DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E AS PRÁTICAS DE COMUNICAÇÃO NUMA AULA[1]

Cláudia Domingues
Escola Secundária de Caldas das Taipas
cmadom@gmail.com

Maria Helena Martinho
CIEd – Universidade do Minho
mhm@ie.uminho.pt

Resumo: Este artigo analisa as práticas comunicacionais presentes numa aula de matemática inserida num estudo sobre o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos de uma turma de 9º ano. Para tal, apresentam-se os raciocínios na realização de uma tarefa de uma aula e analisam-se as práticas comunicacionais envolvidas nessa aula. O estudo seguiu uma metodologia interpretativa com uma estratégia de investigação de estudo de caso em que o caso foi a turma. Os raciocínios dos alunos foram analisados com base em categorias referentes ao *processo* de *generalização* e ao *processo de prova*. Verificou-se que o processo de conjeturar dos alunos foi acompanhado de justificação e que houve alunos que se convenceram com base em argumentos empíricos enquanto outros alunos produziram uma prova a partir dos raciocínios dedutivos realizados na exploração. Constatou-se a importância da discussão coletiva para o desenvolvimento de noção de prova matemática dos alunos. Concluiu-se, ainda, a importância do desenvolvimento da comunicação na explicitação dos raciocínios no desenvolvimento da capacidade de raciocinar matematicamente.

Palavras-chave: Raciocínio matemático, comunicação matemática e práticas letivas

Introdução

A partilha de raciocínios entre todos os presentes numa aula de matemática tem por base a comunicação desses mesmos raciocínios, facto pelo qual as capacidades de raciocinar e de comunicar matematicamente estão intrinsecamente relacionadas.

É objetivo deste artigo analisar a forma como o raciocínio matemático se desenvolve em relação com as práticas comunicacionais na aula de matemática.

Para tal, a primeira autora do artigo apresenta alguns raciocínios matemáticos dos seus alunos realizados durante uma aula, no ano letivo 2009/10, com uma turma de 9.º ano e a segunda autora do artigo analisa a comunicação matemática envolvida. A aula apresentada fez parte do estudo realizado pela professora na qual foi implementada a tarefa *A área de um retângulo especial* inserida na unidade de ensino "equações de 2º grau". A professora foi pela primeira vez professora da turma naquele ano letivo.

[1]Trabalho realizado no âmbito do *Projecto PPPM - Práticas Profissionais de Professores de Matemática*, apoiado pela FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/CPECED/098931/2008).

Raciocínio matemático e comunicação matemática na sala de aula

Para que as aulas de matemática promovam o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos é necessário refletir sobre o que é o raciocínio e quais as melhores estratégias para o desenvolver. O atual programa de matemática do ensino básico (Ponte, et al., 2007) ao colocar o raciocínio matemático como uma capacidade transversal, pode contribuir para aumentar a preocupação dos professores em como agir para desenvolver o raciocínio matemático dos seus alunos. No entanto, não é a mera leitura do programa que modifica as práticas, razão pela qual a professora sentiu necessidade de procurar os fundamentos em que se baseiam as orientações programáticas. Na procura de compreensão sobre o que é o raciocínio matemático encontrou o raciocínio distinguido pela sua natureza (indutivo, abdutivo, por analogia e dedutivo) e também a descrição dos processos de raciocínio que ocorrem desde a formulação de conjeturas até à prova das descobertas realizadas como se fundamenta a seguir.

Os processos que ocorrem durante a fase de *generalização*, com a preocupação de encontrar as justificações matemáticas que acompanham essas mesmas conjeturas, são descritos por Mason, Burton e Stacey (1985). As vantagens apresentadas por Polya (1968) sobre o uso do raciocínio plausível na construção de conhecimento dos alunos apoiam a ideia de envolver os alunos na descoberta matemática.

Para que a aula facilite o desenvolvimento do raciocínio matemático é necessário que o professor proponha aos alunos tarefas, adequadas ao seu nível de desenvolvimento, que proporcionem a construção de conjeturas e a compreensão do "porque será assim" (Mason *et al*., 1985; Tall, 1999). Segundo Balacheff (1988), a passagem de uma verdade assente em afirmações de factos para uma verdade assente em razões encontra, frequentemente, como obstáculo a natureza da conceção das ideias matemáticas dos alunos e/ou dos meios linguísticos que possuem. Garuti, Boero e Lemut (1998) concluíram que a existência de unidade cognitiva entre a fase de conjeturar e a fase da construção da prova é favorável à promoção da atividade de descoberta na aula. Desse modo, os alunos sentem necessidade de reorganizar os argumentos formulados, tornando-os mais coerentes e lógicos (Mariotti, 2006).

