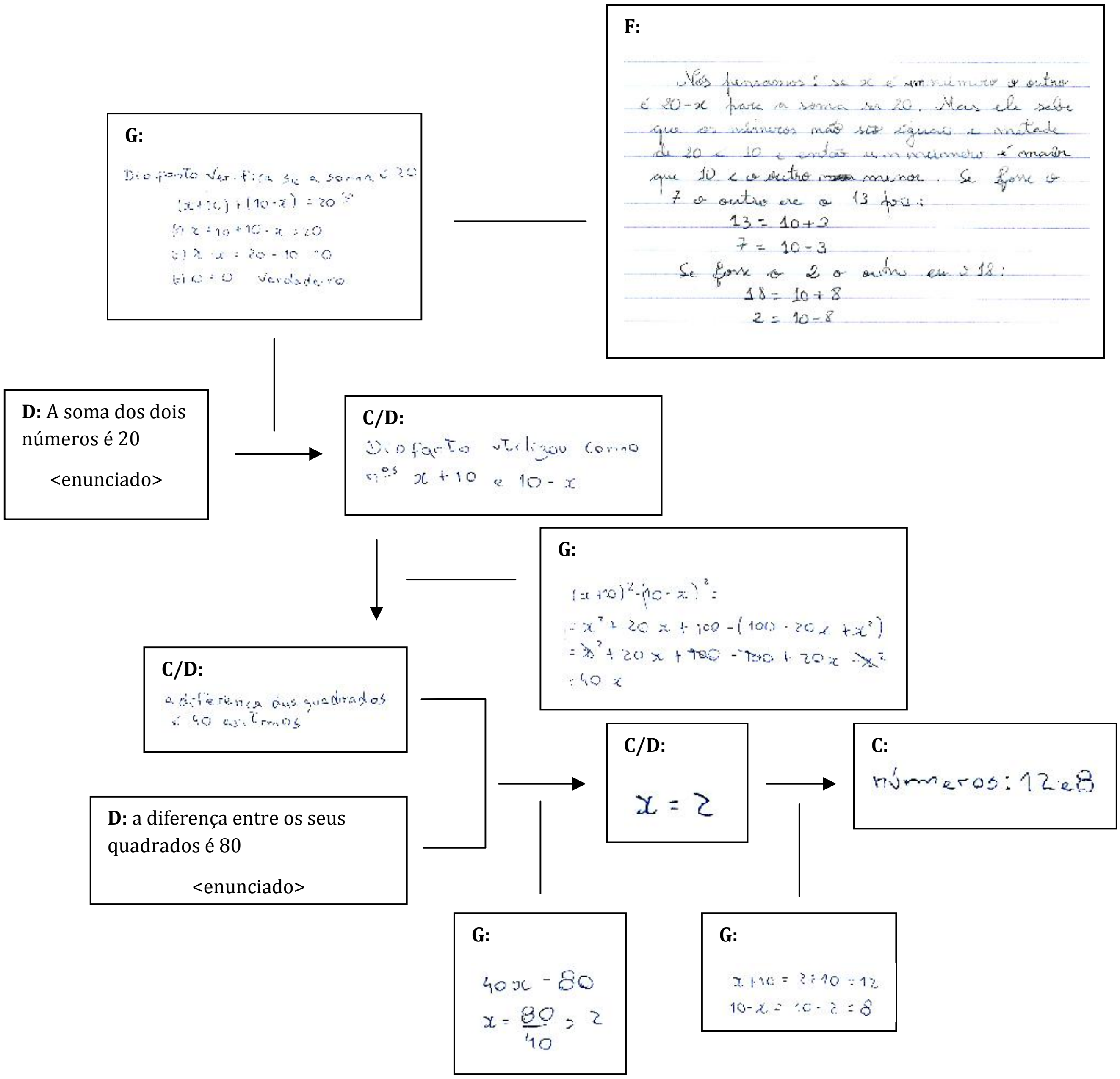


Figura 7.4.16. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes na interpretação realizada pelo grupo G2 da resolução apresentada por Diofanto.

No que diz respeito à resolução apresentada por Pedro Nunes, os números utilizados por este matemático são diferentes dos presentes no problema proposto inicialmente aos alunos e no problema resolvido por Diofanto. No problema resolvido por Pedro Nunes, este considera que a soma dos números procurados é 12 e que a diferença entre os seus quadrados é 30.

Observe-se o registo efetuado pelo grupo G1 sobre a interpretação e análise da resolução apresentada por Pedro Nunes.

A estratégia usada por Pedro Nunes para resolver
o problema inicial foi: com os dados que tem, ~~resol~~
fez uma equação, e resolveu-a para
obter os números que cuja a a soma seja
12 e a diferença dos seus quadrados seja
30. Dividiu o nº: 12 em 2 partes 1ª parte
é: x e a 2ª parte é 12 − x. Tal como fez o
grupo do Emanuel, mas com números diferentes.

Figura 7.4.17. Registo escrito efetuado pelo grupo G1 sobre a interpretação da resolução apresentada por Pedro Nunes.

Através do descrito observa-se que os alunos, a partir da resolução apresentada por Pedro Nunes, em notação simbólica atual, designam os números procurados por x e o $12 - x$, uma vez que a soma tem de ser 12. Os alunos justificam essa escolha de Pedro Nunes através do procedimento anteriormente feito pelo grupo G2 na sua resolução. Posteriormente, estes alunos procedem ao cálculo do quadrado de $12 - x$.

$$(12-x)^2 = 144 - 24x + x^2$$

Figura 7.4.18. Registo escrito efetuado pelo grupo G1 sobre a interpretação da resolução apresentada por Pedro Nunes (continuação).

Uma vez que Pedro Nunes refere que «a diferença há de ser .30., serão logo .1.*ce*. $\tilde{p}$.30. iguais a .144. $\tilde{p}$.1.*ce*. $\tilde{m}$.24.*co*.», os alunos, em notação atual, estabelecem a equação $x^2 + 30 = 144 + x^2 - 24x$, resolvendo-na:

$$x^2+30 = 144+x^2-24x^2$$

$$(\Leftrightarrow)\ x^2 - x^2 + 24x = 144 - 30$$

$$(\Leftrightarrow)\ 24x = 114$$

$$(\Leftrightarrow)\ x = \frac{114}{24} = \frac{19}{4}$$

Figura 7.4.19. Registo escrito efetuado pelo grupo G1 sobre a interpretação da resolução apresentada por Pedro Nunes.

Portanto, o outro número procurado é

$$\frac{12}{4_{(\times 4)}} - \frac{19}{4} \rightarrow \frac{48}{4} - \frac{19}{4} = \frac{29}{4}$$

Figura 7.4.20. Registo escrito efetuado pelo grupo G1 sobre a interpretação da resolução apresentada por Pedro Nunes (continuação).

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes na interpretação realizada pelo grupo G1 à resolução apresentada por Pedro Nunes podem ser esquematizados da seguinte forma:

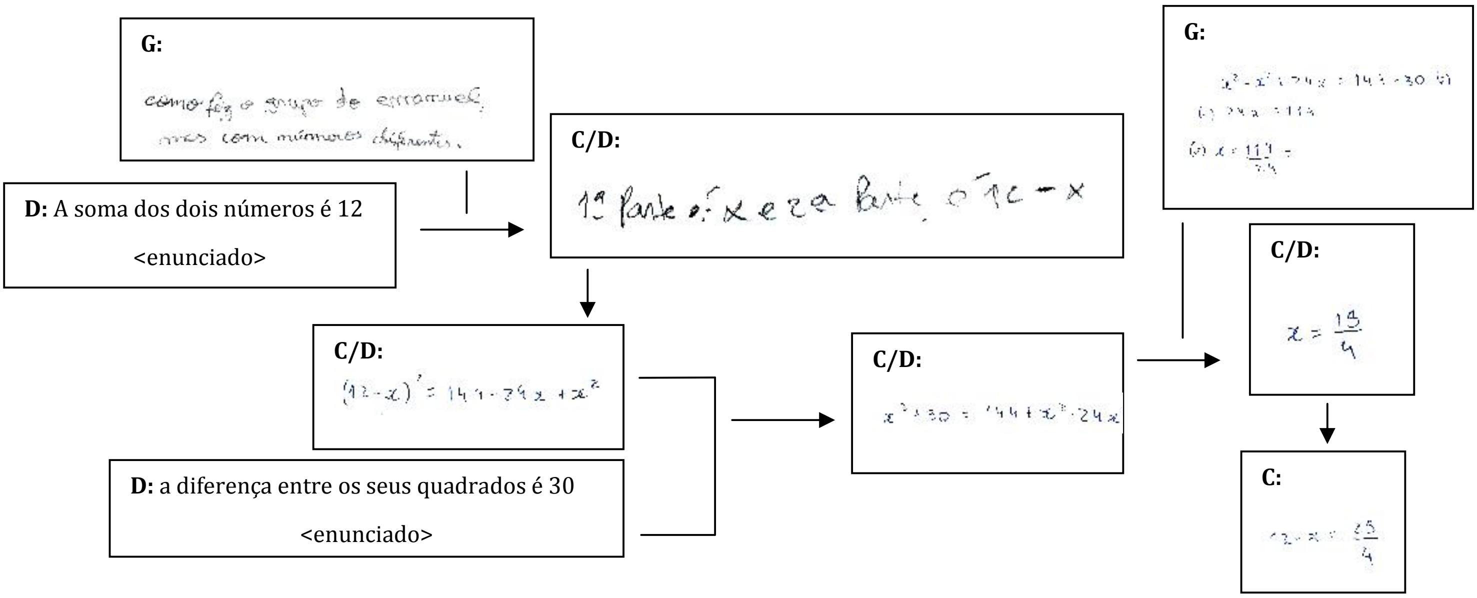


Figura 7.4.21. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes na interpretação realizada pelo grupo G1 da resolução apresentada por Pedro Nunes.

7.4.4. Argumentação: análise global (na resolução do problema)

Tendo em conta o trabalho desenvolvido pelo grupo G3 e o diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G2, durante a realização do problema da parte I, é possível, respetivamente, representar globalmente os diversos argumentos presentes neste discurso argumentativo e, posteriormente, proceder à análise global da sua estrutura.

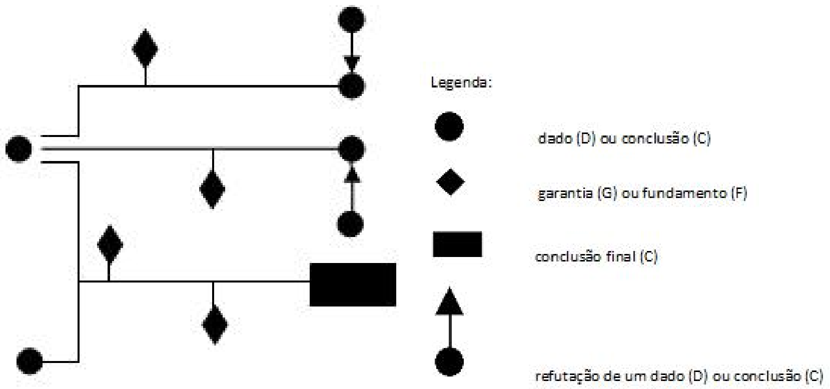


Figura 7.4.22. Representação esquemática global do discurso argumentativo do grupo G3.

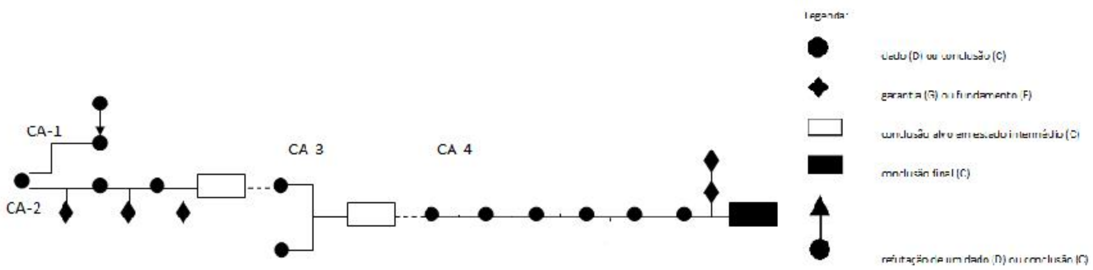


Figura 7.4.23. Representação esquemática global do discurso argumentativo do grupo G2.

Através de uma análise global destas argumentações, observa-se que na sua estrutura existem argumentos onde uma afirmação (conclusão) é deduzida a partir de uma outra afirmação (dado) através de conceitos matemáticos e fundamentos lógicos (garantias e fundamentos). Observa-se ainda a presença de refutações e é possível encontrar passos de argumentação que têm falta de garantias, no caso da argumentação desenvolvida pelo grupo G2 (CA-4). É ainda de notar que na estrutura da argumentação desenvolvida pelo grupo G2 é possível identificar que uma afirmação estabelecida como conclusão, num próximo argumento, assume a função de dado. Por exemplo, esta situação pode ser observada nas correntes de argumentação CA-2 e CA-4. Por fim, é de referir que no final da argumentação desenvolvida pelo grupo G2 é percetível o efeito funil. Nesse sentido, estas estruturas de argumentação evidenciam a maioria das características que caracterizam a *estrutura-fonte*.

7.4.5. Argumentação: análise global (na leitura e interpretação de raciocínios presentes em fontes primárias)

Tendo em conta a análise e interpretação efetuada pelos grupos G2 e G1, respetivamente às resoluções propostas por Diofanto e Pedro Nunes, é possível representar globalmente os diversos argumentos presentes neste discurso argumentativo e, posteriormente, proceder à análise global da sua estrutura.

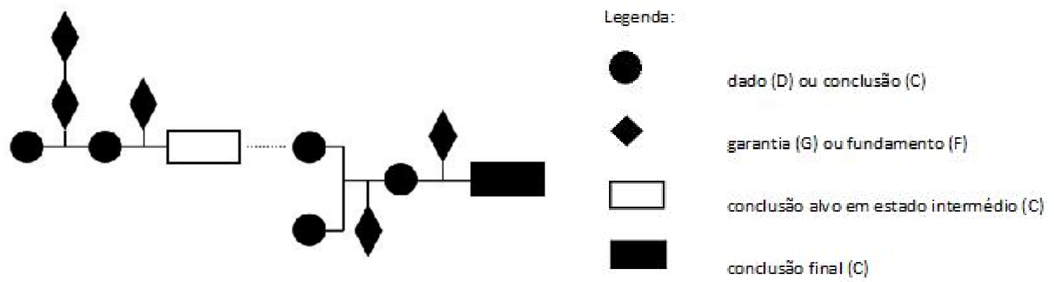


Figura 7.4.24. Representação esquemática global do discurso argumentativo do grupo G2 da resolução apresentada por Diofanto.

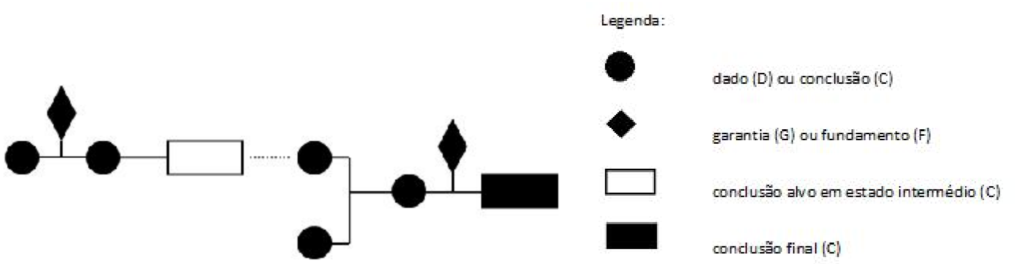


Figura 7.4.25. Representação esquemática global do discurso argumentativo do grupo G1 da resolução apresentada por Pedro Nunes.

Através de uma análise global destas argumentações, observa-se que na sua estrutura existem argumentos onde uma afirmação (conclusão) é deduzida a partir de uma outra afirmação (dado) através de conceitos matemáticos e fundamentos lógicos (garantias e fundamentos). Observa-se ainda que não existem correntes de argumentação que não estejam ligadas à estrutura principal, não se encontram presentes argumentos paralelos, nem é possível identificar a presença de refutações É ainda de notar que na estrutura da argumentação desenvolvida, respetivamente, pelos grupos G2 e G1 é possível identificar que uma afirmação estabelecida como conclusão, num próximo argumento, assume a função de dado e existem, no caso do discurso argumentativo desenvolvido pelo grupo G1, passos de argumentação que têm explicitamente falta de garantias e dados. Nesse sentido, estas estruturas de argumentação não evidenciam a maioria das características que caracterizam a estrutura-fonte e a estrutura-espiral. De facto, as características presentes nestas argumentações evidenciam a maior parte das características da *estrutura-reservatório*, visto que a estrutura-recolha admite refutações na sua estrutura. Além disso, é possível observar que há afirmações que marcam a transição entre diferentes passos do discurso. Por exemplo, em ambas as resoluções é possível verificar que a conclusão intermédia obtida na primeira parte do discurso resulta de um dados considerados do enunciado e só, posteriormente, adicionando o outro dado presente no enunciado é que se obtém a conclusão final. Contudo, é de observar que este discurso argumentativo é baseado na análise e interpretação de uma estratégia de resolução, portanto, durante este processo há uma procura, por parte dos alunos de justificar os diferentes procedimentos utilizados, o que naturalmente condiciona, em certa medida, a presença de refutações.

7.4.6. Dificuldades manifestadas pelos alunos

Linguagem

Ao nível da interpretação do de Pedro Nunes

Alguns alunos manifestaram dificuldades em interpretar a resolução proposta por Pedro Nunes.

Figura 7.4.26. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G4.

Estes alunos referem-se à parte da tarefa em que tinham de analisar a resolução do problema proposta por Pedro Nunes e em que tinham de transcrever uma determinada afirmação em notação simbólica atual, explicando como Pedro Nunes descobriu os números procurados. Para estes alunos a dificuldade em explicar a forma como Pedro Nunes descobriu os números resultou da dificuldade em interpretar a sua notação.

Compreensão matemática

Ao nível da interpretação da resolução proposta por Diofanto

Alguns alunos manifestaram dificuldades em interpretar a resolução apresentada por Diofanto. Numa determinada parte da sua resolução, Diofanto escreve «É ainda preciso que a diferença dos quadrados dos números forme 80 unidades. Mas a diferença dos seus quadrados é 40 aritmos; (…)». O facto de Diofanto referir que por um lado a diferença entre os quadrados dos números procurados é 80, mas por outro é 40 aritmos constituiu alguma dificuldade na interpretação desta afirmação, como se pode constatar no seguinte diálogo entre professor e o Daniel do grupo G2:

(1) Daniel: Em cima diz que a diferença dos quadrados é 80, mas depois a segunda… mas depois a seguir diz que a diferença entre os quadrados é 40 aritmos
(2) Professor: Então como é que podes descobrir isto?
Momento de silêncio
(3) Daniel: Agora temos que fazer isto [apontando para $(x + 10)^2 - (10 - x)^2$] para ver se…
(4) Professor: Tens que fazer o quê, desculpa?
(5) Daniel: Temos de fazer x mais dez ao quadrado menos dez menos x ao quadrado.
(6) Professor: E isso vai fazer o quê?
(7) Daniel: Se calhar vai nos dar o 80 ou o $40x$. Mas se calhar é o 80.
(8) Professor: Então, experimenta!

Embora o aluno identifique a diferença entre os quadrados dos números procurados através da expressão $(x + 10)^2 - (10 - x)^2$, o aluno não consegue visualizar, de forma imediata, que a simplificação algébrica desta expressão dará $40x$ (40 *aritmos* na linguagem de Diofanto) e que terá ser igualado a 80, pelas condições do enunciado. Esta dificuldade será esclarecida pela Paula do grupo G3 que intervém neste diálogo:

(9) Paula: Deve ser… isto [apontando para $(x + 10)^2 - (10 - x)^2$] tinha de ser igual a 80, mas igual a 40.
(10) Professor: 40 quê?
(11) Paula: x.
(12) Professor: O que é que tens de fazer então?
(13) Paula: Tenho de resolver a ver se isto [apontando para $(x + 10)^2 - (10 - x)^2$] dá $40x$ e depois igualar a 80.

Ainda ao nível da interpretação da resolução proposta por Diofanto, uma outra dificuldade surgiu no porquê de Diofanto ter escolhido o número 10 para associar ao aritmo: «Por que é que Diofanto escolheu o número 10 para designar os números?». Esta questão surge no grupo G2, um dos grupos de alunos que resolveu de forma algébrica o problema. Na sua resolução, estes alunos designaram por x um dos números procurados (o que corresponde ao aritmo de Diofanto), no entanto, designam o outro número procurado por $20 - x$, portanto, questionam o facto de Diofanto escolher $x + 10$ e $10 - x$ para designar os números procurados. No entanto, estes alunos mais tarde, na avaliação final da tarefa, ao compararem a sua estratégia de resolução com a de Diofanto justificam o porquê de Diofanto ter designado os números procurados por estas expressões.

Ao nível da linguagem algébrica

Na primeira parte da tarefa, em que era pedida a resolução do problema, embora o processo utilizado por alguns grupos tenha sido o método de tentativa e erro, outros optaram por resolver o problema de uma forma algébrica. Contudo, ao expressarem os números procurados através de uma incógnita, utilizaram a mesma letra para representar esses números. O excerto do diálogo seguinte, entre o professor e o G2, ilustra essa situação.

(1) Professor: Quais são os dados do problema? O que é que vocês procuram?
(2) Emanuel: Dois números…
(3) Nélson: ao quadrado [interrompendo o Emanuel]
(4) Emanuel e Daniel: Não!
(5) Emanuel: Que somados…
(6) Daniel: Dois números que somados dão 20 e que a diferença entre os seus quadrados vai dar 80 [interrompendo o Emanuel]
(7) Professor: Então tentem escrever esta informação que têm.
[…]
O Daniel escreve na folha $x + x = 20$
(8) Professor: Se escreverem x e x…
(9) Emanuel: Estamos a escrever o mesmo número!
(10) Professor: E têm que ser o mesmo número?
(11) Emanuel: Não. Fica x e y [e escreve na folha $x + y = 20$]
(12) Professor: Pronto.
(13) Daniel: Pois era isto que estava a tentar fazer há um bocado, mas que não sabia como havia de dizer. A sério! [vendo o ar desconfiado dos colegas]

Ao designar por x um dos números procurados, alguns alunos tiveram dificuldades em interpretar $20 - x$ como a expressão que traduz o outro número procurado.

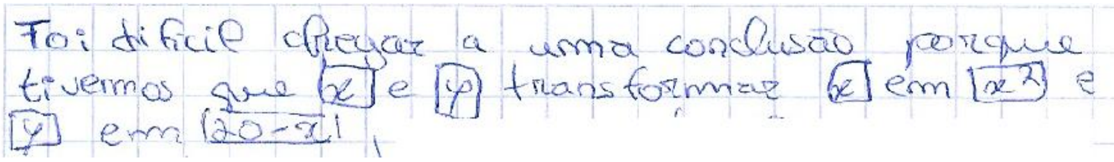

Foi difícil chegar a uma conclusão porque tivemos que $\boxed{x}$ e $\boxed{y}$ transformar $\boxed{x}$ em $\boxed{x}$ e $\boxed{y}$ em $\boxed{20-x}$

Figura 7.4.27. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G5.

Ao nível da realização de procedimentos algébricos

Na aplicação de determinados procedimentos algébricos, a maioria dos grupos manifestou alguma dificuldade na aplicação dos casos notáveis e em proceder à substituição das variáveis. O grupo G2 refere

As maiores dificuldades que sentimos foi quando tivemos que utilizar os casos notáveis, mais propriamente quando tivemos que utilizar o x e o y e não 2 x's e depois tivemos que tornar a utizar os 2 x's.

Figura 7.4.28. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G2.

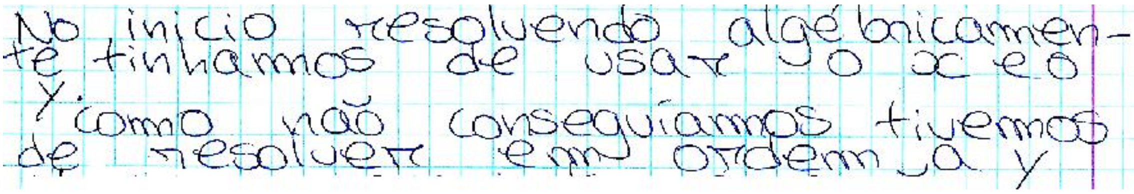
Também o grupo G4, na avaliação final do trabalho realizado, refere que gostou da estratégia de Diofanto pelo facto dessa estratégia de resolução não envolver casos notáveis.

Filipa: A estratégia que nós mais gostámos foi a de Diofanto.
Professor: Porquê?
Filipa: Porque foi a que não sentimos mais dificuldades e porque não tínhamos de usar casos notáveis.
Professor: Então as vossas dificuldades foram os casos notáveis?
Diana: Sim
Filipa: E porque tínhamos de substituir o *y* e o *x* por isso tivemos dificuldade.

As que tivemos mais dificuldades foi a que tivemos de utilizar os casos Notáveis porque estavamos com dificuldades em substituir o x e o y devidamente.

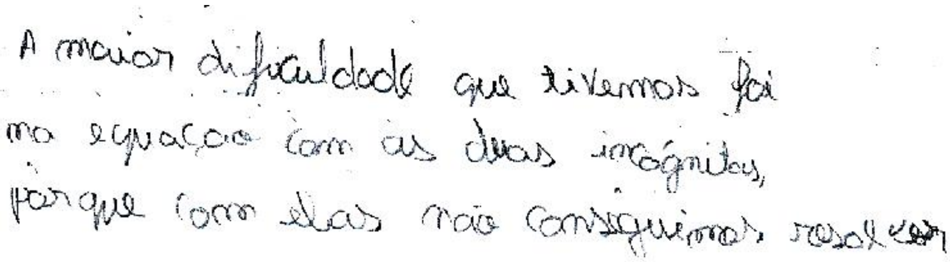
Figura 6.4.29. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G4 (continuação).

Também o aparecimento de uma equação com duas incógnitas, suscitou algumas dificuldades na resolução do problema.



No início resolvendo algébricamente tínhamos de usar o x e o y. Como não conseguíamos tivemos de resolver em ordem a y

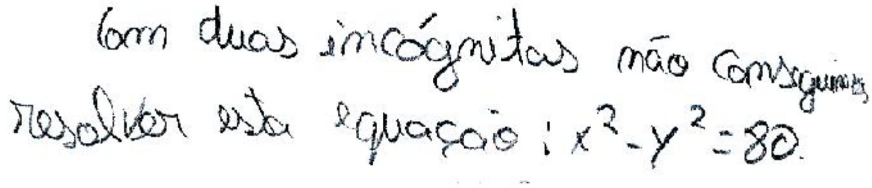
Figura 7.4.30. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G3.



A maior dificuldade que tivemos foi na equação com as duas incógnitas, porque com elas não conseguimos resolver

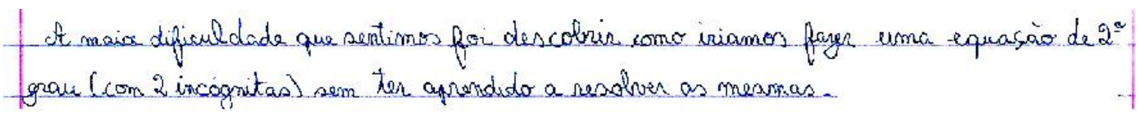
Figura 7.4.31. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G1.

Ao resolverem o problema de uma forma algébrica, os alunos designaram, por x e y os números procurados, obtendo, assim, duas equações, respetivamente, do primeiro e segundo graus a duas incógnitas: $x + y = 20$ e $x^2 - y^2 = 80$. Contudo, os alunos referem desconhecer como resolver este tipo de equações, porque «têm duas letras».



Com duas incógnitas não conseguimos resolver esta equação: $x^2-y^2=80$.

Figura 7.4.32. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G1 (continuação).



A maior dificuldade que sentimos foi descobrir como iríamos fazer uma equação de 2º grau (com 2 incógnitas) sem ter aprendido a resolver as mesmas.

Figura 7.4.33. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G2 (continuação).

Argumentação

Ao nível da apresentação de justificações

Os alunos revelaram ainda dificuldades em justificar quer os seus raciocínios quer determinados passos dos processos de resolução propostos por Diofanto e Pedro Nunes. A Ana do grupo G1 refere isso na sua avaliação individual final.

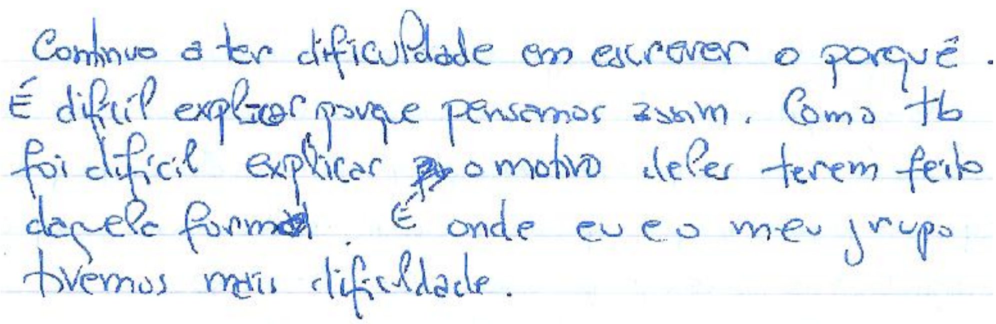

Continuo a ter dificuldade em escrever o porquê. É difícil explicar porque pensamos assim. Como tb foi difícil explicar o motivo deles terem feito daquela forma. É onde eu e o meu grupo tivemos mais dificuldade.

Figura 7.4.34. Excerto da avaliação final realizada pela Ana, grupo G1.

7.4.7. Avaliação realizada pelos alunos

Ao nível da *aprendizagem da matemática*, os alunos destacam que a realização desta tarefa permitiu-lhes aprender a matéria. O grupo G2 refere

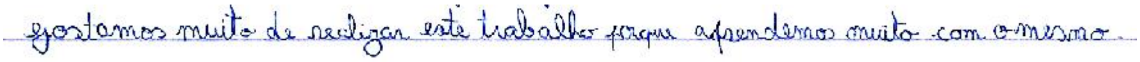

gostamos muito de realizar este trabalho porque aprendemos muito com o mesmo.

Figura 7.4.35. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G2 (continuação).

No entanto, o grupo G1, na sua avaliação final, refere explicitamente o que aprendeu:

Aprendemos muitas coisas com este problema: a resolver equações literais, a ver outras formas de resolver o mesmo problema e a escrever na nossa escrita de números e letras aquilo que os antigos matemáticos escreviam.

Figura 7.4.36. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G1 (continuação).

Procedem ainda ao registo comparativo entre as suas estratégias de resolução e as originais

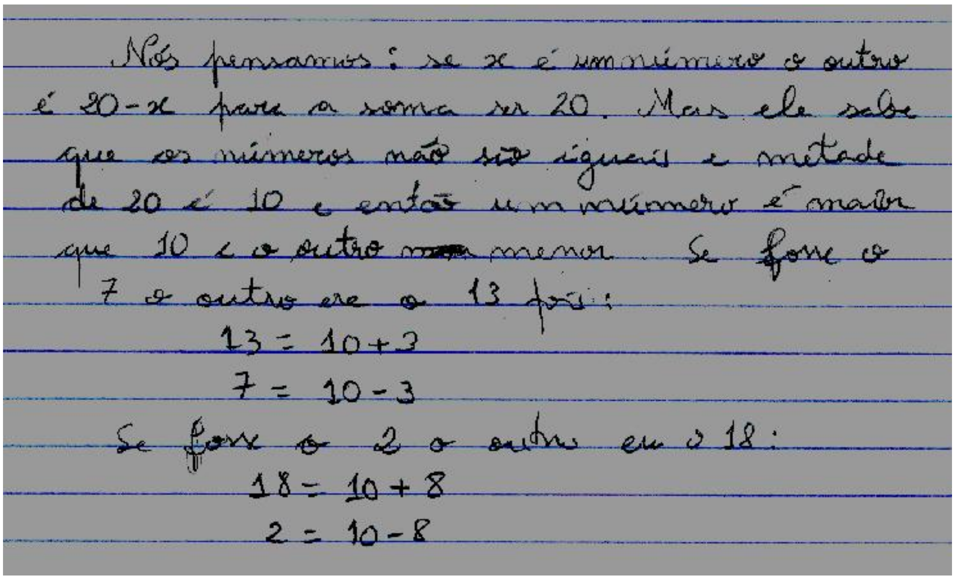
A estratégia que gostamos mais foi a de Diofanto porque a fórmula que ele utilizou foi a mais interessante e diferente do que todas as outras.

Figura 7.4.37. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G2 (continuação).

A estratégia que mais gostamos foi a de Diofanto porque era a que traduzia o problema numa forma mais simples.

Figura 7.4.38. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G4 (continuação).

Ao comparar as suas estratégias de resolução com as originais, os alunos entendem não só a economia e a vantagem dos atuais símbolos e processos matemáticos, mas também têm a possibilidade de confrontar as suas conjeturas com os argumentos e as estratégias de resolução utilizados no passado.



Nós pensamos: se x é um número o outro é 20-x para a soma ser 20. Mas ele sabe que os números não são iguais e metade de 20 é 10 e então um número é maior que 10 e o outro ~~ma~~ menor. Se fosse o 7 o outro era o 13 pois:

13 = 10+3

7 = 10-3

Se fosse o 2 o outro era o 18:

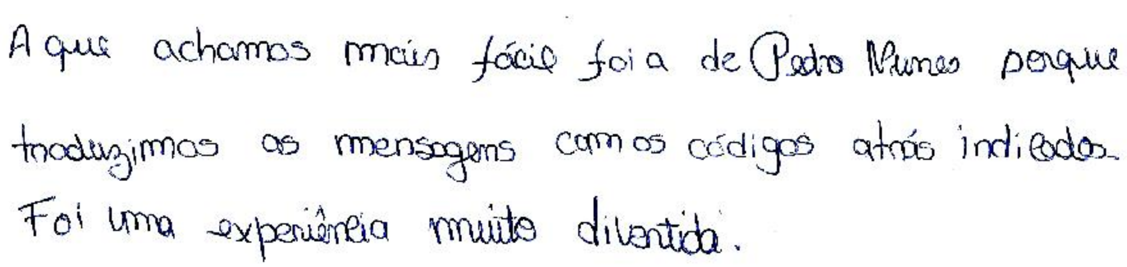
18 = 10 + 8

2 = 10 - 8

Figura 7.4.39. Registo efetuado pelo grupo G2 sobre a análise da estratégia de resolução proposta por Diofanto.

O facto de os alunos se tornarem capazes de comparar diferentes estratégias para a resolução de um mesmo problema permite, por um lado, que estes valorizem não só a importância da compreensão do mesmo, mas também a conceção, aplicação e justificação de estratégias que constituem os passos necessários para a resolução do problema; por outro, permite ainda o desenvolvimento dos processos de generalização e abstração.

Ao nível da *predisposição perante a matemática* é possível observar o interesse e o entusiasmo na realização da tarefa, nomeadamente em interpretar a notação usada por Pedro Nunes.



A que achamos mais fácil foi a de Pedro Nunes porque traduzimos as mensagens com os códigos atrás indicados. Foi uma experiência muito divertida.

Figura 7.4.40. Excerto da avaliação final realizada pelo G4 (continuação).

A estratégia ~~x~~ mais fácil para nós foi a de Pedro Nunes, porque tivemos que descodificar as mensagens.

Figura 7.4.41. Excerto da avaliação final realizada pelo G2 (continuação).

Os alunos realçam também o desafio em interpretar a notação usada pelos matemáticos na resolução do problema

A questão que mais gostamos foi a de Diofante porque era mais simples de resolver.
A Notação de Diofante em relação a de Pedro Nunes é muito mais simples.
Foi a tarefa que mais gostamos de resolver.

Figura 7.4.42. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G3.

Ao nível do *desenvolvimento da visão da natureza da matemática e da sua atividade*, os alunos destacam o modo de expressar as variáveis e representar equações.

Ao traduzir as mensagens ficamos a conhecer a linguagem de Diofanto e Pedro Nunes a resolver equações

Figura 7.4.43. Excerto da avaliação final realizada pelo G4 (continuação).

A realização desta tarefa proporcionou, assim, aos alunos uma outra forma de olhar a matemática e a atividade matemática, em particular sobre a linguagem simbólica usada por diferentes matemáticos em diferentes fases da história da matemática.

7.5. Duas torres, duas aves e uma fonte

A presente tarefa, dividida em quatro partes, teve como objetivo a resolução de problemas que envolvessem a aplicação do teorema de Pitágoras no plano, a utilização dos casos notáveis da multiplicação de binómios, a resolução de equações do 1.° grau e a aplicação dos critérios de semelhança de triângulos.

Na primeira parte da tarefa foi proposto aos alunos a resolução do seguinte problema:

> Duas aves estão no cimo de duas torres, uma das torres tem 30 metros de altura, a outra 40, e distam entre si apenas 50 metros; entre as torres está uma fonte. A um determinado instante as duas aves descem voando a partir das duas torres à mesma velocidade chegando ao mesmo tempo ao centro da referida fonte. A que distância se encontra a fonte das duas torres?

No entanto, foi pedido aos alunos que, antes de iniciarem a resolução do problema, esboçassem um desenho ilustrativo do problema proposto. Pretendia-se, assim, que os alunos visualizassem geometricamente a situação descrita. Foi ainda solicitado que, no contexto do problema, interpretassem a frase «as aves descem à mesma velocidade chegando ao mesmo tempo», com o intuito que respondessem à questão «a ave que sai da torre de 30 m de altura percorre menos, mais ou a mesma distância do que a que sai da torre de 50 m de altura?» e, assim, entendessem a situação problemática apresentada.

Nas restantes três partes, foi solicitado a leitura e análise das estratégias de resolução apresentadas por dois matemáticos, respetivamente, um italiano e um português, dos séculos XIII e XVI, Fibonacci e Gaspar Nicolas, com o objetivo de os alunos confrontarem estas resoluções com as suas próprias estratégias de resolução.

Na segunda parte e na terceira, foram apresentadas aos alunos duas estratégias de resolução de Fibonacci, publicadas no seu *Liber abaci* (Livro do ábaco). Escolheu-se estas duas estratégias de resolução pelo facto de serem resoluções que envolvem, respetivamente, um processo aritmético e outro geométrico. É de observar que na resolução de caráter aritmético, Fibonacci não apresenta explicitamente as operações aritméticas realizadas, usa implicitamente o teorema de Pitágoras e recorre ao método de falsa posição para resolver o problema. No processo geométrico, Fibonacci utiliza de forma implícita a semelhança de triângulos e propriedades dos triângulos.

Na quarta parte, foi apresentada a resolução de Gaspar Nicolas. Embora Gaspar Nicolas tivesse proposto e resolvido o problema usando outras medidas para a distância das torres e respetivas alturas, o processo apresentado, escrito sob a forma de uma receita, aproxima-se do nosso método algébrico para resolver equações. No entanto, não se encontra qualquer símbolo algébrico, o que indicia uma álgebra de caráter retórico.

Ao longo da realização da tarefa, foram apresentadas oralmente e por escrito (com recurso ao quadro de giz e em suporte papel) as conclusões de cada grupo. No final, e por escrito, os alunos manifestaram as suas opiniões não só sobre o trabalho realizado, mas também sobre as estratégias de resolução apresentadas pelos dois matemáticos.

7.5.1. Tipo de argumentos produzidos (na resolução do problema)

Todos os grupos tentaram resolver o problema proposto de forma aritmética, no entanto, é possível observar diferentes tipos de argumentos.

Argumentos empíricos

Embora recorrendo a exemplos não representativos, os argumentos produzidos pelos alunos não se restringem a uma simples enumeração, mas resultam de argumentos que se podem enquadrar na subcategoria *experiência crucial*. Tendo em consideração que a um determinado instante as duas aves descem voando, a partir das duas torres, à mesma velocidade chegando ao mesmo tempo ao centro da referida fonte e as duas aves estão no cimo de duas torres, uma com 30 metros de altura, e a outra com 40 (dados presentes no enunciado), os alunos observam que «a [torre] de 40 é mais alta do que a de 30 e tem que estar a menos distância da fonte para chegarem as duas [aves] ao mesmo tempo e à mesma velocidade.» (Nélson, grupo G2). Além disso, dada a diferença entre as alturas das duas torres, 10 metros, os alunos consideram que este valor vai influenciar na distância da fonte a cada uma das torres. O facto de os alunos terem em consideração os dados do problema, observando qual deverá ser a posição da fonte (neste caso mais próxima da torre de 40 metros, porque é mais alta), indicia que estes abordam o problema de forma geral. No entanto, resolvem-no apostando numa resolução de um caso particular.

Argumentos entre o empírico e o genérico

No entanto, observa-se que na interação discursiva do grupo G1, o argumento inicial apresentado por este grupo pode ser considerado *entre o empírico e o genérico*, visto que resulta de uma refutação.

Nuno: Desenhámos as torres [apontando para as torres desenhadas no papel] e o espaço entre elas que é 50. Se puséssemos a meio [a fonte] que era 25, dava que este [apontando para o pássaro que está na torre de 30 metros] descia mais rápido do que este [apontando para o pássaro que estava na torre de 40 metros], porque o prédio [referindo-se à torre de 40 metros] é mais alto.

7.5.2. Argumentação: análise local (na resolução do problema)

No que diz respeito à primeira parte da tarefa, através dos vários tipos de argumentos apresentados para resolver o problema, é possível proceder a uma reconstrução funcional das diferentes afirmações produzidas nos diferentes grupos. Contudo, é possível observar não só formas simples de argumentação, em que os elementos funcionais presentes são apenas dados, garantias e conclusões, mas também uma mais complexa, em que além dos elementos considerados como o "coração da argumentação" é possível encontrar uma refutação.

Forma simples

Embora obtivessem o mesmo resultado, o grupo G2 apresentou duas estratégias resolução diferentes, uma vez que os quatro alunos trabalharam em pares. Observe-se o excerto entre um par de alunos deste grupo e o professor:

(1) Nélson: A fonte está mais para o lado da [torre] de 40 metros, porque a distância entre as torres é 50 metros. Como uma [torre] tem mais 10 metros do que a outra, a [torre] de 30 metros vai estar a mais distância da fonte, porque a [torre] de 40 é mais alta do que a de 30 e tem que estar a menos distância da fonte para chegarem as duas ao mesmo tempo e à mesma velocidade.
(2) Professor: Então qual é a distância que está a fonte de cada uma…
(3) [interrompendo o professor] Daniel: 20 e 30 [apontando para as torres da figura]
(4) Nélson: A torre de 40 metros está a 20 da fonte. A torre de 30 metros está a 30 metros da fonte. E a soma de 20 mais 30 dá 50.

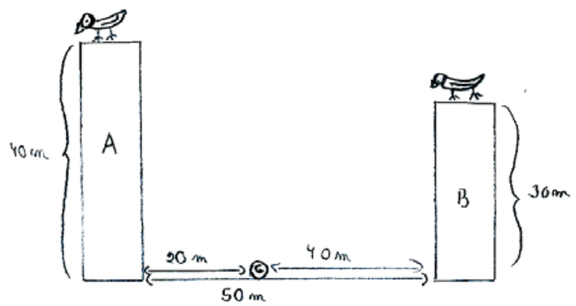


Figura 7.5.1. Ilustração do problema efetuada pelo grupo G2.

A partir deste excerto, observa-se que os alunos concluem que a fonte se encontra a 20 metros da torre de 40 metros de altura e a 30 metros da torre de 30 metros de altura (§3) e (§4). Contudo, a obtenção destes valores é baseada numa anterior conclusão: «(…) a [torre] de 40 [metros] (…) tem que estar a menos distância da fonte (…)» (§1). De facto, à custa desta conclusão, que funciona como novo dado, e conjuntamente com o dado do enunciado – de que as torres distam entre si 50 metros – os alunos determinam a distância da fonte a cada uma das torres. A conclusão intermédia – de que a fonte está mais perto da torre de 40 metros – é obtida pelo facto das torres terem alturas diferentes e as aves voarem à mesma velocidade, chegando ao mesmo tempo à fonte (dados presentes no enunciado). Embora não esteja implícito no diálogo, este último dado permite concluir que as aves percorrem a mesma distância. Acresce referir que neste discurso argumentativo, estiveram presentes duas garantias. As garantias apresentadas – a diferença entre as alturas das duas torres é de 10 metros e «a soma de 20 com 30 é 50» – permitem sustentar a afirmação final:. Para estes alunos o facto de a diferença de altura entre as torres ser de 10 metros, garante que a distância de cada torre à fonte terá de diferir de 10 metros (§1), portanto, a distância é, respetivamente, de 20 e 30 metros, visto que a soma de 20 com 30 é 50 (§3) (nova garantia).

O grupo G4 também apresentou um raciocínio semelhante. Observe-se o excerto do diálogo estabelecido entre o professor e este grupo de alunos:

(1) Professor: O que é que vocês fizeram?
(2) Diana: Nós desenhámos duas torres com duas aves cada uma. Uma com 40 metros de altura a outra com 30 metros de altura e a distância entre elas era 50 metros. Depois pusemos aqui a fonte a 20 metros desta [apontando para a torre de 40 metros] e a 30 metros desta [apontando para a torre de 30 metros], porque a diferença entre elas [duas torres] era 10 metros de altura, logo a fonte tinha de estar mais perto de uma 10 metros do que da outra.
(3) Professor: Ou seja…
(4) Diana: Fica mais perto desta [apontando para a torre de 40 metros] do que esta [apontando para a torre de 30 metros]. Esta aqui como [apontando para a torre de 40 metros] tem mais 10 metros do que esta [apontando para a torre de 30 metros], a fonte tem de estar mais afastada 10 metros para andarem a mesma distância. E aqui [apontando para a torre de 30 metros] como tem menos 10 metros de altura [a ave] vai andar menos, então a fonte tem de estar mais longe
(5) Filipa: Ou seja, a fonte tem de estar mais perto desta [apontando para a torre de 40 metros] do que esta [apontando para a torre de 30 metros].

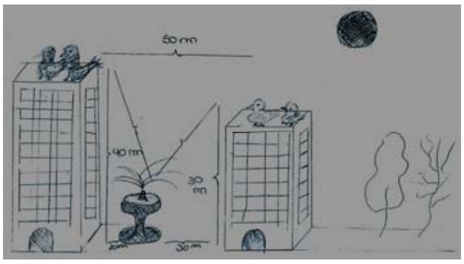


Figura 7.5.2. Ilustração do problema efetuada pelo grupo G4.

Através da análise deste excerto, observa-se que o grupo G4, tal como o par de alunos anterior, do grupo G2, considera que a fonte se encontra a 20 metros da torre de 40 metros e a 30 metros da torre de 30 metros de altura (§2). Tal como o par de alunos do grupo G2, a determinação destes valores foi baseada numa conclusão preliminar que funcionou como um novo dado na obtenção da conclusão final. Contudo, este grupo não apresenta a garantia de que «a soma de 20 mais 30 é 50» (Nélson, G2, §4). No entanto, contrariamente ao par de alunos do grupo G2, o grupo G4 refere explicitamente que as aves têm de percorrer a mesma distância, portanto, se as torres têm alturas diferentes, a fonte terá de se localizar mais perto da torre mais alta, uma vez que pelo enunciado as aves descem as torres à mesma velocidade, chegando ao mesmo tempo ao centro da fonte. Uma vez que a diferença entre as alturas das duas torres é de 10 metros, o grupo G4 refere, tal como o par de alunos do grupo G2, que a distância de cada torre à fonte terá de diferir de 10 metros (§2), portanto, a distância à fonte é respetivamente de 20 e 30 metros.

Uma vez que os argumentos do par de alunos do grupo G2 são iguais aos apresentados pelo grupo G4, seguidamente esquematiza-se, de acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G4:

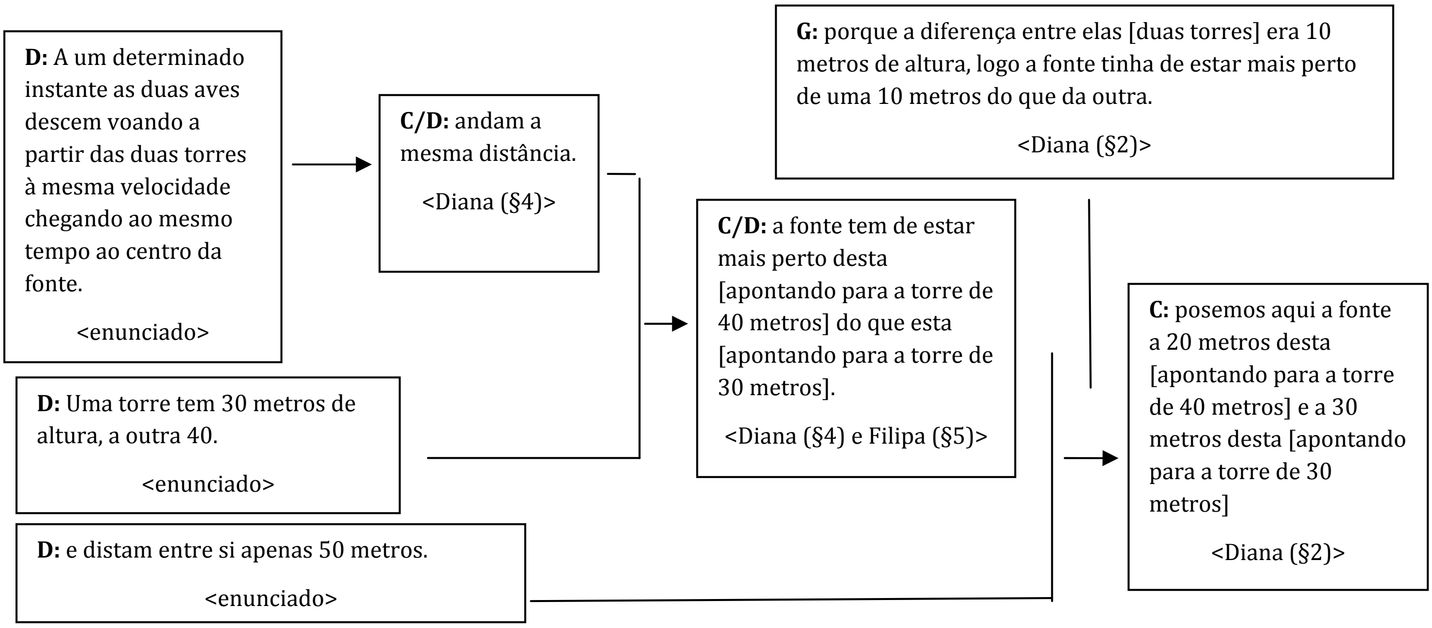


Figura 7.5.3. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G4.

Observe-se, agora, a estratégia de resolução apresentada pelo outro par de alunos do grupo G2:

Emanuel: Eu somei a distância que as aves iam percorrer 40, 30, e 50 [apontando, respetivamente, para a altura de cada uma das torres e a distância entre as torres] e dividi por 2. Deu 120 e dividi por 2 dá 60. 40 [apontando para a altura da torre maior] aqui tinha de ser 20 [apontando para a distância da torre de altura de 40 metros à fonte] e aqui tinha de ser 30 [apontando para a distância da torre de altura de 30 metros à fonte] para ficar 60 de cada lado.

Através deste excerto, percebe-se que o discurso argumentativo do Emanuel é constituído por uma conclusão intermédia – «60 de cada lado» – que funcionou como novo dado na obtenção da conclusão final. Contudo, esta conclusão intermédia, obtida a partir dos dados do enunciado – as medidas das alturas das torres e da distância entre ambas – foi sustentada pela garantia de somar 30, 40 e 50 e dividir essa soma por 2. É de observar, embora não o afirmando de forma explícita, que este par de alunos considera que o percurso que as aves percorrem do topo das torres à fonte é obtido pela soma do caminho percorrido do topo à base da torre com o caminho percorrido desde a base da torre à fonte, não sendo, portanto, o percurso efetuado pelas aves.

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes no raciocínio deste par de alunos do grupo G2 podem ser esquematizados da seguinte forma:

D: Uma torre tem 30 metros de altura, a outra 40 e distam entre si apenas 50 metros.
<enunciado>

C/D: 60 de cada lado
<Emanuel>

C: aqui tinha de ser 20 [apontando para a distância da torre de altura de 40 metros à fonte] e aqui tinha de ser 30 [apontando para a distância da torre de altura de 30 metros à fonte]
<Emanuel>

G: somei a distância que as aves iam percorrer 40, 30, e 50 [apontando, respetivamente, para a altura de cada uma das torres e a distância entre as torres] e dividi por 2
<Emanuel>

G: (...) para ficar 60 de cada lado.
<Emanuel>

Figura 7.5.4. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G2.

Uma vez que o grupo G2 apresentou duas estratégias de resolução, o professor questionou os alunos se existia alguma diferença entre ambas. Apesar do Nélson concordar mais com o processo que apresentou e o Emanuel considerar o seu processo mais explícito, o Daniel, embora considerasse que o resultado final era o mesmo, referiu que o raciocínio presente em ambas as estratégias apresentadas diferia no seguinte: no primeiro caso observou-se a diferença entre as alturas das duas torres e esse valor foi utilizado para localizar a fonte; no segundo caso somou-se todas as distâncias dadas e dividindo esse valor por 2 obteve-se a localização da fonte. No entanto, como se pode observar, a solução obtida em ambos processos não está correta. No primeiro processo, os alunos consideraram que a diferença entre a distância de cada uma das torres à fonte teria de ser igual a 10 metros, uma vez que correspondia à diferença entre as alturas dessas mesmas torres. No segundo processo, embora não o afirmem explicitamente, para os alunos estas aves não voam, mas sim descem as torres com as suas próprias patas e percorrem o restante caminho para a fonte novamente sobre as suas duas patas. O professor, confronta-os então com essa questão: «as aves voam, certo?». Confrontados com essa questão, os alunos respondem que esse é o facto da fonte não se encontrar a igual distância das duas torres.

Andreia: Se a fonte estivesse no meio esta [apontando para a ave em cima da torre de 30 metros] vai chegar primeiro que esta [apontando para a ave em cima da torre de 40 metros]
Professor: Mas por que é que chega primeiro?
Nélson: Porque esta [apontando para a torre de 30 metros] tem menos 10 metros de altura do que esta [apontando para a torre de 40 metros] e [as aves] voam à mesma velocidade [e chegam ao mesmo tempo].

Para este grupo de alunos, é claro que a distância percorrida por cada uma das aves à fonte era a mesma, portanto, a fonte não se poderia localizar no meio do caminho entre as duas torres. No entanto, para eles neste momento, ainda não é suficientemente claro que a distância percorrida pela ave, por exemplo, da torre de 30 metros à fonte não é igual à soma do comprimento da torre com a distância dessa torre à fonte. O professor pediu então aos alunos que analisassem melhor a figura que esboçaram, tendo em conta os resultados encontrados.

Forma complexa

Conclusão obtida à custa de uma refutação

Quase todos os grupos obtiveram como solução os valores referidos anteriormente, contudo, o grupo G1 apresentou outros valores para solução do problema. No entanto, a solução encontrada por este grupo de alunos resultou de uma refutação a uma afirmação. Observe-se o início do diálogo estabelecido entre o professor e este grupo de alunos:

(1) Professor: Diz…
(2) Nuno: Desenhámos as torres [apontando para as torres desenhadas no papel] e o espaço entre elas que é 50. Se puséssemos a meio [a fonte] que era 25, dava que este [apontando para o pássaro que está na torre de 30 metros] descia mais rápido do que este [apontando para o pássaro que estava na torre de 40 metros], porque o prédio é mais alto. Como este é mais alto, nós acrescentámos 10 metros à frente [para junto da torre de 40 metros], assim, para eles descerem à mesma velocidade [e chegarem ao mesmo tempo], assim, fazemos 35 [25 + 10] com este dado [apontando para a torre de 30 metros] e este *x* [apontando para o caminho que a ave iria percorrer] e fazemos o teorema de Pitágoras.
[…]

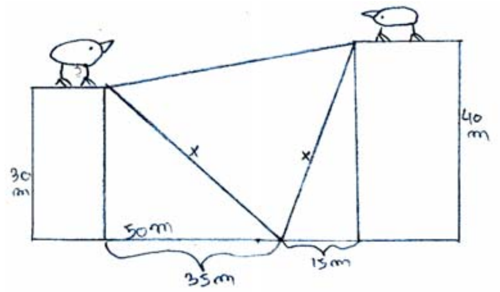


Figura 7.5.5. Ilustração do problema efetuada pelo grupo G1.

Através deste excerto, observa-se que a primeira solução pensada pelos alunos foi 25 metros, ou seja, a fonte situar-se-ia a 25 metros de cada uma das torres. No entanto, os alunos refutam esta possibilidade, visto que se isto acontecesse a ave situada em cima da torre de 30 metros chegaria mais rápido ao centro da torre do que a ave situada em cima da torre de 40 metros, uma vez que a torre de 40 metros era «um prédio mais alto». Embora, neste momento, não o refiram de forma explícita, os alunos têm em consideração um dos dados presentes no enunciado: as aves voam à mesma velocidade e chegam ao mesmo tempo ao centro da fonte. Assim, e considerando a negação da afirmação refutada como um novo dado, referem que a fonte deveria «andar para a frente» 10 metros, ou seja, aproximar-se 10 metros da torre de 40 metros, uma vez que esta torre era mais alta e as aves desciam à mesma velocidade e chegavam ao mesmo tempo à fonte. Nesse sentido, aos 25 metros (meio da distância entre as duas torres) adicionam 10 metros. Assim, para estes alunos, a fonte situar-se-ia a 35 metros da torre de 30 metros, e a 15 metros da torre de 40 metros. É de observar que, embora não refiram de forma explícita, a escolha dos 10 metros, esta está relacionada com o facto de este ser o valor da diferença entre as alturas das duas torres.

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes no raciocínio deste par de alunos do grupo G1 podem ser esquematizados da seguinte forma:

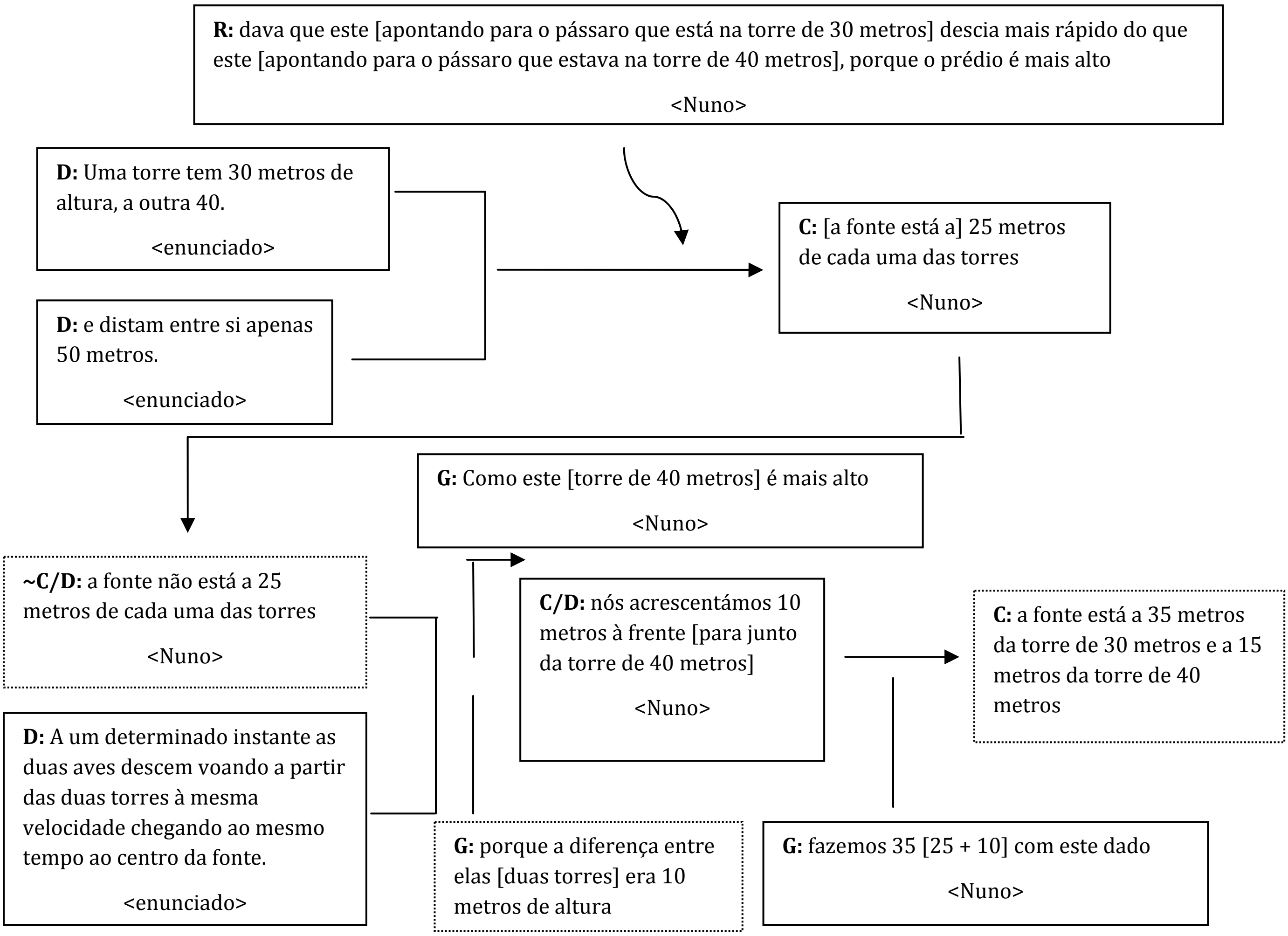


Figura 7.5.6. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G1.

É de notar que as linhas a tracejado das caixas que limitas algumas das afirmações apresentadas no esquema do argumento da figura 7.5.6., significam que essas afirmações não foram referidas de forma explícita durante o diálogo.

Refutação de uma conclusão

Na fase final do excerto apresentado, observa-se que os alunos referem que necessitam ainda de aplicar o teorema de Pitágoras. Uma vez que o professor não entende o porquê dessa necessidade, questiona o grupo, nomeadamente, sobre o *x* desenhado, por estes alunos, na figura. Observe-se um excerto do diálogo estabelecido entre o professor e este grupo de alunos:

(1) Professor: Então essas são as vossas medidas. Então expliquem-me o que é esse *x* marcado no desenho [apontando para o caminho que a ave iria voar para chegar à fonte].
(2) Miguel: É a hipotenusa [apontando para o triângulo retângulo com catetos, respetivamente, de comprimento igual à torre de 30 metros e comprimento igual à distância dessa torre à fonte].
(3) Professor: E esse *x* vai ser igual a…
(4) Nuno: A este [apontando para a hipotenusa do triângulo retângulo com catetos de comprimento igual à torre de 40 metros e comprimento igual à distância dessa torre à fonte].
(5) Professor: Isto porquê?...
(6) Miguel: As aves voam à mesma velocidade e chegam ao mesmo tempo.
(7) Professor: Se medem o mesmo, pelo teorema de Pitágoras…
(8) Nuno: Tem de dar o mesmo.
(9) Professor: Então determinem o valor de *x*.

Através do diálogo, fica claro que os alunos têm noção que as hipotenusas dos triângulos retângulos considerados têm de ter o mesmo comprimento (§4) e (§6). Uma vez que a solução encontrada pelos alunos não satisfaz o pedido, o professor aproveita a ideia de eles quererem aplicar o teorema de Pitágoras e sugere-lhes que determinem o valor de *x*. Passado algum tempo, o professor é chamado por este grupo, que lhe comunica que os valores encontrados anteriormente não resultam, uma vez que ao aplicarem o teorema de Pitágoras a ambos triângulos retângulos, obtêm valores diferentes para a medida das hipotenusas:

Passado algum tempo.
Professor: O que é que aconteceu?
Nuno: Dá mal! Não dá! [mostrando os cálculos efetuados]
Professor: Então o que é que aconteceu? O que é que não pode acontecer?
Nuno: O nosso raciocínio!
Professor: E qual era o vosso raciocínio?
Nuno: Somar 10 a 25 não funciona!

Como referido, nenhum grupo conseguiu determinar corretamente a localização da fonte. Contudo, como observado, apenas o grupo G1 conseguiu refutar os valores encontrados, sendo esses valores diferentes dos obtidos pelos restantes grupos. Uma vez que todos os outros grupos obtiveram os mesmos valores, o professor pediu ao grupo G2 que apresentasse no quadro a toda a turma a sua resolução. Eles optaram por apresentar a estratégia do Emanuel. O Emanuel, no quadro, apresentou o seu raciocínio, justificando o porquê da obtenção dos valores.

Emanuel: Somei as distâncias todas que as aves iam percorrer e dividi por 2 [escreve o algoritmo da divisão no quadro], 120 a dividir por 2. [Dá] 60 para cada lado. Então cada ave tinha de percorrer 60 metros. Aqui a fonte tinha de estar a 30 [apontando para a torre de 30 metros] e a 20 deste lado [apontando para a torre de 40 metros]. Para ficar 60 para esta ave percorrer [apontando para a ave que estava em cima da torre de 30 metros] e 60 para esta ave percorrer [apontando para a ave que estava em cima da torre de 40 metros].

Seguidamente, o professor questiona toda a turma sobre a validade dos resultados apresentados pelo Emanuel. Embora tenham obtido os mesmos valores, os restantes grupos referiram que o seu processo tinha sido diferente. Contudo, o Nuno, elemento do grupo G1, refere que para estes valores serem os corretos é necessário aplicar o teorema de Pitágoras. Mais uma vez estamos perante a refutação a uma conclusão. Observe-se o diálogo estabelecido entre o professor e a turma:

(1) Nuno: Temos de aplicar o teorema de Pitágoras.
(2) Professor: Mas para aplicar o teorema de Pitágoras é necessário…
(3) Nuno: Termos triângulos retângulos.
(4) Professor: E, na figura, onde estão os triângulos retângulos?
O Nuno desenha os triângulos considerando, respetivamente, um triângulo de catetos com medidas 30 e 30; e outro de medidas 40 e 20. E seguidamente designa por x o comprimento de ambas hipotenusas.
(5) Professor: Por que é que ambos comprimentos têm x?
(6) Nuno: Porque são as hipotenusas dos triângulos?
(7) Professor: Sim, representam as hipotenusas desses dois triângulos, mas por que é que medem o mesmo? Alguém sabe dizer porquê? [o professor solicita a participação dos restantes elementos da turma]
Momento de silêncio
(8) Carla: Porque [as aves] percorreram a mesma distância.
(9) Professor: Porque pelo enunciado as aves percorrem a mesma distância.
O Nuno no quadro procede à aplicação do teorema de Pitágoras. No final dos cálculos o professor pergunta:
(10) Professor: Então o que é que aconteceu?
(11) Paula: Não deu igual!
(12) Professor: E tinha de dar o mesmo valor?
(13) Paula: Sim.
(14) Professor: Então o que é isso significa?
(15) Nuno: Que está mal!
(16) Professor: O que é que está mal?
(17) Miguel: Os valores que o Emanuel colocou ali.

Através deste excerto, observa-se que os alunos entendem que se estes valores estivessem corretos, o valor das medidas das hipotenusas seria o mesmo, uma vez que as aves percorrem a mesma distância (§8). Os alunos ficam, portanto, convencidos que os valores encontrados não solucionam o problema, contudo, não é apresentada nenhuma alternativa de resolução. O professor opta, assim, por apresentar a resolução aritmética de Fibonacci por forma a que os alunos pudessem perceber o que falhou nas suas estratégias de resolução.

7.5.3. Argumentação: análise local (na leitura e interpretação de raciocínios presentes em fontes primárias)

Nesta segunda parte da tarefa, quando os alunos são confrontados com a resolução aritmética de Fibonacci, a maioria dos grupos, a partir da informação, presente no texto, de que

> «(…) em geometria é claramente demonstrado que a altura [de cada] torre multiplicada por si própria e adicionada à distância da torre ao centro da fonte multiplicada por si própria é a mesma que o segmento de reta do centro da fonte ao topo da torre multiplicado por si próprio; isto é portanto conhecido.»

consegue solucionar o problema de forma algébrica. A partir do descrito, estes grupos obtêm a seguinte igualdade: $900 + x^2 = 1600 + (50 - x)^2$, embora não fosse esse o sentido da informação transmitida. Observe-se o diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G2:

(1) Emanuel: 900. [escrevendo ao lado da torre mais baixa] Aqui 1600. [escrevendo ao lado da torre mais alta]
(2) Professor: Depois o que é que ele diz? Ele adiciona o quê?
(3) Emanuel: A distância da torre ao centro da fonte multiplicada por si própria… ao quadrado
(4) Professor: A distância da torre ao quadrado já está. Quanto é que deu numa delas?
(5) Emanuel: 900.
(6) Professor. E o que é que ele faz? A 900 soma o quê?
(7) Emanuel: A distância da torre ao centro da fonte ao quadrado.
(8) Professor: Sabes quanto é essa distância?
(9) Emanuel: Não. É x!
(10) Professor: É x?

(11) Emanuel. Pode ser x, pois não conheço.
(12) Professor. Certo, se for x… marca no teu desenho.
O Emanuel marca no desenho o comprimento x. No entanto, designa, inicialmente, por x a distância percorrida pela ave à fonte. O professor questiona.
(13) Professor: Então achas que o x é aí, ou é a distância da torre à fonte? Daniel?
(14) Daniel: Eu acho que não é aí [apontando para o que Emanuel escreveu], lê! [virando-se para o Emanuel e apontando para o enunciado]
O Emanuel lê de novo o enunciado.
(15) Emanuel: A distância da torre… [lendo] Ai é de baixo! x é isto. [e designa por x a distância da torre de 30 metros à fonte na sua figura]
(16) Professor: Hum.
(17) Emanuel: Vai ser isto [apontando para o 900] mais x ao quadrado [escrevendo ao lado da figura $900 + x^2$]. Depois também há este 1600.
(18) Professor: Depois o que é que ele diz? Diz que é a mesma…
(19) Emanuel: A soma disto [apontando para $900 + x^2$] é isto [apontando para a distância do caminho percorrido da ave à fonte], que é $900 + x^2$.
(20) Professor: E tu concordas com o que está aí?
Momento de silêncio.
(21) Emanuel: Sim, é o teorema de Pitágoras.

