Magda Sofia Lourenço Fernandes **Ensinar Números Racionais no 1.º CEB - Uma experiência com alunos do 4.º ano em período de transição de documentos curriculares**

UMinho | 2013

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Magda Sofia Lourenço Fernandes

Ensinar Números Racionais no 1.º CEB - Uma experiência com alunos do 4.º ano em período de transição de documentos curriculares

outubro de 2013

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Magda Sofia Lourenço Fernandes

Ensinar Números Racionais no 1.º CEB - Uma experiência com alunos do 4.º ano em período de transição de documentos curriculares

Dissertação de Mestrado
Mestrado em Estudos da Criança
Área de Especialização em Ensino e Aprendizagem da Matemática

Trabalho realizado sob a orientação da
Professora Doutora Ema Mamede

outubro de 2013

DECLARAÇÃO

Nome
Magda Sofia Lourenço Fernandes

Endereço electrónico: magdafernandes@gmail.com

Título dissertação
Ensinar Números Racionais no 1.º CEB – Uma experiência com alunos do 4.º ano em período de transição de documentos curriculares

Orientador: Ema Mamede

Ano de conclusão: 2013

Designação do Mestrado:
Mestrado em Estudos da Criança,
Área de Especialização em Ensino e Aprendizagem da Matemática

Universidade do Minho, ____/___/_______

Assinatura: ____

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Ema Mamede, pelo acompanhamento incansável, pelo constante incentivo, pela confiança e disponibilidade sempre presentes, que tornaram possível a realização deste trabalho e um crescimento profissional e pessoal.

À instituição de ensino onde foram recolhidos os dados deste estudo. À Drª Helena e à Drª Cristina, por todos os momentos de acompanhamento, reflexão e permanente partilha de experiências.

Aos alunos que participaram neste estudo pela sua disponibilidade, atenção e constante motivação, sem os quais não teria sido possível realizar esta tão importante trajetória de aprendizagem.

Aos colegas, pelo estímulo e motivação. Aos colegas, pela paciência e compreensão das muitas ausências.

E por fim, aos meus pais e ao Gabriel, por acreditarem.

Resumo

Este estudo procura perceber como as crianças no final do 1.º Ciclo constroem o conceito de número racional quando este é trabalhado nos significados quociente, parte-todo, operador e medida, após terem sido previamente expostas a um contacto com o Programa de matemática tradicional. Para tal, procurar-se-á entender: como os alunos compreendem a representação, a ordenação e a equivalência de fração em cada um dos significados; e como estes articulam os diferentes modos de representação de um número racional nestes significados.

A metodologia adotada é de natureza qualitativa, de tipo de estudo de caso, tendo sido realizados seis estudos de caso. Para foco dos estudos de caso foram selecionados alunos com 9 e 10 anos. O investigador deste estudo é igualmente o professor da turma. A recolha de dados recorreu a técnicas como observação com registos vídeo e áudio, registos escritos dos alunos e notas de campo. Os alunos em estudo realizaram uma trajetória de aprendizagem de 12 sessões, onde tiveram contacto com tarefas envolvendo números racionais com diferentes significados e diferentes representações.

Os dados do estudo permitem caracterizar o desenvolvimento da compreensão do número racional realizado pelos alunos com esta trajetória, concluindo que estes desenvolveram a noção de número racional sendo capazes de trabalhar com as suas diferentes representações: fracionária, decimal e percentual, e sendo capazes de resolver tarefas nos diferentes significados de número racional. Os alunos, ao longo desta sequência, melhoraram as noções de ordenação e equivalência de números racionais. Os dados apontam também que a sequência escolhida para introdução de diferentes significados foi facilitadora da compreensão do conceito de número racional, levando a concluir que a transição do Programa tradicional (ver DEB, 1991) para as orientações do Programa de matemática (DGIDC, 2007) foi conseguida globalmente, de uma forma tranquila.

Palavras-chave: Número racional, Comparação Ordenação e Equivalência de racionais, Diferentes Significados, Representações

Abstract

This study aims to understand how children at the end of the 4th grade build the concept of rational number when it is worked with the meaning of quotient, part-whole, operator and measurement, after they have been exposed to the traditional math syllabus. For this purpose, we will try to perceive: how students understand representation, ordering and equivalence of fractions in each of its meanings; and how they articulate the different modes of representation of a rational number in these meanings.

The methodology adopted is of qualitative, case study nature, having six case studies been conducted. Children between the ages of 9 and 10 were selected as the focus group of the case studies. The researcher of this study is equally the teacher of this class. The collection of data used techniques such as observation with video and audio recording, written records of the students and field notes. The students in the study made a learning trajectory of 12 sessions, in which they had contact with tasks involving rational numbers with different meanings and different representations.

The data of the study allow for a characterization of the development of understanding of the rational number by the students on this trajectory, concluding that the students developed a notion of rational number being able to work with its different representations: fractional, decimal and its percentage, and being able to solve tasks in the different meanings of the rational number. The students, during this sequence, improved the notions of ordering and equivalence of rational numbers.

The data also indicate that the sequence chosen to introduce the different meanings facilitated the understanding of the concept of the rational number, leading to conclude that the transition from the traditional Syllabus (see DEB, 1991) to the guidelines of the math Syllabus (DGIDC, 2007) was achieved overall in a quiet and effective manner.

Key-words: Rational Number, Comparison Ordering and Equivalence of Rationals, Different meanings, Representations

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Índice de Transcrições

Capítulo 1 - INTRODUÇÃO

O trabalho investigativo descrito ao longo desta dissertação tem por base o estudo realizado sobre a aprendizagem do conceito de número racional numa fase de implementação de um novo Programa de matemática (DGIDC, 2007).

Este primeiro capítulo remete para um enquadramento do tema a ser tratado focando a importância da literacia matemática e a emergência do desenvolvimento do sentido do número nos dias de hoje. Apresenta uma visão global dos documentos curriculares nacionais e estrangeiros e sua organização e justifica a relevância do tema, apontando qual o problema em estudo e quais as questões de investigação, por último é apresentada a sua organização.

A palavra fração deriva do latim fractio, ônis. De acordo com Vale e Pimentel (2004), os números fracionários começaram a ser utilizados pelos egípcios e babilónios na resolução de problemas de medida. Enquanto os egípcios só trabalhavam com fração de numerador 1 e com fração $\frac{2}{4}$, os babilónios que utilizavam o sistema de numeração sexagesimal, trabalhavam com fração cujos denominadores eram potências de 60. Durante toda a Idade Média, as fração eram utilizadas correntemente. No entanto, a forma de as escrever foi evoluindo ao longo dos tempos. Só no século XVII é que as fração se começaram a escrever da forma que hoje conhecemos. A fração é apenas uma das representações utilizadas para escrever números fracionários outra representação é a dízima (Vale & Pimentel, 2004). Os números racionais englobam os números inteiros e os números fracionários. Kieren (1976), ao logo dos seus estudos, definiu número racional como o quociente $\frac{x}{y}$, entre dois números inteiros x e y, com y ≠ 0 e é esta a definição usada ao longo deste trabalho.

Kieren (1976) considerou que o conhecimento de fração representa um alargamento significativo e complexo sobre os números. Desenvolver o sentido do número implica ter consciência da sua complexidade e, segundo Mamede (2008) em particular no número fracionário, implica ter consciência das várias interpretações onde se encontram fração e das suas diversas representações.

A compreensão do conceito de número racional é um dos assuntos onde são manifestadas muitas dificuldades ao longo da sua aprendizagem. No que concerne essas dificuldades há consenso na literatura (Behr, Harel, Post & Lesh,1992), contudo de que forma se pode agir para facilitar o processo de ensino-aprendizagem deste conceito ainda pouco se sabe. Sabe-se que os diferentes significados do número racional devem ser trabalhados em sala de aula com os alunos, contudo, pouco ainda se sabe sobre a ordem pela qual será mais benéfico trabalhá-los, se é que existe uma.

1.1. A Literacia Matemática

A noção de Literacia Matemática tem sofrido alterações ao longo dos tempos, em função da forma como os diferentes autores têm vindo a estabelecer a relação entre a matemática e o contexto sociocultural onde se inserem. No mundo contemporâneo em mudança e na pressão competitiva que o caracteriza, a Escola defronta o desafio de preparar a inserção dos alunos no mundo de trabalho como trabalhadores matematicamente alfabetizados, tornando-os em cidadãos responsáveis e críticos, avaliando a informação política, social e económica que os rodeia (NCTM, 1991). Atualmente, é fundamental ser capaz de resolver problemas, analisar e interpretar dados e tomar decisões e não apenas ser capaz de ler, escrever ou fazer contas (Rosen, Weil & Zastrow, 2003).

Segundo Eva Jablonka (2002), a literacia matemática depende da forma como se analisa a relação entre a matemática e o contexto sociocultural de quem a define, podendo ter múltiplas conceções, apresentando cinco perspetivas diferentes sobre este tema. A primeira perspetiva é a adotada pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE), em 1999, com o Programme for International Student Assessment, PISA, que define a literacia matemática como a capacidade de identificar, de compreender e se envolver em matemática e de realizar julgamentos bem fundamentados acerca do papel que a matemática desempenha na vida. Tenta-se, nesta perspetiva, dar uma visão intercultural, permitindo avaliar os desempenhos de estudantes de vários países, apesar de culturas e contextos diferentes. A segunda perspetiva foca o sentido da etnomatemática e da identidade cultural, cidadãos que frequentaram a escola utilizam no seu dia-a-dia diferentes técnicas matemáticas das aprendidas, mostrando que é importante ter em conta o ambiente cultural e ligar as aprendizagens escolares com o quotidiano dos alunos. Uma terceira perspetiva baseia-se na mudança social de Henry Giroux, aqui, a Educação Matemática tem em vista desenvolver cidadãos críticos e a literacia matemática é "uma competência para reinterpretar partes da realidade e participar num processo de prosseguir uma realidade diferente" (Jablonka, 2002, p. 85). A matemática sensibiliza os alunos para questões sociais e inclui a capacidade para compreender e avaliar criticamente dados estatísticos e argumentos apresentados por outros, isto é, para compreender a matemática do conhecimento político (Frankenstein, 2000). Quando há uma relação entre a literacia matemática e a literacia científica, surge a quarta perspetiva, onde se espera que o aluno se torne cidadão capaz de resolver problemas pessoais, locais e globais do ambiente. Jablonka atribui a esta perspetiva de literacia um papel na modificação da visão da própria matemática no sentido de uma maior abertura e criatividade e menos ligada a valores de racionalidade e objetividade. Por fim, uma quinta perspetiva de literacia matemática, assumida por Jablonka, defende uma literacia matemática para o desenvolvimento de uma cidadania crítica na sociedade tecnológica, onde é necessário: a) interpretar informação apresentada de modo mais ou menos científico; b) ter consciência das aplicações da matemática que afetam a sociedade e c) desenvolver a consciência dos limites da fiabilidade dos modelos matemáticos (Jablonka, 2002).

Gal (2002) associa à literacia matemática a capacidade de interpretação e avaliação da informação matemática com que todos nós nos confrontamos diariamente e apresenta literacia matemática como tendo duas vertentes, literacia cultural e funcional. A primeira entende-se como a matemática comum, utilizada nos meios de comunicação e a segunda a capacidade de se usar estes termos nas conversas, nas leituras e nos documentos escritos. Segundo De Lange (2003) para além de ser capaz de raciocinar, argumentar, comunicar, formular e resolver problemas, um cidadão literado matematicamente tem de ter intuição, capacidade de raciocínio e comunicação em situações do dia-a-dia, pelo que a definição de literacia matemática não pode apenas focar a capacidade de aplicar aspetos quantitativos, tendo um sentido mais abrangente, englobando noções de espaço e forma, mudança e relações e incerteza.

Serrazina e Oliveira (2005) consideram que a literacia matemática é mais abrangente do que noções de literacia quantitativa ou numeracia, conceito muito utilizado em Inglaterra, onde desde

1997 existe o projeto National Numeracy Strategy, onde se dá especial relevo aos números e operações e à confiança na aplicação e no uso da matemática em contexto real.

1.2. O Sentido do Número

Ao longo das últimas décadas, as definições do sentido do número que foram sendo apresentadas procuram centrar a sua atenção no espírito intuitivo que evidencia, no carácter gradual do seu desenvolvimento e nos processos pelos quais se tem vindo a evidenciar. O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) considerou existirem cinco componentes para a definição do sentido do número: desenvolvimento dos conceitos elementares de número, incluindo conceitos de cardinal e de ordinal; exploração das relações entre os números, sendo que a composição e decomposição de conjuntos de objetos permite escrever um número de diferentes formas; compreensão do valor relativo dos números; desenvolvimento de referenciais de medição de objetos e situações do meio envolvente e desenvolvimento da intuição do efeito relativo das operações nos números, permitindo um pensamento crítico e uma maior consciência sobre se o resultado obtido é, ou não, razoável (NCTM,1989).

Reys (1998), apesar de considerar existir um carácter volátil e personalizado e de ter realçado a expectativa utilitária dos números que cada um de nós individualmente possuímos, considera importante para que seja definido o sentido do número, a própria compreensão que todos temos dos próprios números e operações, assim como a forma como os comunicamos, processamos e interpretamos, como até a capacidade que temos no desenvolvimento de estratégias que os envolvam para a resolução com sucesso dos nossos problemas, o que associando à definição do conceito de números e de operações existente, conclui como determinante para a definição do sentido do número, a forma de pensamento como individualmente cada um de nós for capaz de estabelecer por si só.

McIntosh, Reys e Reys (1992) apresentam "três componentes em que o sentido do número desempenha um papel chave, nomeadamente conceitos numéricos, operações com números e aplicações das operações com números" (McIntosh *et al.*, 1992, p.5). Além de focarem estas componentes, os autores apresentam um modelo (ver Fig.1) onde as relacionam com o sentido do número.

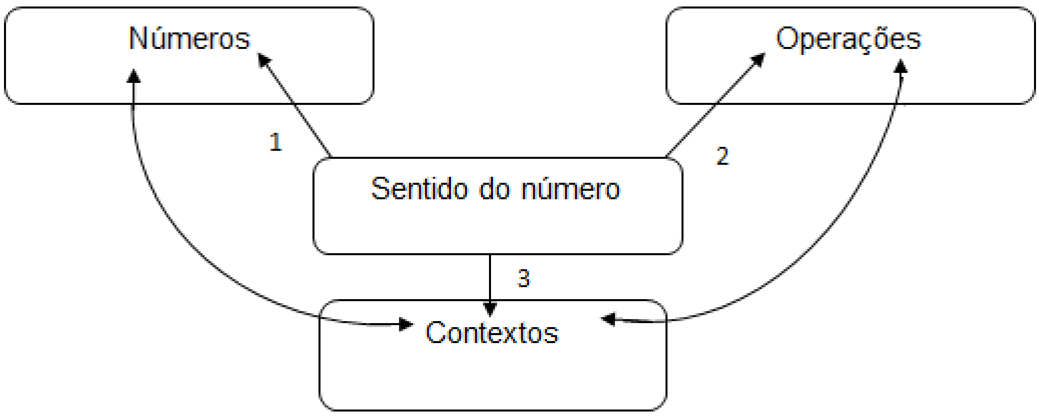


Figura 1.1. Interligações entre as componentes fundamentais do sentido do número (McIntosh *et al.*, 1992)

Este modelo (ver Fig.1.1.) consiste em diferenciar as três áreas de especial importância quando se reflete sobre o desenvolvimento do sentido do número: o conhecimento e destreza dos números (1), o conhecimento e destreza das operações (2) e a aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em contextos de cálculo (3) e representam as interligações entre as três componentes. Estas interligações mostram o possível processo monitorizado com ligações entre sentido de número e a metacognição.

Vários aspetos indicados por McIntosh *et al.*, (1992) são encontrados noutros documentos. O NCTM (1991) indica que uma criança possui o sentido do número quando: compreende os significados do número; desenvolve múltiplas relações entre os números; reconhece a grandeza relativa dos números; conhece o efeito relativo de operar com os números e desenvolve padrões de medida de objetos comuns e de situações no seu meio ambiente. Greenes Schulman e Spungin (1993) defenderam existir uma estreita compreensão da relação entre os números, as suas utilizações e o contexto do problema, pelo que o sentido do número corresponderia à capacidade da obtenção de decisões baseadas na compreensão das relações matemáticas e do contexto ou aplicação dessas mesmas relações.

Sabendo que o cálculo por estimativa é considerado satisfatório para a resolução de problemas e conhecendo a importância que assume a conjugação do valor absoluto e valor posicional dos números para a definição dos conceitos de número e das operações, Sowder e Shappelle (1994), defendem que a coordenação das aptidões desenvolvidas para o processamento de arrendamentos e o cálculo mental contribuem também para o conceito da definição do sentido do número. No âmbito do processo de resolução de problemas defendem também que não assumem importância a forma da resolução que lhes é associada, pelo que enfatizam o ensino do cálculo mental como forma do desenvolvimento individual do sentido do número (Sowder & Shappelle, 1994).

Recentemente, Serrazina (2007) refere que existem vários elementos a ter em consideração quando é referida a noção de sentido do número, entre eles encontra-se a necessidade de entender os diferentes significados do número, conhecer as múltiplas relações entre os números e compreender a grandeza relativa dos mesmos, conhecer o efeito relativo das operações e as propriedades de cada uma e conseguir recorrer a números de referência.

Hélia Pinto (2011) refere que, para desenvolver especificamente o sentido do número racional, é de extrema importância trabalhar gradualmente os diferentes significados que estes podem assumir. Num estudo que realizou, sugere que existem grandes dificuldades na transição do conjunto dos números inteiros para o conjunto dos números racionais e das representações na forma decimal para as representações em forma de fração. Integrada no Projeto Desenvolvendo o Sentido do Número: perspetivas e exigências curriculares (2003-2007), estudou o sentido do número nos alunos dos 5 aos 12 anos. No que concerne o sentido do número racional, Monteiro e Pinto (2006) e Monteiro, Pinto e Figueiredo (2005) indicam que os alunos apropriam-se progressivamente dos símbolos convencionais e que no 2.º CEB resolvem compreensivamente problemas de partilha equitativa recorrendo primeiro a esquemas e desenhos, e recorrendo gradualmente à representação simbólica do número racional, mais especificamente da fração. As autoras indicam também que os alunos ao longo dos anos foram trabalhando informalmente com os números racionais nas diferentes representações, decimais, fração e percentagens. As investigadoras salientam também a importância da unidade na compreensão dos números racionais, relembrando que o número racional tem sempre subjacente uma unidade.

1.3. Orientações curriculares

National Research Council (1989) refere-se ao sentido do número como um objetivo essencial da formação inicial matemática e o National Council of Teachers of Mathematics, NCTM (1989), assinala-o como uma noção fundamental do currículo. Posteriormente, o NCTM (2000) referencia esta noção juntamente com a compreensão dos números e das operações e da fluência do cálculo. Intensifica-se a ideia de sentido do número argumentando que os currículos, desde a educação de infância até ao final ao ensino secundário, devem potenciar nos alunos uma expressiva compreensão dos números.

É de notar que a nível de orientações curriculares, enquanto para o NCTM, o sentido do número é um conceito explícito a ter em consideração e a desenvolver ao longo de toda a escolaridade há muitos anos, em Portugal, o sentido do número surge recentemente nos documentos oficiais que orientam a aplicação dos programas do ensino básico. Em Portugal, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) refere que o sentido do número é um conceito nuclear do ensino dos números e do cálculo desde os primeiros anos. De acordo com estes autores, há competências matemáticas no domínio dos números e das operações que devem ser desenvolvidas pelos alunos do ensino básico e que estão ligadas ao sentido do número.

No Programa anterior em vigor do 1° Ciclo do Ensino Básico (ver DEB, 1991), apesar de não surgir o conceito de sentido do número, encontravam-se, no Bloco 1 – números e operações, algumas orientações que remetiam para o desenvolvimento do mesmo.

Abrantes *et al.*, (1999) escrevem o documento "A Matemática na Educação Básica" e usam a expressão sentido do número, utilizando a ideia de McIntosh *et al.*, (1992). As ideias destes autores estão contidas no documento Currículo nacional do ensino básico: Competências Essenciais (2001), onde se salienta que "ser matematicamente competente envolve hoje, de forma integrada, um conjunto de atitudes, de capacidades e de conhecimentos relativos à matemática" (ME, 2000, p. 57) que necessitam de ser desenvolvidos ao longo de toda a Educação Básica e que inclui, entre outras:

> " [...] A predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a aptidão para desenvolver processos de resolução, assim como para analisar os erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas;
>
> • A aptidão para decidir sobre a razoabilidade de um resultado e de usar, consoante os casos, o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis ou os instrumentos tecnológicos. (p. 57) [...] "

Num momento de mudança, de acordo com o Programa de matemática (DGIDC, 2007) é visível o cuidado em explorar o sentido do número transversalmente, englobando este conceito de forma explícita nos três ciclos do Ensino Básico. Para o 1.º Ciclo em vigor, o estudo das fração deve ter início no primeiro Ciclo, de uma forma concreta e transversal a todos os significados de "fração". As alterações que o Programa de matemática (DGIDC, 2007) para o 1.º Ciclo introduz relativamente às fração são essencialmente: antecipação para o 1.º e 2.ºanos de escolaridade; ênfase nas conexões entre as diferentes representações: fração, numeral decimal e percentagem; diferentes significados das frações - parte-todo, quociente, medida, razão e operador.

Assim, analisando com detalhe a abordagem da noção de número racional referida naquele documento, tem-se que desde o 1.º Ciclo do Ensino Básico, deve-se explorar o número racional através de materiais concretos e modelos pictóricos, recorrendo à representação fracionária, decimal e percentual, a partilha equitativa e a divisão no mesmo número de partes de um dado todo, contínuo ou discreto. O Programa salienta também que ao longo dos anos de escolaridade, especificamente nos 3.º e 4.º anos, os alunos deverão trabalhar outros significados de número racional, começando de uma forma mais significativa, a partir da partilha equitativa por trabalhar tarefas com significados quociente, parte-todo e operador. É nesta fase que se introduzem os número racionais na forma de numeral decimal e posteriormente percentual e que posicionam números racionais na reta numérica. No 2.º Ciclo do Ensino Básico aborda-se o número racional nos cinco significados, tendo sido trabalhado de uma forma informal a noção de razão e a utilização da proporção. Nesta altura os alunos operam com os números racionais aprendendo os processos para operar com as frações, conhecendo as fração equivalentes, irredutíveis e impróprias, sobre a forma de numeral misto.

É importante referir que ao longo do processo de escolarização e ao longo de todas as reformas educativas este tema sempre foi desvalorizado, muito devido à sua complexidade (por parte dos alunos e essencialmente por parte dos professores). De uma forma pobre e redutora o trabalho dos números racionais ao longo dos primeiros anos de escolaridade recai apenas no significado parte-todo, por vezes tocando nas situações operador (Mamede, 2008).