Os níveis de prova (empirismo naïf, experiência crucial, exemplo genérico e experiência conceptual) de Balacheff aferem o desenvolvimento cognitivo de prova através da forma como os alunos se convencem da validade de uma afirmação ou solução produzida (Balacheff, 1987). Estes quatro níveis ajudam a compreender se o aluno se convence com base em argumentos empíricos ou gerais e de que forma é que o faz. Balacheff (1987) afirma ser entre o *exemplo genérico* e a *experiência conceptual* que ocorre a passagem da prova pragmática para a prova conceptual, passagem essa que é feita através da linguagem com referência apenas às qualidades genéricas da situação.

Stylianides e Stylianides (2008), considerando que um argumento válido para ser qualificado de prova usa raciocínio dedutivo, esclarecem que esse uso não está relacionado com o nível de formalização e exemplificam com três diferentes formas válidas de apresentar uma prova: linguagem pictórica, linguagem verbal e linguagem algébrica. Definem, assim, prova matemática como um argumento matemático que: usa afirmações aceites sem mais justificação, aplica formas de raciocínio (modos de argumentação) válidas e conhecidas, e é comunicado at ravés de formas de expressão (modos de representação de argumentos) adequadas e conhecidas dentro do alcance conceptual da comunidade turma.

A comunicação presente numa aula de matemática tem um papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio. Para que essa comunicação seja produtiva, é necessário que professor e alunos compreendam e aceitem as posições e argumentos dos outros, reconhecendo quais as perspetivas partilhadas (Alrø & Skovsmose, 2002). Os diferentes significados são construídos através das interações ao longo do processo de ensino-aprendizagem. A procura de consensos só é possível se forem incentivados a argumentar, a explicitar os raciocínios, a refutar e a contestar aquilo que é partilhado.

Segundo Ruthven, Hofmann e Mercer (2011), os momentos de discussão coletiva após a realização de trabalho de grupo revelam-se importantes para o desenvolvimento da compreensão matemática. Se os alunos forem incentivados a apresentar e ouvir diferentes pontos de vista, o diálogo constitui um apoio do pensamento no sentido de dar significado às aprendizagens.

Metodologia do estudo

O estudo referido foi realizado no âmbito da dissertação de mestrado de Domingues (2011) cujo objetivo principal de investigação consistiu em compreender como raciocinavam os alunos de uma turma de 9.º ano. A metodologia de estudo seguiu o modelo de investigação interpretativo de abordagem de interacionismo simbólico com uma estratégia de investigação de estudo de caso (Bogdan & Biklen, 1994; Cohen & Manion, 1994; Ponte, 2006). O caso foi a turma, constituída por quinze raparigas e quatro rapazes, com quatro alunos selecionados como subcasos (Yin, 2005). Os instrumentos de recolha de dados foram: a observação participante, registos escritos em forma de notas da professora/investigadora, os registos escritos dos alunos, questionário, entrevista semiestruturada e gravações áudio e vídeo. Na experiência foram aplicadas várias tarefas, planificadas para diagnosticar e promover o desenvolvimento do raciocínio matemático, das quais aqui se trabalha uma: “um retângulo especial”.

A atividade dos alunos foi observada relativamente ao *processo de generalização* e ao *processo de prova*. O *processo de generalização* foi analisado de acordo com as categorias seguintes: i) processo de conjeturar – forma como os alunos formulam uma conjetura, como a testam e como a reformulam de acordo com os testes realizados e com os contraexemplos que surgem e como generalizam (Lakatos, 1999; Mason, Burton, & Stacey, 1985; Polya, 1968); ii) nível de aceitação da generalização – forma como os alunos aceitam a conjetura como válida de acordo com o nível de prova de Balacheff (1987); iii) natureza e padrões seguidos nos raciocínios usados (Reid & Knipping, 2010). O *processo de prova* teve as seguintes categorias de análise: i) questionamento – análise do modo como os alunos questionam as generalizações que fazem (Mason, 1998; Mason *et al*., 1985); ii) construção da prova com toda a turma – análise da atividade matemática conjunta no que concerne a justificar as conjeturas formuladas e a produzir um argumento geral (Balacheff, 1987; Mariotti, 2006; Stylianides & Ball, 2008; Stylianides & Stylianides, 2009)**.**

A aula onde foi trabalhada a tarefa “um retângulo especial”, teve dois momentos de trabalho: o primeiro de trabalho autónomo em pequeno grupo e o segundo de explicitação dos raciocínios com toda a turma por forma a desenvolver um argumento geral. As categorias finais consideradas foram sendo reformuladas, ao longo do estudo, de acordo com a interpretação dos dados recolhidos com base na fundamentação teórica revista.

Prática letiva

As práticas letivas resultam da interação que se estabelece entre alunos e professora e alunos na sala de aula, pelo que as ações realizadas dependem, em certa medida, do conjunto de alunos e forma de agir dos mesmos face à Matemática. Este facto faz com que logo que a professora conhece os seus alunos faça interpretações sobre os seus atos e aja de acordo com a interpretação que faz desses mesmos atos.