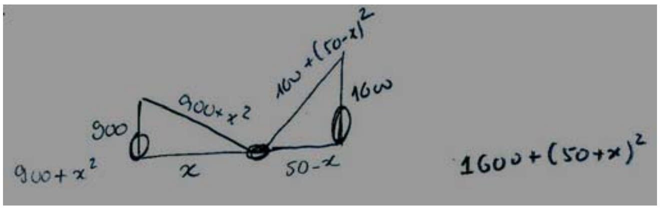


Figura 7.5.7. Ilustração do problema efetuada pelo grupo G2.

A partir deste diálogo, observa-se que os alunos traduzem, em notação atual, a informação presente no excerto apresentado, aplicando essa mesma informação às medidas presentes no seu esboço (§1), (§5), (§9), (§11) e (§15). Além de terem em consideração os dados presentes no enunciado – uma torre tem 30 metros de altura, a outra 40 e distam entre si 50 metros – os alunos apresentam um novo dado, resultante da sua escolha (dado escolha): designam por x a distância da torre de 30 metros à fonte. Assim, ao designar por x a distância entre a torre de 30 metros e a fonte, obtêm a expressão $900 + x^2$ (§17), reparando que esse valor corresponde ao quadrado do caminho percorrido pela ave (§19). Note-se que eles não são rigorosos nesta sua afirmação, uma vez que indicam que a distância percorrida pelas aves é $900 + x^2$, no entanto, é implícito o seu raciocínio, pois garantem esta afirmação referindo que esta igualdade (entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos) é possível pelo teorema de Pitágoras (§21). No entanto, os alunos reparam ainda que podiam fazer o mesmo raciocínio com a torre de 40 metros, ou seja, 1600 (40^2) (§17). Observe-se a continuação do diálogo.

(22) Professor: Vamos lá continuar. Podiam ter feito o mesmo no outro triângulo?
(23) Daniel: Sim.
(24) Emanuel: Aqui não é o x! [apontando para a distância da fonte à torre de 40 metros]
(25) Professor: Então é quanto aqui?
(26) Emanuel: $50 - x$. [escrevendo para designar a distância da fonte à torre de 40 metros]
Seguidamente, escreve a expressão $1600 + (50 - x)$ para designar a distância da ave que está no topo da torre de 40 metros à fonte.
(27) Professor: Acham que está correto o que o Emanuel escreveu?
(28) Andreia: É preciso ser ao quadrado.
(29) Professor: Então o que é que falta aí?
(30) Emanuel: O quadrado [e completa a expressão, ficando com $1600 + (50 - x)^2$]
(31) Professor. E agora o que podem fazer com estas expressões?
(32) Emanuel: Isto é um caso notável [apontando para $(50 - x)^2$]
(33) Daniel: Sim e isto [apontando para a expressão $900 + x^2$] dá-nos o que a ave andou.
(34) Professor: Sim e o que podem fazer com estas duas expressões?
(35) Emanuel: Temos de igualar! [respondendo muito prontamente]
(36) Professor: E por que é que igualas?
(37) Emanuel: Tem de ser a mesma distância, porque as aves percorrem a mesma distância até ao centro da fonte [escrevendo $900 + x^2 = 1600 + (50 - x)^2$]. E agora resolvemos.

Através da análise deste excerto, observa-se que os alunos concluem que a distância da fonte à torre de 40 metros é $50 - x$ metros, visto que tinham designado por x a distância da torre de 30 metros à fonte (§26). Esta nova afirmação será um novo dado na próxima conclusão. Após algum descuido na escrita da expressão algébrica que traduz o quadrado da distância percorrida pela ave da torre de 40 metros (§28), os alunos escrevem a expressão $1600 + (50 - x)^2$ (§30), afirmando, embora, não corretamente, que esta expressão «dá-nos o que a ave andou» (§33). É de observar que os alunos, desta vez, não apresentam, de forma explícita, a garantia que permite sustentar esta afirmação, contudo, tendo em atenção a justificação apresentada na determinação da expressão $900 + x^2$, está implícito que os alunos têm em consideração o teorema de Pitágoras. No entanto, perante a pergunta do professor sobre «o que podem fazer com estas expressões?» (§31), os alunos terminam referindo que «temos de igualar» (§35), visto que as aves percorrem a mesma distância (§37). Observe-se que os alunos, mais uma vez, são pouco rigorosos na forma como se referem à distância percorrida pelas aves. De facto, cada uma destas expressões obtida traduz o quadrado dessa distância e não a própria distância. Posteriormente, o professor comenta este facto com os alunos e estes referem que era o queriam dizer.

Embora, o objetivo desta parte da tarefa fosse analisar o processo de resolução apresentado por Fibonacci, este grupo, a partir da leitura da primeira parte da resolução de Fibonacci, optou por traduzir algebricamente esta informação, obtendo uma equação. Assim, para este grupo, bastava resolver a equação e, portanto, obter as soluções procuradas.

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes no raciocínio do grupo G2 podem ser esquematizados da seguinte forma:

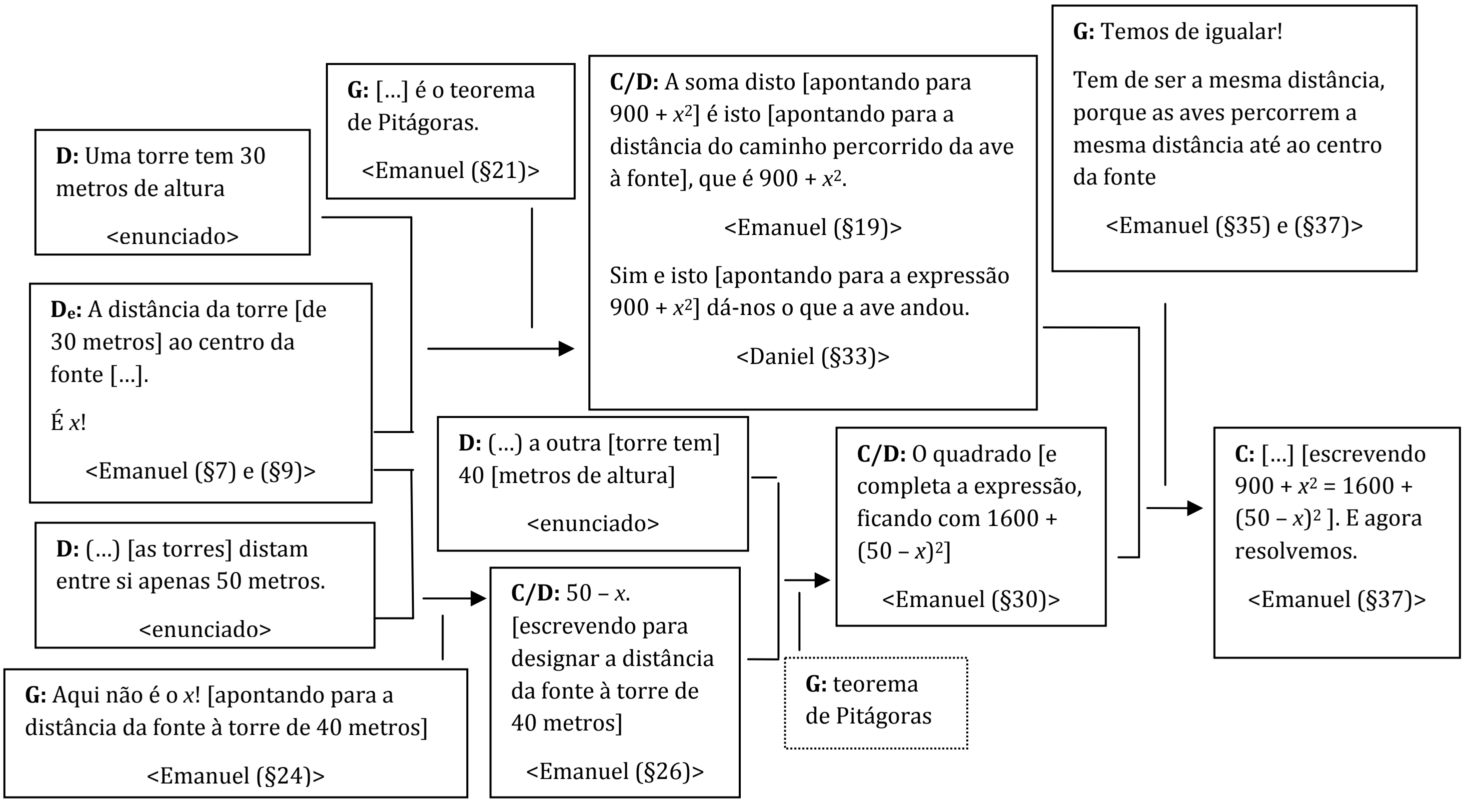


Figura 7.5.8. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G2.

É de notar que a caixa apresentada no esquema a tracejado refere-se a uma afirmação que não foi explicitamente referida.

Após resolver algebricamente a equação obtida, o grupo G2 continuou a leitura e análise da estratégia de resolução de Fibonacci. Observe-se a análise escrita realizada por este grupo:

O Fibonacci para resolver este problema utilizou a falsa posição. Ele começou por atribuir valores da fonte ao prédio (torre) mais alta. O número que atribuiu o nº 10. Como ele sabia, através da interpretação do problema, sabia que de uma torre à outra a distância era de 50 passos. Logo se atribuiu 10 para a distância da maior torre à fonte, a distância para torre mais pequena à fonte era 40 passos. Como ele sabia que o que estava representado era o teorema de pitágoras, elevou tudo ao quadrado e fez as seguintes contas:

$40^2 = 1600$ $\quad$ $1600 + 100 = 1700$

$10^2 = 100$

$30^2 = 900$ $\quad$ $1600 + 900 = 2500$

$40^2 = 1600$

Diferença dos resultados: 800

Figura 7.5.9. Análise escrita da resolução apresentada por Fibonacci realizada pelo grupo G2.

Este grupo de alunos começa por referir que o método utilizado por Fibonacci para resolver o problema foi o método de falsa posição, método esse utilizado frequentemente pelos egípcios na resolução de problemas. Os alunos fazem referência a este facto, pois o procedimento utilizado por Fibonacci corresponde a escolher uma determinada medida para a distância da fonte à torre mais alta, que não sendo a solução do problema é, depois, corrigida por forma a obter a solução correta.

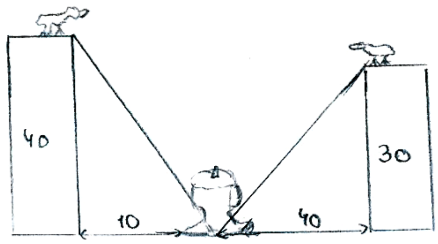


Figura 7.5.10. Ilustração da resolução apresentada por Fibonacci efetuada pelo grupo G2.

Os alunos observam que Fibonacci designou por 10 a distância da fonte à torre mais alta, introduzindo um novo dado no problema; naturalmente que a distância da fonte à torre mais baixa será 40, visto que «ele sabia através da interpretação do problema que de uma torre à outra a distância era de 50 passos». Embora não o refiram de forma explícita, para estes alunos, a escolha deste valor, por parte de Fibonacci, está relacionada com a diferença entre as alturas das torres. Seguidamente, os alunos referem que Fibonacci elevou ao quadrado estes valores (alturas das torres e distância das torres à fonte, respetivamente), uma vez que Fibonacci «sabia que o que estava representado na figura era o teorema de Pitágoras», procedendo à diferença entre os resultados, obtendo no presente caso 800.

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes nesta fase da na interpretação realizada pelo grupo G2 ao raciocínio apresentado por Fibonacci podem ser esquematizados da seguinte forma:

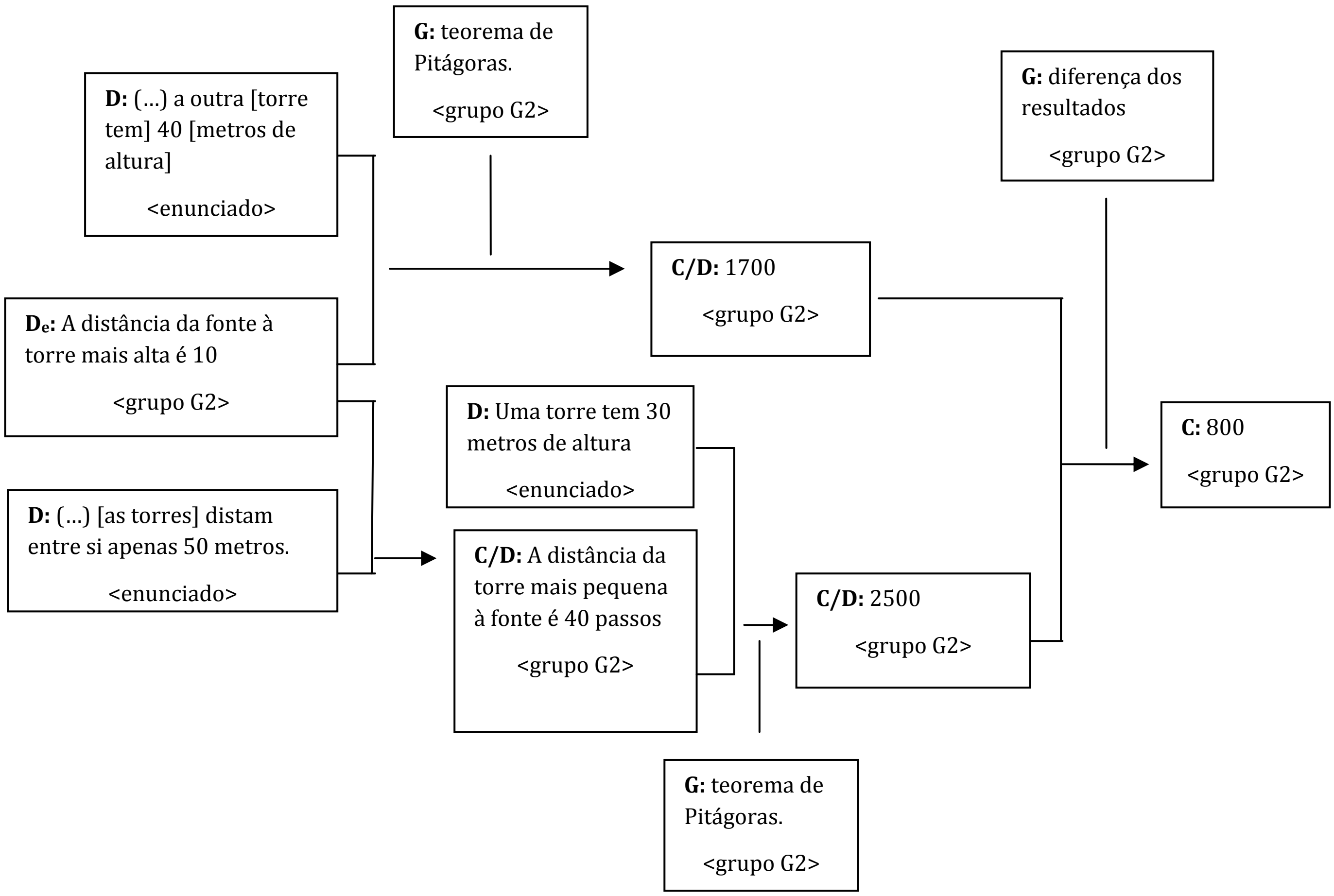
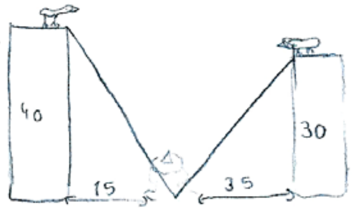


Figura 7.5.11. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes na interpretação realizada pelo grupo G2 do raciocínio apresentado por Fibonacci.

Para sabermos os verdadeiros resultados os resultados tinham que ser iguais, logo o Fibonacci viu que os resultados não eram iguais então andou 5 passos para o lado da torre mais baixa.



$40^2 = 1600$
$15^2 = 225$

$1600 + 225 = 1825$

$30^2 = 900$
$35^2 = 1225$

$900 + 1225 = 2125$

D.R. = 300

Fez outra vez as mesmas contas para ver se o resultado já estavam bem e ~~reparou~~ reparou que os valores ainda não eram iguais, logo a fonte não estavas bem posicionada.

Figura 7.5.12. Análise escrita da resolução apresentada por Fibonacci realizada pelo grupo G2 (continuação).

Os alunos continuam a sua interpretação, observando que «para sabermos os verdadeiros resultados, os resultados tinham de ser iguais», ou seja, a diferença teria de ser zero, ou seja, de acordo com Fibonacci «(...) esta posição está longe de ser o verdadeiro valor em 800 (...)», portanto, os alunos referem que Fibonacci colocou a fonte 5 passos mais próximo da torre mais baixa. De forma implícita, os alunos têm em consideração o facto das aves voarem à mesma velocidade e chegarem ao mesmo tempo ao centro da fonte (dado do enunciado), o que permite concluir que as aves percorrem a mesma distância. Novamente, através do mesmo procedimento, «outra vez as mesmas contas» que correspondem à aplicação do teorema de Pitágoras, os alunos referem que Fibonacci obteve um novo valor para diferença entre a distância percorrida pelas aves, desta vez 300. Mais uma vez os valores obtidos não são iguais, portanto, «a fonte não estava bem posicionada».

Através da análise deste excerto, observa-se que a escolha de um novo valor (15) para a distância da fonte à torre mais alta resulta da refutação da conclusão obtida à custa do dado inicialmente escolhido (10), uma vez que a diferença entre os resultados obtidos não era zero.

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes nesta fase da na interpretação realizada pelo grupo G2 ao raciocínio apresentado por Fibonacci podem ser esquematizados da seguinte forma:

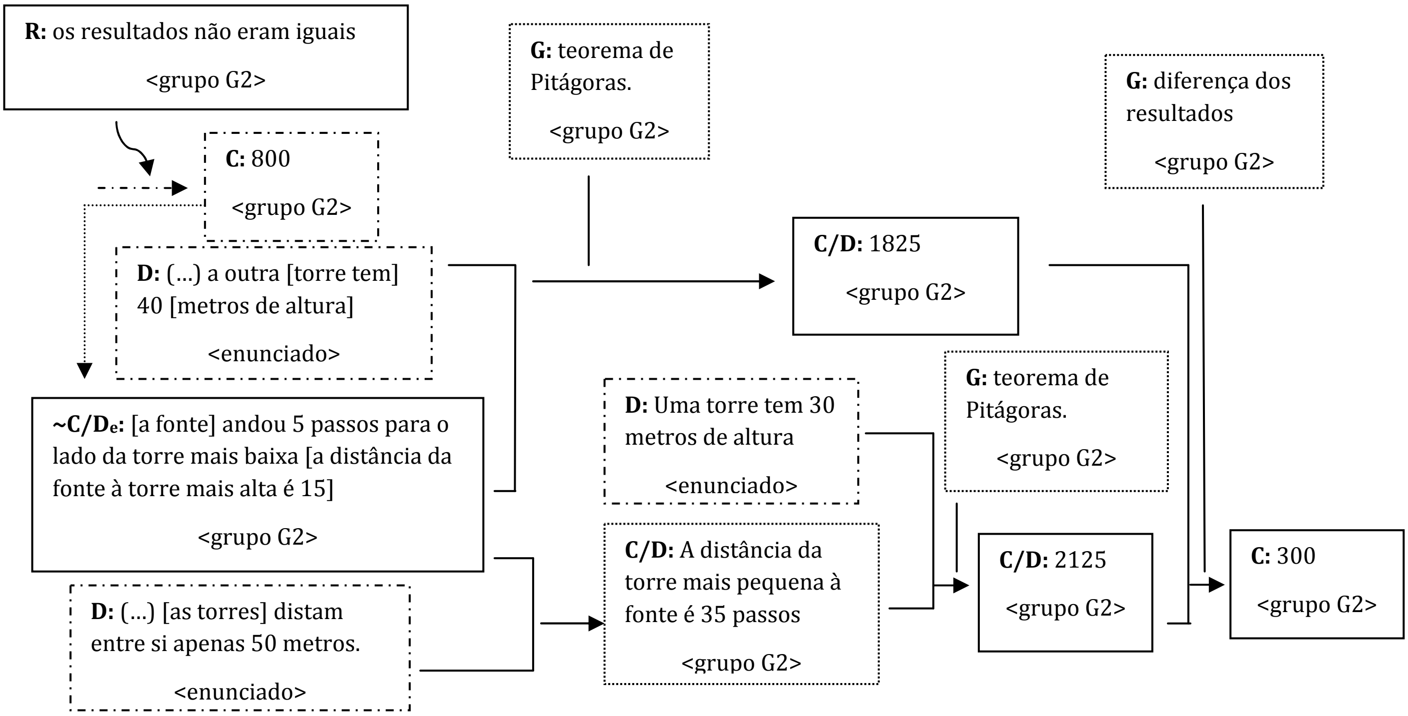
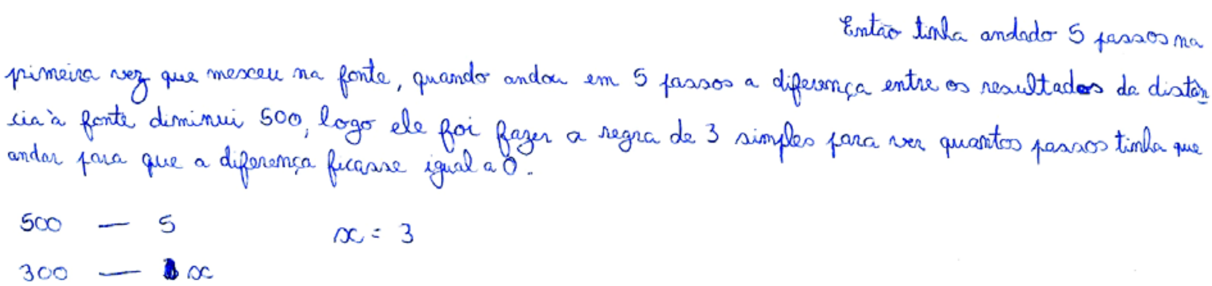


Figura 7.5.13. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes na interpretação realizada pelo grupo G2 ao raciocínio apresentado por Fibonacci.

É de notar que as caixas apresentadas no esquema a linha não contínua referem-se a afirmações que foram anteriormente introduzidas. As caixas a tracejado referem-se a afirmações implícitas no discurso argumentativo.

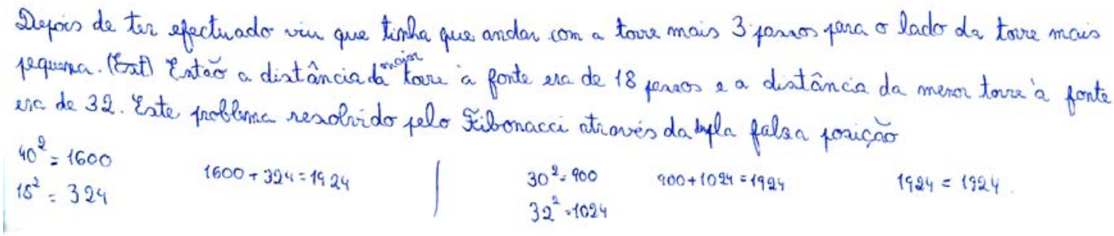

Então tinha andado 5 passos na primeira vez que mexeu na fonte, quando andou em 5 passos a diferença entre os resultados da distância à fonte diminui 500, logo ele foi fazer a regra de 3 simples para ver quantos passos tinha que andar para que a diferença ficasse igual a 0.

500 — 5 $x = 3$

300 — x

Figura 7.5.14. Análise escrita da resolução apresentada por Fibonacci realizada pelo grupo G2 (continuação).

Continuando a análise da interpretação realizada pelos alunos, estes referem que Fibonacci observou que ao "mexer" em 5 passos a fonte, ou seja, ao distanciar-se 5 passos da torre mais alta, em relação à distância previamente definida da fonte a cada uma das torres (10 em relação à torre mais alta e 40 em relação à torre de menor altura), a diferença entre a distância percorrida por cada uma das aves era 300, ou seja, esta diferença diminuía em 500 passos, visto que a anterior diferença era 800, portanto, o valor obtido estava mais próximo do verdadeiro que seria zero, visto, que as aves percorrem a mesma distância. Desta forma, os alunos referem que Fibonacci «foi fazer a regra de 3 simples para ver quantos passos tinha que andar para que a diferença ficasse igual a 0». Contudo, na resolução apresentada por Fibonacci não há qualquer referência esta regra, mas sim uma receita numérica – «multiplicas o 5 por 300, e divides por 500» – que os alunos validam, fundamentando que Fibonacci aplicou a regra de 3 simples.


Depois de ter efectuado viu que tinha que andar com a torre mais 3 passos para o lado da torre mais pequena. ~~(Ent)~~ Então a distância da maior torre à fonte era de 18 passos e a distância da menor torre à fonte era de 32. Este problema resolvido pelo Fibonacci através da ~~dupla~~ falsa posição

$40^2 = 1600$ $\quad 1600 + 324 = 1924$ $\quad$ | $\quad 30^2 = 900$ $\quad 900 + 1024 = 1924$ $\quad 1924 = 1924$

$15^2 = 324$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ $32^2 = 1024$

Figura 7.5.15. Análise escrita da resolução apresentada por Fibonacci realizada pelo grupo G2 (continuação).

Calculado esse valor, ou seja, verificando que teria de “mexer” em mais 3 passos, os alunos observam que fica determinada a distância da fonte a cada uma das torres, respetivamente, 18 e 32 passos.

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes nesta fase da interpretação realizada pelo grupo G2 ao raciocínio apresentado por Fibonacci podem ser esquematizados da seguinte forma:

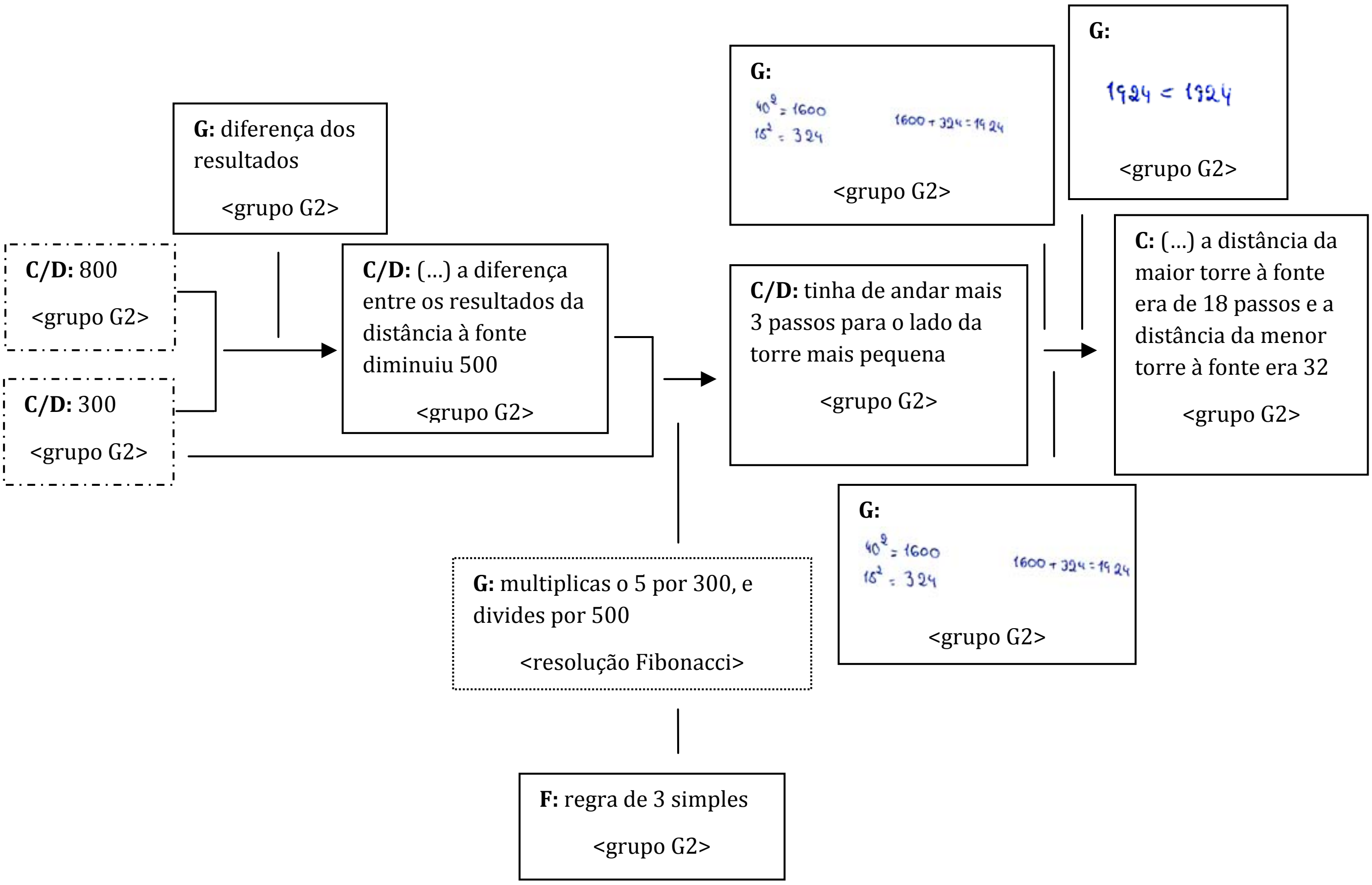


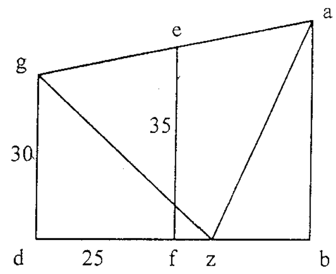
Figura 7.5.16. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes na interpretação realizada pelo grupo G2 ao raciocínio apresentado por Fibonacci.

É de notar que as caixas apresentadas no esquema a linha não contínua referem-se a afirmações que foram anteriormente introduzidas. A caixa a tracejado refere-se a uma afirmação implícita no discurso argumentativo.

Na terceira parte da tarefa é proposta aos alunos a leitura e análise de uma outra estratégia apresentada por Fibonacci, neste caso de caráter geométrico. Fibonacci inicia a resolução do problema mostrando geometricamente que o ponto *z* é o centro da fonte. Após ter justificado que o ponto *z* era o centro da fonte, exemplifica o seu raciocínio numericamente.

Nesta primeira fase, os alunos são desafiados a ler o início da resolução de Fibonacci e a encontrar uma justificação para o facto do ponto *z* ser o centro da fonte.

Seja portanto a maior torre a linha de segmento *.ab.*, a menor *.gd.*; o espaço entre elas é a linha de segmento *.bd.*, e o topo delas são ligadas pela linha de segmento *.ag.* que é separada em duas partes iguais pelo ponto *.e.*; a partir deste [ponto] é estendida a linha de segmento *.ef.* paralela às linhas *.ab.* e *.gd.*, e a partir do ponto *.e.* é estendida a linha segmento *.ez.* fazendo dois ângulos retos com a linha *.ag.*, isto é em *.e.*; eu digo que o ponto *.z.* é o centro da fonte, (…)



No diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G2 foi possível observar argumentos no conjunto de afirmações apresentadas por parte dos alunos, por forma a justificarem o seu raciocínio. Observe-se o seguinte excerto:

(1) Professor: O que é que disseste?
(2) Emanuel: Que o segmento de reta *ez* é perpendicular ao segmento de reta *ga*.
(3) Professor: E isso faz o quê?
(4) Daniel: Que eles têm a mesma distância.
(5) Professor: Mas quem é que tem a mesma distância?
(6) Daniel: O *az* e o *gz*.
(7) Emanuel: Isto [apontando para o segmento *az*] é igual a isto [apontando para o segmento *gz*].
(8) Daniel: Têm a mesma distância.
(9) Professor: Então basta que o ângulo [apontando para o ângulo *gez*] seja reto para estes segmentos terem a mesma distância? [apontando para os segmentos *az* e *gz*]
Momento de silêncio
(10) Daniel: Fazem um ângulo de 90° [apontando para os triângulos constituídos pelos segmentos de reta *ge*, *ez* e *zg*; e *ae*, *az* e *ez*], logo são iguais os triângulos.
(11) Professor: Ah, os triângulos. Então expliquem por que é que os triângulos são iguais?
(12) Daniel: Porque têm um ângulo de 90° e um ângulo em comum [referindo-se ao ângulo formado pelos segmentos *gza*]
(13) Professor: Esse não é um ângulo em comum, pois uma parte está num triângulo, a outra no outro [referindo-se aos triângulos *egz* e *aez*, respetivamente].
(14) Daniel: Mas são os dois iguais [referindo-se à igualdade dos ângulos *gze* e *aze*]
(15) Nélson: Porque têm o mesmo ponto [referindo-se ao ponto *e* do segmento *ga*]
(16) Daniel: Se este ângulo é igual [referindo-se à igualdade dos ângulos *aez* e *gez*], este ângulo também vai ser igual [referindo-se à igualdade dos ângulos *aze* e *gze*]
(17) Professor: Mas o que [te] leva a considerar isso?
(18) Daniel: Então é este que é igual [referindo-se à igualdade dos ângulos *eaz* e *egz*].
(19) Professor: E os lados?
(20) Emanuel: Estes são iguais [apontando para os segmentos *ge* e *ea*], porque isto [referindo-se ao ponto *e*] está dividido a meio.
(21) Professor: Certo.
(22) Emanuel: Então estes dois [apontando para os segmentos *gz* e *az*] devem ser iguais.

(23) Professor: Mas isto é o que queres mostrar. Não há mais nenhum lado igual?
(24) Daniel: É o meio [referindo-se ao segmento *ez*]
(25) Professor: Porquê?
(26) Emanuel: Ah, pois! Está inserido nos dois [triângulos].
(27) Professor: É comum aos dois.
(28) Emanuel: Portanto estes também são iguais [apontando para os segmentos de reta *gz* e *az*].

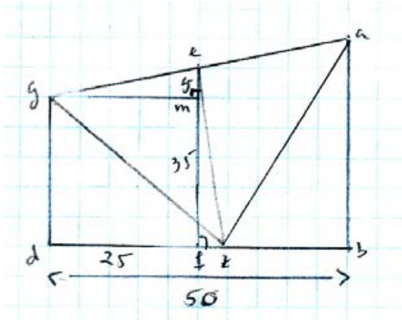


Figura 7.5.17. Ilustração do problema efetuada pelo grupo G2.

A partir da análise deste diálogo, verifica-se que os alunos, tendo em atenção a construção apresentada por Fibonacci observam que o segmento de reta *ez* é perpendicular ao segmento de reta *ga* (§2). Para estes alunos, este dado permite concluir que os segmentos *gz* e *az* têm a mesma distância (§4), (§6), (§7) e (§8). O professor questiona então os alunos sobre esta sua afirmação (§9), colocando em causa a insuficiência do dado apresentado. Os alunos justificam que os triângulos [formados, respetivamente, pelos segmentos de reta *ge*, *ez* e *zg*; e *ae*, *az* e *ez*] são geometricamente iguais (§10), porque têm um ângulo de 90° e um ângulo em comum (§12), no entanto, o professor questiona os alunos sobre essa sua afirmação. Observe-se que neste momento os alunos tentam justificar a igualdade das distâncias à custa da igualdade dos ângulos. No entanto, não há qualquer informação que permita relacionar os ângulos. Deste modo, o professor questiona os alunos sobre os lados dos triângulos (§19). O Emanuel refere que os segmentos de reta *ge* e *ea* são iguais (§22), uma vez que pela construção apresentada por Fibonacci *e* é o ponto médio do segmento de reta *ag* (§20). Mas mais uma vez esta afirmação não é suficiente para concluírem o pretendido. Desta forma, os alunos acrescentam um novo dado, referindo a existência de um lado comum *ez* (§24) e (§26). Esta afirmação, resulta do facto de os alunos, embora não explicitamente, recorrerem a um novo dado presente no enunciado «a partir do ponto *.e.* é estendida a linha segmento *.ez.*». Assim, com este novo dado introduzido, os alunos concluem que os segmentos *gz* e *az* são iguais (§28), isto porque, como disseram no início do diálogo, os triângulos formados pelos segmentos de reta *ge*, *ez* e *zg*; e *ae*, *az* e *ez* eram geometricamente iguais (§10). Embora não refiram de forma explicita, esta conclusão resulta de uma garantia, a possibilidade de aplicar o critério de igualdade de triângulos: LAL.

Dividindo o diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G2, de acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes neste excerto, podem ser esquematizado da seguinte forma:

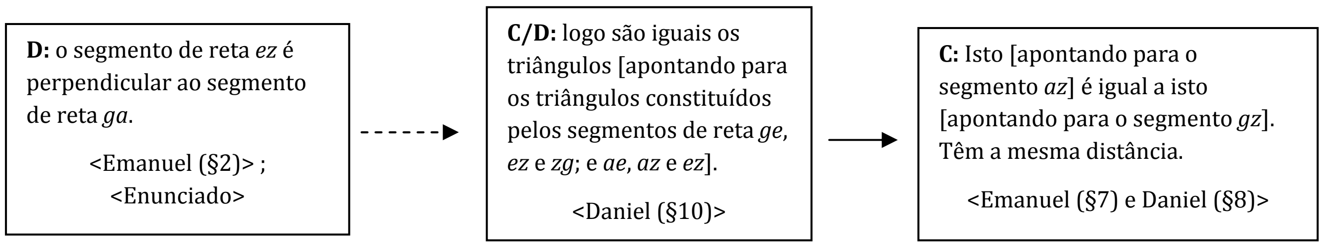


Figura 7.5.18. Representação esquemática da reconstrução funcional do primeiro argumento presente no raciocínio apresentado pelo grupo G2, onde é questionado a suficiência do dado apresentado.

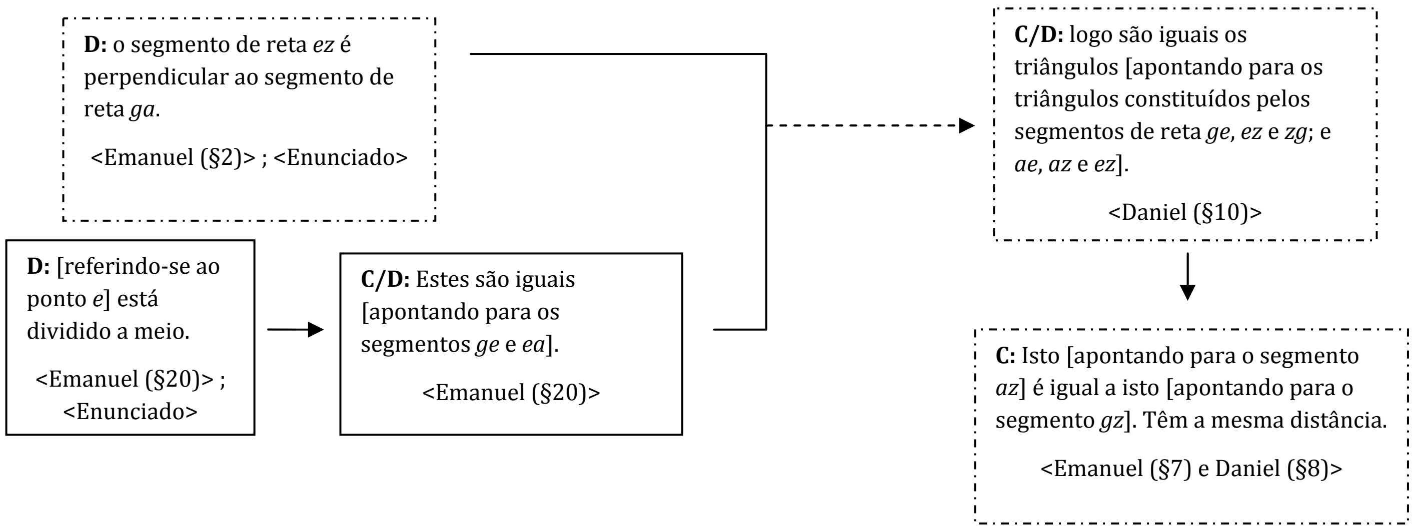


Figura 7.5.19. Representação esquemática da reconstrução funcional do segundo argumento presente no raciocínio apresentado pelo grupo G2, após a introdução de um novo dado, onde é questionado a suficiência dos dados apresentados.

É de notar que as linhas não contínuas que limitam algumas das caixas resultam do facto de estas afirmações terem sido apresentadas anteriormente. As setas a tracejado significam que o passo de inferência não se encontra legitimado.

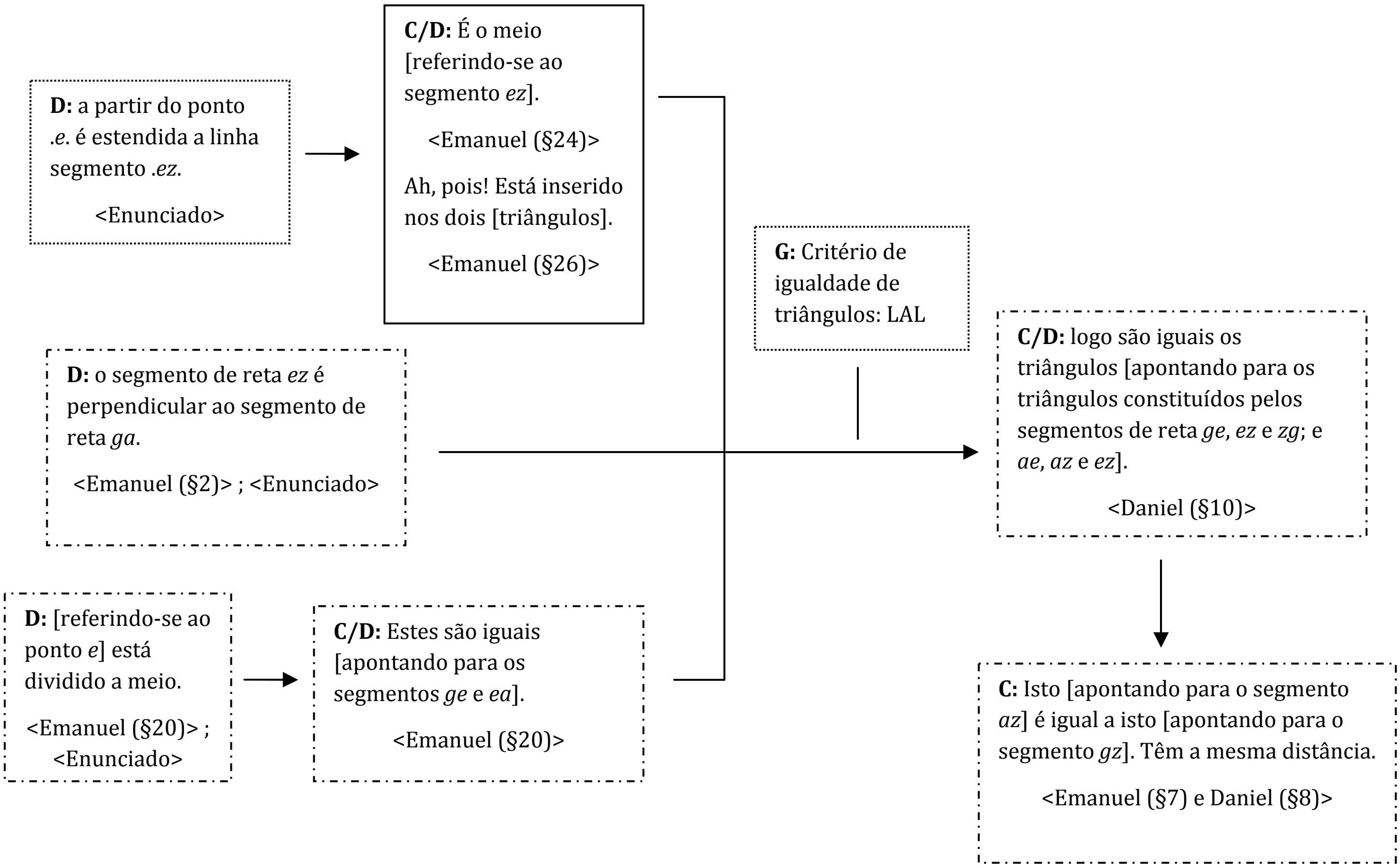


Figura 5.7.20. Representação esquemática da reconstrução funcional do último argumento presente no raciocínio apresentado pelo grupo G2, com a introdução de mais um novo dado.

É de notar que as linhas não contínuas que limitam algumas das caixas resultam do facto de estas afirmações terem sido apresentadas anteriormente. As caixas com linha a tracejado referem-se a afirmações não implícitas no diálogo.

Após terem justificado que o ponto *z* era o centro da fonte, foi proposto, aos alunos, que lessem o raciocínio apresentado por Fibonacci por forma a determinar a distância pretendida. Fibonacci após ter explicado, geometricamente, como determinar o ponto *z*, exemplifica o seu raciocínio numericamente.

(…) mas se quiseres proceder com números, então juntas os pés das duas torres, a saber 40 e 30; que será 70 cuja metade, a saber 35, é a linha de segmento *.ef.*; e metade da distância *.bd.* é 25 que é a soma das linhas de segmento *.df.* e *.fb.*, e toma a diferença entre a menor torre e 35 que é 5; multiplica-a por 35. que será 175 que divides por metade da distância, a saber 25; o quociente será 7 para a linha segmento *.fz.*; se 25 for adicionado a isto, a saber a linha de segmento *.df.*, então a linha de segmento *.dz.* será 32, e se 7 é subtraído à linha de segmento *.fb.*, então restará 18 para a linha de segmento *.zb.*; se o quadrado disto é adicionado ao quadrado da torre *.ba.*, a saber 324 a 1600, então 1924 será o quadrado da linha segmento *.za.*; também o quadrado da linha *.zg.* é igual a isto, resultante da junção dos quadrados das linhas segmento *.zd.* e *.dg.*, a saber 1024 e 900, o que queremos.

Os alunos conseguiram identificar os elementos constituintes da resolução aritmética apresentada por Fibonacci, no entanto, não perceberam como é que Fibonacci chegou à igualdade $fz=\frac{35\times(35-30)}{25}$. Dada esta dificuldade, o professor apela à observação da figura, nomeadamente, sobre a relação existente entre os triângulos *gem* e *efz*. Observe-se o diálogo entre o professor e o grupo G2.

(1) Daniel: Tenho um triângulo aqui [apontando para *efz*] e tenho *egz*… *edz*, pois posso traçar aqui um [outro triângulo].
(2) Emanuel: E este! [apontando para o triângulo *egm*]
(3) Daniel: Sim, tenho aqui outro. [percorrendo com o lápis os lados do triângulo]
(4) Professores: E quais são as medidas dele?
(5) Daniel: Este [referindo-se ao segmento *gm* no triângulo *gem*] é 25 aqui. Aqui em cima [apontando para o segmento *ge*] não sabemos.
(6) Professor: Aqui [apontando para *em*] é 5. [uma vez que os alunos tinham essa medida marcada no triângulo]
[…]
(7) Professor: E este todo? [apontando para o segmento *ef*]
(8) Daniel: É 35.
(9) Professor: E estes dois triângulos são iguais?
(10) Andreia: Qual, este [apontando para o triângulo *egm*] e este [apontando para o triângulo *efz*]?
(11) Professor: Sim.
(12) Daniel: Não!
(13) Emanuel: Não têm as mesmas medidas… mas [os triângulos] podem ser semelhantes.
(14) Professor: Será que são semelhantes?
Momento de silêncio
(15) Professor: O que é que é necessário para dois triângulos serem semelhantes?

(16) Daniel: Terem dois ângulos iguais…
(17) Nélson: Os lados para… proporcionais.
(18) Professor: Ou dois lados proporcionais e o ângulo por eles formado igual.
(19) Daniel: Têm um ângulo reto [apontando para o triângulo *egm*] … e este também [apontando para o triângulo *efz*].
(20) Professor: Será que encontras outro ângulo [geometricamente igual]?

A partir deste excerto, regista-se que os alunos observam que estes triângulos *gem* e *efz* não são geometricamente iguais (§12), uma vez que os lados apresentam medidas diferentes, contudo, observam que os triângulos podem ser semelhantes (§13). O professor questiona se poderão ser semelhantes (§14). Os alunos referem dois casos de semelhança de triângulos, (§16) e (§17), tendo o professor completado com um terceiro caso (§18). Os alunos observam a existência de um ângulo reto nos dois triângulos (§19), portanto, para os triângulos serem semelhantes seria necessário encontrarem um outro ângulo geometricamente igual. O professor sugere, então, a procura desse ângulo (§20).

Dividindo o diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G2, de acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes neste excerto, podem ser esquematizado da seguinte forma:

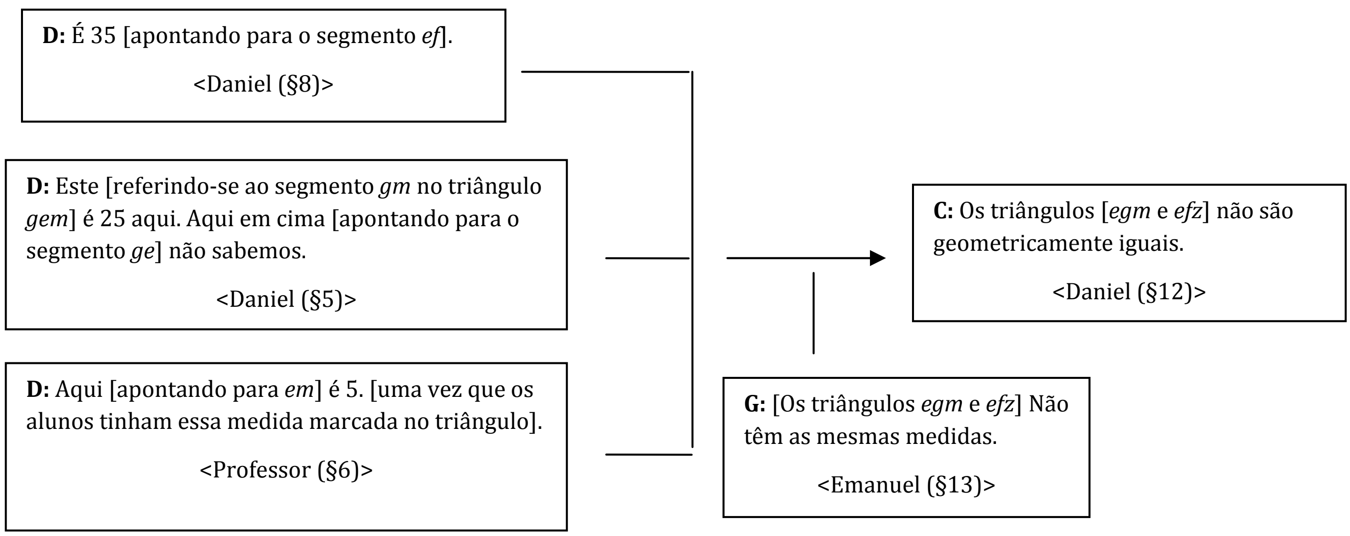


Figura 7.5.21. Representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio apresentado pelo grupo G2, em que concluem a impossibilidade dos triângulos egm e efz serem geometricamente iguais (CA-1).

D: a partir deste [ponto *e*] é estendida a linha de segmento *.ef.* paralela às linhas *.ab.* e *.gd.*, e a partir do ponto *.e.* é estendida a linha segmento *.ez.* fazendo dois ângulos retos com a linha *.ag.*, isto é em *.e.*; o segmento de reta *ez* é perpendicular ao segmento de reta *ga*.

<Enunciado>

→

C/D: Têm um ângulo reto [apontando para o triângulo *egm*] … e este também [apontando para o triângulo *efz*].

<Daniel (§19)>

- - - - - -▶

C: Os triângulos [*egm* e *efz*] são semelhantes.

<Emanuel (§13)>

Figura 7.5.22. Representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio apresentado pelo grupo G2, onde é questionada a suficiência dos dados apresentados.

É de observar que a seta a tracejado significa que o passo de inferência ainda não foi legitimado, uma vez que faltam dados ou garantias que permitam essa inferência

Passado algum tempo, o professor aproxima-se de novo do grupo G2, estabelecendo-se um novo diálogo.

(21)Professor: Então, conseguiram?
(22) Daniel: Demos o nome x a este ângulo [apontando para o ângulo *fze*].
(23) Andreia: O outro [apontando para o ângulo *zef*] é y, porque não conhecemos.
(24) Professor: E quanto é a soma [das amplitudes] dos ângulos internos de um triângulo?
(25) Nélson: 180°.
(26) Professor: Então, quanto é $x + y$?
(27) Nélson: 180°.
(28) Emanuel: Não! 90°, porque este aqui [apontando para o ângulo *zfe*] é 90°.
(29) Nélsom: Pois… sim, 90°.
(30) Professor: Então, o que me estão a dizer é que $x + y = 90°$ [escrevendo esta igualdade no papel].
(31) Daniel: Sim.
(32) Professor: Podemos resolver esta equação em ordem a uma das incógnitas, certo?
(33) Daniel: Não percebi!
(34) Emanuel: É resolver em ordem a uma das letras.
(35) Daniel: Ah! Sim, é uma equação literal.
(36) Nélson: x igual a 90 y.
(37) Andreia: Mais y .
(38) Emanuel: Não! [x igual a 90°] menos y [e escreve a expressão no papel].
(39) Professor: Sim, este ângulo [apontando para o ângulo *fze*] então mede $90° – y$. E o [ângulo] *gem*?
(40) Nélson: 90°.
(41) Professor: Quanto mede o ângulo *gez*?
(42) Daniel: 90°.

(43) Emanuel: Porque aqui diz isto [apontando para o enunciado «a linha segmento *.ez.* fazendo dois ângulos retos com a linha *.ag.*»]
(44) Professor: Certo, então agora digam-me quanto mede o ângulo *gem*?
Momento de silêncio
(45) Professor: Pensem um bocadinho.

Através da análise deste excerto observa-se que os alunos introduzem dois novos dados escolhidos por si, isto é, designam por *x* a medida de amplitude do ângulo *fze* (§22) e por *y* a medida de amplitude do ângulo *zef* (§23). Então observam que a soma destas duas amplitudes é 90° (§28), uma vez que por construção *zfe* mede 90° (dado do enunciado) (§28) e a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° (garantia introduzida pelos alunos) (§25), portanto, resolvendo a equação $x + y = 90°$ (§34), concluem que $x = 90° – y$ (§38). Contudo, os alunos, nesta fase do diálogo, não conseguem determinar a amplitude do ângulo *gem*, embora refiram que a amplitude do ângulo *gez* é 90°, porque pelo enunciado «a linha segmento *.ez.* fazendo dois ângulos retos com a linha *.ag.*» (§43).

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes neste excerto, podem ser esquematizado da seguinte forma:

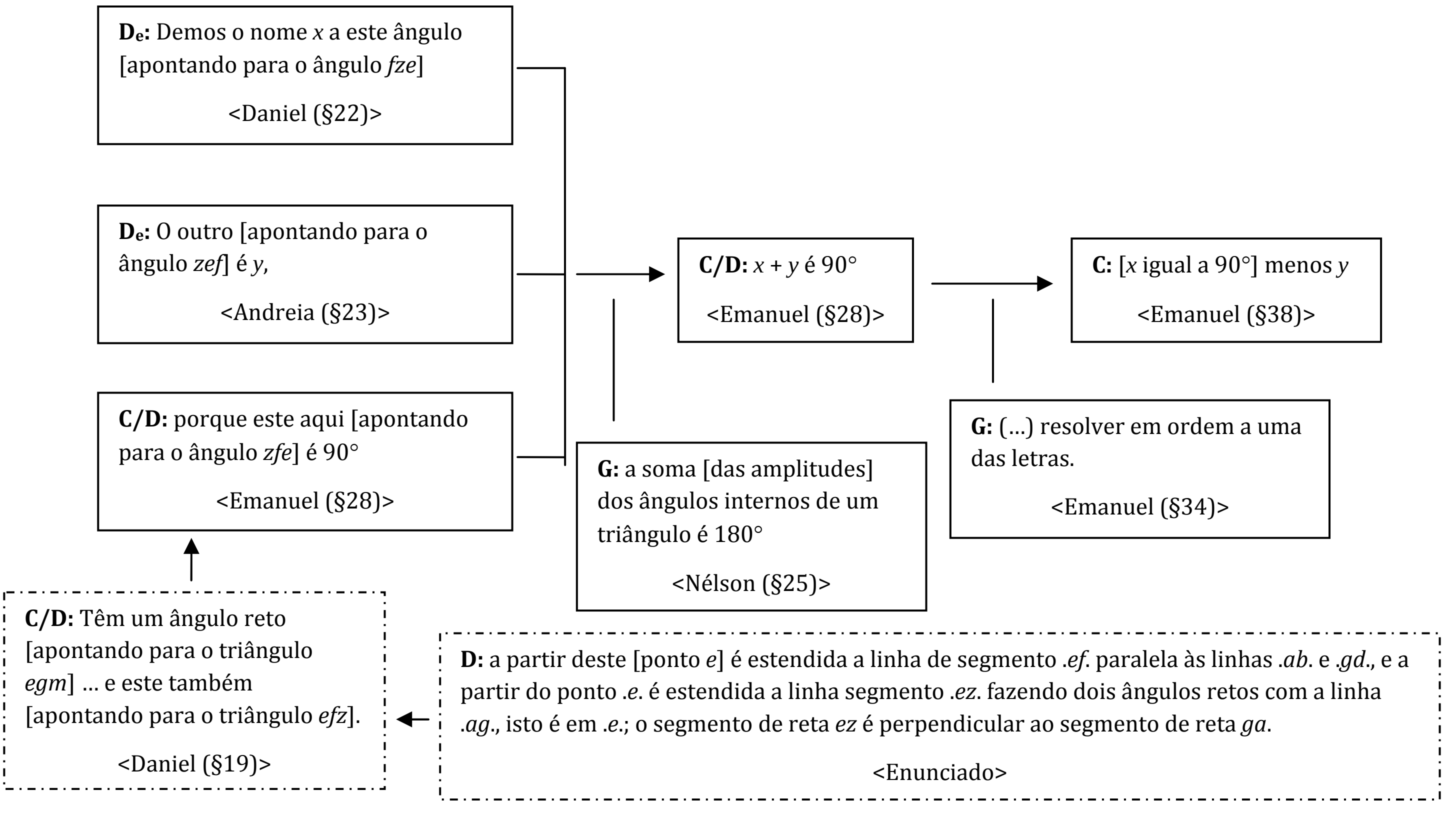


Figura 7.5.23. Representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio apresentado pelo grupo G2 (CA-2).

As caixas com linhas não contínuas referem-se a afirmações introduzidas anteriormente no diálogo.

Após algum trabalho em grupo, este grupo volta a questionar o professor surgindo um novo diálogo. Observe-se o excerto seguinte:

(46) Daniel: Ó professor!
(47) Professor: Sim!
(48) Daniel: O [ângulo] *gem* e o *y* medem 90°.
(49) Professor: Sim, e?
(50) Daniel: E o *y* e o *x* deste [apontando para o triângulo *efz*] também mede 90° .
(51) Professo: Então?
(52) Nélson: Então… não sabemos mais nada!
(53) Professor: Tentem escrever a medida do [ângulo] *gem* à custa do que sabem.
(54) Daniel: À custa disto? [apontando para o ângulo *gez*]
(55) Emanuel: O ângulo *gem* é 90° menos este *y* [apontando para o ângulo *fez*]
(56) Professor: E quanto mede este [apontando para o ângulo *fze*]?
(57) Nélson: *x*.
(58) Daniel: Não. Sim, mede. Mas nós temos isto [apontando para a equação $x = 90° - y$, escrita ao lado do desenho].
(59) Emanuel: É isso, estes dois ângulos são iguais [apontando, respetivamente, para os ângulos *gem* e *fze*].
(60) Professor: Então, os triângulos são semelhantes?
(61) Nélson: Temos de ver o outro ângulo.
(62) Daniel: Não precisamos, pois já temos dois [ângulos] iguais, o outro também vai ser. São semelhantes!
(63) Professor: E se os triângulos são semelhantes…
(64) Nélson: Existe uma razão de semelhança.
(65) Andreia: Os lados são correspondidos.
(66) Emanuel e Daniel: Correspondentes!!!
(67) Nélson: [são] Proprocionais.
(68) Professor: Observem agora, novamente, a resolução de Fibonacci e tentem perceber o raciocínio dele.

Os alunos iniciam o diálogo com o professor referindo que a soma dos ângulos *gem* e *y* é 90° (§48). Embora não justifiquem essa sua afirmação, a mesma encontra-se implícita, visto que anteriormente, os alunos referiram que «a linha segmento *.ez.* faz dois ângulos retos com a linha *.ag.*» (dado presente no enunciado) (§43) e, por sua escolha, designaram por *y* o ângulo *zef* (dado escolha) (§23). Desta forma, referem que o ângulo *gem* é igual a $90° - y$ (resolvendo a equação literal) (§55). Assim, notando que também $x = 90° - y$ (§58), (conclusão obtida anteriormente) (§38), os alunos observam que *gem* e *fze* são ângulos geometricamente iguais (§59), portanto, os triângulos são semelhantes (§62). É de observar que os alunos apresentam uma garantia para esta sua conclusão (§62), contudo, no início desta interação discursiva, os alunos apresentam um fundamento para esta sua garantia (§16). Os alunos referem, então, que existe uma razão de semelhança (§64) e os lados correspondentes são proporcionais (§67). O professor sugere, assim, que os alunos leiam novamente a resolução de Fibonacci e com esta informação obtida, interpretem o raciocínio deste matemático (§68).

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes neste excerto, podem ser esquematizado da seguinte forma:

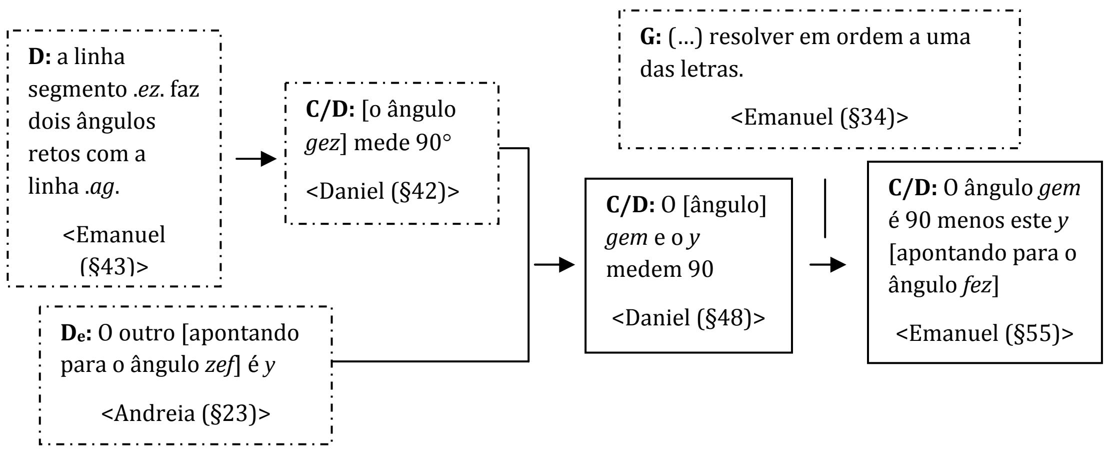


Figura 7.5.24. Representação esquemática da reconstrução funcional do primeiro argumento presente no raciocínio apresentado pelo grupo G2 (CA-3).

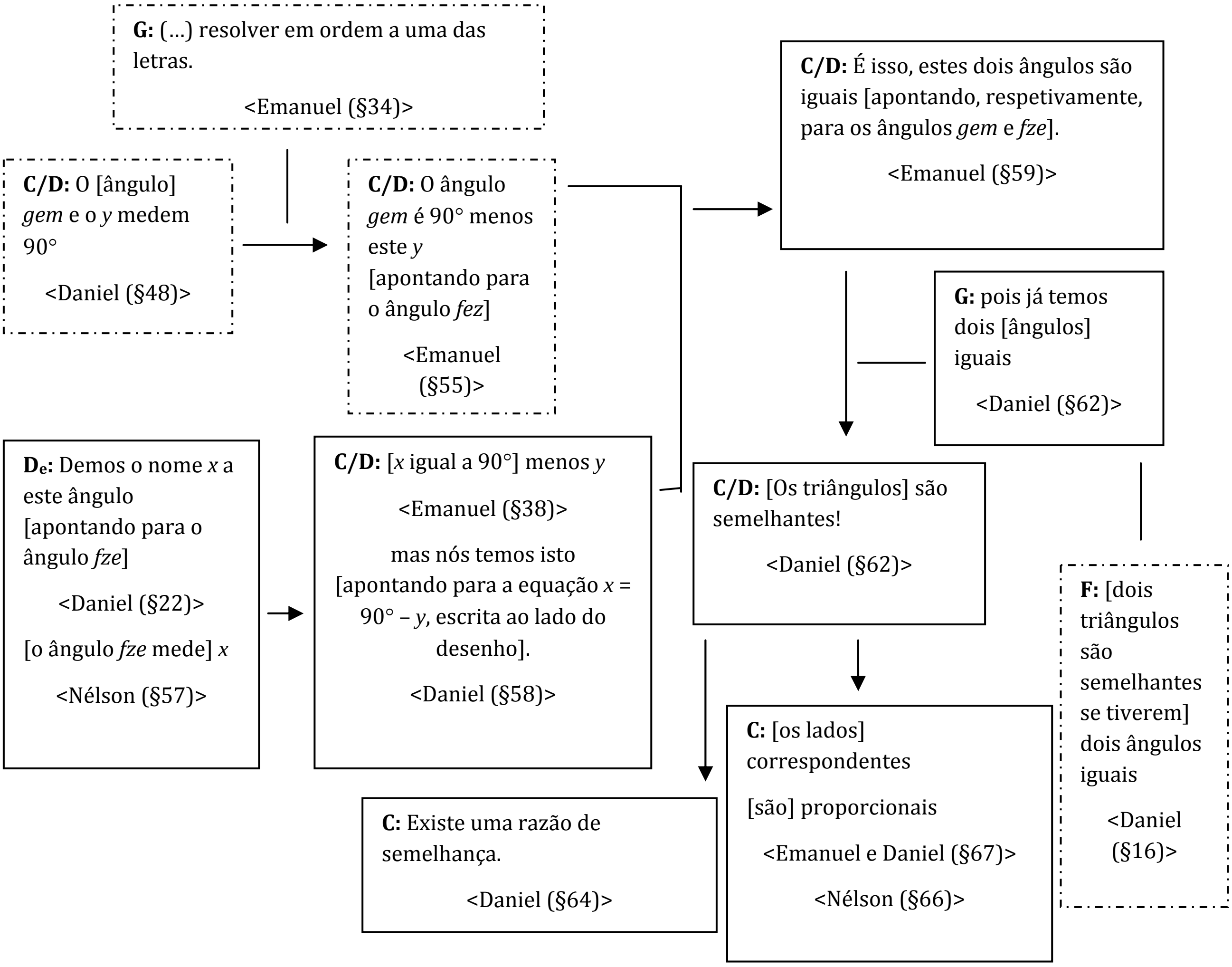


Figura 7.5.25. Representação esquemática da reconstrução funcional do último argumento presente no raciocínio apresentado pelo grupo G2 (CA-4).

Tendo em consideração que os triângulos *egm* e *efz* são semelhantes, os alunos, por escrito, identificam os lados correspondentes. Com recurso ao esquema determinam a localização da fonte, procedendo à verificação de resultados.

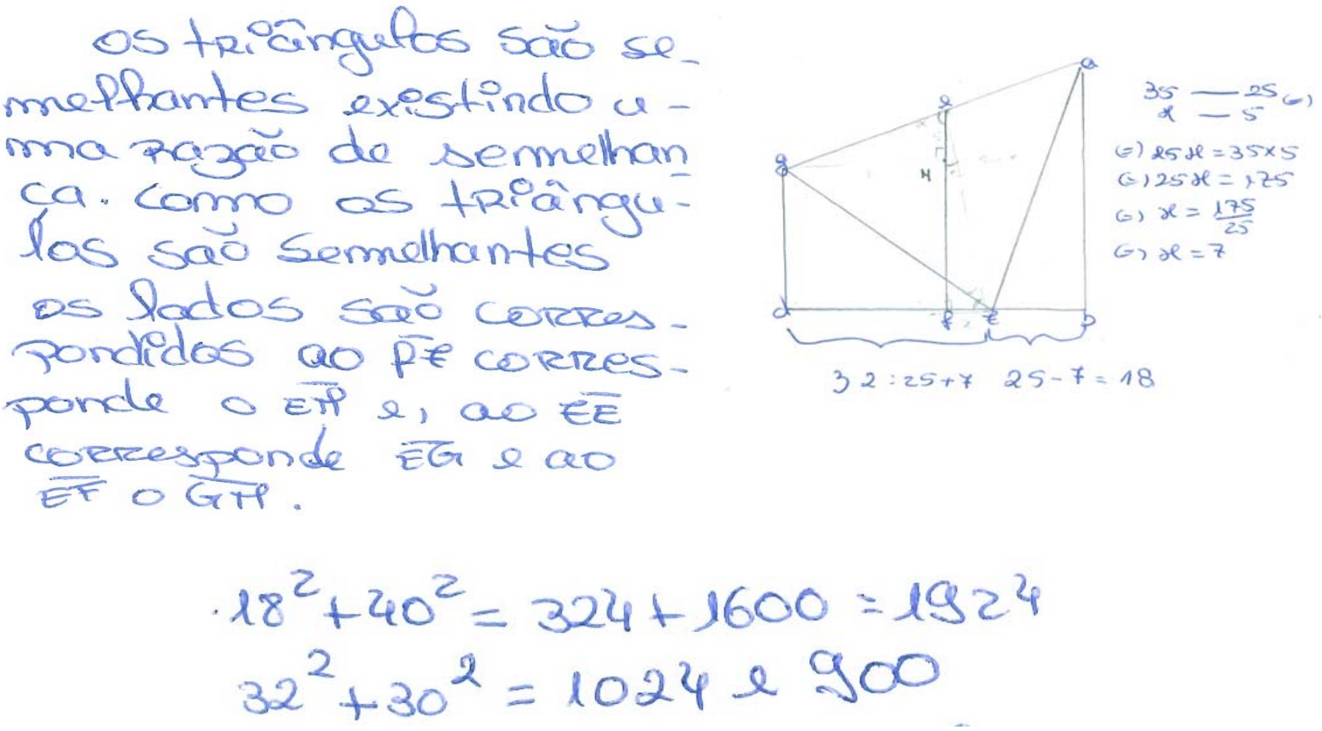


Figura 7.5.26. Resolução escrita apresentada pelo grupo G2.