É notório, ao longo da elaboração de diferentes documentos orientadores do ensino da matemática, a identificação das dificuldades dos alunos e a inserção de novos olhares e práticas para combater o insucesso em relação aos números racionais. Observa-se uma preocupação na organização da abordagem à noção do número racional de forma a que os alunos tenham contacto com os diferentes significados e representações que estes números podem ter, trabalhando-os numa situação de matemática realista, recorrendo aos seus conhecimentos prévios e ao contexto onde estão inseridos. Nunca esquecendo que o currículo deve ser elaborado tendo em conta o desenvolvimento global do aluno, pensando em todos os seus processos e não apenas num desenvolvimento específico (Behr *et al.*, 1992; Moss & Case, 1999). É de consenso geral na literatura que o conceito de número racional bem desenvolvido pressupõe domínio dos diferentes significados e representações nele envolvidos (Behr *et al.*, 1992, Nunes *et al.*, (2003), Mamede (2008).

1.4. Justificação/relevância do tema

O Programa do Ensino Básico (1991) está dividido em três blocos considerados como uma unidade, onde os itens de cada bloco devem ser abordados de forma integrada ao longo do ano. No 1.º Ciclo do Ensino Básico, no Bloco 1 – números e operações, são abordados os números naturais e inteiros não negativos assim como as suas operações, também aqui se foca os números racionais não negativos com significado operador, assumindo a forma de numeral decimal. No 2.º Ciclo do Ensino Básico, no Bloco – números e cálculo é de novo abordado o tema dos números racionais, onde os alunos aprendem a operar com fração e a ordená-las e compará-las, só no fim deste Ciclo, no 6.º ano, é que são abordados os números racionais sob a forma de percentagem. Este Programa realça que nesta altura do percurso escolar do aluno, este deve ser confrontado com a resolução de problemas simples, recorrendo às representações simbólica, verbal e esquemática/gráfica.

Analisando o Programa de matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007) para o 1.º Ciclo, no domínio dos números e operações, subdomínio números racionais não negativos refere para os 1.º e 2.º anos: identificar a metade, a terça parte, a quarta parte, a décima parte e outras partes da unidade e representá-las na forma de fração; compreender e usar os operadores: dobro, triplo, quádruplo e quíntuplo e relacioná-los, respetivamente, com a metade, a terça parte, a quarta parte e a quinta parte; explorar intuitivamente situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, envolvendo quantidades discretas e contínuas. Para os 3.º e 4.º anos, aponta a compreensão de fração com os significados quociente, parte-todo e operador; reconstrução da unidade a partir das suas partes; resolução de problemas envolvendo números na sua representação decimal; ler e escrever números na representação decimal (até à milésima) e relacionar diferentes representações dos números racionais não negativos; comparar e ordenar números representados na forma decimal e usar a representação percentual (25%, 50% e 75%); localizar e posicionar números racionais não negativos na reta numérica; estimar e calcular mentalmente com números racionais não negativos representados na forma decimal; adicionar, subtrair, multiplicar e dividir com números racionais não negativos na representação decimal.

Fazendo uma comparação entre os programas pode-se verificar que a própria organização dos documentos sofreu alterações. Se no Programa de 1991 há um documento individual para cada ciclo de ensino, no Programa de 2007 encontra-se uma visão global, sendo ele próprio um só documento englobando os três ciclos, dando aos professores uma ideia geral de como estão organizados os conteúdos ao longo dos ciclos e permitindo uma maior articulação entre os mesmos. Ambos os documentos estão organizados por blocos temáticos, mas enquanto que no Programa de 1991 estes blocos funcionam por ano de escolaridade, no Programa de 2007 estão organizados por ciclo, à exceção do 1º Ciclo que está subdividido em dois (1.º e 2.º anos; 3.º e 4.º anos), desta forma promove-se a autonomia dos professores e da escola.

Analisando os dois documentos são notórias as alterações em relação aos conteúdos abordados. No Programa de 1991 há uma maior valorização do domínio das operações, por sua vez, no Programa de 2007 há uma grande preocupação para com o desenvolvimento do sentido do número, valorizando assim o número no seu todo e as estratégias que os alunos utilizavam na resolução de problemas em contexto, vindo posteriormente a sistematização e a introdução das operações e dos algoritmos mais convencionais. Enquanto que no Programa de 1991, no 1.º Ciclo do Ensino Básico, havia um enfoque muito grande apenas nos números decimais, no Programa de 2007 fala-se de números racionais nas representações decimal, fracionária e percentual, se no primeiro Programa toda a abordagem partia dos números decimais e só muito no fim é que se abordava a representação fracionária, agora com o Programa de 2007, surge também a representação fracionária logo nos dois primeiros anos de escolaridade. Neste último Programa atende-se aos diferentes significados que a fração pode ter (quociente, parte-todo, operador, medida e razão), estando presente no documento a indicação de que se deverão explorar todos os significados no 1.º Ciclo, deixando apenas a razão para o 2.º Ciclo. Operar com os números racionais sobre a forma de fração é conteúdo de 2.º Ciclo nos dois programas.

Assim, atualmente estão-se a sentir grandes mudanças, havendo documentos basilares que com novas organizações ajudam os professores e regulam o ensino. É de realçar as alterações feitas no Programa de 2007, nomeadamente, numa forma global, o enfoque no sentido do número e numa forma particular, o sentido do número racional, onde estes números são abordados desde os primeiros anos do 1.º Ciclo do Ensino Básico e onde se disponibiliza em situações problemáticas as suas diversas representações e significados.

Em Portugal há poucos estudos sobre o impacto das diferentes interpretações de fração na compreensão global do conceito de fração. A literatura (Kieren, 1993) mostra que os alunos têm dificuldades em compreender este conceito e revela que existe pouca pesquisa sobre os efeitos que os diversos significados poderão ter na compreensão do conceito de fração. Contudo, pouco se sabe sobre os modos como a implementação deste Programa pode concretizar-se e sobre as questões de articulação inevitavelmente existentes junto de práticas de sala de aula em que se desenvolvem o Programa de matemática tradicional e agora passaram a implementar o Programa de matemática, homologado em 2007.

Vários autores afirmam que o conceito de número racional é um dos conceitos mais complexos que as crianças aprendem ao longo dos primeiros anos de escolaridade (Behr, Wachsmuth, Post & Lesh, 1984; Kerslake, 1986; Kieren, 1993). De forma a compreender e adquirir este conceito de modo mais completo, é importante desenvolver a compreensão dos aspetos lógicos da fração, como a equivalência e a ordenação (Mamede & Nunes, 2008), bem como dos aspetos de representação. Os estudos apontam no sentido da diversificação de contextos, de modo a que as fração sejam entendidas nos seus diferentes significados. Na opinião de investigadores e especialistas (ver Behr *et al.*, 1984; Kerslake, 1986; Kieren, 1993), é na síntese dos diferentes significados que os alunos podem construir o conceito de número racional.

Tendo os professores novas orientações curriculares que destacam e valorizam a construção do sentido do número, neste caso específico, do sentido do número racional, importa perceber como pode ser implementado tal Programa no 1.º Ciclo do Ensino Básico. Sendo que este ciclo abrange quatro anos de escolaridade, como pode ser abordado o Programa de matemática (DGIDC, 2007) quando os alunos se encontram em processo de transição de um programa antigo para outro novo? Importa então conhecer formas de ajustar práticas de ensino ao novo

Programa ainda que os alunos tenham vindo a experienciar um ensino conduzido à luz do Programa tradicional.

1.5. Problema em estudo e questões de investigação

Este estudo procura implementar um projeto de intervenção que visa identificar as facilidades e as dificuldades dos alunos na aprendizagem do conceito de número racional, em período de transição de implementação de novos documentos curriculares. Procura-se aqui perceber como as crianças no final do primeiro Ciclo constroem o conceito de número racional quando este é trabalhado nos significados quociente, parte-todo, operador e medida, após terem sido previamente expostos a um contacto com o Programa de matemática tradicional. Para tal procurar-se-ão respostas às seguintes questões de investigação:

- Como compreendem os alunos a representação, a ordenação e a equivalência de fração em cada um dos significados?

- Como articulam os alunos os diferentes modos de representação de um número racional nestes significados?

1.6. Organização da dissertação

Esta dissertação está organizada em 6 capítulos distintos com o propósito de elucidar com clareza o leitor sobre o estudo de investigação conduzido. Assim, o Capítulo I – Introdução - pretende dar um enquadramento geral sobre as noções de literacia matemática, de sentido do número e revisitar as orientações curriculares referentes à compreensão e ao desenvolvimento do número racional. Neste capítulo também se justifica a relevância do tema em estudo, revelando-se a problemática e respetivas questões de investigação.

O capítulo II – Revisão de literatura - procura compreender o conceito de número racional, abordando a ordenação e equivalência e a representação. Foca as diferentes abordagens sobre os diferentes significados de número racional e enumera estudos realizados à luz deste tema.

Em relação ao capítulo III – Metodologia - são apresentadas e justificadas as opções metodológicas adotadas, assim como o design do estudo. Apresentam-se os participantes, os procedimentos tomados e explica-se como se procedeu à recolha de dados.

De seguida, no capítulo IV – Resultados sobre a trajetória - procede-se à apresentação da análise dos resultados do trabalho empírico traçando uma caracterização geral das tarefas apresentadas e analisando tanto o desempenho geral como em tarefas específicas por parte dos alunos.

No capítulo V – Discussão dos resultados - discutem-se os resultados obtidos ao longo das sessões efetuadas na trajetória de ensino, apresentando-se em seguida, no capítulo VI - Conclusões, as respetivas conclusões, que procuram dar resposta às questões desta investigação, respondendo, tanto quanto possível ao problema em estudo.

Capítulo 2 - REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo apresenta-se o estado da arte onde se aborda as investigações já feitas sobre a compreensão do número racional. Destacam-se os seus diferentes significados e representações e os invariantes operacionais (ordenação e equivalência). Referencia-se também o ensino e aprendizagem dos números racionais e alguns estudos de investigação já realizados. Pela sua pertinência, salientam-se os diversos trabalhos de Vergnaud, de Kieren, de Behr, Lesh, Post e Silver e de Hart.

2.1. Compreender conceito de número racional

O número racional consiste num dos conceitos mais complexos que as crianças têm de aprender nos primeiros anos de escolaridade (Behr *et al.*, 1984; Kerslake, 1986; Kieren, 1993) e entender este conceito é facilitador para a compreensão do sentido do número. O número racional engloba uma vertente tão ampla que, segundo Behr, Lesh & Post (1982), numa forma generalizada promove o entendimento e resolução de problemas do dia-a-dia, ajuda a estruturar mentalmente o seu intelecto e particularmente na matemática cria condições para os alunos estarem mais aptos e disponíveis para a aquisição de conhecimentos mais difíceis noutra fase de ensino. Interessa então perceber o que está envolvido na construção do número racional.

Vergnaud (1996) dá especial relevo ao estudo do funcionamento cognitivo de quem aprende em ação. Surge assim a teoria dos campos conceptuais que pressupõe que conhecer é resultado da interação entre situações, problemas e ações do aluno nessas situações, é através das suas resoluções que um conceito adquire significado para o aluno. Assim, sendo conceito C a construir, este resulta da articulação de três conjuntos, C = (S, I, R), com:

S: conjunto de situações que dão sentido ao conceito;

I: conjunto de invariantes operacionais associados ao conceito;

R: conjunto de representações simbólicas, linguísticas e não linguísticas que permitem representar o conceito, as suas propriedades, procedimentos e os seus invariantes.

Segundo Vergnaud (1996), são as situações que dão sentido aos conceitos, dando-lhes aplicações. Aplicando esta teoria de Vergnaud à construção do conceito de fração, importa perceber como compreendem as crianças o número racional nos diferentes significados, como entendem os invariantes operacionais e como dominam os diferentes modos de representação de número racional.

Entender a noção de racional exige, à luz da teoria de Vergnaud (1996), que se percebam os invariantes operacionais dos números racionais, a ordenação e equivalência, e que se tenha a capacidade de trabalhar com diferentes modos de representação em diferentes interpretações deste conceito (Behr *et al.*, 1984; Nunes *et al.*, 2004; Mamede, 2008; Mamede & Nunes, 2008), mas também que se dominem os diferentes significados de número racional, isto é, as diferentes situações ou interpretações que dão sentido ao conceito.

2.2. A ordenação e equivalência

Piaget (1952) definiu, para os números naturais, dois critérios essenciais para a compreensão do número: equivalência e a ordenação. Seguindo a mesma ótica, adotou-se como fundamentais, os mesmos critérios para os números racionais. É importante referir que se para os números naturais é facilitador a tomada de consciência da ordenação através da contagem de uma forma sequencial (conceito ordinal), onde o número anterior é sempre menor, nos números racionais o mesmo não se aplica. Quando a criança aborda o número racional na sua forma fracionária, as suas noções de ordenação podem levá-lo a assumir que $\frac{1}{5}$ é maior do que $\frac{1}{4}$ (porque 5 é maior do que 4) sendo importante trabalhar diferentes estratégias que desenvolvam um pensamento multiplicativo além do aditivo já trabalhado nos números naturais (Post, Behr, & Lesh, 1986). Na sequência deste aspeto, também se deve referir que os próprios termos linguísticos utilizados na ordenação são, muitas vezes, obstáculos para os alunos serem bem-sucedidos, confundindo "mais" divisões com "maior" parte criada, por exemplo, $\frac{1}{3}$ tem três divisões e é menor do que $\frac{1}{2}$ que tem apenas duas divisões.

De acordo com Post e colegas (1986), no decorrer da apropriação dos conceitos subjacentes ao número racional, os alunos tendem a desenvolver para o número fracionário, de uma forma intuitiva, três estratégias diferentes para conseguir resolver problemas de ordenação e comparação: pensamento diferencial, pensamento residual e recurso a pontos de referência. No que concerne ao pensamento diferencial, algumas ideias erradas podem ser formadas, por exemplo, quando os alunos comparam $\frac{3}{4}$ com $\frac{2}{3}$ chegam à conclusão que a $\frac{3}{4}$ falta $\frac{1}{4}$ para a unidade e a $\frac{2}{3}$ falta $\frac{1}{3}$ para a unidade, deduzindo desta forma que as fração são equivalentes uma vez que em ambas apenas falta uma parte para obter o todo, descartando erradamente que essas partes não são equivalentes. O pensamento residual vem na mesma linha de pensamento que o anterior, porém aqui os alunos comparam a fração que falta para obter o todo, seguindo o exemplo anterior, os alunos apercebem-se que $\frac{1}{4}$ não é o mesmo que $\frac{1}{3}$, sendo o primeiro menor do que o segundo, ou seja, concluindo que a $\frac{3}{4}$ falta uma quantidade menor para chegar à unidade, logo $\frac{3}{4}$ será maior do que $\frac{2}{3}$. Por último tem-se o pensamento por pontos de referência, onde os alunos utilizam uma terceira fração, normalmente $\frac{1}{2}$,como termo de comparação entre duas, a título de exemplo, para comparar $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{6}$, os alunos apercebem-se que $\frac{3}{4}$ é maior do que $\frac{1}{2}$ enquanto que $\frac{2}{6}$ é menor, acabando por concluir que $\frac{3}{4}$ é maior do que $\frac{2}{6}$ (Post *et al.*, 1986).

Para que os alunos sejam capazes de ordenar números racionais fracionários é importante que consigam interpretar corretamente determinadas características da fração. Por exemplo, o aluno deve ser capaz de reconhecer que quando os denominadores são iguais, a ordenação da fração reduz-se à ordenação dos numeradores; deve perceber que o tamanho da fração depende do quociente da mesma, dividindo os dois números naturais (numerador pelo denominador); e compreender a relação inversa entre o denominador e o numerador, reconhecendo que quanto maior for o denominador em relação ao numerador menor a fração (Post, Wachsmuth, Lesh & Behr, 1985; Nunes *et al.*, 2004). Uma dificuldade que facilmente pode surgir reside na representação na forma de numeral decimal das frações a comparar (Bezuc & Cramer, 1989). No entanto, no que toca a esta estratégia é essencial compreender que os alunos devem dominar a comparação de números com diferentes casas decimais visto que é comum os alunos interpretarem com dificuldade a grandeza do número, por exemplo, afirmam que 0,5 é menor do que 0,25 pois, recorrendo ao conhecimento prévio dos números naturais, 5 é menor do que 25 (Post, Cramer, Behr, Lesh,& Harel, 1993).

A compreensão dos números racionais sob a forma de fração pressupõe compreender que existem classes de fração equivalentes (por exemplo, $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{5}{10}$, ...) e, como já se referiu, estas classes podem ser ordenadas (por exemplo $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, ...) (Nunes *et al.*, 2004).

Para um domínio do conceito de fração equivalente é necessário que os alunos se apropriem da noção de que para a mesma quantidade existem diferentes formas de a representar (Kamii & Clark, 1995). Mamede (2008) aponta como obstáculos na compreensão de classe de fração equivalentes as suas diferentes representações, uma vez que a mesma quantidade pode ser representada por diferentes símbolos escritos ($\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{5}{10}$, ...), pode ser designada por diferentes palavras (um meio, dois quartos, cinco décimas) e pode ser representada pictoricamente de diferentes maneiras. De forma a ultrapassar estas dificuldades Kamii e Clark (1995) apontam como essencial que os alunos tenham contacto com as fração a partir de situações problemáticas do seu quotidiano, deixando-os construir as suas próprias estratégias, sendo eles a recorrer à representação gráfica do problema e não, a partir de representações dadas, uma vez que desta maneira criarão maiores competências na resolução destes problemas. Para estes autores, além de se recorrer a material concreto e manipulável é essencial que, desde cedo, se trabalhe com frações impróprias e se desenvolva o pensamento multiplicativo.

Numa fase posterior e de maior maturação da noção de número racional, segundo Orton *et al.*, (1995), uma vez trabalhadas as fração equivalentes os alunos poderão recorrer a elas de uma forma facilitadora para comparar e ordenar fração. Tendo duas frações com diferente denominador, encontram-se duas frações equivalentes com igual denominador e facilmente se verifica qual a menor e qual a maior.

.

2.3. A representação

Mamede (2008) refere como ponto necessário para a compreensão de números racionais a representação dos mesmos. É muito comum haver modelos pictóricos, verbais e simbólicos, entre outros. A interligação e a tradução destas representações manifestam-se difíceis por isso é importante que haja uma boa articulação entre os modelos a que se recorre, modelos esses tanto representativos de quantidades contínuas (por exemplo modelos de comprimento, área e volume) como quantidades discretas (por exemplo objetos, pessoas). Para ajudar os alunos a desenvolverem a noção de número racional e a trabalharem com os invariantes operacionais corretamente e de uma forma consciente, deve-se promover o uso de material concreto aquando a exploração de tarefas. Desta forma, estimula-se o pensamento dos alunos, ajudando-os a construir estruturas sólidas para, gradualmente, se abstraírem do pensamento concreto e intuitivo para um pensamento abstrato e formal (Post *et al.*, 1986; Kamii & Clark, 1995).

É muito importante desenvolver nos alunos uma diversidade de representações internas possíveis de serem relacionadas entre si e consolidadas através da exploração de representações externas. Desta forma consegue-se dar evidências exteriores aos alunos do seu pensamento recorrendo à linguagem padrão, ao sistema gráfico matemático e a todas as aprendizagens estruturadas (Goldin, 2003). Referindo estes dois sistemas de representação, interna e externa, Goldin e Shteingold (2001) defendem a importância da sua interação, afirmando que só se desenvolve o pensamento quando há compreensão e relação entre as diferentes representações do conceito em questão.

O "iceberg de representações" é um modelo desenvolvido pelo Instituto Freudenthal (Webb, Boswinkel & Dekker, 2008) que ilustra a forma como os alunos experienciam a aprendizagem e constroem as noções, dando sentido às representações matemáticas. Neste modelo, a parte do iceberg que está debaixo de água, na zona mais funda, é grande e representa todas as representações informais do aluno. Ao se aproximar da tona de água encontra-se as representações pré-formais, de forma a fazer a transição com a parte do icebergue que está de fora de água, a ponta, ou seja, uma pequena área reservada às representações formais e simbólicas.

Este modelo indica que há necessidade de trabalhar com os alunos, durante mais tempo, as representações informais e pré-formais, sendo que os professores deverão insistir nesta exploração e só depois passar para a construção das representações formais. Estas representações deverão ser construídas sobre as estruturas basilares das representações informais e serão utilizadas sempre que o aluno precisar de recorrer a esta representação, normalmente em situações de aprendizagem novas.

Uma vez que o número racional assume diferentes representações, os alunos acabam por ter maiores dificuldades na compreensão quantitativa do mesmo, tendo dificuldade em compreender que os números racionais têm tamanhos relativos e absolutos. Numericamente, em termos absolutos, $\frac{1}{5}$ é sempre maior do que $\frac{1}{10}$, contudo, se estas quantidades corresponderem a unidades diferentes, pode-se verificar o contrário (ver Post *et al.*, 1986).

Os alunos também apresentam dificuldades na representação do número racional enquanto fração por esta ser expressa por dois números, conduzindo-os a lerem estes números separadamente e ordenando-os tendo em conta o valor absoluto de cada um deles, considerando erradamente que a fração maior é a que é composta pelos algarismos maiores (ver Post *et al.*, 1986; Monteiro & Pinto, 2005). Os alunos adquirem a noção quantitativa de número racional quando, tanto em situações de ordenação como em situações de equivalência, necessitam apenas de recorrer a representações matemáticas formais sem apoio de material concreto (Kamii & Clark, 1995).Sabe-se que a compreensão dos conceitos por parte das crianças e a qualidade de resolução de problemas está intimamente ligada com as situações problemáticas com as quais as crianças trabalham.

Behr e colegas (1983) apontam como importante o recurso a materiais manipulativos uma vez que a utilização destes materiais facilita a aquisição e a aplicação dos números, tornando a aprendizagem mais significativa. Estes materiais ajudam os alunos a construir o seu próprio pensamento, levando-os a reconstruir a situação e a manipular a informação para resolver o problema. Os mesmos autores referem ainda a importância da utilização de material concreto ao longo do desenvolvimento do número racional nos diferentes significados, uma vez que fazem a ligação entre os contextos reais e as situações problemáticas.

Segundo Post (1981), a ligação que o material manipulável permite entre as situações concretas, através da manipulação, e as situações problemáticas, através do uso da representação simbólica é uma ligação isomórfica. Podem-se considerar os diferentes materiais concretos como estruturas isomórficas (parciais) representativas das noções matemáticas mais complexas a aprender. Na utilização de material manipulável há que ter em atenção o processo de escolha do mesmo de forma a garantir que a seleção é a mais adequada à tarefa em questão, tendo em conta as suas potencialidades e limitações.

O Rational Number Project (RNP) usou o modelo de Lesh (ver Fig.2.1.) que enfatiza as múltiplas representações e conexões entre as diferentes representações. É necessário o envolvimento dos alunos e o recurso a representações e materiais concretos.