Os primeiros dados recolhidos, através de questionário e de observação participante, revelaram que a aula de matemática era descrita por grande parte dos alunos como um espaço onde "o professor explica e nós fazemos exercícios". Para além disso, o tipo de trabalho predominante era o trabalho individual e a participação voluntária era quase sempre das cinco alunas com melhores resultados na disciplina. Este diagnóstico levou a professora a desenvolver ações para modificar a aula de matemática considerando que as mudanças tinham de ser conseguidas implicando os alunos no processo e mostrando-lhes as razões que tornavam pertinente a mudança. Os alunos compreenderam que a resolução de exercícios é importante, mas que há outro tipo de tarefas com maior desafio cognitivo necessárias para desenvolver as suas capacidades de raciocínio. Para tal, o trabalho colaborativo em sala de aula tornou-se uma necessidade. Assim, ao mesmo tempo que foram propostas diferentes tarefas para realizar em grupo e se discutiram as estratégias com toda a turma, também foram negociadas as normas de sala de aula necessárias para que a turma funcionasse como comunidade matemática. Foi, contudo, difícil modificar o padrão de comunicação e incentivar os alunos a participar quer nos grupos quer nas discussões com toda a turma. Para que os alunos participassem nos grupos, a professora tentou otimizar a constituição dos grupos de trabalho ao longo do ano. Para promover a participação em turma foi necessário que a professora mostrasse aos seus alunos como se devia processar essa participação e lhes sublinhasse as vantagens para a aprendizagem, procurando sempre dar reforços positivos e ajudando-os a relacionar diferentes aprendizagens e conceitos.

Uma outra dificuldade dos alunos prendia-se com a justificação das suas ações matemáticas. De facto, as justificações dos alunos consistiam essencialmente na explicação dos procedimentos ou no recurso a argumentos de autoridade externa, como por exemplo, "a professora disse que um sistema se fazia assim". Foi possível concluir que, para a maioria dos alunos a matemática consistia num conjunto de regras a aplicar em determinadas situações sem que houvesse necessidade de compreender porquê.

A lecionação da unidade "equações de 2º grau" decorreu no segundo período e foi planificada tendo por base o diagnóstico referente ao conteúdo e aos processos de raciocínio. A professora havia já diagnosticado que os alunos apresentavam muitas dificuldades de manipulação algébrica e não aplicavam os casos notáveis lecionados no 8.º ano. Afirmavam não haver necessidade em sabê-los e mostravam desinteresse em compreendê-los, pelo que a professora resolveu investir na conexão entre os casos notáveis e a geometria.

A tarefa "um retângulo especial" foi planificada para promover a compreensão de um caso notável da multiplicação, diferença de quadrados. Esta tarefa pedia explicitamente para provar.

A tarefa "Um retângulo especial" e a sua implementação

A tarefa foi aplicada numa aula de noventa minutos em que os alunos trabalharam em cinco grupos de três a quatro elementos.

A tarefa continha um diagrama que traduzia o enunciado verbal o que simplificou a sua compreensão. A explicitação das medidas de modo genérico permitiu identificar a natureza do raciocínio dos alunos, como indutivo ou dedutivo, de acordo com o processo de exploração da tarefa.

A área de um rectângulo especial

Um quadrado transforma-se num rectângulo não quadrado quando o seu comprimento cresce e a sua largura decresce o mesmo número de unidades de medida.

Investiga qual é a relação entre a área desse novo rectângulo e a área do quadrado inicial.

Prova essa relação para qualquer quadrado que se transforme em rectângulo nas condições indicadas.

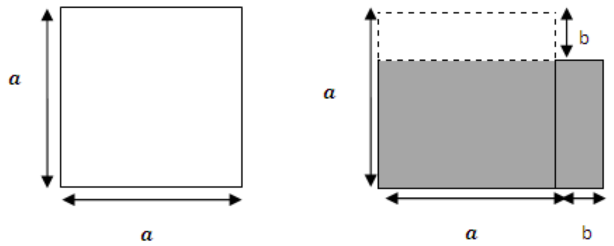

Figura 8: Tarefa proposta aos alunos

A professora agrupou os alunos de acordo com uma previsão pensada antes da aula e distribuiu o enunciado da tarefa. Colocou um gravador em cada grupo e pediu aos alunos para registarem o seu trabalho no papel. Foi definido um tempo de trinta minutos para trabalho autónomo e explicou que no fim desse tempo os alunos discutiriam as suas conjeturas. O diagnóstico do nível de generalização de cada grupo, revelou-se essencial para posteriormente a professora gerir a discussão com toda a turma.