O professor questiona então o grupo G2 sobre o trabalho realizado, surgindo o seguinte diálogo:

(69) Professor: Então, como obtiveram este esquema?
(70) Nélson: Ó professor, vimos que ao lado *fe*, 35, corresponde o lado *gm*, que mede 25, portanto, a *fz*, o *x* que não sabemos vai corresponder este [apontando para o segmento em] 5. E depois fizemos as contas.
(71) Professor: E por que é que fizeram isso?
(72) Nélson: Porque ele [Fibonacci] diz!
(73) Daniel: Não. Ele faz apenas as contas.
(74) Emanuel: Nós queremos determinar este bocadinho [apontando para *fz*], porque a fonte está em *z*. Como sabemos que os triângulos são semelhantes [referindo-se a semelhança de triângulos] que são as contas dele, obtemos o 7.
(75) Daniel: Depois é só somar 25 e tirar 25 [referindo-se às expressões numéricas escritas no papel 32 = 25 + 7 e 25 – 7 = 18] e dá 32 aqui [distância da fonte à torre de 30 metros] e 40 [apontando para a distância da fonte à torre de 40 metros].
(76) Nélson: E ainda fizemos isto que ele faz [apontando para as últimas expressões escritas]
(77) Professor: E por que é que ele faz isto?
(78) Nélson: Hum!...
(79) Daniel: Para verificar…
(80) Emanuel: Para garantir que os valores [encontrados] estão corretos.
(81) Nélson: Pois, as aves tinham que andar o mesmo.

Através da produção escrita dos alunos e do diálogo estabelecido, observa-se que após terem descoberto que os triângulos *gem* e *efz* eram semelhantes (§62), os alunos identificam os lados correspondentes e desta forma determinam o valor de *x*, ou seja, o comprimento do segmento *fz* (§74) e (§75), justificando o procedimento. Por fim, tal como Fibonacci procedem à verificação das soluções encontradas (§79) e (§80), uma vez que as aves tinham de percorrer a mesma distância (§81).

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes neste excerto, podem ser esquematizado da seguinte forma:

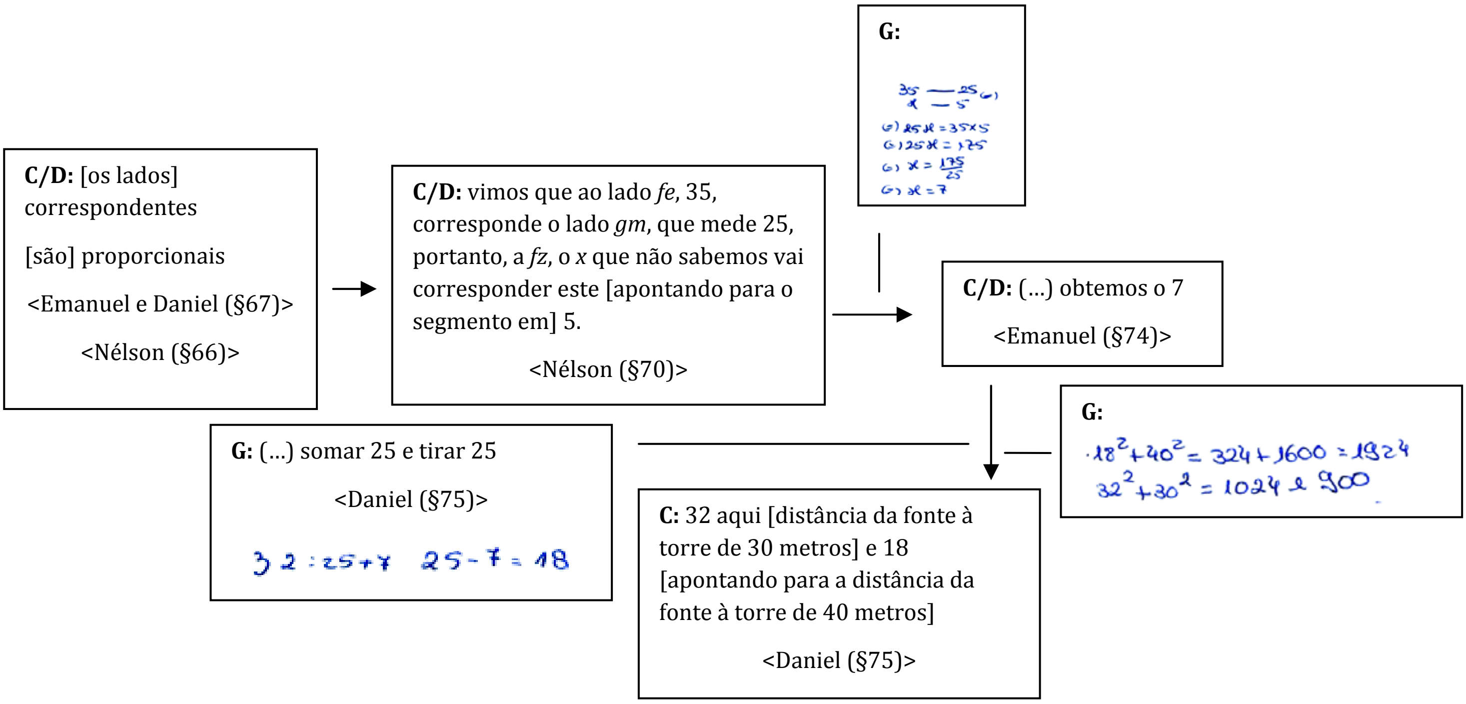


Figura 7.5.27. Representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio final apresentado pelo grupo G2 (CA-5).

7.5.4. Argumentação: análise global (na leitura e interpretação de raciocínios presentes em fontes primárias)

Tendo em conta o diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G2, na análise realizada por este grupo à resolução geométrica do problema proposta por Fibonacci, é possível representar de uma forma global os diferentes argumentos presentes neste discurso argumentativo. Para uma mais fácil leitura, pode-se representar o discurso argumentativo presente neste diálogo da seguinte forma:

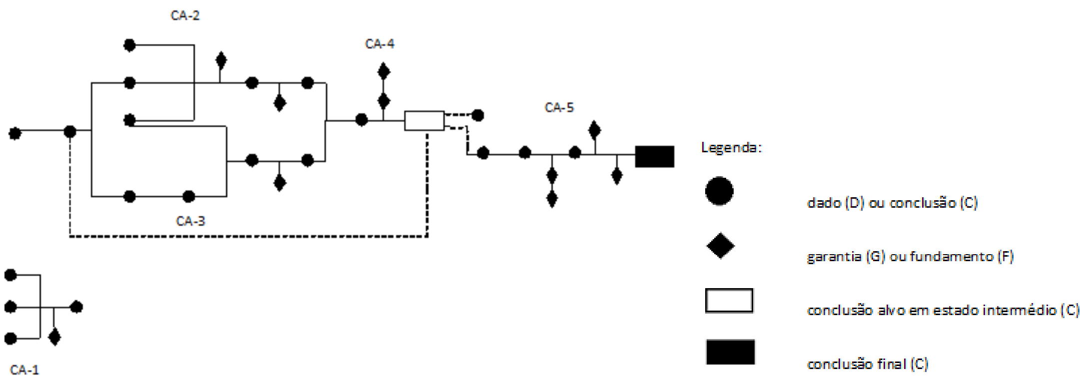


Figura 7.5.28. Representação esquemática global do discurso argumentativo presente na análise da resolução geométrica proposta por Fibonacci realizada pelo grupo G2.

Através de uma análise global à argumentação presente na interpretação efetuada pelo grupo G2 à resolução geométrica proposta por Fibonacci, é possível observar que os diferentes símbolos não representam apenas as diferentes funções das afirmações (dado, garantia, fundamento e conclusão), que na figura 7.5.28. são designados por D, G, F e C, mas o estatuto que essas afirmações têm na estrutura global da argumentação. A conclusão final, no presente caso a localização da fonte, encontra-se representado através de um retângulo a negro. O retângulo a branco representa uma conclusão-alvo intermédia. No presente caso, que os triângulos *gem* e *fze* são semelhantes. Esta afirmação não só se tornará no ponto de partida, ou seja, dado no próximo passo argumentativo, permitindo obter a solução desejada, mas também permite sustentar uma afirmação previamente proferida, invertendo o movimento do discurso lógico. Os dados e as conclusões que não são conclusão-alvo intermédia estão representados por círculos. As garantias e os fundamentos estão simbolizados por losangos.

Através desta análise global, pode-se observar que na estrutura desta argumentação existem argumentos, onde a dedução de uma conclusão a partir de um dado é sustentada por razões matemáticas e lógicas (garantias e fundamentos). Nesta argumentação estão presentes cinco correntes ou fluxos de argumentação (CA-1 a CA-5) que constituem a estrutura global da argumentação, tornando-se evidentes algumas características. Existe uma corrente de argumentação que não se encontra ligada à estrutura principal (CA-1). De facto, a conclusão deste argumento permitiu aos alunos reconhecer que os triângulos em causa não eram geometricamente iguais, levando-os a verificar se os triângulos eram semelhantes. Não se encontram presentes argumentos paralelos, isto é, argumentos diferentes que permitem suportar a mesma conclusão. Existe um passo de argumentação que tem mais do que um dado que é conclusão de uma corrente de argumentação (CA-4). De facto, as conclusões das correntes de argumentação CA-2 e CA-3 são dados do primeiro passo da corrente de argumentação CA-4. O raciocínio argumentativo move-se inversamente na estrutura lógica do discurso. Não se encontram presentes refutações.

Embora existam uma corrente de argumentação que não se encontra ligada à estrutura principal (CA-1) e um passo de argumentação que tem mais do que um dado que é conclusão de uma corrente de argumentação (CA-4), não existem argumentos paralelos, nem refutações. Além disso, é possível encontrar uma inversão no movimento do discurso lógico, o que de acordo com os quatro tipos de estruturas de argumentação propostas por Reid & Knipping (2010) esta argumentação caracteriza-se por ter uma *estrutura-reservatório*.

7.5.5. Dificuldades manifestadas pelos alunos

Linguagem

Ao nível da interpretação do enunciado da tarefa

O grupo G1, embora tenha determinado, de forma incorreta, a localização da fonte, isto é a distância desta a cada uma das torres, considera que ainda não resolveu o problema, pois entende que o que se pretende é determinar a distância de cada uma das aves à fonte, ou seja, o comprimento do caminho percorrido por cada uma das aves (figura 7.5.5.).

[…]
(3) Professor: Mas qual é a pergunta?
(4) Nuno: Não é para fazer aqui o teorema de Pitágoras?
(5) Professor: Mas por que é que vais fazer aqui o teorema de Pitágoras?
Momento de silêncio
(6) Nuno: Como faço sempre! [o aluno não percebe a pergunta do professor e entende que este lhe pergunta como se aplica o teorema de Pitágoras]
(7) Professor: Sim, mas o que é que é pedido?
(8) Pedro: A fonte?!
(9) Professor: O que é que vos pedem para determinar?
(10) Nuno: Pedem para determinar se este [apontando para o pássaro da torre de 30 metros] e este [apontando para o pássaro da torre de 40 metros] chegam ao mesmo tempo à fonte.
(11) Professor: É essa a pergunta?
Momento de silêncio
(12) Professor: Qual é a pergunta do problema?
(13) Nuno: Temos de saber se eles [pássaros] percorrem a mesma distância!
(14) Professor: Lê de novo o problema, mas agora em voz alta.
O Nuno lê em voz alta o enunciado do problema.
(15) Professor: Então qual é a pergunta?
(16) Nuno: A que distância se encontra a fonte das duas torres.
(17) Professor: Então o que é querem determinar?
(18) Nuno: A [localização da] fonte.
(19) Professor: E onde é que está a fonte na tua figura?
(20) Nuno: Está a aqui [apontando para a fonte desenhada no seu esboço]
(21) Professor: Suponhamos que está aí. Então é isso que queres saber. Tu queres saber onde está a fonte, ou seja, a que distância se encontra a fonte da torre de 30 metros e de 40 metros.
(22) Nuno: Aqui são 35 [apontando para a distância da fonte à torre de 30 metros] e aqui são 15 [apontando para a torre de 40 metros].

Através da análise destes excerto, observa-se que os alunos estão um pouco confusos com o que lhes é pedido, (§3) a (§11). Embora tenham determinado incorretamente a localização da fonte, consideram que têm de determinar também o valor de *x*, ou seja, a distância percorrida pelas aves. Dessa forma o professor pede aos alunos que leiam de novo o problema (§14), por forma a que entendam o que é pedido.

Ao nível da interpretação da resolução aritmética proposta por Fibonacci

Os alunos manifestaram dificuldades em identificar qual o resultado presente na afirmação seguinte:

(…) em geometria é claramente demonstrado que a altura [de cada] torre multiplicada por si própria e adicionada à distância da torre ao centro da fonte multiplicada por si própria é a mesma que o segmento de reta do centro da fonte ao topo da torre multiplicado por si próprio; isto é portanto conhecido.

Embora tivessem traduzido, para notação atual, a informação presente neste excerto, a maioria dos grupos teve, inicialmente, dificuldade em identificar que esta afirmação correspondia à aplicação do teorema de Pitágoras a cada um dos triângulos retângulos, que podiam ser considerados nos seus esboços, em que os catetos eram, respetivamente, a altura de cada uma das torres e a distância destas à fonte e a hipotenusa correspondia à distância percorrida pelas aves. Isto porque Fibonacci não apresentou qualquer construção geométrica que indiciasse esse facto. Contudo, os alunos baseados nos esboços construídos, nas indicações presentes nesta afirmação e designando, por exemplo, por x a distância entre torre de 30 metros e a fonte, obtiveram as seguintes expressões: $900 + x^2$ e $1600 + (50 - x)^2$. Após a perceção de que Fibonacci, nesta afirmação, se referia ao teorema de Pitágoras, os alunos escrevem $900 + x^2 = 1600 + (50 - x)^2$, uma vez que essa distância percorrida pelas aves era a mesma, visto que estas voavam à mesma velocidade e chegavam ao mesmo tempo à fonte. Contudo, Fibonacci não resolve o problema por um processo algébrico. Ele apenas faz referência ao teorema de Pitágoras, pois este resultado permite-lhe validar as operações aritméticas que irá realizar.

Ao nível da interpretação da resolução geométrica proposta por Fibonacci

O grupo G3 refere que sentiu dificuldades em perceber a resolução geométrica apresentada por Fibonacci, devido ao tipo de linguagem utilizada.


Sentimos dificuldades a chegar à resolução porque a linguagem é um pouco difícil.

Figura 7.5.29. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G3.

Compreensão matemática

Ao nível da utilização da linguagem algébrica

O recurso à notação algébrica atual para interpretar o descrito na afirmação supracitada constituiu uma dificuldade para a maioria dos grupos. Uma vez que não era dada a distância da fonte a cada uma das torres, como referido, designaram uma dessas distâncias por x. No entanto, é de registar que embora designassem, por exemplo, a distância da torre de 30 metros à fonte por x, alguns alunos tiveram dificuldade em representar a expressão que correspondia à distância da fonte à torre de 40 metros. No entanto, referem, como por exemplo a Sara do grupo G4, que essa distância

Sara: Não pode ser a mesma letra que aqui [apontando para o x que representava a distância entre a torre de 30 metros e a fonte], porque a fonte está mais para este lado [apontando para a torre de 40 metros] do que para este [apontando para a torre de 30 metros], portanto, a distância não é a mesma.

Contudo, apesar de reconhecerem que as distâncias são diferentes, não significa que seja claro, para todos os elementos do grupo, qual a expressão algébrica que traduz a distância entre a fonte e a torre de 40 metros é $50 - x$.

Professor: Qual a distância disto tudo? [apontando para a distância entre as fontes]
Sara: É 50.
Professor: Se isto é x [apontando para o desenho onde está marcada a distância entre a torre de 30 metros e a fonte], quando é que mede o restante [apontando para a distância entre a fonte e a torre de 40 metros].
Diana: $50 - x$.
Sara: $x - 50$.
Professor: $x - 50$ ou $50 - x$?
Sara: $50 - x$!
Professor: Qual é a diferença?
Diana: Quando estamos a dizer $50 - x$, estamos a esta distância toda [distância entre as torres] tirar este bocadinho [distância da torre de 30 metros à fonte].

Situação semelhante, também ocorreu no grupo G3. Observe-se um excerto do diálogo entre os alunos do grupo e o professor.

Professor: É x outra vez?

Momento de silêncio
Professor: Esta distância daqui aqui [apontando para a distância da torre de 30 metros à fonte] disseram que era x, não foi?
G3: Sim!
Professor: Daqui aqui também é x? [distância da torre de 40 metros à fonte]
Paula: $x – 50$.
Professor: Acham que é $x – 50$?
Momento de silêncio. Dado o impasse, o professor questiona
Professor: Tudo [referindo-se à distância entre as duas torres] é quanto?
Paula: 50
Professor: Se este bocadinho [apontando para a distância entre a torre de 30 metros e a fonte] é x, quanto é que mede este?
Carla: $x – 50$
Professor: Qual é o maior [comprimento]?
Carla: 50
Professor: Se eu fizer $x – 50$ está a dar um número…
Carla: Menor que 50.
Paula: Não, $50 – x$, porque se for $x – 50$ vai dar um valor negativo.
Carla: Ah! Pois… são comprimentos.

Da análise deste excerto, percebe-se que a dificuldade deste grupo foi, inicialmente, perceber que os termos $50 – x$ e $x – 50$ são diferentes e que no contexto do problema, o termo em causa é positivo por se tratar de um comprimento.

Ao nível da interpretação aritmética da resolução geométrica proposta por Fibonacci

Os alunos manifestaram dificuldades em perceber o porquê da concretização aritmética da resolução geométrica apresentada por Fibonacci.

Daniel: Subtrair este 35 por 30 vai ter este 5 [apontando para o desenho] se traçar esta linha paralela, vai obter este 5 [apontando para a figura desenhada]. Depois ele vai multiplicar o 35 por 5 que vai dar 175. Depois vai dividir por 25 [apontando para o segmento de 25]. Mas ao dividir por 25 vai dar o resultado disto [apontando para o segmento *fz*]. Não estou a perceber por que é que dá o resultado daqui do *fz* [apontando para o segmento *fz*], se ele está a dividir isto [apontando para 5 e 35] por este [apontando para o 25].

Fibonacci neste seu processo justificou, geometricamente, a localização do ponto z [centro da fonte], contudo, concretizando numericamente o problema e tendo por base a figura desenhada, na notação atual, referiu que $fz = \frac{35 \times (35-30)}{25}$. Este grupo, embora conseguisse identificar os elementos constituintes da resolução aritmética apresentada por Fibonacci, não percebeu, inicialmente, a razão da igualdade $fz = \frac{35 \times (35-30)}{25}$, por ele sugerida. A dificuldade dos alunos residiu no facto de Fibonacci iniciar este seu processo com uma justificação geométrica da localização do ponto z, contudo, ao determinar a distância da fonte a cada uma das fontes apresentou uma resolução aritmética, baseada num resultado geométrico que não explicitou.

Ao nível da interpretação da resolução proposta por Gaspar Nicolas

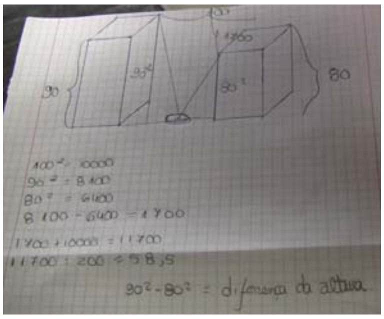


Figura 7.5.30. Ilustração do problema efetuada pelo grupo G3.

Os alunos efetuam os cálculos indicados por Gaspar Nicolas, contudo, questionam o seu procedimento: «o porquê de subtrair 6400 a 8100», «o porquê de somar essa diferença ao quadrado da distância entre as duas torres» e «o porquê de dividir esse resultado por 200». Dada essa dificuldade, o professor sugere que pensem no procedimento usado anteriormente para resolver o problema e tentem encontrar alguma correspondência.

Argumentação

Ao nível da apresentação de dados ou garantias que sustentem determinadas conclusões

Na interpretação da resolução geométrica apresentada por Fibonacci, embora os alunos compreendam o que querem mostrar (que o ponto *z* é o centro da fonte e que os triângulos *egm* e *efz* são semelhantes), observa-se que têm dificuldade em encontrar dados e garantias que sustentem as conclusões pretendidas. Pode-se observar, que na justificação de que *z* é o centro da fonte, foram diversos os argumentos apresentados pelos alunos, em que os dados apresentados não eram suficientes para legitimar a conclusão desejada. No que diz respeito à conclusão de que os triângulos *egm* e *efz* semelhantes, os alunos apenas observam, sem dificuldade, que os triângulos *egm* e *efz* são retângulos, portanto, indicam um ângulo geometricamente igual nos dois triângulos. Contudo, surgem dificuldades em identificar e justificar a existência de um outro ângulo geometricamente igual.

O grupo G4 refere a dificuldade em identificar os lados correspondentes:

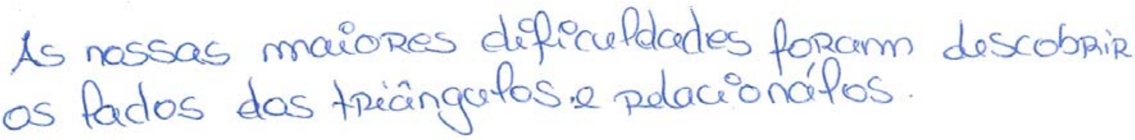

As nossas maiores dificuldades foram descobrir os lados dos triângulos e relacioná-los.

Figura 7.5.31. Avaliação final realizada pelo grupo G4.

Já o grupo G5 refere a dificuldade em encontrar argumentos para sustentar as afirmações de Fibonacci:

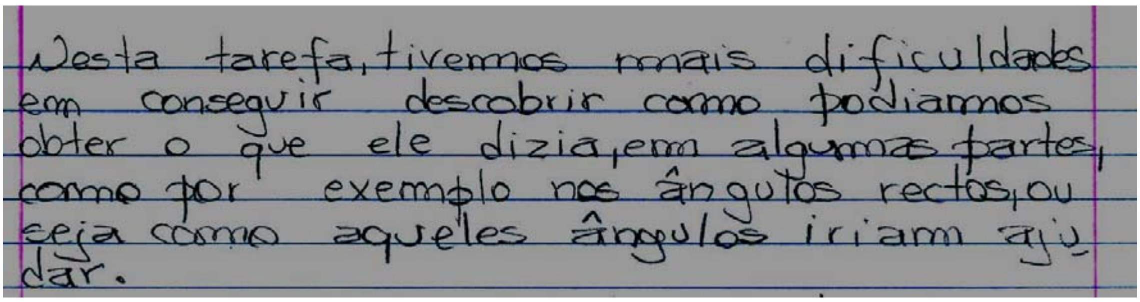

Nesta tarefa, tivemos mais dificuldades em conseguir descobrir como podiamos obter o que ele dizia, em algumas partes, como por exemplo nos ângulos rectos, ou seja como aqueles ângulos iriam aju-dar.

Figura 7.5.32. Avaliação final realizada pelo grupo G5.

7.5.6. Avaliação realizada pelos alunos

De acordo com as diferentes partes da tarefa realizada, os vários grupos revelaram diferentes tipos de opinião. Ao nível da *aprendizagem da matemática*, referem a importância da discussão em grande grupo, uma vez que lhes permitiu perceber melhor a tarefa, destacando assim a importância da comunicação e da argumentação na procura da solução do problema. Em particular esta observação foi realizada pelo grupo G5 que referiu que

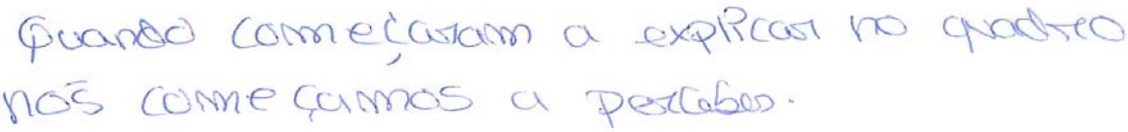

Quando começaram a explicar no quadro nós começamos a perceber.

Figura 7.5.33. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G5 (continuação).

Os alunos também reconhecem as conexões que existem entre as várias áreas da matemática, neste caso novas formas de resolver um mesmo problema, que envolvem a matéria dada. O grupo G4 refere que

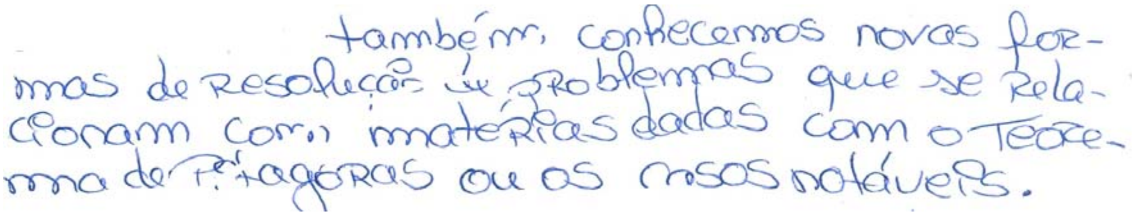

também conhecemos novas formas de resolução de problemas que se relacionam com materias dadas com o Teorema de Pitagoras ou os casos notáveis.

Figura 7.5.34. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G4 (continuação).

Já grupo G6 refere que aprendeu a matéria de diferentes formas:

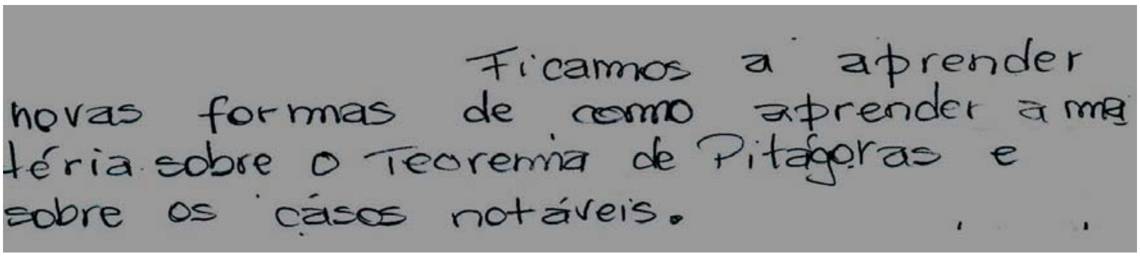

Ficamos a aprender novas formas de como aprender a matéria sobre o Teorema de Pitagoras e sobre os casos notáveis.

Figura 7.5.35. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G6.

A comparação entre as diferentes estratégias de resolução esteve particularmente presente no quarto momento da realização da tarefa.

Na última parte da tarefa, foi apresentada a resolução de Gaspar Nicolas. Contudo, os valores utilizados por Gaspar Nicolas são diferentes dos propostos no problema inicial e na resolução de Fibonacci. Gaspar Nicolas considera que a torre mais alta mede 90 braças e a menor 80 braças, estando as torres distanciadas em 100 braças. O processo apresentado por Nicolas está escrito sob a forma de uma receita, não se encontrando presente qualquer símbolo algébrico.

(…) faz assim, multiplica .100. em si, são .10000. e estes guarda. Depois multiplica .90. em si, são .8100., e multiplica .80. em si, são .6400., e estes tira de .8100., ficam .1700.. Estes ajunta com os .10000. que te mandei guardar e são .11700.. Estes parte por o dobro de que as torres estão afastadas, convém a saber por .200., e vem .58. e meio e tantas braças está afastada a fonte da torre mais pequena prova.

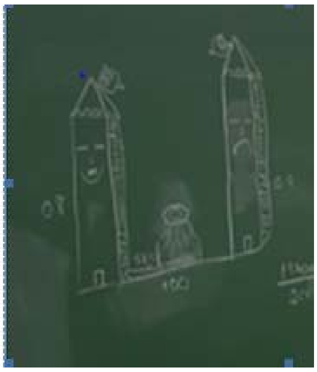


Figura 7.5.36. Esboço inicial realizado no quadro pelo Daniel do grupo G2.

Os alunos efetuaram os cálculos indicados por Gaspar Nicolas, contudo, como já referido questionaram o procedimento usado pelo matemático. O professor sugeriu que tentassem encontrar alguma correspondência entre a resolução apresentada por Nicolas e o processo algébrico usado anteriormente por vários grupos. Por forma, a que toda a turma pudesse contribuir com tentativa de comparar os dois processos resolução, o professor solicitou a um aluno que, no quadro, apresentasse os cálculos efetuados por Gaspar Nicolas. Após representar a situação problemática no quadro estabeleceu-se um diálogo entre o professor e os diferentes alunos da turma, em que o professor procurou que estes procedessem à interpretação do procedimento usado por Gaspar Nicolas, tendo em conta o processo algébrico anteriormente realizado. Observe-se o diálogo estabelecido:

(1) Professor: Como é que apareceu o 100 ao quadrado?
(2) Nuno: Multiplicámos por dois 100.
(3) Daniel: É por causa do teorema de Pitágoras.
(4) Professor: Mas onde está aí o teorema de Pitágoras? Ou seja, para aplicarem o teorema de Pitágoras o que é que necessitam?
(5) Daniel: [De] um triângulo…
(6) Emanuel: retângulo! [completando o Daniel]
(7) Professor: E onde está o triângulo?
(8) Daniel: Aqui [e começa a trçar na figura desehnada no quadro dois retângulos] e aqui
(9) Professor: Certo. Agora pensem. Se não usássemos o método de Gaspar Nicolas como é que fazíamos?

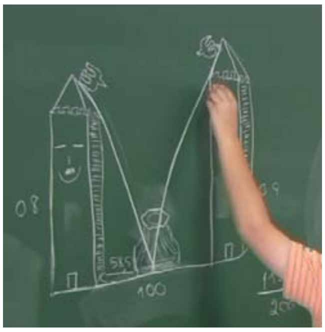


Figura 7.5.37. Construção geométrica realizada no quadro pelo Daniel do grupo G2 durante a discussão do problema.

O professor questiona os alunos sobre o porquê de Gaspar Nicolas ter calculado o 100 ao quadrado (§1). Enquanto que o Nuno refere o procedimento em si, 100 ao quadrado é 100 vezes 100, (§2) o Daniel refere que Gaspar Nicolas calculou 100 ao quadrado por causa do teorema de Pitágoras (§3). O professor inerroga então, os alunos sobre o modo como podiam aplicar o teorema de Pitágoras (§4). O Daniel com a ajuda do Emanuel referem que tinham de ter triângulos rectângulos, (§5) e (§6), indicando-os o Daniel na figura (§8). Neste momento, o professor intervém de novo e pergunta, a toda a turma, como é que resolveriam o problema, sem pensar no método apresentado por Gaspar Nicolas (§9).

(10) Daniel: Fazíamos este ao quadrado [apontando para a torre que mede 80 braças] e este ao quadrado [apontando para a base do triângulo tendo por altura a torre de 80 braças].
(11) Professor: Então quanto é que era esse ao quadrado [apontando para a base do triângulo tendo por altura a torre de 80 braças]?
(12) Daniel: É 50 ao quadrado, porque é metade.
(13) Professor: Concordam? A torre está no meio?
(14) Daniel: Ah! Não pode… É 58 e meio! [sorrindo]
(15) Professor: Esse é o valor que queres encontrar!
(16) Daniel: Punhamos *x*. Mas também não sabemos este [apontando para a hipotenusa deste triângulo]
(17) Professor: E esse é igual a ?...
(18) Nuno: Ao outro [referindo-se à hipotenusa do triângulo retângulo formado que tem por altura a torre de 90 braças]
(19) Professor: Porquê?
(20) Nuno: Porque os lados são iguais, pois é o caminho igual delas
(21) Professor: Então o que é que fizemos da outra vez?
(22) Daniel: Colocámos *y*.
(23) Professor: Então representa aí no quadro.
Enquanto o Daniel designa por *x* a distância da torre de 80 braças à fonte, o Pedro intervém:
(24) Pedro: O outro [referindo-se à base do outro triângulo retângulo de altura igual à torre de 90 braças] é 100 menos *x*.
O Daniel escreve essa expressão no quadro e designa os catetos por *y*.

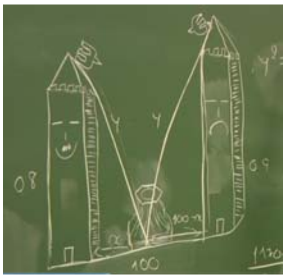


Figura 7.5.38. Interpretação geométrica realizada no quadro pelo Daniel do grupo G2.

Este excerto permite observar que os alunos embora saibam aplicar o teorema de Pitágoras, têm alguma dificuldade em trabalhar com incógnitas, (§12) e (§14). Observa-se também que os alunos designam a distância da torre de 80 braças à fonte por *x* (§16), sendo a distância da torre de 90 braças à fonte 100 – *x* (§24). Também é possível observar que designam por *y* a distância percorrida por cada uma das aves (§22).

(25) Professor: Imaginem que eram estes os dados que tinham. Como é que resolviam?
Momento de silêncio, até que o Emanuel intervém:
(26) Emanuel: Fazíamos o teorema de Pitágoras.
O Daniel seguindo a sugestão do Emanuel escreve no quadro $y^2 = 90^2 + (100 - x)^2$ e $y^2 = x^2 + 80^2$.

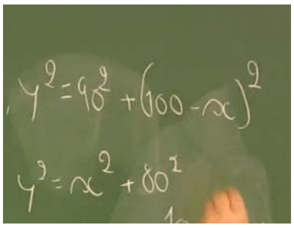


Figura 7.5.39. Cálculos algébricos efetuados no quadro pelo Daniel do grupo G2.

(27) Professor: A partir destas duas igualdades o que é que podem concluir?
(28) Daniel: Que são iguais.
(29) Professor: Como é que podem escrever?
(30) Paula: Pomos uma igual à outra.
(31) Professor: Certo. Eu tenho aqui duas equações [apontando para as equações escritas], consigo escrever apenas uma equação?
(32) Ana: Sim, tiramos o *y* ao quadrado e pusermos o resto.
O Daniel escreve $90^2 + (100 - x)^2 = x^2 + 80^2$
Procedendo, em conjunto com os restantes elementos da turma, à sua resolução.

Mais uma vez é possível observar que os alunos aplicam corretamente o teorema Pitágoras. Contudo, neste excerto observa-se que os alunos são confrontados com duas equações com duas incógnitas, mas ambas resolvidas em ordem a y^2. Uma vez que ainda não foi lecionado o tema referente à resolução de sistemas de equações, o professor questiona os alunos sobre estas igualdades (§27). De facto, os alunos conseguem perceber que basta retirar o y^2, igualando as expressões do segundo membro de cada equação(§30) e (§32).

(33) Professor: Olhando para o que Daniel escreveu, alguém consegue explicar o raciocínio de Gaspar Nicolas?
(34) Daniel: Ele fez o 100 ao quadrado. Depois fez o 90 ao quadrado e o 80 ao quadrado que é isto [apontando para o quadro], depois subtraiu a 8100 o 6400 que dá 1700 e somou a 10000 e dividiu por 200.

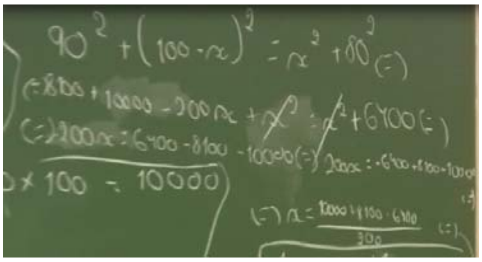


Figura 7.5.40. Cálculos algébricos efetuados no quadro pelo Daniel do grupo G2 (continuação).

Este último excerto permite verificar que os alunos conseguem fazer uma correspondência entre o método usado por Gaspar Nicolas e o processo algébrico por eles utilizado (§34).

No final da realização da tarefa, os alunos apreciaram as diferentes resoluções apresentadas, em particular comparam o seu processo de resolução com os apresentados por Fibonacci e Gaspar Nicolas.

Em relação à resolução apresentada por Gaspar Nicolas, o grupo G4 refere que

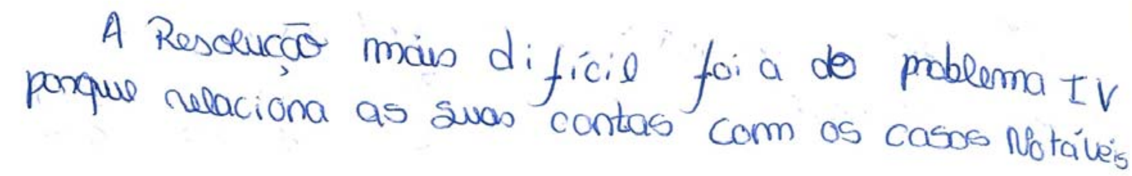

A Resolução mais dificil foi a do problema IV porque relaciona as suas contas com os casos Notáveis

Figura 7.5.41. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G5 (continuação).

Também o grupo G6 refere que sentiu dificuldades em perceber a resolução de Gaspar Nicolas, uma vez que tinham resolvido o problema através de equações com recurso aos casos notáveis:

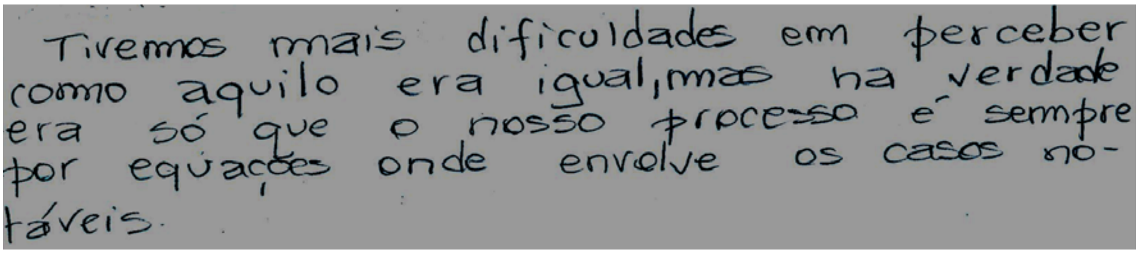

Tivemos mais dificuldades em perceber como aquilo era igual, mas na verdade era só que o nosso processo é sempre por equações onde envolve os casos notáveis.

Figura 7.5.42. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G6 (continuação).

Já o grupo G1 destaca na sua reflexão final que

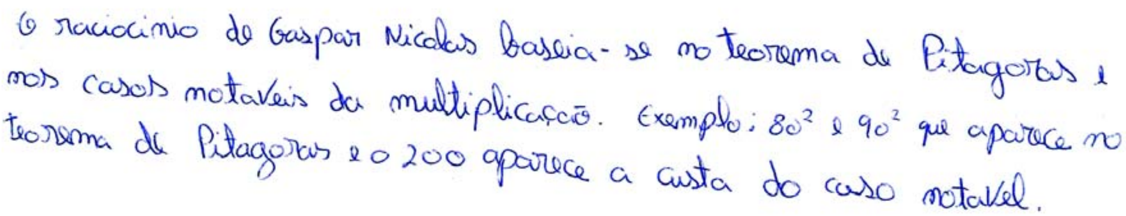

O raciocinio de Gaspar Nicolas baseia-se no teorema de Pitagoras e nos casos notaveis da multiplicação. Exemplo: 80^2 e 90^2 que aparece no teorema de Pitagoras e o 200 aparece a custa do caso notavel.

Figura 7.5.43. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G1.

No entanto, o grupo G3 considera que Gaspar Nicolas estava a usar o teorema de Pitágoras e os casos notáveis sem saber que os estava a usar.

Gaspar Nicolas usou o teorema, o caso notável, não sabendo que o fez.

Figura 7.5.44. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G3 (continuação).

Contudo, o Emanuel do grupo G2 considera que Gaspar Nicolas resolveu o seu problema de forma algébrica, no entanto, apresentou a sua resolução numa forma mais simples.

Eu acho que ele resolveu o exercício de forma algébrica. Gaspar Nicolas mostrou uma resolução mais simples mas correcta, sem complicar muito, como acontece de forma geometrica.

Figura 7.5.45. Avaliação final realizada pelo Emanuel, grupo G2.

Observa-se ainda que este aluno considera esta forma de resolução é mais simples que o processo geométrico apresentado por Fibonaci.

No que diz respeito à resolução geométrica de Fibonacci, os alunos referem «que esta forma de resolver é mais complicada» (grupo G1), uma vez que se tinha de verificar se os triângulos eram semelhantes.

O grupo G4 também compara a sua resolução com as apresentadas por Fibonacci. Para este grupo de alunos a diferença entre sua a resolução e a resolução aritmética de Fibonacci, resulta de terem interpretado algebricamente a afirmação inicial de Fibonacci.

A diferença entre o nosso processo e o processo de Fibonacci é que nós escrevemos o paragrafo de Fibonacci e ele numa das suas formas fez geometricamente utilizando a razão de semelhança de triângulos correspondendo os lados dos dois triangulos.

Figura 7.5.46. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G4 (continuação).

Contudo, estes alunos realçam o processo geométrico de Fibonacci para a resolução do problema, o que lhes permite observar que um mesmo problema pode ser resolvido por diversas formas: artimeticamente, algebricamente ou geometricamente.

Ao nível da *predisposição perante a matemática,* Os diferentes grupos demonstraram interesse e entusiasmo por resolver estas tarefas. O grupo G2 refere

O que mais gostamos de fazer foi aprender novas formas de resolver o teorema de pitágores

Figura 7.5.47. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G2.

realçando o facto de terem aplicado o teorema de Pitágoras em diferentes situações. Já os grupos G3 e G4 associam, respetivamente, o seu interesse ao facto de terem aprendido a resolver o mesmo problema através de diferentes processos.

Aprendemos que com vários raciocinios ~~F~~ resol-
vemos o mesmo problema.

Figura 7.5.48. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G3 (continuação).

Foi um problema muito interessante em que ficamos
a perceber ~~duas~~ várias maneiras de resolver o mesmo pro-
blema numa por nossa resolução outra de Fibonacci
e outra de geometria de Fibonacci.

Figura 7.5.49. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G4 (continuação).

Por outro lado, outros grupos destacam a tarefa que despertou maior interesse em realizar. Por exemplo o grupo G2 refere que

A (tare) (tare) tarefa que nós mais gostamos foi a 4ª porque achamos que a quarta foi a mais interessante porque tinha uma resolução que não usava os casos notáveis mas era a mesma coisa que usasse. gostamos muito da forma que ele usou para resolver este problema.

Figura 7.5.50. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G2 (continuação).

o que permite observar que este grupo de alunos ao comparar as diferentes resoluções apresentadas constata a eficácia do processo usado por Gaspar Nicolas.

Também o grupo G6 corrobora esse seu interesse pela tarefa onde é apresentada a resolução de Gaspar Nicolas:

A tarefa que mais nos interessou foi esta, apesar de ter sido a mais fácil, era uma boa ideia de resolver este problema.

Figura 7.5.51. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G6 (continuação).

Ao nível da *apreciação da matemática como esforço cultural*, é de observar algumas opiniões que destacam uma perceção por parte dos alunos do desenvolvimento da matemática, nomeadamente, do papel de diferentes matemáticos no desenvolvimento da matemática. O grupo G2 refere que

Este problema ensinou-nos muita coisa!.

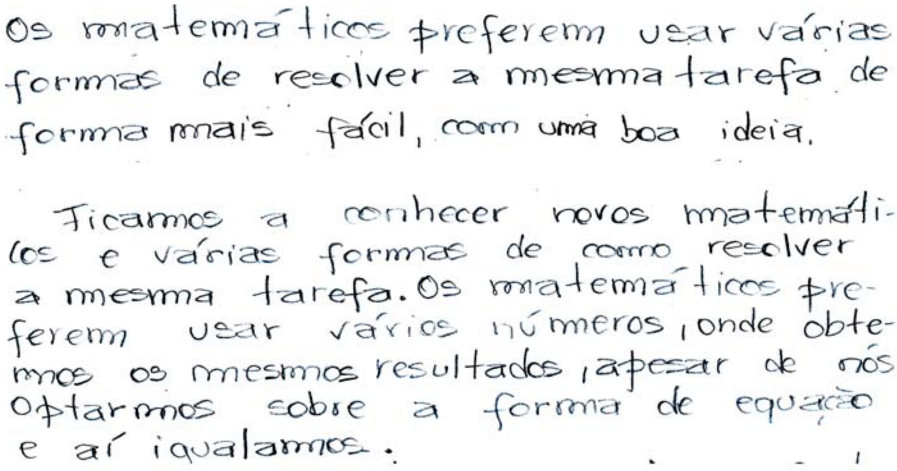
Figura 7.5.52. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G2 (continuação).

Em virtude de terem aprendido novas formas de aplicar o teorema de Pitágoras, formas essas que descobriram através da leitura e análise das resoluções de antigos matemáticos, os alunos do grupo G6 referem que ficaram a conhecer diferentes matemáticos:

Conhecemos Fibonacci, Nicolas, Diofanto
Pitágoras de Samos,...

Figura 7.5.53. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G5 (continuação).

Embora os alunos do grupo G4 refiram que «ficaram a conhecer um pouco da sua biografia», os alunos do grupo G6 referem que


Os matemáticos preferem usar várias
formas de resolver a mesma tarefa de
forma mais fácil, com uma boa ideia.

Ficamos a conhecer novos matemáti-
cos e várias formas de como resolver
a mesma tarefa. Os matemáticos pre-
ferem usar vários números, onde obte-
mos os mesmos resultados, apesar de nós
optarmos sobre a forma de equação
e aí igualamos.

Figura 7.5.54. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G6 (continuação).

o que realça que os alunos observam não só que o desenvolvimento da matemática é impulsionado por critérios de curiosidade intelectual e propostas de desafio, mas também que muitos dos conceitos com que se ocupam/trabalham em sala de aula e na sua vida do dia a dia são baseadas em ideias surgidas no passado e que as várias técnicas usadas para resolver problemas, foram evoluindo ao longo do tempo.

Ao contactarem com as resoluções de Fibonacci e Gaspar Nicolas, presentes nas fontes primárias apresentadas, os alunos contactaram com diferentes abordagens alternativas para a resolução de um mesmo problema. Nesse sentido, ao nível do *desenvolvimento da visão da natureza da matemática*, os alunos foram encorajados a formular as suas próprias questões, fazer conjeturas e as testá-las, de modo a entenderem os diferentes passos presentes em cada um dos processos apresentados. Também a terminologia usada por cada um destes matemáticos, permitiu aos alunos o entendimento da própria linguagem, verbal ou simbólica, da matemática de um determinado período, reavaliando o papel visual, intuitivo e as abordagens não formais sugeridas no passado. Numa parte da sua reflexão, o Daniel do grupo G2 refere

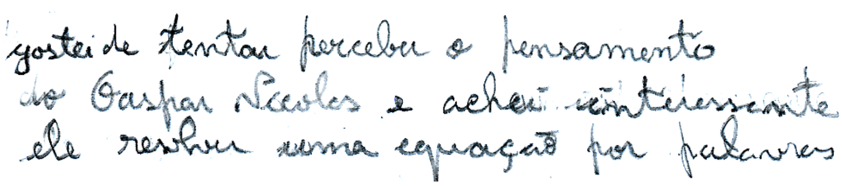

gostei de tentar perceber o pensamento
do Gaspar Nicolas e achei interessante
ele resolver uma equação por palavras

Figura 7.5.55. Avaliação final realizada pelo Daniel, grupo G2.

7.6. Equações do 2.° grau

A presente tarefa, elaborada sob a forma de uma sequência de ensino, encontra-se dividida em sete partes, teve como objetivo a introdução da fórmula resolvente para a resolução das equações do 2.° grau. Duas das partes desta tarefa (partes III e V), são apoiadas na interpretação em termos de *geometria do corta e cola*, geometria intuitiva, sendo a interpretação presente na parte V baseada na interpretação realizada por Jens Høyrup, a partir de uma análise filológica do contexto matemático da Antiga Babilónia. A sequência de ensino foi desenvolvida de acordo com o seguinte itinerário:

Parte I – resolução do problema: determinar as dimensões de um retângulo cujo semiperímetro é 20 e cuja área é 96;

Parte II – leitura e análise da resolução do mesmo problema, apresentada por Diofanto em *Aritmética*, I, 27;

Parte III – interpretação, com recurso a material manipulável, em termos de *geometria do corta e cola*, geometria intuitiva;

Parte IV – resolução de um novo problema: dado um retângulo com comprimento 10 e largura desconhecida, desenha-se um quadrado de lado igual à largura desconhecida do retângulo dado; sabendo que a soma da área do retângulo com a área do quadrado é 39, determinar a largura do retângulo inicial;

Parte V – utilização de uma diferente técnica de geometria intuitiva, baseada na interpretação geométrica, para o problema proposto na parte IV, realizada pelo historiador Jens Høyrup;

Parte VI – generalização do procedimento presente na parte V, isto é, considerando que o retângulo dado tem comprimento b e que a soma da área do retângulo com a área do quadrado de lado igual à largura do retângulo inicial é c, determinar a largura do retângulo inicial;

Parte VII – determinação das fórmulas das equações $ax^2 + bx = c$ e $ax^2 + bx + c = 0$, tendo em consideração a resolução da parte VI da tarefa e resolução do exercício: sem resolver a equação verificar quais dos seguintes números 1, 2 e 3 são soluções da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$. Seguidamente, aplicando a fórmula que obtiveram anteriormente, determinar a solução da equação. Por fim, e tendo em conta este último exercício e a última fórmula obtida, determinar a fórmula resolvente das equações do 2.° grau.

Todas estas tarefas foram realizadas em pequenos grupos de trabalho, tendo sido discutidas em grande grupo no final da realização de cada tarefa.

7.6.1. Tipo de argumentos produzidos

Na resolução da parte I da tarefa, embora a maioria dos grupos tivesse resolvido o problema de forma aritmética, por tentativa e erro, três grupos apresentaram duas outras propostas: dois desses grupos procuraram resolver o problema através de um processo algébrico, enquanto que o outro grupo optou por resolver o problema de forma geométrica. Contudo, independentemente do processo utilizado, todos os grupos apresentaram um desenho do retângulo procurado. Designando, respetivamente, por x e y o comprimento e a largura do retângulo, os diferentes grupos traduziram o semiperímetro e a área do retângulo, respetivamente, através das seguintes equações:

$$x + y = 20 \text{ e } xy = 96 .$$

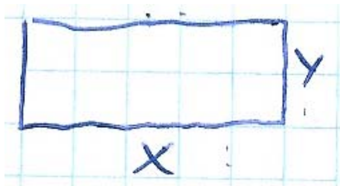


Figura 7.6.1. Exemplo do retângulo desenhado pelo grupo G1.

Analise-se de forma mais detalhada o tipo de argumentos apresentados na resolução do problema proposto nesta parte da tarefa.

Argumentos empíricos

Usando o processo de tentativa e erro, a maioria dos grupos não seguiu nenhuma forma metódica de raciocínio: simplesmente atribuiu valores, *simples enumeração*, ao comprimento do retângulo e, mediante as condições do problema, determinou o valor correspondente da largura. A forma como obtiveram as medidas do retângulo procurado pode ser observada na descrição feita por uma aluna do grupo G4:

Carla: Tentámos vários números para chegar a estes dois números [apontando para o 20 e o 96]. E já consegui chegar com o 12 e o 8 [apontando para as igualdades escritas na folha $12 + 8 = 20$ e $12 \times 8 = 96$].

Contudo, mesmo seguindo um processo de tentativa e erro, o grupo G1 justificou o procedimento utilizado:

Nuno: Tinha 15 [apontando para o comprimento da base do retângulo]. Se aqui fosse 15, aqui [apontando para o lado oposto do retângulo] também é 15, logo dava 30. Mas aqui [apontando para a altura] não podia ser 5 porque 15 vezes 5 não dava 96. Então tentei o 17, mas quanto maior fosse este [apontando para a base do retângulo] menor era este [apontando para a altura do retângulo], portanto, nunca dava. Pus [então] para baixo de 15. Pus o 12. 12 mais 12 [dá] 24, o resto dá 16 [pois o perímetro do retângulo é 40] que a dividir por 2 dá 8. 12 vezes 8 dá 96 que é a área e isto tudo somado [apontando para os lados do retângulo desenhado] dá o perímetro.

Através deste excerto, verifica-se que este grupo iniciou a resolução do problema escolhendo o 15 para medida da base do retângulo, logo a largura seria 5, uma vez que o perímetro do retângulo era 40, pois, pelo enunciado, o semiperímetro do retângulo era 20. É de observar que esta última afirmação não surge de forma explícita na justificação apresentada. Contudo, implicitamente percebe-se que os alunos têm em consideração este dado do problema. Seguidamente, observam que a área de um retângulo com essas dimensões não era 96, portanto, resolvem tentar outro número.

Tal como o grupo G4, o grupo G1 apresentou uma simples enumeração dos valores que são soluções de uma das equações, neste caso da equação $x + y = 20$, tentando posteriormente verificar quais desses números satisfazem o valor da área pretendida. No entanto, é possível observar que o grupo G1 procedeu a uma *extensão de um padrão*, uma vez que se escolhesse comprimentos maiores do que 15, a área obtida era cada vez menor que 96. Daí a opção de escolher, em determinado momento, um valor para o comprimento do retângulo menor do que 15.

Ainda dentro deste tipo de argumentos empíricos, observe-se a resolução apresentada pelo grupo G3 que recorreu a um *esquema percetual* para resolver o problema.

Este grupo de alunos opta por dividir o retângulo procurado em dois retângulos geometricamente iguais. Uma vez que a área do retângulo procurado era 96, a área de cada um destes dois retângulos seria 48. Os alunos escolhem, então, o 6 e o 8 para medidas dos lados dos novos retângulos construídos, uma vez que $6 \times 8 = 48$. Os alunos observam, de forma esquemática (figura 7.6.2.) que existem duas possibilidades. No entanto, uma vez que o semiperímetro tinha de ser 20, o comprimento do retângulo procurado teria de ser 12 e a largura 8.

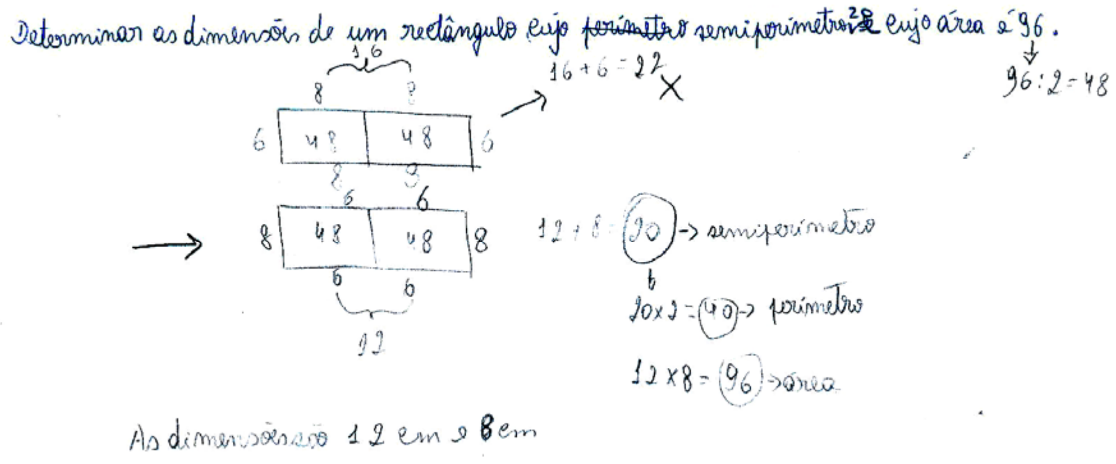


Figura 7.6.2. Esquema geométrico apresentado pelo grupo G3.

Argumentos entre o empírico e o genérico

A justificação apresentada pelo grupo G2 para determinar as medidas dos lados do retângulo sugere a procura de soluções por um *processo de exaustão*. Observe-se o seguinte excerto, seguido do processo de resolução apresentado por este grupo:

(1) Emanuel: Vimos os divisores de 96.
(2) Daniel: Depois vimos quais eram os possíveis perímetros.

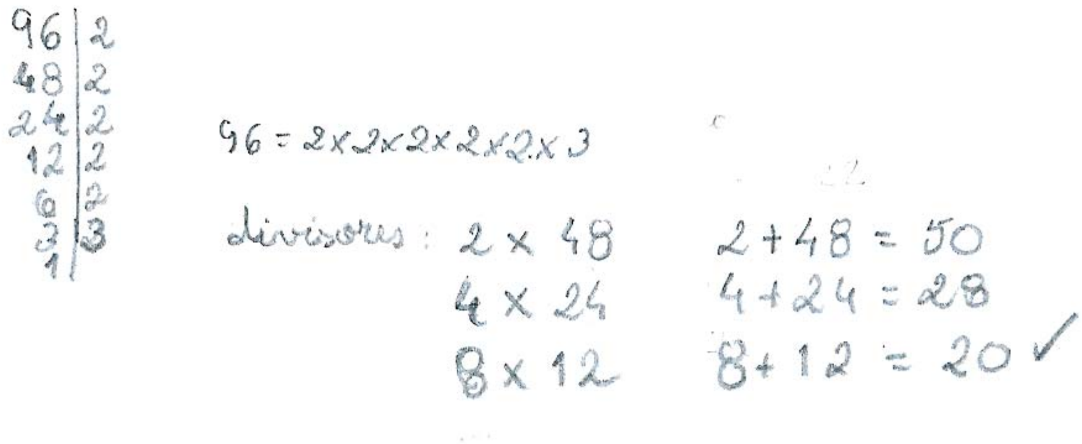


Figura 7.6.3. Processo de resolução apresentado pelo grupo G2.

Este grupo de alunos decompôs o 96 em fatores primos, começando, depois, a identificar os divisores de 96 (§1) cujo produto dê 96 (figura 7.6.3.). Embora não apresentem todos os divisores de 96 cujo produto seja 96, é possível observar que há uma tentativa, exaustiva, de procurar esses divisores. Verifica-se ainda que os alunos procedem, posteriormente, à adição desses valores, isto é, procuram os divisores cuja soma seja 20 (§2).

Argumentos simbólicos

Como referido inicialmente, independentemente do processo utilizado, todos os grupos apresentaram um desenho do retângulo procurado. Ao designarem, respetivamente, por x e y o comprimento e a largura do retângulo, os diferentes grupos traduziram simbolicamente o semiperímetro e a área do retângulo, respetivamente, através das seguintes equações:

$$x + y = 20 \text{ e } xy = 96 .$$

Argumentos entre o simbólico e o formal

Uma vez escritas as equações: $x + y = 20$ e $xy = 96$, dois grupos optam por resolver de forma algébrica o problema, recorrendo à resolução de um sistema de equações do 1.° grau a duas incógnitas. Contudo, a obtenção da equação $20y - y^2 = 96$ impediu-os de prosseguir. Observe-se a forma como iniciaram a resolução do referido sistema:

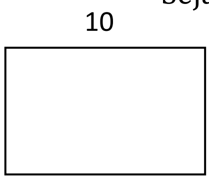
$$x + y = 20$$
$$x \times y = 96$$

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x \times y = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 - y \\ (20 - y) \times y = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ 20y - y^2 = 96 \end{cases}$$

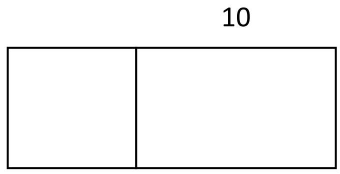
Figura 7.6.4. Tentativa de resolução algébrica apresentada pelo grupo G2.

Na parte III, foi apresentada aos alunos uma interpretação geométrica, para o problema proposto na parte I, baseada na geometria do corta e cola. Nesta parte III, são colocadas aos alunos, inicialmente, cinco questões que exigem, para a sua resposta, a utilização de papel milimétrico e tesoura, com o objetivo de solucionar de forma geométrica o problema. Seguidamente, são propostos dois novos problemas, onde se pede que os alunos os resolvam de acordo com o método geométrico apresentado anteriormente. Uma vez que a tarefa proposta envolve o recorte e composição de figuras, os argumentos produzidos pelos alunos são de um modo geral argumentos *genéricos pictóricos*, sendo os resultados numéricos obtidos através da manipulação geométrica efetuada nas diferentes figuras construídas.

Na parte IV foi proposto aos alunos um novo problema que requeria um uso diferente da técnica de geometria intuitiva utilizada na parte III. Contudo, esse método seria apenas introduzido na parte V, sendo pedido aos alunos, neste momento, que resolvessem o problema e descrevessem a sua estratégia de resolução.



Sejam um retângulo com comprimento 10 e largura desconhecida (ver figura do lado esquerdo). Desenha-se um quadrado, como na figura da direita, de lado igual à largura desconhecida do retângulo dado. A soma das áreas do retângulo e do quadrado é 39. Qual é a largura do retângulo inicial?



Embora os alunos tenham tentado resolver o problema por processos algébricos e geométricos, apenas conseguiram determinar a largura do retângulo inicial de forma aritmética, por tentativa e erro.

Analise-se de forma mais detalhada o tipo de argumentos apresentados nesta parte da tarefa.

Argumentos entre o empírico e o genérico

O grupo G1 resolveu o problema por tentativa e erro. Observe-se a forma como encontraram a solução do problema através de um excerto do diálogo que surgiu durante a apresentação da sua resolução em grande grupo.

(1) Professor: Nuno, como é que o vosso grupo pensou?
(2) Nuno: Por tentativa e erro.
(3) Professor: Explica lá.
(4) Nuno [virando-se para a Ana]: Explica tu!
(5) Professor: Sim Ana, podes explicar tu.
(6) Ana: Se a área total do quadrado e do retângulo tinha que ser 39.
(7) Professor: Sim.
(8) Ana: Aqui [apontando para o *x* desenhado na figura] tinha que ser 3. Porque se fosse 4, era 10 vezes 4 que já ia ultrapassar o 39. Então 10 vezes 3, 30, ainda faltam 9. Como isto é um quadrado tem de ser 3. 3 para [ao quadrado] dar o 9 de área.
(9) Miguel: Não percebi!
(10) Professor: O que é que não percebeste?
(11) Miguel: Como é que eles descobriram o 3?
(12) Professor: Explica de novo Ana.
(13) Ana: Aqui é 10 de certeza por causa do enunciado [apontando para a figura]. Se aqui fosse um 4 [apontando para o *x*], 10 vezes 4 dava 40 e ultrapassava os 39. Então para baixo, tinha de ser o 3. 10 vezes 3 dá 30. Se isto é um quadrado, ainda faltam 9 para chegar aos 39. Então aqui fica 3 [apontando para o *x*] e aqui 3 [apontando para o *x*] para dar 9. A soma de 9 mais 30 dá 39.

(14) Miguel: E se o 3 não fosse solução do problema?
(15) Ana: Tentávamos outro até dar! Mas já sabíamos que tinha de ser menor do que 4.
(16) Miguel: Ora, mas podia demorar muito tempo!
(17) Ana: Pois…
(18) Nuno: Mas a gente ia vendo o que ia dando e diminuía as possibilidades.

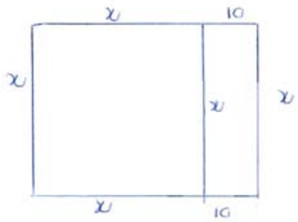


Figura 7.6.5. figura geométrica construída pelo grupo G1.

Através deste excerto, é possível observar que embora os alunos tenham resolvido o problema por tentativa e erro, não procederam a uma simples enumeração dos valores de *x*, nem, inicialmente, a uma simples verificação de todos os valores possíveis. Através da explicação dada ao seu colega Miguel que questionou "como foi escolhido o número 3?" (§11), este grupo apresenta um *contraexemplo* para o facto de não poder escolher um número maior ou igual a 4 (§13). Referem, assim, que se fosse possível escolher o 4, não era possível satisfazer os dados do problema, pois a área do retângulo inicial seria maior do que 39. Portanto, concluem que o número teria de ser inferior a 4, daí a escolha do 3. No entanto, este grupo refere, caso o 3 não fosse solução iria testar os restantes números (§15), o que revela a ideia de recorrerem, posteriormente, a um processo de caráter exaustivo.

Argumentos entre o genérico e o simbólico/ e entre o simbólico e o formal

Os grupos G2 e G4, inicialmente, tentaram resolver o problema de forma algébrica. Com recurso a argumentos geométricos, obtidos através da observação da figura dada, ambos os grupos estabeleceram a seguinte equação: $x^2 + 10x = 39$. Nesse sentido, para ambos os grupos determinar o valor de *x* reduzia-se à resolução desta equação. Contudo, a forma como obtiveram esta equação foi diferente. Observe-se o diálogo estabelecido entre o professor e os alunos do grupo G4:

(1) Diana: Então aqui diz… dão-nos esta figura [apontando para a figura desenhada] e diz-nos que a soma das áreas do retângulo e do quadrado é 39, logo isto é um quadrado [apontando para o quadrado] e isto é um retângulo.
(2) Professor: Certo.
(3) Diana: Se este retângulo tem aqui 10 e aqui x [designando por x o outro lado do retângulo] então aqui vai ser 10 e aqui vai ser x [referindo-se aos outros lados do retângulo]. Se aqui é x [referindo-se ao lado do retângulo comum ao quadrado procurado] como é um quadrado tem de ser x em todos os lados. Então a área do quadrado fica x^2, mais a área do retângulo $10x$ tem que dar 39 porque é o que nos diz no enunciado.

Para estes alunos a equação obtida resulta da soma das áreas de cada um dos quadriláteros que compõem a figura, tendo em consideração a aplicação das fórmulas das áreas do quadrado e do retângulo, respetivamente, e do facto da área total ser 39 (§3).

No entanto, embora o grupo G2 tenha estabelecido uma expressão à custa da figura, a forma como obtém a equação $x^2 + 10x = 39$ resulta de uma manipulação algébrica.

(1) Emanuel: Esta equação [apontando para $x(10 + x) =39$] para determinar o valor de x.
(2) Professor: Porquê?
(3) Emanuel: Sabemos este [apontando para a medida 10] e chamando a este x [ao lado do quadrado] este [o $x + 10$] vezes este [o x] tem de dar 39.
(4) Professor: Então resolve.
O Emanuel simplifica a equação obtendo $x^2 + 10x = 39$ e diz:
(5) Emanuel: Olhe, agora é outra equação do 2.º grau.
(6) Professor: Completa ou incompleta?
(7) Emanuel: Completa.
(8) Nélson: Então não sabemos resolver.
(9) Professor: Então pensem um bocadinho.
(10) Emanuel: Podemos fazer como as outras [referindo-se ao procedimento utilizado na resolução das equações da tarefa anterior]

Através deste excerto, verifica-se que a equação $x^2 + 10x = 39$ resulta da simplificação da equação $x(10 + x) =39$ (§1), equação esta proveniente do facto da figura em causa ser um retângulo de medidas x e $10 + x$, respetivamente, e da aplicação da fórmula da área de um retângulo, tendo em atenção que a área total era 39 (§3).

No entanto, embora ambos os grupos tenham obtido esta equação, não a conseguem resolver por esta ser uma equação do segundo grau completa. Contudo, o grupo G2 sugere a resolução deste problema através do processo de geometria intuitiva utilizado na parte III da tarefa.

Argumentos genéricos

Embora, inicialmente, pretendessem determinar a solução do problema através da resolução da equação $x^2 + 10x = 39$, os alunos do grupo G2 optaram por resolver o problema com recurso a argumentos baseados num *exemplo pictórico*, recorrendo ao método utilizado na resolução da parte III. Contudo, justificam determinadas conclusões de forma aritmética. Observe-se um excerto do diálogo estabelecido entre o professor e este grupo de alunos:

(1) Emanuel: Fiz igual aquele ali. Desenhei um quadrado [de área] cujo quadrado perfeito menor a seguir ao número 39 que é 49.
(2) Professor: Sim.
(3) Emanuel: Fiz 7 vezes 7. Fiz um quadrado de área 49 de lado 7 por 7.
[...]

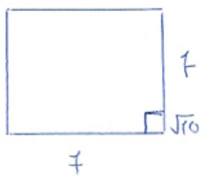


Figura 7.6.6. Figura construída pelo grupo G2.

(19) Emanuel: Desenhei um quadrado com área 10 que era 49 menos 39 e fizemos igual aquilo que demos.
(20) Professor: E?
(21) Emanuel: E deu-nos isto. Que o semiperímetro era 14 e o perímetro 28.

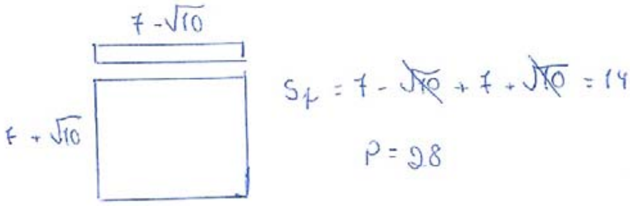


Figura 7.6.7. Manipulação geométrica e simplificação aritmética efetuada pelo grupo G2.

(22) Professor: Mas há [no enunciado] alguma informação sobre o semiperímetro?
(23) Emanuel: Não!

(24) Professor: E sobre a área?
(25) Emanuel: A área tem que dar 39.
(26) Professor: E dá?
(27) Emanuel: E como é que eu vou continuar agora? [tem escrito $\left(7+\sqrt{10}\right)\times\left(7-\sqrt{10}\right)$]
(28) Nélson: Faz as contas!
(29) Emanuel: É o que eu estou a fazer [faz as contas apresentando o seguinte resultado $\left(7+\sqrt{10}\right)\times\left(7-\sqrt{10}\right) = 49-7\sqrt{10}+7\sqrt{10}-10$]. Que é igual a 39.
(30) Daniel: Que é a área.

$$(7+\sqrt{10}) \times (7-\sqrt{10}) =$$
$$= 49 - 7\sqrt{10} + 7\sqrt{10} = 10$$
$$= 39$$

Figura 7.6.8. Cálculos efetuados pelo grupo G2.