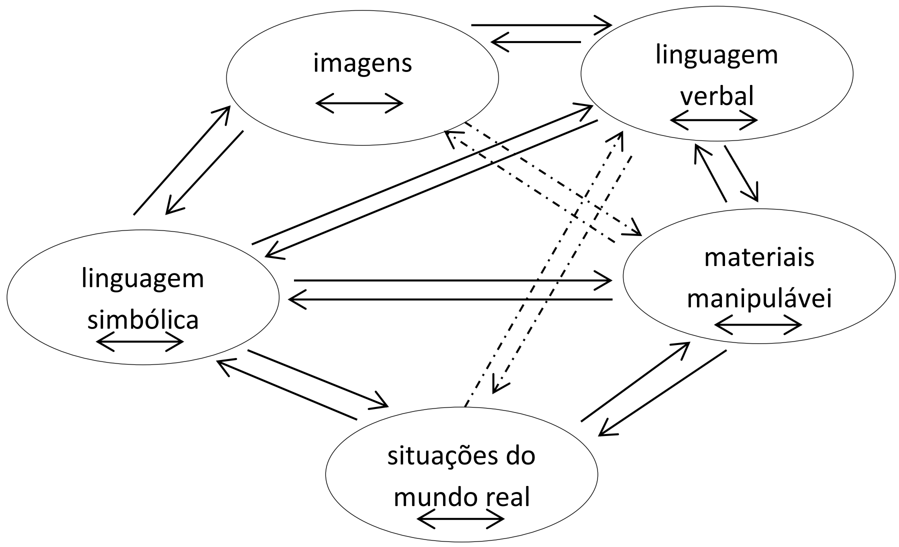


Figura 2.1. Modelo de conversões de Lesh (1979)

Como se pode observar através do modelo, o desenvolvimento da compreensão do conceito de número racional requere o contacto com diferentes representações e muito contacto e prática nas conversões dentro e entre representações.
As representações informais e as estratégias utilizadas numa primeira fase de aprendizagem ajudam os alunos a construir os alicerces para a construção de novos conceitos. Segundo Gravemeijer (2005) deve-se recorrer a abordagens em sala de aula que estimulem a capacidade de os alunos passarem com facilidade de uma representação para outra, facilitando o uso destas estratégias. Contudo, a facilidade de tradução de representações nas diferentes situações ou significados nem sempre é fácil.

2.4. Os diferentes significados de número racional

Foram vários os autores que estudaram e distinguiram as diferentes interpretações ou significados de número racional. Kieren (1976) começou por distinguir sete significados para o conceito de fração, baseando o seu estudo no conceito de *subconstructo,* entendendo-se este conceito como os esquemas mentais que o indivíduo faz quando tem de resolver problemas envolvendo o número racional nos diferentes significados. Mais tarde, após uma reformulação, Kieren (1988) apresenta cinco *subconstructos*, sendo eles: parte-todo, quando há a divisão da unidade em partes iguais; quociente, quando se encontra uma divisão equitativa entre dois números inteiros; medida, havendo comparação entre grandezas; razão, quando há uma relação entre duas quantidades, referentes a duas partes de um todo e operador, quando está presente uma transformação de um número noutro.

Adotando a noção de *subconstruto* apresentada por Kieren (1988), Behr, Lesh, Post e Silver (1983) sugerem uma classificação distinguindo cinco *subconstructos*: quociente, parte-todo, operador, medida e razão. Desta forma, para estes autores entende-se por quociente a partilha equitativa entre duas quantidades, onde o numerador representa um grupo de coisas a serem distribuídas, por exemplo fatias de tartes, e o denominador representa o grupo de recetores a recebê-las, por exemplo um grupo de crianças. Nesse sentido a fração correspondente ao quociente representa não só a divisão como também o resultado da mesma; por parte-todo a divisão de uma unidade, contínua ou discreta, em partes iguais, onde o denominador corresponde ao número de partes em que o todo foi dividido e o numerador ao número de partes selecionadas. Se cada parte igual corresponder a *n*, tem-se então $\frac{1}{n}$, ao representar a relação parte-todo em fração; por operador a ação a reproduzir sobre um número ou uma quantidade, permitindo a transformação do cardinal de um conjunto discreto.

Estando perante representação por figuras pictóricas de uma fração, esta tem o efeito de redução ou ampliação, onde o denominador representa uma divisão e o numerador uma multiplicação; por medida a utilização da fração como medida de comparação entre grandezas. A unidade é assim fracionada, onde o denominador representa o número de partes em que foi dividida e o numerador o número de partes iguais, de referência; e por fim a razão que não representa uma quantidade, servindo antes como um índice de comparação, onde o denominador e o numerador representam as quantidades ou grandezas a comparar. Numa razão, estabelece-se uma relação comparativa entre duas quantidades de um mesmo todo ou entre duas grandezas distintas resultando numa nova grandeza.

Mais recentemente, Kieren (1993, 1995) distingue apenas quatro significados, assentes na noção de *subconstructo*, significado quociente, estruturante para a realização da divisão e entendimento do quociente entre dois valores; significado operador, relação e transformação de tamanho; significado medida (onde inclui o modelo parte-todo), quando se mede algum valor; significado razão, a relação entre valores distintos.

Também Marshall (1993) apresenta um conjunto de esquemas mentais caracterizados como "uma rede de conhecimentos sobre um evento ou situação", distinguindo cinco situações distintas: quociente, onde em $\frac{a}{b}$, a é distribuído no número de partes dado por *b* (partilha equitativa) e dividir *a* elementos em *b* grupos (divisão); parte-todo, quando um todo contínuo ou discreto é dividido em partes iguais; $\frac{a}{b}$ onde a indica que está incluído em *b*; operador, quando $\frac{a}{b}$ serve para relacionar e transformar um valor noutro; medida, onde $\frac{1}{b}$ é usado para medir distâncias e razão, quando duas quantidades distintas são relacionadas uma com a outra.

Recentemente, Nunes *et al.*, (2004) apresentaram uma classificação baseada na noção de situação, apresentada por Vergnaud (1997) onde as frações são usadas. Com Nunes *et al.*, (2004) surge o termo "situação" seguindo a teoria de Vergnaud como significado que os valores envolvidos na fração assumem, considerando que *subconstructo* envolve várias ideias que podem ser usadas em várias situações. Assim, distinguem-se quatro situações distintas: situação quociente, onde existe divisão de quantidades contínuas onde o denominador indica o número de recipientes e o numerador o número de objetos inteiros contínuos a serem repartidos (por exemplo, $\frac{2}{4}$, 2 chocolates a distribuir igualmente por 4 meninos; a parte de chocolate que cabe a cada menino); situação parte-todo, onde há divisão de quantidades contínuas e o denominador da fração corresponde ao número de partes em que o todo foi dividido e o numerador refere-se ao número de partes tomadas (por exemplo, $\frac{2}{4}$, dividir a unidade em 4 partes e tomar 2); situação operador que envolve quantidades discretas tomadas como um todo, o denominador indica o número de grupos iguais em que o conjunto foi dividido e o numerador o número de grupos tomados (por exemplo, $\frac{2}{4}$, dividir um conjunto discreto de itens em 4 grupos e considerar 2) e *quantidades intensivas*, onde os números envolvidos na escrita da fração representam relações proporcionais, sendo o todo irrelevante (por exemplo, $\frac{2}{4}$, 2 limões para 4 colheres de açúcar).

Apesar das diferenças entre classificações pelos diversos autores, os significados quociente, parte-todo e operador são considerados importantes e estão presentes em todos eles. O Programa de matemática (2007) realça que, ao trabalhar os números racionais, não interessa que estes saibam distinguir estes significados, mas antes que tenham tido oportunidade para representá-los em cada um deles.

2.5. O ensino e aprendizagem de números racionais

Post e Cramer (1989) fundamentaram que para uma melhor apropriação da noção de número racional é importante o domínio dos conceitos e dos procedimentos e que estes devem ser relacionados entre si por forma a estabelecer as mais diversas ligações criando um conjunto de conhecimentos diversificado e consistente. Post e colegas (1993) argumentam ainda que além deste aspeto, na abordagem ao estudo dos números racionais deve-se atender aos conhecimentos que os alunos trazem consigo e ter em conta a necessidade de trabalhar os invariantes operacionais de uma forma regular, apresentando os algoritmos numa fase posterior e promovendo a compreensão dos vários significados de número racional: quociente, parte-todo, operador, medida e razão (Post *et al.*, 1993).

Sendo o conceito de número racional conhecido entre os investigadores como difícil para os alunos, Moss e Case (1999) sistematizaram quatro possíveis justificações. Assim, referem que: o conhecimento que os alunos têm dos números naturais e as generalizações que fazem deles acabam por confundir e criar incompreensões no trabalho com o número racional; a própria notação acaba por criar barreiras aos alunos; os programas de matemática estão mais centrados nos processos para operar com números racionais e menos preocupados em promover situações onde os alunos se apropriem do significado do conceito; na sequência desta última razão e aliada à insegurança dos professores, são eles os primeiros a trabalhar com os alunos unicamente os processos formais deixando de parte a exploração que cada aluno possa fazer de forma informal. Trabalhando com os alunos de uma forma integradora e ao mesmo tempo eclética face aos significados dos números racionais garante a construção de momentos de ensino-aprendizagem sólidos, significativos e facilitadores da formação da noção de número. Para tal, para além dos significados supracitados, deve-se considerar situações que envolvam quantidades tanto contínuas como discretas.

Os estudos mostram que em diversos países as abordagens às frações baseiam-se quase exclusivamente no modelo parte-todo (Kerslake, 1986; Behr *et al.*, 1992; Monteiro *et al.*, 2005). Kerslake (1986) aponta que recorrer apenas a este modelo prejudica o conceito de fração das crianças, impedindo o reconhecimento de outro tipo de interpretações em que as fração são utilizadas, limitando a construção do conceito e levando a que seja difícil compreender que a fração pode ser maior que a unidade.

Segundo Monteiro *et al.*, (2005), também em Portugal a primeira abordagem faz-se através de situações parte-todo, acreditando que desta forma se facilita a aprendizagem, ainda que poucos estudos fundamentem esta ideia. Mamede, Nunes e Bryant (2005) mostram que o tipo de situação ou significado em que as frações são usadas parece afetar a construção deste conceito, havendo interpretações que poderão facilitar mais a compreensão do conceito tal como a sua construção a partir do conhecimento informal de cada criança. Os autores vão mais longe e argumentam que a interpretação quociente facilita a compreensão da relação inversa entre divisor e quociente, fundamental no trabalho com fração, recaindo no uso da correspondência de um para muitos (Mamede *et al.*, 2005).

Cardoso e Mamede (2010) concluíram que para resolver atividades que envolvam equivalência e ordenação de fração, o significado que vai mais ao encontro do conhecimento informal das crianças é o significado quociente, sendo estas conclusões suportadas por outros autores como Nunes *et al.*, (2004) uma vez que este significado baseia-se na distribuição equitativa de quantidades facilitando o entendimento da relação inversa entre o divisor e o quociente, quando o dividendo é o mesmo.

Na abordagem aos números racionais não é relevante que os alunos distingam as classificações acima mencionadas, mas é importante que estes tenham contacto com diferentes situações em que as frações são utilizadas, como refere o Programa de matemática (DGIDC, 2007). Para efeitos desta investigação, tomou-se como referência os cinco significados patentes no Programa de matemática (DGIDC, 2007). Assim, nesta investigação entende-se por significado quociente a partilha equitativa entre duas quantidades, onde o numerador representa um grupo de coisas a serem distribuídas, por exemplo fatias de tartes, e o denominador representa o grupo de recetores a recebê-las, por exemplo um grupo de crianças. Nesse sentido a fração correspondente ao quociente representa não só a divisão como também o resultado da mesma; entende-se por parte-todo a divisão de uma unidade, contínua ou discreta, em partes iguais, onde o denominador corresponde ao número de partes em que o todo foi dividido e o numerador ao número de partes selecionadas. Se cada parte igual corresponder an, tem-se então$\frac{1}{n}$, ao representar a relação parte-todo em fração; entende-se por operador a ação a reproduzir sobre um número ou uma quantidade, permitindo a transformação do cardinal de um conjunto discreto. Estando perante representação por figuras pictóricas de uma fração, esta tem o efeito de redução ou ampliação, onde o denominador representa uma divisão e o numerador uma multiplicação e entende-se por medida a utilização da fração como medida de comparação entre grandezas. A unidade é assim fracionada, onde o denominador representa o número de partes em que foi dividida e o numerador o número de partes iguais, de referência.

As investigações ao longo dos tempos culminam com a certeza de que o conceito de fração só está compreendido quando o aluno tem um grande domínio do conceito nas suas diferentes interpretações, sendo capaz de traduzir, raciocinar e resolver problemas nas diferentes situações (Mamede, 2008) utilizando as várias formas de representação. Mas, estarão as nossas práticas de ensino no 1.º Ciclo do Ensino Básico desenvolvidas de forma a assegurar a construção de conceito de número racional nas suas diferentes interpretações?

2.6. Estudos de investigação já realizados

Os anos 80 constituíram uma época de ouro para a investigação no âmbito dos racionais. Contudo, pouco trabalho foi desenvolvido com crianças até aos 10 e 11 anos.

Com o objetivo de analisar de que forma os alunos evoluem na compreensão quantitativa do número racional através do uso de materiais concretos até chegar a um pensamento mais abstrato, Behr *et al.*, (1984) desenvolveram um estudo com alunos do 4.º ano (10 anos) recorrendo a tarefas em que era preciso que estes comparassem fração com o mesmo denominador, com o mesmo numerador e com numeradores e denominadores diferentes. Nas tarefas em que os denominadores eram iguais, o estudo distingue cinco estratégias: 1) focar o numerador e o denominador, aqui os alunos, considerando o denominador igual como sendo o número em que a unidade foi dividida, olham para o numerador e comparam o seu valor, esta foi a estratégia mais utilizada; 2) a mesma estratégia mas conduzindo a resposta incorreta, dando significado inverso ao numerador e denominador; 3) recorrer a uma terceira fração como ponto de referência; 4) uso de material concreto para resolver as tarefas; por fim 5) comparação de fração com base nos numeradores, fazendo paralelismo com os números naturais.

Também nas tarefas com fração cujos numeradores eram iguais foram encontradas cinco estratégias diferentes pelos alunos, sendo uma delas incorreta: 1) atendem ao numerador e o denominador (aqui os alunos considerando o numerador igual olham para o denominador e comparam o seu valor, sendo maior a fração com menor denominador); 2) apenas referem os denominadores; 3) utilizam uma terceira fração ou um número inteiro como ponto de referência; 4) recorrem a material concreto; e 5) comparam as frações tendo por base o seu conhecimento dos números naturais (esta última estratégia foi a mais recorrente numa fase inicial, mas é de salientar que não funciona uma vez que assim os alunos não consideram a relação inversa entre o numerador e denominador).

Nos problemas com numeradores e denominadores diferentes foram seis as estratégias catalogadas, sendo três corretas e outras três incorretas. Da mesma forma como nas tarefas referidas acima, os alunos recorreram a uma terceira fração como ponto de referência e à utilização de materiais manipuláveis e também recorreram a razões para calcular fração equivalentes. Neste tipo de tarefas os alunos ainda, incorretamente, fizeram o paralelismo com os números naturais, comparando o numerador e denominador como se se tratassem de números naturais; recorreram à adição, juntando o valor do numerador com o do denominador e por fim, demonstraram usar um raciocínio proporcional, porém com erros na utilização da proporção.

Este estudo, de Behr e colegas (1984), mostrou que numa fase inicial, as estruturas de ordenação de números naturais está muito presente nos alunos, implicando dificuldades na compreensão quantitativa do número racional. Contudo, os resultados também revelam que os alunos desta faixa etária têm capacidade de trabalhar a noção de número racional, nomeadamente de trabalhar a sua ordenação e a equivalência, sendo importante ressalvar que são muitos os alunos com dificuldades e que deve ser um tema tratado com calma e ao longo de um período grande de tempo, estimulando-os a perceber a relação entre o valor absoluto da fração e o seu valor relativo a diferentes unidades.

Hart (1981) coordenou o programa Concepts in Secondary Mathematics and Science (CSMS) no Reino Unido, com o objetivo de identificar as dificuldades dos alunos na área de matemática. O programa abrangeu cerca de 10 mil crianças, com idades compreendidas entre os 12 e os 16 anos e de entre os temas a serem trabalhados incluía-se o tópico de fração. As questões formuladas para os alunos mais novos resolviam-se com recurso à adição e à subtração de fração. O trabalho para as crianças mais velhas continha alguns aspetos em comum com este trabalho, mas também envolvia problemas de multiplicação e divisão. Cada teste deste programa apresentou resolução de problemas e, além disso, um conjunto de cálculos necessários à sua resolução. Hart (1981) refere que os alunos sentem-se relativamente seguros quando trabalham dentro dos números inteiros e com as restrições impostas por eles. O facto de algumas restrições não se aplicarem ao conjunto dos números racionais e de as frações serem necessárias para estender o sistema numérico além de contagem, frequentemente escapa-lhes. Este estudo mostra a importância de trabalhar o tópico dos números racionais no contexto dos números e, em vários momentos, deixa claro que a criança não compreende a fração como um número. Este estudo sustenta a ideia de que, para a criança atingir este conhecimento, é necessário trabalhar questões referentes a fração equivalentes e à ordenação de fração.

Embora existam algumas pesquisas sobre fração, as dificuldades dos alunos sobre este conceito permanecem. Esta constatação sugere que estas dificuldades podem ter origem antes do estudo de fração e, portanto, que uma das prováveis causas dessa situação é a transição do conjunto de números naturais para o conjunto dos números racionais.

O estudo de Hart (1981) mostrou que os resultados não corresponderam às expectativas dos investigadores, mostrando o quão difícil é compreender a noção do número racional e trabalhar de forma a estimular o aluno para a sua apropriação. Os investigadores (Hart, 1981) concluíram que um caminho necessário a seguir para melhorar esta lacuna na compreensão de número racional é trabalhar com os múltiplos significados com que o número racional é apresentado aos alunos. Lesh, Post e Behr (1987) referem que ao longo dos seus estudos, ao longo do decorrer do National Number Project, os alunos mais bem-sucedidos foram aqueles que conseguiram resolver os problemas utilizando um maior número de representações e que conseguiram também, de uma forma intuitiva, adequar a sua estratégia mudando a representação para a que lhes era mais conveniente.

Monteiro *et al.*, (2005) desenvolveram um estudo onde analisaram as estratégias informais que os alunos do 5.º ano utilizavam na resolução de tarefas em contextos de partilha equitativa numa experiência em sala de aula. Os alunos trabalharam em grupo sem ter havido uma explicação inicial de como resolver os problemas, nota-se que estes alunos nunca tinham estudado fração nos anos anteriores. A abordagem deste trabalho caracterizou-se por trabalhar com problemas significativos para os alunos, aleando os conhecimentos que estes já tinham com situações do quotidiano. Este tipo de problemas é facilitador da construção da noção de número racional uma vez que os alunos são co construtores das suas próprias aprendizagens através da exploração das estratégias informais de cada um. Note-se que as tarefas apresentadas aos alunos foram em contextos de partilha equitativa.

Nunes *et al.,* (2004) levaram a cabo um estudo com 62 alunos com idades compreendidas entre os 7 e os 10 anos de idade, para descrever as diferentes estratégias a que os alunos recorriam quando eram confrontados com tarefas com fração no significado quociente. As crianças do estudo tinham trabalhado previamente fração com significado parte-todo, contudo, um número significativo realizou as tarefas recorrendo às noções de divisão por forma a justificar equivalência de fração. Os resultados deste estudo sugerem que o tipo de significado em que o número racional é trabalho pode afetar o entendimento do conceito de número racional pelo aluno.

Mamede *et al.,* (2005) trabalharam com crianças de 6 e 7 anos sem conhecimento formal prévio de fração, procurando perceber o efeito dos significados quociente, parte-todo e operador na compreensão do conceito de fração dos alunos. Para tal foram conduzidas entrevista individuais em que os alunos tinham de resolver problemas de ordenação e equivalência de quantidades representadas por fração, apresentados nas diversos significados. O estudo revelou que o tipo de significados de fração nas tarefas influenciou o desempenho dos alunos, tendo-se verificando maiores sucessos em tarefas com significado quociente. Este estudo vai ao encontro do estudo referido anteriormente de Nunes e colegas (2004), onde parece haver uma relação próxima entre a abordagem inicial ao estudo das frações através de tarefas no significado quociente e uma maior compreensão do conceito de número racional neste significado, promovendo uma construção mais estruturante do conceito a partir do conhecimento informal dos alunos.

Nesta linha de raciocínio, Cardoso e Mamede (2009) realizaram um estudo quantitativo de forma a compreender que alterações se dão no desempenho dos alunos quando estes trabalham o conceito de fração como significado quociente e de que forma reagem quando trabalham as frações nos diversos significados. Este estudo foi feito com 84 alunos do 6.º ano de escolaridade com 11 e 12 anos, tendo-se apresentado um inquérito por questionário individual. O estudo concluiu que as tarefas exploradas em sala evidenciam um contributo de melhoria do desempenho dos alunos na resolução de problemas envolvendo os invariantes operacionais (ordenação e equivalência) e uma melhoria no conceito de fração mais alargada e completa. Destaca-se o aumento no nível de desempenho na resolução de tarefas com significado quociente. Esta conclusão é surpreendente uma vez que em Portugal a abordagem às frações é feita, maioritariamente, através do significado parte-todo, seguindo depois para o significado operador. Os dados obtidos neste estudo sugerem que os alunos, de uma forma intuitiva, são mais capazes de mobilizar os seus saberes quando estão na presença de tarefas apresentadas no significado quociente.

Quaresma (2010) desenvolveu um estudo com uma turma do 5.º ano de escolaridade onde procurou saber quais as estratégias utilizadas pelos alunos na comparação, ordenação e equivalência de números racionais e quais as dificuldades que os alunos apresentam na utilização das várias representações de número racional na resolução de problemas. Os dados desta investigação indicam que a abordagem ao número racional deve ser feita a partir da compreensão de conceitos e que deve envolver as diferentes representações de número racional. Sugere ainda que os alunos têm mais sucesso em algumas questões quando usam de forma ágil a representação decimal da fração.

Em síntese, a construção do conceito é complexa e envolve o domínio dos invariantes operacionais, ordenação e equivalência, em diferentes modos de representação. A par destas noções há que ter em conta o domínio dos diferentes significados que o número racional pode assumir. A investigação sugere que o tipo de significado pode condicionar a compreensão e construção do conceito de número racional.

O desenvolvimento do sentido do número racional no 1.º Ciclo de Ensino Básico pressupõe o domínio de todos os aspetos acima referidos, por isso urge entre a comunidade escolar a necessidade de saber mais sobre este tema, de dominar os conteúdos e de potenciar as experiências de aprendizagem dos alunos. Há poucos trabalhos de investigação em Portugal sobre estes assuntos, em especial, aqueles que se centram no 1.º Ciclo. Apesar de já haver alguma investigação sobre este tema desenvolvido na realidade portuguesa, pouco ainda se sabe sobre a construção do número racional nestas idades (6-10 anos) e quais os obstáculos e as facilidades com que os alunos se deparam quando trabalham nos diferentes significados referidos nas orientações curriculares (quociente, parte-todo, operador e medida). Também foi pouco explorado o processo de transição de implementação dos novos documentos curriculares apresentados em 2007 depois de se ter experienciado um ensino pobre na abordagem as fração, como é aquele apresentado pelo Programa tradicional (ver DEB, 1991).e as vantagens que se encontram no Programa de 2007.