Raciocínio matemático dos alunos

Na análise do trabalho realizado pelos diferentes grupos foi possível sintetizar as estratégias seguidas da seguinte forma: particularização, manipulação algébrica sem relacionar com as áreas, cálculo das áreas parciais das figuras usando medidas genéricas e manipulação mental da figura. Todas as estratégias utilizadas fizeram emergir a compreensão da situação com exceção do raciocínio de manipulação algébrica sem relação com as áreas da figura. Neste artigo apresenta-se os raciocínios, seguidos por dois grupos de alunos, respeitantes à estratégia de particularização e manipulação mental da figura.

Processo de generalização

A atividade matemática dos alunos iniciou-se com a discussão do enunciado seguida da formulação de conjeturas sobre a relação entre as áreas das duas figuras. A primeira intuição dos alunos foi a de considerar que as áreas, do quadrado inicial e do novo retângulo, seriam iguais. Porém, quando apresentaram os seus argumentos no grupo começaram a ter dúvidas e sentiram a necessidade de explorar melhor a situação. Perante as dúvidas, os alunos recorreram menos à professora do que habitual e no seio do grupo exploraram a situação esclarecendo os seus pontos de vista.

Os alunos de um dos grupos, Paulo (P), Manuel (M) e Miguel (Mi), começam por afirmar que as áreas são iguais com base na visualização da figura do enunciado. Posteriormente, ao traduzirem as medidas do quadrado e do retângulo de forma genérica, Manuel apercebe-se que as medidas das figuras podem não ser iguais. Esta constatação leva-os a particularizar.

> **[1] M**: Olha aqui diz que: este quadrado vai-se transformar neste retângulo. Que o que cresce aqui…

[2] P: O que está a mais aqui vai passar para o lado…

[3] M: O que decresce aqui é o mesmo número de unidades. Podemos dizer que este bocado que está aqui passa para o lado direito, por isso dá a mesma área.

(…)

[4] P: Aqui vai ser ⍰ vezes ⍰.

[5] M: Vai ser ⍰ menos ⍰ vezes ⍰ mais ⍰. Acho que não vai dar a mesma coisa…

[6]P: Vai vai Manuel, porque esta medida é deste e vai desaparecer daqui e vai ficar aqui.

(…)

[7] P: Olha dá medidas a isto. Este lado é 2. Daqui aqui vai ser 2 e daqui aqui vai ser 1. (2-1)x(2+1) dá 3.

[8] Mi: Não sei porquê mas acho que estamos a fazer mal. (...) Mas eu acho que aqui não é 1, porque isto não é verdade.

Particularizaram de novo atribuindo o valor 3 à medida do lado do quadrado e 1 para o valor de b como se pode ver na figura 2, concluindo que aquelas áreas não são iguais.

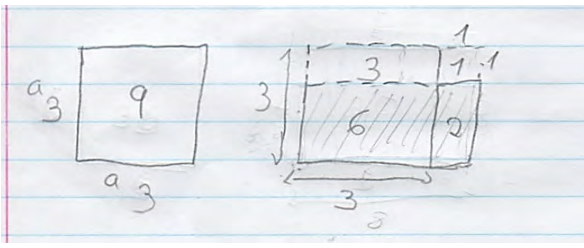

Figura 2: particularização do grupo do Miguel

Chamaram a professora e explicaram o raciocínio realizado até ao momento:

[9] M: Stora nós estávamos a pensar assim… achamos que este bocadinho que tirou aqui e meteu aqui é a mesma área.

[10] Prof: E como é que podem saber se é igual ou não?

[11] P: Estamos a dar medidas.

(mostraram o esquema da figura 2, explicando como pensaram)

[12] Prof: Então não é igual? Pensem melhor.

A reação dos alunos foi a de rever a situação como se pode ler no diálogo seguinte:

[13] M: Não, mas olha esta largura é a mesma que daqui aqui.

[14] P: Mas o comprimento aqui é que não é o mesmo.

[15] M: Pois não, mas a largura vai ser a mesma.

[16] Mi: Porque nós vamos tirar este daqui e era o mesmo que este daqui aqui ao fundo, por isso a este vamos tirar 1. Acho que já estou a perceber.

[17] P: Não, vamos ter que tirar este lado, tirar este quadrado.

[18] M: Não, vamos tirar 1 unidade… ou o quadrado.

[19] P: É 1 porque 1x1 é 1. Tu não sabes as medidas daqui aqui.

[20] Mi: Eu meti aqui ⍰ porque não sei as medidas daqui aqui.

[21] M: Já temos aqui as medidas, não é por nada, aqui é ⍰. ⍰ vezes ⍰ é ⍰ ao quadrado. Depois este retângulo é ⍰ vezes ⍰… é melhor meter números.

O Manuel volta a tentar trabalhar com as medidas genéricas, mas hesita e decide exemplificar com o caso apresentado na figura 2. Os alunos chamaram a professora para lhe dizer que aqueles cálculos estavam corretos e a professora depois de verificar os cálculos dá-se conta que o valor atribuído a b foi outra vez 1.