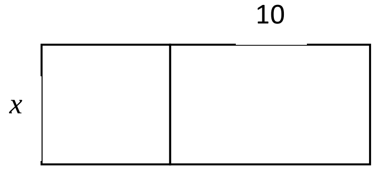
(31) Professor: Então o que é que nós queremos saber?
(32) Nélson: O *x*. A largura do primeiro retângulo.
[…]
(48) Emanuel: Portanto, o *x* é 7 mais raiz de 10 menos 10.
(49) Nélson: Logo isto tudo [apontando para um dos lados do retângulo] é 7 mais raiz de 10, porque corta-se os 10's.
(50) Professor: E no vosso caso [apontando para a medidas do outro lado retângulo desenhado]?
(51) Nélson: Mede menos.
(52) Emanuel: Pois… não funciona!
(53) Professor: O é que não funciona?
(54) Daniel: Porque não estamos como na figura do desenho do problema. Tínhamos de ter um retângulo junto com um quadrado.
(55) Nélson: Ah! Pois é estes lados [apontando para $7+\sqrt{10}$ e $7-\sqrt{10}$] são diferentes.
(56) Daniel: Logo não há quadrado!

Através deste excerto observa-se que os alunos optam por resolver o problema seguindo o método geométrico utilizado na parte III. Assim, tendo em consideração os *argumentos pictóricos* produzidos, através da construção geométrica realizada, os alunos descrevem aritmeticamente as ações efetuadas. No entanto, o retângulo construído resulta da construção de um quadrado de lado 7, portanto, um dos lados seria $7+\sqrt{10}$, logo concluem que *x* seria igual a $7+\sqrt{10}$ – 10 (§49). Contudo, observam que o outro lado mede $7-\sqrt{10}$, portanto, não se encontram nas condições do problema, uma vez que se retirarem o retângulo inicial ao retângulo obtido do quadrado de área 49, não obtêm um quadrado (§54), (§55) e (§56).

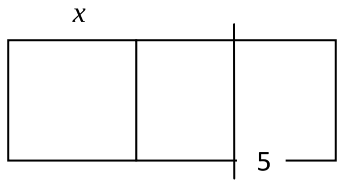
Na parte V foi apresentada aos alunos uma interpretação de uma diferente técnica de geometria intuitiva, baseada na interpretação geométrica, para o problema proposto na parte IV, realizada pelo historiador Jens Høyrup. Foi, inicialmente, apresentado aos alunos o método geométrico baseado nessa interpretação geométrica e propostas duas questões.

<u>1.</u> Observa as sequências de figuras seguintes:

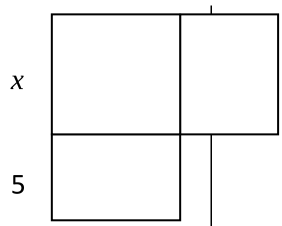
1) *x* designa a largura desconhecida do retângulo dado.



2) dividir em duas partes iguais o retângulo dado.



3) colocar uma das partes divididas na “base” do quadrado.



<u>2.</u> A última figura obtida não forma um quadrado. O que falta para essa figura formar um quadrado? Qual é área dessa porção em falta?

<u>3.</u> Através da resposta da alínea anterior, determina a largura desconhecida.

Argumentos empíricos

Todos os grupos responderam à segunda questão, referindo que a área da porção em falta para a figura ser um quadrado era 25. Essa conclusão pode ser observada no excerto seguinte do diálogo estabelecido entre dois elementos do grupo G1:

Ana: Aqui [apontando para o lado de um dos retângulos], conforme já está resolvido atrás [referindo-se à alínea 2)] fica 5 e aqui também [referindo-se ao outro lado do outro retângulo]. Se aqui é 5 [apontando novamente para o lado de um dos retângulos], este lado [o correspondente] é 5, logo este [referindo-se ao lado oposto ao lado comum ao retângulo e ao quadrado mais pequeno] também é de certeza. Se aqui é 5, estes dois também vão ser 5. A área deste quadrado mais pequeno é 5 vezes 5…

Nuno: É 25! [interrompendo a Ana]
Ana: Que dá 25.

Através deste excerto, verifica-se que a conclusão apresentada resulta de um *esquema percetual*, baseado na observação da sequência de figuras apresentadas.

Argumentos genéricos

No que diz respeito à resolução da terceira questão, os argumentos apresentados pelos alunos resultam da observação da figura construída. Observe-se o diálogo estabelecido entre o professor e a Diana do grupo G4:

(1) Diana: Já percebemos que a área do quadradinho pequenino [porção em falta] é 25.
[...]
(7) Diana: Sabemos que a soma das áreas [do retângulo e do quadrado] é 39.
[...]
A Diana sombreia o quadrado de lado $x + 5$.
(14) Diana: 39 mais 25 [fazendo as contas]... 64.
(15) Professor: Então 64...
(16) Diana: É a área disto tudo.
(17) Professor: Disto o quê?
(18) Diana: Do quadrado [apontando para o quadrado de lado $x + 5$].
(19) Professor: Se 64 é a área do quadrado, cada lado mede...
(20) Diana: 8. Se aqui já tenho 5 aqui [apontando para o x] vai ser 3. Chegamos â mesma conclusão do que a Ana Isabel, mas por um processo geométrico.

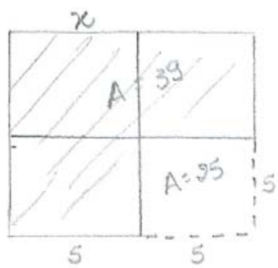


Figura 7.6.9. Figura construída pelo grupo G4.

Através deste excerto, observa-se que este grupo de alunos descreve aritmeticamente os seus argumentos tendo em conta a figura desenhada, ou seja, os argumentos produzidos resultam do *exemplo genérico pictórico* construído.

Na parte VI, com o objetivo de que os alunos procedam à generalização do procedimento realizado na parte V, é proposto o problema seguinte:

Seja um retângulo com comprimento *b* e largura desconhecida. Desenha-se um quadrado de lado igual à largura desconhecida do retângulo dado. A soma das áreas do retângulo e do quadrado é *c*. Qual é a largura do retângulo inicial?

Novamente, em grupo, os alunos discutiram o problema, contudo, as conclusões dos diferentes grupos foram abordadas em grupo turma.

Argumentos entre o genérico e o simbólico

Todos os grupos observaram que o problema apresentado era igual ao apresentado nas partes IV e V, mas em vez de "números concretos" eram dadas letras, portanto, para resolver o problema ter-se-ia de substituir os números pelas letras. No entanto, dada a dificuldade evidenciada por alguns grupos em determinar a largura do retângulo inicial, o professor solicitou a um aluno que fosse ao quadro e explicasse o que o seu grupo tinha feito, pedindo aos restantes alunos da turma que participassem e fossem completando com as informações que considerassem pertinentes.

Observe-se o diálogo estabelecido entre o Daniel (grupo G2), o professor e a restante turma.

No quadro, o Daniel iniciou por desenhar a parte final do esquema das figuras apresentadas na parte V da tarefa.

(1) Professor: Então qual é a área da figura?
(2) Daniel: É *c* [escrevendo $A_{figura} = c$]
(3) Professor: E o retângulo que era dado [inicialmente], tinha quanto de comprimento?
(4) Ana: Era *b*.
(5) Professor: Então Daniel representa aí na figura.
O Daniel designa o comprimento do retângulo já dividido por *b*.
(6) Professor: Isso mede *b*?

(7) Daniel: Sim.
(8) Ana: Não, ali já está dividido!
(9) Professor: Então mede quanto?
(10) Nuno: 10.
(11) Ana: 10 era o b.
(12) Professor: Então quanto é que mede aqui?
(13) Ana: 5.
(14) Daniel: 5… não!
(15) Professor: Então, 5 no problema anterior, e aqui?
Momento de silêncio
(16) Professor: Como é que determinavam o 5?
(17) Diana: Dividíamos por 2.
(18) Daniel: [Aqui é] b sobre 2.
O Daniel escreve $\frac{b}{2}$ na figura desenhada no quadro.

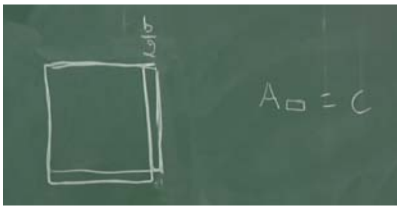


Figura 7.6.10. Construção geométrica no quadro pelo Daniel, grupo G2.

Neste primeiro excerto, observa-se que os alunos reconhecem que a área da figura desenhada pelo Daniel tinha área c (§2). Contudo, inicialmente, o Daniel considera que o comprimento do retângulo dividido media b (§5), ao que a Ana contrapõe, visto que o retângulo já estava dividido (§8). No entanto, os alunos não respondem imediatamente que esse comprimento é $\frac{b}{2}$, mas 5 (§13). Só depois do professor ter perguntado como é que obtiveram o 5 no problema anterior (§16) é que o Daniel respondeu "b sobre 2" (§18).

(19) Professor: Então e agora?
(20) Daniel: Temos de saber a área deste quadrado [apontando para a porção em falta].
(21) Professor: Então qual é a área deste quadrado?
(22) Filipa: É 25.
(23) Professor: Sim, no caso do problema anterior era 25, e aqui?
(24) Daniel: É b sobre dois ao quadrado.
O Daniel escreve $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ no quadro.
(25) Professor: E quanto é que dá isto?
(26) Daniel: 25.
(27) Professor: Não, simplificando a expressão…
(28) Emanuel: b ao quadrado sobre quatro.

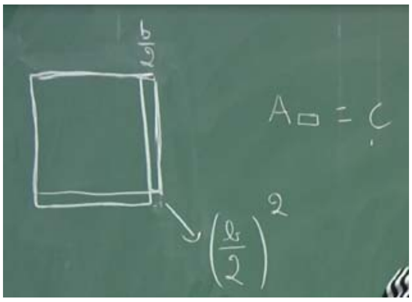


Figura 7.6.11. Interpretação algébrica da construção geométrica realizada no quadro pelo Daniel, grupo G2.

Uma vez que os alunos identificaram o comprimento do retângulo dividido por $\frac{b}{2}$, o professor questiona-os sobre o que fazer (§19). O Daniel refere que é necessário determinar a área da porção em falta (§20), ao que a Filipa responde «25» (§22). Contudo, o professor lembra que 25 era de facto a área dessa porção, em falta, no problema anterior (§23), ao que o Daniel responde «é *b* sobre dois ao quadrado» (§24), ou seja, simplificando a expressão o Emanuel refere «*b* ao quadrado sobre quatro» (§28).

(29) Professor: Então o que fizeram a seguir?

(30) Daniel: Somamos isto [apontando para $\left(\frac{b}{2}\right)^2$] com isto [apontando para *c*] que é um quadrado [referindo-se à forma geométrica da figura total]

O Daniel escreve $A_{total} = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$

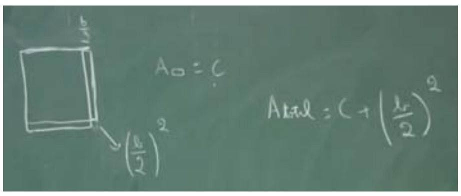


Figura 7.6.12. Interpretação algébrica da construção geométrica realizada no quadro pelo Daniel, grupo G2 (continuação).

(31) Professor: No caso do problema anterior o que é que fizeram?
(32) Carla: Somamos 39 com 25.
(33) Professor: E aqui?
(34) Nuno: A mesma coisa.
(35) Ana: Sim e não! Somámos foi letras.

(36) Professor: Então neste caso…
(37) Diana: Somámos *c* com *b* sobre 2 ao quadrado
(38) Professor: Mas para determinar o lado do quadrado o que é preciso fazer?
Momento de silêncio
(39) Daniel: Tivemos de fazer a raiz quadrada do resultado [apontando para $c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$]
(40) Professor: Então no caso anterior, era a raiz quadrada de quanto?
(41) Nélson: 64 que dava 8!
(42) Professor: Então aqui, o lado desse quadrado é…
O Daniel escreve comprimento do lado = $\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$
(43) Professor: Agora a minha pergunta é esta. O que o Daniel acabou de escrever o que representa na figura?
O Daniel indica que é *x*.
(44) Nuno: Não. Tem que se tirar aquele bocadinho ali em baixo.
(45) Daniel: Ah! Pois!
(46) Professor: O que é que nós queremos?
(47) Sara: O *x*.
(48) Professor: Então o que temos de fazer?
(49) Daniel: Retirar este [apontando para $\frac{b}{2}$]
O Daniel escreve no quadro: lado procurado = $\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}$.

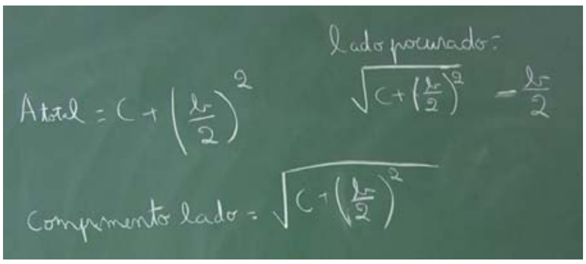


Figura 7.6.13. Interpretação algébrica da construção geométrica realizada no quadro pelo Daniel, grupo G2 (continuação).

Após terem referido que a área da porção em falta é $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, o professor questiona os alunos sobre o procedimento seguinte (§29). Os alunos referem que têm de somar as duas áreas que, algebricamente, correspondem, respetivamente, a *c* e a $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ (§30). Após alguma hesitação, os alunos referem que o próximo passo no procedimento geométrico da tarefa anterior foi calcular a raiz quadrada da área da figura (§39), por forma a obter o comprimento do lado dessa mesma figura (§42).

No entanto, este comprimento não é a medida desejada, pois é necessário retirar $\frac{b}{2}$ (§44), por forma a encontrar a largura procurada (§49).

Através da análise deste episódio é possível observar que os argumentos apresentados embora expressos com recurso a palavras e símbolos algébricos, são de caráter geométrico, uma vez que resultam da observação das representações geométricas construídas.

Argumentos simbólicos

Na parte VII e uma vez que os alunos conhecem uma fórmula que permite determinar uma das soluções das equações do tipo $x^2 + bx = c$, o professor questiona a turma sobre qual será a fórmula que permite determinar uma solução da equação do tipo $ax^2 + bx = c$. Neste momento, a parte geométrica é substituída pela parte algébrica. Após, alguma discussão em grande grupo, os alunos observam que se dividir ambos os membros da equação por a (considerando $a \neq 0$) obtêm uma equação equivalente à primeira.

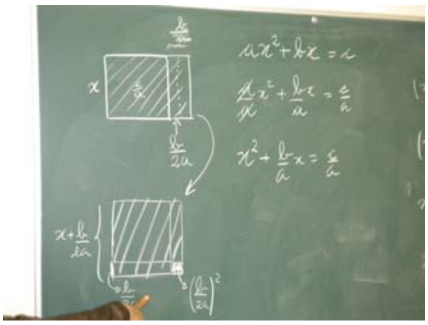


Figura 7.6.14. Simplificação algébrica e respetiva identificação geométrica realizada no quadro pelo Daniel, grupo G2.

Seguidamente, os alunos procedem às respetivas correspondências geométricas, isto é, identificam geometricamente os diferentes elementos presentes desta equação simplificada. Após esta identificação, os alunos traduzem de forma algébrica os diferentes procedimentos, registando que uma solução da equação $ax^2 + bx = c$ pode ser obtida através da expressão algébrica $\sqrt{\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}-\frac{b}{2a}$.

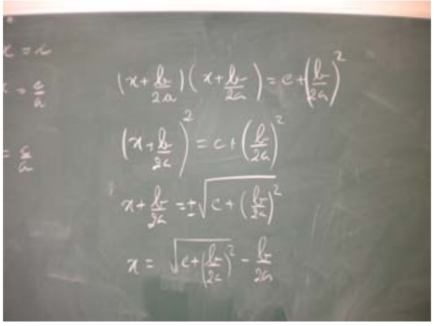


Figura 7.6.15. Simplificação algébrica efetuada no quadro pelo Daniel, grupo G2, tendo em conta a identificação geométrica realizada anteriormente.

É de observar que os argumentos apresentados pelos alunos para determinar esta fórmula resultam da observação geométrica da figura construída, portanto, recorrem aos símbolos como representações dos procedimentos geométricos efetuados.

Argumentos entre o simbólico e o formal

Por fim, no final desta tarefa, o professor apresenta aos alunos a equação geral $ax^2 + bx + c = 0$, pedindo-lhes que determinem a fórmula que permite obter a solução da equação.

A maioria dos alunos entende que existe uma relação entre esta equação e a equação $ax^2 + bx = c$ anteriormente resolvida. O professor sugere, então, que escrevam todos os termos no primeiro membro da equação. Observe-se o seguinte diálogo:

Ana: Ó professor ficamos com isto [$ax^2 + bx - c = 0$]
Professor: E como é que posso ter uma equação desta forma? [apontando para $ax^2 + bx + c = 0$]
Daniel: Conseguimos por o mais, mas o *c* fica menos.
Professor: Não percebi.
Emanuel: Ele está a dizer que podemos escrever assim [apontando para o papel]
Professor: Por favor, vem ao quadro.
Emanuel escreve no quadro $ax^2 + bx = c \Leftrightarrow ax^2 + bx - c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + (-c) = 0$
Emanuel: Agora é igual à outra… temos de fazer assim: no lugar de *c* pomos – *c*.

Através deste excerto é possível observar que os alunos observam que a equação dada $ax^2 + bx = c$ é equivalente à equação $ax^2 + bx + (-c) = 0$, portanto, basta substituir na fórmula anterior o "c" por "$-c$" e, assim, obter a fórmula procurada $\sqrt{-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}-\frac{b}{2a}$.

Posteriormente pede-se aos alunos que simplifiquem a expressão $\sqrt{-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}-\frac{b}{2a}$ por forma a obterem a fórmula $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Embora a expressão inicial seja identificada com a largura procurada, a expressão final e as expressões intermediárias, apresentadas pelos alunos, incluem termos resultantes de simplificações algébricas, *manipulação algébrica*. Observe-se a simplificação realizada pelo grupo G2:

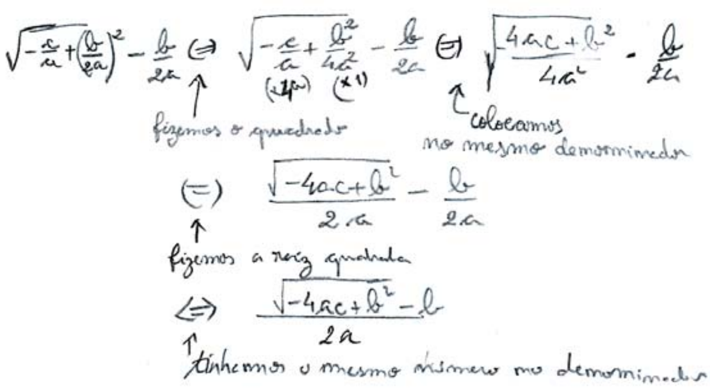


Figura 7.6.16. Simplificação algébrica efetuada pelo grupo G2.

7.6.2. Argumentação: análise local (na resolução de um problema)

No que diz respeito à resolução do problema proposto na parte I, através dos vários tipos de argumentos apresentados, é possível proceder a uma reconstrução funcional das diferentes afirmações produzidas pelos alunos. Da análise dos diferentes discursos argumentativos observa-se não só formas simples de argumentação, em que os elementos funcionais identificados correspondem aos elementos constituintes do "coração da argumentação", mas também formas mais complexas de argumentação, em que os elementos funcionais presentes contemplam, nomeadamente, refutações.

Forma simples

Os alunos do grupo G2, embora tenham resolvido o problema de forma aritmética, inicialmente procuraram resolver o problema de forma algébrica. Tendo escrito na folha de papel as seguintes equações: $x + y = 20$ e $xy = 96$, o professor questiona os alunos sobre esse seu procedimento, estabelecendo-se o seguinte diálogo:

(1) Professor: Quantas equações é que têm aí?
(2) Andreia: Duas.
(3) Professo: Quais são as equações que têm? Uma que vos dá o quê?
(4) Emanuel: O [semi-]perímetro.
(5) Professor: E a outra que dá…
(6) Emanuel: A área.
(7) Professor: Então uma [equação] que dá o semiperímetro e outra [equação] que vos dá a área. Como é que eu posso resolver quando tenho duas equações e duas incógnitas?
(8) Emanuel: Já me esqueci do nome!
Momento de silêncio
(9) Nélson: Pode repetir?
(10) Professor: Eu tenho duas equações e duas incógnitas [apontando para as equações $x + y = 20$ e $xy = 96$] . Como é que eu posso resolver?
(11) Emanuel: Em ordem a uma incógnita.
(12) Professor: Sim, [resolvo] em ordem a uma delas e o que o faço na outra [equação]?
(13) Emanuel: Na outra [apontando para a equação $xy = 96$] substitui. Ah! Estava a fazer a primeira parte, mas estava a substituir no sítio errado.
(14) Nélson: Isso é um sistema!
(15) Professo: Sim, um sistema, então vamos lá [resolver].

Tendo em consideração que resolver um sistema de equações do primeiro grau a duas incógnitas consiste em resolver uma das equações em ordem a uma das incógnitas (§11) e proceder na outra equação à substituição dessa incógnita pela expressão anteriormente obtida (§13), os alunos procedem, algebricamente, da forma exemplificada na figura 7.6.4..

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G2 podem ser esquematizados da seguinte forma:

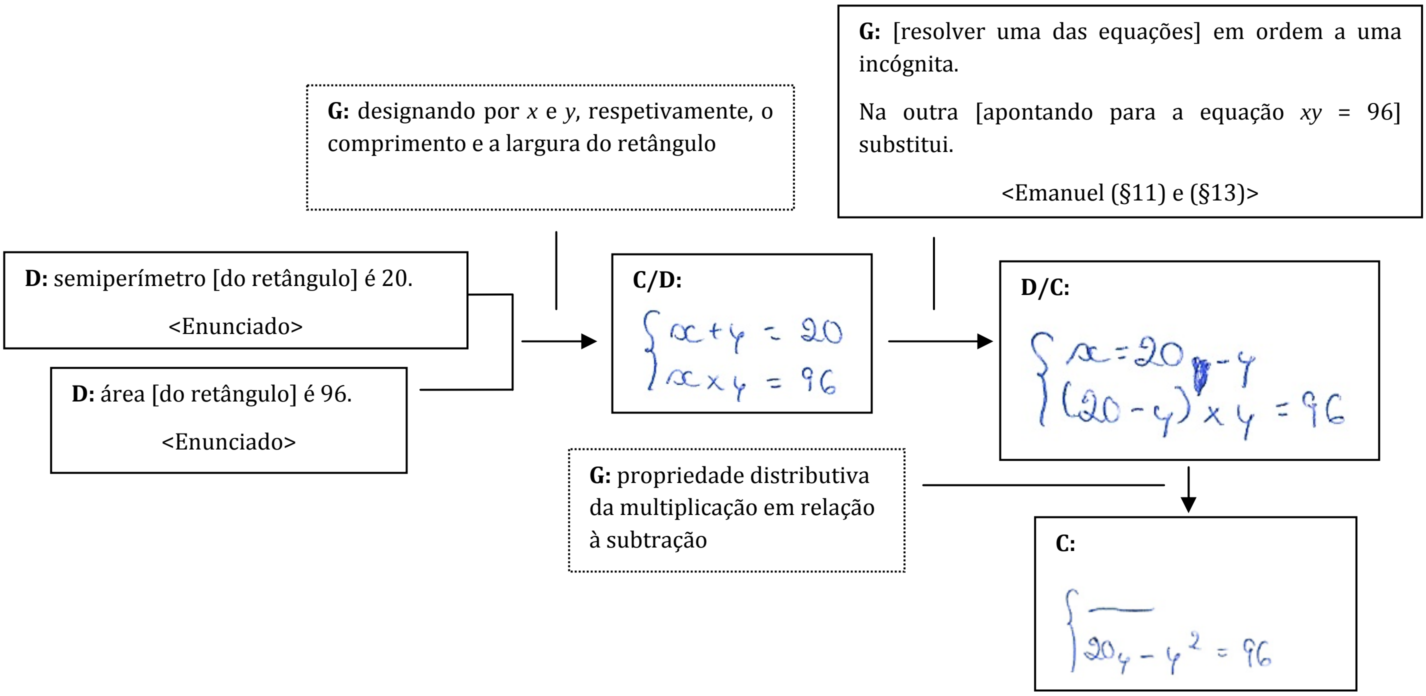


Figura 7.6.17. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no procedimento algébrico apresentado pelo grupo G2.

É de notar que as linhas que limitam as caixas que contém as garantias – "designando por *x* e *y*, respetivamente, o comprimento e a largura do retângulo" e "propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração" – apresentadas no esquema do argumento da figura são a tracejado, visto que estas afirmações não foram explicitamente referidas, embora estejam implícitas nas conclusões apresentadas pelos alunos. A primeira garantia decorre do desenho apresentado pelos alunos para ilustrar o problema e a segunda decorre da resolução algébrica realizada.

Forma complexa

Conclusão obtida à custa de uma refutação

No caso do grupo G1, a solução do problema foi obtida por tentativa e erro. Este grupo de alunos escolheu, inicialmente, o 15 para comprimento do retângulo.

Dada a forma como referem a escolha do número 15, o professor questiona-os, estabelecendo-se o seguinte diálogo:

(1) Professor: Como é que escolheste o 15?
(2) Nuno: Eu escolhi o 15 porque era para começar a meio logo.
(3) Professor: A meio de quê?
(4) Nuno: Este [apontando para a base do retângulo] era maior que este [apontando para a altura do retângulo]
(5) Ana: Só podia dar 40 [referindo-se ao perímetro total da figura].
(6) Nuno: Certo, só podia dar 40. Eu vi logo 15 [com] 15 dava 30, este aqui tinha de ser 5 [apontando para a altura do retângulo], mas não dava porque 15 vezes 5 não dava 96. Depois tentei 17 [para medida da base do retângulo]. Quanto maior fosse este [apontando para a base] mais pequeno era este [apontando para a altura]. E não dava, porque a área dava cada vez mais pequena [do que 96]. Tentei para baixo de 15. Lembrei-me do 12. 12 mais 12 [dá] 24, o resto dá 16 [pois o perímetro do retângulo é 40] que a dividir por 2 dá 8. 12 vezes 8 dá 96 que é a área e isto tudo somado [apontando para o desenho] dá o perímetro.

Através deste excerto, observa-se que tendo em consideração os dados do problema e a garantia que o comprimento do retângulo é maior do que a sua largura (§4), os alunos escolhem o 15 para comprimento do retângulo. Embora não justifiquem esta sua escolha, os alunos têm, de forma implícita, em consideração o facto de num retângulo o comprimento e a largura terem medidas diferentes. Para os alunos, esta escolha justifica-se pelo facto de o semiperímetro do retângulo ser 20 e 15 ser maior do que 10: «eu escolhi o 15 porque era para começar a meio logo» (§2). No esquema argumentativo dos alunos, o 15 passa a ser um novo dado, portanto, mediante os dados do problema, a largura do retângulo teria de ser 5 (§6). No entanto, e tendo em linha de conta que a área do retângulo era 96 (dado do enunciado), os alunos refutam a presente conclusão, observando que a área do retângulo com estas dimensões não seria 96, pois $5 \times 15 \neq 96$ (§6). Desta forma, os alunos procedem à escolha de um novo número e repetem, novamente, o mesmo raciocínio refutando as diversas conclusões obtidas até encontrarem a solução pretendida.

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G1 podem ser esquematizados da seguinte forma:

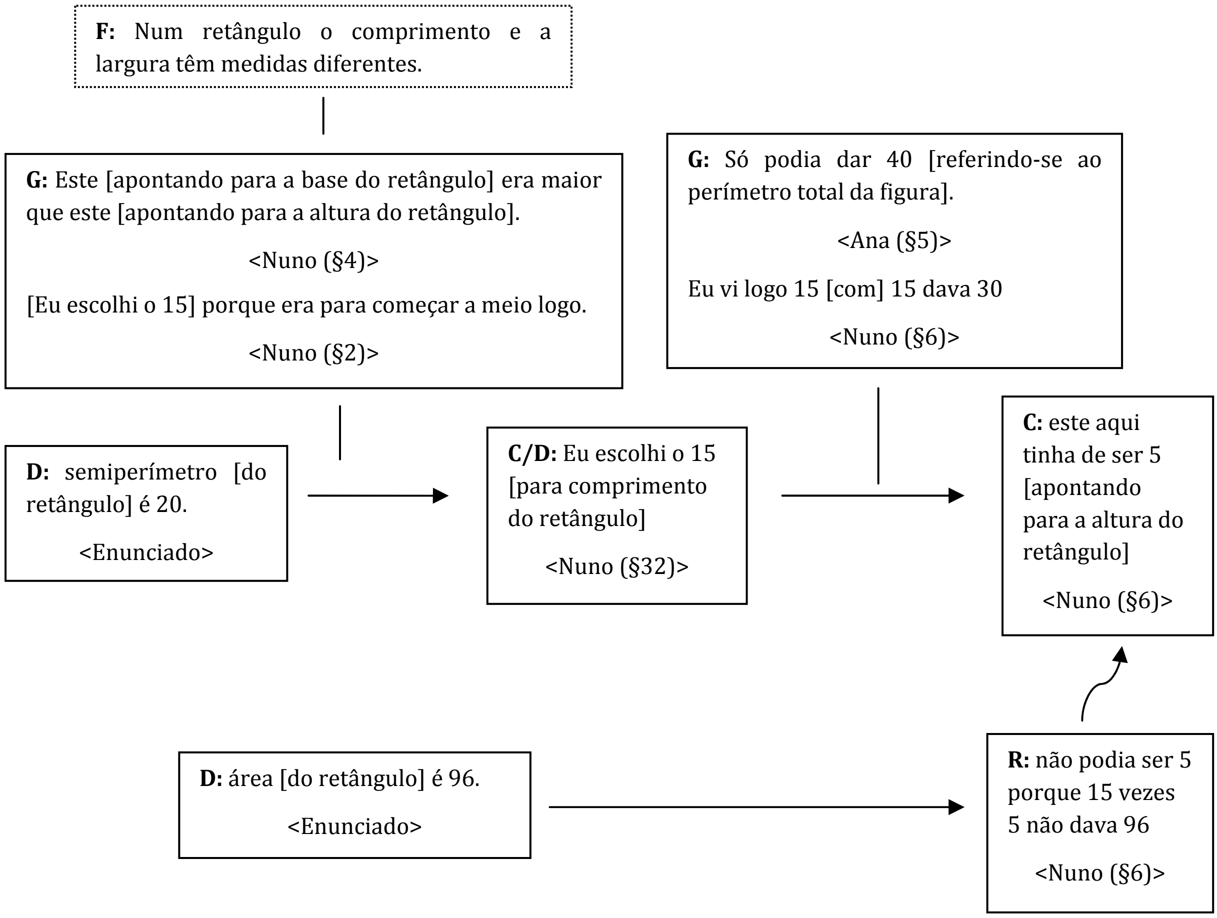


Figura 7.6.18. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G1.

É de notar que a linha que limita a caixa que contém o fundamento – "Num retângulo o comprimento e a largura têm medidas diferentes" – apresentada no esquema do argumento da figura 6.6.18. é a tracejada, uma vez que esta afirmação não foi explicitamente referida, embora esteja implícita na garantia apresentada pelos alunos.

Também na resolução aritmética apresentada pelos alunos do grupo G2, é possível observar uma forma complexa de argumentação, em que a solução do problema é encontrada à custa de refutações.

Os alunos deste grupo começam por decompor o 96 em fatores primos. Após a decomposição, escolhem os divisores de 96 cujo produto seja 96 (área do retângulo), verificando, seguidamente, se a soma desses dois números escolhidos é

20 (semiperímetro do retângulo). Caso não seja, procedem a uma nova escolha, seguindo o mesmo tipo de raciocínio, até descobrirem a solução do problema.

De acordo com o modelo de Toulmin, um dos argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G2 pode ser esquematizados da seguinte forma:

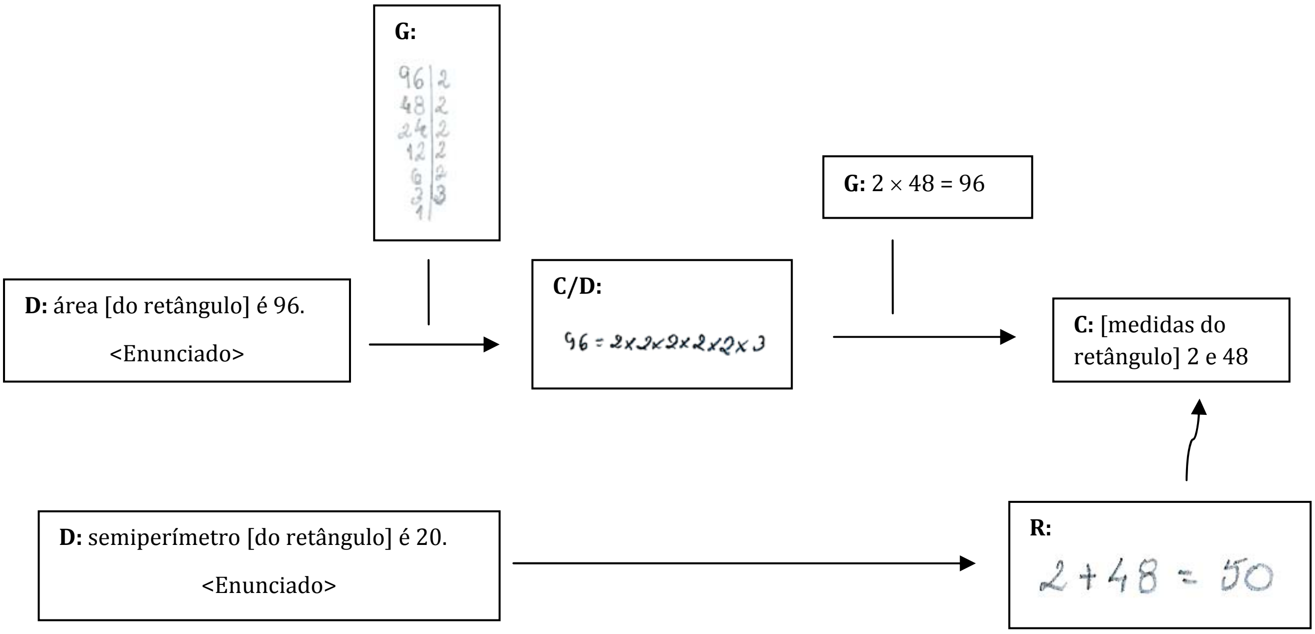


Figura 7.6.19. Representação esquemática da reconstrução funcional de um dos argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G2.

Refutação a uma conclusão/ Conclusão obtida à custa de uma refutação

No caso do grupo G3, a solução do problema foi obtida com recurso a um esquema geométrico. No entanto, o argumento necessário para a determinação da solução do problema surgiu de uma refutação a uma conclusão inicial, sendo posteriormente obtida solução através de uma refutação.

Este grupo de alunos, tendo em conta que a área do retângulo é 96 (um dos dados do problema), opta por dividir o retângulo em dois quadriláteros geometricamente iguais concluindo, portanto, que a área de cada um dos quadriláteros era, respetivamente, 48. No entanto, este grupo de alunos considera, inicialmente, que esses quadriláteros são quadrados.

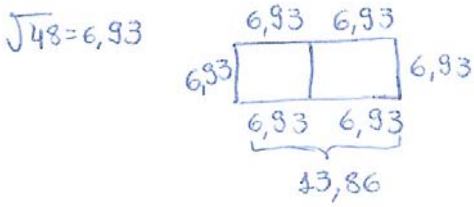


Figura 7.6.20. Processo geométrico apresentado pelo G3.

Contudo, refutam esta sua afirmação, visto que 13,86 + 6,93 ≠ 20 (semiperímetro do retângulo dado). Os alunos consideram, portanto, que os quadriláteros geometricamente iguais obtidos terão de ser dois retângulos. Esta conclusão passa a ser considerada um novo dado, o que lhes permite concluir que as medidas desses retângulos poderão ser 6 e 8, porque 6 × 8 = 48. No entanto, os alunos não referem esta garantia de forma explícita. Os alunos observam, então, que têm duas conclusões possíveis: ou 6 é o comprimento destes novos retângulos e 8 a respetiva largura, ou vice-versa. Contudo, refutam uma dela, tendo em atenção o outro dado do problema (o semiperímetro do retângulo era 20).

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G3 podem ser esquematizados da seguinte forma:

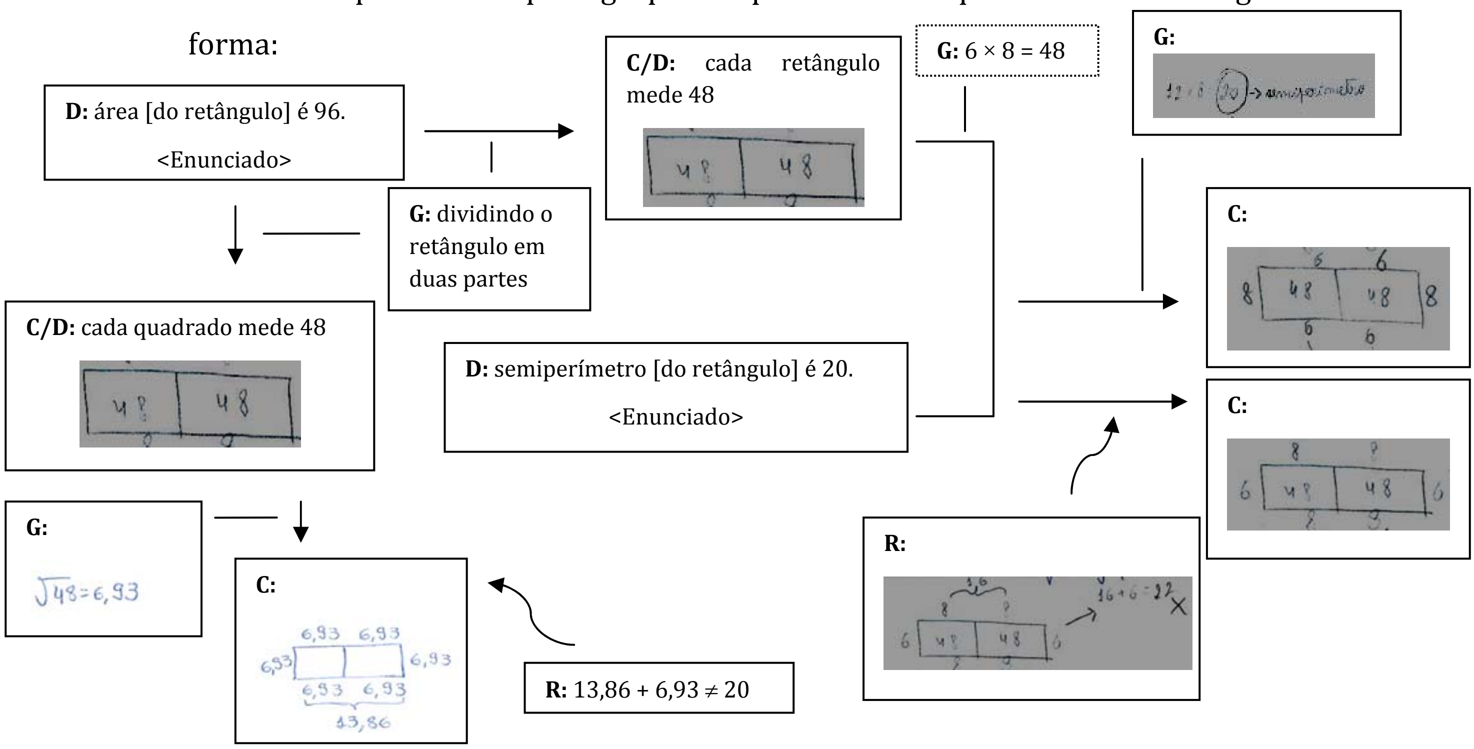


Figura 7.6.21. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G3.

É de notar que a linha que limita a caixa que contém a garantia – “$6 \times 8 = 48$” – apresentada no esquema do argumento da figura é a tracejada, uma vez que esta afirmação não foi explicitamente referida, embora seja implícita na conclusão apresentada.

Como referido, na parte III foi apresentada aos alunos uma interpretação geométrica, para o problema proposto na parte I. Através dos vários tipos de argumentos apresentados, para resolver as questões propostas, é possível proceder a uma reconstrução funcional das diversas afirmações produzidas nos diferentes grupos. Através da análise dos diferentes discursos argumentativos é possível observar formas simples de argumentação.

Forma simples

As primeiras questões propostas nesta parte da tarefa, foram as seguintes:

1. No papel que vos foi dado, constrói um quadrado cuja área seja o menor quadrado perfeito maior que 96 (o valor da área do retângulo procurado).

2. Quantas unidades de medida tens de retirar ao quadrado construído para ficar com área igual a 96?

3. Retira junto a um vértice do quadrado inicialmente construído um quadrado cuja área corresponda ao valor que referiste na pergunta anterior.

4. Será possível rearranjar a figura que obtiveste de modo a teres um retângulo? Quais as medidas dos seus lados? Sugestão: podes cortar a figura.

5. Através de um esquema representa os diferentes passos realizados de modo a resolveres o problema proposto.

Todos os grupos construíram um quadrado de área 100, uma vez que 100 é o menor quadrado perfeito maior do que 96, portanto, referem que seria necessário retirar ao quadrado construído 4 unidades de área por forma a obter uma figura com uma área igual a 96. Este procedimento foi executado, retirando um quadrado de área 4 a partir de um dos vértices do quadrado inicialmente construído, ficando o quadrado de lado 10 com a seguinte forma:

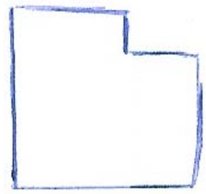


Figura 7.6.22. Representação da figura obtida, pelo grupo G1, após retirar um quadrado de área 4.

Foi então pedido aos alunos que rearranjassem a figura, de modo a que esta tivesse a mesma área, mas tivesse a forma de um retângulo, e que, posteriormente, determinassem as respetivas dimensões. Observe-se o diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G1:

(1) Nuno: Ah! Esta figura inicial [apontado para o quadrado] é que tem de ficar um retângulo?
(2) Professor: Tu queres que essa figura toda que está aqui [apontando para a figura recortada] seja um retângulo.
(3) Rita: Corta só um lado, por exemplo, este retângulo [apontando para a figura]
(4) Professor: E o que fazes a isso que cortas?
(5) Nuno: Ponho ali [apontando para a mesa]
(6) Professor: Não, [as figuras] têm de manter a mesma área.
(7) Nuno: Área 96?!
(8) Ana: Ó professor, corta-se isto [apontando para o retângulo de lado a tracejado] e põe-se aqui ao lado [apontando para a parte de baixo da figura].
(9) Professor: E qual é a área que fica?
(10) Ana: Fica igual.
(11) Nuno: 96.
(12) Professor: Mas então quais são as medidas do retângulo?
(13) Nuno: Deste novo?
(14) Ana: Sim! Então tínhamos 10 e tirámos 4.
(15) Rui: Tirámos 2.
(16) Ana: Sim [tirámos] 2, portanto, ficámos com 8.
(17) Rita: Mas aqui acrescentámos este retângulo [apontando para a nova figura].
(18) Rui: Então ficámos com 12.
(19) Nuno: [As medidas] são 8 e 12.
(20) Professor: E essas medidas são solução do problema?
(21) Ana: Nós cortámos uma coisa e colámos a mesma coisa.
(22) Nuno: 8 vezes 12 são 96.
(23) Rui: E 8 mais 12 dá 20.

Tendo solucionado o problema, os alunos representam esquematicamente os diferentes passos realizados:

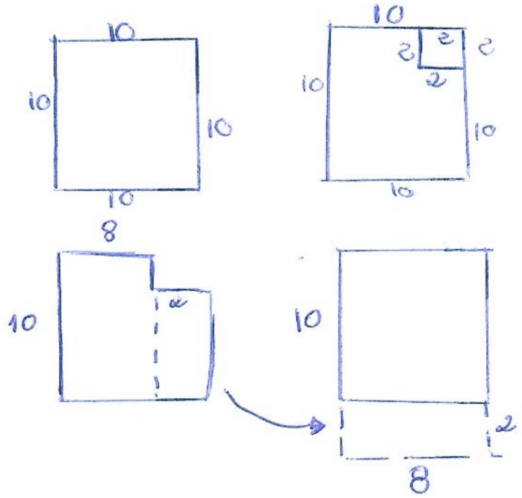


Figura 7.6.23. Representação esquemática do procedimento efetuado pelo grupo G1.

Uma vez que a tarefa proposta envolve o recorte e composição de figuras, os argumentos produzidos pelos alunos são de um modo geral argumentos *genéricos pictóricos*, sendo os resultados numéricos obtidos através da observação da manipulação geométrica efetuada na figura.

Para rearranjar a figura obtida com o corte do quadrado de área 4, o grupo G1 sugere que se corte um retângulo (§3), portanto, inicialmente, consideram que a figura obtida satisfaz ao pedido, visto que fica com a forma de um retângulo (§5). Contudo, o professor refere que a figura tem de ter a mesma área que a inicial (§6), ao que um elemento do grupo, reitera o procedimento anteriormente referido: «Ó professor, corta-se isto [apontando para o retângulo de lado a tracejado] e põe-se aqui ao lado [apontando para a parte de baixo da figura]» (§8) e dessa forma a área fica igual (§10). Contudo, neste momento, não é dado qualquer fundamento. Com a figura rearranjada como um retângulo, os alunos concluem que os lados procurados são, respetivamente, 8 (§16) e 12 (§18), isto porque ao quadrado inicialmente construído de lado 10 se retirou 2, o comprimento do lado do quadrado de área 4 retirado inicialmente (§14) e (§15), e porque se acrescentou um retângulo na parte de baixo da figura (§17). No entanto, quando confrontados com a questão de que se as medidas encontradas são as soluções do problema (§20), este grupo antes de proceder à verificação de que «8 vezes 12 são 96» (§22) e de que «8 mais 12 dá 20» (§23), apresenta um fundamento que sustenta a igualdade entre as áreas das duas figuras: «Nós cortámos uma coisa e colámos a mesma coisa.» (§21), permitindo, assim, justificar o procedimento geométrico efetuado.

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G1 podem ser esquematizados da seguinte forma:

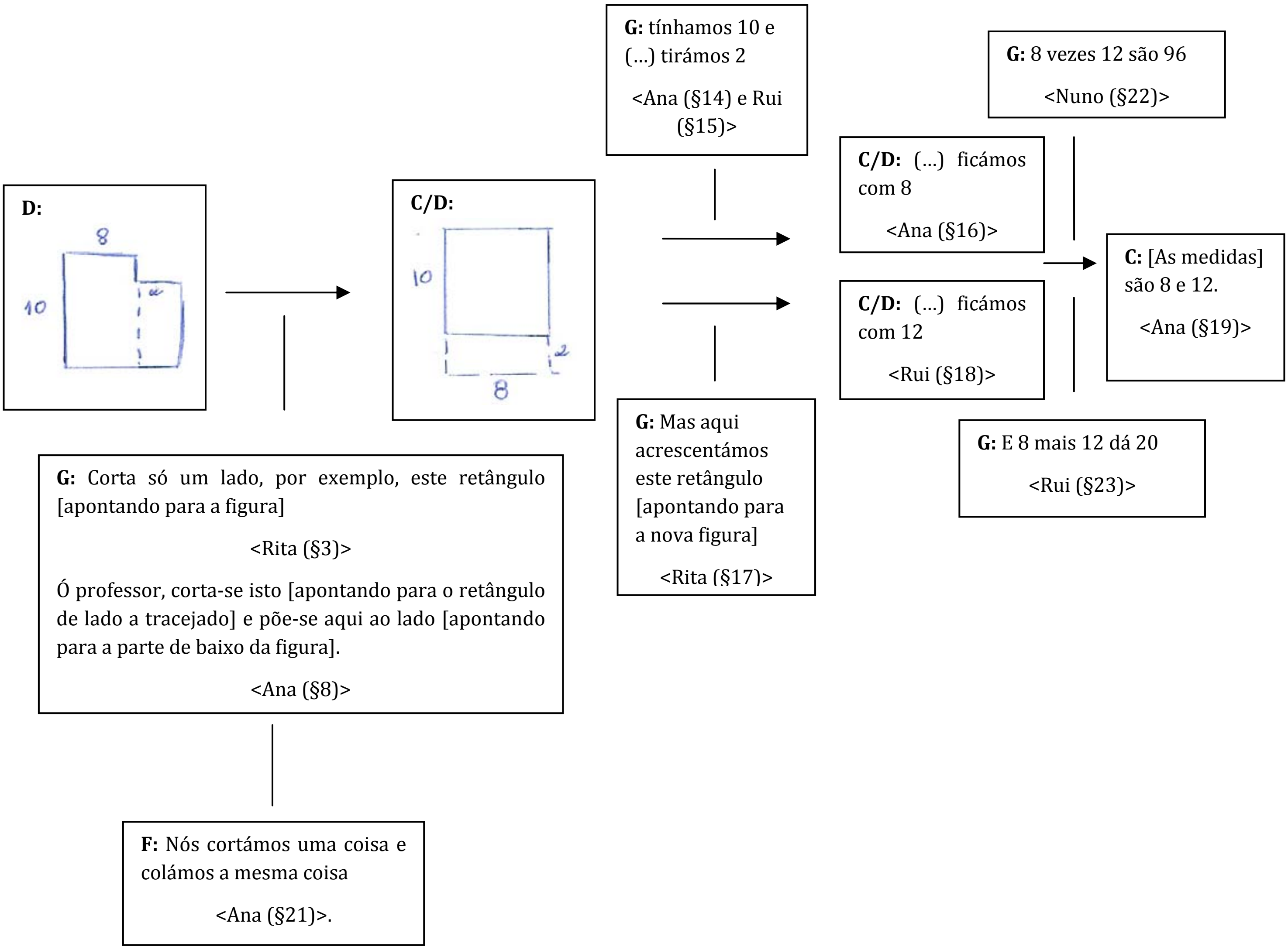


Figura 7.6.24. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G1.

Também é possível, na parte III da tarefa, encontrar formas simples de argumentação na resolução da questão seis, onde é proposto aos alunos a resolução de dois novos problemas, através do método geométrico anteriormente utilizado.

<u>6.</u> (i) Determinar as dimensões de um retângulo cujo semiperímetro é 10 cuja área é 21.
(ii) Determinar as dimensões de um retângulo cujo semiperímetro é 12 cuja área é 30.

Observe-se a resolução escrita apresentada pelo grupo G4 para a resolução da alínea (i):

Os alunos iniciam a resolução referindo os dados do problema:

determinar os lados de um retangulo
é igual a 21 e o Semiperimetro cuja a area é igual a 10

Figura 7.6.25. Identificação dos dados presentes no problema, grupo G4.

Seguidamente, expõem a sua estratégia de resolução,

podemos usar a seguinte resolução:
determinar o menor quadrado prefeito superior à area
do retangulo, neste caso vinte e cinco e subtrair
o extesso.

Figura 7.6.26. Apresentação da estratégia de resolução, grupo G4.

apresentando a respetiva resolução geométrica:

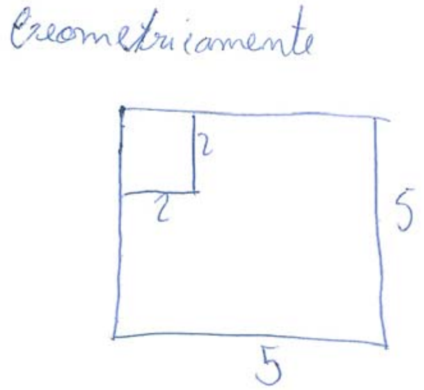


Figura 7.6.27. Representação geométrica da estratégia de resolução, grupo G4.

Através destes excertos, observa-se que os alunos determinam o menor quadrado perfeito maior do que 21 (área do retângulo dado) que é 25 e, posteriormente, retiram o excesso. Embora os alunos não escrevam qual é esse excesso, geometricamente observa-se que é 4, visto que consideram que é necessário retirar um quadrado de lado 2. Seguidamente, tal como foi proposto na primeira parte da tarefa, retiram ao retângulo dado o quadrado de área 4, obtendo a figura seguinte:

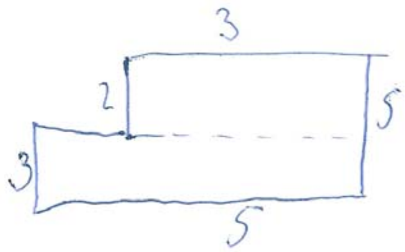


Figura 7.6.28. Representação esquemática da resolução efetuada pelo grupo G4.

Por fim, reorganizando a figura, apresentam, geometricamente, as soluções (3 e 7) do problema:

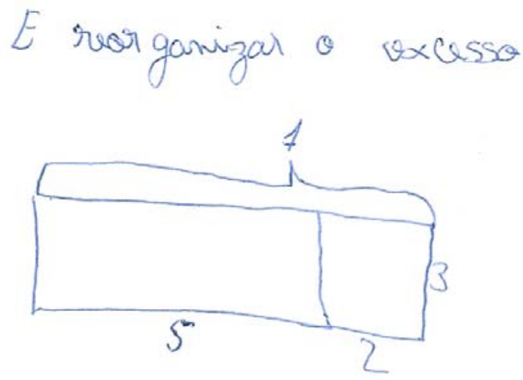


Figura 7.6.29. Apresentação geométrica da solução do problema por parte do grupo G4.

Mais uma vez o tipo de argumentos presentes na resolução deste problema são pictóricos, uma vez que as soluções são determinadas à custa da manipulação geométrica efetuada.

Analisando os argumentos apresentados, observa-se que este grupo de alunos inicia a resolução do problema referindo quais os dados do problema «retângulo cuja área é 21 e semiperímetro igual a 10». Desta forma, referem o procedimento a utilizar «determinar o maior quadrado perfeito superior à área do retângulo [dado], neste caso vinte e cinco, e subtrair o excesso», ou seja, observam que é necessário retirar 4 unidades de área a um quadrado de área 25 por forma a ficarem com a área pretendida: 21. No entanto, esta conclusão, apenas é explícita geometricamente, pois os alunos desenham o resultado de "subtrair o excesso". Contudo, não apresentam explicitamente nenhuma fundamento que legitime esta garantia. O próximo passo apresentando é justificado pela necessidade de "reorganizar o excesso", isto é, uma vez que se pretende determinar as dimensões dos lados de um retângulo de área 21, os alunos rearranjam a figura por forma a obter um retângulo.

De acordo com o modelo de Toulmin, este os argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G4 podem ser esquematizados da seguinte forma:

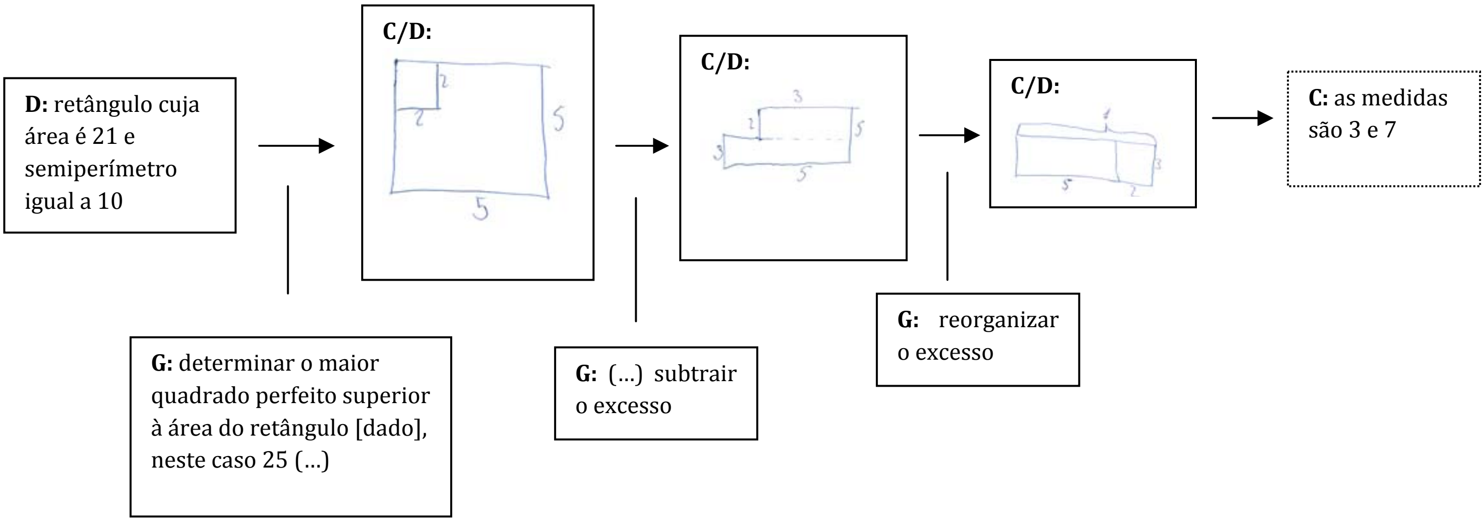


Figura 7.6.30. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G4.

A existência da linha a tracejada deve-se ao facto dos alunos não terem expresso essa afirmação de forma implícita.

Na parte IV, através dos vários tipos de argumentos apresentados para resolver o problema, é possível proceder a uma reconstrução funcional das diversas afirmações produzidas nos diferentes grupos. Através da análise dos diferentes discursos argumentativos é possível observar não só formas simples de argumentação, em que os elementos funcionais identificados correspondem aos elementos constituintes do "coração da argumentação", mas também formas mais complexas de argumentação, em que os elementos funcionais presentes contemplam refutações.

O problema proposto nesta tarefa consistia em: dado um retângulo com comprimento 10 e largura desconhecida e construindo um quadrado de lado igual à largura desconhecida do retângulo tal que a soma das áreas do retângulo e do quadrado fosse 39, determinar a largura do retângulo inicial.

Como já referido, embora os alunos tenham tentado resolver o problema por processos algébricos e geométricos, apenas conseguiram determinar a largura do retângulo inicial de forma aritmética, por tentativa e erro.

Forma simples

As resoluções algébricas apresentadas pelos grupos G2 e G4 podem ser observadas, respetivamente, através dos seguintes excertos:

(1) Emanuel: Esta equação [apontando para $x(10 + x) =39$] para determinar o valor de x.
(2) Professor: Porquê?
(3) Emanuel: Sabemos este [apontando para a medida 10] e chamando a este x [ao lado do quadrado] este [o $x + 10$] vezes este [o x] tem de dar 39.
(4) Professor: Então resolve.
O Emanuel simplifica a equação obtendo $x^2 + 10x = 39$
[...]

[...]
(3) Diana: Se este retângulo tem aqui 10 e aqui x [designando por x o outro lado do retângulo] então aqui vai ser 10 e aqui vai ser x [referindo-se aos outros lados do retângulo]. Se aqui é x [referindo-se ao lado do retângulo comum ao quadrado procurado] como é um quadrado tem de ser x em todos os lados. Então a área do quadrado fica x^2, mais a área do retângulo $10x$ tem que dar 39 porque é o que nos diz no enunciado.

Através destes excertos é possível proceder a uma reconstrução funcional dos argumentos presentes nestes diálogos. Embora ambos os grupos tenham chegado à mesma conclusão, o tipo de argumentos apresentados são diferentes

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes nos raciocínios apresentados pelos grupos G2 e G4 podem ser esquematizados da seguinte forma:

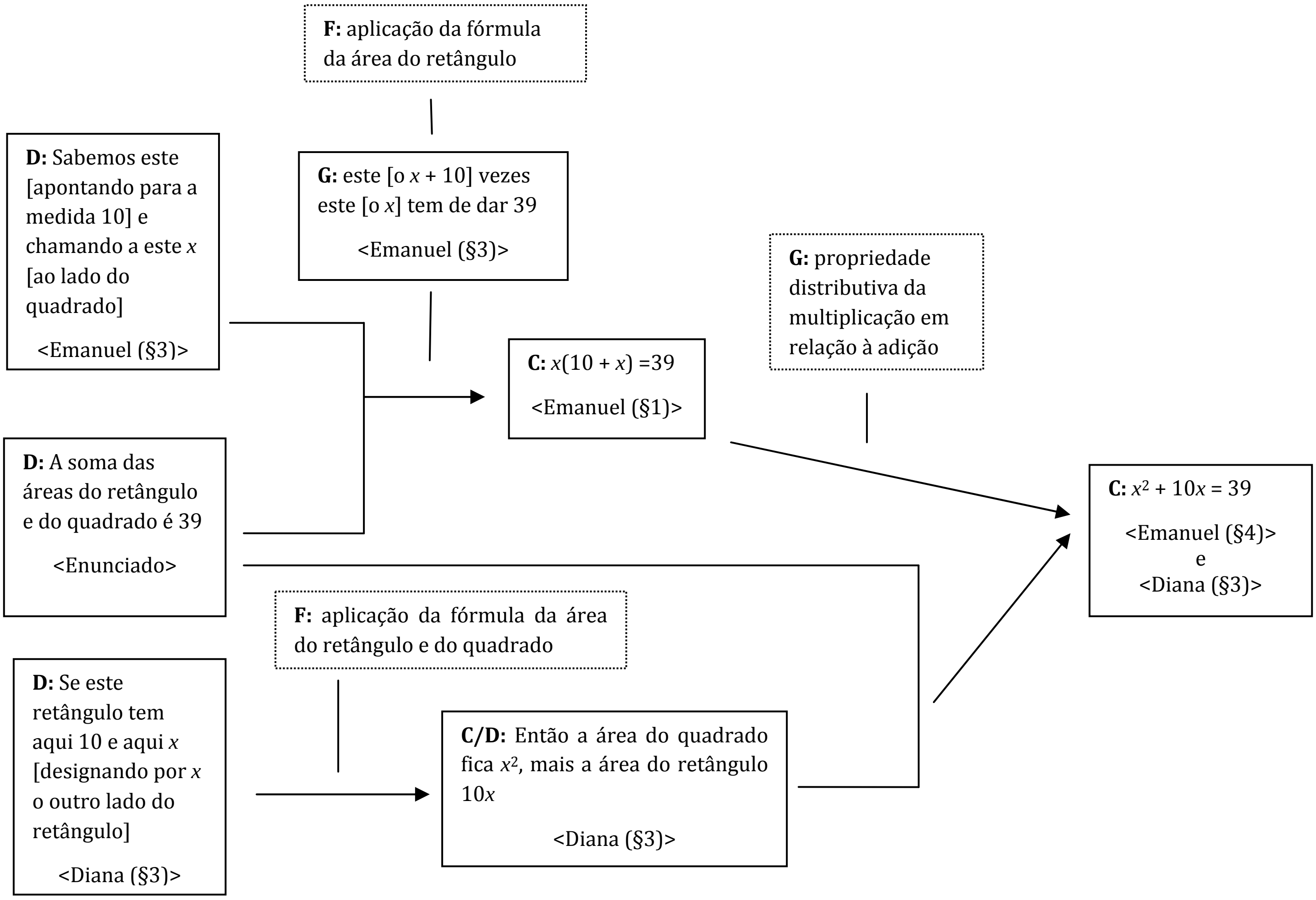


Figura 7.6.31. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes nos raciocínios apresentados pelos G2 e G4.

A existência de linhas a tracejado deve-se ao facto dos alunos não terem expresso essas afirmações de forma implícita.

Forma complexa

Refutação de um dado escolhido

Numa determinada fase da resolução do problema, o grupo G1 observa que a medida da largura procurada teria de ser menor do que 4.

[…]
(13) Ana: Aqui é 10 de certeza por causa do enunciado [apontando para a figura]. Se aqui fosse um 4 [apontando para o *x*], 10 vezes 4 dava 40 e ultrapassava os 39. Então para baixo, tinha de ser o 3. 10 vez 3 dá 30. Se isto é um quadrado, ainda faltam 9 para chegar aos 39. Então aqui fica 3 [apontando para o *x*] e aqui 3 [apontando para o *x*] para dar 9. A soma de 9 mais 30 dá 39.
[…]

Através da afirmação da Ana é possível proceder a uma reconstrução funcional dos argumentos presentes neste excerto. De facto, a justificação apresentada pelo grupo G1 para a escolha do número 3, resulta de uma refutação de um dado escolhido: se tivessem escolhido o 4, então a área do retângulo iria ultrapassar os 40, portanto, a área seria maior do que 39. Assim, *x* terá de ser menor do que 4. Esta conclusão será um novo dado no processo argumentativo, o que leva os alunos a escolherem o 3 para medida da largura do retângulo inicial. Seguidamente, este grupo verifica a possibilidade de 3 poder ser a medida procurada.

De acordo com o modelo de Toulmin, este os argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G1 podem ser esquematizados da seguinte forma:

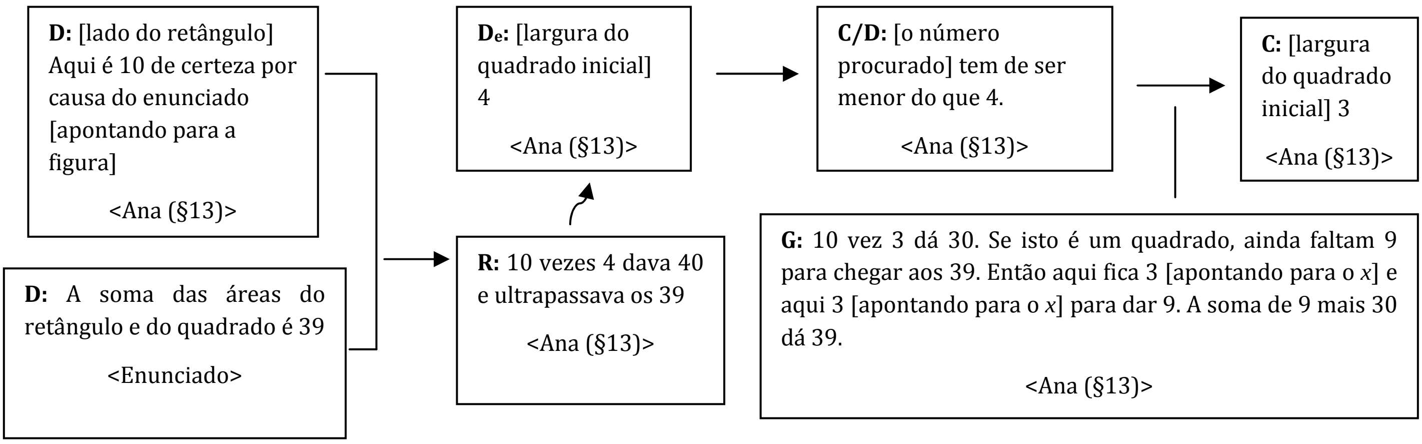


Figura 7.6.32. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G1.

Refutação a uma conclusão

Embora, inicialmente, tivessem concluído que para resolver o problema deveriam resolver a equação $x^2 + 10x = 39$, os alunos do grupo G2 tentaram resolver o problema de forma geométrica, recorrendo ao método utilizado na parte III. Contudo, para justificar determinadas conclusões, os alunos recorrem à manipulação algébrica. Observe-se o diálogo estabelecido entre o professor e este grupo de alunos:

(1) Emanuel: Fiz igual aquele ali. Desenhei um quadrado [de área] cujo quadrado perfeito menor a seguir ao número 39 que é 49.
(2) Professor: Sim.
(3) Emanuel: Fiz 7 vezes 7. Fiz um quadrado de área 49 de lado 7 por 7.
(4) Daniel: Mas isto não é um quadrado [referindo-se ao retângulo inicialmente dado de comprimento 10]
(5) Emanuel: Não [é um quadrado], por isso é que eu fiz um quadrado!
(6) Daniel: Como é que sabias as medidas? E como é que sabias a área do quadrado?
(7) Emanuel: Diz aqui [apontando para o 39].
(8) Daniel: Não, diz que a soma destes dois.
(9) Emanuel: Então, a área dos dois é 39.
(10) Daniel: Sim!
(11) Emanuel: E?
(12) Daniel: Mas estás a fazer só com um quadrado.
(13) Emanuel: Não, estou a fazer com todos.
(14) Daniel: Então não podes fazer aquela tática, é só com quadrados.
(15) Emanuel: Não é nada, é com retângulos.
(16) Daniel: Mas tem de desenhar um quadrado
(17) Emanuel: E o que é que eu desenhei aqui?!
(18) Daniel: Ah! Já percebi!
(19) Emanuel: Desenhei um quadrado com área 10 que era 49 menos 39 e fizemos igual aquilo que demos.
(20) Professor: E?
(21) Emanuel: E deu-nos isto. Que o semiperímetro era 14 e o perímetro 28.
(22) Professor: Mas há [no enunciado] alguma informação sobre o semiperímetro?
(23) Emanuel: Não!
(24) Professor: E sobre a área?
(25) Emanuel: A área tem que dar 39.
(26) Professor: E dá?
(27) Emanuel: E como é que eu vou continuar agora? [tem escrito $\left(7+\sqrt{10}\right)\times\left(7-\sqrt{10}\right)$]
(28) Nélson: Faz as contas!
(29) Emanuel: É o que eu estou a fazer [faz as contas apresentando o seguinte resultado $\left(7+\sqrt{10}\right)\times\left(7-\sqrt{10}\right) = 49-7\sqrt{10}+7\sqrt{10}-10$]. Que é igual a 39.
(30) Daniel: Que é a área.
(31) Professor: Então o que é que nós queremos saber?