Este trabalho foca uma trajetória de aprendizagem com alunos que se encontram a viver este período de transição (de um currículo antigo para um novo), que são confrontados pela primeira vez com os diferentes significados que o número racional pode ter, a par das diferentes representações que este pode assumir, tendo que resolver problemas de ordenação e equivalência.

É importante perceber como os alunos desenvolvem a noção de número racional com esta nova abordagem em processo de transição. Para tal, foi elaborado ao longo da trajetória, uma sequência de introdução de significados, começando pelo quociente, passando pelo parte-todo, operador e, por fim, medida.

Capítulo 3 - METODOLOGIA

Este estudo tem como objetivo compreender de que modo os alunos do 1.º Ciclo do ensino básico desenvolvem o de conceito de número racional. Assim, procura-se saber como compreendem os alunos a representação, a ordenação e a equivalência de fração em cada um dos significados e como estes articulam os diferentes modos de representação de um número racional nestas interpretações. Este capítulo apresenta e justifica as opções metodológicas adotadas e o plano da investigação desenvolvido para atingir tal propósito.

3.1. Opções metodológicas

Segundo Nóvoa (1991) “ [...] as opções científicas e metodológicas devem pautar-se por critérios de coerência e de pertinência em relação ao objeto de estudo e não por uma qualquer decisão apriorística sobre a validade das teorias ou das práticas de investigação” (p.30). Assim, a natureza do problema a investigar é que determina a escolha do método e técnicas de investigação.

Tendo em conta Bogdan e Biklen (1994), este estudo é uma investigação qualitativa. O interesse do investigador é pelo processo e não pelos resultados dando especial atenção à compreensão do ponto de vista dos participantes. O mais importante na escolha de uma metodologia, sendo este um processo crítico que permite obter respostas adequadas às nossas preocupações, formulações e objetivos, entre outros aspetos, tem de ser adequada ao objeto de investigação, à forma de o abordar teoricamente e ao campo de estudo a que ele se reporta. Para atingir tal objetivo e de modo a realizar a pesquisa de terreno, atravessada por uma abordagem interpretativa, o método de investigação mais adequado será o estudo de caso, que para Yin (2009) e Ponte (1994), é um método que permite ter como objetivo principal a compreensão em profundidade do "como" e do "porquê" da problemática em estudo, não alterando o contexto em questão, mas antes compreendendo-o.

Atendendo às características deste trabalho e às questões de investigação formuladas considera-se que a metodologia seguida e a técnica adotada são as mais adequadas e vantajosas à investigação.

3.2. Design do Estudo

Desenvolveu-se uma trajetória de aprendizagem com o objetivo de contribuir para o desenvolvimento do sentido de número racional nos alunos de 4.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico. A trajetória de aprendizagem foi elaborada tendo subjacente a ideia de trajetória hipotética de aprendizagem, no sentido que lhe é dado por Simon citado por Serrazina e Oliveira (2010).

A Figura 3.1. elucida sobre a estrutura adotada na definição da trajetória de ensino.

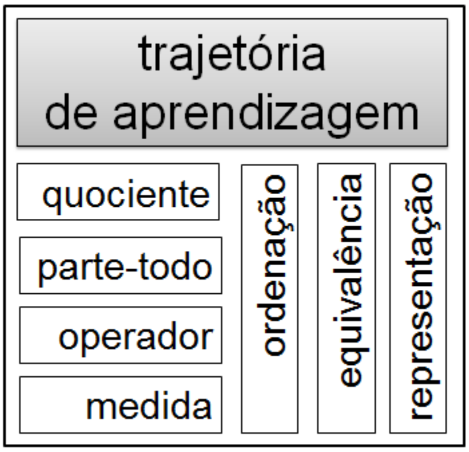


Figura 3.1. Esquema elucidativo da estrutura adotada na trajetória

Abordam-se os significados indicados no Programa de matemática (DGIDC, 2007), explorando em cada um deles os invariantes lógicos, bem como os diferentes modos de representação.

A trajetória de ensino explorou o número racional nos significados de quociente, parte-todo, operador e medida, por esta ordem, tendo em conta a ordenação, a equivalência e a representação. Ao longo destas aulas e do desempenho dos alunos, privilegiou-se esta sequência embora se tenham intercalado tarefas com significados diferentes, de forma a ver como os alunos reagiam e as resolviam. A abordagem ao número racional envolve frações, representação decimal e percentagem, tal como é sugerido no Programa de matemática (ver DGIDC, 2007).

O investigador deste estudo é igualmente o professor da turma. O professor sente, regularmente, a necessidade de compreender os acontecimentos no seu ambiente particular (Serrazina & Oliveira, 2001), e neste caso conduz uma investigação com os alunos da sua turma, onde já foi estabelecida uma relação próxima, eliminando assim a necessidade de existir outro adulto em sala cuja presença pode alterar a forma de estar dos alunos (Bogdan & Bikle, 1994). Desta forma há uma maior garantia de que o contexto observado não sofra alterações, premissa importante na metodologia de estudo de caso. Segundo Serrazina e Oliveira (2001), a interação entre o professor e o aluno é fundamental no processo de ensino-aprendizagem e crucial na procura de respostas numa situação como esta, num estudo desta natureza.

3.3. Os participantes

Para foco dos estudos de caso foram selecionados seis alunos, embora as tarefas propostas tivessem sido apresentadas e realizadas por toda a turma em que estavam integrados. A escolha dos alunos foi feita após uma análise cuidada e criteriosa, tendo em conta a capacidade de expressão dos seus raciocínios, os diferentes níveis de desempenho em matemática e a heterogeneidade em questões de género. Usando estes critérios foram selecionados os alunos Angelina e Alberto (grupo A), Sofia e Álvaro (grupo B), Ricardo e Natália (grupo C). Todos os alunos nasceram em 2002, tendo 9 e 10 anos, e os seus nomes são fictícios, de modo a assegurar o seu anonimato. Os três grupos em estudo formados têm assim características diferentes.

O grupo A é constituído pela Angelina e pelo Alberto. Estes meninos são dois alunos que revelam bastante autoconfiança e estão muito implicados no seu processo de ensino-aprendizagem. Têm grande sucesso no seu desempenho escolar, não só a nível da matemática, como das restantes áreas curriculares.

O grupo B é constituído pela Sofia e pelo Álvaro. São dois meninos muito concentrados e com gosto por desafios. Em todas as áreas, na matemática também, revelam gosto em procurar e partilhar as suas ideias, ainda que sejam razoavelmente competentes em matemática.

O grupo C é constituído pela Natália e pelo Ricardo. Estes dois alunos são bastante empenhados e envolvem-se muito em quase todas as atividades propostas, contudo, a área forte dos dois são as expressões, dramática e musical, respetivamente. A nível matemático apresentam dificuldades de compreensão e de realização.

Estes alunos estão inseridos numa turma do 4º ano do 1º Ciclo, numa escola do ensino privado, no concelho do Porto. De forma geral, os alunos pertencem a famílias com um poder socioeconómico médio-alto. A turma é composta por 20 alunos: 11 raparigas e 9 rapazes, com idades compreendidas entre os 9 e os 10 anos, sendo que um aluno tem 11 anos e é um aluno com necessidades educativas especiais.

É uma turma heterogénea, apresentando ritmos de trabalho diferentes. A partilha de saberes e experiências é valorizada e comum entre os alunos. Desde o 1.º ano que a turma não sofreu grandes alterações de alunos, sendo o trabalho desenvolvido numa perspetiva colaborativa e construtivista. Está organizada por cinco grupos de quatro alunos por isso, durante o estudo, os grupos continuaram juntos, sendo que foi pedido aos alunos que realizassem as tarefas em trabalho a pares. Desta forma proporciona-se um ambiente estimulante e de partilha, criando discussão entre os alunos e necessidade de argumentação e justificação. O diálogo e as interações em sala são utilizados para promover o reconhecimento de ligações entre ideias e a produzir e reorganizar conhecimento (NCTM, 2007).

3.4. As tarefas

A seleção das tarefas foi feita à luz do Programa de matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007), onde se pretende que os alunos desenvolvam o sentido do número racional e com ele a capacidade de compreender e resolver melhor as diferentes situações problemáticas com que podem ser confrontados.

As diversas tarefas desenvolvidas durante essa trajetória foram construídas tendo por base as questões do estudo e o quadro teórico já apresentado. O investigador teve em conta o Programa de matemática (DGIDC, 2007). Todas as tarefas foram pensadas pelo investigador tendo por base a revisão da literatura efetuada. Algumas tarefas foram adaptadas de 'Desenvolvendo o

Sentido do Número Racional' (Monteiro & Pinto, 2007) e de 'Classroom Activities for Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions: 2002 Yearbook'. (Bright, & Litwiller, 2002). Foram também baseadas nas brochuras de apoio à concretização do Programa de matemática do Ensino Básico para o 1.º e 2.º Ciclos (2008) e na brochura 'Cadeia de Decimais', publicada pela ESELx (Monteiro *et al.*, 2005).

Através do aprofundamento do estado da arte sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais elaborou-se um conjunto de tarefas, tendo por base o pressuposto de que os alunos desenvolvem melhor a compreensão e o sentido do número racional ao trabalharem com as suas diferentes representações de número racional, nos diferentes significados que estes podem ter. As tarefas foram criadas tendo como linha condutora a utilização dos diferentes significados nas diferentes representações que o número racional pode assumir. Construiu-se uma trajetória de ensino com base em 12 sessões onde, através de situações problemáticas, se trabalhou o número racional nos significados de quociente, parte-todo, operador e medida, por esta ordem (ver Figura 3.2.). Ao longo destas aulas e do desempenho dos alunos, privilegiou-se esta sequência embora se tenha intercalado tarefas com significados diferentes, de forma a ver como os alunos reagiam e as resolviam. Os significados que receberam maior atenção foram o quociente, o parte-todo e o operador e, por último, o que recebeu menor destaque foi o significado medida.

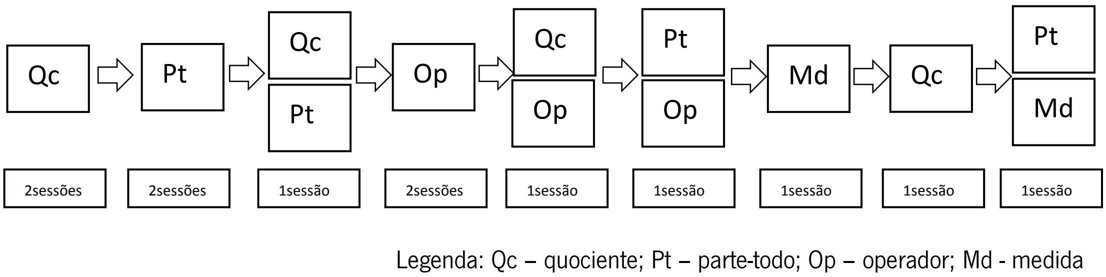


Figura 3.2. Esquema elucidativo da trajetória de aprendizagem e número de sessões nos diferentes significados de número racional, de acordo com o Programa de matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007)

3.5. Procedimentos

No início de cada sessão havia a apresentação da situação problemática, onde os alunos liam os respetivos enunciados, de seguida os pares resolviam o problema com o professor a apoiar sempre que fosse solicitado. Após a resolução de cada tarefa alguns alunos apresentavam ao grande grupo as estratégias de resolução mais significativas, seguindo-se um momento de confronto de estratégias.

As duas primeiras sessões foram dedicadas ao significado quociente, sendo que as tartes I, II e III (ver Anexo 3, p. 140) foram as tarefas escolhidas para abordar este significado. Nas três sessões seguintes, os alunos resolveram 4 tarefas (ver Anexos 4 e 5, p. 141), sendo que as duas primeiras e a quarta tinham significado parte-todo, a terceira regressou ao significado quociente.

Adotando o modelo das sessões anteriores, as duas sessões que se seguiram (ver Anexo 6, p. 147) exploraram um significado novo, o operador. Contudo, na sessão 8 e na sessão 9 revisitaram-se os significados abordados anteriormente, quociente e parte-todo, respetivamente (ver Anexos 7 e 8, p. 149). Na décima sessão (ver Anexo 9, p. 151) os alunos trabalharam com o significado medida, sendo que trabalharam a ordenação e equivalência com a representação fracionária do número racional. Nas últimas duas sessões, 11 e 12 (ver Anexos 11 e 12, p. 153), os alunos realizaram uma tarefa nos diferentes significados. Assim, resolveram uma situação problemática com números racionais nos significados quociente, parte-todo e medida.

As tarefas propostas ao longo da trajetória (ver Tabela 3.1.) baseiam-se em situações problemáticas de ordenação e comparação de números racionais, recorrendo a números racionais sobre a forma de fração, decimal e percentagem. Cada sessão teve a duração de aproximadamente 90 minutos.

Tabela 3.1. Tabela síntese das tarefas trabalhadas ao longo das sessões desenvolvidas na trajetória de aprendizagem

Sessão	Data	Nome da tarefa	Significado	Representação	Comparação
1ª e 2ª	27 e 29/02	Tartes I,II e III	quociente	fracionária	ordenação e equivalência
3ª e 4ª	02/03	Mafalda e as toalhas	parte-todo	decimal, fracionária e percentagem	ordenação e equivalência
5ª	07/03	Tartes IV	quociente	fracionária	ordenação
		O todo	parte-todo		
6ª e 7ª	09 e 12/03	Situações problemáticas; Marcelo e Ana	operador	decimal, fracionária e percentagem	ordenação e equivalência
8ª	14/03	Tartes V	quociente	fracionária	ordenação
		Cromos	operador		
9ª	16/03	Testamento do rei	parte-todo	decimal, fracionária e percentagem	ordenação e equivalência
		Tampinhas	operador		
10ª	19/03	Unidades de medida	medida	fracionária	ordenação e equivalência
		Comparando barras			
11ª	21/03	Tartes VI	quociente	fracionária	ordenação
12ª	23/03	Modelo circular	parte-todo	decimal, fracionária e percentagem	ordenação e equivalência
		café	medida		

3.6. A Recolha de dados

A recolha de dados efetuou-se através de transcrições dos diálogos em momentos de trabalho em sala de aula registados através de gravações áudio, registos escritos produzidos pelos alunos, registos vídeo das sessões, notas de campo registadas durante e após essas sessões pela investigadora (ver Tabela 3.2.). A diversidade destes instrumentos de recolha de dados permite a triangulação desses mesmos dados, possibilitando ao investigador ter um conjunto mais diversificado de tópicos de análise e também uma maior confiabilidade e segurança na informação recolhida, tal como refere Yin (2009).

Tabela 3.2. Tabela síntese de recolha de dados empíricos

Métodos de recolha	Fontes de dados	Formas de registo	Documentos
Observação participante	Aulas	Gravação áudio e vídeo das sessões	Transcrições, notas de campo
Recolha documental	Alunos		Registos produzidos pelos alunos nas sessões

O processo de recolha de dados foi feito pelo professor da turma que também é o investigador, e a recolha foi feita no ambiente natural de sala de aula, durante o horário escolar dos alunos. Através das notas de campo há um constante pensar sobre a ação e a trajetória de aprendizagem delineada, permitido ao investigador registar "os acontecimentos relevantes que vão surgindo no decurso do trabalho, bem como as ideias e preocupações que lhe vão surgindo" (Ponte, 2002, p. 18). Nestas notas constam o registo de atitudes dos alunos perante as tarefas, pormenores das estratégias utilizadas e dúvidas e comentários levantados. As notas funcionam também como um diário do investigador onde este regista as suas considerações e opiniões relacionados com o decorrer das sessões do estudo.

As gravações vídeo e áudio das sessões permitem ouvir e rever com pormenor episódios passados durante a realização das tarefas, possibilitando acompanhar à posteriori o trabalho de toda a turma, mais especificamente, dos participantes neste estudo.

De forma a obter mais elementos que demonstrem as estratégias utilizadas pelos alunos, os erros que cometem e as dificuldades e fragilidades que revelam, analisam-se os seus trabalhos escritos ao longo das diferentes sessões. A análise dos dados é realizada de forma indutiva, e sofre de uma interpretação fortemente subjetiva por parte da investigadora, impossibilitando assim a generalização dos resultados aqui apresentados. Procura-se antes identificar e caracterizar raciocínios e desempenhos dos alunos registados durante a intervenção.

Capítulo 4 - RESULTADOS SOBRE A TRAJETÓRIA

Neste capítulo é apresentado a análise dos resultados do trabalho empírico da trajetória de aprendizagem realizada com os alunos. Foca-se o desempenho geral na realização de problemas com diferentes significados de número racional e o desempenho dos alunos em tarefas específicas nas diferentes sessões.

4.1. Sobre o desempenho geral dos alunos

Houve um maior número de insucesso nas atividades com significado quociente nomeadamente nas representações fracionárias e na ordenação das mesmas, possivelmente devido a uma dificuldade em distinguir o numerador do denominador, havendo troca frequente destes valores. É necessário salientar que este tipo de atividade ainda não havia sido trabalhado intencionalmente nas aulas. Outro fator que poderá ter contribuído para uma taxa maior de insucesso foi o efeito novidade, uma vez que este significado foi o que iniciou este estudo.

Ao longo dos registos dos alunos, tanto escritos como orais, nota-se falta de rigor na linguagem matemática, uma vez que nesta fase a sua consciência/perceção por parte dos alunos ainda não está muito desenvolvida. O aluno consegue compreender a resolução do exercício mas ainda lhe faltam ferramentas linguísticas para conseguir desenvolver a sua explicação verbalmente. O facto de esta atenção aos conceitos linguísticos da matemática ser trabalhada tardiamente contribui para esta falta de rigor.

Como se pode observar na tabela 4.1., em cada tipo de significado ocorreu uma concentração de insucesso num único grupo, para o significado de medida o grupo B (13%), para o operador o grupo A (6%) e para o parte-todo e quociente o grupo C (9 e 29% respetivamente).

Tanto o grupo A como o grupo B obtiveram taxas de sucesso de 100% em três significados. Em relação à taxa de insucesso, o grupo B apresentou um número superior quando comparado com o grupo A, contudo, ambas são referentes a significados diferentes, não levando a concluir que um significado seja mais difícil de trabalhar do que outro.

Por sua vez o grupo C apresenta a taxa de insucesso mais elevada, resultados que não surpreendem tendo em conta as características dos grupos. Porém, é de salientar que o grupo C tenha tido uma taxa de sucesso de 100% nos dois significados, operador e medida, onde os grupos A e B apresentaram, respetivamente, piores desempenhos.

Tabela 4.1. Distribuição da proporção do desempenho dos alunos de acordo com o tipo de grupo e o número de alíneas correspondentes a cada tipo de significado de fração

Grupo	Resultado	medida	operador	parte-todo	quociente
A	Insucesso	0%	6%	0%	0%
	Sucesso	100%	94%	100%	100%
B	Insucesso	13%	0%	0%	0%
	Sucesso	88%	100%	100%	100%
C	Insucesso	0%	0%	9%	29%
	Sucesso	100%	100%	91%	71%

Durante este estudo os alunos trabalharam em pares, o que poderá conduzir a algum efeito de contaminação durante a resolução das tarefas, uma vez que um dos alunos parece ter sempre maior influência sobre o outro.

Todos os grupos tiveram elevados valores de sucesso na resolução das tarefas nos diferentes significados Os elevados valores de sucesso alcançados pelos três grupos sugere que os alunos não encontraram grandes dificuldades na resolução das tarefas nos diferentes significados.

Com este estudo apresentou-se aos alunos um conjunto de tarefas nos quatro significados de número racional, começando pelo significado que a literatura diz mais intuitivo – o quociente - para trabalhar a fração (Nunes *et al.*, 2004). Em relação a este significado apenas o grupo C apresentou dificuldades. Dificuldades essas não relacionadas com a resolução do problema em si, mas antes com a escrita simbólica da fração, confundindo o numerador com o denominador.

Ao longo dos três anos os alunos trabalharam, predominantemente, fração no significado parte-todo. Seria, portanto, expectável que neste significado o nível de sucesso fosse superior, o que não se verificou, uma vez que os grupos obtiveram taxas de sucesso igualmente elevadas em outros significados. Com exceção do grupo C, o único grupo a apresentar alguma dificuldade na resolução de tarefas do significado parte-todo, especificamente na representação do número racional tanto na forma decimal como na percentual.

Ao longo das tarefas propostas com significado operador, os alunos manifestaram uma maior compreensão dos enunciados do que antecipado. Desta forma, todos os grupos tiveram um desempenho elevado, onde só o grupo A revelou dificuldade em converter um número decimal em fração. Nas tarefas com significado medida, o grupo B obteve algum insucesso, manifestando dificuldades em fracionar a unidade. Contudo, tal ocorreu apenas numa das alíneas, e derivado dos alunos terem fracionado a unidade de medida errada.

De forma a analisar em pormenor os processos que estão por trás da compreensão dos alunos na representação, ordenação e equivalência de fração em cada um dos significados trabalhados e tendo em vista perceber como articulam os diferentes modos de representação de um número racional nesses mesmos significados, procede-se de seguida a uma visão específica do desempenho dos alunos para cada sequência de questões trabalhadas referentes a cada um dos significados do número racional aqui estudados.

Assim, seguindo a ordem cronológica das sessões de aula, fez-se um olhar pormenorizado a cada tarefa, analisando as resoluções dos três grupos escolhidos, através dos seus registos escritos e verbais.

4.2. O desempenho dos alunos em tarefas específicas

Procurando saber mais sobre o processo de aprendizagem dos alunos do estudo, conduziu-se uma análise mais detalhada sobre o desempenho dos alunos na resolução das tarefas propostas nos diferentes significados de número racional. Neste sentido, analisam-se os desempenhos dos alunos na resolução das tarefas, bem como as estratégias de resolução adotadas.

4.2.1. Sessões

Nesta secção analisam-se os desempenhos dos alunos com algum detalhe ao longo das sessões, centrando a atenção nos resultados e estratégias de resolução, no sentido de ser possível identificar as suas dificuldades/fragilidades no processo de construção do conceito de número racional.

A professora acompanhou os alunos no desenrolar das aulas, intervindo junto dos mesmos sempre que necessário a fim de ajudar a organizar as suas argumentações.

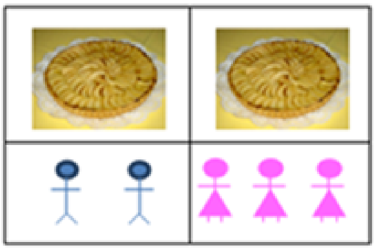
4.2.1.1. Sessão 1 - significado quociente

O significado quociente constituiu uma novidade para os alunos do estudo aqui documentado. Foram propostas aos alunos tarefas focadas no número racional apresentado, como fração, onde se trabalharam questões de equivalência e ordenação.

A primeira aula, a 27 de Fevereiro, foi dedicada a introduzir o significado quociente. Os alunos reagiram muito bem, não mostrando dificuldades de interpretação dos enunciados das tarefas.

Na tarefa 1 é dada uma tarte a um grupo de dois meninos e uma tarte a um grupo de três meninas. A tarefa é seguida de três alíneas (ver Fig.4.1.)

As meninas dividem igualmente uma tarte e os meninos também dividem igualmente uma tarte igual à das meninas.



a) Cada menina vai comer o mesmo que cada menino?