[22] Prof: Estão convencidos?

[23] M: Sim.

[24] Prof: Fixaram o ⍰ como 1? Experimentem com outro ⍰ . Não devem ficar presos num caso, porque pode dar para um caso e não dar para outro.

[25] P: Agora já não vai dar.

[26] M: Vai vai.

(…)

[27] M: Então 6 x 4 é 24 ; 2 x 4 dá 8. 24 - 8? Este mais este 32 e 36 - 4 dá 32.Teatcher. Uhuhuh! Vai dar a mesma coisa. Aqui metemos 6 e depois deste lado metemos 2 e vai dar a mesma coisa: este dá 36 e aqui é 36 - 4 é 32.

[28] Prof: Então qual é a conclusão?

[29] M: A área é a mesma mas só que vamos ter de tirar este quadrado.

[30] P: A área daquele quadradinho.

Este grupo convenceu-se da sua conjetura de "a área do quadrado inicial ser igual à do retângulo tirando um quadradinho" com base em alguns casos, mas não generalizaram a medida desse quadradinho.

Segundo os níveis de prova de Balacheff, estes alunos estão no nível de *empirismo naïf*, pois eles convenceram-se com base em casos concretos.

No grupo das alunas Maria (Ma), Rita (R), Beatriz (B) e Paula (Pa) a primeira intuição foi a de que as áreas das duas figuras seriam iguais. Porém, o diálogo que as alunas estabelecem no grupo tem na base as medidas genéricas.

[31] Ma: Área do quadrado é a^2. A área do retângulo (a-b)(a+b)… não fica igual.

[32] B: Pois não, a do retângulo é menor.

[33] Ma: Não pode ser, não fica igual.

[34] Pa: Falta esta altura.

Seguiram a estratégia de manipulação mental da figura com medidas genéricas e colocaram a hipótese de apenas referirem que uma é menor do que a outra, mas pareceu-lhes insuficiente.

[35] Ma: Temos que dizer qual é a relação. A área do retângulo…

[36] R: É menor que a área do quadrado.

> **[37] Pa**: É só para dizer isso? É para dizer qual é a relação. E vamos só dizer que é menor? A área do retângulo é menor do que a área do quadrado.

Leram de novo o enunciado e deram conta que está lá a palavra "provar". Mostraram-se, no entanto, confusas com a introdução desta palavra. Levantaram mesmo a hipótese de necessitarem de particularizar.

> **[38] R**: E agora prova essa relação para qualquer quadrado... Agora é uma coisa geral. Temos se calhar que pensar noutros quadrados e ver que vai ser sempre assim.
>
> **[39] Ma:** Podemos fazer alguns e depois escrever uma conjetura. Então?

No entanto, não conseguem avançar sem esclarecer a dúvida sobre o que é "provar". Chamaram a professora que explica a diferença entre concretizar e provar, aproveitando para dar a dimensão de explicação à prova.

> **[40] Ma**: Stora? É para provarmos, como assim? Ou substituir os valores?
>
> **[41] Prof**: Têm que explicar e conseguir provar que dá para todos. Quando a gente usa valores estamos a dizer que dá para aquele caso. Isso é concretizar.
>
> **[42] B:** Vai ficar um retângulo, pois um bocado é mais pequeno que o outro. Quando tirarmos uma parte deste quadrado é uma parte de um lado igual, por isso não vai ficar a mesma área.
>
> **[43] Ma**: Como vamos fazer?
>
> **[44] R**: Só se pusermos que a área do retângulo novo vai ser igual: pomos este total menos uma parte que se vai tirar aqui. Agora se pusermos este igual a este é porque não vai ser igual.

As alunas continuaram o seu trabalho colocando de lado a ideia de particularizar. No entanto, tiveram dificuldades em decidir qual a estratégia a seguir e discutiram em termos de manipulação da figura. Neste diálogo das alunas percebe-se como a forma de apresentar o raciocínio envolve decisões mais complexas do que podia parecer à primeira vista.

Decidiram colocar as medidas genéricas a acompanhar os esquemas e foram interpretando essas expressões algébricas com a figura. Este processo permitiu-lhes reorganizar o pensamento e analisar as propriedades da figura. É a necessidade de mostrar o seu raciocínio que as motiva a provar.

> **[45] Ma**: Se desenharmos esta parte acrescentada fica até aqui e esta largura é b e aqui é b também.
>
> **[46] R**: Esta vai ser igual a esta daqui até ao fim.
>
> **[47] Ma**: Pronto. O outro quadrado é igual a este, mas não é este [todo]. Ele é até aqui. (Maria aponta para o quadrado não preenchido). ▯2. ▯2−▯2 é a área dele todo.
>
> **[48] R**: A área deste todo é qualquer coisa desta menos as partes que se tiram.
>
> **[49] Ma**: O que é que acham?
>
> **[50] Pa**: É uma hipótese. Vamos tentar.
>
> **[51] Ma**: Texto ou cálculo? Cálculo! Expressões. Depois podemos pôr em fórmula para se perceber.
>
> **[52] B**: A área do retângulo…

[53] Ma: Mas a área do retângulo em que, se é uma regra geral, em que a largura…

[54] R: A área o retângulo feito a partir do quadrado é igual à área do quadrado inicial menos uma porção.