(32) Nélson: O *x*. A largura do primeiro retângulo
(33) Emanuel: É isto [apontando para o lado de medida $7-\sqrt{10}$ da figura] menos dez.
(34) Professor: Porquê?
(35) Emanuel: Porque isto [$7-\sqrt{10}$] é $x + 10$ [apontando para o retângulo inicial]. E então temos de tirar o dez.
(36) Professor: Isto é $x + 10$? Mas porquê?
(37) Emanuel: Porque é isto [apontando novamente para a figura] …
(38) Nélson: Porque *x* é a medida do quadrado e 10 é a medida do retângulo.
(39) Daniel: Mas isto tudo quanto media?
(40) Emanuel: Isto [apontando para a expressão $7+\sqrt{10}$] é que deve ser $x + 10$.
(41) Professor: Porquê? Quanto é que mede isto [apontando para o lado do quadrado construído]?
(42) Emanuel: 7 .
Momento de silêncio
(43) Professor: E então?
(44) Emanuel: Então não temos que tirar aquele 10 [referindo-se à área para dar 39] ?
(45) Professor: Mas tu começaste com um quadrado que media 7 [de lado].
(46) Emanuel: Mas eu fiz como não sabendo quanto medida este lado [apontando para o *x*].
(47) Daniel: Ah! O nosso lado tinha de medir mais de 10 [apontando para $x +10$].
(48) Emanuel: Portanto, o *x* é 7 mais raiz de 10 menos 10.
(49) Nélson: Logo isto tudo [apontando para um dos lados do retângulo] é 7 mais raiz de 10, porque corta-se os 10's.
(50) Professor: E no vosso caso [apontando para a medidas do outro lado retângulo desenhado] ?
(51) Nélson: Mede menos.
(52) Emanuel: Pois… não funciona!
(53) Professor: O é que não funciona?
(54) Daniel: Porque não estamos como na figura do desenho do problema. Tínhamos de ter um retângulo junto com um quadrado.
(55) Nélson: Ah! Pois é estes lados [apontando para $7+\sqrt{10}$ e $7-\sqrt{10}$] são diferentes.
(56) Daniel: Logo não há quadrado!

Através deste diálogo observa-se que os alunos optam por resolver o problema seguindo o método geométrico utilizado na parte III da tarefa. No início deste episódio é possível observar o diálogo estabelecido entre dois elementos do grupo. Enquanto que o Emanuel explica o procedimento, isto é, o porquê da construção de um quadrado de área 49 e o facto de ter retirado a esse quadrado um "quadradinho" de área 10 (§1), (§3) e (§9), o Daniel questiona não só o procedimento (§4), visto que o dado inicial consiste num retângulo de comprimento 10 e de um quadrado construído sobre o lado desse retângulo, mas também o valor das medidas encontradas (§6). Para o Daniel não existia correspondência entre o "quadradinho" de área 10, "quadradinho" a retirar ao quadrado construído de área 49, e o retângulo de comprimento 10 dado inicialmente. Após uma nova explicação do Emanuel, o Daniel entende a resolução apresentada pelo Emanuel (§18). De acordo com o método geométrico utilizado anteriormente, o Emanuel refere que tem um retângulo de área 39, cujo semiperímetro é 14 (§19) e (§21). O professor questiona se há alguma informação, no enunciado, que diga alguma coisa sobre o semiperímetro (§22) e se a área desse retângulo é de facto 39 (§24). Embora refiram que não há nenhuma informação sobre o semiperímetro (§23), os alunos, algebricamente, mostram que área do retângulo construído é 39 (§29). O professor questiona-os, assim, sobre o que é pedido no problema (§31). Os alunos referem que têm de determinar o *x*, a largura do retângulo (§32). Os alunos referem que $7-\sqrt{10}$ é x + 10 (§33), porque x é a medida do quadrado e 10 é a medida do retângulo (§38), logo, bastava retirar 10 a $7-\sqrt{10}$ (§35). Contudo, o Daniel questiona esse facto (§39), ao que o Emanuel contrapõe «Isto é que é x + 10 [apontando para a expressão $7+\sqrt{10}$]» (§40). O professor questiona, então, o grupo sobre a medida do quadrado construído (§41). O Emanuel explica de novo o procedimento (§42), (§44) e (§46), contudo, o Daniel entende a pergunta feita pelo professor de outra forma, observando que o lado do retângulo tinha de medir mais de 10, uma vez que esse lado media x + 10 (§47). No entanto, o retângulo construído resulta da construção de um quadrado de lado 7, portanto, um dos lados seria $7+\sqrt{10}$, logo concluem que x seria igual a $7+\sqrt{10}$ – 10 (§49). No entanto, observam que o outro lado é $7-\sqrt{10}$, portanto, não se encontram nas condições do problema, uma vez que se retirarem o retângulo inicial ao retângulo obtido do quadrado de área 49, não obtêm um quadrado (§54), (§55) e (§56).

Através deste excerto é possível proceder a uma reconstrução funcional dos argumentos presentes neste diálogo. Embora os alunos refutem no final a sua própria proposta de resolução, esta resulta de uma questão levantada pelo professor «Então o que é que nós queremos saber?» (§31). No que diz respeito ao discurso argumentativo, pode-se observar que há, por parte dos alunos, a preocupação de sustentar com garantias as diferentes afirmações produzidas ao longo do discurso argumentativo. Partindo dos dados iniciais do problema e de ter designado a largura procurada por *x*, este grupo, baseando-se no processo geométrico utilizado anteriormente (§1), constrói um quadrado de área 49 (§3), seguidamente retirando um “quadradinho” de lado $\sqrt{10}$ a este quadrado construído (figura 7.6.6.) e reajustando a figura, verifica que o semiperímetro da figura é 14 (§21) (figura 7.6.7.) e a área é 39 (§22) (figura 7.6.8.). Neste ponto é possível observar que as garantias apresentadas para a conclusão destas afirmações resultam de uma manipulação de expressões algébricas. Com estas afirmações, os alunos concluem primeiramente que *x* + 10 é $7-\sqrt{10}$ logo, tirando 10 (§35), a largura procurada seria $7-\sqrt{10}$ – 10 (§33), o que é refutado pelo facto de *x* + 10 ter de medir mais de 10 (§47). Portanto, *x* seria $7+\sqrt{10}$ – 10 (§48). No entanto, esse valor também é refutado porque uma figura de lados $7+\sqrt{10}$ e $7-\sqrt{10}$ não forma um quadrado (§52), (§54), (§55) e (§56).

De acordo com o modelo de Toulmin, este os argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G2 podem ser esquematizados da seguinte forma:

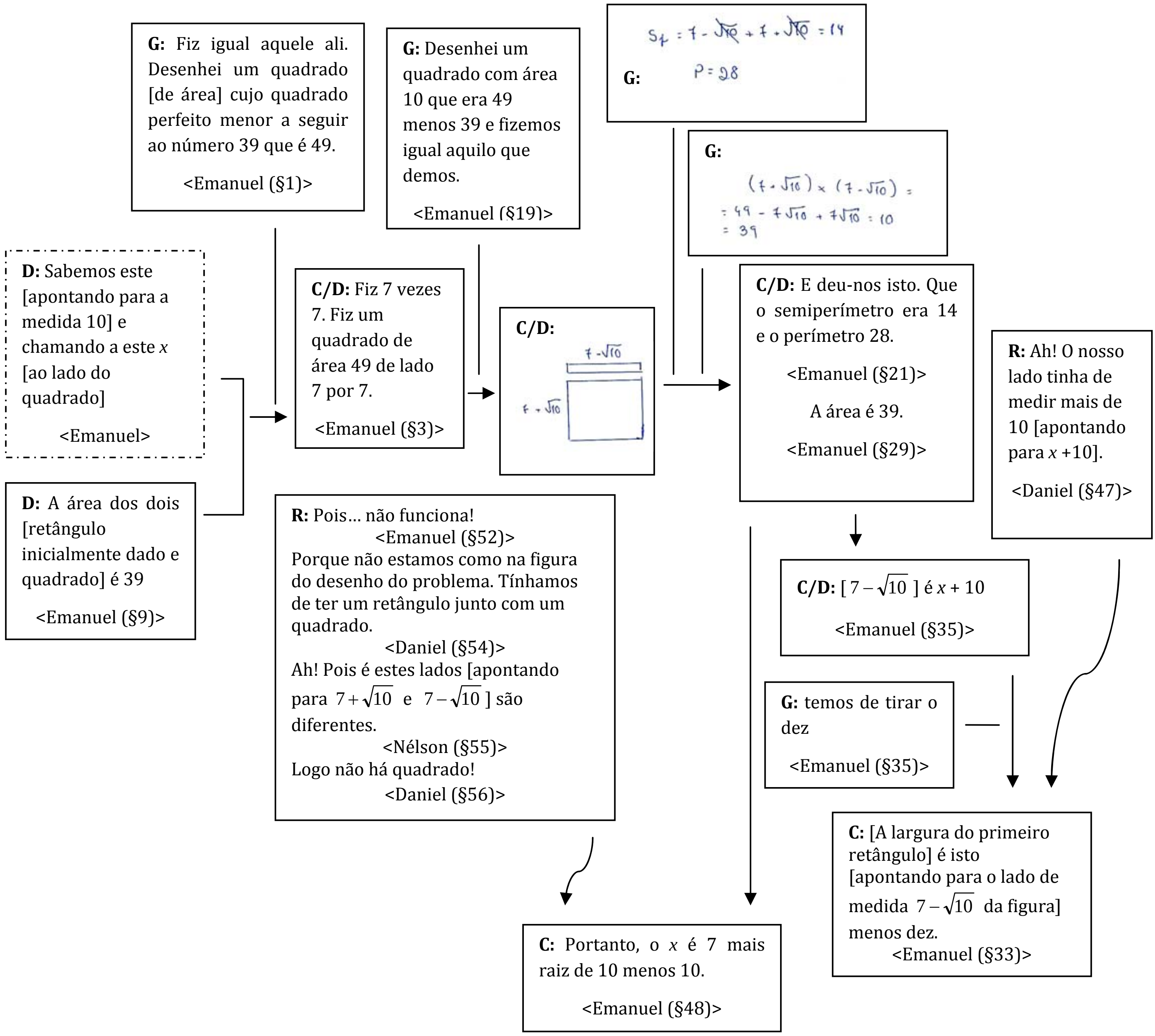


Figura 7.6.33. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G2.

A existência da linha não contínua a limitar a caixa de um dos dados está relacionada com o facto de esta afirmação ter sido introduzida anteriormente por este grupo de alunos.

Na parte V, através do tipo de argumentos apresentados para resolver a questão três, pode-se proceder a uma reconstrução funcional das diferentes afirmações produzidas, sendo possível observar formas simples de argumentação.

Forma simples

Embora os argumentos apresentados pelos alunos resultem da observação da figura, os alunos tomam em consideração os dados do enunciado. Observe-se o diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G4:

(1) Diana: Já percebemos que a área do quadradinho pequenino [porção em falta] é 25.
(2) Professor: E agora?
(3) Diana: Agora queremos saber o x.
(4) Professor: Quais são os dados do vosso problema?
(5) Diana: Sabemos estes bocadinhos [apontando para os 5's resultantes da divisão do retângulo de lado 10]
(6) Professor: E a área não sabem?
(7) Diana: Sabemos que a soma das áreas [do retângulo e do quadrado] é 39.
(8) Professor: Então mostra-me na figura o que é 39
A Diana sombreia o quadrado de lado $x + 5$.
(9) Professor: Isso tudo? Com quadradinho ou sem quadradinho?
(10) Diana: Ah! Sem quadradinho!
(11) Professor: Porquê?
(12) Diana: Porque isto não fazia parte da figura inicial.
(13) Professor: E com quadradinho, qual é a área?
(14) Diana. 39 mais 25 [fazendo as contas]… 64.
(15) Professor: Então 64…
(16) Diana: É a área disto tudo.
(17) Professor: Disto o quê?
(18) Diana: Do quadrado [apontando para o quadrado de lado $x + 5$].
(19) Professor: Se 64 é a área do quadrado, cada lado mede…
(20) Diana: 8. Se aqui já tenho 5 aqui [apontando para o x] vai ser 3. Chegamos â mesma conclusão do que a Ana Isabel, mas por um processo geométrico.

Através deste excerto, observa-se que este grupo de alunos tem em consideração não só o facto dos retângulos colocados sobre o quadrado de lado x medirem 5 (§5), resultante da construção geométrica efetuada, mas também o facto da área da figura inicialmente dada ser 39 (§7). Nesse sentido, a figura obtida após a manipulação geométrica continua a ter área 39 (§10), portanto, concluem que o quadrado de lado $x + 5$, tem área 64 (39 + 25) (§14). Desta forma, o lado desse quadrado é 8, portanto, o lado procurado é 3 (§20). Observa-se ainda que este grupo, no final, faz referência à solução encontrada pelo grupo G1 no problema proposto na parte IV da tarefa, referindo que obtiveram a mesma solução, mas por um processo diferentes, neste caso geométrico.

Este excerto permite ainda proceder a uma reconstrução funcional dos argumentos presentes neste diálogo. Através da análise deste excerto, observa-se que este grupo apresenta como dados o facto do "quadradinho" em falta ter área 25 (§1), afirmação essa obtida como conclusão do processo geométrico realizado, e a divisão do retângulo em duas partes iguais, o que permite obter dois retângulos de comprimento 5 (§5) (figura 7.6.9.). Também consideram como dado a área da figura inicial é 39 (§7), uma vez que é referido no enunciado. Tendo em consideração a nova disposição geométrica da figura, observam que a área se mantém 39. Acrescentando a esta área a área do "quadradinho", concluem que a área do quadrado de lado $x + 5$ é 64 (§14). Logo, $x + 5$ é igual a 8 e, portanto, x é igual a 3 (§20).

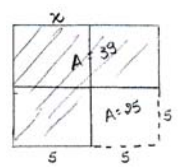
De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G4 podem ser esquematizados da seguinte forma:

D: a área do quadradinho pequenino [porção em falta] é 25
<Diana (§1)>

D: Sabemos estes bocadinhos [apontando para os 5's resultantes da divisão do retângulo de lado 10
<Diana (§5)>

D: A soma das áreas [do retângulo e do quadrado] é 39
<Diana (§7)>

C/D:



G: 39 mais 25 [fazendo as contas]
<Diana (§14)>

C/D: 64 [área do quadrado de lado $x + 5$]
<Diana (§14)>

G: Se aqui já tenho 5
<Diana (§20)>

C: aqui [apontando para o x] vai ser 3
<Diana (§20)>

Figura 7.6.34. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo G4.

Na parte VI, através dos vários tipos de argumentos apresentados para resolver o problema, presentes no diálogo estabelecido entre o professor e o grupo turma e os registos efetuados no quadro (figuras 7.6.10., 7.6.11., 7.6.12. e 7.6.13.), é possível proceder a uma reconstrução funcional das afirmações produzidas.

Forma simples

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes no raciocínio apresentado pela turma podem ser esquematizados da seguinte forma:

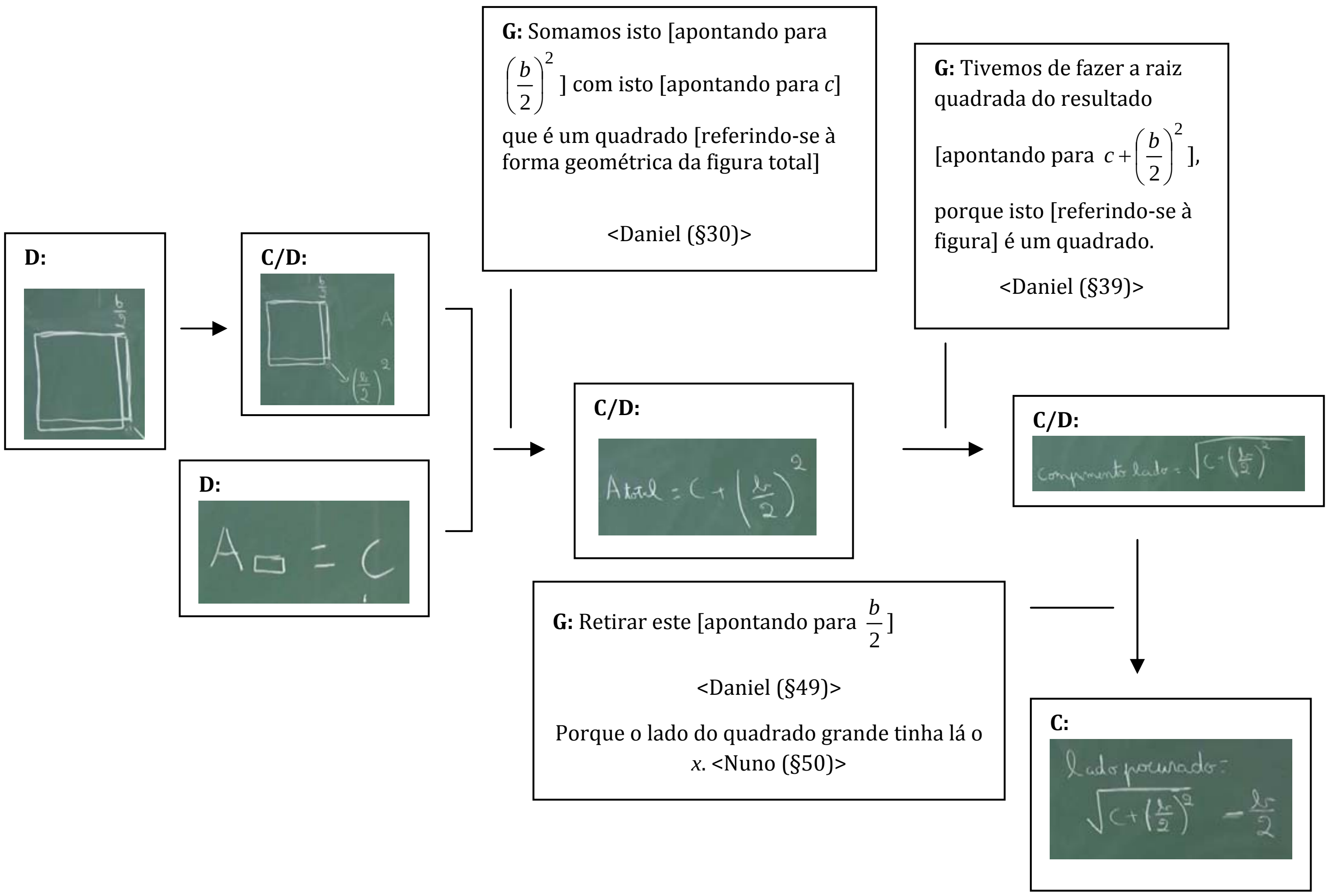


Figura 7.6.35. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio apresentado pela turma no quadro.

Também é possível proceder a uma reconstrução funcional das afirmações produzidas pelos alunos, na parte VII da tarefa, na obtenção da fórmula referente à equação $ax^2 + bx = c$, com $a \neq 0$. A reconstrução funcional pode ser realizada à custa do esquema geométrico e respetiva narrativa, escritos no quadro de giz. Contudo, uma vez que a resolução deste desafio foi realizada em grupo turma, observe-se um excerto do diálogo estabelecido entre alguns alunos da turma e o professor:

O Emanuel do grupo G2 refere:
(1) Emanuel: Se o *a* for 1, já sabemos, fica igual! Mas se não for 1…
(2) Professor: Como é que posso escrever uma equação equivalente a esta por forma a que o coeficiente do *x* quadrado seja 1?
(3) Daniel: Ora, temos de dividir o *a*.
(4) Ana: Mas os outros também [referindo-se aos restantes termos da equação]
(5) Nuno: Mas vai ficar com denominadores.
(6) Emanuel: Fica *bx* sobre *a*.
(7) Diana: E *c* sobre *a* [completando a Diana].
O Daniel que está no quadro escreve o que foi referido.

Através deste excerto, observa-se que os alunos obtêm uma equação equivalente à primeira, em que 1 é o coeficiente do termo de segundo grau.

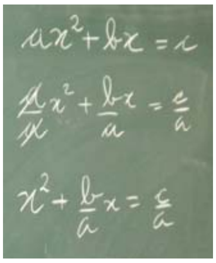


Figura 7.6.36. Simplificação algébrica realizada no quadro pelo Daniel, grupo G2.

Após escreverem a equação $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$, os alunos procuram determinar a solução da mesma. Por sugestão do Daniel, que estava no quadro, os alunos traduzem geometricamente a equação. Obtendo as seguintes construções:

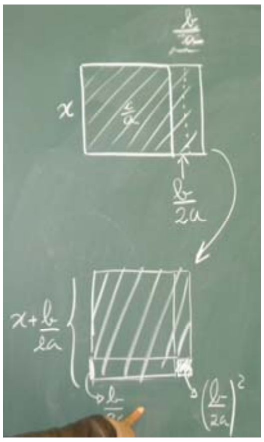


Figura 7.6.37. Identificação geométrica realizada no quadro pelo Daniel, grupo G2.

Seguidamente e tendo por base estas construções, os alunos, algebricamente, determinam a solução da equação (figura 6.6.15.).

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes no raciocínio apresentado pela turma podem ser esquematizados da seguinte forma:

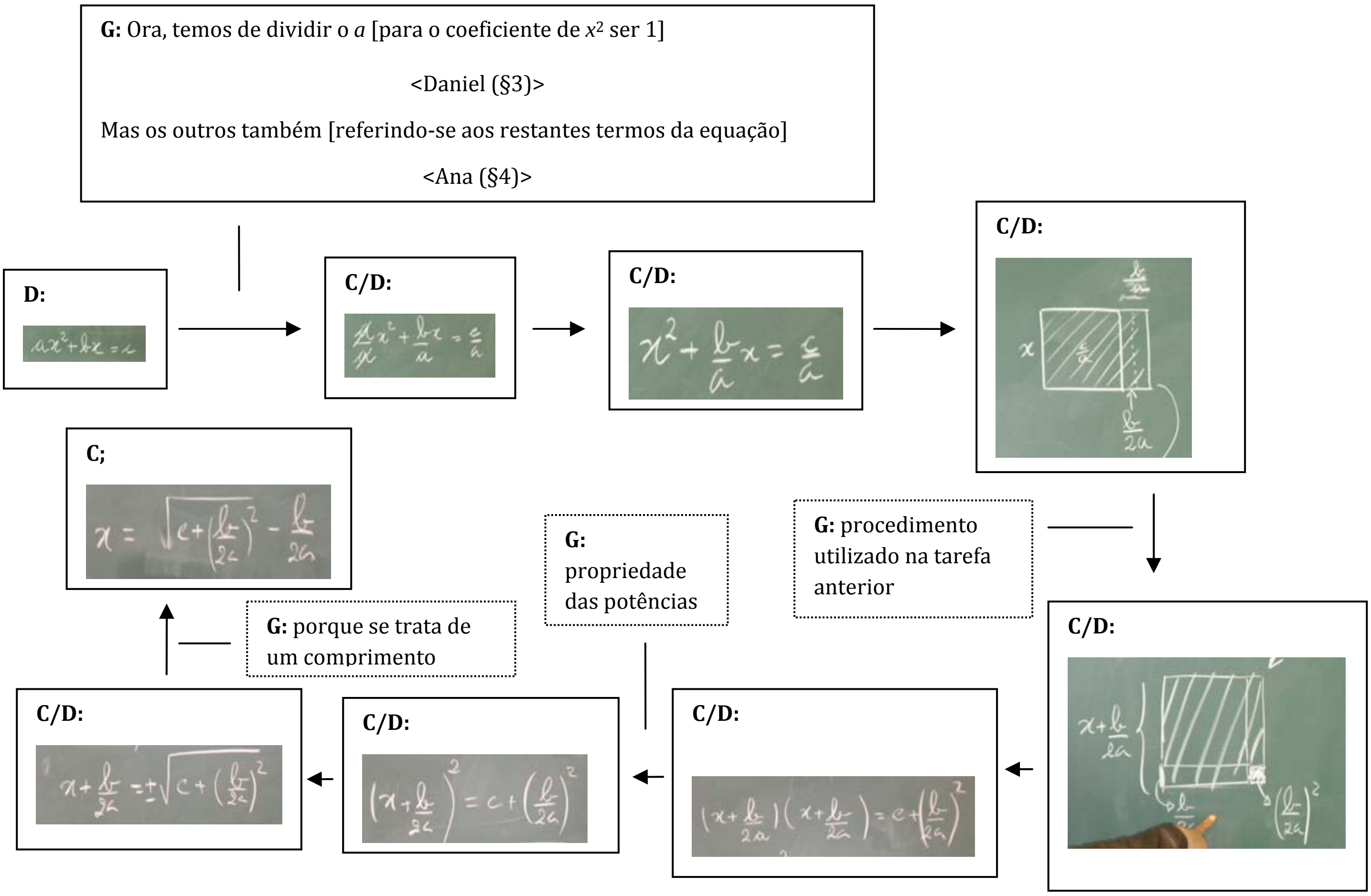


Figura 7.6.38. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio apresentado pela turma no quadro.

A existência de linhas a tracejado deve-se ao facto dos alunos não terem expresso essas afirmações de forma implícita.

No que diz respeito à obtenção simplificada da fórmula referente à equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, a reconstrução funcional pode ser realizada à custa da simplificação algébrica apresentada pelo grupo G2 (figura 7.6.16.).

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes no raciocínio apresentado pelo grupo G2 podem ser esquematizados da seguinte forma:

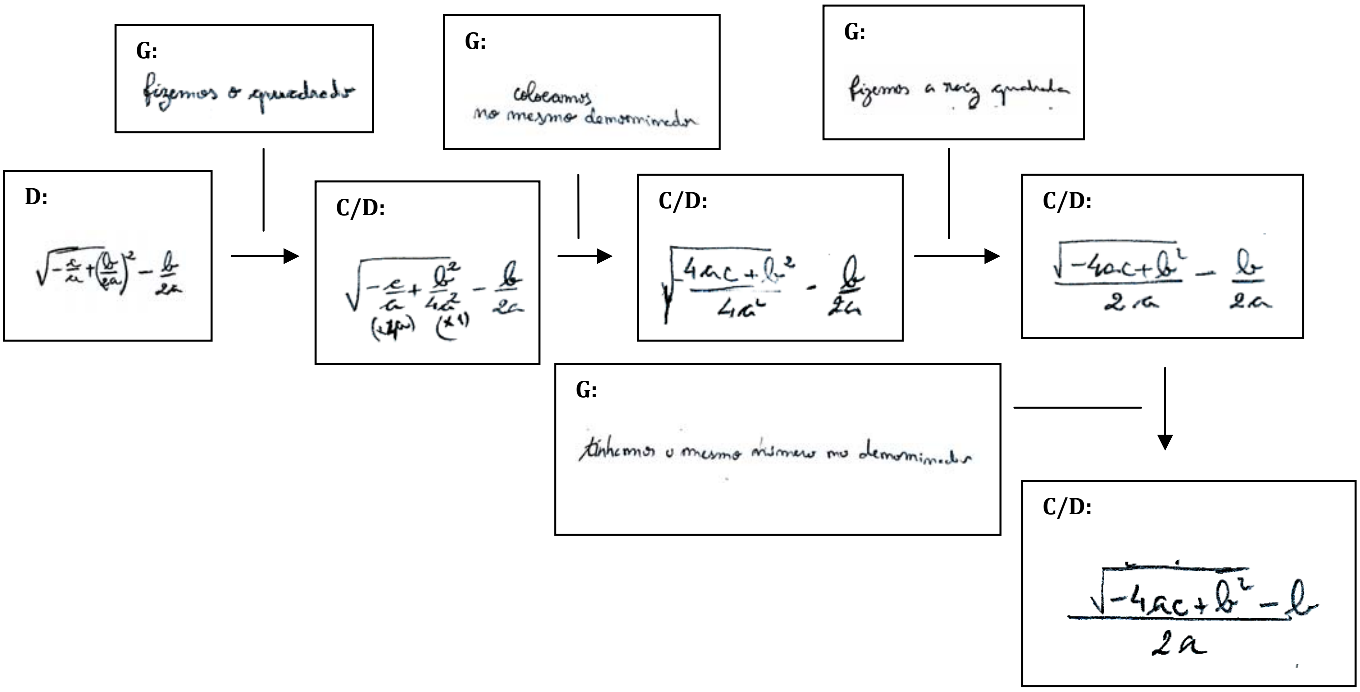


Figura 7.6.39. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes na resolução apresentada pelo grupo G2.

7.6.3. Argumentação: análise local (na leitura e interpretação de raciocínios presentes em fontes primárias)

Na parte II, foi proposta aos alunos a leitura e análise da resolução do mesmo problema, apresentada por Diofanto em *Aritmética*, I, 27, desafiando-os a interpretar a estratégia apresentada e a justificar o método de resolução de Diofanto.

> Encontrar dois números tais que a sua soma e o seu produto formem números dados.
> (...)
> Proponhamos então que a soma dos números forme 20 unidades e que o produto forme 96 unidades.

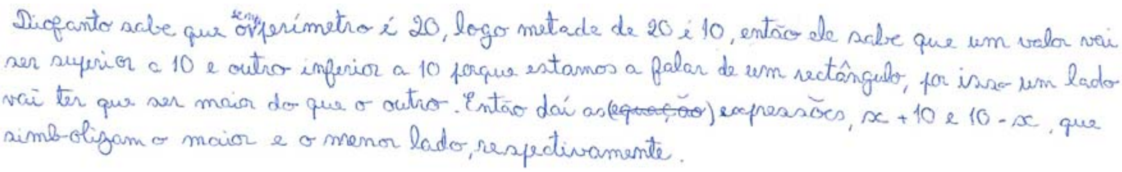
Para maior facilidade de análise, dividiu-se a resolução apresentada por Diofanto em três etapas, tendo sido proposto aos alunos um conjunto de questões de modo a justificarem os diferentes passos do raciocínio efetuado por Diofanto. É de observar que a resolução apresentada por Diofanto é de cariz aritmético.

Através das diferentes produções escritas realizadas pelos alunos é possível proceder a uma reconstrução funcional dos argumentos presentes na resolução de Diofanto.

Diofanto inicia a sua resolução explicando o raciocínio usado para designar os dois números procurados

> Por conseguinte, ponhamos que o maior número é 1 aritmo aumentado de 10 unidades, que são metade da soma dos números; o menor número será 10 unidades menos 1 aritmo, e estabelece-se que a soma dos números é 20 unidades e que o seu excedente é 2 aritmos.

A partir desta afirmação todos os grupos recorreram à notação simbólica atual para interpretaram a informação presente nesta afirmação. Designando o aritmo por x, os alunos observaram que, na notação atual, Diofanto representou por $x + 10$ o maior número e por $10 - x$ o menor. Contudo, o grupo G2 realça a garantia dada por Diofanto «(...) 10 unidades, que são metade da soma dos números (...)» que justifica o porquê de ter representado da forma referida os números procurados:

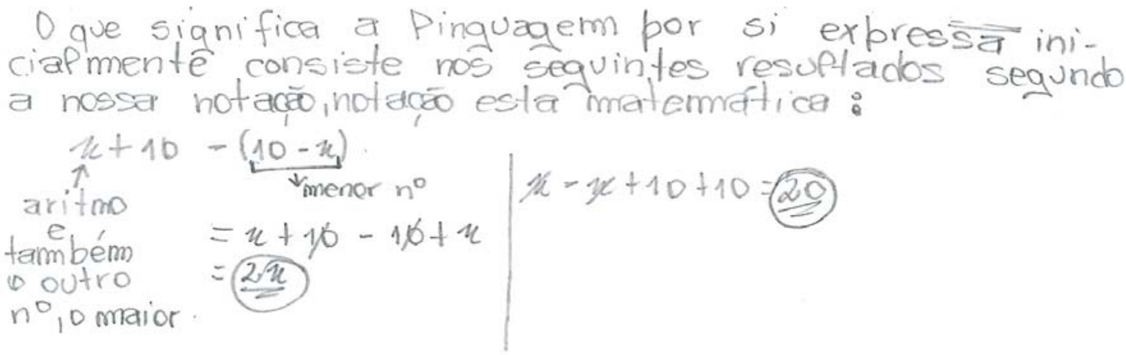


Diofanto sabe que o perímetro é 20, logo metade de 20 é 10, então ele sabe que um valor vai ser superior a 10 e outro inferior a 10 porque estamos a falar de um rectângulo, por isso um lado vai ter que ser maior do que o outro. Então daí as ~~(equação)~~ expressões, $x + 10$ e $10 - x$, que simbolizam o maior e o menor lado, respectivamente.

Figura 7.6.40. Interpretação da resolução apresentada por Diofanto realizada pelo grupo G2.

É no entanto de observar que este grupo fundamenta esta garantia: “porque estamos a falar de um retângulo, por isso um lado vai ter ser maior do que o outro”, nesse sentido pode-se concluir que “um lado vai ser superior a 10 e outro inferior a 10”. Esta conclusão serve de novo dado, permitindo concluir que os números procurados podem ser representados pelas expressões x + 10 e 10 – x.

Os restantes grupos limitaram-se apenas a confirmar a afirmação em linguagem atual, ou seja, que a soma dos números procurados dava de facto 20 (um dos dados do problema) e que a diferença era 2x (observação de Diofanto). Observe-se a descrição apresentada pelo grupo G1:



O que significa a linguagem por si expressa inicialmente consiste nos seguintes resultados segundo a nossa notação, notação esta matemática:

$$x + 10 - \underbrace{(10 - x)}_{\text{menor nº}}$$

aritmo e também o outro nº, o maior

$$= x + \cancel{10} - \cancel{10} + x$$

$$= 2x$$

$$\cancel{x} - \cancel{x} + 10 + 10 = 20$$

Figura 7.6.41. Interpretação da resolução apresentada por Diofanto realizada pelo grupo G1.

Continuando a sua resolução, Diofanto observa que

> É preciso também que o produto dos números forme 96 unidades. Ora, o seu produto é 100 unidades menos 1 quadrado de aritmo; (…)

Perante esta afirmação, a maioria dos grupos procedeu à multiplicação de x + 10 por 10 – x.

$$\underbrace{(x+10)}_{\text{os}} \times \underbrace{(10-x)}_{\text{2 números}}$$
$$= \cancel{10x} - x^2 + 100 - \cancel{10x}$$
$$= -x^2 + 100$$

Figura 7.6.42. Interpretação da resolução apresentada por Diofanto realizada pelo grupo G1 (continuação).

Contudo, o grupo G2 observa que se pode recorre à diferença de quadrados para simplificar a expressão:

$$(10+x)\,(10-x) = 100 - x^2$$

podemos chegar a esta conclusão por causa dos casos notáveis da multiplicação.

Figura 7.6.43. Interpretação da resolução apresentada por Diofanto realizada pelos grupos G2 (continuação).

Por fim, Diofanto observa

> Ora, o seu produto é 100 unidades menos 1 quadrado de aritmo; o que nós igualamos a 96 unidades; e o aritmo torna-se 2 unidades. Por conseguinte, o número maior será 12 unidades, o menor será 8 unidades, e estes números satisfazem à proposição.

Embora Diofanto não apresente qualquer cálculo para obter o valor do aritmo, Diofanto garante que este resulta de igualar o produto dos números procurados a 96. Contudo, os alunos resolvem a equação $-x^2 + 100 = 96$, fundamentando assim a garantia dada por Diofanto.

$$-x^2 + 100 = 96$$
$$\Leftrightarrow -x^2 = 96 - 100$$
$$\Leftrightarrow x^2 = -96 + 100$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4}$$
$$\Leftrightarrow x = 2$$

Figura 7.6.44. Interpretação da resolução apresentada por Diofanto realizada pelo grupo G1 (continuação).

E concluem

Sendo assim, o número menor seria 10-2=8 e o número maior 10+2=12.

Figura 7.6.45. Interpretação da resolução apresentada por Diofanto realizada pelo grupo G2 (continuação).

De acordo com o modelo de Toulmin, os argumentos presentes na análise efetuada pelos diferentes grupos ao raciocínio apresentado por Diofanto podem ser esquematizados da seguinte forma:

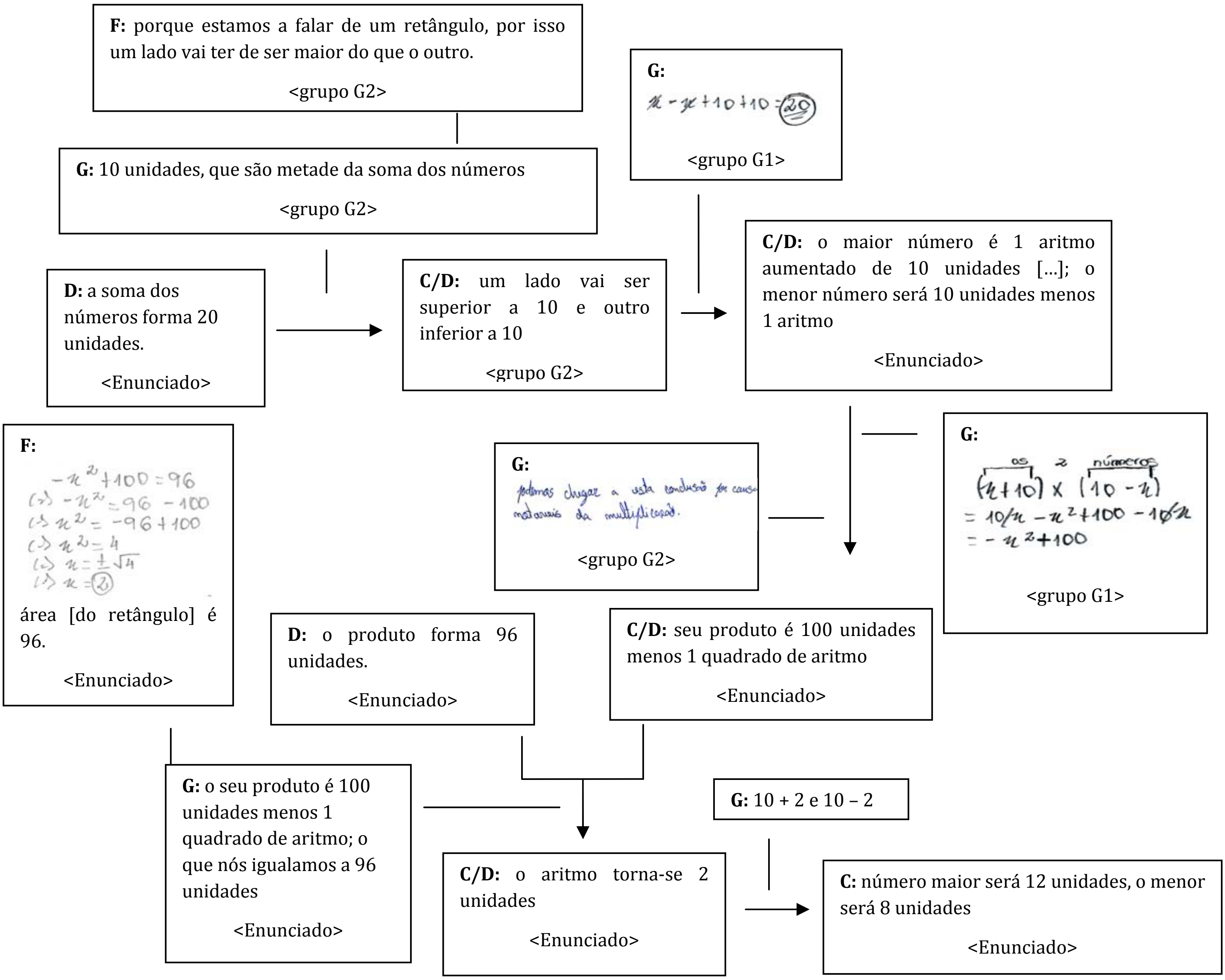


Figura 7.6.46. Representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes na análise efetuada pelos diferentes grupos.

7.6.4. Dificuldades manifestadas pelos alunos

Linguagem

Ao nível da interpretação da resolução proposta por Diofanto

Na realização da parte II da tarefa, as dificuldades manifestadas pelos alunos estiveram relacionadas com o tipo de linguagem apresentada por Diofanto. Alguns grupos não entenderam o significado da palavra "excedente" e o grupo G2 manifestou dificuldades em perceber o significado da afirmação «(…) ponhamos que o maior número é 1 aritmo aumentado de 10 unidades, que são metade da soma dos números (…)». Observe-se o diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G2:

Emanuel: Não percebo esta parte [apontando para o texto onde está descrita a resolução de Diofanto] que são metade da soma dos números.
Professor: Isso é a justificar por que é que escolheu…
Daniel: o $x + 10$ e $10 - x$ [interrompendo o professor]
Professor: Qual é a soma dos números?
Emanuel: 20.
Professor: E a metade?
Emanuel: 10… Ah! Já percebi de onde vem o 10, foi por isso que ele escolheu assim os números!

Compreensão matemática

Ao nível da realização de procedimentos algébricos

Na realização da primeira parte da tarefa, as dificuldades dos alunos manifestaram-se ao ao nível da resolução de sistemas de equações do 1.° grau a duas incógnitas: $\begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 96 \end{cases}$, nomeadamente, em proceder à substituição de variáveis numa equação.

Numa determinada fase da resolução do problema proposto, o professor observa que o grupo G2 tem escrito no papel a seguinte equivalência de equações *x*

$+ y = 20 \Leftrightarrow x = 20 - y$. Observe-se o diálogo estabelecido entre o professor e este grupo de alunos.

(1) Emanuel: Vamos tentar determinar quanto é y… Mas isto vai dar mal!
(2) Daniel: Pois vais ficar sempre com uma letra do outro lado.
(3) Emanuel: Vai dar zero, mas vamos tentar! Se x é isto [apontando para $x = 20 - y$], então [escreve $y + 20 - y$, substituindo o x por $20 - y$]
(4) Daniel: Isso vai dar zero!
(5) Emanuel: Pois dá zero igual a zero [e iguala a expressão anteriormente escrita a zero]. Esquece!
Momento de silêncio
(6) Professor: Quantas equações é que vocês estão a usar?
(7) Emanuel: Uma.
(8) Professor: Mas o Daniel [apontando para uma outra folha onde está escrito $x + y = 20$ e $x \times y = 96$] tem aqui outras duas.
(9) Daniel: Sim…
(10) Professor: E se trabalharem com as duas?

A partir deste excerto observa-se que os alunos embora resolvam uma das equações em ordem a uma das incógnitas, obtendo uma expressão algébrica equivalente à anterior (§3), substituem na mesma equação esse valor (§3). Ou seja, uma vez que têm $x + y = 20 \Leftrightarrow x = 20 - y$, os alunos substituem x por $20 - y$ na equação $x + y = 20$, obtendo por isso zero igual a zero, (§4) e (§5), uma condição universal. No entanto, e uma vez que numa outra folha os alunos têm escrito $x + y = 20$ e $x \times y = 96$, o professor sugere que trabalhem com as duas equações (§8) e (§10).

Passado algum tempo, o professor ao aproximar-se deste grupo observa que além das equações $x + y = 20$ e $x \times y = 96$, os alunos têm escrito a seguinte resolução

$$2x + 2y = 40 \Leftrightarrow 2x = 40 - 2y \Leftrightarrow x = 20 - y$$

No momento da chegada do professor, os alunos discutem sobre a seguinte igualdade:

$$2y + 20 - y = 40$$

(11) Daniel: Se passares este [apontando para o y] para aqui [apontando para o $2y$], por exemplo, está menos y ficas só com y.
(12) Emanuel: Este [apontando para o 20] vai para lá fico y igual a 20 [escrevendo $y = 20$].
(13) Daniel: E então, e pode ser.
(14) Emanuel: Se não era um quadrado…

(15) Daniel: Ah!
(16) Emanuel: Se não era um quadrado… Além que não dava….
(17) Daniel: Não o x é maior que o y [apontando para o desenho, uma vez que consideraram o comprimento maior do que a largura e designaram por x o comprimento e por y a largura]
(18) Emanuel: Pois… mas não dá, porque o semiperímetro é 20!!!
Momento de silêncio. O professor intervém.
(19) Professor: Eu não percebi aqui uma coisa [apontando para a igualdade $2y + 20 - y = 40$] x mais dois y dá quarenta?
(20) Daniel: Ah!
(21) Emanuel: Não dá?
(22) Daniel: Não percebi o que o stôr disse.
(23) Professor: Tens aqui $2y$ [apontando para a igualdade $2y + 20 - y = 40$] mais quê?
(24) Emanuel: Vinte menos y.
(25) Professor: Vinte menos y é quanto?
(26) Emanuel: x. Ah! Devia ser $2x$ aqui [apontando para $20 - y$]. Então dá igual àquela [apontando para a equação $x + y = 20$]. Vamos outra vez voltar atrás.
Momento de silêncio

Através deste excerto, os alunos introduzem uma nova equação $2x + 2y = 40$, que permite determinar x e y à custa do perímetro do retângulo. Novamente os alunos não têm qualquer dificuldade em resolver a presente equação em ordem a uma das incógnitas, obtendo a seguinte equação equivalente: $x = 20 - y$. No entanto, substituem incorretamente o valor de x na equação $2x + 2y = 40$, obtendo a igualdade: $2y + 20 - y = 40$. O Daniel sugere que se associem os termos semelhantes, neste caso $2y$ e $-y$, (§11), observando o Emanuel que y seria igual a 20 (§12). Contudo, embora o Daniel fique inicialmente convencido do valor obtido, pois não deu zero (§13), o Emanuel considera que há algo de errado (§14) e (§16). Embora sugira que se tivessem essa medida estariam perante um quadrado, o que não podia ser pois o x é maior do que y (§17), o Emanuel acaba por observar que este valor não era possível, porque o semiperímetro do retângulo era 20 (§18). Dado o impasse, o professor intervém procurando que os alunos entendam qual o erro presente na substituição efetuada (§19), (§23) e (§25). Após alguma reflexão em conjunto, os alunos compreendem que a equação $2x + 2y = 40$ não é equivalente à equação $2y + 20 - y = 40$ (§26). No entanto, a perceção deste erro, permite ao Emanuel observar que o procedimento em causa conduzia de novo ao que tinha acontecido anteriormente com a substituição na equação $x + y = 20$ (§26).

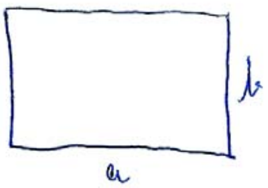
Ainda na resolução deste sistema, os alunos manifestaram dificuldades em resolver a equação $xy = 96$ em ordem a uma das incógnitas

Primeiro tentámos resolver por um sistema. E chegámos a um sistema, mas que não ~~coronseo~~ conseguimos resolver. Esse sistema era assim: $\begin{cases} 2x + 2y = 40 \\ x \times y = 96 \end{cases}$

Figura 7.6.47. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G3.

Para o grupo G3, a justificação para a não resolução do sistema esteve relacionada com o facto de numa das equações estar presente o produto de duas incógnitas ($x \times y = 96$). É de observar que a outra equação apresentada ($2x + 2y = 40$) refere-se ao perímetro do retângulo.

Ainda no âmbito da resolução do sistema de equações, o grupo G4 refere que não conseguiu resolver o sistema de equações, porque apareceu uma equação do segundo grau completa, algo impossível de fazer tendo em conta os conhecimentos dos elementos do grupo. Observe-se a resolução apresentada por este grupo:



$$\begin{cases} a + b = 20 \\ a \times b = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20 - b \\ (20 - b) \times b = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20 - b \\ 20b - b^2 = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20 - b \\ ??? \end{cases}$$

Resolução impossível aos conhecimentos do grupo.

Figura 7.6.48. Processo algébrico apresentado pelo G4.

Também o Emanuel do grupo G2 refere:

Penso que únicas dificuldades, ou a parte mais frustrante foi quando chegávamos a uma equação de 2º grau para resolver o problema, e não a conseguíamos resolver.

Figura 7.6.49. Excerto da avaliação final realizada pelo Emanuel, grupo G2.

No entanto, o grupo G2, embora não tenha conseguido resolver esta equação do 2.° grau, justifica tal impossibilidade pelo facto de se ter de resolver $(a + b)^2$, ou seja, para resolver esta equação era necessário recorrer ao caso notável da multiplicação, quadrado de um binómio, o que para eles constituía alguma dificuldade. Assim, embora a equação presente fosse completa do 2.° grau, e até ao momento, apenas tivessem trabalhado com equações incompletas do 2.° grau, este grupo de alunos lembrou-se que quando foram dados os casos notáveis, no ano anterior, que tinham resolvido equações deste género. Contudo, embora procedessem a esta observação, optaram por não seguir este processo.

A dificuldade em resolver equações do 2.° grau completas, também se encontra presente na resolução do problema proposto na parte IV. Uma proposta de solução apresentada pelos alunos consistia em resolver o problema através da equação $x^2 + 10x = 39$, em que x representava a largura do retângulo inicial, Contudo, uma vez que a equação era completa do 2.º grau, os alunos optaram por procurar outro processo de resolução.

Também na parte III da tarefa os alunos manifestaram dificuldades na resolução geométrica do problema: «determinar as dimensões de um retângulo cujo semiperímetro é 12 cuja área é 30». Observe-se o excerto do diálogo estabelecido com o professor e os alunos do grupo G2.

(1) Professor: Qual é a dúvida?
(2) Daniel: Nós temos de construir um quadrado de lado 6.
(3) Professor: Porquê?
(4) Nélson: Para termos uma área maior…
(5) Emanuel: Do que 30.
(6) Daniel: Mas agora pelo método temos de tirar um quadradinho e nós não conseguimos arranjar o número que temos de tirar.
(7) Professor: Mas qual é a área do retângulo que procuram?
(8) Daniel: 30.
(9) Nélson: Nós sabemos que vamos tirar 6, mas não temos nenhum número [inteiro] que [multiplicado por si próprio] dê 6.
(10) Daniel: Não arranjamos nenhum número que multiplicado duas vezes por si dê 6.
(11) Professor: Não existe?
(12) Emanuel: Mais ou menos 2,45.
(13) Nélson: Mas dá maior do que 6… espera aí [calcula na máquina o produto de 2,45 por si próprio] 6,0025.
(14) Professor: Como é que determinaste este valor?
(15) Nélson: Multipliquei-o!

(16) Emanuel: O primeiro?
(17) Professor: Sim.
(18) Emanuel: Fiz a raiz quadrada de 6.
(19) Professor: Porquê?
(20) Emanuel: Porque tinha um quadrado de lado 6.
(21) Daniel: Pois é isso, o número é que não é inteiro, nem decimal!
(26) Professor: Raiz de 6 não é um número racional?
(27) Nélson: É. É um inreal.
(28) Daniel e Emanuel: Irracional!
(29) Professor: Então, quais são as dimensões do retângulo?
(30) Daniel: Vamos tirar raiz de 6 a este [apontando para um dos lados] e somamos a este [apontando para outro lado].
(31) Emanuel: Dá 6 menos raiz de 6 e 6 mais raiz de 6.
(32) Professor: E esses valores funcionam?
(33) Nélson: Temos de fazer as contas. Deixe ver… [e procedem à verificação]

Através deste excerto observa-se que a questão inicial destes alunos é saber qual é a medida do "quadradinho" que têm de retirar por forma a obter a área pretendida (§6). Os alunos têm plena consciência como funciona o método geométrico com que estão a trabalhar, concluindo que a área a retirar ao quadrado de área 36 é 6 (§2), (§4) e (§6), no entanto, não encontram nenhum número inteiro que multiplicado por si próprio dê 6. Mas os alunos referem que se considerarem 2,45 (§12) para medida do lado desse "quadradinho" a área será 6,0025 (§13), ou seja, aproximadamente 6. O professor questiona-os sobre como obtiveram esse valor (§19), ao que respondem calculando a raiz quadrada de 6 (§18), visto que a área do "quadradinho" era 6 (§20). Neste momento, os alunos entendem que a sua dúvida estava no facto de não considerarem o valor exato da raiz quadrada de 6 para medida do lado "quadradinho", visto que estavam apenas a procurar números inteiros ou racionais (§21). Portanto, $6-\sqrt{6}$ e $6+\sqrt{6}$ são as dimensões do retângulo (§30) e (§31).

Ainda ao nível dos procedimentos algébricos, os alunos manifestaram dificuldades na aplicação da fórmula que permite obter a solução da equação $ax^2 + bx = c$, com $a \neq 0$.

Na parte VI da tarefa, tendo obtido a fórmula $\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}$, que lhes permitia calcular o lado de um retângulo de comprimento b e cuja área somada à área de um quadrado de lado igual à largura do retângulo de comprimento b é c, é pedido aos alunos que resolvam as seguintes equações: $x^2 + 8x = 9$ e $x^2 + 15x = 75$. O Daniel do grupo G2 manifestou uma dúvida em relação à fórmula algébrica obtida. Observe-se o seguinte excerto do diálogo estabelecido entre o professor e alguns alunos, de diferentes grupos, da turma:

(1) Daniel: Professor, por que é que o primeiro *b* é positivo e o segundo negativo na fórmula?
(2) Professor: O segundo é negativo, porque resultou de tirar o quê?
(3) Daniel: Ó professor, na equação *x* ao quadrado mais 8*x* [referindo-se à equação $x^2 + 8x = 9$] o *b* está positivo.
(4) Professor. Sim.
(5) Daniel: Mas na fórmula uma vez aparece positivo outra [vez] negativo.
(6) Professor: Sim. Quem é que consegue explicar isto?
(7) Pedro: Por causa da raiz quadrada.
(8) Professor: Porquê?
Momento de silêncio
(9) Professor: O que era o *c* mais *b* sobre 2 ao quadrado [referindo-se à expressão $c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$] no desenho?
(10) Carla: A área total do quadrado.
(11) Professor: Certo. E quando eu calculo a raiz quadrada o que é que eu estou a obter, geometricamente?
(12) Diana: O comprimento do lado [do quadrado].
(13) Professor: Certo. E para terminar, ou seja, para descobrir o *x*, o que é que tenho de fazer?
(14) Emanuel: Tenho de retirar aquele lado [apontando para $\frac{b}{2}$]
(15) Professor: Sim, portanto, Daniel…
(16) Daniel: Ah! Sim, porque uma vez soma-se o quadradinho e depois retira-se o lado… percebi!

Através deste excerto, observa-se que a dúvida do Daniel está no facto de na fórmula que permite calcular o lado procurado, no radicando aparece $c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$, e depois posteriormente se subtrai $\frac{b}{2}$ à raiz de $c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$ (§1), uma vez que na equação $x^2 + 8x = 9$ aparece "$+ 8x$" e não "$– 8x$" (§3). Dada a dúvida do Daniel, o professor questiona os alunos (§8). Após algum momento de silêncio e questionados pelo professor, os alunos referem que $c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$ representa a área total da figura (que é um quadrado) (§10), portanto, $\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$ representa o comprimento do lado desse quadrado (§12), sendo $\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}$ a largura procurada (§14).

Ao nível de simplificação de expressões, alguns grupos de alunos tiveram dificuldades em obter a fórmula $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ através da simplificação da expressão $\sqrt{\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}-\frac{b}{2a}$ (com $a \neq 0$), o que pode ser ilustrado através da reflexão crítica final do grupo G1.

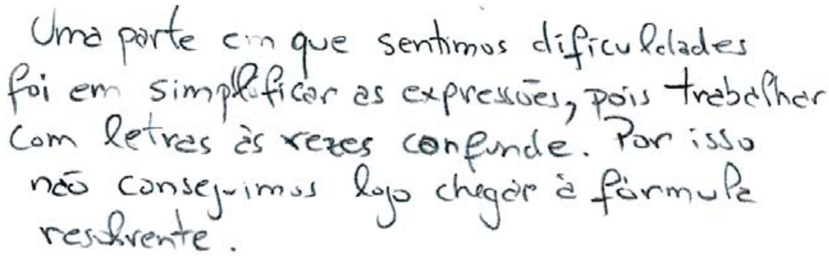

Uma parte em que sentimos dificuldades
foi em simplificar as expressões, pois trabalhar
com letras às vezes confunde. Por isso
não conseguimos logo chegar à fórmula
resolvente.

Figura 7.6.50. Excerto final da avaliação realizada pelo grupo G1.

Ao nível da interpretação geométrica

Ainda no âmbito da resolução da parte I da tarefa, os alunos manifestaram dificuldades ao nível da interpretação geométrica.

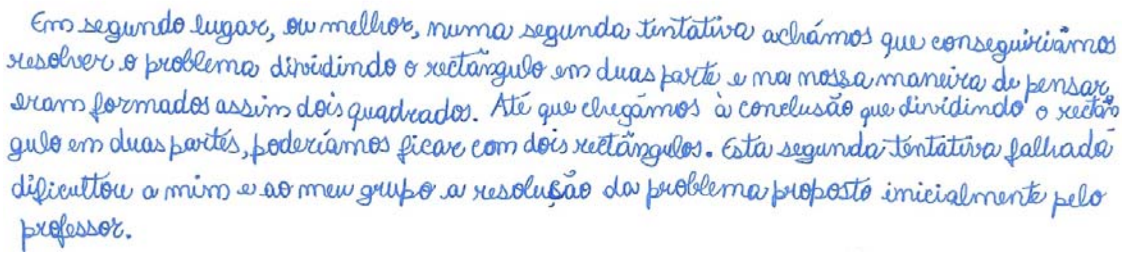

Em segundo lugar, ou melhor, numa segunda tentativa achámos que conseguiríamos
resolver o problema dividindo o rectângulo em duas parte e na nossa maneira de pensar
eram formados assim dois quadrados. Até que chegámos à conclusão que dividindo o rectân
gulo em duas partes, poderíamos ficar com dois rectângulos. Esta segunda tentativa falhada
dificultou a mim e ao meu grupo a resolução do problema proposto inicialmente pelo
professor.

Figura 7.6.51. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G3 (continuação).

Através deste excerto, observa-se segunda resolução apresentada pelo grupo G3 consistiu em dividir o retângulo, de área dada, em duas partes geometricamente iguais. Inicialmente, este grupo de alunos considera que os quadriláteros obtidos são quadrados, verificando, posteriormente, que isso não pode acontecer.

Argumentação

Ao nível da apresentação de dados ou garantias que sustentem determinadas conclusões

Na parte V da tarefa, alguns grupos tiveram, inicialmente, dificuldades em determinar a largura desconhecida, tendo em conta os procedimentos geométricos realizados. Este constrangimento associou-se à dificuldade de identificar as informações presentes na figura por forma a serem usadas como dados no discurso argumentativo. Observe-se o excerto do diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G3:

(1) Pedro: Faltam-nos medidas para continuar!
(2) Professor: Que dados é que vocês têm. O que é vocês sabem até agora?
(3) Carla: Sabemos que isto é 25 [apontando a área da porção em falta], porque estes dois retângulos é metade de 10, foi dividido ao meio.
(4) Professor: E só é essa a informação que têm?
(5) Sara: A última figura obtida é um quadrado.
(6) Professor: Concordam?
(7) Pedro: Sim. É 25 [referindo-se à área]
(8) Professor: E não têm mais nenhuma informação. Medidas? Dão-vos mais alguma informação?
Momento de silêncio.
(9) Emmanuel: Dão este 5.
Momento de silêncio.
(10) Professor: Leiam o problema.
(11) Pedro: Dão-nos um retângulo… um quadrado…
(12) Carla: O 10…
(13) Sara: E dão o 39…
(14) Professor: O que era o 39?
(15) Carla: Era a área da figura inicial.
(16) Professor: E nesta figura, o que é corresponde a 39?
(17) Sara: É aqui isto [apontando para a figura]
(18) Pedro: Isto tudo.
(19) Professor: Isto tudo?
(20) Pedro: Menos o 25!

Através do diálogo estabelecido, os alunos apenas consideram como dados, as informações presentes na figura: o retângulo de lado 10, a respetiva divisão do mesmo e o facto da área da porção em falta ser 25 (§3), determinada na questão anterior. Repare-se que os alunos só têm em consideração a soma da área do retângulo inicialmente dado com o quadrado construído sobre a largura desse retângulo, após algum tempo de discussão e quando o professor sugeriu uma nova leitura do problema (§10). O facto de esta informação, presente no enunciado, não ter sido usada na construção geométrica, originou que os alunos não considerassem este dado nesta fase do problema.

7.6.5. Avaliação realizada pelos alunos

Ao nível da *aprendizagem da matemática*, os alunos realçam a importância da comunicação e da confrontação de opiniões e ideias na procura da solução do problema. A Ana do grupo G1 refere

Quanto ao que mais gostei, refiro a maneira de como fizemos para novas formulas obter, o "diálogo" entre nós e o prof. Gil. Acerca do que menos gostei, não tenho nada a assinalar.

Figura 7.6.52. Excerto da avaliação final realizada pela Ana, grupo G1.

Também os grupos G4 e G3 observam, respetivamente, que a discussão em grupo permitiu não só a partilha de diferentes pontos de vista e, assim, resolver o problema de diferentes formas

Outro dos aspectos interessantes é que ao resolvermos em grupo obtemos várias opiniões e aprendemos várias maneiras de resolver o mesmo problema.

Figura 7.6.53. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G4.

mas também permitiu ultrapassar algumas das dificuldades, o que se revelou vantajoso para conseguir resolver o problema.

A actividade que sentimos mais dificuldade foi a última, mas com a resolução com os outros grupos e trocas de ideias foi mais fácil perceber.

Figura 7.6.54. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G4 (continuação).

A importância do trabalho de grupo na procura das conclusões desejadas também é referida pelo grupo G2

Na nossa opinião, o trabalho de grupo foi muito importante para que pudessemos trocar opiniões e chegar a conclusões em relação aos dois problemas propostos pelo professor, nas últimas aulas de Matemática, por isso gostaramos de voltar a fazer mais trabalhos de grupo.

Figura 7.6.55. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G2.

Os alunos reconhecem ainda, a presença de conexões entre diferentes temas da matemática, no presente caso entre a geometria e a álgebra. O grupo G2 observa que a aprendizagem da forma geométrica para resolver equações, atribuída aos babilónios, permitiu não só resolver a equação, mas também obter uma fórmula, neste caso a fórmula resolvente, que lhes permite resolver qualquer equação do 2.° grau completa.

Durante estas últimas aulas tentamos perceber uma maneira de resolver uma equação do 2.º grau completa de uma forma geométrica inspirada nos métodos babilónicos, através desses métodos conseguimos chegar a uma fórmula que depois de simplificada originou a fórmula resolvente.
Ao princípio foi um pouco difícil perceber a formula mas depois de a simplificarmos e ser aplicada em exercícios tornou-se muito mais fácil a compreensão.

Figura 7.6.56. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G2 (continuação).

Esta conexão entre a geometria e a álgebra pode também ser observada, na resposta do Emanuel do grupo G2, na resolução de uma equação proposta na parte VI da tarefa. Este aluno observa que para resolver a equação $x^2 + 10x = 39$ não há necessidade de «fazer os desenhos», pois basta utilizar a fórmula $\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}$, uma vez que a equação dada é do tipo $x^2 + bx = c$.

Emanuel: Se tivéssemos esta equação [apontando para a equação escrita no seu papel x^2 + 10x = 39], já não precisamos de fazer os desenhos, bastava ir à fórmula [apontando para $\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}$] e o b era 10 e o c 39, portanto, [e escreve $x=\sqrt{39+\left(\frac{10}{2}\right)^2}-\frac{10}{2}=3$].

A conexão entre a álgebra e a geometria pode ser observada, na fase final da resolução da sequência de tarefas, quando é proposto aos alunos o seguinte exercício «Sem resolver a equação verifica quais dos seguintes números: 1, 2 e 3; são soluções da equação x^2 – 5x + 6 = 0. Seguidamente, aplicando a fórmula que obtiveste, determina a solução da equação.».

Os alunos verificam que 2 e 3 são soluções da equação dada, contudo, questionam o facto de ao aplicarem a fórmula, $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, apenas obtêm 3 como solução da equação 3. Observe-se o diálogo estabelecido entre o professor e alguns alunos da turma:

(1) Nuno: Ó professor, nós vimos que o 2 e o 3 dão [são soluções da equação], mas depois na fórmula só dá o 3.
(2) Daniel: A nós [referindo-se ao grupo G2] também aconteceu o mesmo!
(3) Professor: E sabem por que é que isso acontece?
(4) Nuno: Não!
(5) Ana: Se calhar falta alguma coisa na fórmula…
(6) Professor: Então observem o seguinte. Quando construímos o quadrado de área $c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$, como determinaram o comprimento do lado?
(7) Diana: Fizemos a raiz quadrada.
(8) Professor: E que expressão obtiveram? Alguém venha ao quadro escrever o passo da resolução do problema em que determinaram a largura do retângulo inicial [referindo-se ao problema da parte VI da tarefa].
(9) Ana: O Daniel escreveu no quadro isto [apontando para a expressão $\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}$ escrita no seu caderno].
(10) Professor: Então, esta expressão [apontando para $\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$] traduzia a medida do lado do quadrado de área $c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$.
(11) Daniel: Claro! Fizemos a raiz quadrada!

(12) Nélson: Pois se multiplicarmos isto [apontando para $\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$] duas vezes [ou seja, multiplicando por si próprio] obtém-se aquela área [referindo-se a $c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$]. E depois era só tirar aquilo [apontando a $-\frac{b}{2}$] para obter a medida que queríamos.
(13) Professor: Correto! Então digam-me uma coisa: quais são os números que ao quadrado dão 16?
(14) Nélson: O 4!
(15) Emanuel: O – 4 também dá!
(16) Professor: E que ao quadrado dão 49?
(17) Nuno: O 7 e o – 7!
(18) Professor: No entanto, se repararem ao calcularmos esta raiz quadrada só consideramos a parte positiva. Sabem-me dizer porquê?
Momento de silêncio
(19) Carla: Quando calculamos o comprimento do lado de um quadrado, fazemos a raiz quadrada [da área].
(20) Professor: Sim. Mas nos exemplos que vimos, verificámos que existem dois números, um positivo e outro negativo, que ao quadrado dão o mesmo número.
(21) Daniel: É! Mas ficava estranho ter um comprimento negativo.
(22) Emanuel: Não há comprimentos negativos!
(23) Professor: Por isso é que consideramos que o comprimento do lado do quadrado era este [apontando para $\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$]. Agora, se olharmos para esta expressão e esquecermos que estamos em geometria, todos concordam que se eu procurar um número *x* que ao quadrado dê *c* mais *b* sobre dois ao quadrado, obtenho isto [e escreve $x=\pm\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$]. Portanto, se agora formos às fórmulas que fomos obtendo e colocarmos "mais ou menos" nos lugares respetivos, obtemos esta fórmula [e escreve $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$] que é a fórmula resolvente das equações do segundo grau. E se agora aplicarem esta fórmula, verificam que o 2 surge como solução!

Através deste excerto, a partir do exercício proposto, os alunos observam que embora verifiquem que dois números são solução da equação, apenas conseguem determinar um deles, através da fórmula (§1) e (§2). O professor questiona então os alunos sobre a forma como determinaram o comprimento do quadrado construído na parte VI da tarefa (§6). Os alunos referem que calcularam a raiz quadrada da área desse quadrado (§7). O professor aproveita a resposta dos alunos e questiona os alunos sobre «quais os números que ao quadrado dão 16?» (§13). Os alunos referem que são o 4 e o – 4 (§14) e (§15). O professor volta questionar, mas desta vez «quais são os números que ao quadrado dão 49?» (§16). Os alunos referem novamente dois números, neste caso o 7 e o – 7 (§17). No entanto, o professor observa que ao calcularem a raiz quadrada só consideraram a parte positiva» (§18). A partir desta observação, os alunos reconhecem que em geometria não se trabalha com comprimentos negativos (§21) e (§22). Nesse sentido, a fórmula por eles obtida resultou de uma interpretação algébrica a partir de uma situação geométrica, portanto, não fazia sentido considerar a parte negativa. Contudo, em termos aritméticos, dado um número positivo a, existem dois números cujo quadrado é a, a saber $\sqrt{a}$ e $-\sqrt{a}$, portanto, o professor observa que a fórmula por eles anteriormente obtida não permite determinar todas as soluções de uma equação do segundo grau (§23). Para isso é necessário considerar na fórmula o sinal "±".

Algumas das reflexões finais dos grupos referem ainda que o desenvolvimento deste tipo de tarefas os ajudou a aprender melhor a matéria.

O grupo G5 refere que

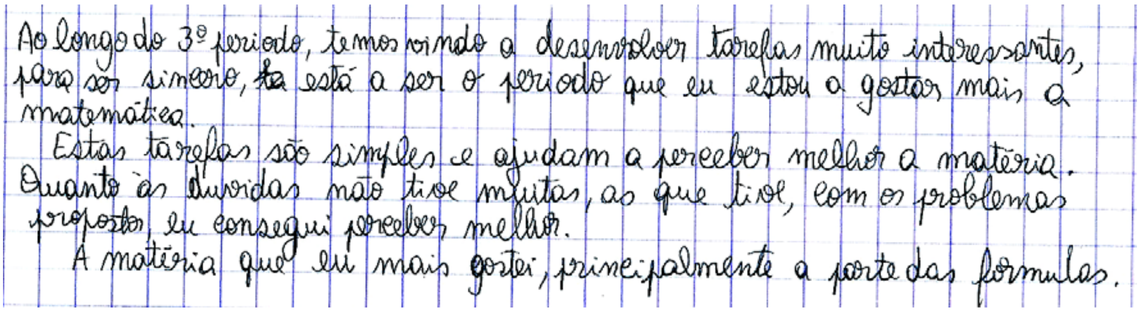

Ao longo do 3º periodo, temos vindo a desenvolver tarefas muito interessantes, para ser sincero, ~~ta~~ está a ser o periodo que eu estou a gostar mais a matemática.
Estas tarefas são simples e ajudam a perceber melhor a matéria.
Quanto às duvidas não tive muitas, as que tive, com os problemas propostos, eu consegui perceber melhor.
A matéria que eu mais gostei, principalmente a parte das formulas.

Figura 7.6.57. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G5.

Para o grupo G3, realizar estas atividades, usando diferentes métodos, permitiu-lhes aprender a matéria «sem darem conta».