Justifica a tua resposta.

b) Que fracção da tarte vai comer cada menina? E cada menino?

c) Quem é que come mais, cada menino ou cada menina?

Figura 4.1. Tarefa 1 no significado quociente

Na tarefa 2 é dito que oito meninas dividem igualmente 6 tartes. (ver Fig.4.2.)

Numa festa 8 meninas dividiram igualmente 6 tartes.

a) Quantos meninos têm de existir para dividir igualmente 3 tartes, sabendo que têm de comer exatamente a mesma quantidade que as meninas? Justifica a tua resposta.

b) Que fracção da tarte vai comer cada menina? E cada menino?

Figura 4.2. Tarefa 2 no significado quociente

Na primeira tarefa (ver Fig.4.3.) os alunos do grupo A tentaram ser minuciosos na sua explicação recorrendo à relação inversa entre o numerador e o denominador para justificar quem comeria mais. Apresentam um discurso escrito semelhante ao oral, ainda com algumas dificuldades para traduzir o raciocínio para um discurso matemático.

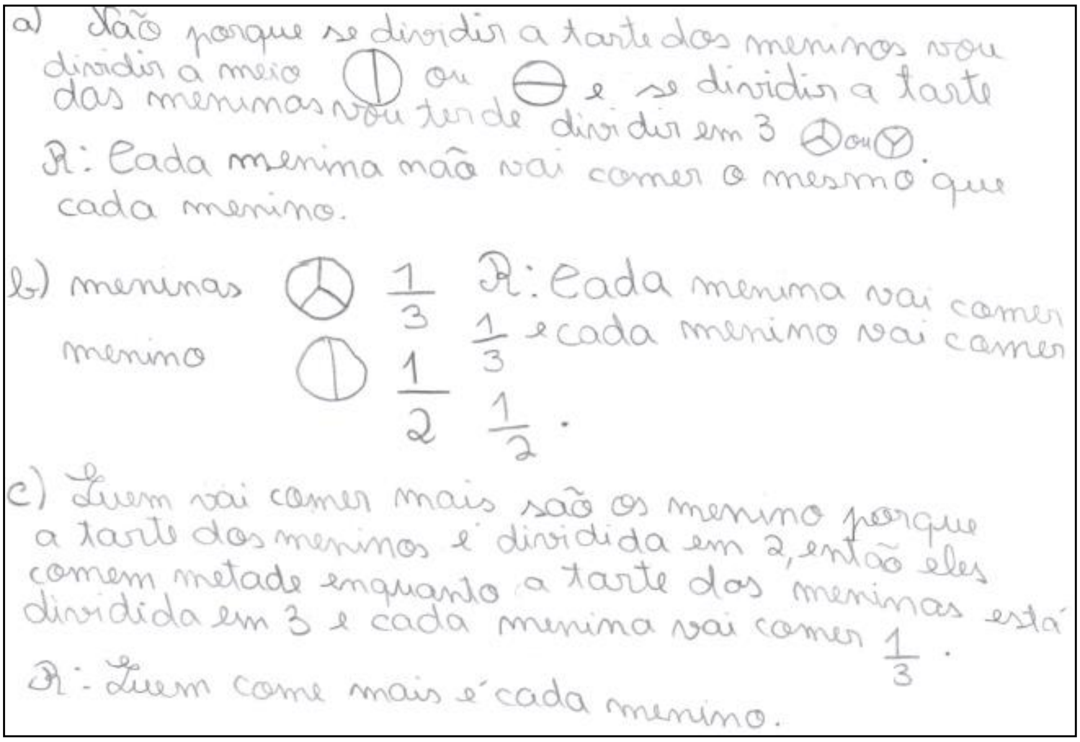


Figura 4.3. Resolução da tarefa 1 pelo grupo A

Na tarefa 2 (Fig. 4.2.), o grupo A distancia-se um pouco da forma de registo que apresentou na primeira tarefa e engloba outras formas de representação da fração, nomeadamente a percentagem.

Os alunos recorrem ao desenho pictórico como forma de registo de justificação para o que discutem verbalmente (ver Transcrição 4.1.).

Alberto: Se 3 tartes é metade de seis tartes, para comerem o mesmo têm de ser 8 meninas a dividir por dois, têm de ser 4 meninos.

Angelina: Eu dividi as 6 tartes em quatro quartos e cada menina come três quartos, assim olha se tapar isto [e tapa parte do seu esquema, três tartes] se forem quatro rapazes comem à mesma três quartos das tartes. Já sabemos então que tanto os meninos como as meninas comem $\frac{3}{4}$.

Alberto: Podemos pôr aqui ao lado que se só falta um quarto de tarte o que cada menino vai comer é igual a 75% do todo

Transcrição 4.1. Extrato de diálogo entre o par do grupo A relativamente à resolução da tarefa 2

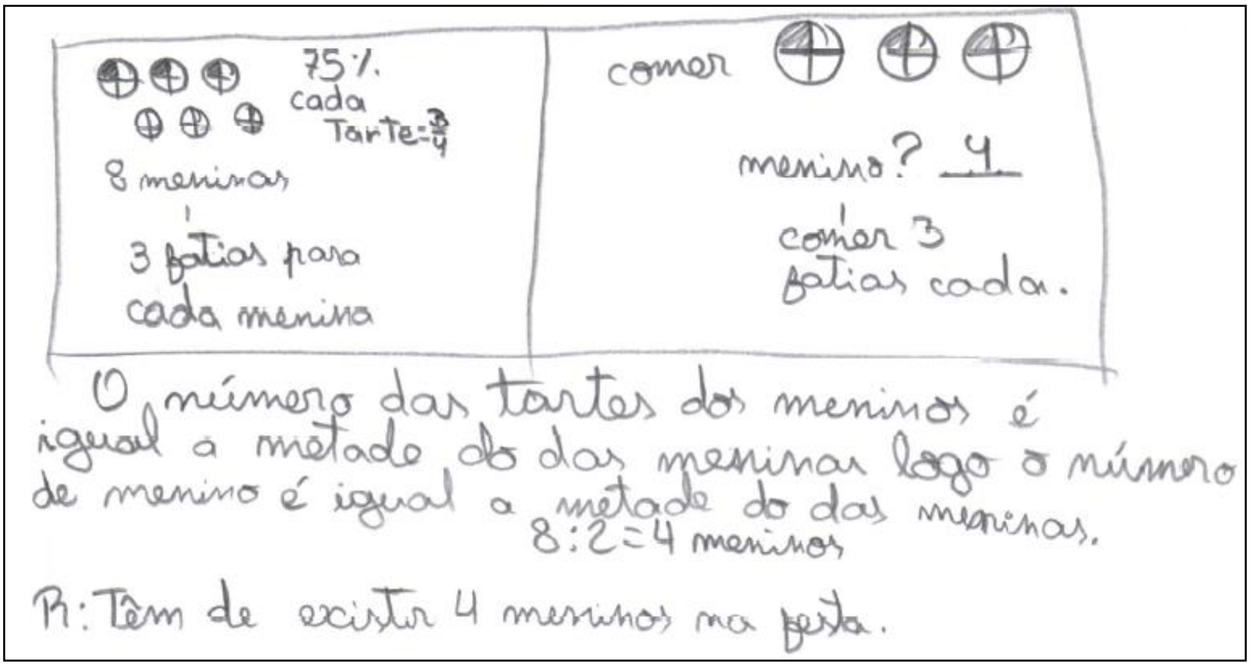


Figura 4.4. Resolução da tarefa 2 pelo grupo A

É de realçar o à vontade com que trabalham o número racional tanto como fração como percentagem. Salienta-se o facto de no grupo A o Alberto ter usado um raciocínio proporcional no diálogo com a colega (ver Transcrição 4.1.). No registo escrito, na tentativa de mostrar como pensou, recorre à divisão efetiva das tartes para justificar o seu argumento, (ver Fig.4.4.).

No grupo B as alunas discutem as tarefas, dialogam sobre o enunciado e falam sobre as suas estratégias, argumentando e explicando os seus raciocínios. Na tarefa 1 (fig. 4.1) as alunas resolvem o problema da mesma forma desenhando as tartes e os meninos, de maneira a verificar se todos comem a mesma quantidade (ver Fig.4.5.).

Figura 4.5. Resolução da tarefa 1 pelo grupo B

A Sofia, na tarefa 2 (Fig. 4.2), divide as tartes em oito partes, não respeitando a igualdade do tamanho das fatias e conclui que cada menina come $\frac{6}{8}$ de tarte (ver Fig.4.6.). Mesmo não sendo rigorosa no desenho da tarte, a aluna resolve corretamente o problema e responde que serão precisos quatro meninos, efetuando a divisão de uma tarte pelos quatro, chegando à fração $\frac{3}{4}$.

Figura 4.6. Resolução da tarefa 2 por um aluno do grupo B

O outro aluno do grupo, o Álvaro, já não precisa de efetuar a divisão para compreender a relação entre numerador e denominador, construindo apenas uma tabela para explicitar o seu raciocínio (ver Fig.4.7.).

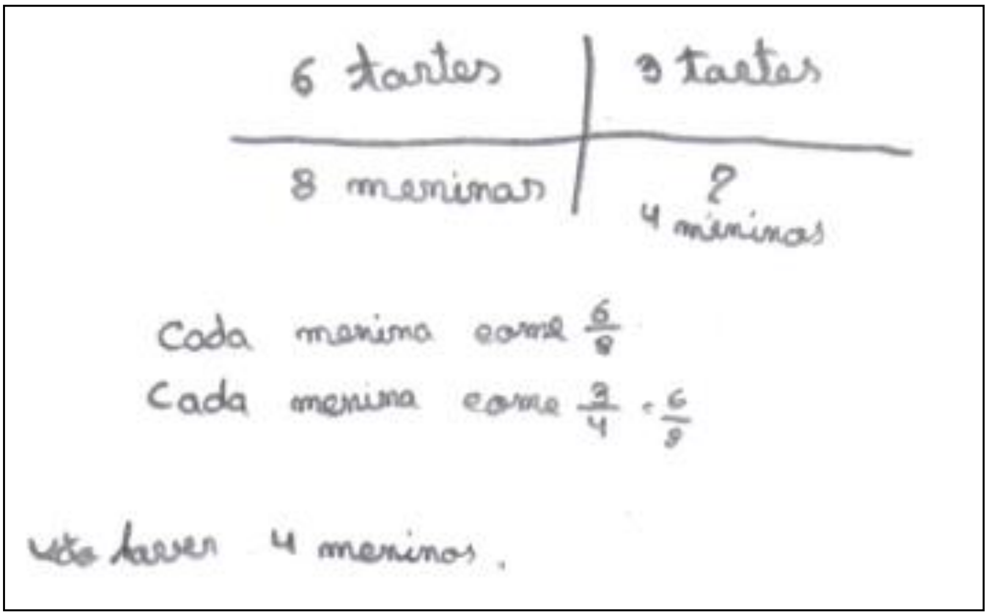


Figura 4.7. Resolução da tarefa 2 por um aluno do grupo B

Em diálogo com Sofia, Álvaro explica como pensou (ver Transcrição 4.2.):

Álvaro: 6tartes são para 8 meninas e 3 tartes para quantos meninos? [desenha uma tabela com esta informação]. Se três é metade de seis, tem de ser quatro meninos, para comerem o mesmo que as oito meninas.

Sofia: Eu desenho aqui para vermos se comem mesmo o mesmo. Todas as tartes têm de estar divididas em oito e cada menina come uma fatia da tarte. Cada menina come $\frac{6}{8}$. As outras três tartes divido-as em quatro, e cada menino come um quarto de uma tarte [faz a correspondência por traços de cada menino para cada quarto de tarte]. Cada menino come $\frac{3}{4}$ de tarte.

Álvaro: Que é a mesma quantidade, olha para o teu desenho, se dividires cada fatia ao meio ficas com metade do quarto, que é o oito. $\frac{6}{8}$ é igual a $\frac{3}{4}$.

Transcrição 4.2. Extrato de diálogo entre o par do grupo B relativamente à resolução da tarefa 2

No final, a Sofia regista a igualdade mas sem mostrar perceber o que está a fazer. Depois desta explicação, para Álvaro é clara a equivalência das frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$, respondendo à pergunta "que fração da tarte vai comer cada menino e cada menina" da seguinte forma:

Figura 4.8. Resolução da tarefa 2 por um aluno do grupo B

O grupo C na primeira tarefa explicou quem iria comer menos tarde usando a relação entre o número de meninos e o número de tartes, mostrando assim que reconhece a relação inversa entre o numerador e o denominador sem precisar de levar a cabo a divisão.

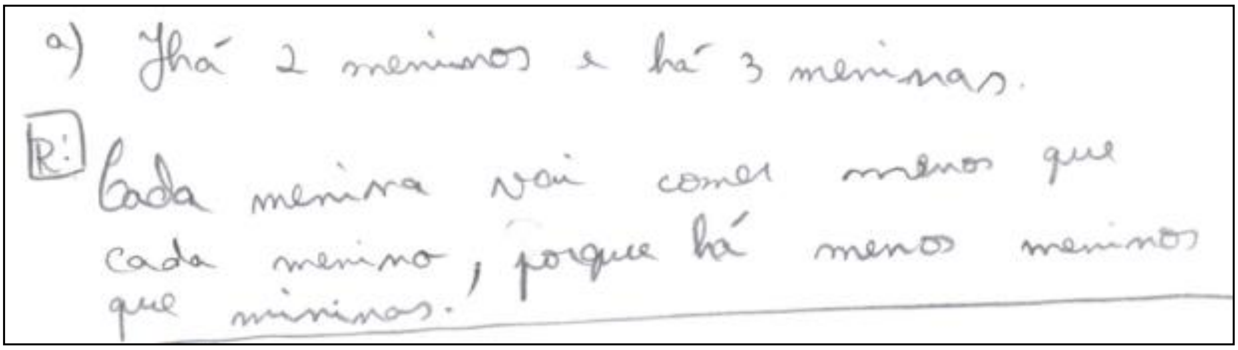

a) Jhá 2 meninos e há 3 meninas.
R: Cada menina vai comer menos que cada menino, porque há menos meninos que mininas.

Figura 4.9. Resolução da tarefa 1 pelo grupo C

Na segunda tarefa, os alunos do grupo C desenham uma tabela (ver Fig.4.10.) e facilmente percebem a relação proporcional que existe entre o número de meninos e a quantidade de tarte comida (ver Transcrição 4.3.).

Natália: É melhor fazermos uma tabela, assim: três tartes para um lado e seis para o outro [diz enquanto constrói uma tabela na folha] e agora pomos por baixo as meninas [e desenha as oito meninas].

Ricardo: Vê-se no desenho que há mais três tartes no lado das meninas. Para eles comerem a mesma quantidade têm de ser estes de cima [aponta para o desenho da sua tabela onde em cima estão 4 meninas e em baixo outras quatro].

Natália: É o dobro. Para todos comerem o mesmo é porque as meninas são o dobro dos meninos. Para dividirmos os meninos pelas três tartes podemos... se são três para quatro, dividimos cada uma em quatro fatias e cada menino come três fatias de uma tarte. A fatia que sobra das tartes dá para o outro menino. Dá mesmo três fatias para cada um. São três quartos. Nas meninas podemos fazer igual, assim, 1, 2, 3, 4, 5, 6 [desenha as 6 tartes] e se cada uma tiver quatro fatias [divide as tartes em 4 partes iguais] agora damos uma fatia a cada menina, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 [distribui os números em cada fatia da tarte] e dá três fatias a cada menina.

Transcrição 4.3. Extrato de diálogo entre o par do grupo C relativamente à resolução da tarefa 2

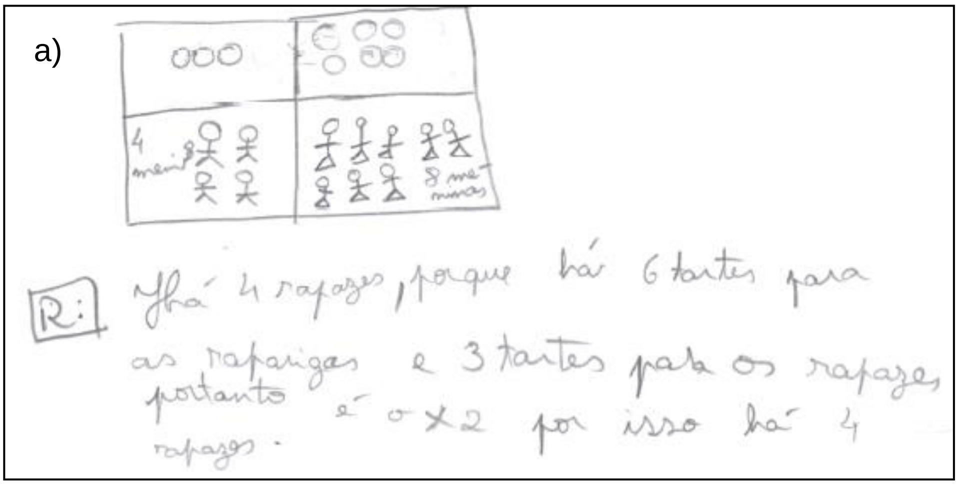


Figura 4.10. Resolução da tarefa 2 a) pelo grupo C

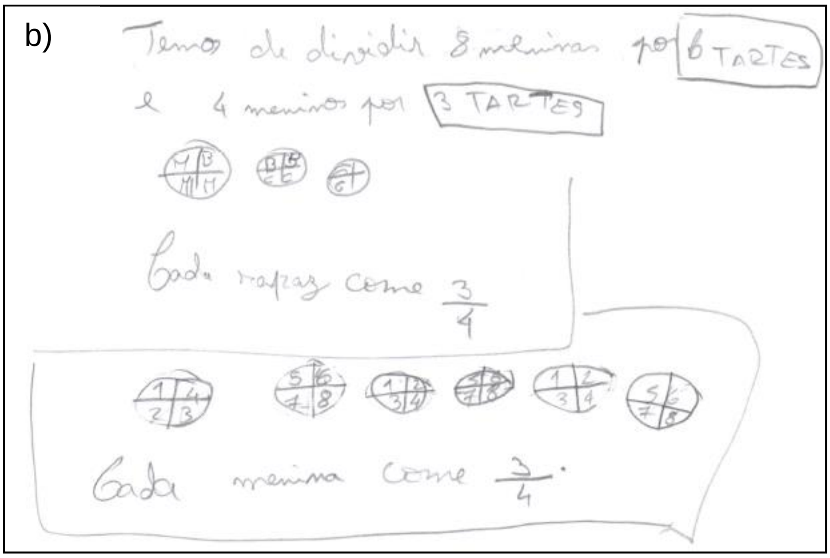


Figura 4.11. Resolução da tarefa 2 b) pelo grupo C

Quando lhes é pedido que digam qual a fração comida por cada um, os alunos recorrem à distribuição dos meninos pelas tartes e desenham as fatias correspondentes ao número de meninos (ver Fig.4.11.). Desta forma, recorrendo à representação pictórica da situação, os alunos levam a cabo a divisão da tarte pelo número de meninos, fazendo primeiro a divisão em quartos de cada tarte e distribuindo os meninos por cada fatia, chegando ao fim e contabilizando quantas fatias cada um irá comer.

4.3.1.2. Sessão 2- significado quociente

Na segunda aula, a 29 de Fevereiro, os alunos realizaram uma tarefa, a turma trabalhou de forma autónoma, manifestando destreza de raciocínio e à vontade na resolução da mesma.

Na tarefa 3 é dito que 6 meninas dividiram igualmente 4 tartes (ver Fig.4.12.).

No lanche, 6 meninas dividiram igualmente 4 tartes.

a) Quantas tartes têm de existir para serem divididas igualmente por 3 meninos, sabendo que cada um deles tem de comer exactamente a mesma quantidade que cada uma das meninas? Justifica a tua resposta.

b) Que fracção da tarte vai comer cada menina? E cada menino?

Figura 4.12. Tarefa 3 no significado quociente

Nesta tarefa no significado quociente o Alberto do grupo A rapidamente demonstra perceber a equivalência entre as frações $\frac{4}{6}$ e $\frac{2}{3}$, dizendo que se os meninos têm que comer a mesma quantidade de tarte, então tem de haver 3 tartes para dividir pelos meninos (ver Transcrição 4.4.).

Alberto: Se há seis meninas e quatro tartes para comerem igual quantidade tem de ser três meninos para duas tartes. Porque assim dá $\frac{4}{6}$ para as meninas e $\frac{2}{3}$ para os meninos.

Angelina: Vou dividir as tartes delas em 3 fatias iguais. Cada menina come dois terços. Se é o que dizes então vou dividir o seis [das meninas] e o quatro [das tartes], para dar metade e agora faço duas tartes para três meninos, dividimos outra vez em 3 fatias iguais e dá também $\frac{2}{3}$ para cada menino.

Transcrição 4.4. Extrato de diálogo entre o par do grupo A relativamente à resolução da tarefa 3

A Angelina acompanha o raciocínio do Alberto e tradu-lo no registo escrito (ver Fig.4.13.). Divide a tarte em terços e utilizando o conceito da metade, descobre quantas tartes terão de comer os meninos. Para confirmar, divide as tartes dos meninos em terços e pinta, em ambas, a quantidade de tarte comida pelas meninas e pelos meninos.