[55] B: Menos uma parte.

[56] R: Um lado do retângulo. Depois pomos um desenhinho. Lembras-te do esquema que a Liliana fez? Podíamos fazer um esquema desses para as pessoas perceberem melhor.

[57] Ma: É a construção do quadrado a partir das partes do retângulo. Sim, tu ao fazeres isto e pores ali estás a construir o quadrado com as partes do retângulo.

[58] R: Ao pôr isto aqui vai ser preciso, então. Aqui estamos a dizer que não é, mas é. Ao pormos esta parte daqui para aqui vai ficar até aqui e vai ser preciso isto.

[59] Ma: Mas estamos a fazer o raciocínio ao contrário. A área do retângulo a partir do quadrado é igual à área do quadrado inicial menos uma parte que não fica preenchida se construirmos o quadrado inicial com as partes do retângulo. É uma confusão.

[60] R: Mais valia não fazer por escrito e fazermos em desenhos.

A Rita formulou a conjetura [54] não clarificando o que entende por *porção*. No entanto, pelo diálogo percebe-se que as colegas compreenderam o significado atribuído por Rita a *porção*.

Relativamente ao desenvolvimento do raciocínio surgem ideias contrárias: por um lado querem chegar ao retângulo a partir do quadrado e, por outro, querem chegar ao quadrado a partir do retângulo. Esta dicotomia está patente no diálogo, em particular na fala de Maria [98]. Decidem então construir um desenho e Paula dá a ideia de um esquema dinâmico.

[61] Pa: Eu tive uma ideia. Esta parte aqui e queremos pôr esta peça aqui, fazemos uma seta daqui para aqui e depois fazemos um igual a este mas com esta peça pintada.

O esquema que as alunas fizeram está representado na figura 3, partiram de um retângulo e mostraram como se pode transformar para obter o quadrado inicial.

Para além do esquema as alunas concluíram que a relação entre as áreas pode ser traduzida por □−□ □+□ =□2−□2.

[62] Ma: E agora que conclusão podemos tirar daqui?

Que □−□ ×(□+□) é igual a…

[63] R: □2−□2.

(Mostraram então à professora)

[64] Ma: Isto foi a 1ª parte: esta parte deslocámos para aqui, a tentar construir o quadrado, e faltou um bocadinho então vimos que $(a-b)x(a+b)=a^2-b^2$.

O *processo de generalização* das alunas envolve a compreensão geométrica e algébrica da situação proposta. As alunas trabalharam sempre com o *exemplo genérico*, pelo que apenas usaram raciocínios de natureza dedutiva. Através do seu esquema dinâmico (figura 3) mostram as transformações necessárias para inferir a conclusão sem qualquer recurso a exemplos particulares. Afirma-se que o nível de prova das alunas se situa ao nível da experiência conceptual com base na apresentação da prova e na análise do processo de descoberta seguido.

A professora chamou os grupos para explicitarem os raciocínios realizados, começando pelo grupo que tinha desenvolvido um trabalho de manipulação algébrica sem significado, e de seguida por aqueles grupos que tinham feito generalizações a partir da particularização de alguns casos tal como o grupo já referido do Manuel. O grupo da Maria foi o último a comunicar à turma.

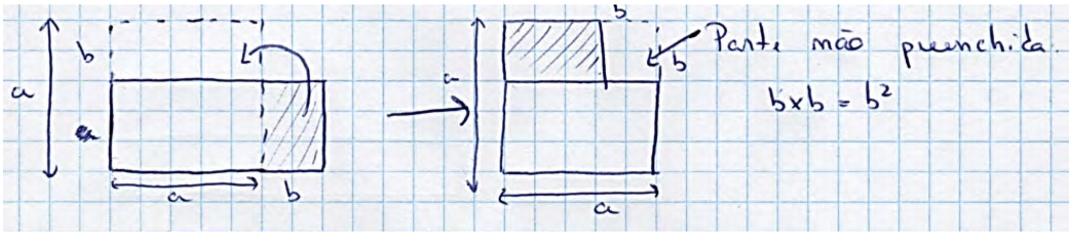

Figura 3: Esboço do grupo da Maria

Processo de prova

A fase de discussão foi muito importante para a partilha dos diferentes tipos de raciocínio. Perante o trabalho do grupo da Daniela (D), o grupo do Manuel chamou a atenção para a importância de procurar mais casos e afirmaram orgulhosos que fizeram mais.