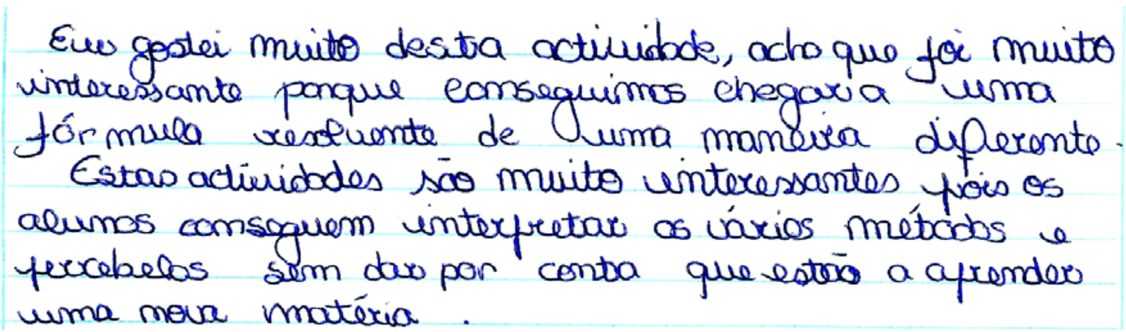
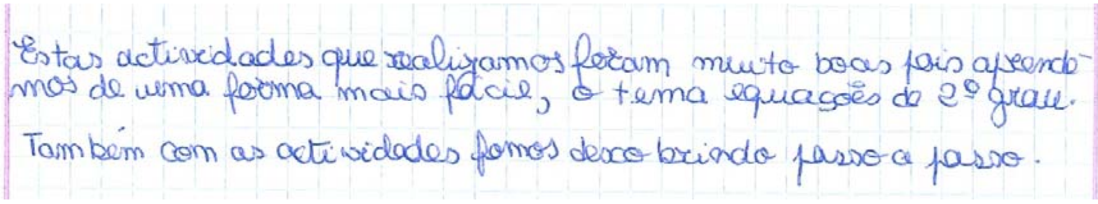

Eu gostei muito desta actividade, acho que foi muito interessante porque conseguimos chegar a uma fórmula resolvente de uma maneira diferente.
Estas actividades são muito interessantes pois os alunos conseguem interpretar os vários métodos e percebelos sem dar por conta que estão a aprender uma nova matéria.

Figura 7.6.58. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G3 (continuação).

Também o grupo G3 refere que:



Estas actividades que realizamos foram muito boas pois aprendemos de uma forma mais fácil, o tema equações do 2º grau.
Tambem com as actividades fomos descobrindo passo a passo.

Figura 7.6.59. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G3 (continuação).

O grupo G2 refere ainda que a resolução do problema 6 da parte III possibilitou perceber melhor a aplicação dos números irracionais. Por exemplo, na alínea (ii) desse problema é pedido para «determinar as dimensões de um retângulo cujo semiperímetro é 12 cuja área é 30», é possível observar que os alunos reconhecem que a resolução geométrica implica o envolvimento de comprimentos irracionais. Observe-se a resolução escrita apresentada pelo grupo G2.

Embora, os alunos tenham manifestado, inicialmente, algumas dificuldades em resolver este problema, uma vez que a resolução geométrica envolvia considerar um quadrado de comprimento de lado igual a um número irracional, os alunos determinam as dimensões do retângulo.

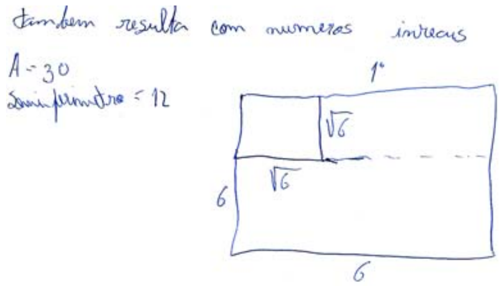


Figura 7.6.60. Representação geométrica, por parte do grupo G2, da estratégia de resolução.

Mais uma vez, os alunos têm em consideração os dados do problema. Contudo, desta vez não explicitam o porquê do esquema geométrico apresentado. É de destacar a observação efetuada pelos alunos no início da resolução «também resulta com número inreais». A dificuldade inicial em descobrir qual o comprimento do lado do quadrado de área 6, uma vez que não encontravam um número racional que multiplicado por si próprio desse área 6, permitiu aos alunos reconhecer que o método geométrico também funcionava com números irracionais. No entanto, os alunos chamam-lhe os “inreais”. Seguidamente os alunos apresentam, geometricamente, o segundo passo:

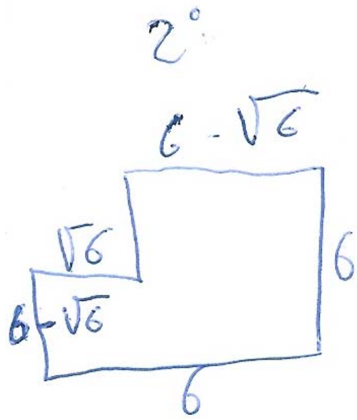


Figura 7.6.61. Representação esquemática da resolução efetuada pelo grupo G2.

Embora não refiram de forma explícita, os alunos retiram ao quadrado de área 36, um quadrado de área 6. Por fim, apresentam geometricamente o 3.º passo, onde apresentam as soluções do problema: $6-\sqrt{6}$ e $6+\sqrt{6}$.

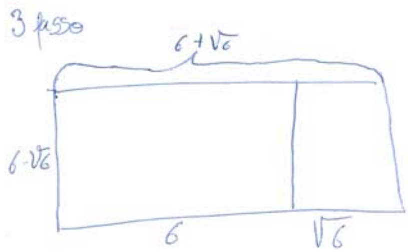


Figura 7.6.62. Apresentação geométrica da solução do problema por parte do grupo G2.

Ainda no âmbito da aprendizagem da matéria é possível observar que os diferentes grupos procedem a uma explicação dos processos geométricos presentes nas partes III e V. Observe-se a explicação por tópicos, dada pelo grupo G3 sobre o método presente na parte III da tarefa:

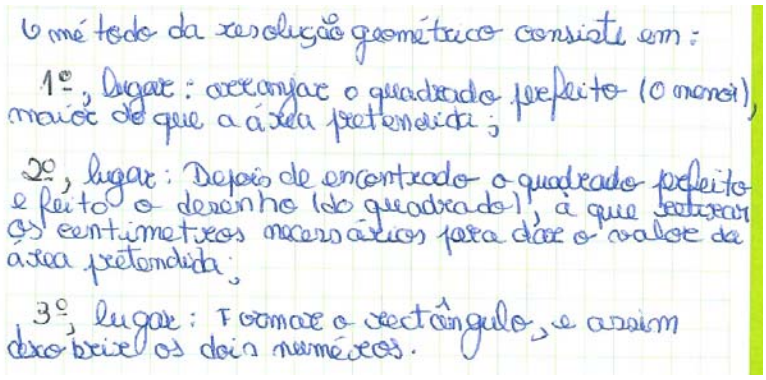

O método da resolução geométrico consiste em:
1º, lugar: arranjar o quadrado perfeito (o menor) maior do que a área pretendida;
2º, lugar: Depois de encontrado o quadrado perfeito e feito o desenho (do quadrado), á que retirar os centimetros necessários para dar o valor da área pretendida;
3º, lugar: Formar o rectângulo, e assim descobrir os dois números.

Figura 7.6.63. Explicação do método presente na resolução do problema da parte III da tarefa por parte do grupo G3.

Este grupo apresenta ainda um esquema global que envolve os diferentes passos geométricos presentes no problema proposto no início desta tarefa:

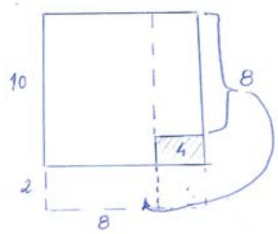


Figura 7.6.64. Representação esquemática do método presente na resolução do problema da parte III da tarefa por parte do grupo G3.

Observe-se agora a explicação dada pelo grupo G2 sobre o processo geométrico presente na parte V:

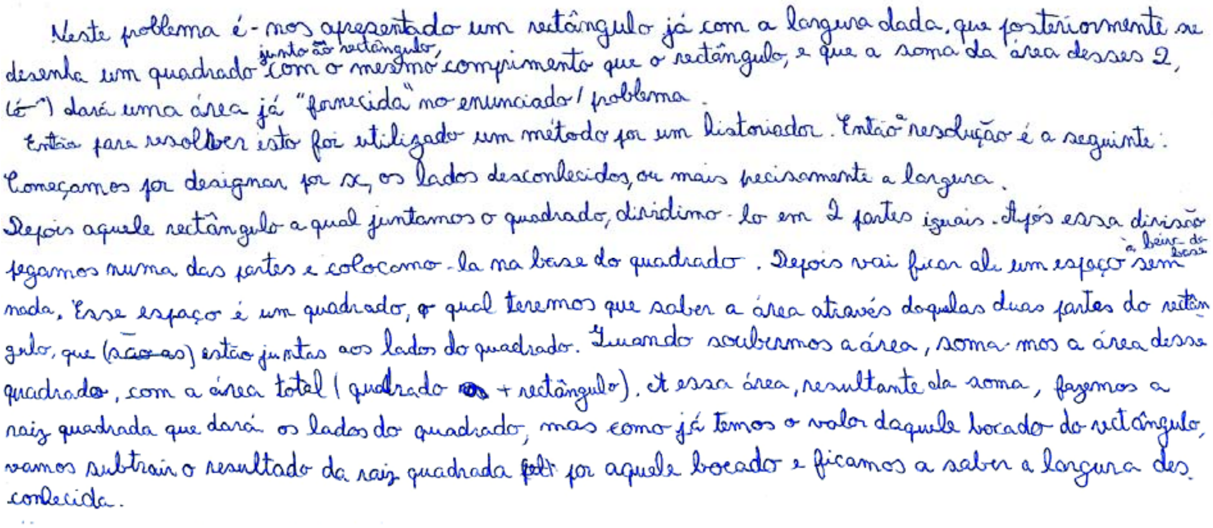

Neste problema é-nos apresentado um rectângulo já com a largura dada, que posteriormente se desenha um quadrado junto ao rectângulo, com o mesmo comprimento que o rectângulo, e que a soma da área desses 2, (o ⁻) dará uma área já "fornecida" no enunciado / problema.
Então para resolver isto foi utilizado um método por um historiador. Então a resolução é a seguinte:
Começamos por designar por x, os lados desconhecidos, ou mais precisamente a largura.
Depois aquele rectângulo a qual juntamos o quadrado, dividimo-lo em 2 partes iguais. Após essa divisão pegamos numa das partes e colocamo-la na base do quadrado. Depois vai ficar ali um espaço à beira da base sem nada. Esse espaço é um quadrado, o qual teremos que saber a área através daquelas duas partes do rectângulo, que ~~(são as)~~ estão juntas aos lados do quadrado. Quando soubermos a área, soma-mos a área desse quadrado, com a área total (quadrado + rectângulo). A essa área, resultante da soma, fazemos a raiz quadrada que dará os lados do quadrado, mas como já temos o valor daquele bocado do rectângulo, vamos subtrair o resultado da raiz quadrada ~~feit~~ por aquele bocado e ficamos a saber a largura desconhecida.

Figura 7.6.65. Explicação do método presente na resolução do problema da parte V da tarefa por parte do grupo G2.

Ao nível da aprendizagem da matemática é possível observar a comparação entre as diferentes estratégias de resolução. No final parte II da tarefa, foi pedido aos alunos que comparassem a resolução apresentada por Diofanto e a efetuada por eles na parte I. De um modo geral, todos os grupos referem que o processo utilizado por Diofanto não implica o aparecimento de uma equação do 2.° grau completa, o que se torna mais fácil resolver o problema de forma algébrica.

No que diz respeito às diferenças entre os métodos de geometria intuitiva presentes nas partes III e V da tarefa, todos os grupos referiram que a diferença entre os dois métodos estava no facto de no primeiro método ter sido preciso retirar um quadrado, enquanto que no segundo método a determinação do lado procurado resultou do facto de se ter acrescentado um quadrado. Por exemplo, os grupos G2 e G3 referem, respetivamente:

A diferensa entre os dois métodos é: no primeiro retira-se um quadrado pequeno ao quadrado maior, que é a diferensa entre a área do quadrado maior pela área da figura. E no segundo coloca-se um quadrado menor, depois de algumas alterações à figura original.

Figura 7.6.66. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G2.

A principal diferenca entre os dois métodos é que num retiramos o quadrado e no outro acrescentamos um quadrado.
No método de retirarmos o quadrado temos que trabalhar com as raízes quadradas e subtracções à área do quadrado.
No método de acrescentar-mos o quadrado trabalhamos com a divisão e a soma ás áreas do quadrado e rectângulo.

Figura 7.6.67. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G3.

No entanto, o grupo G1 observa que a diferença entre estes dois métodos também estava no enunciado dos problemas, uma vez que no problema resolvido pelo primeiro método eram dados a área e o semiperímetro, enquanto que no problema resolvido pelo segundo método foi dada a área.

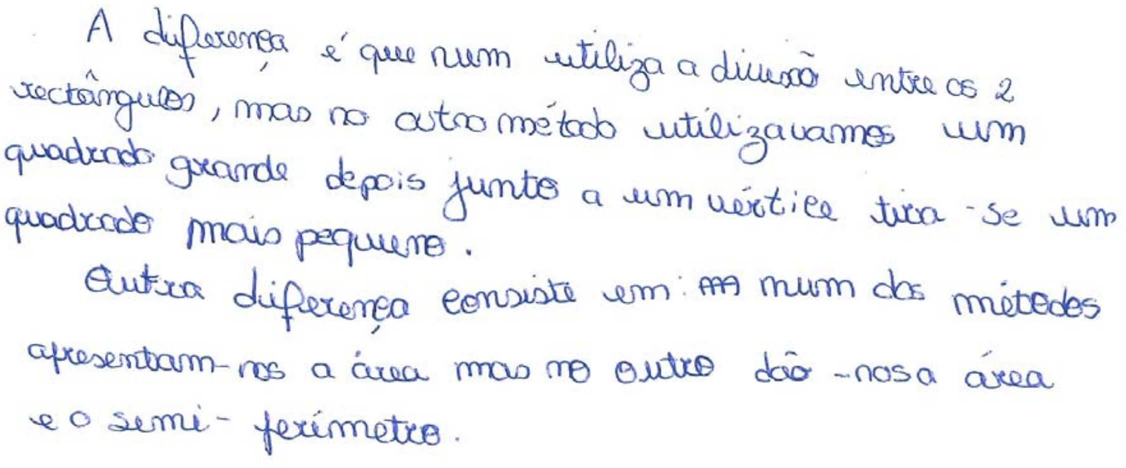

A diferença é que num utiliza a divisão entre os 2 rectângulos, mas no outro método utilizavamos um quadrado grande depois junto a um vértice tira-se um quadrado mais pequeno.
Outra diferença consiste em: num dos métodos apresentam-nos a área mas no outro dão-nos a área e o semi-perímetro.

Figura 7.6.68. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G1.

Ao nível da *predisposição perante a matemática* é possível observar interesse e entusiamo pela resolução das diferentes tarefas propostas. O grupo G4 refere que não só gostou de analisar a resolução de Diofanto, como resolver de forma geométrica uma equação do 2.º grau.

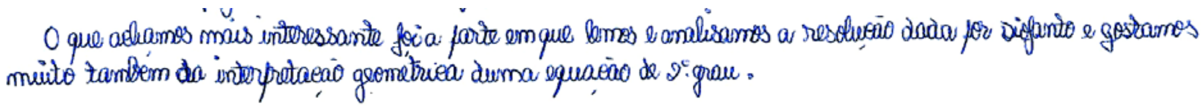

O que achamos mais interessante foi a parte em que lemos e analisamos a resolução dada por Diofanto e gostamos muito também da interpretação geométrica duma equação de 2º grau.

Figura 7.6.69. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G4 (continuação).

O grupo G2 também expressa o seu interesse por resolver geometricamente equações do 2.° grau:

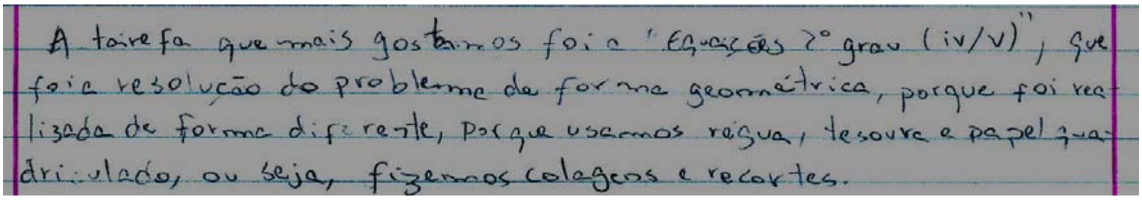

A tarefa que mais gostamos foi a "Equações 2º grau (iv/v)", que foi a resolução do problema de forma geométrica, porque foi realizada de forma diferente, porque usamos regua, tesoura e papel quadriculado, ou seja, fizemos colagens e recortes.

Figura 7.6.70. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G2 (continuação).

Contudo, este grupo expressa ainda o seu entusiasmo quando obtiveram, no final de todas as tarefas, a fórmula resolvente.

Também gostamos da última tarefa, porque foi quando vimos o resultado das tarefas todas, a formula usada para resolver equações de 2º grau.

Figura 7.6.71. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G2 (continuação).

Ao nível da *apreciação da matemática como esforço cultural*, é possível observar que os alunos manifestam uma perceção do desenvolvimento da matemática. O grupo G4 refere que

Ao ser-nos dado as várias folhas com os vários métodos também aprendemos como os grandes matemáticos da Antiguidade resolviam estes problemas.

Figura 7.6.72. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G4 (continuação).

Os alunos também apontam a evolução de técnicas para resolver problemas. O grupo G1 destaca o uso de várias técnicas para resolver a mesma situação, ou seja, no presente caso para resolver uma mesma equação.

De facto, torna-se curioso o facto de como o mundo matemático tantas voltas e meias-voltas dá. Isto é, quero eu dizer que são várias as "técnicas" usadas para a mesma situação, mas esta de diferentes processos, entre elas, as fórmulas.
Foram, as fórmulas, que nos preencheram a aula de matemática, as quais colectivamente conseguimos decifrar, tendo em conta a realização de equações de 2º grau.

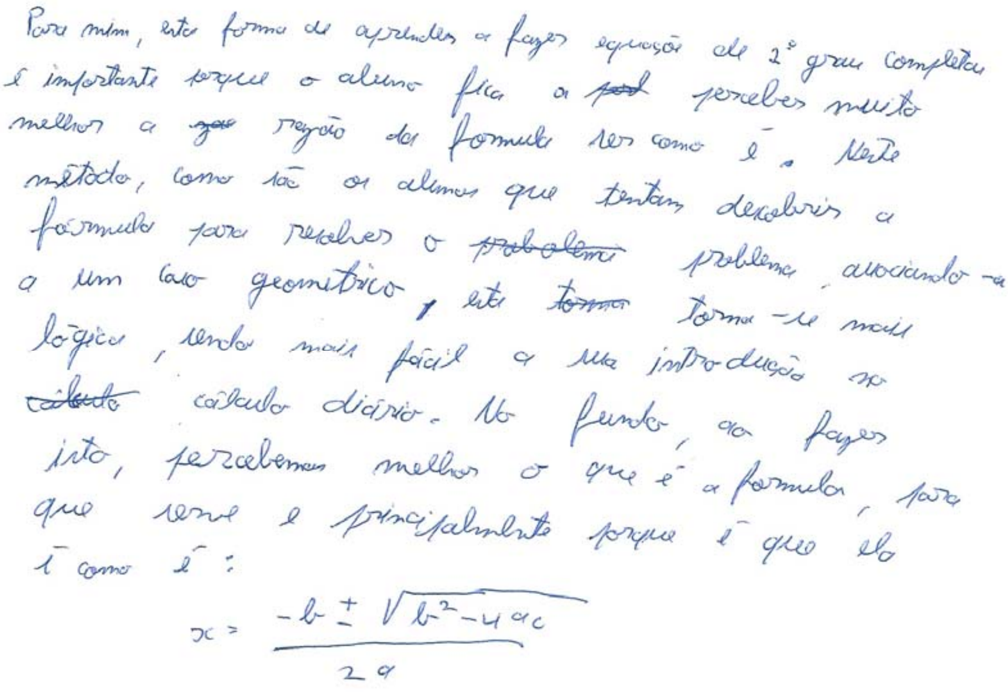
$$x^2+bx=c \rightarrow x=\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}$$

$$ax^2+bx+c=0 \rightarrow x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

foram estas as duas expressões Resolventes a que chegamos!

Figura 7.6.73. Excerto da avaliação final realizada pelo grupo G1 (continuação).

Ao nível do *desenvolvimento da visão da natureza da matemática*, os alunos realçam a importância de conhecerem o porquê de uma fórmula. O Rui do grupo G4 refere que:



Para mim, esta forma de aprender a fazer equação de 2º grau completa é importante porque o aluno fica a ~~pod~~ perceber muito melhor a ~~ge~~ razão da formula ser como é. Neste método, como são os alunos que tentam descobrir a formula para resolver o ~~problema~~ problema associando-a a um caso geométrico, esta ~~torna~~ torna-se mais lógica, sendo mais fácil a sua introdução no ~~calculo~~ cálculo diário. No fundo, ao fazer isto, percebemos melhor o que é a formula, para que serve e principalmente porque é que ela é como é:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Figura 7.6.74. Excerto da avaliação final realizada pelo Rui, grupo G4.

Para este aluno, este tipo de atividade, proporcionada através da análise de questões, problemas e respostas históricas (fornecidas através de uma interpretação geométrica em termos de geometria intuitiva, realizada por Jens Høyrup, a partir de uma análise filológica do contexto matemático da Antiga Babilónia) permitiu-lhe uma forma diferente de olhar a matemática e a própria natureza da atividade matemática, tanto ao nível do conteúdo como ao nível da forma. Ao nível do conteúdo, os alunos poderam observar que não só são legítimos como também fazem parte integrante de fazer matemática, abordagens alternativas de resolver problemas. Ao nível da forma, a integração da história da matemática permitiu que os alunos entendessem a própria linguagem da matemática de um determinado período, destacando o papel visual, intuitivo e as abordagens não formais surgidas no passado.

7.7. Leitura cruzada das tarefas aplicadas

Este subcapítulo apresenta uma análise cruzada das diferentes tarefas, do âmbito da história da matemática, aplicadas ao longo da investigação. A partir do cruzamento dos diferentes tipos de argumentos produzidos pelos alunos na realização das tarefas, das formas e estruturas de argumentação presentes nessas mesmas realizações, das dificuldades manifestadas pelos alunos e da reflexão crítica final realizada por estes é possível encontrar aspetos que de uma forma pertinente contribuem para responder às questões colocadas neste trabalho.

7.7.1. Tipo de argumentos produzidos

Ao longo da resolução das tarefas propostas, os alunos produziram variados argumentos, sendo possível categorizar os mesmos de acordo com o modelo proposto por Reid e Knipping (2010).

Na procura das soluções dos problemas propostos os alunos recorreram a argumentos empíricos, em que os exemplos apresentados são específicos não representando a classe na generalidade, a argumentos genéricos, em que os exemplos específicos são representativos, bem como a argumentos simbólicos, em que se recorre a palavras e símbolos para proceder às representações. No entanto, é possível identificar argumentos que permanecem na fronteira dessas categorias.

Uma análise cruzada a todas as tarefas permite verificar que enquanto nos argumentos empíricos é possível encontrar uma variedade de argumentos, como simples enumeração, esquema percetual, experiências cruciais, identificação de um padrão; no caso genérico os argumentos apenas se centram em exemplos pictóricos. Também a presença argumentos geométricos permite realçar não só a temática das tarefas, mas destacar o papel que a figura toma no suporte da construção do argumento geométrico, nomeadamente na manutenção do mecanismo lógico do discurso. Contudo, nas diferentes tarefas é possível identificar argumentos entre o simbólico e o formal de caráter manipulativo. A tabela 7.7.1. permite uma visão global dos argumentos presentes nas diferentes tarefas propostas.

Tabela 7.7.1. Visão global dos argumentos presentes nas diferentes tarefas propostas

Tarefa	empíricos	entre o empírico e o genérico	genéricos	entre o genérico e o simbólico	simbólicos	entre o simbólico e o formal
	Tipo de argumentos					
Casos notáveis			pictóricos	argumentos geométricos		manipulativa
Construções geométricas			pictóricos	argumentos geométricos		manipulativa
Teorema de Pitágoras	esquema percetual		pictóricos	argumentos geométricos		manipulativa
Equações	simples enumeração	processo de exaustão			narrativo/ simbólico	manipulativa
Duas torres, duas aves e uma fonte	experiência crucial	contraexemplo				
Equações do 2.° grau	simples enumeração; identificação de um padrão; esquema percetual	processo de exaustão; contraexemplo	pictóricos	argumentos geométricos	símbolos como representação	manipulativa

7.7.2. Formas de argumentação presentes nos raciocínios argumentativos expressos pelos alunos durante a realização de tarefas do âmbito da história da matemática

A partir da análise dos diferentes discursos argumentativos produzidos pelos alunos na realização das tarefas propostas, observam-se não só formas simples de argumentação, em que os elementos funcionais identificados correspondem aos elementos constituintes do chamado “coração da argumentação”, mas também formas mais complexas de argumentação, em que os elementos funcionais presentes contemplam, nomeadamente, refutações.

No que diz respeito às formas simples de argumentação presentes nos diversos discursos argumentativos produzidos na realização das diferentes tarefas, observa-se que estes não se reduzem apenas a interações discursivas em que simplesmente estão presentes um dado, uma garantia, uma conclusão e até um fundamento. É ainda possível identificar argumentações que apresentam argumentos paralelos para a mesma conclusão e também se pode observar, na resolução de todas as tarefas, que na maioria dos discursos argumentativos produzidos, as conclusões constituem novos dados nos passos argumentativos seguintes, ou seja, uma afirmação que foi estabelecida como conclusão funciona como dado, isto é, um facto verdadeiro no próximo passo argumentativo. No entanto, é possível observar que muitos dos argumentos apresentados não são desenvolvidos sequencialmente, ou seja, de forma dedutiva, durante a argumentação. É ainda possível encontrar situações, mesmo que pontuais, em que, por vezes, o raciocínio argumentativo se move inversamente na estrutura lógica do discurso, ou seja, existe a necessidade de voltar atrás no raciocínio reforçando as justificações apresentadas. Ainda nas formas simples de argumentação é de observar a existência de passos de inferência em que as garantias ou fundamentos não se encontram presentes de um modo explícito.

Em relação às formas complexas de argumentação presentes nos discursos argumentativos analisados é possível observar refutações a uma conclusão, conclusões obtidas à custa de uma refutação e refutações a um dado. Também é possível verificar que, nos discursos argumentativos produzidos, as conclusões constituem novos dados nos passos argumentativos seguintes e a existência de passos de inferência em que as garantias ou fundamentos não se encontram presentes de forma explícita. A tabela 7.7.2. permite uma visão global das formas de argumentação presentes na realização das diferentes tarefas propostas. No que diz respeito à análise local realizada na interpretação de raciocínios presentes em fontes primárias, é de observar que os alunos, a partir da leitura e interpretação das estratégias de resolução propostas por determinados matemáticos, procuram identificar os diferentes elementos constituintes do processo argumentativo, evidenciando quais as garantias e os fundamentos que permitem justificar esses passos de inferência.

Tabela 7.7.2. Visão global das formas de argumentação presentes nas diferentes tarefas propostas

Tarefa	*Formas de argumentação*
Casos notáveis	simples complexa: refutação de uma conclusão
Construções geométricas	simples complexa: refutação de uma conclusão
Teorema de Pitágoras	simples
Equações	simples complexa: conclusão obtida à custa de uma refutação
Duas torres, duas aves e uma fonte	simples complexa: conclusão obtida à custa de uma refutação; refutação de uma conclusão
Equações do 2.° grau	simples complexa: conclusão obtida à custa de uma refutação; refutação a uma conclusão

7.7.3. Tipo de estruturas de argumentação presentes na realização das tarefas do âmbito da história da matemática

A partir da análise local dos diferentes discursos argumentativos produzidos pelos alunos na realização das tarefas propostas, procedeu-se à seleção, da tarefa 7.1. à tarefa 7.5., dos discursos argumentativos mais representativos. Uma vez que a análise local das interações discursivas foi efetuada tanto ao nível da resolução dos problemas propostos, como ao nível da interpretação de raciocínios presentes em fontes primárias, optou-se por considerar estas duas situações na análise global realizada.

Ao nível da resolução das tarefas propostas e tendo em consideração os diferentes diálogos estabelecidos entre o professor e os diferentes grupos, bem como os registos escritos efetuados por esses mesmos grupos, tornou-se possível representar globalmente os diversos argumentos presentes nesses discursos argumentativos. Regista-se que uma grande parte das tarefas evidencia a maioria das características que caracterizam a estrutura-fonte, em particular porque apresentam no final da argumentação um afunilamento dos argumentos. Contudo, é de referir que é possível observar, na tarefa casos notáveis, uma característica típica da estrutura-reservatório, uma vez que, por vezes, o raciocínio argumentativo se move inversamente na estrutura lógica do discurso. Também é possível identificar uma estrutura de argumentação que evidencia a maioria das características que caracterizam a estrutura-espiral em particular, porque a conclusão é obtida de diferentes formas. A tabela 7.7.3. permite uma visão global das estruturas de argumentação presentes na realização das diferentes tarefas propostas.

Tabela 7.7.3. Visão global das estruturas de argumentação presentes nas diferentes tarefas propostas

Tarefa	*Estruturas de argumentação*	*Estruturas de argumentação (fontes primárias)*
Casos notáveis	Estrutura-fonte Estrutura-reservatório	
Construções geométricas	Estrutura-fonte	
Teorema de Pitágoras	Estrutura-espiral	
Equações	Estrutura-fonte	Estrutura-reservatório
Duas torres, duas aves e uma fonte		Estrutura-reservatório

Através de uma análise global efetuada aos discursos argumentativos selecionados, resultantes da interpretação de raciocínios presentes em fontes primárias, observa-se que na sua estrutura existem argumentos onde uma afirmação (conclusão) é deduzida a partir de uma outra afirmação (dado) através de conceitos matemáticos e fundamentos lógicos (garantias e fundamentos). Observa-se ainda que nestes discursos não se encontram presentes argumentos paralelos, nem é possível identificar a presença de refutações. É ainda de notar que nestas estruturas de argumentação é possível identificar que afirmações estabelecidas como conclusões, num próximo argumento, assumem a função de dados. Acresce referir que existem nos discursos argumentativos o desenvolvimento de passos de argumentação que têm explicitamente falta de garantias e dados. Nesse sentido, estas estruturas de argumentação não evidenciam a maioria das características que caracterizam a estrutura-fonte e a estrutura-espiral. De facto, as características presentes nestas argumentações evidenciam a maior parte das características da estrutura-reservatório, visto que a estrutura-recolha admite refutações na sua estrutura. Além disso, é possível observar que há afirmações que marcam a transição entre diferentes fases do discurso, sendo possível verificar que a conclusão intermédia obtida na primeira parte do discurso resulta de um dado presente no enunciado e só, posteriormente, acrescentam ao discurso o outro dado presente no enunciado e, portanto, obtêm a conclusão final. Ainda é possível observar que a conclusão intermédia obtida permite não só a passagem para o próximo passo argumentativo, como também permite inverter a estrutura lógica do raciocínio.

7.7.4. Dificuldades reveladas pelos alunos quando realizam tarefas do âmbito da história da matemática

Ao longo da realização das diversas tarefas propostas foi possível observar as diferentes dificuldades manifestadas pelos alunos. A análise efetuada ao trabalho desenvolvido por estes, através dos diálogos estabelecidos e dos registos escritos realizados, permite verificar que as dificuldades reveladas pelos alunos manifestam-se ao nível da *linguagem*, presente nas fontes históricas consideradas nas tarefas, ao nível da *compreensão matemática* de certos conceitos e procedimentos, durante a realização das mesmas, e ao nível da *produção de discursos argumentativos*.

Na maioria das tarefas os alunos revelam dificuldades ao nível da produção de discursos argumentativos, nomeadamente ao nível da apresentação de justificações, bem como ao nível da apresentação de dados ou garantias que sustentem determinadas conclusões. No âmbito da compreensão matemática, dependendo da temática da tarefa proposta, os alunos manifestaram dificuldades ao nível da interpretação geométrica e de conceitos e ao nível da linguagem algébrica e de procedimentos algébricos. Contudo, nas tarefas que envolvem a leitura, análise e interpretação de textos históricos, é possível verificar que as dificuldades dos alunos centraram-se ao nível da interpretação das estratégias de resolução propostas. Contudo, algumas dessas dificuldades também estão associadas à interpretação da linguagem usada nessas fontes primárias. A tabela

7.7.4. permite uma visão global das dificuldades manifestadas pelos alunos na realização das diferentes tarefas propostas.

Tabela 7.7.4. Visão global das dificuldades manifestadas pelos alunos na realização das diferentes tarefas propostas

Tarefa	*Linguagem*	*Compreensão matemática*	*Argumentação*
Casos notáveis	interpretação do texto de Euclides	interpretação geométrica e de conceitos	– iniciação de um processo de justificação; – apresentação de justificações; – apresentação que não legitimam um passo de argumentação por falta de dados
Construções geométricas		interpretação geométrica e de conceitos	
Teorema de Pitágoras		interpretação geométrica e de conceitos	apresentação de justificações
Equações	interpretação do texto de Pedro Nunes	– interpretação da resolução proposta por Pedro Nunes; – utilização da linguagem algébrica; – realização de procedimentos algébricos	apresentação de justificações
Duas torres, duas aves e uma fonte	– interpretação do enunciado da tarefa; – interpretação da resolução aritmética proposta por Fibonacci; – interpretação da resolução geométrica proposta por Fibonacci	– utilização da linguagem algébrica; – interpretação da resolução aritmética proposta por Fibonacci; – interpretação aritmética da resolução geométrica proposta por Fibonacci; – interpretação da resolução proposta por Gaspar Nicolas	apresentação de dados ou garantias que sustentem determinadas conclusões
Equações do 2.° grau	interpretação da resolução proposta por Diofanto	– realização de procedimentos algébricos; – interpretação geométrica	Apresentação de dados ou garantias que sustentem determinadas conclusões

7.7.5. Avaliação dos alunos sobre a realização de tarefas do âmbito da história da matemática

No final da realização das diferentes tarefas propostas, os alunos procederam a uma avaliação sobre o trabalho desenvolvido durante execução dessas mesmas tarefas. Nessa avaliação realizada, os alunos não só referem as suas dificuldades, mas também as suas impressões sobre o decorrer dos trabalhos, em particular sobre determinados aspetos relacionados com a história da matemática. Uma análise cruzada a todas as tarefas permite identificar as diversas razões, apontadas pelos alunos na sua avaliação.

Em todas as tarefas, os alunos realçam que a realização destas tarefas contribuíram para a sua aprendizagem matemática e influenciaram a sua predisposição perante esta disciplina. À exceção da tarefa dos casos notáveis, nas restantes tarefas os alunos apreciam a matemática como um esforço cultural e registam impressão ao nível do desenvolvimento da natureza da matemática e da sua atividade.

No que diz respeito á aprendizagem da matemática, os diferentes grupos de alunos referem que a realização destas tarefas não só contribuiu para a aprendizagem da matéria (conceitos, aplicação de conceitos e procedimentos, fórmulas), mas também proporcionou a comunicação e argumentação de raciocínios e ideias. Por exemplo, na tarefa teorema de Pitágoras, o Emanuel, grupo G2, refere que a resolução da tarefa lhe permitiu uma melhor compreensão do teorema de Pitágoras, tendo, por isso, um efeito significativo na sua aprendizagem (figura 7.3.29.). Também na tarefa duas torres, duas aves e uma fonte, os alunos referem a importância da discussão em grande grupo das tarefas, pois ajudou a esclarecer e a perceber melhor a tarefa proposta. É ainda de registar que nas tarefas casos notáveis, duas torres, duas aves e uma fonte e equações do 2.° grau, os alunos registam a existência de conexões entre duas áreas da matemática, a geometria e a álgebra. Ainda ao nível da aprendizagem da matemática, nas tarefas equações, duas torres, duas aves e uma fonte e equações do 2.° grau, os alunos são confrontados com as resoluções presentes em fontes primárias. Ao procederem à comparação entre as diferentes estratégias de resolução, têm não só oportunidade de entender a economia e eficácia dos processos algébricos modernos, como também desenvolver o processo de generalização e abstração matemático.

Em relação à predisposição perante a matemática é de realçar que em todas as tarefas os alunos destacam o interesse e o entusiasmo de resolvê-las. Por exemplo, na tarefa equações, os alunos realçam o desafio em interpretar a notação usada pelos matemáticos na resolução do problema e na tarefa equações do 2.° grau, o entusiasmo em resolver as equações do 2.° grau de forma geométrica e no final, de resolverem as diferentes partes da tarefa, obterem a fórmula resolvente. No entanto, o interesse dos alunos em realizar estas tarefas, por vezes vai mais longe do que um fator de motivação. Por exemplo, na tarefa casos notáveis, o Daniel, grupo G2, refere que o que gostou mais de fazer foi «(…) explicar as coisas que sabia (…)» (figura 7.1.27.) aos outros. Também o Emanuel do grupo G2 refere na tarefa construções geométricas que a melhor parte foi «(…) o debate sobre o exercício com a turma.» (figura 7.2.34.). Estas reflexões permitem verificar que o interesse e entusiasmo na realização destas tarefas estiveram associados à comunicação e argumentação de ideias e raciocínios. Isto destaca o papel que a integração da história da matemática pode ter em estimular o discurso em contexto de sala de aula, uma vez que cria a oportunidade para desenvolver a arte de discutir, justificar as suas próprias opiniões, apresentar o seu próprio raciocínio e interpretar o raciocínio dos outros.

No que diz respeito à apreciação da matemática como um esforço cultural, os alunos percecionam que o desenvolvimento da matemática é impulsionado não só por razões utilitárias, mas também por critérios estéticos, pela curiosidade intelectual, por propostas de desafio e pelo próprio prazer de caráter recreativo. Nas tarefas construções geométricas, duas torres, duas aves e uma fonte e equações do 2.° grau, os alunos realçam a evolução das técnicas presentes na resolução dos problemas propostos, uma vez que esse desenvolvimento foi impulsionado por critérios de curiosidade intelectual e propostas de desafio. Na tarefa duas torres, duas aves e uma fonte, os alunos destacam ainda o caráter humano da matemática, uma vez que a realização desta tarefa permitiu-lhes considerar a matemática como um processo de reflexão e aperfeiçoamento, uma vez que o mesmo problema tinha sido resolvido por diferentes matemáticos. No caso da tarefa teorema de Pitágoras, os alunos têm a oportunidade de observar diferentes tipos de abordagem de prova que se encontram presentes no interior de diferentes culturas.

Em relação ao desenvolvimento da visão e natureza da matemática, os alunos identificam os diferentes métodos e técnicas de resolução, o papel visual e intuitivo das abordagens não formais, as diferentes terminologias e linguagem simbólica e as diferentes abordagens alternativas. A tabela 7.7.5. permite uma visão global da avaliação dos alunos sobre as tarefas realizadas.

Tabela 7.7.5. Avaliação global dos alunos sobre as tarefas realizadas

Tarefa	*aprendizagem da matemática*	*predisposição perante a matemática*	*apreciação da matemática como um esforço cultural*	*desenvolvimento da visão e natureza da matemática*
Casos notáveis	– comunicação e argumentação de raciocínios matemáticos – aprendizagem da matéria – conexões	interesse e entusiasmo (oportunidade de partilhar com os outros as suas descobertas)		
Construções geométricas	– comunicação e argumentação de raciocínios matemáticos – aprendizagem da matéria	interesse e entusiasmo (em debater e procurar a solução conjunta)	perceção do desenvolvimento da matemática (evolução de diferentes técnicas)	– diferentes técnicas e métodos – papel visual e intuitivo das abordagens não formais
Teorema de Pitágoras	– comunicação e argumentação de raciocínios matemáticos – aprendizagem da matéria	interesse e entusiasmo (em obter a resposta final)	perceção do desenvolvimento da matemática (diferentes tipos de abordagem de prova)	– diferentes técnicas e métodos de prova – papel visual e intuitivo das abordagens não formais
Equações	– aprendizagem da matéria – comparação de diferentes estratégias	interesse e entusiasmo (desafio em interpretar a notação usada e as resoluções propostas)		linguagem simbólica
Duas torres, duas aves e uma fonte	– comunicação e argumentação de raciocínios matemáticos – aprendizagem da matéria – conexões – comparação de diferentes estratégias	interesse e entusiasmo (resolver o mesmo problema por diferentes processos; comparar diferentes estratégias de resolução; aplicação do teorema de Pitágoras em diferentes situações)	perceção do desenvolvimento da matemática (papel de diferentes matemáticos no desenvolvimento da matemática)	– papel das diferentes abordagens alternativas – terminologia – formular questões e testar conjeturas
Equações do 2.° grau	– comunicação e argumentação de raciocínios matemáticos – aprendizagem da matéria – conexões – comparação de diferentes estratégias	interesse e entusiasmo (em resolver geometricamente equações do 2.° grau)	perceção do desenvolvimento da matemática (evolução de diferentes técnicas)	papel das diferentes abordagens alternativas linguagem matemática presente em certos períodos

8. Conclusões

Este capítulo organiza-se em três secções. Na primeira, procura-se fazer uma síntese do trabalho desenvolvido, focando os objetivos, as questões de investigação e a metodologia que estruturaram a realização do trabalho; na segunda secção apresentam-se as conclusões do estudo; e, finalmente, na terceira secção, é apresentado um conjunto de sugestões para futuras investigações.

8.1. Síntese do estudo

O percurso da investigação descrito neste trabalho estruturou-se em torno de um estudo de caso realizado no contexto de uma turma através da aplicação de um conjunto de tarefas do âmbito da história da matemática, onde se exploraram e analisaram aspetos relacionados com a integração dessas mesmas tarefas como forma de promoção de uma cultura de argumentação matemática em contexto de sala de aula. Neste estudo, participaram alunos e respetivo professor de matemática de uma Escola Básica e Secundária, do Concelho de Penafiel. Os alunos, pertencentes a uma mesma turma, integraram esta investigação ao longo de dois anos letivos consecutivos, de forma a enquadrar o estudo no contexto educativo do oitavo e nono anos de escolaridade. Ao longo desta investigação analisou-se e categorizou-se o tipo de argumentos apresentados, procedeu-se a uma análise local e global dos diferentes argumentos produzidos, bem como à identificação das dificuldades evidenciadas pelos alunos na realização dessas mesmas tarefas, procedendo-se, por fim, a uma análise da avaliação efetuada por estes em relação ao trabalho desenvolvido.

A construção, seleção e escolha das tarefas propostas, tendo por base o seu enquadramento histórico, constituiu, assim, o contexto para o desenvolvimento desta investigação, cujos objetivos eram verificar não só de que modo a integração de tarefas do âmbito da história da matemática, em contexto de sala de aula, influencia a capacidade de argumentação dos alunos, mas também qual o desempenho e dificuldades destes, quando confrontados com esse tipo de tarefas; sendo ainda consideradas e analisadas, no âmbito deste estudo, as reações/opiniões dos alunos, em relação à realização dessas mesmas tarefas. Foram três as opções de fundo que conduziram à elaboração desta investigação: i) a opção de proceder a um enquadramento histórico das tarefas selecionadas; ii) a decisão de centrar o estudo no trabalho realizado pelos alunos; e iii) a opção de desenvolver uma metodologia que articulasse os diferentes instrumentos de recolha de dados, por forma a permitir a triangulação dos mesmos. Desta forma, tendo por base estas opções, as questões que articulam a conceção e a realização desta investigação são as seguintes:

1) Quais os tipos de argumentos produzidos pelos alunos durante a realização de tarefas do âmbito da história da matemática?

2) Quais as formas de argumentação presentes nas interações discursivas realizadas pelos alunos durante a execução de tarefas do âmbito da história da matemática?

3) Quais os tipos de estruturas de argumentação presentes nas argumentações produzidas pelos alunos durante a realização de tarefas do âmbito da história da matemática?

4) Quais as dificuldades reveladas pelos alunos quando realizam tarefas do âmbito da história da matemática?

5) Como é que os alunos avaliam a realização de tarefas do âmbito da história da matemática?

Tendo em conta os objetivos que este trabalho se propôs atingir, decidiu-se optar por uma investigação de caráter qualitativo de cunho interpretativo, uma vez que se pretende reconstituir a experiência vivida pelos participantes (Erikson, 1985). No âmbito da investigação qualitativa que se propôs realizar, optou-se ainda pelo estudo de caso, dado que se pretende analisar o modo como a integração de tarefas do âmbito da história da matemática, em contexto de sala de aula, influencia a capacidade de raciocínio e argumentação dos alunos, procurando, assim, conhecer a realidade tal como ela é vista pelos próprios participantes (Ponte, 2006). Na recolha de dados existiu a preocupação de reunir um conjunto de informações válidas e diversificadas, o que levou à utilização de diferentes instrumentos de recolha, nomeadamente observação de aulas (resolução, por parte dos alunos, das diferentes tarefas e apresentação das mesmas), documentos (produções escritas realizadas pelos alunos) e notas de campo do próprio investigador. A análise de dados seguiu o modelo interativo (Huberman & Miles, 1994), de modo a que a recolha e a análise caminhassem em sintonia, por forma a que se influenciassem mutuamente.

8.2. Conclusões do estudo

Nesta secção são apresentadas as conclusões deste trabalho organizadas de acordo com as questões de investigação originalmente enunciadas. Em cada uma delas são sumariados alguns dos aspetos mais relevantes referidos na análise das tarefas realizadas e na análise cruzada efetuada.

8.2.1. Tipo de argumentos produzidos pelos alunos na realização de tarefas do âmbito da história da matemática

A classificação de argumentos proposta por Reid e Knipping (2010, p.131), exposta na tabela 4.2., possibilita um entendimento sobre a diversidade de argumentos que ocorrem durante a realização de uma tarefa. Ao longo desta investigação, constatou-se que, durante a realização das diferentes tarefas propostas, foram diversos os tipos de argumentos produzidos pelos variados grupos de alunos. A partir da análise efetuada, em cada tarefa, ao trabalho realizado pelos diferentes grupos verifica-se que são os argumentos empíricos, genéricos, entre o genérico e o simbólico e entre o simbólico e o formal que ocorrem com maior frequência. Contudo, é de notar que a produção de argumentos não só está dependente da tarefa proposta, mas também do tema na qual ela se insere. Isto é, existe uma ligeira diferença entre a incidência de determinado tipo de argumentos caso, a tarefa seja do âmbito da geometria, ou do âmbito da álgebra, ou envolve na sua realização estas duas temáticas. Exemplificando, nas tarefas propostas de índole geométrica, constata-se que há uma predominância de argumentos genéricos e de argumentos entre o genérico e o simbólico. Os argumentos genéricos são construídos com recurso a exemplos genéricos pictóricos, isto é, argumentos em que a figura toma um papel relevante, permitindo visualizar o geral no específico, realçando, assim, o caráter visual do argumento. No caso dos argumentos situados entre o genérico e o simbólico, os argumentos produzidos são aplicáveis não apenas à figura específica, desenhada por cada grupo, mas de forma genérica a todas as construídas. Tal como nos argumentos construídos a partir de exemplos genéricos pictóricos, nestes argumentos a figura toma um papel relevante na construção do argumento geométrico, contudo, a manutenção do mecanismo lógico do discurso é suportado não só pela construção geométrica, mas também por uma narrativa (podendo ser ou não de caráter simbólico) que acompanha a argumentação geométrica construída. Ou seja, a produção de um argumento é acompanhada não só pelas premissas presentes no enunciado do problema, mas também pela perceção das características presentes nas figuras dadas ou construídas (Herbst, 2004). No caso das tarefas de índole algébrica, observa-se que há uma incidência de argumentos empíricos e de argumentos entre o empírico e o genérico. Nos argumentos empíricos é possível identificar argumentos produzidos a partir de uma simples enumeração, argumentos que resultam da identificação de um determinado padrão, argumentos construídos a partir da generalização de uma condição da solução de um problema, designado por experiências cruciais, e argumentos baseados na construção de esquemas percetuais. De facto, nestas tarefas a resolução inicial da maioria dos grupos é de cariz aritmético, através do processo de tentativa e erro. Nos argumentos entre o empírico e o genérico, observa-se que a construção de argumentos resulta, também por tentativa e erro, de um processo exaustivo, onde se tentam todas as possibilidades, surgindo ainda situações em que os argumentos surgem a partir da apresentação de um contraexemplo, como refutação a uma determinada afirmação. No entanto, em quase todas as tarefas é possível identificar a produção, por parte dos alunos, de argumentos entre o simbólico e o formal, situação em que os símbolos utilizados representam algo concreto, como um número desconhecido, a expressão de uma área, ou não representam algo em concreto, surgindo como resultado de um cálculo, nomeadamente da manipulação de expressões algébricas.

A partir da análise do trabalho realizado pelos alunos nas diferentes tarefas propostas é, também, possível verificar que na resolução de uma mesma questão, de uma determinada tarefa, os alunos recorrem a diferentes tipos de argumentos, o que evidencia, por parte dos vários grupos, não só o papel dos exemplos utilizados e o grau de abstração dos objetos neles referenciados, mas também o grau de formalidade e o tipo de raciocínio empregue. Por exemplo, na primeira tarefa proposta – casos notáveis da multiplicação (quadrado de um binómio) – embora todos os alunos traduzam a área do quadrado de lado $a + b$ através da expressão algébrica $(a + b) \times (a + b)$, a obtenção da outra expressão algébrica, $a^2 + 2ab + b^2$, que permite traduzir a área desse mesmo quadrado, foi obtida não só através de argumentos genéricos, em que o grupo G1 procede à divisão da figura em quatro quadriláteros, mas também por argumentos entre o simbólico e o formal, em que o grupo G2 resolve a questão através de uma manipulação algébrica da expressão. Um outro exemplo que se pode destacar, é o que está presente na resolução da tarefa equações. O problema inicial proposto (parte I da tarefa) foi resolvido, pelo grupo G1, com recurso a argumentos empíricos, simples enumeração, envolveu a utilização, por parte do grupo G3, de argumentos entre o empírico e o genérico, processo de exaustão e a construção de argumentos simbólicos/ e entre simbólico e o formal, por parte do grupo G2.

Através da análise deste conjunto de tarefas resolvidas é ainda possível registar que o mesmo grupo de alunos resolve o mesmo problema com recurso a diferentes argumentos o que permite realçar a importância e a confiança que os alunos têm por argumentos de índole simbólica. Por exemplo, na parte I da última tarefa proposta – equações do 2.° grau – os argumentos iniciais apresentados pelo grupo G2, para resolver o problema, são de caráter simbólico, uma vez que este grupo estabelece um sistema de equações. Contudo, ao proceder ao método de substituição surge uma equação do 2.° grau que referem não saber resolver. Esse grupo de alunos resolve, assim, o problema recorrendo a argumentos entre o empírico e o genérico, em que a procura da solução sugere um processo de exaustão.

O trabalho realizado pelos alunos na resolução destas tarefas permite ainda identificar a presença de diferentes tipos de argumentos associados às refutações produzidas. Como mencionado, é possível encontrar contraexemplos, argumento entre o empírico e o genérico. Este tipo de argumento surge na tarefa duas torres, duas aves e uma fonte, quando o grupo G1 apresenta um contraexemplo que refuta a posição central da fonte. Contudo, os alunos não se limitam apenas a construir contraexemplos para refutar uma afirmação, mas também trabalham sobre as próprias soluções ou conjeturas. Nesse sentido, é possível encontrar argumentos genéricos, argumentos entre o genérico e o simbólico, e argumentos entre o simbólico e o formal. Por exemplo, na tarefa construções geométricas, a solução apresentada pelo grupo G4 para resolver a parte I da tarefa, o quadrado procurado ser construído à custa da soma dos lados dos dois quadrado dados, suscitou o aparecimento de diversas refutações por parte dos outros grupos. O grupo G1 apresentou argumentos genéricos, baseando-se na figura sugerida pelo grupo G4, e os grupos G2 e G3 apresentaram argumentos geométricos, argumentos entre o genérico e o simbólico, procedendo a uma análise da figura, traduzindo de forma algébrica a área pretendida e a área obtida a partir da construção da figura sugerida pelo grupo G4. Contudo, o grupo G3 procede ainda à manipulação algébrica das expressões obtidas, o que evidencia o recurso a argumentos entre o simbólico e o formal.

O facto de na realização das várias tarefas propostas, e até mesmo na resolução de uma mesma questão, ser possível identificar diversos tipos de argumentos, nomeadamente argumentos entre o simbólico e o formal, e o facto de para a mesma questão o mesmo grupo de alunos resolver o problema com recurso a diferentes tipo de argumentos, procurando, em particular, apresentar argumentos entre o simbólico e o formal, sugere que os alunos reconhecem a importância de justificar e fundamentar os seus raciocínios de uma forma mais genérica e formal, distinguindo, assim, entre exemplos e argumentos matemáticos gerais para toda uma classe de objetos. Embora os alunos percebam que na resolução de um problema é possível utilizar diferentes tipos de estratégia de resolução, estes reconhecem que há formas de resolução menos exaustivas e, portanto, menos longas que permitem obter a solução do problema de forma fundamentada e com um caráter mais abstrato e geral. Realizar atividades matemáticas com autonomia, formulando e testando conjeturas, sendo capazes de as analisar e sustentar, permite aos alunos sentirem-se mais envolvidos na elaboração do seu conhecimento matemático e conseguir uma apropriação mais profunda desse mesmo conhecimento. A partir dos argumentos produzidos pelos alunos na realização destas tarefas constata-se que estes revelam um reconhecimento e confiança na vantagem da utilização da linguagem simbólica e o formal, não descurando, no entanto, o interesse manifestado pelos mesmos em fundamentar, quando necessário, os seus argumentos de forma geométrica. No entanto, o raciocínio matemático envolve a construção de cadeias argumentativas que começam por uma simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem, progressivamente, para argumentações mais complexas recorrendo à linguagem da geometria e da álgebra. Nesse sentido, o interesse manifestado pelos alunos em conseguir produzir argumentos entre o simbólico e formal permite um certo paralelismo com a investigação desenvolvida por Galotti, Komatsu e Voelz (1997) onde é sugerido que mesmo os alunos mais novos reconhecem a diferença entre argumentos baseados num raciocínio indutivo e os baseados no raciocínio dedutivo, mostrando confiar mais nos argumentos dedutivos, uma vez que vão mais longe do que observar, conjeturar, testar e até mesmo generalizar. Embora o raciocínio matemático envolva a formulação e teste de conjeturas, numa mais fase avançada envolve a sua demonstração. Os alunos devem, portanto, compreender, a diferença entre um caso particular, uma generalização e um contraexemplo. A produção de diferentes tipos de argumentos, nomeadamente os que pertencem às categorias de argumentos entre o genérico e o simbólico, simbólicos, entre o simbólico e os formais e formais, permitem aos alunos a abstração, a formalização, a argumentação lógica e o raciocínio demonstrativo e assumem um lugar privilegiado na resolução de problemas, em particular na fase final na organização, sistematização e apresentação dos resultados.

8.2.2. Formas de argumentação presentes nos raciocínios argumentativos expressos pelos alunos durante a realização de tarefas do âmbito da história da matemática

O modelo de argumentação proposto por Toulmin permite proceder a uma análise local dos argumentos presentes nas argumentações em matemática. De facto, a estrutura ternária de um argumento "dado/garantia/conclusão" presente no esqueleto padrão do seu modelo, o designado "coração da argumentação", permite a Toulmin (2008) fornecer os elementos necessários para que se possa descrever não só as funções que desempenham as diferentes afirmações num discurso argumentativo, mas também proceder a uma análise da própria estrutura da argumentação. Contudo, e uma vez que o modelo de argumentação proposto por Toulmin pretende captar a "forma lógica" de um discurso racional, este esquema elementar, forma simples, pode não ser suficiente para analisar determinados discursos argumentativos. Desse modo, Toulmin (2008) acrescenta três etapas auxiliares de análise do discurso argumentativo – os qualificadores modais, as condições de refutação e o fundamento – que tornam o esquema proposto por Toulmin mais complexo, nomeadamente se exigem a presença de indicadores de força de um argumento (qualificadores modais) e/ou condições de exceção (condições de refutação).

A partir da análise dos diferentes discursos argumentativos produzidos pelos alunos na realização das tarefas propostas, observam-se não só formas simples de argumentação, em que os elementos funcionais identificados correspondem aos elementos constituintes do chamado "coração da argumentação", mas também formas mais complexas de argumentação, em que os elementos funcionais presentes contemplam, nomeadamente, refutações. Assim, a partir do modelo de argumentação proposto por Toulmin, aplicado à análise dos diferentes diálogos estabelecidos entre os alunos e entre os diferentes grupos e o professor e aos registos escritos produzidos por esses mesmos grupos, foi possível reconstruir as diferentes argumentações presentes na realização das tarefas propostas. Contudo, é de observar que a reconstrução desses discursos argumentativos exigiu que se focasse em primeiro lugar a atenção nas conclusões, o que se revelou eficaz na reconstrução das argumentações. De facto, é importante que se entenda primeiro qual é a afirmação que os alunos pretendem justificar, o que permite a esta afirmação ganhar o estatuto ou função de conclusão, para, depois, procurar estabelecer as relações entre esta e as restantes afirmações produzidas, o que possibilita classificar estas últimas como dados, garantias, fundamentos ou refutações.

No que diz respeito às formas simples de argumentação presentes nos diversos discursos argumentativos analisados é de observar que não se reduzem apenas a discursos em que simplesmente estão presentes um dado, uma garantia, uma conclusão e até um fundamento como é possível registar no raciocínio do grupo G1 (CA-5) na resolução da parte I da tarefa das construções geométricas (figura 7.2.8.). De facto, são possíveis encontrar nos diversos discursos argumentativos produzidos variadas situações em que apesar de os elementos constituintes desses discursos terem a função de dados, garantias, fundamentos ou conclusões, não aparecem relacionados numa simples cadeia, mas em cadeias mais extensas em que surgem agregados a vários dados, a outras garantias ou fundamentos e até a outras conclusões. Um exemplo de uma forma simples mais extensa pode ser observado na figura 7.1.10. em que se procede à representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio do grupo G2 na fase final do diálogo estabelecido entre o professor e este grupo de alunos (CA-4 e CA-5) na realização da questão 1 da parte I da tarefa casos notáveis da multiplicação. É ainda de registar que nas formas simples de argumentação presentes na realização das tarefas é possível identificar argumentações que apresentam argumentos paralelos para a mesma conclusão, o que pode ser exemplificado através da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio do grupo G2 (CA-3) na realização da questão 1 da parte I da tarefa teorema de Pitágoras (figuras 7.3.11., 7.3.13. e 7.3.14.). Também se pode observar que na maioria dos discursos argumentativos produzidos, as conclusões constituem novos dados nos passos argumentativos seguintes, ou seja, uma afirmação que foi estabelecida como conclusão funciona como dado, isto é, um facto verdadeiro no próximo passo argumentativo. Por exemplo, os esquemas presentes nas figuras supracitadas, referentes à tarefa teorema de Pitágoras, permitem constatar esse facto. Contudo, essa situação ocorre na resolução de todas as tarefas, o que denota uma estreita relação entre as diferentes afirmações que vão sendo apresentadas pelos alunos durante as diferentes argumentações produzidas. No entanto, a partir da análise dos diferentes discursos argumentativos produzidas pelos alunos é possível observar que muitos dos argumentos apresentados não são desenvolvidos sequencialmente, ou seja, de forma dedutiva, durante a argumentação. O facto da argumentação envolver a partilha de ideias e a troca de opiniões entre os alunos e o professor, e algumas das tarefas envolverem a construção e análise de figuras geométricas permitem o aparecimento não só de argumentos paralelos, como de novos dados ou conclusões que vão sendo inseridos na cadeia argumentativa. Por exemplo, a representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio do grupo G2 (CA-4 e CA-5) na fase final do diálogo estabelecido entre o professor e este grupo de alunos na resolução da questão 1 da parte I da tarefa casos notáveis da multiplicação, permite visualizar o referido. No entanto, também é possível encontrar situações, mesmo que pontuais, em que, por vezes, o raciocínio argumentativo se move inversamente na estrutura lógica do discurso, ou seja, existe a necessidade de voltar atrás no raciocínio reforçando as justificações apresentadas. Por exemplo, na resolução da questão 1 da parte I da tarefa dos casos notáveis é possível verificar que no raciocínio inicial dos alunos do grupo G2 (CA-1) são referidas duas garantias que permitem concluir que o quadrilátero [CGKB] é um quadrado, contudo, os alunos não apresentam quaisquer dados (diferentes do dado presente no enunciado) que permitam estabelecer o passo "dado → conclusão". No entanto, mais à frente no seu raciocínio (CA-4), os alunos referem que «o triângulo retângulo é isósceles» (§87), o que permite concluir o pretendido; contudo, necessitam de encontrar dados que permitam sustentar essa afirmação, o que inverte o movimento do discurso lógico. Nas formas simples de argumentação observa-se também a existência de passos de inferência em que as garantias ou fundamentos não se encontram presentes de um modo explícito. Essa situação tanto pode ser verificada na resolução de tarefas de índole algébrica como é o caso da resolução do problema proposto na tarefa das equações, que pode ser ilustrado a partir da representação esquemática da reconstrução funcional do argumento presente no raciocínio do grupo G2 (CA-4) na parte final do diálogo (figura 7.4.10.). Ou em tarefas de índole geométrica, como é possível observar nas representações esquemáticas da reconstrução funcional dos argumentos presentes no raciocínio do grupo G2 (CA-1 e CA-2) na resolução da questão 1 da parte I da tarefa teorema de Pitágoras (figuras 7.3.11 e 7.3.13).

Em relação às formas complexas de argumentação presentes nos discursos argumentativos analisados é possível observar refutações a uma conclusão, conclusões obtidas à custa de uma refutação e refutações a um dado, formas essas de argumentação consideradas pelo estudo desenvolvido por Reid, Knipping e Crosby (2008). Exemplos de discursos argumentativos em que se registam refutações a uma conclusão podem ser observados na proposta de resolução do grupo G4 (CA'-2) na parte II da tarefa construções geométricas (figura 7.2.15.) e na resolução da parte IV do grupo G2 da tarefa equações do 2.° grau (figura 7.6.33.). Quanto aos discursos argumentativos em que as conclusões são obtidas à custa de uma refutação, estas situações podem ser observadas, por exemplo, na resolução algébrica do grupo G2 (CA-1) do problema proposto na tarefa equações (figura 7.4.7.) e na resolução efetuada pelo grupo G1 do problema proposto na tarefa duas torres, duas aves e uma fonte (figura 7.5.6.). No que diz respeito a refutações a um dado, este ocorre na resolução da parte IV da tarefa equações do 2.° grau, realizada pelo grupo G1 (figura 7.6.32.). No que diz respeito às refutações existentes nos discursos argumentativos produzidos pelos alunos na realização das tarefas propostas, é possível observar que estas surgem, por vezes, associadas às próprias resoluções dos alunos, por exemplo, o grupo G4 (CA'-1) na resolução da parte II da tarefa construções geométricas apresenta uma solução ao problema proposto (figura 7.2.14) que posteriormente (CA'-2) refutam (figura 7.2.15.). Contudo, algumas vezes estas surgem como resultado de uma refutação a uma afirmação proposta por outros. Por exemplo, nesta tarefa das construções geométricas, mas na parte I, o grupo G4 (CA-1) apresenta uma proposta de solução para o problema (figura 7.2.6.) que é refutada pelos grupos G2 (CA-2, figura 7.2.9.), G1 (CA-3, figura 7.2.10.) e G3 (CA-4, figura 7.2.13.), respetivamente. Da análise às formas complexas é também possível verificar que, nos discursos argumentativos produzidos, as conclusões constituem novos dados nos passos argumentativos seguintes e a existência de passos de inferência em que as garantias ou fundamentos não se encontram presentes de forma explícita.

Contudo, tanto nas formas simples como complexas de argumentação, observa-se, tal como regista Ramalho (2002), que os alunos nas diferentes relações entre as afirmações apresentadas, generalizam, por vezes, situações sem proceder à sua verificação, como pode ser registado na resolução à pergunta 1 da parte I da tarefa teorema de Pitágoras no diálogo estabelecido entre o grupo G2 e o professor (§14). Também se observa que recorrem a informações para fundamentar as suas respostas, sem que essas informações sejam pertinentes para o problema em causa. Por exemplo, essa situação é possível observar no diálogo estabelecido entre o grupo G2 e o professor para resolver a questão 1 da tarefa casos notáveis (§109-§111). É ainda de observar que os alunos, algumas vezes, fundamentam situações claramente excluídas pelas condições enunciadas. Por exemplo na resolução do problema proposto na tarefa equações, quer pelo processo de tentativa e erro, quer pelo processo algébrico, os grupos G3 e G2, respetivamente, consideram que os números procurados podem ser iguais, não olhando com atenção ao enunciado do problema. Contudo estes alunos refutam mais tarde essa sua suposição (figuras 7.4.2. e 7.4.3.). No entanto, todas estas situações proporcionaram que, posteriormente, surgissem situações em que os alunos avaliaram e justificaram os seus raciocínios, bem como procederam à análise crítica e fundamentada das opiniões dos seus colegas por forma a que as diferentes justificações apresentadas fossem coerentes e matematicamente válidas.

Por fim, há a registar a análise local realizada na interpretação de raciocínios presentes em fontes primárias. Através desta análise observa-se que os alunos, a partir da leitura e interpretação das estratégias de resolução propostas por determinados matemáticos, procuram identificar os diferentes elementos constituintes do processo argumentativo, evidenciando quais as garantias e os fundamentos que permitem justificar esses passos de inferência. De facto, os alunos não só procuram entender o porquê de determinadas escolhas realizadas pelos matemáticos, mas também o porquê de determinados procedimentos, o que suscita o aparecimento de uma análise detalhada. Por exemplo, na interpretação realizada pelo grupo G2 da resolução proposta por Diofanto, os alunos procuram um fundamento para a escolha dos valores estabelecidos para incógnita, o que pode ser observado na representação esquemática da reconstrução funcional dos argumentos presentes nessa interpretação (figura 7.4.16.). O mesmo pode ser observado na interpretação realizada por este mesmo grupo (figura 7.5.16.) ao método aritmética proposto por Fibonacci para resolver o problema da tarefa duas torres, duas aves e uma fonte.

A partir da análise às formas de argumentação existentes nos raciocínios argumentativos expressos pelos alunos na realização de tarefas do âmbito da história da matemática, observa-se que os alunos foram capazes de expressar as suas ideias, mas também de interpretar e compreender as ideias que lhe foram sendo apresentadas, participando de forma construtiva em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos. Nesse sentido, a argumentação surgiu como um contributo para a aprendizagem da matemática, uma vez que uma cultura de sala de aula onde se promove a argumentação suscita a participação dos alunos na sua aprendizagem. A existência de formas simples de argumentação, bem como de formas mais complexas, presentes na realização das tarefas propostas, permite observar que as tarefas do âmbito da história da matemática possibilitam não só o desenvolvimento de argumentações durante a resolução do problema, mas também quando se procede à análise das resoluções e estratégias propostas por outros, nomeadamente na tentativa de perceber o porquê e na comparação das estratégias de resolução, uma vez que permitem entender as formas de relação (funcionalidade) entre as afirmações produzidas.

8.2.3. Tipo de estruturas de argumentação presentes na realização de tarefas do âmbito da história da matemática

Ao permitir uma análise local dos argumentos, o modelo de argumentação proposto por Toulmin facilita a compreensão da natureza dos diversos processos argumentativos presentes numa argumentação. Contudo, por si, este modelo não se revela útil para proceder a uma análise global de toda a argumentação e, assim, entender melhor as complexidades da argumentação. Torna-se, portanto, necessário um método que permita não só reconstruir os argumentos de uma forma global, mas também definir um conjunto de características que permitam caracterizar uma estrutura de argumentação. O método proposto por Knipping (2008) baseado numa análise dos passos individuais da argumentação permite reconstruir os argumentos de uma forma global, o que lhe permite propor juntamente com Reid (2010) quatro tipos de estruturas de argumentação: estrutura-fonte, estrutura-reservatório, estrutura-espiral e estrutura-recolha.

A partir da análise local dos diferentes discursos argumentativos produzidos pelos alunos na realização das tarefas propostas, procedeu-se à seleção em cada uma dessas tarefas, à exceção da última tarefa proposta que se insere numa sequência de ensino, dos discursos argumentativos mais representativos. Como observado, a análise local da argumentação foi efetuada tanto ao nível da resolução dos problemas propostos, como ao nível da interpretação de raciocínios presentes em fontes primárias. Assim, na análise global realizada optou-se por considerar estas duas situações.

Ao nível da resolução dos problemas propostos e tendo em consideração, durante a realização das tarefas, os diferentes diálogos estabelecidos entre o professor e os diferentes grupos, bem como os registos escritos efetuados por esses mesmos grupos, tornou-se possível representar globalmente os diversos argumentos presentes nesses discursos argumentativos e, posteriormente, proceder à análise global da sua estrutura. Para uma mais fácil leitura procedeu-se à representação esquemática global dos discursos argumentativos selecionados (ver figuras 7.1.12., 7.2.21., 7.2.22., 7.3.15., 7.4.22. e 7.4.23.). Desta forma, é possível verificar que na resolução dos problemas propostos, surgem correntes de argumentação que não estão ligadas à estrutura principal da argumentação (por exemplo, CA-1, na tarefa dos casos notáveis, figura 7.1.12.); existem argumentos paralelos para a mesma conclusão (CA-1, CA-2 e CA-3 na tarefa teorema de Pitágoras, figura 7.3.15); existem passos de argumentação em que uma afirmação estabelecida como conclusão, num próximo argumento, assume a função de dado (por exemplo, esta situação pode ser observada nas correntes de argumentação CA-3 e CA-4 da tarefa dos casos notáveis, figura 7.1.12.); é possível encontrar a presença de refutações (por exemplo, CA-2 na figura 7.1.12.; CA-2 e CA-3 na figura 78.2.21.; CA'-2 e CA'-3 nas figuras 7.2.22. e 7.4.22.). Também é possível encontrar passos de argumentação que têm explicitamente falta de garantias e dados (por exemplo, CA-3 na figura 7.1.12.; CA'-2 na figura 7.2.22;, e as correntes de argumentação CA-1 e CA-2 na figura 7.3.15.). Nesse sentido, a partir da análise das argumentações presentes nos processos de resolução efetuados pelos alunos na realização das tarefas casos notáveis de multiplicação, construções geométricas e equações é possível observar que estas evidenciam a maioria das características, estabelecidas por Knipping (2008) e Reid e Knipping (2010), que caracterizam a estrutura-fonte, em particular porque apresentam no final da argumentação um afunilamento dos argumentos. Contudo, é de referir que no caso da tarefa casos notáveis é possível observar uma característica típica da estrutura-reservatório, também referenciada pelos autores supracitados, uma vez que, por vezes, o raciocínio argumentativo se move inversamente na estrutura lógica do discurso (por exemplo, CA-4 na figura 7.1.12.). No que diz respeito à tarefa teorema de Pitágoras a partir da análise efetuada ao diálogo estabelecido entre o professor e o grupo G2 na resolução da parte I desta tarefa, a estrutura de argumentação presente evidencia a maioria das características, estabelecidas por Reid e Knipping (2010), que caracterizam a estrutura-espiral (figura 7.3.15.), em particular porque a conclusão é obtida de diferentes formas. É de referir que a estrutura-espiral partilha a maioria das características da estrutura-fonte.