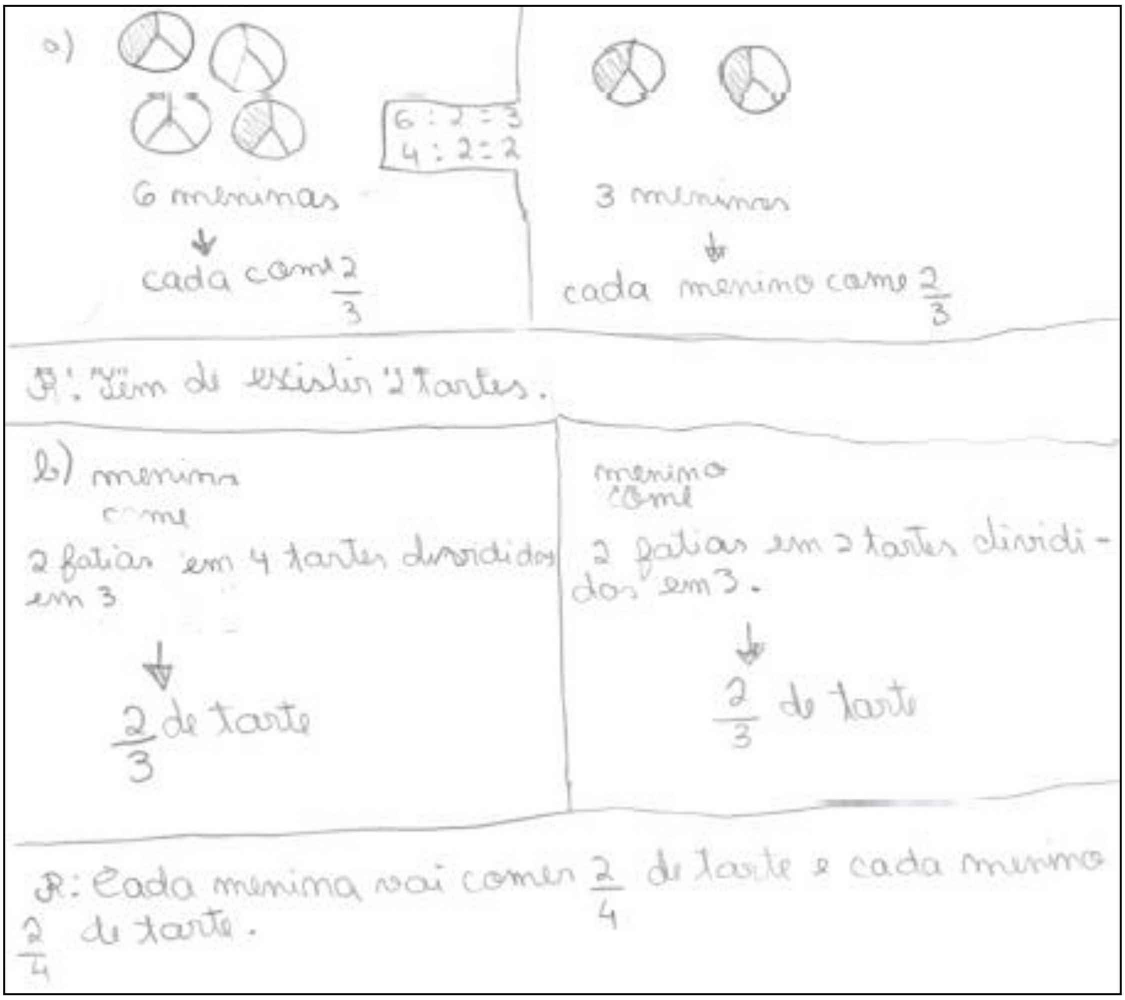


Figura 4.13. Resolução da tarefa 3 pelo grupo A

No grupo B a Sofia segue a Álvaro, contudo esta sente necessidade de verificar através de desenhos o que pensa, associando esta tarefa à tarefa anterior (ver Transcrição 4.5.).

Álvaro: Este é muito parecido com o outro que fizemos, vemos logo que para os meninos é preciso metade das tartes das meninas!

Sofia:	Se eu desenhar as tartes e as dividir em fatias iguais o que as meninas comem tem de ser o que os meninos comem com duas tartes. Vou ver [e desenha]. Cada menina come $\frac{4}{6}$e cada menino come $\frac{2}{3}$, dizes que é igual mas... [é interrompida]
Álvaro:	Vê, em cada terço cabe dois sextos. Por isso $\frac{2}{3}$ é igual a $\frac{4}{6}$.

Transcrição 4.5. Extrato de diálogo entre o par do grupo B relativamente à resolução da tarefa 3

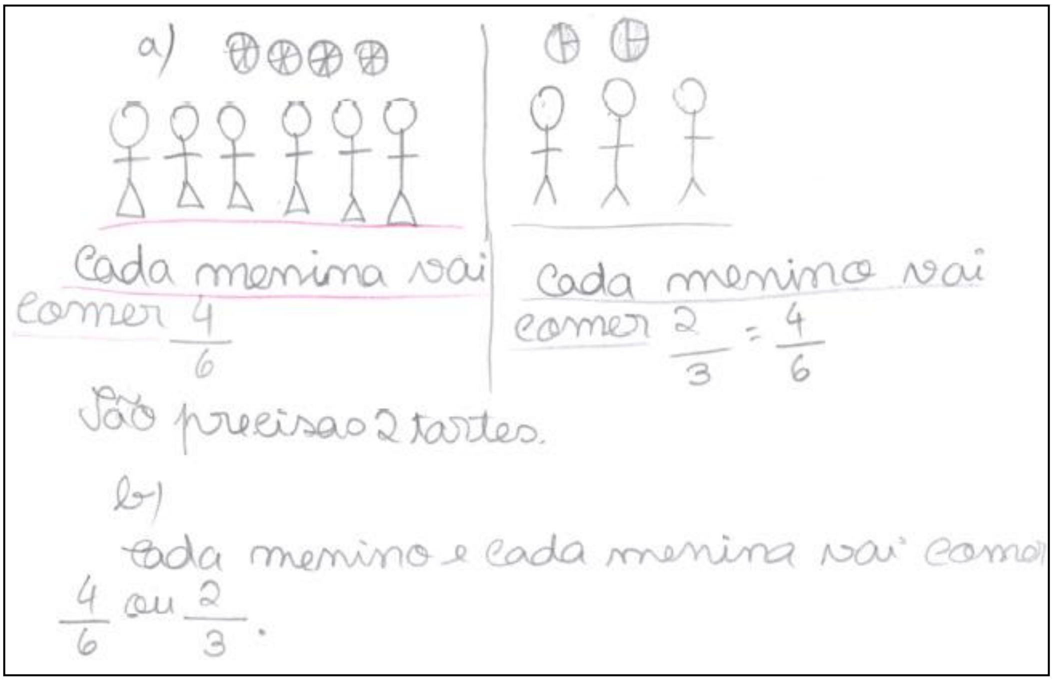


Figura 4.14. Resolução da tarefa 3 pelo grupo B

Os dois alunos manifestam um entendimento diferente ao longo da resolução da tarefa. Para Álvaro, tudo se resume ao raciocínio proporcional que tinha descoberto na tarefa anterior; para Sofia, é necessário reduzir o significado quociente a significado parte-todo, levando a cabo a divisão das tartes e certificar-se que cada menina come o mesmo que cada menino (ver Fig. 4.14.).

O grupo C nesta terceira tarefa revelou entender a proporção direta entre a fração comida pelos meninos e pelas meninas (ver Fig.4.15.). Contudo, manifesta ainda confusão entre o significado do numerador e do denominador, tendo que, o professor, ao longo do diálogo dos alunos intervir e questioná-los sobre o que significava cada valor que tinham (ver Transcrição 4.6.).

Natália:	Vamos fazer outra vez a tabela. Aqui três meninos, aqui seis meninas e em cima delas quatro tartes. A diferença é de metade. Olha vê, se existem metade dos meninos para ser igual tem de haver metade das tartes.
Ricardo:	Se dividirmos as tartes vemos quantas fatias cada menina come.
Natália:	Então temos de dividir as tartes em seis partes iguais. Podemos dividir metade em três e a outra metade em três.
Ricardo:	Cada menina come quatro fatias. Come $\frac{6}{4}$ das tartes.
Professora:	O que representa o 4?
Ricardo:	Quantas fatias cada menina comeu.
Professor:	E o 6?
Natália:	O 6 foi as divisões que fizemos das fatias iguais.
Ricardo:	Ah, as meninas comeram $\frac{4}{6}$ e os rapazes $\frac{2}{3}$.
Natália:	Porque comeram duas fatias e cada tarte estava dividida em três partes iguais.

Transcrição 4.6. Extrato de diálogo entre o par do grupo C relativamente à resolução da tarefa 3

Figura 4.15. Resolução da tarefa 3 pelo grupo C

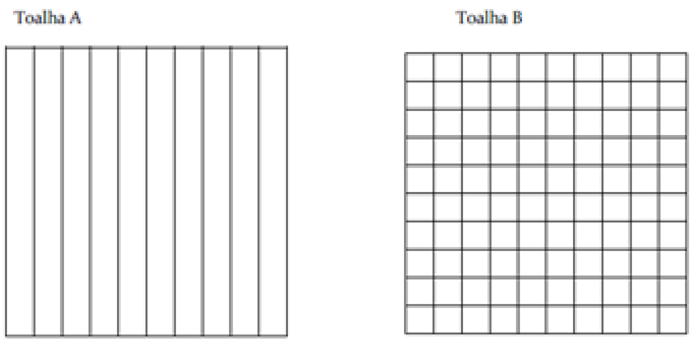
4.3.1.3. Sessões 3 e 4 - significado parte-todo

Nas terceira e quarta sessões, dias 2 e 5 de Fevereiro, os alunos foram confrontados com tarefas no significado parte-todo. Este significado é o mais conhecido pelos alunos, tendo sido abordado noutros anos neste grupo-turma.

Na tarefa "Mafalda e suas toalhas" (ver Fig.4.16. e Fig.4.17.), os alunos, numa primeira fase, têm de pintar partes das toalhas de acordo com a informação que lhes é dada. Posteriormente, é pedido aos alunos que representem as partes pintadas das toalhas utilizando a escrita simbólica do número racional, sob a forma de número decimal, fração e percentagem.

A Mafalda quis pôr na mesa da festa de anos uma toalha bonita. Tinha duas hipóteses: uma toalha às listas e outra toalha aos quadrados.

1.Pinta metade da toalha A de uma cor e metade da toalha B de outra cor.

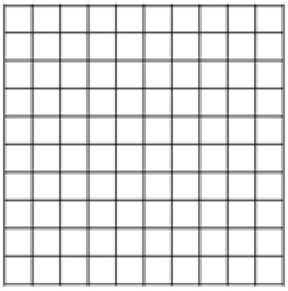


1.2 Quantas décimas da toalha A pintaste?
1.3 Quantas centésimas da toalha B pintaste?
1.4 Pintaste a mesma quantidade de toalha nas duas situações? Porquê?
1.5 Que percentagem das toalhas está pintada?
1.6 Na toalha B pinta de azul escuro mais 25% da toalha. Quantas décimas ficaram por pintar?

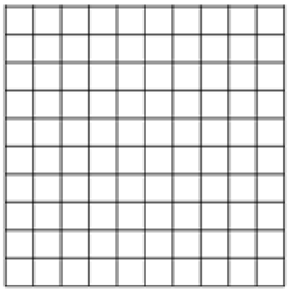
Figura 4.16. Tarefa 4, problema 1, no significado parte-todo

2. Pinta a quarta parte da toalha C de uma cor e 25 centésimas da toalha D de outra cor.

Toalha C



Toalha D



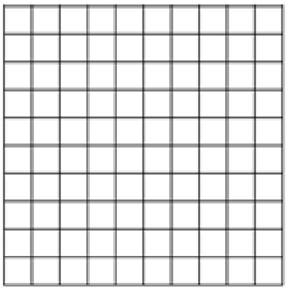
2.1. Pintaste a mesma quantidade de toalha nas duas situações?

2.2 Regista a quantidade pintada das duas toalhas em número fracionário, em número decimal e em percentagem.

2.3. Que conclusões podes tirar?

2.4 Na toalha E pinta 0,02 de uma cor e 0,20 de outra cor.

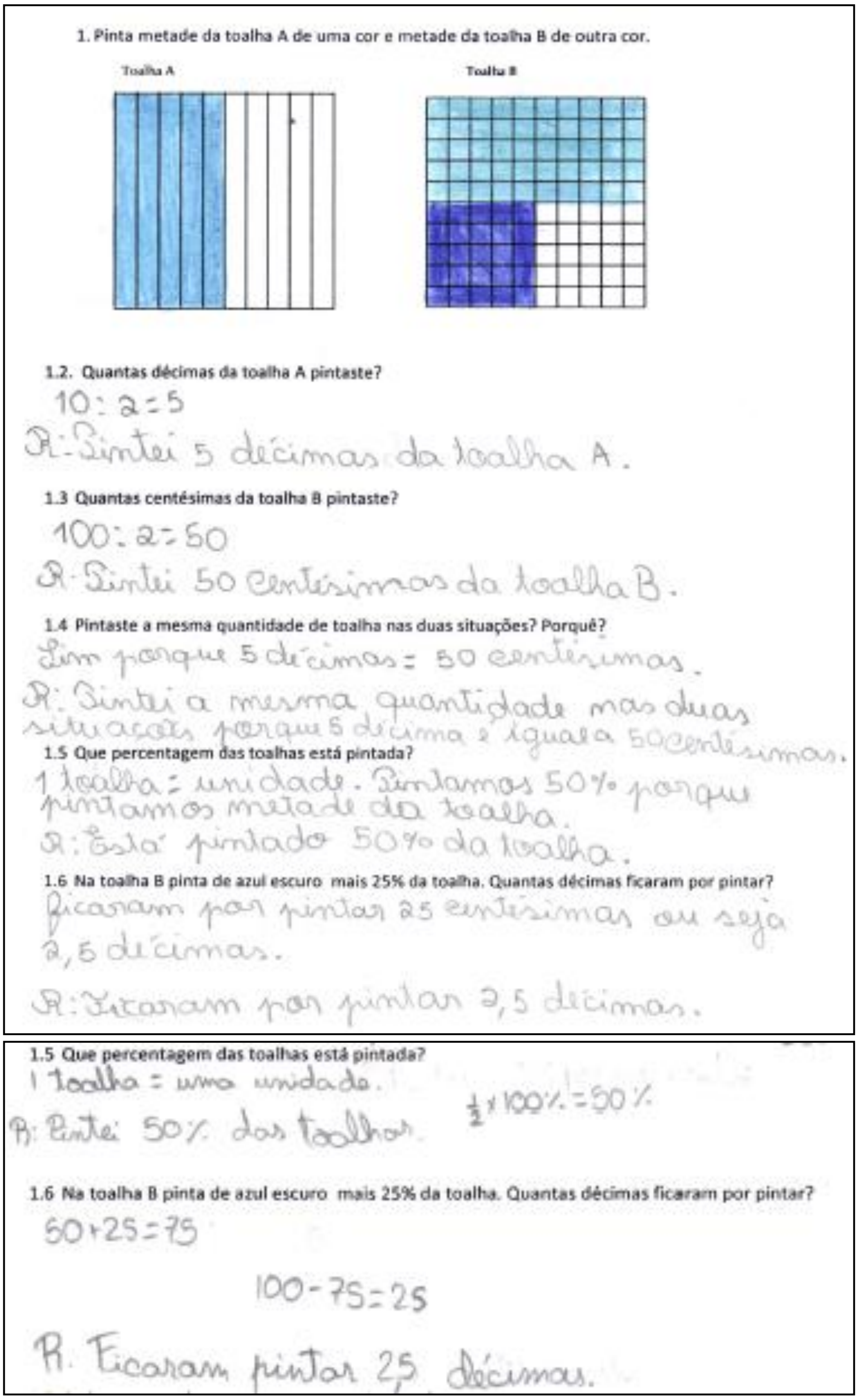
Toalha E



2.5 Que parte da toalha ficou em branco?

Figura 4.17. Tarefa 4, problema 2, no significado parte-todo

O grupo A resolveu a tarefa com sucesso, mostrando-se muito à vontade com as diferentes representações de número racional. Não constituiu dificuldade para este grupo trabalhar com números racionais representados sob a forma de dízima e compará-los. O grupo explica todo o seu raciocínio (ver Transcrição 4.7.), acabando por operar para justificar as suas respostas (ver Fig.4.18.).



1. Pinta metade da toalha A de uma cor e metade da toalha B de outra cor.

Toalha A

Toalha B

1.2. Quantas décimas da toalha A pintaste?

10 : 2 = 5

R: Pintei 5 décimas da toalha A.

1.3 Quantas centésimas da toalha B pintaste?

100 : 2 = 50

R: Pintei 50 centésimas da toalha B.

1.4 Pintaste a mesma quantidade de toalha nas duas situações? Porquê?

Sim porque 5 décimas = 50 centésimas.

R: Pintei a mesma quantidade nas duas situações porque 5 décima é igual a 50 centésimas.

1.5 Que percentagem das toalhas está pintada?

1 toalha = unidade. Pintamos 50% porque pintamos metade da toalha.

R: Está pintado 50% da toalha.

1.6 Na toalha B pinta de azul escuro mais 25% da toalha. Quantas décimas ficaram por pintar?

Ficaram por pintar 25 centésimas ou seja 2,5 décimas.

R: Ficaram por pintar 2,5 décimas.

1.5 Que percentagem das toalhas está pintada?

1 toalha = uma unidade.

$\frac{1}{2} \times 100\% = 50\%$

R: Pintei 50% das toalhas.

1.6 Na toalha B pinta de azul escuro mais 25% da toalha. Quantas décimas ficaram por pintar?

50 + 25 = 75

100 - 75 = 25

R. Ficaram pintar 25 décimas.

Figura 4.18. Resolução da tarefa 4, problema 1, pelo grupo A

Angelina: Isto é facílimo. As toalhas são iguais, só muda a forma como estão divididas.

Alberto: Temos de ter atenção que a A está em 10 e a B em 100.

Angelina: A“A” é para trabalharmos em décimas e a “B” em centésimas.

Alberto: Uma toalha vale uma unidade, se pintámos metade é igual a 50% e um meio de 100% é 50%. Na outra pintámos 50% e depois 25%, se tirarmos 75 ao todo dá 25% que ficou em branco.

Angelina: 25 centésimas ou 2 décimas e meia.

Transcrição 4.7. Extrato de diálogo entre o par do grupo A relativamente à resolução da tarefa 4, problema 1

Os alunos, no segundo problema, conseguem usar com sucesso a equivalência de fração e operar com percentagem (ver Fig.4.19. e Fig.4.20.), sem estes conteúdos terem sido previamente trabalhada de uma forma formal.

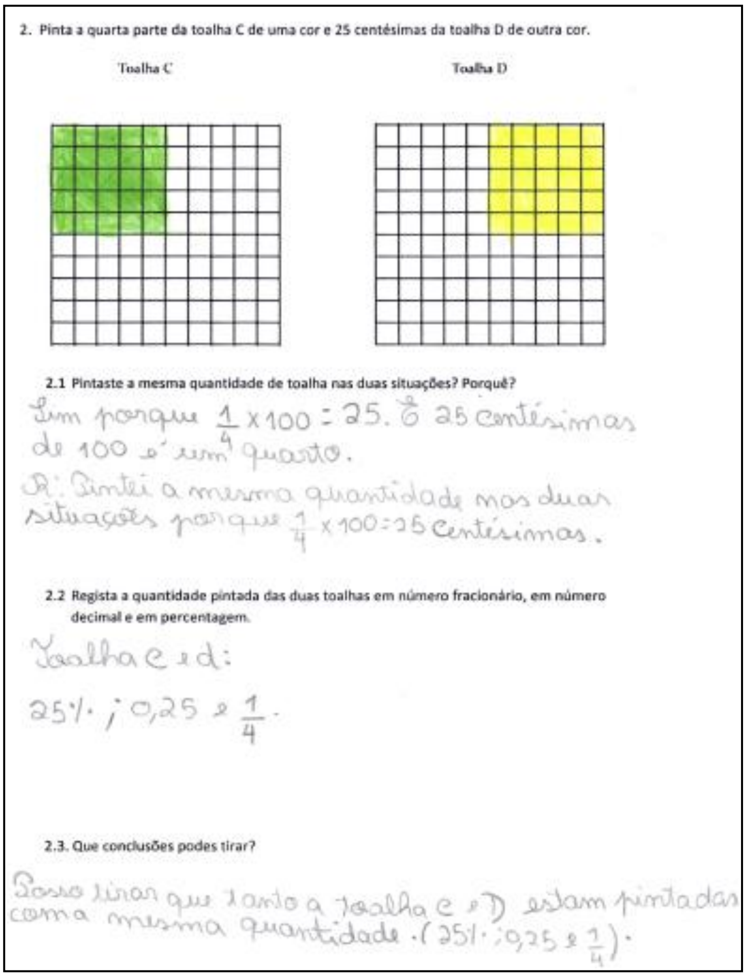


Figura 4.19. Resolução da tarefa 4 pelo grupo A, problema 2 parte1

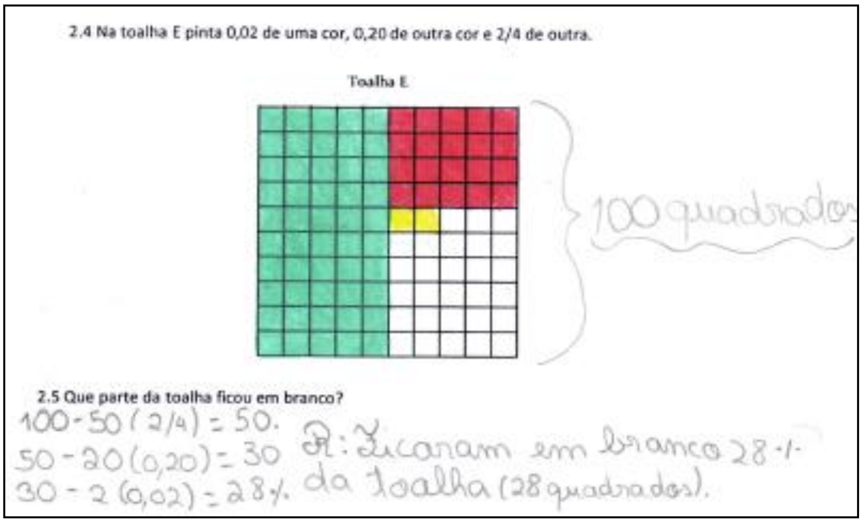
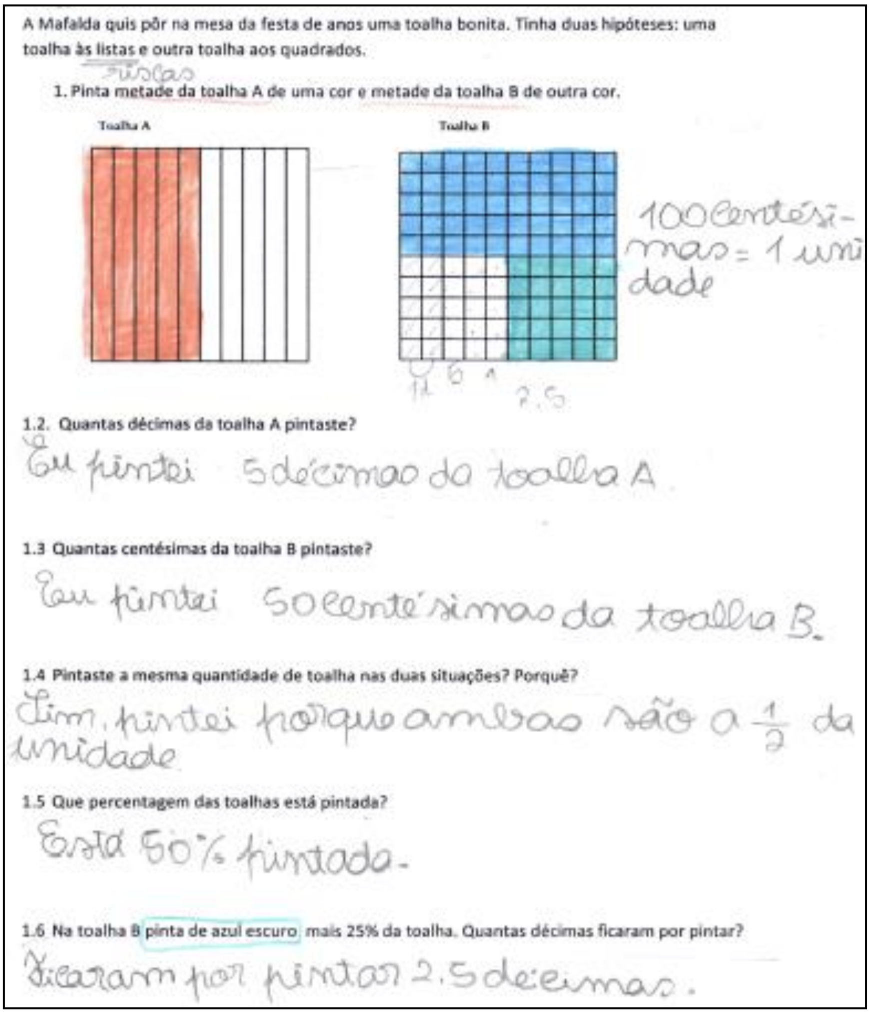


Figura 4.20. Resolução da tarefa 4 pelo grupo A, problema 2 parte 2

O grupo B também esteve bastante à vontade a resolver os problemas iniciais do significado parte-todo (ver Fig.4.21. e Fig.4.22.).As alunas compreendem a relação entre a unidade, a décima e a centésima, (ver Transcrição 4.8. e Transcrição 4.9.) e conhecem e operam com as fração$\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.