[65] P: E só puseste esses resultados?

[66] D: Se fizéssemos outros números provavelmente….

[67] P e Mi: Provavelmente!? Devias ter feito.

[68] M: Nós fizemos.

A professora questiona os alunos no sentido de explicitarem a relação para qualquer quadrado naquelas condições. Gera-se, então, um diálogo entre a professora e os alunos onde é enfatizada a necessidade de passar para o caso geral.

[69] Prof: Quanto diminuiu, genericamente?

[70] D: 4.

[71] Prof: Nesse caso 4.

[72] P: Depende, pode diminuir 2 ou 3 ou 5.

[73] Prof: Se quisermos falar genericamente. Quanto diminuiu?

O António, do grupo da Daniela, responde metade, o Paulo responde ⍰ e a Beatriz, aluna do grupo da Maria, responde ⍰*2*.

A professora reformula a questão de forma a clarificá-la:

[74] Prof: Nesse diminuiu 4, esse é um caso concreto. Mas no exemplo genérico quando temos um quadrado e aumentamos o comprimento ⍰ e diminuímos a largura ⍰ quanto diminui a área?

[75] B: ⍰*2*.

[76] Prof: E onde está?

[77] B: É o quadrado que está por cima… posso ir lá.

(A Beatriz foi ao quadro e aponta para o quadrado pequeno de lado b)

(…)

[78] Prof: Como é que podemos falar de todos os casos?

[79] Alunos: Com letras.

[80] Prof: Por que as letras podem tomar qualquer valor.

Era a vez do grupo da Maria explicar o seu trabalho e começou por se assegurar que todos tinham identificado os retângulos iguais nas duas imagens (figura 1) com lados □ e □−□ .

[81] M: Como é que sabes que é o *b*?

[82] Prof: Acho que o Manuel não está a perceber porque é que dizes que os retângulos são iguais. O que é que vos convenceu que são iguais?

(…)

[83] R: Então cresceu *b* decresceu *b* e por isso o que tem para o lado é o mesmo.

[84] Ma: Isto é □, isto é □ e isto aqui é o quê?… □−□ .

(Apontou para os lados de medida a depois para o lado de medida b e depois perguntou-lhes qual seria a medida da altura do retângulo)

Se aqui é □−□ aqui é? Quanto é?… □.

Se pusermos isto aqui (girando) quanto é que vai ocupar?

(…) □−□ . E isto é quanto? É □. Pronto.

O que vocês fizeram com números nós fizemos com letras. Conclusão o que podemos dizer? Conclusão final: A área do retângulo é igual a □*2*−□*2*.

O Manuel pede uma explicação particular à Maria e a professora diz-lhe que pode ir explicar-lhe. O Manuel volta a perguntar-lhe como pode ela pensar sem medidas concretas.

[85] Ma: Estou a fazer supostamente, se medisses, medias aqui e era □. Ok? Então aqui em cima vai ser *b* também.

(…)

Queres que explique outra vez? Nós não medimos.

[86] M: Pois, não tinhas medidas.

A explicitação dos raciocínios pelos diferentes grupos evidenciou as vantagens do exemplo genérico face aos casos concretos. A construção de um argumento geral com toda a turma foi, nesta tarefa, proporcionado pelo trabalho do grupo da Maria. As alunas ao organizarem o raciocínio relativo às relações entre as medidas genéricas e as respetivas áreas, provaram. Para organizarem os raciocínios tiveram de decidir se partiam do quadrado e mostravam a relação das áreas ao transformar-se num retângulo ou se faziam o processo inverso partindo do retângulo.

Comunicação matemática na aula

Ao longo de toda a aula a professora procura que o ambiente de trabalho seja desafiador. Tanto nos grupos como na discussão em grande grupo, se nota por vezes que os próprios alunos desafiam os colegas, não ficam satisfeitos com qualquer resposta e colocam questões.

A professora privilegia as discussões em pequeno grupo e incentiva a que os alunos comuniquem entre si. Isso está patente, por um lado na opção pelo trabalho em grupo e, por outro, na forma como interage com os grupos. Por exemplo, no diálogo com o grupo do Miguel, quando os questiona [10], [12], [22] ou [24] dirige-se ao grupo no seu todo, “como podem saber”, “pensem melhor”, “estão convencidos?” e apesar da fala anterior ser sempre de um aluno particular, a professora não se dirige apenas a esse aluno mas ao grupo.

A procura de estímulos para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos é uma constante. Atente-se na forma como a professora interage com os alunos incentivando-os à argumentação, em particular, no tipo de questões que vai colocando. Por exemplo, na apresentação e discussão em grande grupo, a professora revela cuidado com: a escolha da ordem por que apresentam; as dúvidas e dificuldades; o nível cognitivo do trabalho.