Através de uma análise global efetuada aos discursos argumentativos selecionados, resultantes da interpretação de raciocínios presentes em fontes primárias, observa-se que na sua estrutura existem argumentos onde uma afirmação (conclusão) é deduzida a partir de uma outra afirmação (dado) através de conceitos matemáticos e fundamentos lógicos (garantias e fundamentos). Observa-se ainda que nestes discursos não se encontram presentes argumentos paralelos, nem é possível identificar a presença de refutações É ainda de notar que nestas estruturas de argumentação são possíveis identificar que afirmações estabelecidas como conclusões, num próximo argumento, assumem a função de dados. Acresce referir que existem nos discursos argumentativos desenvolvimento de passos de argumentação que têm explicitamente falta de garantias e dados. Contudo, no caso da tarefa duas torres, duas aves e uma fonte é possível encontrar uma corrente de argumentação que não está ligada à estrutura principal, embora, nos discursos argumentativos da tarefa equações não existem correntes de argumentação que não estejam ligadas à estrutura principal. Nesse sentido, estas estruturas de argumentação não evidenciam a maioria das características que caracterizam a estrutura-fonte e a estrutura-espiral. De facto, as características presentes nestas argumentações evidenciam, tal como estabelece Knipping (2008) e Reid e Knipping (2010), a maior parte das características da estrutura-reservatório, visto que a estrutura-recolha admite refutações na sua estrutura. Além disso, é possível observar que há afirmações que marcam a transição entre diferentes fases do discurso. Por exemplo, quer nas interpretações efetuadas pelos grupos G2 (figura 7.4.24.) e G1 (figura 7.4.25.), respetivamente, às resoluções de Diofanto e Pedro Nunes, quer na interpretação efetuada na estratégia de resolução geométrica proposta por Fibonacci (7.5.25.), na tarefa duas torres, duas aves e uma fonte, é possível verificar que nos primeiros dois casos a conclusão intermédia obtida na primeira parte do discurso resulta de um dado presente no enunciado e só, posteriormente, acrescentam ao discurso o outro dado presente no enunciado e, portanto, obtêm a conclusão final. No último caso, a conclusão intermédia obtida permite não só a passagem para o próximo passo argumentativo, como também permite inverter a estrutura lógica do raciocínio. Os alunos concluem que a forma como Fibonacci resolveu o problema implica que os triângulos sejam semelhantes, no entanto, precisam de novos dados e garantias que permitam justificar esta conclusão (figura 7.5.22.).

Por fim, é de observar que a estrutura dos discursos argumentativos baseados na análise e interpretação de uma estratégia de resolução, não apresentam, como referido, refutações. De facto, durante este processo de análise e interpretação há uma procura, por parte dos alunos, de justificar os diferentes procedimentos utilizados, o que naturalmente condiciona, em certa medida, a presença de refutações. Embora os alunos possam questionar a resolução, nomeadamente o raciocínio presente na resolução e até sejam capazes de apresentar justificações que permitem justificar a não tomada de certas opções, partem do princípio que a resolução está correta, estando apenas em causa descobrir o porquê e justificar os diferentes passos de raciocínio.

A análise destas estruturas de argumentação, desenvolvidas com recurso a tarefas do âmbito da história da matemática, permite observar que durante a construção dos diferentes discursos argumentativos, nomeadamente sobre a forma como as diferentes afirmações produzidas são relacionadas, em particular a apresentação de garantias e fundamentos para legitimar os passos de argumentação, o modo como os alunos relacionam os conceitos e aplicam determinados procedimentos o que indicia, tal como é preconizado por Krummheuer (1995), que argumentação potencia a aprendizagem matemática.

8.2.4. Dificuldades reveladas pelos alunos quando realizam tarefas do âmbito da história da matemática

A análise efetuada ao trabalho desenvolvido pelos alunos, através dos diálogos estabelecidos e dos registos escritos realizados, permite verificar que as dificuldades reveladas por estes manifestam-se ao nível da *linguagem*, presente nas fontes históricas consideradas nas tarefas, ao nível da *compreensão matemática* de certos conceitos e procedimentos, durante a realização das mesmas, e ao nível da *produção de discursos argumentativos*.

As dificuldades associadas às questões de *linguagem* podem ser examinadas tendo em conta a interpretação do enunciado do problema proposto, como acontece na tarefa duas torres, duas aves e uma fonte em que o grupo G1 revela dificuldades em interpretar o enunciado do problema proposto, como tendo em atenção a interpretação quer dos enunciados quer das estratégias de resolução das fontes históricas presentes nas tarefas propostas. De facto, na sua avaliação final os alunos fazem referência a essas dificuldades. Por exemplo, na tarefa casos notáveis da multiplicação, o Emanuel do grupo G2 refere que «o mais difícil [...] foi compreender o texto que Euclides escreveu» (figura 7.1.13). Também na tarefa equações alguns grupos referem que tiveram dificuldades em interpretar o texto de Pedro Nunes. O grupo G4 refere que sentiram «dificuldades em realizar a tarefa de Pedro Nunes» (figura 7.4.26.). Para estes alunos, a dificuldade surgiu na parte da tarefa em que tinham de analisar a resolução do problema proposta por Pedro Nunes e em que tinham de transcrever uma determinada afirmação em notação simbólica atual, explicando como Pedro Nunes descobriu os números procurados. Para estes alunos, a dificuldade em explicar a forma como Pedro Nunes descobriu os números, resultou da dificuldade de interpretar a sua notação. Na tarefa duas torres, duas aves e uma fonte, os alunos manifestaram dificuldades em entender a resolução geométrica apresentada por Fibonacci, referindo o grupo G3 que essa dificuldade foi devida ao tipo de linguagem utilizada (figura 7.5.29.). Na última tarefa proposta, equações do 2.° grau, os alunos do grupo G1 referem dificuldades em interpretar uma determinada afirmação da resolução proposta por Diofanto. A partir do descrito verifica-se que as dificuldades registadas pelos alunos em interpretar as resoluções propostas e, assim, compreender matematicamente as estratégias de resolução utilizadas, resultam da notação usada e do estilo retórico presente na forma como esses matemáticos expressam os seus raciocínios. Tal como expressam Estrada (1993), Rubinstein e Schwartz (2000) e Tzanakis e Thomaidis (2000), essas dificuldades surgem associadas a questões relacionadas com a utilização de certos métodos computacionais e com o tipo de notação usada em determinado período da história.

No que diz respeito à *compreensão matemática* evidenciam-se diferentes dificuldades que se localizam ao nível: da interpretação geométrica e de conceitos, da linguagem e interpretação algébrica, da realização de procedimentos algébricos e da interpretação das estratégias de resolução propostas nas fontes primárias consideradas. Em relação às dificuldades associadas ao nível da interpretação geométrica e de conceitos, estas surgem em diversas tarefas. Na tarefa casos notáveis, os alunos manifestaram dificuldades em descrever, através de uma breve composição, a proposição II, 4 dos *Elementos* de Euclides a partir da construção apresentada e dos resultados obtidos. Na tarefa construções geométricas, os alunos manifestaram dificuldades em iniciar o processo de construção geométrico proposto na tarefa. Estas dificuldades não só estiveram associadas à utilização dos instrumentos de desenho (por exemplo, na construção de segmentos perpendiculares a uma reta dada com recurso ao compasso) (figuras 7.2.23. e 7.2.24.), mas também ao facto de nas figuras dadas não aparecerem quaisquer indicações de medidas (figura 7.2.25.). Isso implicou dificuldades em obter as soluções como refere o grupo G4 (figura 7.2.26.). Por fim, é de observar que foi na realização da parte II da tarefa que os alunos tiveram maiores dificuldades, uma vez que a construção geométrica necessária para a resolução do problema envolvia a aplicação do teorema de Pitágoras, embora, não de uma forma direta (figura 7.2.27.). Também na tarefa teorema de Pitágoras, durante a abordagem da prova geométrica proposta por James Garfield, é possível encontrar algumas dificuldades, neste caso de um elemento do grupo G2, que manifesta possuir pouca clareza nos conhecimentos respeitantes às propriedades dos quadriláteros, nomeadamente dos paralelogramos. Em relação à tarefa equações do 2.° grau é possível encontrar na parte I e parte III, algumas dificuldades dos alunos associadas à interpretação geométrica. No que diz respeito às dificuldades relacionadas com a linguagem algébrica, na tarefa equações, os grupos que tentaram resolver o problema proposto na parte I de forma algébrica evidenciaram algumas dificuldades iniciais em expressar de forma algébrica os números procurados. Nesta tarefa foi possível verificar ainda a dificuldade dos alunos em realizar determinados procedimentos algébricos, nomeadamente na aplicação dos casos notáveis (figura 7.4.28.), no aparecimento de uma equação com duas incógnitas (figura 7.4.31.), em proceder à substituição de variáveis (figura 7.4.29.) e resolver uma equação do 2.° grau com duas incógnitas (figuras 7.4.32. e 7.4.33.). Também na tarefa equações do 2.º grau é possível observar as dificuldades dos alunos em realizar determinados procedimentos algébricos, tal como, proceder à substituição de variáveis numa equação, resolver a equação $xy = 96$ em ordem a uma das incógnitas (figura 7.6.47.), resolver equações do 2.° grau completas com recurso aos casos notáveis (figura 7.6.49.) e simplificar expressões algébricas (figura 7.6.51.). É ainda de referir as dificuldades dos alunos em compreenderem matematicamente as estratégias de resolução presentes nas fontes primárias selecionadas. Por exemplo, na tarefa equações alguns grupos referem que tiveram dificuldades em interpretar o texto de Diofanto. Para o grupo G2, as dificuldades sentidas estiveram associadas tanto ao nível da interpretação da resolução proposta por Diofanto, como ao nível de entender o porquê de Diofanto escolher as expressões, em notação simbólica atual, $x + 10$ e $10 - x$ para designar os números procurados. No entanto, estes alunos mais tarde, na avaliação final da tarefa, ao compararem a sua estratégia de resolução com a de Diofanto justificam o porquê de Diofanto ter designado os números procurados por estas expressões (figura 7.4.39.). Os alunos também manifestaram dificuldades na tarefa duas torres, duas aves e uma fonte em proceder à interpretação aritmética da resolução proposta por Fibonacci, revelando dificuldades em identificar o resultado numa determinada afirmação presente nessa resolução. Nesta tarefa, os alunos manifestaram ainda dificuldades em perceber o porquê da concretização aritmética da resolução geométrica apresentada por Fibonacci. Ainda nesta tarefa, é possível observar as dificuldades dos alunos em interpretarem a resolução proposta por Gaspar Nicolas. Contudo, é de observar que os alunos apenas conseguiram resolver o problema inicial proposto tarefa duas torres, duas aves e uma fonte quando foram confrontados com a estratégia de resolução de Fibonacci e tiveram de proceder à respetiva análise interpretativa. Tal como refere Brousseau (1983), as dificuldades evidenciadas pelos alunos manifestam-se por erros, pela incompreensão do enunciado do problema e pela impossibilidade de os resolver com eficácia. No caso da geometria, as dificuldades surgem associadas à questão da visualização geométrica, e em particular, como refere Duval (1995), ao facto de na resolução de problemas ser necessário recorrer a figuras geométricas, à linguagem corrente e a certas representações algébricas. Em relação às dificuldades evidenciadas pelos alunos ao nível da linguagem algébrica e ao nível da realização de cálculos algébricos, tal como refere Oliveira (2002), estas surgem associadas ao facto de os alunos transportarem para o contexto algébrico dificuldades herdadas da aprendizagem do contexto aritmético e, por outro lado, estenderem para o estudo algébrico procedimentos aritméticos que não são aplicáveis no contexto algébrico. No que diz respeito à utilização das fontes originais, embora, como refere Estrada (1993), a escolha de textos como material de trabalho proporcione ao professor um enquadramento histórico, acrescido da riqueza do tratamento de documentos originais, essa escolha, tal como observam Barbin (1991) e Ferreira e Rich (2001), deve ser cuidadosamente efetuada tendo em atenção o assunto que se pretende abordar e a relevância dos textos para esse mesmo assunto. Nesse sentido, tal como referem Ferreira e Rich (2001), embora o recurso a fontes primárias proporcione aos alunos olharem a matemática como um esforço da atividade humana, nomeadamente um melhor entendimento e apreciação das invenções matemáticas, dos processos inerentes à sofisticação de conceitos e técnicas e da clareza e elegância da própria notação, o tipo de linguagem presente nesses escritos são completamente diferentes da prática usual de ensino e, nesse sentido, é natural os alunos manifestarem dificuldades ao nível da interpretação das resoluções apresentadas pelos matemáticos do passado.

Em relação às dificuldades dos alunos ao nível da *interação discursiva* (*argumentação*), é possível observar que estes manifestam dificuldades em apresentarem as justificações necessárias para os seus raciocínios, como pode ser observado na análise das tarefas: casos notáveis, teorema de Pitágoras e equações. De facto, quer a Sara do grupo G4 na tarefa teorema de Pitágoras, quer a Ana do grupo G1 na tarefa equações referem de forma explícita, respetivamente, essa dificuldade: «Para mim, foi difícil arranjar as justificações para mostrar que o triângulo era retângulo. A figura permitia ver, mas é difícil pôr por escrito ou dizer o porquê» (figura 7.3.17.); «Continuo a ter dificuldades em escrever o porquê. É difícil explicar porque pensamos assim. [...]» (figura 7.4.34.). Muitas dificuldades associadas à apresentação de justificações surgem ao iniciar o processo de justificação, como acontece em algumas situações presentes na resolução das tarefas casos notáveis, teorema de Pitágoras e equações; contudo, é possível identificar outras situações em que há a apresentação de garantias que não legitimam um passo de argumentação por falta de dados (tarefa casos notáveis), e outras em que não há a apresentação de dados ou garantias que sustentem determinadas conclusões (tarefas duas torres, duas aves e uma fonte e equações do 2.° grau). É de observar que enquanto na tarefa equações do 2.° grau a dificuldade de apresentar dados ou garantias que permitam sustentar uma determinada conclusão aparece durante a resolução da estratégia idealizada pelos próprios alunos, no caso da tarefa duas torres, duas aves e uma fonte, essa dificuldade surge na interpretação da resolução geométrica apresentada por Fibonacci (figura 7.5.32.). Esta observação, permite destacar a dificuldade dos alunos não só em defenderem as suas ideias, mas também em procederem à interpretação, compreensão e análise crítica das contribuições dos outros. Tal como refere Ramalho (2002), os alunos generalizam situações sem proceder à sua verificação, não se sentido, por vezes, como observa Boavida (2008), confortáveis e seguros em assumir riscos ao partilhar as suas ideias, nem em criticar as contribuições dos seus pares de forma fundamentada.

Tendo em conta as diversas dificuldades registadas observa-se que a resolução destas tarefas do âmbito da história da matemática proporcionou aos alunos a identificação das suas próprias dificuldades e, portanto, ao nível da compreensão matemática esclarecer alguns conceitos e procedimentos e clarificar algumas interpretações geométricas e algébricas. No entanto, a forma como estas tarefas foram aplicadas, nomeadamente na promoção do trabalho de grupo e da discussão final, no grupo turma, permite ainda observar que algumas dificuldades em utilizar determinados conceitos e procedimentos matemáticos estão associadas ao facto de os alunos não procurarem explicar e justificar os seus próprios raciocínios. Nesse sentido, expressar não só as suas ideias, mas também interpretar e compreender as ideias que lhes são apresentadas, participando de forma construtiva em discussões sobre conceções, processos e resultados matemáticos, possibilita a perceção das suas dificuldades.

8.2.5. Avaliação dos alunos sobre a realização de tarefas do âmbito da história da matemática

No final da realização das tarefas propostas, os alunos procederam a uma avaliação sobre o trabalho desenvolvido durante execução destas tarefas. Nessa avaliação, os alunos referiram não só as suas dificuldades, mas também as suas impressões sobre o decorrer dos trabalhos, nomeadamente sobre aspetos relacionados com a história da matemática. Através dos diferentes registos escritos foi possível identificar diversas razões, apontadas, pelos alunos na sua avaliação, que permitiram proceder à seguinte categorização: aprendizagem matemática, predisposição perante a matemática, apreciação da matemática como um esforço cultural e desenvolvimento da natureza da matemática e da sua atividade.

Ao nível da *aprendizagem matemática*, os alunos destacam a importância do trabalho de grupo e da apresentação oral no final da realização das tarefas. Esse destaque, dado pelos alunos, resulta do facto desses momentos permitirem a troca de opiniões e ideias, como é expresso pelo grupo G2 no final da tarefa equações do

2.° grau «Na nossa opinião, o trabalho de grupo foi muito importante para que pudéssemos trocar opiniões e chegar a conclusões em relação aos dois problemas propostos pelo professor […].» (figura 7.6.55.), mas também compreender melhor a tarefa proposta. Esta última opinião é expressa nas avaliações realizadas nas várias tarefas, uma vez que lhes permitiu ultrapassar as dificuldades sentidas: o grupo G3, na tarefa casos notáveis, refere que «Na parte II não conseguimos resolver. Mas depois de vermos o que os nossos colegas resolveram, já conseguimos perceber.» (figura 7.1.19.); na tarefa construções geométricas, este mesmo grupo refere que «Com a ajuda do resto dos grupos foi mais fácil de perceber. Este tipo de atividades é importante, porque em grupo é mais fácil e tiramos as dúvidas uns aos outros e chegamos aos resultados. Foi o que aconteceu nesta atividade.» (figura 7.2.29.); o grupo G5, na tarefa duas torres, duas aves e uma fonte, regista que «Quando começaram a explicar no quadro nós começamos a perceber.» (figura 7.5.33.); e na tarefa equações do 2.° grau, o grupo G3 observa que «A atividade que sentimos mais dificuldades foi a última, mas com a resolução com os outros grupos e trocas de ideias foi mais fácil de perceber.» (figura 7.6.54.). Contudo, além de permitir ultrapassar as dificuldades sentidas, os alunos expressam que «Depois com os nossos colegas conseguimos com a nossa resolução e com a deles, resolver» (grupo G3, tarefa construções geométricas, figura 7.2.28.), o que destaca que o trabalho desenvolvido quer nos pequenos grupos quer a discussão realizada em grande grupo permitiu a correta resolução da tarefa proposta.

No entanto, a realização destas tarefas permitiu desenvolver a capacidade de resolver problemas. Por exemplo, na resolução da tarefa teorema de Pitágoras, o grupo G4 refere que «resolver estes problemas em grupo foi muito interessante porque permitiu [a] vários elementos do grupo apresentarem as suas opiniões, discutir sobre o problema e chegar a uma conclusão» (figura 7.3.19.). Acresce referir que os diversos momentos de discussão e partilha de ideias possibilitaram também a possibilidade de comparar diferentes estratégias de resolução. O grupo G4 observa isso na resolução da tarefa equações do 2.° grau «Outros dos aspetos interessantes é que ao resolvermos em grupo obtemos várias opiniões e aprendemos várias maneiras de resolver o mesmo problema» (figura 7.6.53.).

Contudo, essa possibilidade de confrontar estratégias de resolução também é apontada, pelo grupo G4, na tarefa teorema de Pitágoras em que nem todos os grupos tinham o mesmo problema para resolver «Depois durante a apresentação dos outros grupos ainda pudemos verificar outros problemas diferentes em que o resultado final era sempre igual: fórmula do teorema de Pitágoras.» (figura 7.3.20.). Todas as considerações supracitadas evidenciam, tal como referido por Tzanakis e Arcavi (2000), a importância da comunicação, da confrontação de opiniões e ideias, e da argumentação dos raciocínios matemáticos na procura da solução de um problema. Verifica-se que o trabalho de grupo e a discussão final no grupo turma permitem aos alunos não só a perceção das suas dificuldades, mas também a superação, em conjunto, das mesmas, e, consequentemente, a resolução das tarefas propostas, o que demonstra a constituição de uma comunidade de discurso matemático, tal como preconizada por Sherin (2002), onde na sala de aula se fomenta uma cultura de argumentação, tal como sugerem Douek (2000) e Boavida (2005b).

Ainda ao nível da aprendizagem matemática, tal como é sublinhado nos trabalhos de Tzanakis e Arcavi (2000) e Gulikers e Blom (2001), os alunos realçam que a realização destas tarefas lhes permitiu uma forma diferente de aprender a matéria, como é referido pelo grupo G5, na tarefa equações do 2.° grau, «Estas tarefas são simples e ajudam a perceber melhor a matéria.» (figura 7.6.57.). De facto, nos diversos registos escritos os alunos destacam que as tarefas contribuíram para a aprendizagem da matéria. Na tarefa casos notáveis, o grupo G3 refere que «Com esta atividade conseguimos compreender [e] aprender de uma forma diferente os casos notáveis» (figura 7.1.20.), no presente caso o quadrado de um binómio, o que lhes permitiu uma melhor compreensão dos conceitos e procedimentos, tendo, por isso, um efeito significativo na sua aprendizagem (figura 7.1.21.). Esta aprendizagem significativa é ainda expressa pelos alunos na realização da tarefa construções geométricas em que o grupo G4 observa que «[…] depois quando vimos a resolução no quadro e chegámos à conclusão que não era assim tão difícil, tínhamos era de pensar na matéria dada, assim conseguíamos resolver a tarefa.» (figura 7.2.30.) e o Emanuel do grupo G2 refere que «[…] ajudou-nos a compreender melhor o teorema de Pitágoras e os casos notáveis […].» (figura

7.2.31), o que realça, por parte dos alunos a possibilidade que a realização desta tarefa teve tanto ao nível da aplicação como da relacionação da matéria dada. Esta perceção também é partilhada pelo grupo G6 que, na tarefa duas torres, duas aves e uma fonte, refere que essa tarefa lhes permitiu aprender a matéria de várias formas «Ficamos a aprender novas formas de como aprender matéria sobre o teorema de Pitágoras [e] sobre os casos notáveis.» (figura 7.5.35.). O grupo G1 destaca ainda a importância da resolução da tarefa das construções geométricas na consolidação das matérias anteriores (figura 7.2.32.) e o grupo G5, nesta mesma tarefa, observa a potencialidade da utilização de material de desenho na resolução de problemas de matemática (figura 7.2.33.). A aprendizagem de matéria também se estende à utilização de números irracionais na resolução de problemas, como é referido pelo grupo G2 na resolução de um problema proposto na tarefa equações do 2.° grau. Na tarefa teorema de Pitágoras, os alunos destacam não só facto de terem compreendido melhor o teorema de Pitágoras (figura 7.3.21.), mas também as diferentes formas de provar o teorema de Pitágoras (figuras 7.3.22, 7.3.23. e 7.3.24.). No entanto, no registo final, o grupo G5 observa que a diferença entre as construções geométricas apresentadas por Bhaskara, tendo em conta as provas geométricas apresentadas nas partes II e III, está no facto de apesar de ambas as construções usarem os mesmos quatro triângulos, pela disposição dos triângulos na figura, o quadrado pequeno mudou de posição e, portanto, obtiveram uma outra forma de mostrar o teorema de Pitágoras. Também na tarefa equações, o grupo G1 refere que «Aprendemos muitas coisas com este problema: a resolver equações literais […].» (figura 7.4.36.).

É ainda de referir que ao nível da aprendizagem matemática, os alunos referem a comparação entre as suas estratégias de resolução e as presentes nas fontes primárias. Ainda na tarefa equações o grupo G1 regista «Aprendemos […] a ver outras formas de resolver o mesmo problema e a escrever na nossa escrita de números e letras aquilo que os antigos matemáticos escreviam.» (figura 7.4.36.). Já o grupo G3, na tarefa equações do 2.° grau, refere que «Estas atividades são muito interessantes pois os alunos conseguem interpretar os vários métodos e perceber sem darem conta que estão a aprender uma nova matéria.» (figura 7.6.58.). De facto, a comparação entre as diferentes estratégias de resolução é possível ir-se observando ao longo dos diferentes registos. Os alunos referem o raciocínio presente nas fontes primárias, «O raciocínio de Gaspar Nicolas baseia-se no teorema de Pitágoras e nos casos notáveis [...].» (grupo G1, duas torres, duas aves e uma fonte, figura 7.5.43.), comparam a sua resolução com a presente nas fontes primárias «A diferença entre o nosso processo e o processo de Fibonacci é que [...] ele numa das suas formas [de resolução] fez geometricamente utilizando a razão de semelhança de triângulos [...].» (grupo G4, tarefa duas torres, duas aves e uma fonte, figura 7.5.46.), assinalam o método aprendido procedendo à explicação (grupo G2, equações do 2.° grau, figura 7.6.65.) e ao registo escrito e esquemático do método presente em fontes secundárias (grupo G3, tarefa equações do 2.° grau, figuras 7.6.63. e 7.6.64.), e observam a diferença entre métodos presentes «A principal diferença entre os dois métodos é que num retiramos o quadrado e no outro acrescentamos um quadrado.» (grupo G3, tarefa equações do 2.° grau, figura 7.6.67.). Ao proceder a um registo comparativo entre as suas estratégias de resolução com as presentes nas fontes primárias, tal como observado por Grugnetti (1994, 2000), os alunos entendem não só a economia e a vantagem dos atuais símbolos e processos matemáticos, mas também têm a possibilidade de confrontar as suas conjeturas com os argumentos e as estratégias de resolução utilizados no passado. O facto de os alunos se tornarem capazes de comparar diferentes estratégias para a resolução de um problema permite, por um lado, que estes valorizem a importância da compreensão do mesmo e da conceção, aplicação e justificação de estratégias que constituem os passos necessários para a resolução do problema; e por outro lado, permite o desenvolvimento dos processos de generalização e abstração.

Por fim, ao nível da aprendizagem da matemática é de referir as conexões presentes, nas tarefas, entre as várias áreas da matemática. O grupo G2 destaca o facto de a "descoberta" do caso notável ter sido obtida através de uma interpretação geométrica: «Através deste exercício, ficamos a saber que Euclides foi um grande matemático que utilizou a álgebra, como forma simplificada para usar na geometria» (figura 7.1.22.). Também uma evidência entre a conexão da geometria e da álgebra pode ser observada no registo escrito pelo grupo G2 que, na resolução da tarefa teorema de Pitágoras. Na abordagem da prova geométrica de James Abraham Garfield, este grupo refere que com esta tarefa permitiu não só aprender melhor o teorema de Pitágoras, mas também a partir de uma construção geométrica, envolvendo triângulos, obter a relação algébrica $c^2 = a^2 + b^2$ (figura 7.3.21.) o que evidencia a presença da conexão entre a geometria e a álgebra. Também na tarefa equações do 2.° grau, o grupo G2 regista que «durante estas últimas aulas tentamos perceber uma maneira de resolver uma equação do 2.° grau completa de uma forma geométrica, inspirada nos métodos babilónicos, através desses métodos conseguimos chegar a uma fórmula que depois de simplificada originou a fórmula resolvente» (figura 7.6.56.). A aprendizagem da forma geométrica para resolver equações, atribuída aos Babilónios, permitiu não só resolver a equação, mas também obter uma fórmula, neste caso a fórmula resolvente que lhes permite resolver qualquer equação do 2.° grau completa. Estas observações realizadas pelos alunos vão ao encontro das ideias de Reimer e Reimer (1995), Furinghetti e Somaglia (1998) e Grugnetti e Rogers (2000) de que a história pode constituir uma ponte entre diferentes temáticas da matemática. Tal como é referido por Tzanakis e Arcavi (2000), a integração da história da matemática no ensino da matemática exibe conexões entre domínios do conhecimento que ao primeiro olhar pareceriam não estarem relacionados, proporcionando, assim, a oportunidade de apreciar que a frutífera pesquisa de um determinado domínio científico não se encontra isolado das atividades de outros domínios. Por vezes essa relação é frequentemente motivada por questões e problemas vindo de disciplinas não relacionadas, tendo por base experiências empíricas.

Ao nível da *predisposição perante a matemática*, os alunos referem o interesse e o entusiasmo que tiveram ao resolver as tarefas propostas, como, por exemplo, o ilustrado em algumas afirmações produzidas pelos alunos nas avaliações realizadas por estes: «gostei muito deste exercício e de o resolver conjuntamente com o meu grupo. Foi divertido e interessante.» (Emanuel, grupo G2, tarefa construções geométricas, figura 7.2.31.) e «Foi uma experiência muito interessante, gostamos de participar!» (grupo G4, tarefa teorema de Pitágoras, figura 7.3.26.). No entanto, através dos registos escritos dos alunos é possível observar que o interesse por eles manifestado, provocado pela realização destas tarefas, vai mais longe do que um simples fator de motivação, uma vez que esse interesse surge não só associado ao que gostaram de fazer, mas também ao tipo de descobertas realizadas e forma de obter essas mesmas descobertas, o que, consequentemente, tem impacto na sua aprendizagem. Por exemplo, na tarefa casos notáveis, o aluno Emanuel do grupo G2 refere «Gostei de construir a figura através do texto, e por fim ver o resultado final.» (figura 7.1.25.); na tarefa construções geométricas, o grupo G4 refere que «Foi uma experiência interessante que nos permitiu construir um quadrado de uma maneira diferente do que costumamos construir no dia a dia.» (figura 7.2.35.); na tarefa teorema de Pitágoras, o Daniel do grupo G2 refere «O que mais gostei de fazer foi [a pergunta 2], onde tínhamos que arranjar duas expressões (dois processos diferentes para determinar a área do trapézio) [...].» (figura 7.3.27.) e na tarefa equações do 2.° grau o grupo G2 refere que «O que achamos mais interessante foi a parte em que lemos e analisamos a resolução dada por Diofanto e gostamos muito também da interpretação geométrica duma equação do 2.° grau.» (figura 7.6.69.). Contudo, os alunos realçam o interesse em realizar as tarefas, por estas terem permitido uma melhor compreensão da matéria. Por exemplo, na tarefa teorema de Pitágoras, o Emanuel do grupo G2 refere «Gostei muito deste trabalho, acho que nos ajudou a compreender as variadas formas em que o teorema de Pitágoras pode ser utilizado.» (figura 7.3.29.), o que permitiu ao Emanuel uma melhor compreensão do teorema de Pitágoras, tendo, por isso, um efeito significativo na sua aprendizagem. O próprio grupo G2, sobre a tarefa duas torres, duas aves e uma fonte, refere que «Este problema ensinou-nos muita coisa!» (figura 7.5.52.). Também em relação ao gosto de realizar as tarefas os alunos do grupo G3 referem, no caso da tarefa equações, e uma vez que tiveram de ler fontes primárias: «A questão que mais gostamos foi a de Diofanto, porque era mais simples de resolver. A notação de Diofanto em relação à de Pedro Nunes é muito mais simples. Foi a tarefa que mais gostamos de resolver.» (figura 7.4.42.). É de observar que os alunos, na tarefa equações, referem o desafio em interpretar a notação usada pelos matemáticos na resolução do problema e procedem, portanto, à comparação dessas mesmas resoluções registando a estratégia que mais gostaram. Enquanto o grupo G3 associa a facilidade em resolver a questão que abordava a resolução proposta por Diofanto, o grupo G4 refere «A que achamos mais fácil foi a de Pedro Nunes, porque traduzimos as mensagens com os códigos atrás indicados. Foi uma experiência muito divertida.» (figura 7.4.40.). No entanto, o interesse manifestado pelos alunos por terem aprendido a resolver o mesmo problema através de diferentes processos é expresso de forma explícita na tarefa duas torres, duas aves e uma fonte, em que o grupo G3 refere «Aprendemos que com vários raciocínios, resolvemos o mesmo problema.» (figura 7.5.48.) e o grupo G4 observa «Foi um problema muito interessante em que ficamos a perceber várias maneiras de resolver o mesmo problema […].» (figura 7.5.49.). Também o grupo G2 manifesta o seu interesse por esta tarefa, em particular pela resolução proposta por Gaspar Nicolas, ao justificar que «tinha uma resolução que não usava os casos notáveis, mas era a mesma coisa que usasse. Gostamos muito da forma que ele usou para resolver este problema.» (figura 7.5.50.). Ao comparar as diferentes resoluções apresentadas, este grupo de alunos constata a eficácia do processo usado por Gaspar Nicolas. Também o grupo G6 corrobora esse seu interesse nesta mesma resolução ao referir «A tarefa que mais nos interessou foi esta […], era uma boa ideia de resolver este problema.» (figura 7.5.51.), destacando, novamente, a eficácia do processo. Também a forma de resolver as tarefas é expresso por alguns grupos de alunos. Por exemplo, na tarefa das equações do 2.° grau, o Emanuel, do grupo G2, justifica o interesse em resolver esta tarefa não só por esta ter sido resolvida de forma geométrica, mas «[…] porque usamos régua, tesoura e papel quadriculado, ou seja, fizemos colagens e recortes.» (figura 7.6.70.). No entanto, os alunos destacam o interesse e o entusiasmo por resolver estas tarefas pelo facto de terem tido a oportunidade de partilhar as suas ideias e resoluções em grande grupo. O Daniel, do grupo G2, refere na sua avaliação sobre a tarefa casos notáveis que «O que mais gostei de fazer foi quando fui explicar as coisas que sabia para responder à pergunta em questão.» (figura 7.1.27.), referindo, mais tarde o seu colega Emanuel, na tarefa construções geométricas, «A melhor parte foi quando encontramos a solução e o debate sobre o exercício com a turma.» (figura 7.2.34.). Estas reflexões permitem, assim, destacar o papel que a integração da história da matemática tem no interesse e motivação dos alunos, papel esse já sublinhado por diversos investigadores como Fauvel (1991), Estrada (1993), van Maanen (1997), Barbin (2000), Marshall (2000), Tzanakis e Arcavi (2000) e Gulikers e Blom (2001). Tal como referido por Lakoma (2000), a integração da história da matemática permite estimular o discurso em contexto de sala de aula, uma vez que cria a oportunidade para os alunos desenvolverem a arte de discutir, justificarem as suas próprias opiniões e apresentarem o seu próprio raciocínio aos outros.

Ao nível da *apreciação da matemática como um esforço cultural*, é possível observar, a partir dos registos escritos pelos alunos, que estes apreciam e reconhecem a matemática como um esforço criativo e cultural humano, ou seja, tal como é expresso por Barbin (1991), Tzanakis e Arcavi (2000) e Ferreira e Rich (2001), a matemática envolve a parte intelectual humana, outras ciências e diferentes culturas. Por exemplo, na tarefa construções geométricas, os alunos destacam a forma como os gregos antigos resolviam os problemas geométricos em que o grupo G4 refere que «[…] ficamos a saber que antigamente os gregos utilizavam régua não graduada […]» (figura 7.2.36.) e o grupo G2 observa «[…] como os gregos antigos conseguiam resolver exercícios complicados, só com régua (não graduada) e compasso […]» (figura 7.2.37.). Ou seja, os alunos percecionam não só as técnicas usadas no passado para resolver problemas, como têm a oportunidade de observar a evolução das mesmas ao longo do tempo. A perceção que os alunos têm sobre o desenvolvimento da matemática também pode ser observada nas avaliações que estes efetuam sobre a tarefa teorema de Pitágoras, em que os vários grupos tiveram de analisar diferentes provas geométricas deste teorema. Por exemplo, o grupo G3 refere que «Esta atividade foi um pouco diferente, cada grupo tinha um exercício diferente, mas no final conseguimos verificar [e] descobrir a fórmula do teorema de Pitágoras. Verificamos que em situações diferentes se pode verificar a mesma coisa.» (figura 7.3.30.). Ao observarem que «em situações diferentes se pode verificar a mesma coisa», os alunos destacam a oportunidade de conhecerem diferentes tipos de abordagens para o mesmo problema, nomeadamente sobre as várias provas efetuadas em relação ao teorema de Pitágoras, sendo essas provas associadas aos vários tipos de abordagens matemáticas presentes no interior de diferentes culturas, no presente caso num tipo de cultura menos conhecida na matemática ocidental como é o caso da indiana. Também na tarefa duas torres, duas aves e uma fonte os alunos registam, através da tarefa realizada, o caráter evolucionário da matemática. O grupo G6 refere que «Ficamos a conhecer novos matemáticos e várias formas de como resolver a mesma tarefa. Os matemáticos preferem usar vários números, onde obtemos os mesmos resultados, apesar de nós optarmos sobre a forma de equação e aí igualarmos.» (figura 7.5.54.). Com esta afirmação, os alunos realçam, tal como Thomaidis (1991), Tzanakis e Arcavi (2000) e Grugnetti (2000), a parte humana da matemática ao referirem que ficaram a conhecer novos matemáticos, mas também que a linguagem e os meios usados para transmitir e comunicar o conhecimento matemático foram mudando ao longo dos tempos, uma vez que registam que a linguagem usada nas estratégias de resolução analisadas eram de caráter aritmético, enquanto que eles recorrem a equações, destacando o papel da álgebra na sua resolução. Também nesta tarefa, os alunos do grupo G4 referem que analisar as resoluções destes matemáticos, permitiu-lhes conhecer um pouco da sua biografia, nomeadamente o que fizeram e quando viveram, o que evidencia que as aulas de matemática podem tornar-se substancialmente humanizadas por meio de uma integração contextualizada da história da matemática. Na tarefa equações do 2.° grau, os alunos também registam a perceção que têm sobre o desenvolvimento da matemática, nomeadamente sobre as técnicas para resolver problemas. Pelo facto de nesta tarefa os alunos redescobrirem a fórmula resolvente para as equações do 2.° grau, através do método usado pelos Babilónios, os alunos tiveram a oportunidade de resolver os problemas propostos de forma geométrica e após obterem as suas soluções procederem a uma generalização do método usado, procurando descrever algebricamente esse processo. A Ana, do grupo G1, termina a sua avaliação escrita sobre esta tarefa referindo «[…] torna-se curioso o facto de como o mundo matemático tantas voltas e meias-voltas dá. Isto é, quero eu dizer, que são várias as técnicas usadas para a mesma situação, mas [por] diferentes processos, entre eles, as fórmulas.» (figura 7.6.73.).

Ao nível do *desenvolvimento da visão da natureza da matemática e da sua atividade*, os alunos manifestam um diferente olhar sobre a matemática e a atividade matemática proporcionada pela realização das diferentes tarefas. Na tarefa construções geométricas, o grupo G4 destaca a utilização dos instrumentos de desenho na resolução da tarefa, em particular da régua não graduada «Apesar de tudo foi muito divertido, porque tínhamos de desenhar com régua não graduada e compasso.» (figura 7.2.38.). De facto, a realização desta tarefa proporcionou aos alunos uma outra forma de olhar a matemática e a atividade matemática, em particular sobre técnicas e métodos usados num determinado período da história da matemática e sobre o papel visual e intuitivo das abordagens não formais na resolução de problemas. O grupo G1 regista na sua avaliação «Esta tarefa, para nós, foi interessante, pois ficamos a conhecer novas técnicas, na qual eram introduzidas matérias durante a aula.» (figura 7.2.39.). Também a tarefa teorema de Pitágoras proporcionou aos alunos uma outra forma de olhar a matemática e a atividade matemática, em particular sobre as técnicas e métodos de prova usados na demonstração do teorema de Pitágoras, destacando, novamente, o papel visual e intuitivo das abordagens não formais na resolução de problemas. Ao contactar com as diferentes provas geométricas do teorema de Pitágoras, os alunos foram encorajados a formular as suas próprias questões, fazer conjeturas e a testá-las. Os alunos tiveram, assim, a oportunidade de se confrontarem com a natureza evolucionária do conhecimento matemático, nomeadamente sobre determinados conceitos como o de prova, rigor e evidência. Também o conhecimento expresso pelos alunos na tarefa equações sobre a linguagem de Diofanto e Pedro Nunes para resolver equações (figura 7.4.43.) permite observar que a realização desta tarefa proporcionou aos alunos uma outra forma de olhar a matemática e a atividade matemática, em particular sobre a linguagem simbólica usada por diferentes matemáticos em diferentes fases da história da matemática. Esse mesmo conhecimento é expresso na avaliação realizada à tarefa duas torres, duas aves e uma fonte, em que o Nélson do grupo G2 refere que «Gostei de tentar perceber o pensamento de Gaspar Nicolas e achei interessante ele resolver uma equação por palavras.» (figura 7.5.55). De facto, a terminologia usada por cada um dos matemáticos apresentados, possibilitou aos alunos o entendimento da própria linguagem, verbal ou simbólica, da matemática de um determinado período, permitindo-lhes reavaliar, tal como é referido por van Maanen (1997), o papel visual e intuitivo das abordagens não formais sugeridas no passado. Este diferente olhar sobre a matemática e a atividade matemática pode ainda ser observado na avaliação final escrita pelo Rui do grupo G4, resultante da análise de questões, problemas e respostas históricas presentes na tarefa equações do 2.° grau. Para este aluno, a forma como aprendeu a fórmula resolvente das equações do 2.° grau permitiu-lhe «[…] perceber melhor o que é a fórmula [e] para que serve […]» (figura 7.6.74.), ou seja, ao nível do conteúdo, a realização desta tarefa proporcionou aos alunos a oportunidade de observar que não só são legítimos, como também fazem parte integrante de fazer matemática, abordagens alternativas de resolver problemas, o que permitiu aos alunos entenderem melhor o porquê de certas conjeturas e provas que de forma satisfatória permitem a resposta dos problemas. Por outro lado, o aluno refere ainda «[…] por que é que ela é como é […]» (figura 7.6.74.), isto é, ao nível da forma os alunos entenderam melhor os diferentes elementos constituintes da fórmula, o que permitiu ajudá-los a entenderem não só estas questões formais, mas também a própria linguagem verbal e simbólica da matemática. Desta forma, tal como é sublinhado por Tzanakis e Arcavi (2000), os alunos tiveram a oportunidade de conhecer quais as vantagens e/ou desvantagens das formas modernas da matemática.

8.2.6. Reflexão pessoal

Após a apresentação das conclusões deste estudo, faz todo o sentido proceder a uma breve reflexão, de caráter pessoal, sobre todo o trabalho desenvolvido.

A concretização desta investigação proporcionou não só uma oportunidade de se proceder a um aprofundamento pessoal sobre determinadas temáticas do âmbito da educação matemática, mas também constituiu um desafio profissional, uma vez que na qualidade de professor proporcionou um enriquecimento ao nível do reportório didático.

O interesse pela história da matemática tem estado associado ao percurso académico que tem sido delineado, uma vez que a dissertação de mestrado em Matemática, Fundamentos e Aplicações, foi realizada no âmbito da história. Contudo, ao longo da função docente têm sido diversas as situações educativas que exigem a procura de diferentes práticas e metodologias, daí o interesse e a motivação em integrar de forma significativa a história no ensino da matemática. Na presente investigação, mais do que pretender esgotar a história da matemática num conjunto finito e condensado de aulas, por forma a que esta sirva de apoio e de motivação para o estudo da matemática, pretendeu-se estudar a forma como tarefas do âmbito da história da matemática podem proporcionar o desenvolvimento da argumentação matemática dos alunos.

Através desta experiência, foi possível identificar quais as motivações históricas subjacentes à introdução de determinados conceitos e procedimentos, bem como conhecer as dificuldades ou até mesmo os obstáculos sentidos pelos matemáticos, ao longo da história, na descoberta e aplicação desses mesmos conceitos e procedimentos. Nesse sentido, o conhecimento histórico permite que a integração da história da matemática no ensino proporcione uma mudança na forma como se observa o processo de aprendizagem dos alunos, tornando o professor mais atento e capaz de entender melhor os obstáculos que os alunos encontram na aprendizagem de determinados conceitos e procedimentos matemáticos que ocorrem em contexto de sala de aula. Trabalhando com fontes primárias, tem-se não só a possibilidade de conhecer o processo criativo presente na história da matemática, mas também a oportunidade de proceder a uma mudança de discurso de sala de aula. A integração da história da matemática em sala de aula, nomeadamente no recurso a fontes primárias, possibilita, por um lado, ao professor o desenvolvimento da capacidade de explicar e responder a variadas questões, que surgem em contexto de sala de aula, e por outro lado, proporciona aos alunos a oportunidade de desenvolver a arte de discutir, justificar as suas próprias opiniões e apresentar o seu próprio raciocínio aos seus pares.

Esta experiência permitiu também perceber quais as dificuldades dos alunos e qual a avaliação que eles fazem ao realizar tarefas do âmbito da história da matemática, facultando ainda, ao investigador, uma oportunidade de acompanhar e percecionar, ao longo da realização das tarefas, o aumento de interesse e entusiasmo dos alunos na resolução deste tipo de tarefas, apresentando-se como interlocutores mais críticos a julgar as suas ideias e as opiniões dos outros, a justificar os seus raciocínios e a valorizar a matemática no seu contexto histórico. De facto, esta interação discursiva ainda é possível ser observada em alguns dos alunos que neste momento frequentam o ensino secundário, e dos quais o investigador é ainda professor, uma vez que continuam a apreciar a matemática como um empreendimento cultural e humano.

Realça-se nesta experiência, que a história da matemática surge como um veículo promotor da argumentação matemática. De facto, entender as formas de argumentação e o tipo de estruturas de argumentação presentes nos discursos argumentativos dos alunos, permite uma melhor perceção da forma como os alunos justificam os seus raciocínios, nomeadamente ao nível do processo de prova matemática. Nesse sentido, no final deste estudo, é particularmente gratificante a certeza de que, apesar das dúvidas e dificuldades sentidas, ao longo da realização destas tarefas, estes alunos não só aprenderam matemática, mas também experienciaram a atividade matemática, no seu contexto histórico, e desenvolveram ideias sobre processos característicos desta ciência.

A realização deste estudo permite, ainda, realçar a importância da história da matemática na formação inicial e contínua dos professores, tanto ao nível científico, como ao nível do valor didático da história da matemática. No entanto, há que ser cuidadoso na sua aplicação em contexto de sala de aula, nomeadamente sobre a importância de conhecer o contexto histórico e o objetivo que se pretende com a realização de determinada tarefa do âmbito da história da matemática, em particular no desenvolvimento das capacidades transversais como a comunicação, o raciocínio, a argumentação, as conexões e a resolução de problemas.

Finalmente, deste trabalho, sai reforçada a ideia não só dos benefícios da integração da história da matemática em contexto de sala de aula, mas também das potencialidades da mesma no processo de ensino e aprendizagem. Embora a integração da história da matemática seja uma ferramenta de que o professor disponha para rentabilizar a sua prática letiva, é importante, tal como sublinha Fauvel (1991) que tenha consciência que a integração da história da matemática, em contexto de sala de aula, não resulta numa mudança milagrosa na motivação dos alunos para aprender ou numa mudança nas suas próprias realizações matemáticas. De facto, a história da matemática, embora proporcione uma reflexão ao nível dos problemas cognitivos e educacionais, nomeadamente ao nível das conceções matemáticas dos alunos e, consequentemente, no seu ensino, não pode ser, como refere Barbin (2000), considerada panaceia para resolver quer a falta de motivação quer as dificuldades manifestadas pelos alunos, ou seja, como observa Fauvel (1997, p. 17) «a história não é apenas uma espécie de lubrificante ou aditivo que vem numa bisnaga e que pode ser usado em determinada altura, como o amaciador para pôr na máquina de lavar.».

8.3. Sugestões para futuras investigações

Este estudo suscita novas propostas de trabalho e oportunidades de investigação quer sobre a temática da argumentação, quer sobre a própria dinâmica associada à integração da história da matemática em contexto de sala de aula.

Um primeiro conjunto de questões que faria sentido analisar com mais detalhe diz respeito às condições concretas em que decorreu este trabalho. Uma vez que o valor e força deste estudo reside na especificidade humana do caso construído, não deixa de suscitar a interrogação sobre o tipo de conclusões a que se poderá chegar partindo de condições diferentes, nomeadamente se esta experiência for desenvolvida com uma turma do ensino secundário. Consideramos, assim, ser relevante desenvolver um estudo similar com outras tarefas, do âmbito da história da matemática, enquadradas no programa do ensino secundário da disciplina de matemática A.

Ainda no âmbito da história da matemática, a literatura que aborda esta temática refere a importância de se desenvolver experiências empíricas sobre o uso e a integração da mesma em contexto de sala de aula. Nesse sentido, um aspeto que decorre do trabalho desenvolvido neste estudo e que, portanto, valerá a pena investigar recai sobre o tipo de raciocínios produzidos pelos alunos, quando envolvidos na realização de tarefas do âmbito da história da matemática.

Ao nível da argumentação, vária literatura aponta a importância da argumentação para a aprendizagem da prova matemática. Seria, portanto, interessante desenvolver um estudo que permitisse analisar e tipificar quais as condições necessárias para que a argumentação possa influenciar a aprendizagem da prova da matemática. As questões a abordar incluiriam, por exemplo, uma análise dos padrões de raciocínio, tendo em consideração os tipos de argumentos produzidos, e do tipo de estruturas de argumentação presentes. De facto, diferentes estruturas de argumentação podem revelar diferentes culturas de sala de aula e diferentes abordagens no ensino da prova.

Referências

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)… *Educação Matemática* 8, (pp. 7-10; p. 35). Lisboa: APM.

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: a experiência do Projecto MAT789*. Lisboa: APM.

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, L. (1999). A matemática na educação básica. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Ames, C. & Archer, J. (1988). Achievement goals in the classroom: Students' learningstratigies and motivation processes. *Journal of Educational Psychology*, 80(3), 260-267.

APM (1996). Actas do Congresso «História e Educação Matemática», 2 vols.. Lisboa: APM.

Anglin, W. (1994). *Mathematics: A concise history and philosophy*. New York: Springer.

Arcavi, A., Bruckheimer, M. & Ben-Zvi, R. (1982). Maybe a mathematics teacher can profit from study of the history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 2(1), 30 – 33.

Aristóteles (1985). *Primeiros analíticos*. Pinharanda Gomes (trad.). Lisboa: Guimarães Editores.

Aristóteles (2005). *Retórica*. Lisboa: Imprensa Nacional-Casa da Moeda.

Avital, S. (1995). History of Mathematics can help improve instruction and learning. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekke, B. Johansson e V. Katz (Eds.), *Learn from the Masters* (pp. 3-12). Washington: The Mathematical Association of America.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Eds.), *Mathematics teachers and children* (pp. 316–230). London: Hodder and Stoughton.

Balacheff, N. (1991). Treatment of refutation: Aspects of the complexity of a constructivist approach of mathematics learning. In E. von Glasersfeld (Eds.). *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 89–110). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Balacheff, N. (1999). *Is argumentation na obstacle? Invitation to a debate*. Retirado a 23 de Abril de 2010 de http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506 ThemeUK.html

Banegas, J. (1998). L'argumentació en matemàtiques. *XIIè Congrés Valencià de Filosofia*. Miguel Gimenez & Andrew Aberdein (Trad.), Valencià.

Banegas, J. A. (2003). Argumentation in Mathematics. XIIè *Congrés Valencià de Filosofia*. Miguel Gimenez & Andrew Aberdein (Trad.).

Barbin, E. (1991). The reading of original texts: how and why to introduce a historical perspective. *For the Learning of Mathematics* 11(2), 12–13.

Barbin, E. (1996). The role of problems in the history and teaching of mathematics. in R. Calinger (ed.), *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*. MAA, Washington, pp. 17–25.

Barbin, E. (1997). Sur les relations entre épistémologie, histoire et didactique. *Repères IREM* 27, 63–80.

Barbin, E. (2000). The historical dimension: from teacher to learner. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: an ICMI study*, (pp. 66 – 70). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Barbin, E., et al. (2000). Integrating history: research perspectives. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: an ICMI study*, (pp. 63 – 90). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Barthélemy, G. (2003). *2500 anos de Matemática. A evolução das ideias*. Lisboa: Instituto Piaget.

Bell, A. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1–2), 23–40.

Berggren, J. (1986). *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*. New York: Springer-Verlag.

Bidwell, J. K. (1993). Humanize your classroom with the history of mathematics. *Mathematics Teacher* 86(6), 461 – 464.

Blum, W., & Kirsch, A. (1991). Preformal proving: Examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 183–203.

Boavida, A. M. (2005a). A argumentação na aula de Matemática: Olhares sobre o trabalho do professor. Em J. Brocardo, F. Mendes, & A. M. Boavida (Eds.) *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 13-43). Setúbal: IPS.

Boavida, A. (2005b). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração*. Tese de doutoramento não publicada. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Portugal.

Boavida, A. (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar. *Educação e Matemática* (Outubro/Novembro): APM.

Bochner, S. (1996). The *Role Mathematics in the Rise of Science*. Princeton: Princeton University Press.

Boero, P. (1999). *Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education*. Retirado a 18 de Junho de 2009 de http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., & Mariotti, M. A. (1996). Challenging the tradicional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. In Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the twentieh conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 113–120). Valencia, Spain: University of Valencia.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1999). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Boyer, C. (1956). *History of Analytic geometry*. New York.

Boyer, C. (1989). *A History of Mathematics* (second edition, revised by U. C. Merzbach). New York.

Boyer, C. B. (2002). *História da Matemática*. Elza F. Gomide (trad.). São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda.

Branford, B. (1908). *A study of mathematical education: Including the teaching of arithmetic*. Oxford: Clarendon Press.

Breton, P. & Gauthier, G. (2000). *Histoire des theories de l'argumentation*. Paris: La Découverte.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistemologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathémathiques*, vol. 4, n.º2. La Pensée Sauvage: Grenoble.

Bruna, J., Andrade, L. & Strazynski, G. (1987). *Os pensadores*. São Paulo: Nova Cultural.

Buhler, M. (1990). Reading Archimedes' measurement of a circle. In J. Fauvel (ed.), *History in the mathematics classroom: the IREM papers*, Leicester: Mathematical Association, 43 – 58.

Busard, H. (1991), *Biographical dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from the Dictionary of Scientific Biography*. New York.

Bussi, M. & Sierpinska, A. (2000). The relevance of historical studies in designing and analyzing classroom activities. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: an ICMI study*, (pp. 154 – 161). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Byers, V. (1982). Why study the history of mathematics?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 13(1), 59–66.

Cajori, F. (1991). A History of Mathematics. New York.

Calinger, R. (Ed.) (1986). *Vita mathematica: Historical research and integration with teaching*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Carrilho, M. M. (1992). Argumentação e contexto. *Caderno de Filosofias: argumentação, Retórica, Racionalidades*, 5, 21-37.

Chazan, D. (1993). High school geometry student's justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 359–387.

Cohen, L. & Marion, L. (1990). *Método de investigacion education*. Madrid: La Murella.

Coelho, F. (2005). Prefácio à edição brasileira da obra de C. Perelman, & L. Olbrechts-Tyteca *Tratado da argumentação: A nova retórica* (pp. xi-xviii). São Paulo: Martins Fontes.

Collette, J.-P. (1973). *Histoire des Mathématiques,* vol. 1. Montreal: Vuibert.

Collette, J.-P. (1979). *Histoire des Mathématiques,* vol. 2. Montreal: Vuibert.

David, P. & Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. Boston: Birkhäuser.

Denzin, N. K. (1989). *Interpretive biography*. Newbury Park, CA: Sage.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-22). London: Sage.

Denzin, N. & Lincoln, Y. S. (2005). Introduction. The Discipline and Practice of Qualitative Research In Denzin, N. & Lincoln, Y. S. (Eds.) *The Sage Handbook of Qualitative Research (Third edition)* (3.ª ed.). Thousand Oaks: SAGE.

Descartes, R. (1989). *Discurso do Método*. Tavares Guimarães (org. et trad.). Porto: Porto Editora.

Descartes, R. (2001). *A Geometria*. Lisboa: Editorial Prometeu.

Dijksterhuis, E. J. (1987). *Archimedes.* Tradução: C. Dikshoorn. Princeton: Princeton University Press.

Djebar, A. (1998). *La phase arabe de l'algèbre (VIII^e^ – XV^e^ sìecles); 12^e^ Colloque Inter – IREM Épistémologie sur "La pensée algébrique"*. Douai.

Doerr, H. (2006). Examinig the tasks of teaching when using students' mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics* 62, 3-24.

Douek, N. (1999a). Argumentation and conceptualization in context: A case study on sunshadows in primary school. *Educational Studies in Mathematics*. 39, 89–110.

Douek, N. (1999b). *Argumentative aspects of proving of some undergraduate mathematics students'performances*. Retirado a 18 de Junho de 2009 de http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Resumes/Douek/Douek99/Douek99.html

Douek, N. (2000). *Comparing argumentation and proof in a mathematics education perspective*. Retirado a 18 de Junho de 2009 de http.//www-didactique.imag.fr/prevue/ICME9TG12/ICME9TG12Contributions/DouekICME00html.

Douek, N. (2002), Context, complexity and argumentation. In A. Cockburn & E. Nardi (eds.). *Proceedings of the twenty-sith annual conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp.297–304). Norwich: PME.

Douek, N. (2005). Argumentation and development of mathematical knowledge. In A. Chronaki & I. M. Christiansen. (Eds.). *Challenging perspectives on mathematics classroom communication* (pp. 145–172). Greenwich, CN: Information age Publishing.

Duval, R. (1988). Approche cognitive des problems de geometrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*., Vol. 1, pp.57-74. IREM: Strasbourg.

Duval, R. (1990). Pour une aproche cognitive de l'argumentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 3, 195–221. Strasbourg: IREM de Strasbourg.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics*. 22(3), 233–261.

Duval, R. (1992–1993). Argumenter, démontrer, expliquer: continue ou rupture cognitive? *Petit X, 31*. 37–61.

Duval, R. (1995).Sémiosis et pensée humaine. Édition: Peter Lang, Suisse.

Duval, R. (1995). *Geometry from a cognitive point of view*.

Duval, R. (1999). *Questioning argumentation*. Retirado a 18 de Junho de 2009 de http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeUK.html

Eecke, P. ver (1959). *Diophante d'Alexandrie – Les six Livres Arithmétiques et le Livre des Nombres Polygones*. Paris.

Eisenhart, M. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*, 99-114.

Erickson, F. (1985). *Qualitative methods in research on teaching. Acedido em 4 Fevereiro*, 2012, de http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED263203.pdf

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 119-161). New York, NY: Macmillan.

Erickson, F. (1989). Métodos cualitativos de investigación sobre la ensenanza. In M. Wittrock (Ed.), *La investigación de la ensenanza II. Métodos cualitativos y de observación*. Barcelona: Paidos.

Erlandson. D. A., Harris, E. L., Skipper, B. L. e Allen, S. D.(1993). Doing naturalistic inquiry. Newbury Park: Sage Publications.

Ernest, P. (1998). The history of mathematics in the classroom. *Mathematics in School*, 27(4), 26 – 31. http://www.jstor.org/stable/i30211863

Estrada, M. (1991). "Tópicos sobre a história da matemática na geometria analítica – algumas reflexões sobre o uso e a função da matemática no ensino secundário". *Actas. ProfMat91* (Vol. II). Porto: APM.

Estrada, M. (1993). A História da Matemática no ensino da Matemática. *Educação e Matemática* (n.º27, pp. 17-20). Lisboa: APM.

Estrada, M., Sá, C., Queiró, J. et al. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Estrada, M. (2000a). A Matemática no Antigo Egipto. In Estrada, M., Sá, C., Queiró, J. et al. *História da Matemática* (pp. 19-60). Lisboa: Universidade Aberta.

Estrada, M. (2000b). A Matemática na Mesopotâmia. In Estrada, M., Sá, C., Queiró, J. et al. *História da Matemática* (pp. 61-105). Lisboa: Universidade Aberta.

Estrada, M. (2000c). A Matemática na Civilização Islâmica. In Estrada, M., Sá, C., Queiró, J. et al. *História da Matemática* (pp. 403-444). Lisboa: Universidade Aberta.

Estrada, M. (2000d). A Criação das Geometrias não-Euclidianas. In Estrada, M., Sá, C., Queiró, J. et al. *História da Matemática* (pp. 485-516). Lisboa: Universidade Aberta.

Evertson, M. C., & Green, J. (1986). Observation as inquiry and method. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research of teaching* (pp. 162-213). New York, NY: Macmillan.

Eves, H. (1964). *An Introduction to The History of Mathematics*. New York.

Eves, H. (1994). *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora Ltda.

Eves, H. (2004). *Introdução à História da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Editora UNICAMP.

Fasanelli, F. (2000). The political context. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in matehamtics education: The ICMI study*, (pp. 1 – 38). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fauvel, J. & Gray, J. (1987). The History of Mathematics: A Reader. London/Milton Keynes: MacMillan/The Open University.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 3 – 6.

Fauvel, J. (1997). A utilização da História em Educação Matemática. *Relevância da História no Ensino da Matemática*, 1 Grupo de Trabalho sobre História e Ensino da Matemática (GTHEM/APM).

Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds). (2000). *History in mathematics education: An ICMI study*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ferreira, R. & Rich, B. (2001). Integrating history of mathematics into the mathematics classroom. *Quadrante* (Vol. 10, nº 2). Lisboa: APM.

Fiorentini, D. & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática. Percur-sos teóricos e metodológicos*. Campinas, SP: Autores Associados.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*. 3(2), 9–18.

Flusser, P. (1992). Euler's amazing way to solve equations. *Mathematics Teacher*, 85(3), 224 – 227.

Fontana, A., & Frey, J. (1994). Interviewing: The art of science. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 361-376). London: Sage.

Forman, E., Larreamendy-Joerns, J., Stein, M. K., & Brown, C. (1998). You're going to want to find out which and prove it: Collective argumentation in mathematics classroom. Learning and Instruction, 8, 527–548.

Forman, E., & Ansell, E. (2001). The multiple voices of a mathematics classroom community. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 115-142.

Franke, M. L., Fennema, E., & Carpenter, T. (1997). Teachers creating change: Examining envolving beliefs and classroom practices. In E. Fennema &

B. Scott Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition*, (pp. 255 – 282). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Freudenthal, H. (1981). Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics?. *For the Learning of Mathematics* 2(1), 30–33.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1998). History of mathematics in school across disciplines. *Mathematics in School*, 27(4), 48 – 51.

Furinghetti, F. (2000). The history of mathematics as a coupling link between secondary and university teaching. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology*, 31(1), 43 – 51.

Galotti, K., Komatsu, L. & Voelz, S. (1997). Children's differential performance on deductive and inductive syllogisms. *Developmental Psychology*, 33(1), 70–78.

Garuti, R., Boero, P. & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorem and dificulty of proof. In A. Olivier & K. Newstead 8Eds.). *Proceedings of the twenty-second annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.2.pp. 345–352). Stellenbosch, South Africa.

Gillings, R. (1982). Mathematics in the time of the Pharaohs. New York: Dover.

Goetz, J., & LeCompte, M. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. New York, NY: Academic Press.

Grácio, R. (1993). *Racionalidade argumentativa*. Porto: Edições ASA.

Grattan-Guinness, I. (1973). Not from nowhere, history and philosophy behind mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 4, 421–453.

Gribbin, J. (2005). *História da Ciência – De 1543 ao Presente*. Mem Martins: Publicações Europa-América, Lda.

Grimberg, G (2008). A Matemática grega e o ensino atual da Matemática. Retirado a 2 de Novembro de 2010 de http://www.sbemrj.com.br/spemrj6/artigos/d2.pdf

Grize, J.-B. (1996). *Logique naturelle et communications*. Psychologie sociale, presses Universitaires de France.

Grugnetti, L. (1994). Relations between history and didactics of mathematics, *Proceedings of PME XVIII*, Lisbon 121-124.

Grugnetti, L. (2000). Ancient problems for development of strategic thinking. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: an ICMI study*, (pp. 78 – 81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Grugnetti, L. & Rogers, L. (2000). Philosophical, multicural and interdisciplinary issues. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: an ICMI study*, (pp. 39 – 62). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Guerreiro, A. (2011). *Comunicação no ensino-aprendizagem da Matemática: Práticas no 1.° ciclo do ensino*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Gulikers, I. & Blom, K. (2001). A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Journal Educational in Mathematics*, Vol. 47, n.º 2, pp. 223-258. Springer Netherlands.

Hanna, G. & Barbeau, E. (2002). What is proof? In B. Baigrie (Ed.). *History of modern science and mathematics* (4 Vols), (Vol. 1, pp. 36–48). New York: Charles Scribner's Sons.

Hanna, G., Jahnke, H., & Pulte, H. (2010). *Explanation and Proof in Mathematics*. Springer New York.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (Issues in Mathematics Education, Vol. 7, pp. 234–282). Providence, RI: American Mathematical Society.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396–428.

Heath, T. (1908). *The thirteen Books of Euclid's Elements* (Vols. I – II). Cambridge: University Press.

Heath, T. (1921). *A History of Greek Mathematics,* Vol. II: From Aristarchus to Diophantus. Oxford: Clarendon Press.

Heath, T. (1956). *The thirteen Books of Euclid's Elements*. Dover: New York.

Heath, T. L. (editor). *The Works of Archimedes*. New York: Dover, 2002. Editado em notação moderna com capítulos introdutórios de T. L. Heath, com um suplemento, The Method of Archimedes, descoberto recentemente por Heiberg. Reimpressão integral da edição de 1897, com o suplemento de 1912.

Herbert, E. (ed.) (1995). *Quelques aspects des mathématiques d'Ibn al-Banna de Marrakech* (1256-1321). Rouen: IREM de Rouen.

Herbst, P. (2004). Interactions with diagrams and the making of reasoned conjectures in geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 36(5), 129–139.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 389–399.

Horak, V. M. & Horak W. J. (1981). Geometric proofs of algebraic identities. *Mathematics Teacher* 74(3), 212–216.

Horn, J., Zamierowski, A., & Barger, R. (2000). Correspondence from mathematicians. *Mathematics Teacher*, 93(8), 688 – 691.

Huberman, M., & Miles, M. (1994). Data management and analysis methods. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), Handbook of qualitative research (pp. 428-444). London: Sage.

Itard, J., Bouveresse, J. & Salle, É. (1977). *Historire des mathématiques*. Canada.

Jahnke, H. N., Knoche, N., & Otte, M. (Eds.) (1996). *History of mathematics and education: Ideas and experiences*. Göttingen, Germany: Vandenhoeck & Ruprecht.

Jahnke, H., Arcavi, A., Barbin, E. et al. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: an ICMI study*, (pp. 291 – 326). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Jankvist, U. T. (2009a). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educacional Studies of Mathematics*, 71: 235–261. Springer Netherlands.

Jankvist, U. T. (2009b). On empirical research in the field of using history in mathematics education. *Revista Latinoamericana de Investigacion en*

Matematica Educativa, Vol. 12, Núm. 1, marzo-sin mes, pp. 67-101. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa: Distrito Federal, México.

Jahnke, H. N. (2010). The Conjoint Origin of Proof and Theorical Physis. In Gila Hanna, Hans Niels Jahnke e Helmut Pulte (Eds.). *Explanation and Proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 17–32). New Yok: Springer.

Jones, R. B. (1996). *The formalisation of mathematics*. Retirado a 18 de Junho de Agosto de 2011 de http://www.rbjones.com/rbjpub/maths/math003.htm

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation: A methodology for human studies*. Newbury Park: Sage Publications.

Katz, V. (1993). *A History of Mathematics. An introduction*. New York: HarperCollins College Publishers.

Katz, V. (2010). História da Matemática. Jorge Nuno Silva (revisão). Lisboa: Edição da Fundação Calouste Gulbenkian.

Kelley, L. (2000). A mathematical history tour. *Mathematics Teacher*, 93(1), 14 – 17.

Kieran, C. (1994). Doing and seeing things differently: a 25-year retrospective of mathematics education research on learning. *Journal for research in mathematics education* **25**, 583-607.

Klein, J. (1968). *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. Eva Brann (trad.). New York: Dover.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press.

Kneale, W. & Kneale, M. (1962). *O desenvolvimento da lógica*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Knipping, (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving process. *ZDM Mathematics Education* (40: pp. 427 – 441). New York: Springer.

Kronfellner, M. (2000). The indirect genetic approach to calculus. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: an ICMI study*, (pp. 71 – 74). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Krummheur, G. (1995). The ethonography of argumentation. Em P. Cobb & H. Bauesfeld (eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NY: Erlbaum.

Krummheuer, G. (1998). Formats of Argumentation in the Mathematics Classroom. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi & A. Sierpinska (Eds.). *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 223 – 234). Reston, VA: NCTM.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior*, 26(1), 60–82.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Lakoma, E. (2000). History of mathematics in curricula and schoolbooks: a case of study of Poland. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: an ICMI study*, (pp. 19 – 29). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale University Press.

Le Goff, J.-P. (1993). Le trisième degree en second cycle: le fil d'Euler. *Repères IREM*, n.º17.

Le Goff, J.-P. (1996). Cubic equations at secondary school level: following in Euler's footsteps, in E. Barbin, R. Douady (Eds.), *Teaching mathematics: the relationship between knowledge, curriculum and practice*. Pont-a-Mousson: Topiques Éditions, 11 – 34.

Lochhead, J. & Mestre, J. (1995). Das Palavras à Álgebra: corrigindo concepções erradas. In: Arthur Coxford & Shulte, Albert, *As ideias da Álgebra*. São Paulo: Atual.

Ludke, M., & André, M. E. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Maanen, Jan van (1991). L´Hôpital's weight problem. *For the learning of mathematics* 11(2), 44-47.

Maanen, Jan van (1997). New maths may profit from old methods. *For the learning of Mathematics*, 17(2), 39 – 46.

Mahammed, N. (1995). *Sur la resolution des equations algébriques*. Lille: IREM.

Mahoney, M. (1968). Another look at Greek geometrical analysis. *Archive for History of Exact Sciences*, 31.12 (pp. 318-348).