A Mafalda quis pôr na mesa da festa de anos uma toalha bonita. Tinha duas hipóteses: uma toalha às listas e outra toalha aos quadrados.

1. Pinta metade da toalha A de uma cor e metade da toalha B de outra cor.

Toalha A

Toalha B

100 centésimas = 1 unidade

1.2. Quantas décimas da toalha A pintaste?

Eu pintei 5 décimas da toalha A

1.3 Quantas centésimas da toalha B pintaste?

Eu pintei 50 centésimas da toalha B.

1.4 Pintaste a mesma quantidade de toalha nas duas situações? Porquê?

Sim, pintei porque ambas são a $\frac{1}{2}$ da unidade

1.5 Que percentagem das toalhas está pintada?

Está 50% pintada.

1.6 Na toalha B pinta de azul escuro mais 25% da toalha. Quantas décimas ficaram por pintar?

Ficaram por pintar 2.5 décimas.

Figura 4.21. Resolução da tarefa 4, problema 1, pelo grupo B

Álvaro: Já viste Sofia, as toalhas são iguais e pintámos a mesma quantidade, mas numa há 10 partes iguais e noutra há 100.

Sofia: Pois, e pintámos metade da toalha.

Álvaro: Vamos pintar de azul-escuro metade da metade, pintamos assim num cantinho para ficar direito.

Sofia: Pintamos 25 quadrados.

Álvaro:	Fica por pintar 2,5 décimas, 1,2,3,4,5,..., 25 [conta um a um os quadrados brancos], vês?
Sofia:	[contando os quadrados brancos que sobraram] 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, faz uma décima, 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, faz duas décimas, mais 1,2,3,4,5, metade de uma décima, sobra 2,5 décimas.

Transcrição 4.8. Extrato de diálogo entre o par do grupo B relativamente à resolução da tarefa 4, problema 1

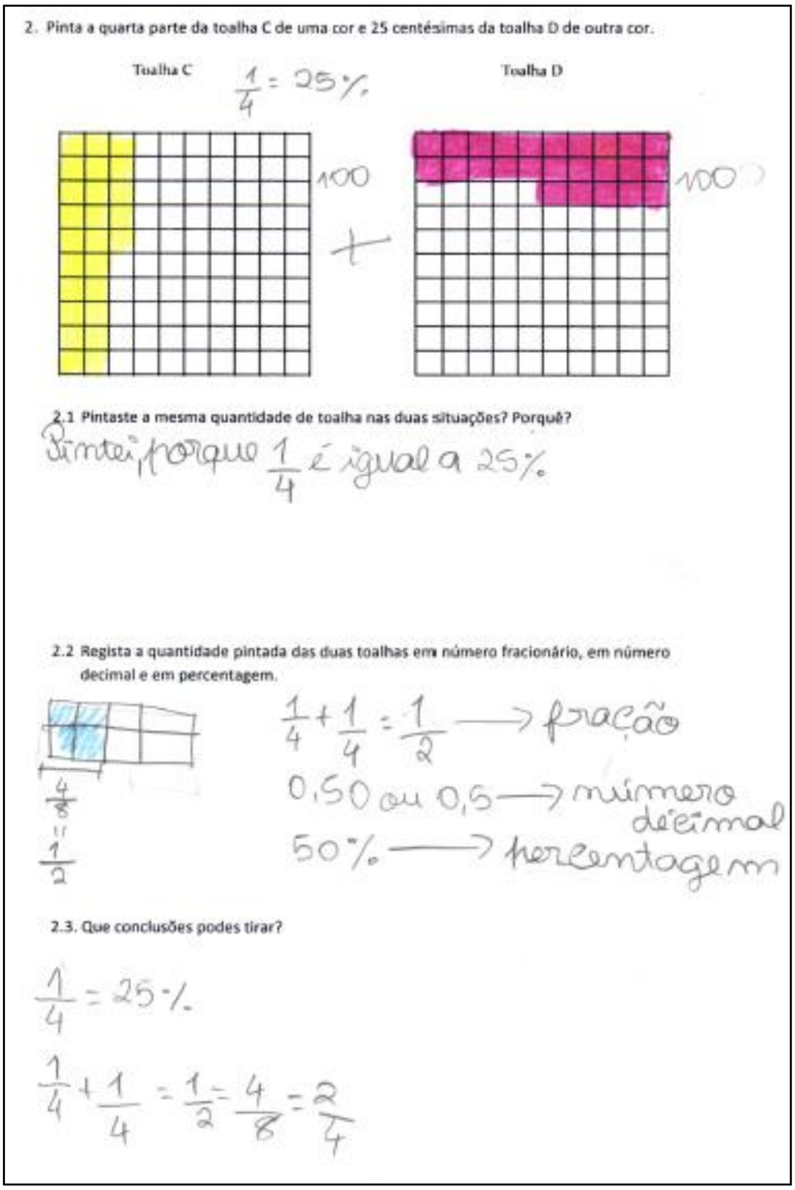
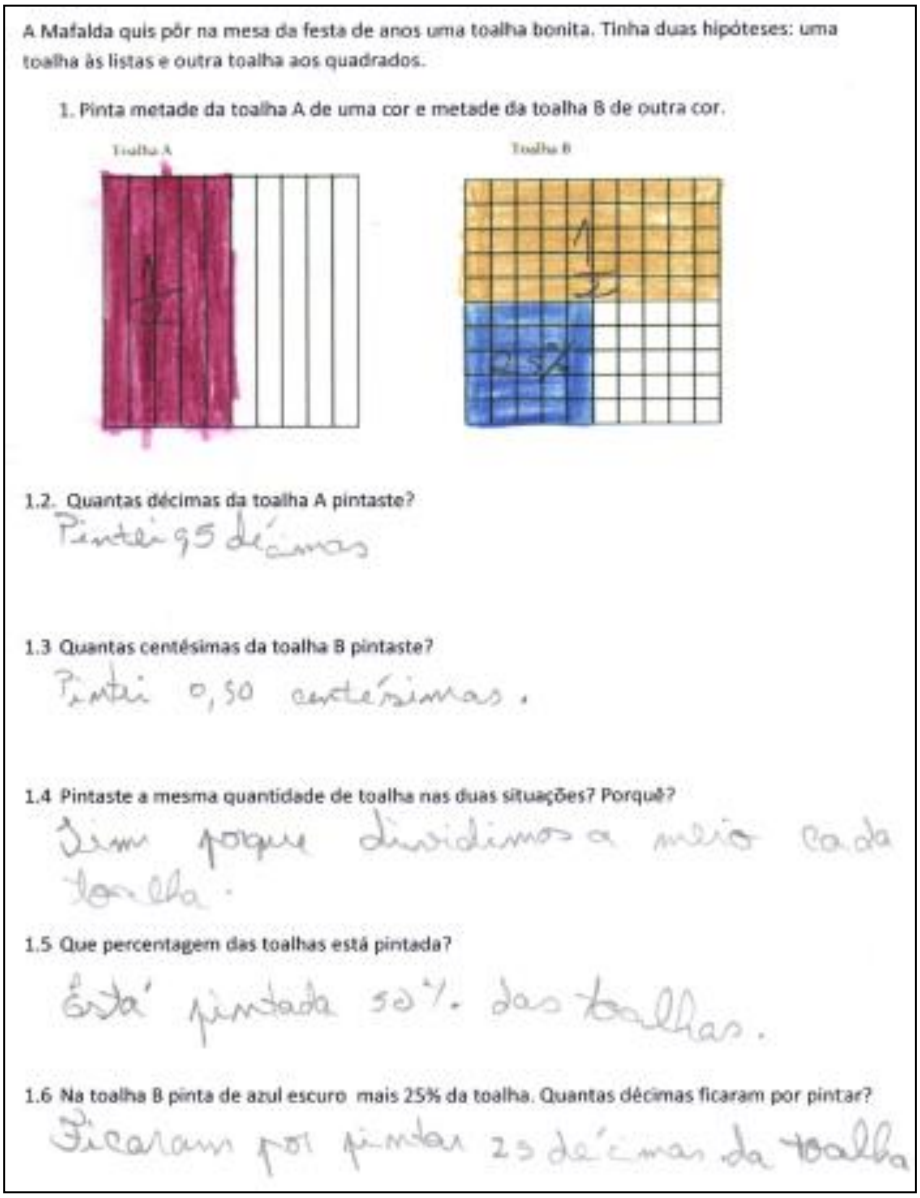


Figura 4.22. Resolução da tarefa 4, problema 2, parte 1 pelo grupo B

Álvaro:	Pintámos 25 quadradinhos em cada toalha, por isso $\frac{1}{4}$ é igual a 25 centésimas.
Sofia:	E para sabermos qual a quantidade pintada nas duas fazemos 25 mais 25, que é metade de uma toalha.
Álvaro:	Para dizermos em fração temos que fazer $\frac{1}{4}$ mais $\frac{1}{4}$. É o mesmo que quando temos aqui dividido em 8 e temos estes dois pintados mais outros dois pintados, dá $\frac{4}{8}$ que é metade.
Sofia:	Que é o mesmo que ter 50 centésimas, que se pode escrever assim e assim [e regista 0,50 e 0,5]
Álvaro:	E em percentagem é fácil, 50%. Estes valores são todos iguais. Podemos concluir que $\frac{1}{4}$ mais $\frac{1}{4}$ é metade, que é igual a $\frac{4}{8}$ que é o mesmo que $\frac{2}{4}$
Sofia:	Basta contar os quadrados! ... são 25.

Transcrição 4.9. Extrato de diálogo entre o par do grupo B relativamente à resolução da tarefa 4, problema 2

O grupo C acompanhou todo o desenvolvimento das atividades, contudo, teve pequenos erros por falta de domínio dos termos, acabando por confundir a representação das décimas e das centésimas (ver Fig.4.23.).


A Mafalda quis pôr na mesa da festa de anos uma toalha bonita. Tinha duas hipóteses: uma toalha às listas e outra toalha aos quadrados.

1. Pinta metade da toalha A de uma cor e metade da toalha B de outra cor.

Toalha A

Toalha B

1.2. Quantas décimas da toalha A pintaste?

Pintei 95 décimas

1.3 Quantas centésimas da toalha B pintaste?

Pintei 0,50 centésimas.

1.4 Pintaste a mesma quantidade de toalha nas duas situações? Porquê?

Sim porque dividimos a meio cada toalha.

1.5 Que percentagem das toalhas está pintada?

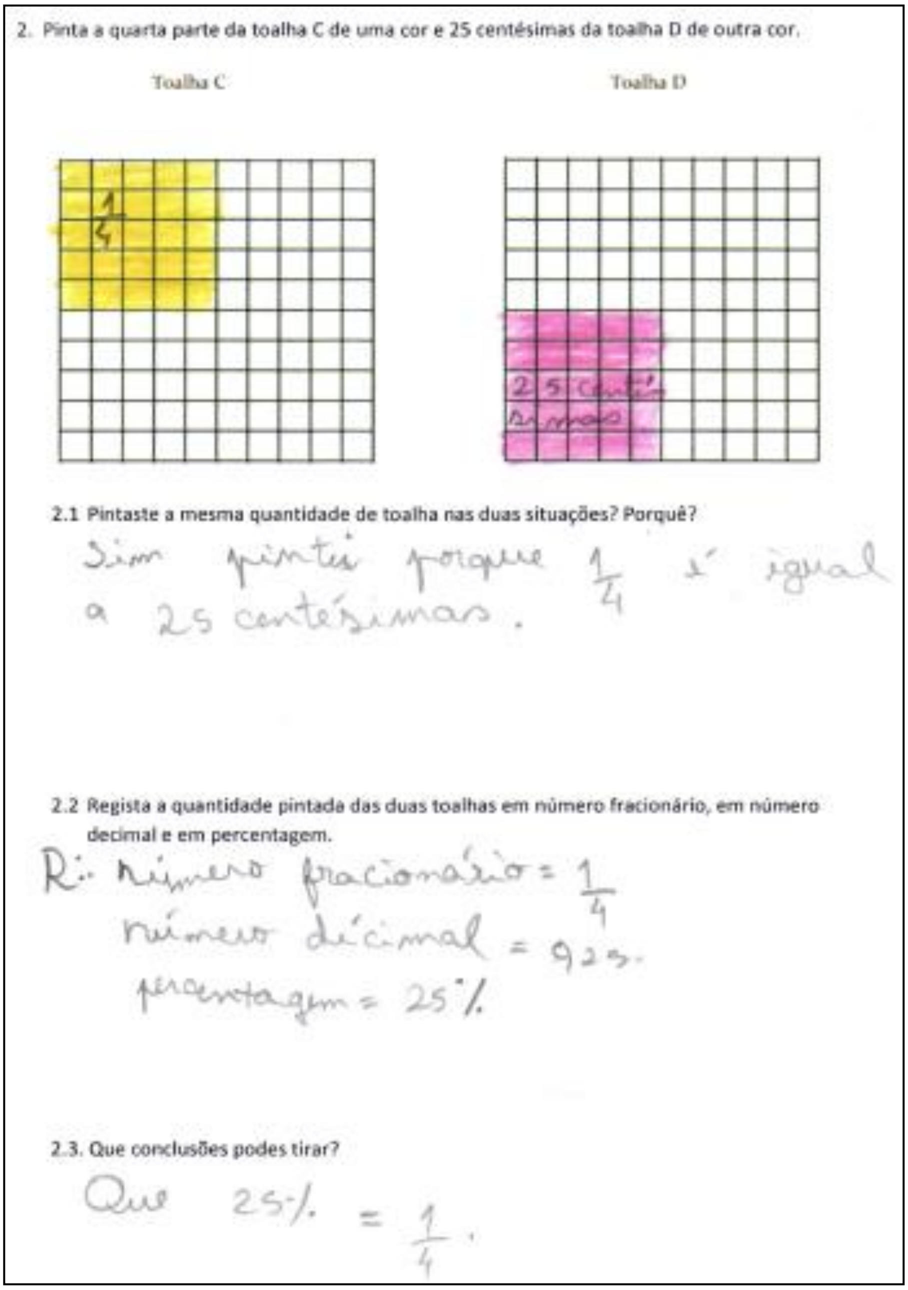
Está pintada 50% das toalhas.

1.6 Na toalha B pinta de azul escuro mais 25% da toalha. Quantas décimas ficaram por pintar?

Ficaram por pintar 25 décimas da toalha

Figura 4.23. Resolução da tarefa 4 pelo grupo C

Nesta segunda atividade, os alunos já utilizaram corretamente a representação decimal (ver Fig.4.24. e Fig.4.25), relacionando-a com a representação fracionária e percentual, entendendo o que estão a fazer (ver Transcrição 4.10.).


2. Pinta a quarta parte da toalha C de uma cor e 25 centésimas da toalha D de outra cor.

Toalha C

Toalha D

1/4

25 centésimas

2.1 Pintaste a mesma quantidade de toalha nas duas situações? Porquê?

Sim pintei porque 1/4 é igual a 25 centésimas.

2.2 Regista a quantidade pintada das duas toalhas em número fracionário, em número decimal e em percentagem.

R: número fracionário = 1/4
número décimal = 0,25.
percentagem = 25%

2.3. Que conclusões podes tirar?

Que 25% = 1/4.

Figura 4.24. Resolução da tarefa 4, parte 1, pelo grupo C

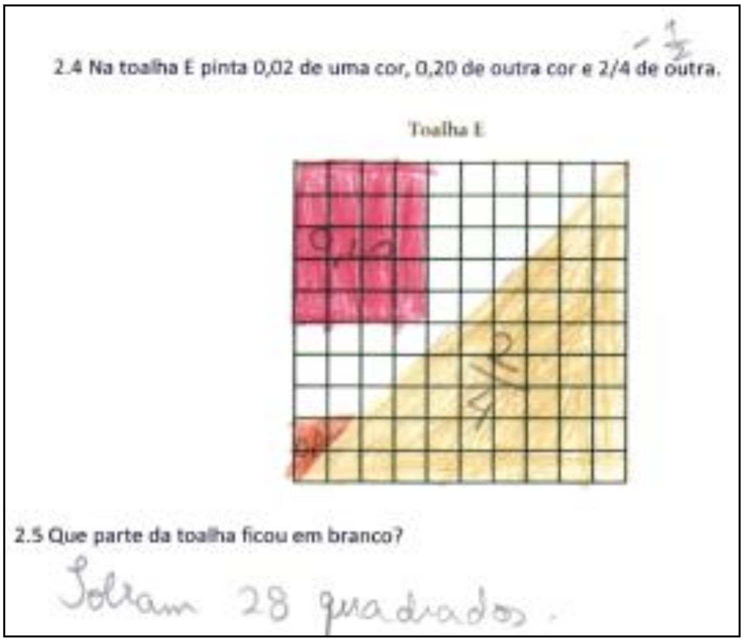


Figura 4.25. Resolução da tarefa 4, parte 2, pelo grupo C

Natália: $\frac{1}{4}$ da toalha é dividir a toalha em 4 e pintar uma parte.

Ricardo: 25 centésimas é pintar 25 quadradinhos.

Natália: Metade é assim, e agora, dividir assim (divide a toalha C com as mãos para encontrar a quarta parte), são 1, 2, 3, 4,... 24, 25 quadradinhos também. É a mesma coisa.

Natália: $\frac{2}{4}$ já sabemos que é igual à metade.

Ricardo: Vamos pintar metade assim, a fazer um triângulo.

Natália: 0,20 são 20 quadrados que temos de pintar. E depois 0,02 são dois.

Ricardo: Pintamos assim, um aqui e metade mais metade do outro, para ser diferente.

Transcrição 4.10. Extrato de diálogo entre o par do grupo C relativamente à resolução da tarefa 4

4.3.1.4. Sessão 5 - significados quociente e parte-todo

Esta foi a terceira aula onde se abordou uma tarefa com significado quociente tendo sido realizada na sequência de outras aulas onde foram realizadas tarefas com significado parte-todo.

Na tarefa 6três meninas dividem duas tartes e nove meninos dividem seis tartes iguais às das meninas (ver Fig.4.26.). A professora acrescenta oralmente que em cada um dos grupos os seus elementos comem a mesma quantidade de tarte.

Três meninas dividem duas tartes e nove meninos dividem seis tartes iguais às das meninas.
a) Cada menina vai comer o mesmo que cada menino? Justifica a tua resposta.
b) Que fração da tarte vai comer cada menina? E cada menino?
c) Quem é que come mais? Cada menino ou cada menina? Explica o teu raciocínio.

Figura 4.26. Tarefa 5 no significado quociente

Nesta tarefa, com significado quociente o grupo A utilizou a mesma estratégia que na tarefa anterior com igual significado, desta vez dividindo todas as tartes com o mesmo número de divisões e colorindo as partes que cada menino iria comer (ver Fig.4.27.). Desta forma o grupo sentiu-se confiante para fazer novas conjeturas (ver Transcrição 4.11.).

Alberto: 3 meninas e 9 meninos... 3 é a terça parte de 9. E dois é a terça parte de seis (refere-se ao número de tartes). É a mesma quantidade.

Angelina: Então, duas tartes para dividir por 3 meninas, cada tarte divide-se em 3 fatias iguais. Uma menina come esta e come esta (uma fatia de cada tarte pintada). Os meninos também podem dividir as tartes em 3 em vez de seis, como estavas a dizer, e cada menino come duas fatias de três fatias em cada tarte.

Alberto: Uma menina come duas fatias em duas tartes divididas em três que é $\frac{2}{3}$ e um menino come também $\frac{2}{3}$.

.Professor: E a que corresponde o $\frac{2}{3}$ dos meninos?

Alberto: À quantidade comida por cada um. Cada comeu duas fatias em seis tartes, mas estavam divididas em três partes iguais como as das meninas.

Transcrição 4.11. Extrato de diálogo entre o par do grupo A relativamente à resolução da tarefa 6

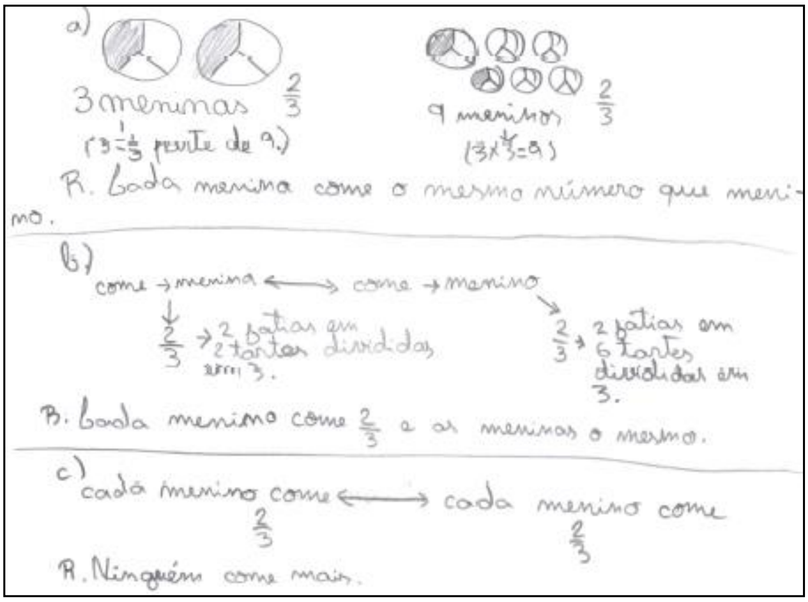


Figura 4.27. Resolução da tarefa 5 pelo grupo A

Os alunos do grupo A, com calma e ponderação, resolveram a tarefa no significado quociente. Mostraram-se seguros na sua aprendizagem e com segurança demonstram como dominam trabalhar com fração equivalentes que lhes foram apresentadas (ver Transcrição 4.12.).

Alberto: 6 meninas comem $\frac{2}{3}$ porque podemos dividir as tartes em três e é mais fácil para comparar com os rapazes.

Angelina: Também podemos dizer que os rapazes comeram $\frac{2}{6}$ em vez de $\frac{1}{3}$, é a mesma quantidade, só que dividimos a tarte em 6 partes iguais.

Alberto: Então, se as meninas comem $\frac{2}{3}$ e os meninos comem $\frac{1}{3}$ as meninas é que comem mais tarte.

Transcrição 4.12. Extrato de diálogo entre o par do grupo A relativamente à resolução da tarefa 6

Os alunos do grupo B voltam a deparar-se com um problema de equivalência de fração. Na sequência das outras tarefas o Álvaro chegou à conclusão que trabalhava com fração que representavam a mesma parte do todo e que se conseguisse multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo número, iria obter a mesma quantidade (ver Transcrição 4.13.).