Relativamente à *ordem de apresentação* das conclusões dos grupos, a professora procura que haja uma evolução ao longo da discussão, chegando mesmo à construção de uma síntese com base nas apresentações dos alunos. Assegura-se que, de forma natural, se percorram as diferentes construções dos alunos e que seja sempre possível acrescentar mais elementos ao que já foi trabalhado antes. Decidiu quem apresenta e por que ordem, de forma a evitar repetições. As *dúvidas e dificuldades* reveladas pelos alunos eram motivo de atenção, por exemplo, na fala [82].

A preocupação com o *tipo de explicações e raciocínios*, esteve patente em muitos momentos da aula. Por exemplo, a professora aproveita o decorrer das apresentações para fazer evoluir cognitivamente o nível dos argumentos dos alunos. Após alguma discussão em torno dos casos particulares e da sua diversidade, a professora avança para a generalização, patente em [69], [74] e [76]. Explicita, recorrendo às falas dos alunos, e acrescenta aquilo que lhe parece fundamental, passando mesmo pela preocupação com a representação em [78-80]. Vai questionando os alunos para que explicitem melhor os seus raciocínios, por exemplo, quando pergunta a Beatriz “onde está ⍰*2*” [76]. Procura também que os raciocínios sejam claros, como em [82]. A preocupação com a clareza parece ser uma constante nas aulas, o que se manifesta pelo empenho dos alunos em se fazerem entender uns aos outros. Em particular, a Rita revela explicitamente essa preocupação, como se pode ver na fala [56] quando diz “para as pessoas perceberem melhor”, ou na fala [60]. Igualmente, Maria propõe “pôr em fórmula para se perceber”, na fala [51].

Conclusões

As conjeturas formuladas pelos alunos trouxeram consigo o porquê das mesmas facilitando assim a compreensão matemática da situação (Mason *et al.*, 1985). Desse modo foi possível reorganizar os argumentos formulados no *processo de generalização* facilitando o *processo de prova* (Mariotti, 2006). Os alunos que fizeram raciocínios dedutivos ganharam uma melhor compreensão da situação o que facilitou a construção da prova. No entanto, os alunos que validaram as suas conjeturas com casos particulares não foram capazes de chegar a um argumento geral, mas puderam constatar que argumentos empíricos não provam.

Confirmou-se também que o desenvolvimento da noção de prova matemática pode ser promovido através da orientação, pelo professor, da discussão coletiva após os alunos trabalharem autonomamente. Deste modo, dá-se-lhes oportunidade de reorganizar os argumentos produzidos no processo de conjeturar e de convencer os outros das razões que os validam (Mason *et al.*, 1985; Garuti, Boero & Lemut, 1998).

O encorajamento à intervenção e explicitação dos raciocínios revelou-se fundamental para o desenvolvimento da compreensão, tal como apontam Ruthven, Hofmann e Mercer (2011). A forma como os alunos se envolvem na aula, discutem em grupo e se preocupam com a elaboração de argumentos válidos e claros para ser compreendidos pelos colegas, ajuda-os a caminhar para uma aprendizagem da matemática pela compreensão.

Referências

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2004). Dialogic learning in collaborative investigation. *Nordisk Matematikkdidaktikk 9*(2): 39-62.

Balacheff, N. (1987). Processus de Preuve et situations de validation. *Educational Studies In Mathematics*, *18*(2), pp. 147-176.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics Teachers and Children Londres* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

Cohen, L., & Manion, L. (1994). *Research Methods in Education.* London e New York: Routledge.

Domingues, C. (2011). *Desenvolvimento do Raciocínio Matemático: uma experiência com uma turma de 9.º ano.* (Dissertação de mestrado, Universidade do Minho).

Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, PME22, Vol. 2 (pp. 345-352). Stellenbosch, RSA.

Hanna, G. (1996). The Ongoing Value of Proof. *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, PME20, (pp. 21-34). Valencia, Spain.

Lakatos, I. (1999). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. United States of America: Bembo.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and Prooving in Mathematics Education. In A. G. (Eds), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Paste, Present and Future* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense Publishers.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1985). *Thinking Mathematically*. London: Addison-Wesley Publishing Company.

Polya, G. (1968). *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematics* (Vol. I). Princeton: University Press.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25* , 105-132.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., H.Sousa, *et al*. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da educação – DGIDC.

Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching*. Netherlands: Sense Publishers.

Ruthven, K., Hofmann, R., & Mercer, N. (2011). In Ubuz, B. (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4 (pp. 81-88). Ankara, Turkey.

Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal Math Teacher Education*, *11*(4), 307-332.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematics Thinking and Learning*, *10*(2), 103-133.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(3), 314-352.

Tall, D. (1999). The cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or for Some? In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around the World.*, Vol. 4 (pp. 111-136). Reston, Virginia: NCTM.

Yin, R. K. (2005). *Estudo de caso: planejamento e métodos.* Porto Alegre: Bookman.