Mahoney, M. (1973). *The Mathematical Career of Pierre de Fermat (1601-1655)*. Princeton.

Manno, A. (1972). *A Filosofia da Matemática*. Lisboa: Edições 70.

Marshall, G. (2000). *Using history of mathematics to improve secondary students' attitudes towards mathematics*. Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University, Bloomington-Normal, IL, USA.

Martinho, H. (2007). *A Comunicação na sala de aula de matemática: um projecto colaborativo com três professoras do ensino básico*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Martzloff, J.-C. (1997). *A history of Chinese mathematics*. Berlin: Springer.

Mason, J., & Pimm. D. (1984). Generic exemples: Seeing the general in the particular. Educational Studies in Mathematics, 15(3), 277–289.

McCracken, G. (1988). *The long interview*. Beverly Hills, CA: Sage.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education. A qualitative approach*. San Francisco: Jossey-Bass.

Middleton, J. A. (1995). A study of intrinsic motivation in the mathematics classroom: A personal constructs approach. *Journal for research in Mathematics Education*, 26(3), 254 – 279.

Middleton, J. A. & Spanias, P. A. (1999). Motivation for achievement in mathematics: findings, generalizations, and criticisms of the research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(1), 65 – 88.

Miorim, M. (1998). *Introdução à história da Educação Matemática*. São Paulo: Atual Editora.

ME (1991a). *Programa de Matemática do 2.º ciclo do ensino básico*. Lisboa.

ME (1991b). *Programa de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico*. Lisboa.

Ministério da Educação Básica (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico*: *Competências Essenciais*. Lisboa.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Molina, J. A. (2001). Lakatos como filósofo da matemática. Episteme . n. 13, p. 129-153, jul./dez. Porto Alegre.

Mugler, C. (1971). *Les Oeuvres d'Archimède*. Vol. 2: *Des Spirales, De l'Équilibre des Figures Planes, L'Arénaire, La Quadrature de la Parabole.* Paris: Budé.

Muller, J.-P. (1994). La démonstration en géométrie: en quatrième et en troisième. *REPERES-IREM*, nº.15, Avril. Topique Editions.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM (publicado originalmente em inglês 2000).

Nesselmann, G. (1969). *Die Algebra der Griechen*. Frankfurt:Minerva.

Netz, R. (1998). Greek mathematical diagrams: Their use and their meaning. *For the learning of Mathematics*, 18(3), 33 – 39.

Netz, R. (1999). *The shaping of deduction in Greek mathematics: A study in cognitive history*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

O' Connor, M. & Michaels, S. (1996). Shifting participant frameworks: orchestrating thinking pratices in group discussion. In D. Hicks (Ed.), *Discourse, learning and schooling* (pp. 63-103). New York: Cambridge University Press.

Oléron, Pierre (1983). *A argumentação*. Mira-Sintra – Mem Martins: Publicações Europa-América.

Oliveira, A. (2002). Reflexões sobre a aprendizagem da álgebra. *Educação Matemática em Revista*. Ano 9, n.º 12, pp.35 – 39, jun. São Paulo: SBEM.

Patton, M. Q. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation*. Newbury Park: Sage Publications.

Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de da démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Tese de doutoramento não publicada. Genova: Université Joseph Fourier-Grenoble I/Université de Genova, Itália.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*. 66. 23–41.

Perelman, C. (1970). *Le champ de l'argumentation*. Bruxelles: Presses Universitaires.

Perelman, C. (1987). *Argumentação*. Em Enciclopédia Einaudi (Vol. 11, pp. 234-265). Lisboa: Imprensa Nacional.

Perelman, C. (1993). *O Império Retórico. Retórica e Argumentação*. Porto: Edições ASA.

Perelman, C. (1999). *Retóricas*. São Paulo: Martins Fontes.

Perelman, C. & Olbrechts-Tyteca, L. (2005). *Tratado da Argumentação. A nova Retórica*. São Paulo: Martins Fontes.

Peyroux, J. (1990). *Oeuvres Mathématiques*. Paris.

Philippou, G. & Christou, C. (1998). The effects of a preparatory mathematics program in changing propspective teachers' attitudes towards mathematics. Educational Studies in Mathematics, 35(2), 189 – 206.

Platão (1997). *A República*. São Paulo: Editora Nova Cultural Ltda.

Platin, C. (1990). *Essais sur l'argumentation. Introduction linguistique a l'étude de la parole argumentative*. Paris: Éditions Kimé.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. Acedido em 5 de Fevereiro, 2012, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte%20%28Estudo%20caso%29.pdf

Proclo (1970). *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Gleen R. Morrow (Trad.). Princeton: Princeton University Press.

Providência, N. (2000). *Matemática ou mesas, cadeiras e canecas de cerveja*. Lisboa: Gradiva.

Queiró, J. (1993). O saber: dos aspectos aos resultados (Sec. 5. Cap. V). In *História da Universidade em Portugal* (Eds. A. Ferrer Correia, L. A. Oliveira Ramos, Joel Serrão, A. Oliveira), vol. 1, Part II (1537-1771). Universidade de Coimbra: Fundação Gulbenkian.

Queiró, J. (2000). Das equações à Álgebra moderna. In Estrada, M., Sá, C., Queiró, J. et al. *História da Matemática* (pp. 61-105). Lisboa: Universidade Aberta.

Radford, L. (1993). L'émergence et le développement conceptuel de l'algèbre. Actes de la première université d'été européenne. Montpellier: IREM de Montpellier.

Radford, L. et al. (2000). The role of historical analysis in predicting and interpreting students' difficulties in mathematics. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: an ICMI study*, (pp. 66 – 70). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Radice, L. (1981). *O Infinito*. Lisboa: Editorial Notícias.

Ramalho, G. (coord.) (2002). PISA 2000 – *Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática e competências dos alunos portugueses*. Lisboa: Ministério da Educação/GAVE.

Ransom, P. (1991). Whys and hows. *For the Learning of Mathematics* 11(2), 7–9.

Raymond, A. M. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematical beliefs and teaching practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 550 – 576.

Reimer, L. & Reimer, W. (1995). Connecting mathematics with its history: A poweful practical linkage. In A. House & A. F. Coxford (Eds.). *Connecting Mathematics Across the Curriculum*, 1995 Yearbook of the NCTM, (pp. 104 – 114). Reston, VA: NCTM.

Reid, A. & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching*. Rotterdam: Sense Publishers.

Rezende, W. S. (2010). *Três grandes marcos do resgate retórico: Perelman, Toulmin e Meyer*. CSOnline – Revista Eletrônica de Ciências Sociais, ano 4, ed. 10, mai./ago.

Rickey, V. F. (1996). The necessity of history in teaching mathematics. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: Historical research and integration with teaching*, (pp.251 – 256). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Rubinstein, R. N. & Schwartz, R. K. (2000). Word histories: Melding mathematics and meanings. *Mathematics Teacher*, 93(8), 664 – 669.

Sá, C. (2000). A Matemática na Grécia Antiga. In Estrada, M., Sá, C., Queiró, J. et al. *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Santos, L. (2000). *A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: Um estudo de três professoras do ensino secundário.* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Schiefele, U. & Csikszentmihalyi, M. (1995). Motivation and ability as factors in mathematics experience and achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 163 – 181.

Schostberger, P. G. (2000). Kepler and Wiles: Models of perseverance. *Mathematics Teacher*, 93(8), 680 – 681.

Schubring, G. (1988). Historische Begriffsentwicklung und Lernprozeß aus der Sicht neuerer mathematikdidaktischer Konzeptionen (Fehler, 'Obstacles', Transposition). *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 4(2), 138–148.

Schubring, G. (2000). History of mathematics for trainee teachers. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: an ICMI study*, (pp. 91 – 142). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Scott, J. (1958). *A History of Mathematics. From Antiquity to the Beginning of the Nineteenth Century*. London.

Sekiguchi, Y. (2000). *Mathematical proof, argumentation and classroom communication: A Japonese perspective*. Retirado a 18 de Junho de 2009 de http://www-didactique.imag.fr/preuve/ICME9TG12/ICME9TG12Contributions/SekiguchiICNE900.html

Sekiguchi, Y (2002). *Mathematical roof, argumentation and classroom communication: From a culture perspective*. Tsukuba Journal of Educational study in Mathematics. Vol. 21.

Sekiguchi, Y. & Miyazaki, M. (2000). Argumentation and mathematical proof in Japan. Retirado a 18 de Junho de 2009 de http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/000102Theme/000102ThemeUK.html

Semadeni, Z. (1984). Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. For the Learning of Mathematics, 4(1), 32–34.

Sesiano, J. (1990). Rhetorische algebra in der arabisch-islamischen Welt. *Die Geschichte der Algebra, eine Einfuhrung*. E. Scholz (edi.).

Sherin, M. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(3), 205-233.

Sfard, A. (1994). What history of mathematics has to offer to psychology of mathematics learning. *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. I, University of Lisbon, Portugal, pp. 129–132.

Silva, C. M. & Araújo, C. A. (2001). Conhecendo e usando a história da matemática. *Educação e Matemática*, 61(1), 19 – 21.

Silva, J. (1993). A reforma curricular e a História da Matemática. *Educação e Matemática* 27, (pp. 27-31). Lisboa: APM.

Silva, J. (1995). O pensamento pedagógico de José Sebastião e Silva: Uma primeira abordagem. *Boletim da SPM*, 32, 101 – 114.

Silva, J. (coord.) (2001). *Matemática A, 10.º ano*. Lisboa.

Silva, J. (coord.) (2001). *Matemática A, 10.º ano*. Lisboa.

Silva, M. (2000). A Matemática no Ocidente Europeu nos séculos XII a XVI. In Estrada, M., Sá, C., Queiró, J. et al. *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Silva, I. & Silva, B. (2010). Desenvolvimento do cálculo: contribuições de Zenão, Eudoxo e Arquimedes. Retirado a 22 de Dezembro de 2011 de http://www.sbempb.com.br/epbem

Siu, F. K. & Siu, M. K. (1979). History of mathematics and its relation to mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 10(4), 561–567.

Siu, M.-K. (2000). Historical support for particular subjects. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: an ICMI study*, (pp. 241 – 290). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Siu, M.-K. & Tzanakis, C. (2004). History of mathematics in classroom teaching – appetizer? main course? or dessert?. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education 3*(1-2), v–x. Special double issue on the role of the history of mathematics in mathematics education (proceedings from TSG 17 at ICME 10).

Smith, E., & Henderson, K. (1959). Proof. In H. Fawcett, A. Hach, C. Junge, H. Syer, H. van Engen & P. Jones (eds.). *The growth of mathematical ideas k-12 twenty-fourth yearbook* (pp. 111–181). Washington, DC: NCTM.

Smith, D. (1951). *History of Mathematics, vol. I – General survey of elementary Mathematics*. New York: Dover.

Smith, D. (1953). *History of Mathematics, vol. II – Special topics of elementary Mathematics*. New York: Dover.

Stander, D. (1989). The use of history of mathematics in teaching. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics teaching: The state of the art*, (pp. 241 – 246). New York: The Falmer Press.

Stake, R. (1994). Case studies. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *handbook of qualitative research* (pp. 236-247). London: Sage.

Stein, M. (2001). Mathematical argumentation: putting umph into classroom discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 7(2), 110-112.

Stein, M., & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão. *Educação Matemática*, 105, 22-28. Lisboa: APM.

Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research. Grounded theory. Procedures and techniques*. London: Sage.

Struik, D. (1997). *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva – Publicações, L.da .

Struik, D. (1997). Porquê estudar História da Matemática? *Relevância da História no Ensino da Matemática*, 1 Grupo de Trabalho sobre História e Ensino da Matemática (GTHEM/APM).

Struve, H. (1996). On the epistemology of mathematics in history and in school. in H.N. Jahnke, N. Knocke and M. Otte (eds.). *History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences*. Göttingen.

Swetz, F. (1989). Using problems from history of mathematics in classroom instruction. *Mathematics Teacher*, 82(5), 370 – 377.

Swetz, F. (1984). Seeking relevance? Try the history of mathematics. *Mathematics Teacher*, 77(1), 54 – 62, 47.

Swetz, F. (1994). *Learning Activities from the History of Mathematics*. Portland: J. Weston Walch.

Swetz, F., Fauvel, J., Bekke, O., Johansson, B. & Katz, V. (Eds.). (1995). *Learn from the Masters*. Washington: The Mathematical Association of America.

Szabó, Á. (1960). Anfänge des Euklidischen Axiomensystems. Archive for History of Exact Sciences 1, 38–106. O. Becker (Ed.) 81965) *Zur Geschichte der griechischen Mathematik* (pp. 355–461). Darmstadt: Wissenschafliche Bugchgesellschaft.

Tall, D. (1995). Cognitive development, representations & proof, justifying and proving in school mathematics. *Institute of Education*. London, 27– 38.

Thomaidis, Y. (1991). Historical digressions in Greek geometry lessons. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 37 – 43.

Thompson, A. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: A synthesis of research. In D. A. Grouws, (Ed.). *Handbook of research in mathematics teaching and learning*, (pp. 127 – 146). New York: Macmillan.

Thurston, W. (1994). On proof and progress in mathematics. For the Learning of Mathematics, 15(1), 29 – 37. (Originalmente publicado em Bulletin of the American Mathematica Society, n.s., 30(2), 161 – 177).

Toulmin, S. (2008). *The Uses of Argument*. New York: Cambridge University Press. van der Waerdn, B. L. (1998). *Science awakening I, Paperback edition*. Dordrecht: Kluwer.

Tuckman, B. (2002). *Manual de Investigação em Educação* (2ª edição). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Tzanakis, C. & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in matehamtics education: The ICMI study*, (pp. 201 – 240). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Tzanakis, C. & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education. Some methodological and epistemological remarks. *For the learning of Mathematics*, 20(1), 44 – 55.

Vasconcellos, F. (2009). *História da Matemática na Antiguidade*. Lisboa: Associação Ludus.

van der Waerden, B. L. (1988). *Science awakening I, Paperback edition*. Dordrecht: Kluwer.

van Maanen, J. (1997). New maths may profit from old methods. *For the Learning of Mathematics*, 17(2), 39 – 46.

Veloso, E. (coord.) (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. APM e Instituto de Inovação Educacional.

Veloso, E. (1994). Pratical uses of mathematics in the past: A historical approach to the learning of mathematics. In J. P. Ponte 6 J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 1, pp. 133 – 136). Lisboa, Portugal. July 29 August 3, 1994.

Viète, F. (1970). *Opera Mathematica* (recognita Francisci à Schooten, Vorwort und Register von Joseph E. Hofmann). Hildesheim.

Waerden, B. (1985). *A history of Algebra*. Berlim: Springer.

Waldegg, G. (1997). Histoire, épistémologie et méthodologie dans la recherche en didactique. *For the Learning of Mathematics* 17(1), 43–46.

Weston, (1996). *A arte de argumentar*. Lisboa: Gradiva.

Wilson, P. S. & Chauvot, J. B. (2000). Who? How? What? A strategy for using history to teach mathematics. *Matehematics Teacher*, 93(8), 642 – 645.

Witmer, T, (1983). *Analytic Art*. Ohio.

Wood, T. (1999). Creating a Context for Argument in Mathematics Class. *Journal for Research in Mathematics Education 30*(2), (pp. 171-191).

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. Em M. Heuvel-Panhuizen (Ed.). *Actas da 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1-24). Utrecht: Utrecht University.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociamathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458–477.

Yackel, E., Cobb, P. & Wood, T. (1991). Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 390–408.

Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. Em J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227 – 236). VA: NCTM.

Yin, R. K. (1989). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park: Sage Publications.

Youschkevitch, A. (1976), *Les mathématiques arabes*. Paris: Vrin.

Anexos

Casos notáveis da multiplicação

O raciocínio matemático dos gregos pode, em grande parte, ser interpretado de maneira aritmética ou algébrica. Nesta tarefa vamos tentar estabelecer uma ligação entre a geometria e a álgebra à maneira dos antigos gregos.

Um segmento de reta pode ser representado por um número, que é o seu comprimento (desde que esteja fixada uma unidade de medida). Logo, o produto de dois números representa a área de um retângulo, isto é, um retângulo em que os dois lados não paralelos têm comprimentos iguais aos dois fatores. Do mesmo modo, o produto de três números representará o volume de um paralelepípedo.

Desta forma, efetuamos operações geométricas através de construções geométricas. Por exemplo, se x e y representam dois segmentos, então $x \times y$ é a área do retângulo de lados x e y. É costume chamar a este assunto a Álgebra Geométrica dos Gregos.

O período áureo da ciência helenística foi o século III a.C., onde se destacaram três grandes matemáticos: Euclides, Arquimedes e Apolónio.

Detenhamo-nos em Euclides. Apesar de pouco se saber da sua vida, provavelmente estudou e ensinou em Alexandria, e é à custa da publicação do tratado *Elementos* que Euclides tem o seu lugar de honra na história da Matemática. O tratado *Elementos* é uma compilação de resultados de autoria diversa, alguns conhecidos muito tempo antes de Euclides. Este tratado é constituído por treze livros, onde são abordados diversos temas da Matemática.


Euclides de Alexandria

O que te proponho é que em grupo analises a proposição 4 do segundo livro dos *Elementos* de Euclides (*Elementos* II, 4). Os excertos que vais ler foram retirados de uma edição portuguesa dos *Elementos*, de 1835.

O excerto seguinte traduz o enunciado da proposição II, 4:

PROP. IV. THEOR.

Se uma linha recta for cortada em duas partes quaesquer; será o quadrado da toda igual aos quadrados das partes juntamente com o rectangulo das mesmas partes tomado duas vezes (Fig. 5.).

Após enunciar esta proposição, Euclides inicia a prova da mesma.

Seja à recta AB cortada, como se quizer, no ponto C. Digo, que o quadrado da recta AB he igual aos quadrados das partes AC, CB juntamente com duas vezes o rectangulo comprehendido pelas mesmas partes AC, CB.

Acabaste de ler o início da demonstração dada por Euclides. Agora, o que te proponho é que desenhes a reta AB, o ponto C, e a figura descrita no próximo parágrafo da demonstração, assinalando os pontos nele referidos.

Sobre a recta AB descreva-se o quadrado ADEB (*Pr.* 46. 1.), e tirada a diagonal BD, pelo ponto C tire-se a recta CGF parallela a AD, ou BE (*Pr.* 31. 1.); e pelo ponto G a recta HK parallela AB, ou DE.

Acabaste de desenhar a figura dada por Euclides para ilustrar esta proposição.

Parte I

Tendo em atenção a figura que construíste, responde às seguintes questões:

1. Será o quadrilátero [CGKB] um quadrado. Justifica.

2. O que podes concluir acerca do quadrilátero [HDFG]? Justifica.

3. Volta a ler o segundo período do início da resolução dada por Euclides e observa a figura que construíste. O que concluis?

4. Numa breve composição, descreve a proposição II, 4 dos *Elementos* de Euclides a partir da construção apresentada e dos resultados que obtiveste.

Parte II

Considera os segmentos dados. a b

Constrói um quadrado de lado $a + b$ e determina, por dois processos diferentes, a expressão algébrica que traduz a área do quadrado de lado $a + b$.

Acabaste de formular o caso notável da multiplicação conhecido como o quadrado de um binómio.

Construções geométricas (I)

As construções geométricas com régua e compasso foram desenvolvidas pelos gregos. Os gregos antigos propuseram e resolveram diversos problemas com recurso a estes instrumentos, como por exemplo, a construção de um triângulo equilátero com um lado dado, a bissecção dum ângulo dado ou a construção de uma circunferência que passa por três pontos dados não colineares. Alguns dos problemas propostos pelos antigos gregos eram de difícil resolução e até mesmo de solução impossível. Por exemplo, três problemas que ficaram famosos foram – a trissecção do ângulo, a duplicação do cubo e a quadratura do círculo. O primeiro consiste em dividir um ângulo dado em três partes iguais; o segundo, em construir o lado de um cubo com o dobro do volume de um cubo inicialmente considerado; e o terceiro, em construir um quadrado cuja área é a mesma de um círculo dado. Estes problemas ficaram em aberto por vários séculos, até a situação ficar esclarecida a partir de uma formulação algébrica no século XIX, onde se demonstrou a impossibilidade de os resolver com recurso à régua e compasso. Mas isto será uma outra história!

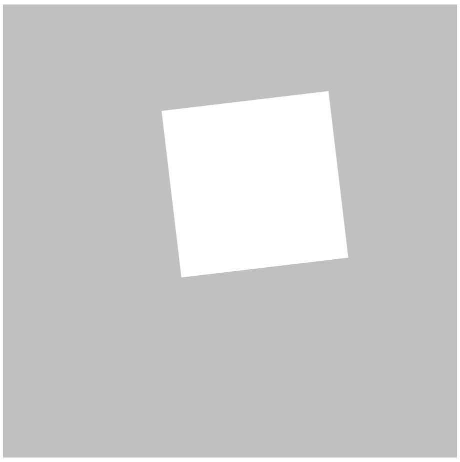
Para resolver problemas de construções geométricas, além de lápis e papel, utilizam-se, como já te deste conta, dois instrumentos para desenhar figuras: um compasso e uma régua (não graduada). O compasso será utilizado para desenhar circunferências e a régua para traçar retas.

Considera os seguintes quadrados:

Em grupo, usando uma régua não graduada e um compasso, constrói um quadrado cuja área seja igual à soma das áreas dos quadrados dados. Não te esqueças de registar os diferentes passos da tua construção, de forma a justificar a solução encontrada.

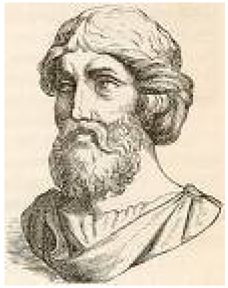
Construções geométricas (II)

Considera a seguinte figura constituída por dois quadrados:



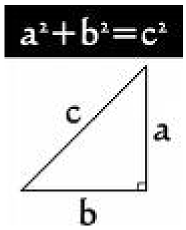
Em grupo, usando uma régua não graduada e um compasso, constrói um quadrado cuja área seja igual à área da parte sombreada da figura. Não te esqueças de registar os diferentes passos da tua construção, de forma a justificar a solução encontrada.

Teorema de Pitágoras (I)



Pitágoras de Samos

O Teorema de Pitágoras é, possivelmente, um dos mais antigos resultados geométrico de que temos notícia. Pitágoras viveu na Grécia, por volta do século VI a.C., contudo, não se conhece muito da sua vida. Sabe-se que tanto ele como os seus discípulos se dedicaram ao estudo da aritmética, geometria, astronomia e música, e que constituíram uma espécie de irmandade – os Pitagóricos – de cariz filosófico-religioso, mas que não deixava de ser uma escola científica. Para Pitágoras e seus seguidores, a chave para a compreensão do mundo era o número, o que fazia surgir a aritmética como a ciência por excelência. No âmbito do seu trabalho em geometria, atribui-se a Pitágoras a demonstração do teorema com o seu nome e a descoberta da existência dos números irracionais.

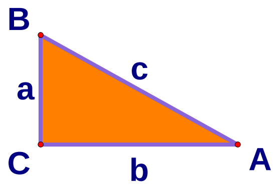


Como sabes, o teorema de Pitágoras diz-nos que, num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

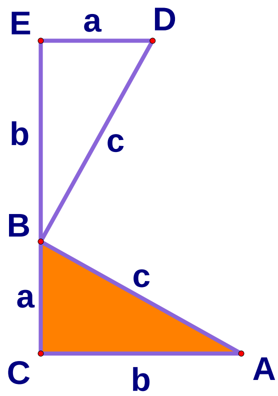
Sendo este teorema tão antigo, famoso e importante, e talvez até por outras razões, foram sendo publicadas ao longo da história centenas de provas. O que te proponho é que em grupo estudes, analises e discutas algumas dessas demonstrações.

Considera a construção geométrica que se obtém efetuando os passos seguintes.

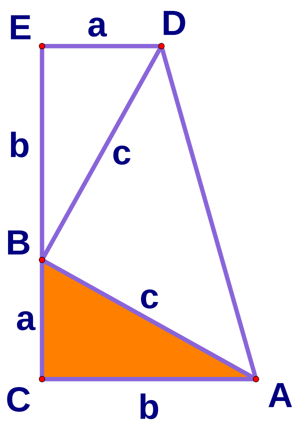
(i) constrói-se o triângulo retângulo [ABC] da figura 1, em que [AC] e [BC] são os catetos e [AB] é a hipotenusa;



(ii) de seguida constrói-se o triângulo [BDE] geometricamente igual ao triângulo [ABC], de modo que o cateto [EB] esteja no prolongamento do cateto [BC] e seja geometricamente igual ao cateto [AC];



(iii) por último, traça-se o segmento de reta [AD], ficando construído também o trapézio [ADEC], como na figura 3.



1. Será que o triângulo [BDA] é retângulo? Justifica.

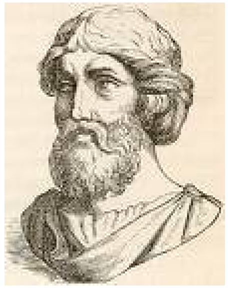
2. Determina, por dois processos diferentes, a área do trapézio presente na figura 3.

3. Iguala as duas expressões obtidas na resposta anterior, que representam a área do trapézio e simplifica a igualdade. O que concluis?

4. Numa breve composição, descreve como se consegue provar o teorema de Pitágoras a partir da construção apresentada e dos resultados que obtiveste.

Acabaste de formular a prova dada por James Abraham Garfield, vigésimo presidente dos Estados Unidos da América.

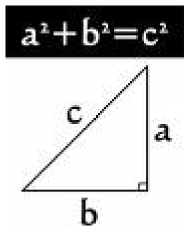
Teorema de Pitágoras (II)



Pitágoras de Samos

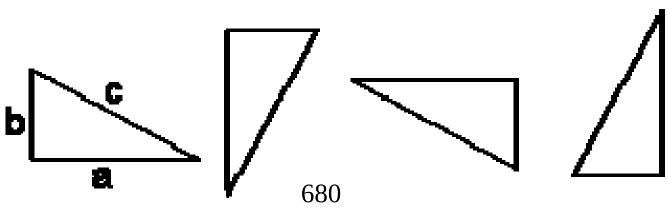
O Teorema de Pitágoras é, possivelmente, um dos mais antigos resultados geométrico de que temos notícia. Pitágoras viveu na Grécia, por volta do século VI a.C., contudo, não se conhece muito da sua vida. Sabe-se que tanto ele como os seus discípulos se dedicaram ao estudo da aritmética, geometria, astronomia e música, e que constituíram uma espécie de irmandade – os Pitagóricos – de cariz filosófico-religioso, mas que não deixava de ser uma escola científica. Para Pitágoras e seus seguidores, a chave para a compreensão do mundo era o número, o que fazia surgir a aritmética como a ciência por excelência. No âmbito do seu trabalho em geometria, atribui-se a Pitágoras a demonstração do teorema com o seu nome e a descoberta da existência dos números irracionais.

Como sabes, o teorema de Pitágoras diz-nos que, num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

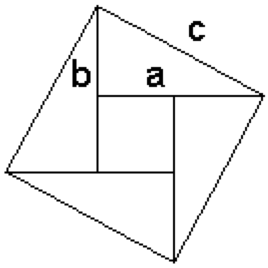


Sendo este teorema tão antigo, famoso e importante, e talvez até por outras razões, foram sendo publicadas ao longo da história centenas de provas. O que te proponho é que em grupo estudes, analises e discutas algumas dessas demonstrações.

Considera a sequência de quatro triângulos retângulos da figura seguinte. No primeiro triângulo, a e b são os catetos e c é a hipotenusa. Os restantes triângulos são obtidos rodando o primeiro, respetivamente, 90^0, 180^0 e 270^0.



Dispondo os triângulos como na figura seguinte, obtém-se um quadrado de lado *c*.



1. Determina a expressão algébrica que dá a área de cada triângulo e do quadrado mais pequeno.

2. Determina, por dois processos diferentes, a área do quadrado maior.

3. Iguala as duas expressões obtidas na resposta anterior, que representam a área do quadrado maior, e simplifica a igualdade. O que concluis?

4. Numa breve composição, descreve como podes provar o teorema de Pitágoras a partir da construção apresentada e dos resultados que obtiveste.

Acabaste de formular uma parte da prova dada pelo matemático indiano Bhaskara.

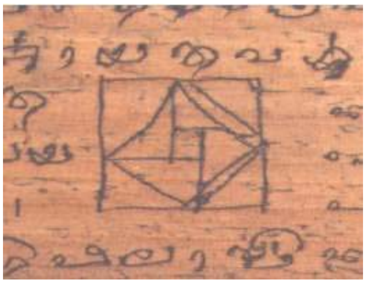
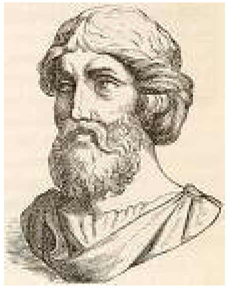


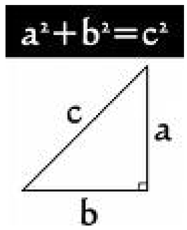
Diagrama de Bhaskara relativo ao Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras (III)



Pitágoras de Samos

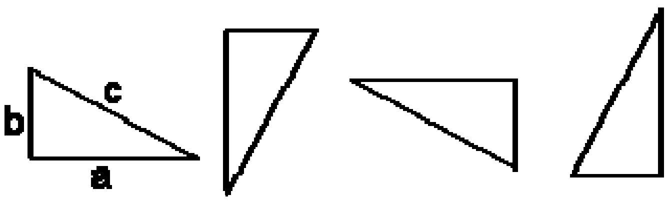
O Teorema de Pitágoras é, possivelmente, um dos mais antigos resultados geométrico de que temos notícia. Pitágoras viveu na Grécia, por volta do século VI a.C., contudo, não se conhece muito da sua vida. Sabe-se que tanto ele como os seus discípulos se dedicaram ao estudo da aritmética, geometria, astronomia e música, e que constituíram uma espécie de irmandade – os Pitagóricos – de cariz filosófico-religioso, mas que não deixava de ser uma escola científica. Para Pitágoras e seus seguidores, a chave para a compreensão do mundo era o número, o que fazia surgir a aritmética como a ciência por excelência. No âmbito do seu trabalho em geometria, atribui-se a Pitágoras a demonstração do teorema com o seu nome e a descoberta da existência dos números irracionais.



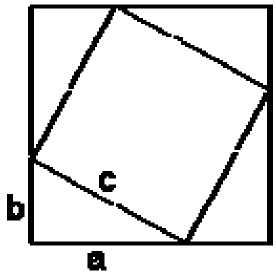
Como sabes, o teorema de Pitágoras diz-nos que, num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Sendo este teorema tão antigo, famoso e importante, e talvez até por outras razões, foram sendo publicadas ao longo da história centenas de provas. O que te proponho é que em grupo estudes, analises e discutas algumas dessas demonstrações.

Considera a sequência de quatro triângulos retângulos da figura seguinte. No primeiro triângulo, *a* e *b* são os catetos e *c* é a hipotenusa. Os restantes triângulos são obtidos rodando o primeiro, respetivamente, 90^0, 180^0 e 270^0.



Dispondo os triângulos como na figura seguinte, obtém-se um quadrado de lado *c*.



1. Determina a expressão algébrica que dá a área de cada triângulo e do quadrado mais pequeno.

2. Determina, por dois processos diferentes, a área do quadrado maior.

3. Iguala as duas expressões obtidas na resposta anterior, que representam a área do quadrado maior, e simplifica a igualdade. O que concluis?

4. Numa breve composição, descreve como podes provar o teorema de Pitágoras a partir da construção apresentada e dos resultados que obtiveste.

Acabaste de formular uma parte da prova dada pelo matemático indiano Bhaskara.

Diagrama de Bhaskara relativo ao Teorema de Pitágoras

Equações (I)

Lê com atenção o problema seguinte:

Determinar dois números cuja soma seja 20 e que a diferença entre os seus quadrados seja 80.

Em grupo, resolve o problema e descreve a vossa estratégia de resolução.

Equações (II)

Determinar dois números cuja soma seja 20 e que a diferença entre os seus quadrados seja 80.

Este problema, que já resolveste em grupo, também foi resolvido por Diofanto de Alexandria, matemático grego que terá vivido no século III d.C. e, de acordo com o epigrama 126 do Livro XIV da *Antologia Grega*, terá morrido com 84 anos de idade.

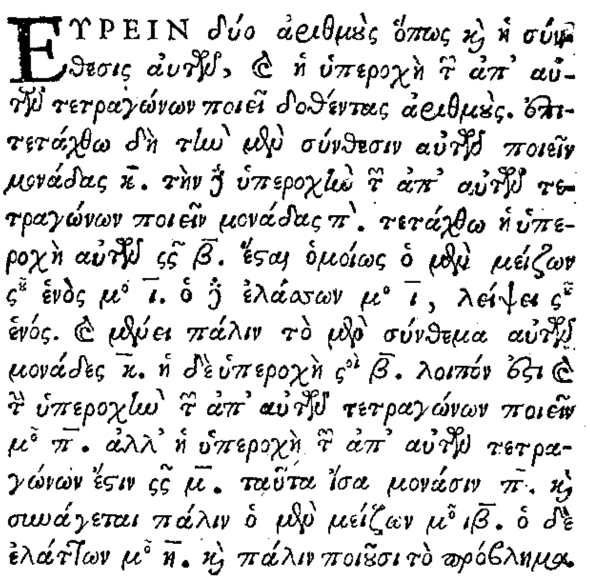
Diofanto ficou conhecido através do seu tratado *Aritmética*. A *Aritmética* era composta por treze livros, mas apenas seis desses livros chegaram à atualidade na versão original.

Diofanto inicia este tratado com um longo preâmbulo onde expõe quais os conhecimentos indispensáveis para a leitura e entendimento da sua *Aritmética*. É de referir que, neste tratado, Diofanto utiliza um original sistema de notações. A incógnita (designada por *aritmo*), algumas das suas potências, a relação de igualdade e a operação de diferença são simbolizadas por abreviaturas.

Como referi anteriormente, Diofanto apresenta uma resolução para o problema supracitado. Esta resolução encontra-se no livro I da *Aritmética*, problema 29, (*Aritmética* I, 29).

Apresento-te, de seguida, a resolução dada por Diofanto. Na coluna da esquerda tens um excerto do texto original e na coluna da direita a respetiva tradução.

O que te proponho é que, em grupo, leias, analises e discutas essa resolução, confrontando-a com a vossa.


ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δοθέντας ἀριθμούς. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας κ̄. τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας π̄. τετάχθω ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ςς β̄. ἔσται ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ςς ἑνὸς μο ῑ. ὁ δὲ ἐλάσσων μο ῑ, λείψει ςς ἑνός. καὶ μένει πάλιν τὸ μὲν σύνθεμα αὐτῶν μονάδες κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ςς β̄. λοιπόν ἐστι καὶ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μο π̄. ἀλλ' ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἐστὶν ςς μ̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν π̄. καὶ συνάγεται πάλιν ὁ μὲν μείζων μο ιβ̄. ὁ δὲ ἐλάττων μο η̄. καὶ πάλιν ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

Encontrar dois números tais que a sua soma e a diferença dos seus quadrados formem números dados.
Proponhamos então que a soma dos números forme 20 unidades e que a diferença dos quadrados dos números forme 80 unidades.
Que a diferença dos números seja 2 aritmos. O número maior será mais uma vez 1 aritmo e 10 unidades, e o menor 10 unidades menos 1 aritmo; o que estabelece de novo que a soma dos números é 20 unidades e que a sua diferença é 2 aritmos.
É ainda preciso que a diferença dos quadrados dos números forme 80 unidades. Mas a diferença dos seus quadrados é 40 aritmos; o que igualamos a 80 unidades. Resulta então de novo que o número maior é

12 unidades e que o número menor é 8 unidades; números que satisfazem de novo a proposição.

Para uma leitura mais fácil, proponho que sigas os passos seguintes:

<u>1.</u> Reescreve na notação atual a informação presente no parágrafo seguinte:

Que a diferença dos números seja 2 aritmos. O número maior será mais uma vez 1 aritmo e 10 unidades, e o menor 10 unidades menos 1 aritmo; o que estabelece de novo que a soma dos números é 20 unidades e que a sua diferença é 2 aritmos.

<u>2.</u> Explica como Diofanto chegou à conclusão seguinte:

É ainda preciso que a diferença dos quadrados dos números forme 80 unidades. Mas a diferença dos seus quadrados é 40 aritmos; (…)

<u>3.</u> Reescreve a afirmação seguinte em notação atual e explica como Diofanto descobriu os números procurados:

(…) a diferença dos seus quadrados é 40 aritmos; o que igualamos a 80 unidades. Resulta então de novo que o número maior é 12 unidades e que o número menor é 8 unidades; (…)

<u>4.</u> Descreve, numa breve composição, a estratégia usada por Diofanto para resolver o problema inicial.

Equações (III)

Determinar dois números cuja soma seja 20 e que a diferença entre os seus quadrados seja 80.

Este problema, que já resolveste em grupo, também foi resolvido por Pedro Nunes, matemático e cosmógrafo português do século XVI.

Pedro Nunes dedicou-se à ciência e arte de navegação, mas também escreveu e publicou obras de Matemática, nomeadamente um tratado de Álgebra escrito em castelhano: *Libro de algebra en arithmetica y geometria*. Neste tratado, Pedro Nunes dedicou-se ao estudo das equações, embora não considerasse como solução das suas equações números negativos. Contudo, a sua notação era sincopada, isto é, usava abreviaturas para representar algumas operações e potências, como podes observar na tabela 1:

Tabela 1. Notação de

Notação de Pedro Nunes	*Notação atual*
co (cousa)	x
ce (censo)	x^2
cu (cubo)	x^3
$\tilde{p}$ (plus)	$+$
$\tilde{m}$ (minus)	$-$
R	$\sqrt{\ }$
$3R$	$\sqrt[3]{\ }$

Como referi anteriormente, Pedro Nunes apresenta uma resolução para o problema supracitado. Esta resolução encontra-se na parte III do *Libro de algebra*, capítulo 5, problema 3, (*Livro de Álgebra* III, 5). Embora os números considerados sejam diferentes,

trata-se do mesmo problema que já resolveste e que também foi proposto por Diofanto na sua *Aritmética*.

Apresento-te, de seguida, a resolução dada por Pedro Nunes. Na coluna da esquerda tens um excerto do texto original e na coluna da direita a respetiva tradução.

Desafio-te, em grupo, a leres, analisares e discutires essa resolução, tendo em conta a vossa resolução e a dada por Diofanto.

3. Partamos .12. en tales dos partes, q̃ el quadrado de la primera sea menor que el quadrado de la segunda en .30. de differencia. Pornemos la primera parte ser .1. co. y sera luego la segunda .12. m̃ .1. co. multipliquemos .1. co. en si, y hara .1. ce. q̃ sera el quadrado de la primera parte, y multiplicaremos en si .12. m̃ .1. co. y haran .144. p̃ .1. ce. m̃ .24. co. y tanto sera el quadrado de la segunda parte. Y porque la differencia ha de ser .30. seran luego .1. ce. p̃ .30. yguales a .144. p̃ .1. ce. m̃ .24. co. Agora ygualaremos restaurando lo diminuto, y haremos .1. ce. p̃ .24. co. yguales a .144. p̃ .1. ce. Sacaremos lo superfluo, y quedaran finalmẽte .24. co. yguales a .114., que es conjugacion simple. Partiremos luego .114. por .24., y vernã .4 $\frac{3}{4}$. por valor de la cosa, y tãto sera la primera parte, y sera la segunda lo q̃ queda de .12., que es .7 $\frac{1}{4}$., cuyos quadrados son .22 $\frac{9}{10}$., y .52 $\frac{9}{16}$. la differencia de los quales es .30.*

3. Partamos .12. em tais duas partes, que o quadrado da primeira seja menor do que o quadrado da segunda em .30. de diferença. Poremos a primeira parte ser .1.*co.* e será logo a segunda .12.$\tilde{m}$.1.*co.*; multipliquemos .1.*co.* em si, e fará .1.*ce.*, que será o quadrado da primeira parte, e multipliquemos em si .12. $\tilde{m}$.1.*co.*, e farão .144.$\tilde{p}$.1.*ce.* $\tilde{m}$.24.*co.*, e tanto será o quadrado da segunda parte. E porque a diferença há de ser .30., serão logo .1.*ce.* $\tilde{p}$.30. iguais a .144. $\tilde{p}$.1.*ce.* $\tilde{m}$.24.*co.* Agora igualaremos restaurando o diminuto, e faremos .1.*ce.* $\tilde{p}$.24.*co.* $\tilde{p}$.30. iguais a .144. $\tilde{p}$.1.*ce.* Sacaremos o supérfluo, e que darão finalmente .24.*co.* iguais a .114., que é uma conjugação simples. Partiremos logo .144. por .24., e virão $.4\frac{3}{4}.$ por valor da coisa, e tanto será a primeira parte, e a segunda será o que queda de .12. que é $.7\frac{1}{4}.$, cujos quadrados são $.22\frac{9}{16}.$ e $.52\frac{9}{16}.$, a diferença dos quais é .30..

Para uma leitura mais fácil, proponho que sigas os passos seguintes:

<u>1.</u> Consultando a tabela 1, transcreve para notação atual a informação presente no parágrafo seguinte:

Poremos a primeira parte ser .1.*co.* e será logo a segunda .12.$\tilde{m}$.1.*co.*; (…)

<u>2.</u> Explica como Pedro Nunes chegou à conclusão seguinte:

(...) e multipliquemos em si .12. $\tilde{m}$.1.*co*., e farão .144. $\tilde{p}$.1.*ce*. $\tilde{m}$.24.*co*., e tanto será o quadrado da segunda parte.

<u>3.</u> Transcreve para notação atual a informação presente no parágrafo seguinte:

E porque a diferença há de ser .30., serão logo .1.*ce*. $\tilde{p}$.30. iguais a .144. $\tilde{p}$.1.*ce*. $\tilde{m}$.24.*co*.

<u>4.</u> Transcreve a afirmação seguinte em notação atual e explica como Pedro Nunes descobriu os números procurados:

Agora igualaremos restaurando o diminuto, e faremos .1.*ce*. $\tilde{p}$.24.*co*. $\tilde{p}$.30. iguais a .144. $\tilde{p}$.1.*ce*. Sacaremos o supérfluo, e que darão finalmente .24.*co*. iguais a .114., que é uma conjugação simples. Partiremos logo .144. por .24., e virão .$4\frac{3}{4}$. por valor da coisa, e tanto será a primeira parte, e a segunda será o que queda de .12. que é .$7\frac{1}{4}$., (...)

<u>5.</u> Descreve, numa breve composição, a estratégia usada por Pedro Nunes para resolver o problema inicial.

Duas torres, duas aves e uma fonte (I)

Lê com atenção o seguinte problema.

Duas aves estão no cimo de duas torres, uma das torres tem 30 metros de altura, a outra 40, e distam entre si apenas 50 metros; entre as torres está uma fonte. A um determinado instante as duas aves descem voando a partir das duas torres à mesma velocidade chegando ao mesmo tempo ao centro da referida fonte. A que distância se encontra a fonte das duas torres?

Em grupo, responde às seguintes questões:

1. Faz um desenho ilustrativo da situação descrita, onde deves representar, sem rigor, as torres e o local da fonte. Dá nomes aos pontos mais representativos do problema.

2. Sabendo, como se diz no enunciado, que as aves descem "à mesma velocidade chegando ao mesmo tempo", a ave que sai da torre de 30 m de altura percorre menos, mais ou a mesma distância do que a que sai da tome de 50 m de altura?

3. Pensa numa estratégia de resolução analítica do problema e discute-a com o teu grupo.

4. Resolvam o problema e descrevam a vossa estratégia de resolução.

Duas torres, duas aves e uma fonte (II)

Duas aves estão no cimo de duas torres, uma das torres tem 30 pés de altura, a outra 40, e distam entre si apenas 50 pés; entre as torres está uma fonte. A um determinado instante as duas aves descem voando a partir das duas torres à mesma velocidade chegando ao mesmo tempo ao centro da referida fonte. A que distância se encontra a fonte das duas torres?

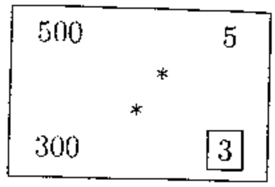
Em grupo, já resolveste este problema. No entanto, proponho-te uma outra tarefa.

No século XIII surgiu um livro denominado *Liber abaci* (Livro do ábaco), considerado um dos mais importantes livros de Matemática da Idade Média. Escrito por Leonardo de Pisa, mais conhecido por Fibonacci, este trabalho expõe muita da Matemática conhecida no século XIII acerca da aritmética, da álgebra e da resolução de problemas.

Nesse livro, Fibonacci apresenta uma resolução para o problema supracitado. O que te proponho é que, em grupo, leias, analises e discutas essa resolução, confrontando-a com a vossa.

A partir do momento que as aves partem até ao momento que chegam elas voam em linha reta desde o topo das torres até ao centro da fonte; os voos têm igual comprimento; em geometria é claramente demonstrado que a altura [de cada] torre multiplicada por si própria e adicionada à distância da torre ao centro da fonte multiplicada por si própria é a mesma que o segmento de reta do centro da fonte ao topo da torre multiplicado por si próprio; isto é portanto conhecido.

Supõe que a distância do centro da fonte à torre mais alta é um número qualquer de passos, nós dizemos 10, e multiplica 10 por si próprio; que será 100 que juntas à altura da torre mais alta multiplicada por si própria, a saber 1600; o que será 1700, que guardas, e multiplicas por si própria a restante distância, a saber 40 que é a distância do centro da fonte à menor torre; que será 1600 a qual juntas à altura da menor torre multiplicada por si própria, a saber 900; isto faz 2500 mas deveria ser 1700, a soma dos outros dois produtos; portanto esta posição está longe de ser o verdadeiro valor em 800, a saber a diferença entre 1700 e 2500; portanto alonga a distância do centro da fonte à torre mais alta; na verdade é alongada em 5 passos a partir da primeira posição, a saber 15 passos a partir do centro [da fonte] à torre mais alta, e multiplica o 15 por si próprio; será 225 que adicionas à altura da torre mais alta multiplicada por si própria, a saber 1600; que será 1825. De igual modo multiplicas por si próprio 35 que é a distância a partir do centro da fonte à torre menor fazendo 1225; isto adicionado a 900, a saber a altura da torre menor multiplicada por si própria, faz 2125 que deveria ser 1825 pela regra acima. Portanto o valor da segunda posição é uma quantidade longe do verdadeiro valor em 300: o primeiro era na verdade longe em 800; portanto dizes: para os cinco passos que nós alongamos a distância do centro da fonte à torre mais alta nós aproximamo-nos mais de perto do valor verdadeiro em 500; quanto na verdade temos de alongar a distância do centro da fonte à mesma torre de modo a melhorar a aproximação em 300? Multiplicas o 5 por 300, e divides por 500; o quociente será 3 passos que adicionas aos 15 passos que dá 18 passos, e esta é a distância da fonte à torre mais alta. De facto a restante distância, a saber 32, é a distância à menor torre. Por exemplo, o produto de 18 por si próprio adicionado ao produto de 40 por si próprio é tanto como o produto de 32 por si próprio adicionado ao produto de 30 por si próprio, como tinha de ser.



Para uma mais fácil leitura, proponho que sigas os seguintes passos:

<u>1.</u> Explica o significado da frase seguinte.

A partir do momento que as aves partem até ao momento que chegam elas voam em linha reta desde o topo das torres até ao centro da fonte; os voos têm igual comprimento; (…)

<u>2.</u> A frase seguinte traduz um resultado que já estudaste. Como se chama?

(…) em geometria é claramente demonstrado que a altura [de cada] torre multiplicada por si própria e adicionada à distância da torre ao centro da fonte multiplicada por si própria é a mesma que o segmento de reta do centro da fonte ao topo da torre multiplicado por si próprio; isto é portanto conhecido.

<u>3.</u> Transcreve a afirmação seguinte em notação atual.

Supõe que a distância do centro da fonte à torre mais alta é um número qualquer de passos, nós dizemos 10, e multiplica 10 por si próprio; que será 100 que juntas à altura da torre mais alta multiplicada por si própria, a saber 1600; o que será 1700, que guardas, e multiplicas por si própria a restante distância, a saber 40 que é a distância do centro da fonte à menor torre;

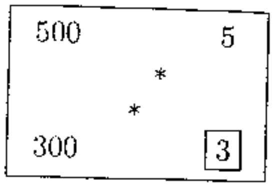
que será 1600 a qual juntas à altura da menor torre multiplicada por si própria, a saber 900; isto faz 2500 mas deveria ser 1700, a soma dos outros dois produtos; portanto esta posição está longe de ser o verdadeiro valor em 800, a saber a diferença entre 1700 e 2500; portanto alonga a distância do centro da fonte à torre mais alta; (…)

4. Transcreve a afirmação seguinte em notação atual.

(…) na verdade é alongada em 5 passos a partir da primeira posição, a saber 15 passos a partir do centro [da fonte] à torre mais alta, e multiplica o 15 por si próprio; será 225 que adicionas à altura da torre mais alta multiplicada por si própria, a saber 1600; que será 1825. De igual modo multiplicas por si próprio 35 que é a distância a partir do centro da fonte à torre menor fazendo 1225; isto adicionado a 900, a saber a altura da torre menor multiplicada por si própria, faz 2125 que deveria ser 1825 pela regra acima. (…)

5. Explica o raciocínio presente no procedimento seguinte.

(…) Portanto o valor da segunda posição é uma quantidade longe do verdadeiro valor em 300: o primeiro era na verdade longe em 800; portanto dizes: para os cinco passos que nós alongamos a distância do centro da fonte à torre mais alta nós aproximamo-nos mais de perto do valor verdadeiro em 500; quanto na verdade temos de alongar a distância do centro da fonte à mesma torre de modo a melhorar a aproximação em 300? Multiplicas o 5 por 300, e divides por 500; o quociente será 3 passos que adicionas aos 15 passos que dá 18 passos, e esta é a distância da fonte à torre mais alta. De facto a restante distância, a saber 32, é a distância à menor torre. Por exemplo, o produto de 18 por si próprio adicionado ao produto de 40 por si próprio é tanto como o produto de 32 por si próprio adicionado ao produto de 30 por si próprio, como tinha de ser.



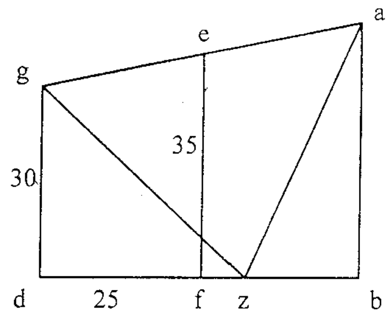
6. Numa breve composição, descreve a estratégia usada por Fibonacci para resolver o problema inicial.

Duas torres, duas aves e uma fonte (III)

Duas aves estão no cimo de duas torres, uma das torres tem 30 pés de altura, a outra 40, e distam entre si apenas 50 pés; entre as torres está uma fonte. A um determinado instante as duas aves descem voando a partir das duas torres à mesma velocidade chegando ao mesmo tempo ao centro da referida fonte. A que distância se encontra a fonte das duas torres?

Ainda sobre este problema, Fibonacci no *Liber abaci* apresenta uma outra resolução, desta vez de cariz geométrico. A tarefa que te proponho está dividida em duas partes.

1. De acordo com a figura, Fibonacci inicia a resolução do problema por mostrar que o ponto z é o centro da fonte. Em grupo, e tendo em atenção o início do excerto que te apresento, desafio-te a encontrar justificação para a última afirmação dada por Fibonacci:



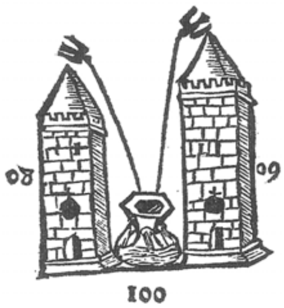
Seja portanto a maior torre a linha de segmento .*ab*., a menor .*gd*.; o espaço entre elas é a linha de segmento .*bd*., e o topo delas são ligadas pela linha de segmento .*ag*. que é separada em duas partes iguais pelo ponto .*e*.; a partir deste [ponto] é estendida a linha de segmento .*ef*. paralela às linhas .*ab*. e .*gd*., e a partir do ponto .*e*. é estendida a linha segmento .*ez*. fazendo dois ângulos retos com a linha .*ag*., isto é em .*e*.; eu digo que o ponto .*z*. é o centro da fonte, (…)

2. Após provar que o ponto *z* é o centro da fonte, mediante os dados do problema Fibonacci descobre a distância pretendida. O que te proponho é que, mais uma vez em grupo, leias, analises e discutas essa resolução.

(…) mas se quiseres proceder com números, então juntas os pés das duas torres, a saber 40 e 30; que será 70 cuja metade, a saber 35, é a linha de segmento .*ef*.; e metade da distância .*bd*. é 25 que é a soma das linhas de segmento .*df*. e .*fb*., e toma a diferença entre a menor torre e 35 que é 5; multiplica-a por 35. que será 175 que divides por metade da distância, a saber 25; o quociente será 7 para a linha segmento *.fz.*; se 25 for adicionado a isto, a saber a linha de segmento *.df.*, então a linha de segmento *.dz.* será 32, e se 7 é subtraído à linha de segmento *.fb.*, então restará 18 para a linha de segmento *.zb.*; se o quadrado disto é adicionado ao quadrado da torre *.ba.*, a saber 324 a 1600, então 1924 será o quadrado da linha segmento *.za.*; também o quadrado da linha *.zg.* é igual a isto, resultante da junção dos quadrados das linhas segmento *.zd.* e *.dg.*, a saber 1024 e 900, o que queremos.

Duas torres, duas aves e uma fonte (IV)

SAm duas torres huũa de .90. braças e outra de 80. e esta arredada huũa da outra .100. braças. E antre ambas has torres esta huũa fonte em tal lugar que duas aues yguaes no voar vem beber aquella fõte .s. que cada huũa das torres tem sua aue em çima e partem ambas ha huũ tempo e chegam ambas ha huũ tempo ha fonte. Demando quanto esta ha fonte arredada de cada torre



São duas torres uma de .90. braças outra de .80. distanciadas uma da outra .100. braças. E entre ambas as torres está uma fonte em tal lugar que duas aves iguais no voar vêm beber àquela fonte. Que cada uma das torres tem uma ave em cima e partem ambas a um tempo e chegam ambas a um tempo à fonte. Demando quanto está a fonte arredada de cada torre.

Este problema encontra-se no *Tratado da Pratica Darismetyca* (*Tratado de Aritmética*) do matemático português Gaspar Nicolas, publicado no século XVI, sendo a primeira obra matemática impressa escrita em língua portuguesa.

Como facilmente reparaste, embora os números considerados sejam diferentes, trata-se do mesmo problema que já resolveste e que também foi proposto por Fibonacci no seu *Liber abacci*.

Apresento-te, de seguida, a resolução dada por Gaspar Nicolas. Novamente, na coluna da esquerda tens um excerto do texto original e na coluna da direita a respetiva tradução.

Desafio-te, em grupo, a leres, analisares e discutires essa resolução, tendo em conta a vossa resolução e as dadas por Fibonacci.

faze assy multiplica. 100. em sy sam. 10000
estes guarda. Poys multiplica. 90. em sy ⁊ sam. 8100
⁊ multiplica. 80. em sy ⁊ sam. 6400. estes tyra de.
8100. fycam. 1700. estes ajunta com hos. 10000
que te mandey guardar ⁊ sam. 11700. estes parte por
ho dobro do que has torres estam hafastadas conuem a sa
ber por. 200. ⁊ vem. 58. ⁊ meo ⁊ tãtas braças esta ha
fastada ha fonte da torre mays pequena proua.

(…) faz assim, multiplica .100. em si, são .10000. e estes guarda. Depois multiplica .90. em si, são .8100., e multiplica .80. em si, são .6400., e estes tira de .8100., ficam .1700.. Estes ajunta com os .10000. que te mandei guardar e são .11700.. Estes parte por o dobro de que as torres estão afastadas, convém a saber por .200., e vem .58. e meio e tantas braças está afastada a fonte da torre mais pequena prova.

Equações 2.º grau (I)

Lê com atenção o problema seguinte:

Determinar as dimensões de um retângulo cujo semiperímetro é 20 e cuja a área é 96.

Em grupo, resolve o problema e descreve a vossa estratégia de resolução.

Equações do 2.º grau (II)

Determinar as dimensões de um retângulo cujo semiperímetro é 20 cuja área é 96.

Este problema, que já resolveste em grupo, também foi resolvido por Diofanto de Alexandria, matemático grego que terá vivido no século III d.C. e, de acordo com o epigrama 126 do Livro XIV da *Antologia Grega*, terá morrido com 84 anos de idade.

Diofanto ficou conhecido através do seu tratado *Aritmética*. A *Aritmética* era composta por treze livros, mas apenas seis desses livros chegaram à atualidade na versão original.

Diofanto inicia este tratado com um longo preâmbulo onde expõe quais os conhecimentos indispensáveis para a leitura e entendimento da sua *Aritmética*. É de referir que, neste tratado, Diofanto utiliza um original sistema de notações. A incógnita (designada por *aritmo*), algumas das suas potências, a relação de igualdade e a operação de diferença são simbolizadas por abreviaturas.

Como referi anteriormente, Diofanto apresenta uma resolução para o problema supracitado. Esta resolução encontra-se no livro I da *Aritmética*, problema 27, (*Aritmética* I, 27):

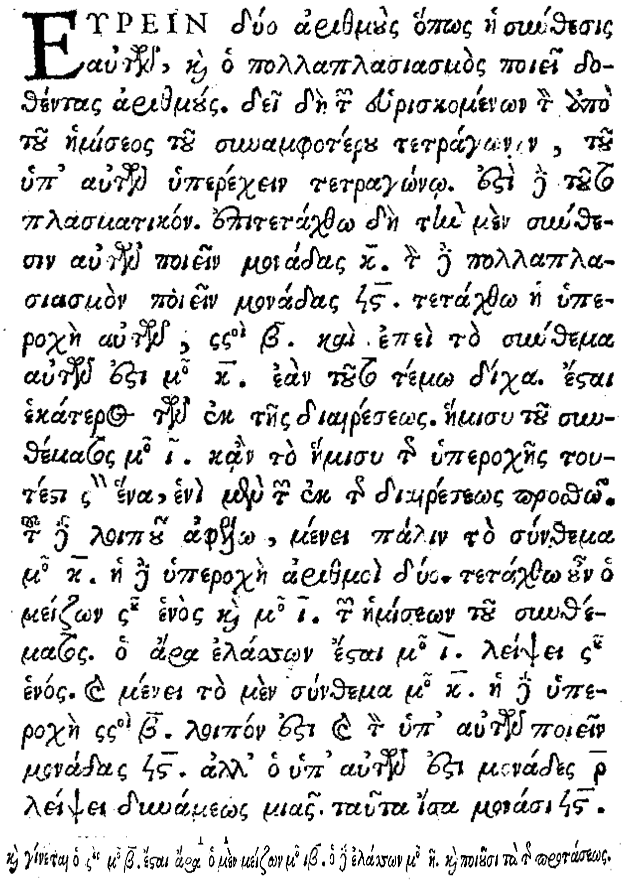
Encontrar dois números tais que a sua soma e o seu produto formem números dados.

(…)

Proponhamos então que a soma dos números forme 20 unidades e que o produto forme 96 unidades.

Apresento-te, de seguida, a resolução dada por Diofanto. Na coluna da esquerda tens um excerto do texto original e na coluna da direita a respetiva tradução.

O que te proponho é que, em grupo, leias, analises e discutas essa resolução, confrontando-a com a vossa.



ΕΥΡΕΙ͂Ν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ σύνθεσις αὐτῶν, καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ποιεῖ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τῶν εὑρισκομένων τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ συναμφοτέρου τετράγωνον, τοῦ ὑπ' αὐτῶν ὑπερέχειν τετραγώνῳ. ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικόν. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας κ. τὸν δὲ πολλαπλασιασμὸν ποιεῖν μονάδας ϟϛ. τετάχθω ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν, ϛϛοι β. καὶ ἐπεὶ τὸ σύνθεμα αὐτῶν ἐστι μο κ. ἐὰν τοῦτο τέμω δίχα. ἔσται ἑκάτερον τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως. ἥμισυ τοῦ συνθέματος μο ι. κἂν τὸ ἥμισυ τῆς ὑπεροχῆς τουτέστι ϛε ἕνα, ἑνὶ μὲν τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως προσθῶ. τῷ δὲ λοιπῷ ἀφέλω, μένει πάλιν τὸ σύνθεμα μο κ. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ἀριθμοὶ δύο. τετάχθω οὖν ὁ μείζων ϛε ἑνὸς καὶ μο ι. τῶν ἡμίσεων τοῦ συνθέματος. ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσται μο ι. λεῖψει ϛε ἑνός. καὶ μένει τὸ μὲν σύνθεμα μο κ. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ϛϛοι β. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπ' αὐτῶν ποιεῖν μονάδας ϟϛ. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστι μονάδες ρ λεῖψει δυνάμεως μιᾶς. ταῦτα ἴσα μονάσι ϟϛ. καὶ γίνεται ὁ ϛε μο β. ἔσται ἄρα ὁ μὲν μείζων μο ιβ. ὁ δὲ ἐλάσσων μο η. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

(...)
Que o excedente dos números seja 2 aritmos. Então, uma vez que a soma dos números é 20 unidades, se a dividirmos em duas partes iguais (...) [e] se juntarmos a uma das partes e se retirarmos da outra parte metade do excedente dos números, quer dizer 1 aritmo, estabelece-se de novo que a soma dos números é 20 unidades e que o seu excedente é 2 aritmos. Por conseguinte, ponhamos que o maior número é 1 aritmo aumentado de 10 unidades, que são metade da soma dos números; o menor número será 10 unidades menos 1 aritmo, e estabelece-se que a soma dos números é 20 unidades e que o seu excedente é 2 aritmos.
É preciso também que o produto dos números forme 96 unidades. Ora, o seu produto é 100 unidades menos 1 quadrado de aritmo; o que nós igualamos a 96 unidades; e o aritmo torna-se 2 unidades. Por conseguinte, o número maior será 12 unidades, o menor será 8 unidades, e estes números satisfazem à proposição.

Para uma leitura mais fácil, proponho que sigas os passos seguintes:

<u>1.</u> Diofanto inicia a sua resolução explicando o raciocínio usado para designar os dois números procurados. Reescreve na notação atual a informação presente no período seguinte:

Por conseguinte, ponhamos que o maior número é 1 aritmo aumentado de 10 unidades, que são metade da soma dos números; o menor número será 10 unidades menos 1 aritmo, e estabelece-se que a soma dos números é 20 unidades e que o seu excedente é 2 aritmos.

2. **Explica, por palavras tuas, qual o processo usado por Diofanto para designar as duas quantidades desconhecidas.**

3. **Explica como Diofanto chegou à conclusão seguinte:**

É preciso também que o produto dos números forme 96 unidades. Ora, o seu produto é 100 unidades menos 1 quadrado de aritmo; (...)

4. **Reescreve a afirmação seguinte em notação atual e explica como Diofanto descobriu os números procurados.**

Ora, o seu produto é 100 unidades menos 1 quadrado de aritmo; o que nós igualamos a 96 unidades; e o aritmo torna-se 2 unidades. Por conseguinte, o número maior será 12 unidades, o menor será 8 unidades, e estes números satisfazem à proposição.

5. **Descreve, numa breve composição, a estratégia usada por Diofanto para resolver o problema inicial.**

Equações do 2.º grau (III)

Determinar as dimensões de um retângulo cujo semiperímetro é 20 cuja área é 96.

Já resolveste em grupo este problema e também já analisaste a resolução do mesmo apresentada por Diofanto livro I da *Aritmética*, problema 27, (*Aritmética* I, 27). Como pudeste observar, Diofanto resolve este problema através de uma interpretação algébrica, equacionando o problema. Contudo, segundo a interpretação do historiador de Matemática Jens Høyrup sobre a resolução de equações do segundo grau efetuada pelos Babilónios, este tipo de problemas podia ser resolvido através de uma interpretação geométrica.

Apresento-te, de seguida, um método de resolução geométrico, baseado na *geometria do corta e cola*, geometria intuitiva.

O que te proponho é que, em pequeno grupo, leias, reproduzas, analises e discutas os passos seguintes, respondendo às questões colocadas. Para facilitar, a construção as medidas do problema estão em milímetros.

<u>1.</u> No papel que vos foi dado, constrói um quadrado cuja área seja o menor quadrado perfeito maior que 96 (o valor da área do retângulo procurado).

<u>2.</u> Quantas unidades de medida tens de retirar ao quadrado construído para ficar com área igual a 96?

<u>3.</u> Retira junto a um vértice do quadrado inicialmente construído um quadrado cuja área corresponda ao valor que referiste na pergunta anterior.

<u>4.</u> Será possível rearranjar a figura que obtiveste de modo a teres um retângulo? Quais as medidas dos seus lados? Sugestão: podes cortar a figura.

<u>5.</u> Através de um esquema representa os diferentes passos realizados de modo a resolveres o problema proposto.

6. Usando este método geométrico, resolve os problemas seguintes:

(i) Determinar as dimensões de um retângulo cujo semiperímetro é 32 cuja área é 247.

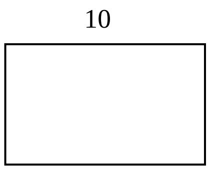
(ii) Determinar as dimensões de um retângulo cujo semiperímetro é 12 cuja área é 30

.

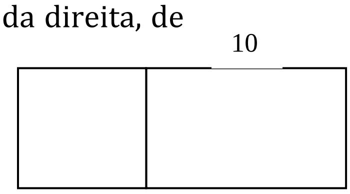
7. Agora, proponho que escrevam uma mensagem a um colega da turma, que está doente, onde expliquem este método de resolução dos problemas enunciados de uma forma, clara, e concisa.

Equações 2.º grau (IV)

Lê com atenção o problema seguinte:



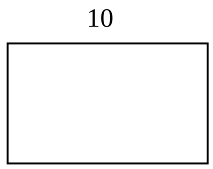
Sejam um retângulo com comprimento 10 e largura desconhecida (ver figura do lado esquerdo). Desenha-se um quadrado, como na figura da direita, de lado igual à largura desconhecida do retângulo dado. A soma das áreas do retângulo e do quadrado é 39.



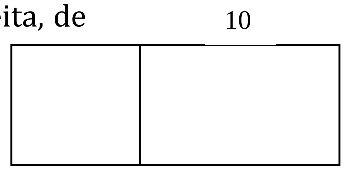
Qual é a largura do retângulo inicial?

Em grupo, resolve o problema e descreve a vossa estratégia de resolução.

Equações do 2.º grau (V)



Sejam um retângulo com comprimento 10 e largura desconhecida (ver figura do lado esquerdo). Desenha-se um quadrado, como na figura da direita, de lado igual à largura desconhecida do retângulo dado. A soma das áreas do retângulo e do quadrado é 39.



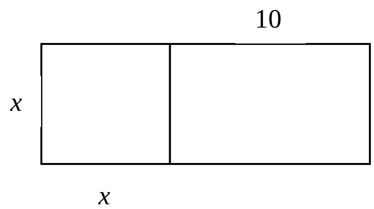
Qual é a largura do retângulo inicial?

Já resolveste em grupo este problema. Agora apresento-te um método de resolução geométrico, baseado na interpretação do historiador Jens Høyrup.

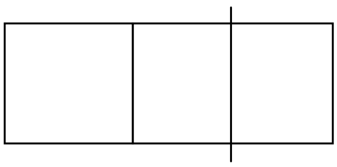
O que te proponho é que, em pequeno grupo, leias, reproduzas, analises e discutas os passos seguintes, respondendo às questões colocadas.

1. Observa as sequências de figuras seguintes:

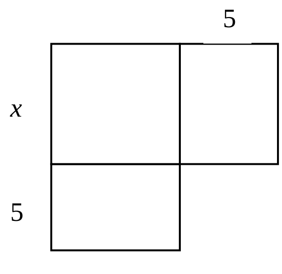
1) x designa a largura desconhecida do retângulo dado.



2) dividir em duas partes iguais o retângulo dado.



3) colocar uma das partes divididas na "base" do quadrado.



2. A última figura obtida não forma um quadrado. O que falta para essa figura formar um quadrado? Qual é área dessa porção em falta?

<u>3.</u> Através da resposta da alínea anterior, determina a largura desconhecida.

<u>4.</u> Usando este método geométrico, resolve os problemas seguintes:

(i) Sejam o comprimento de um retângulo 2 unidades de medida e a sua largura desconhecida. Desenhe-se um quadrado de lado igual à largura desconhecida do retângulo dado. A soma das duas áreas (retângulo inicial e quadrado) é 48. Qual é a largura do retângulo inicial?

(ii) Sejam o comprimento de um retângulo $\frac{3}{2}$ unidades de medida e a sua largura desconhecida. Desenhe-se um quadrado de lado igual à largura desconhecida do retângulo dado. A soma das duas áreas (retângulo inicial e quadrado) é 1. Qual é a largura do retângulo inicial?

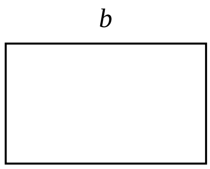
.

<u>5.</u> Agora, proponho que escrevam uma mensagem a um colega da turma, que está doente, onde expliquem este método de uma forma, clara e concisa.

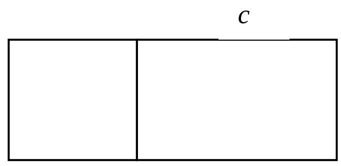
<u>6.</u> Explica, por palavras tuas, qual é a diferença entre estes dois métodos apresentados.

Equações 2.º grau (VI)

Lê com atenção o problema seguinte:



Sejam um retângulo com comprimento *b* e largura desconhecida (ver figura do lado esquerdo). Desenha-se um quadrado, como na figura da direita, de lado igual à largura desconhecida do retângulo dado. A soma das áreas do retângulo e do quadrado é *c*.



Qual é a largura do retângulo inicial?

Em grupo, resolve o problema e descreve a vossa estratégia de resolução.