Álvaro: Se três meninas comem duas tartes, cada uma come $\frac{2}{3}$ da tarte e se nove meninos comem seis tartes cada menino come $\frac{6}{9}$ da tarte!

Sofia: Mas assim não sabemos quem come mais. Temos de as dividir igualmente para ver...

Álvaro: Não é preciso, $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$. Se multiplicarmos as duas tartes (dos meninos) por três, dá seis, que é o número de tartes dos meninos e se multiplicarmos por três aqui (aponta para a tabela onde diz 3 meninos) dá 9, que é igual ao número de meninas.

Sofia: Se dois terços é igual a seis nonos então cada menina come tanto como cada menino.

Transcrição 4.13. Extrato de diálogo entre o par do grupo B relativamente à resolução da tarefa 6

Mesmo assim Sofia recorre ao desenho pictórico de forma a verificar se a explicação que o Álvaro dá é válida e conclui que sim (ver Fig.4.28.).

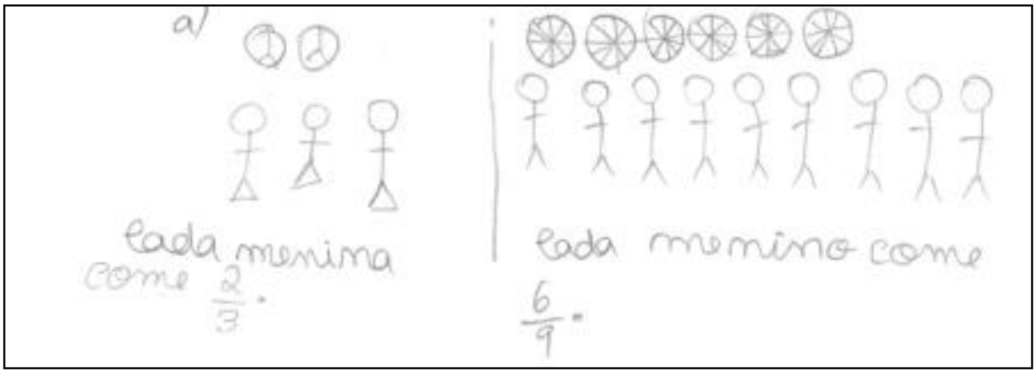


Figura 4.28. Resolução da tarefa 5 por uma aluna do grupo B

Álvaro, por sua vez, não precisa de fazer qualquer desenho, construindo uma tabela com a informação do enunciado estabelecendo corretamente o raciocínio proporcional. Sem ter estudado formalmente em sala de aula, o aluno conjetura sobre como criar frações equivalentes, justificando que multiplicando o numerador e o denominador pelo mesmo valor, a parte comida pelos meninos é a mesma (ver Fig.4.29.).

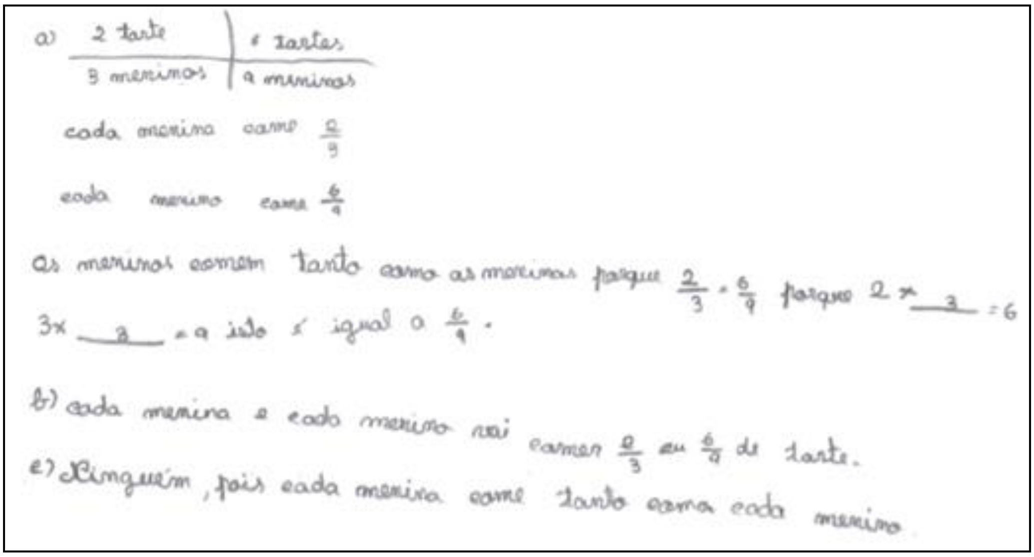


Figura 4.29. Resolução da tarefa 5 por uma aluna do grupo B

O grupo C resolveu toda a tarefa com o número de meninos e o número de tartes de meninos trocados (ver Fig.4.30.). O que denota falta de atenção aquando a leitura do enunciado.

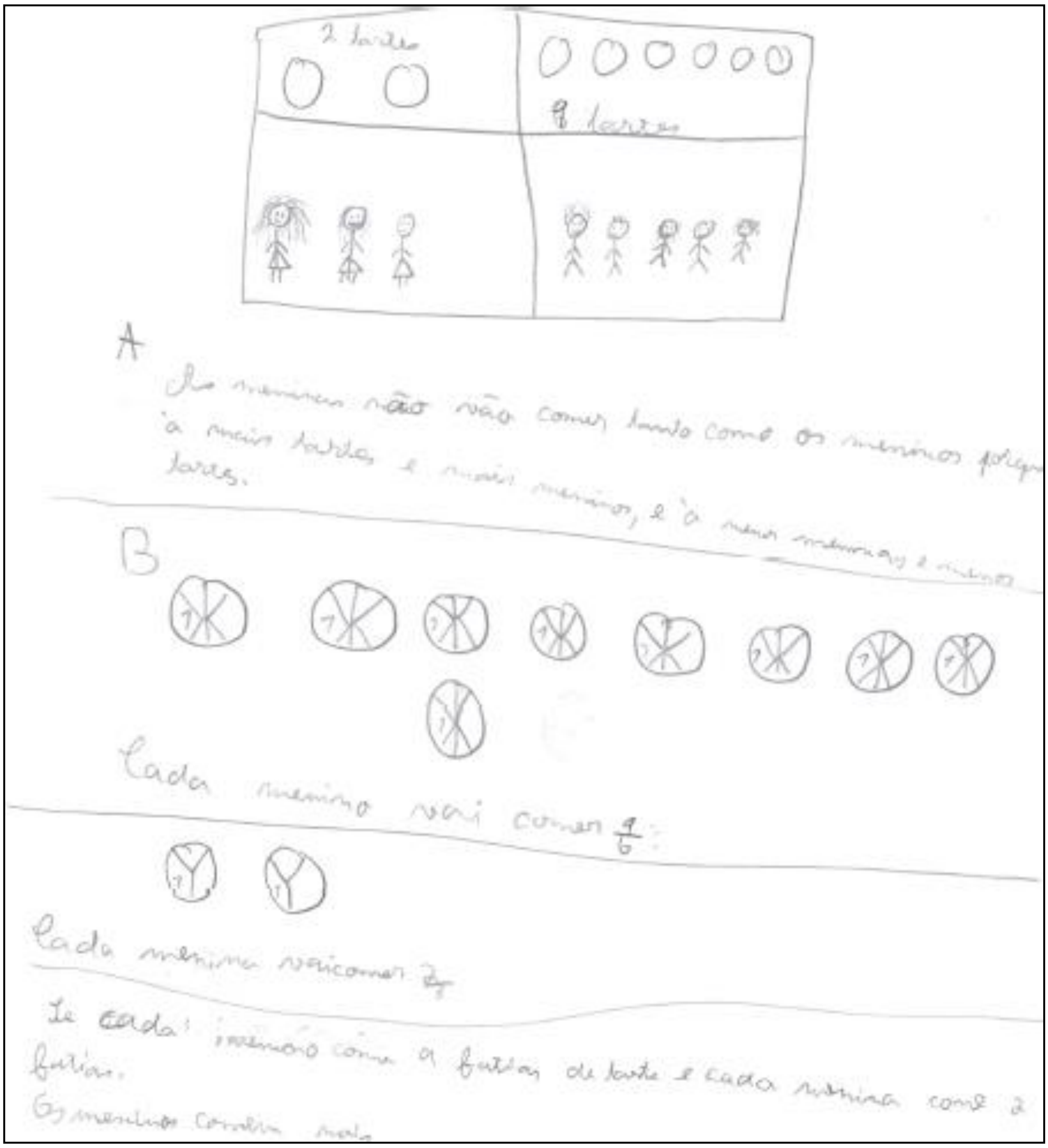


Figura 4.30. Resolução da tarefa 7 pelo grupo C

Confrontados com outros valores que não os dados na tarefa, $\frac{9}{6}$ em vez de $\frac{6}{9}$, os alunos do grupo C mostram que são capazes de ordenar fração, notando que estas não são equivalentes e que $\frac{9}{6}$ é maior do que $\frac{2}{6}$ (ver Transcrição 4.14.).

Natália: Na tabela pomos as tartes e os meninos e vamos ver se comem o mesmo. 9 tartes e 6 meninos e 2 tartes e 3 meninas (trocou o nº de meninos com o nº de tartes). Já viste, só há aqui o dobro das meninas, mas há muito mais que o dobro de tartes.

Ricardo: Então não comem a mesma quantidade, porque há mais meninos e o número de tartes é maior do que se fosse para comerem o mesmo. Aqui vamos fazer igual, desenhamos as tartes e dividimos cada uma para as seis meninas. Pela tabela vemos logo que os meninos comem mais. Para comerem o mesmo tinha de haver o dobro de tartes das meninas, e há muito mais.

Transcrição 4.14. Extrato de diálogo entre o par do grupo C relativamente à resolução da tarefa 6

Na tarefa proposta com significado parte-todo (ver Anexo 5, p.147) foi pedido aos alunos que recriassem o todo mediante os valores indicados. Numa das questões, a meio da tarefa, o pedido era indicar uma percentagem do todo já dado.

Na figura 4.31. tem-se um exemplo da tarefa resolvida corretamente na íntegra pelo grupo B.

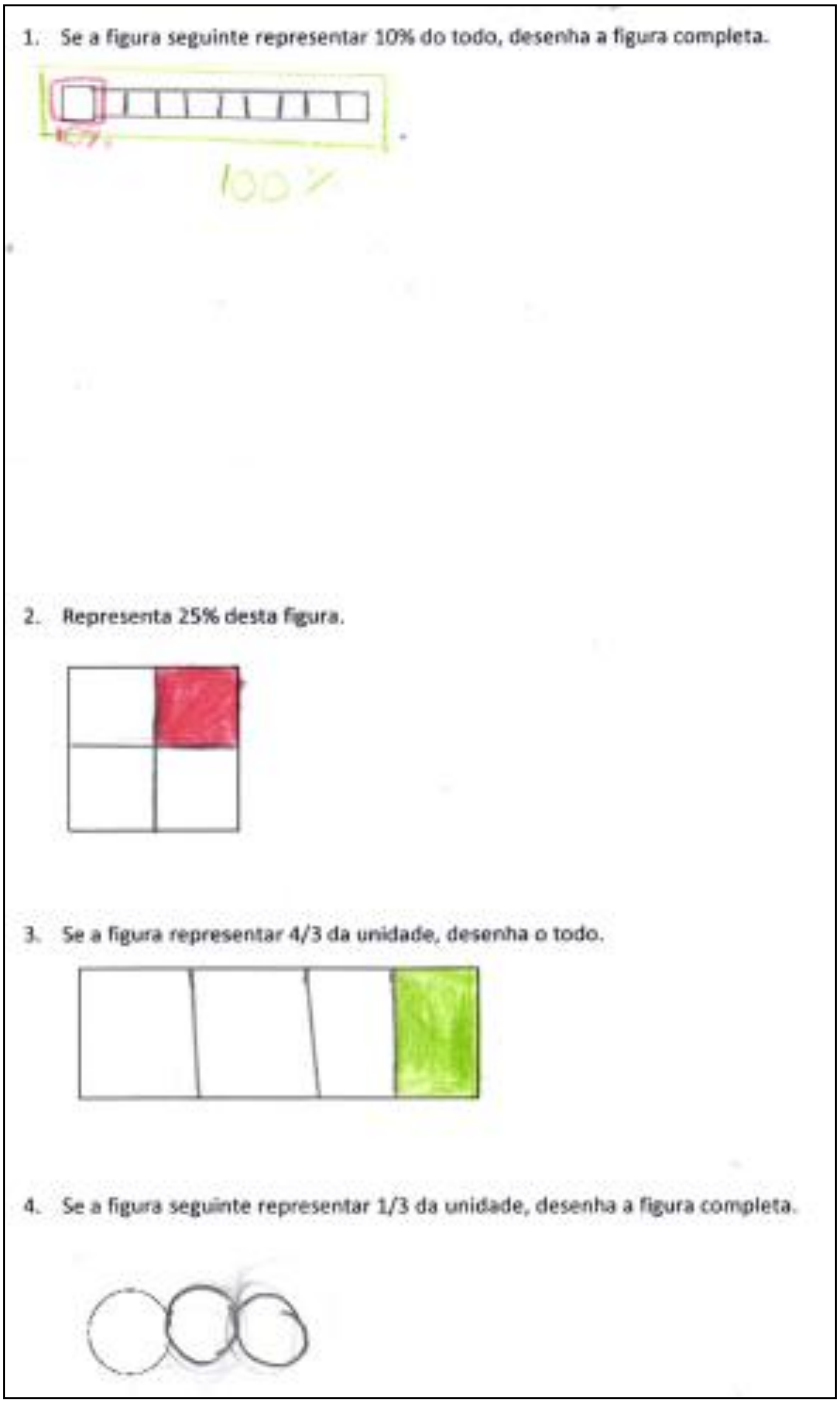


Figura 4.31. Resolução da tarefa 7 pelo grupo B

Os grupos A (ver Transcrição 4.15.) e C (ver Fig.4.32.) na questão 2, por uma má interpretação do enunciado, responderam como se encontrar o todo fosse o pedido.

Angelina: Se este quadrado corresponde a 25% da figura para dar o 100% tem de ser 25+25+25+25.

Alberto: Temos de desenhar mais 3 quadrados iguais a este.

Transcrição 4.15. Extrato de diálogo entre o par do grupo A relativamente à resolução da tarefa 7

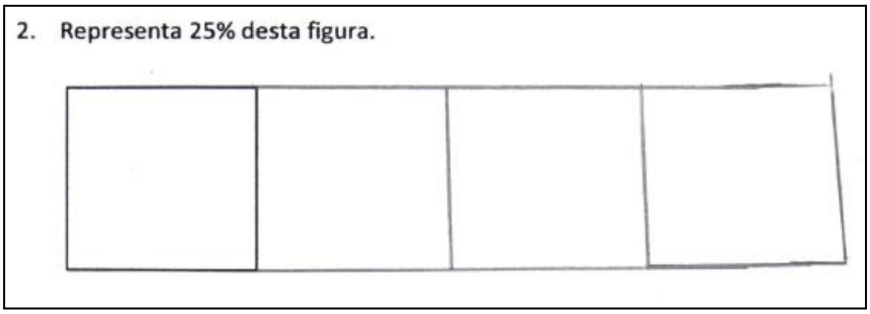


Figura 4.32. Resolução da tarefa 7 pelo grupo C

Logo no início do trabalho, o grupo C construiu erradamente o todo da primeira questão (ver Fig.4.33.), construindo uma tabela 10x10, como se o pequeno quadrado valesse 1%. Depois de os próprios alunos desconstruírem esta confusão, conseguiram fazer uma figura em que o quadrado inicial valesse 10% (ver Transcrição.4.16.).

Natália: Se este quadrado vale 10% da figura toda temos de fazer um quadrado gigante de 100 quadrados. Fazemos assim, este é de uma barra com 10, mais nove barras. [...depois de construírem uma grelha 10x10]

Professora: O quadrado pequeno é que parte do quadrado grande?

Ricardo: ...Desenhámos uma figura com 100 quadrados, um quadrado pequeno é igual a uma centésima.

Natália: Tens razão, fizemos mal. Se este aqui (aponta para quadrado inicial) é 10% então era só preciso serem 10 quadrados.

Transcrição 4.16. Extrato de diálogo entre o par do grupo C relativamente à resolução da tarefa 7

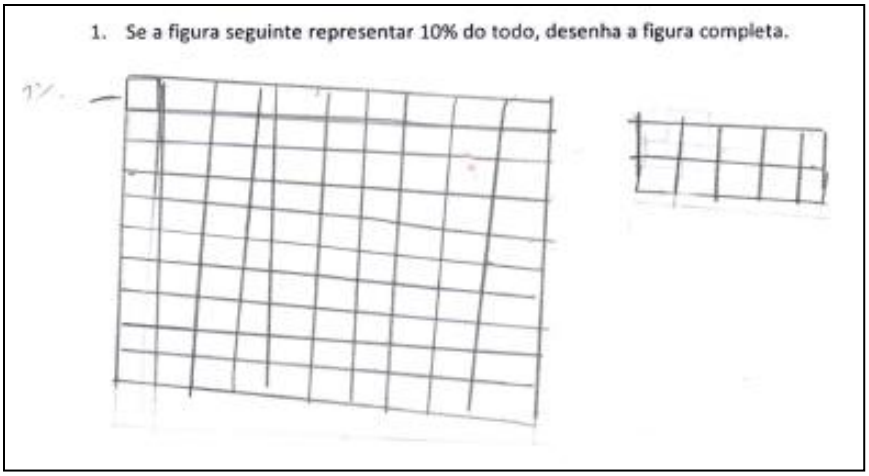


Figura 4.33. Resolução da tarefa 7 pelo grupo C

4.3.1.5.Sessões 6 e 7 - significado operador

Nas sessões do dia 9 e do dia 12 os alunos resolveram situações problemáticas envolvendo o significado operador (ver Fig.4.34.).Foi a primeira vez que, intencionalmente, a turma trabalhou este significado, havendo, constantemente, a relação entre as diferentes representações, decimal, fracionária e percentagem.

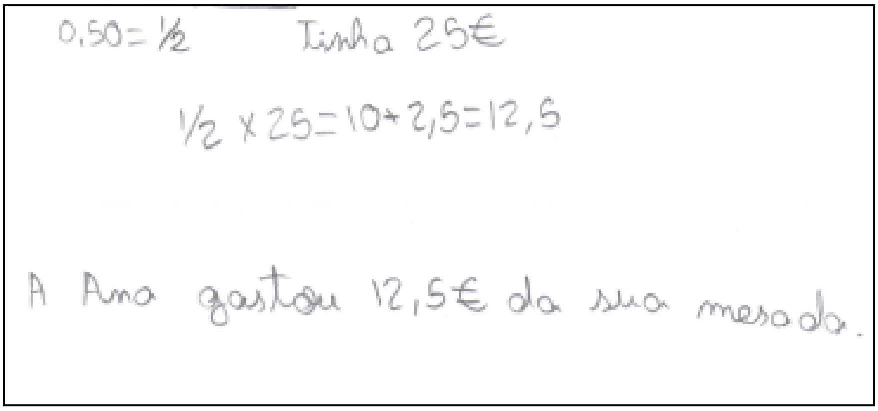
1. A Ana gastou 0,50 da sua mesada na compra de uma prenda para o aniversário da mãe. Tinha 25€, quanto gastou?

2. O Rui deu 25% dos seus berlindes ao Tiago. Sabendo que o Rui tinha 20 berlindes, quantos berlindes deu o Rui ao Tiago?

3. A mãe da Luísa queria fazer um colar para o qual necessitava de 21 peças. Reparou que tinha apenas 2/3 das peças que necessitava. Quantas peças teve de comprar a mãe da Luísa para terminar o colar?

Figura 4.34. Tarefa 8 no significado operador

Os grupos A, B e C foram consistentes nas suas resoluções e recorreram à divisão da quantidade dada pelo número indicado no denominador da fração. Quando o valor não foi dado sobre a forma de fração, os alunos optaram por representar a percentagem ou o número decimal em fração, para assim operarem com um registo que lhes era mais familiar (ver Fig.4.35. e ver Transcrição 4.17.).


0,50 = ½ Tinha 25€

½ x 25 = 10 + 2,5 = 12,5

A Ana gastou 12,5€ da sua mesada.

Figura 4.35. Resolução da tarefa 8 pelo grupo A

Alberto: A Ana gastou 0,50 da sua mesada, é metade da mesada.

Angelina: Já só vai ficar com metade da mesada para a prenda. Fica com metade de 25€.

Alberto: Um meio de 25 é igual a dez mais dois e meio.

Angelina: A Ana gastou doze euros e meio da sua mesada!

Transcrição 4.17. Extrato de diálogo entre o par do grupo A relativamente à resolução da tarefa 8

Uma aluna do grupo B confundiu, na primeira tarefa, 0,50 da mesada com 0,50€ da mesada, fazendo apenas uma subtração para obter o resto que faltava para ter o dinheiro pretendido (ver Fig.4.36.). Enquanto a outra colega, do mesmo grupo, calculou a metade de 25 e usou a divisão parcial para obter o resultado (ver Fig.4.37.).

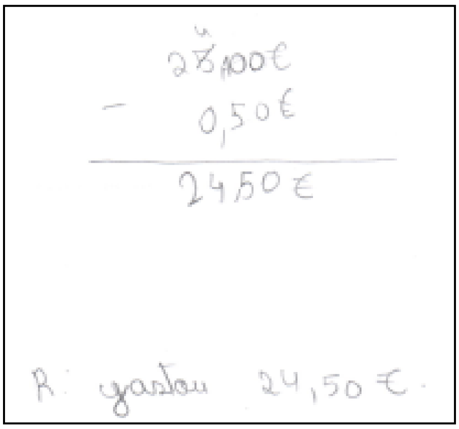


Figura 4.36. Resolução da tarefa 8 por um aluno do grupo B

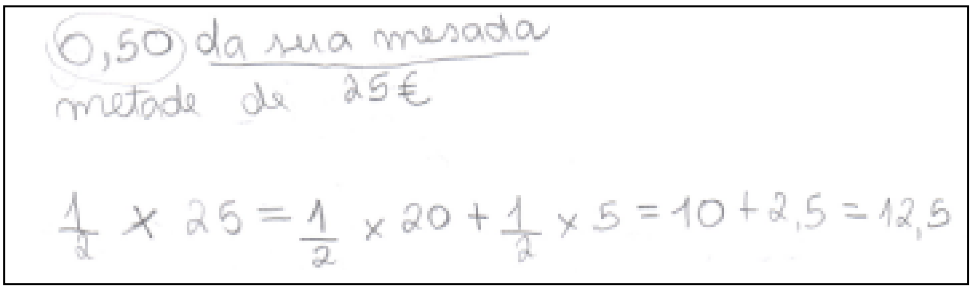


Figura 4.37. Resolução da tarefa 8 por um aluno do grupo B

Como se pode observar pela Transcrição 4.18., o Álvaro conseguiu entender a situação problemática, resolvendo-a e explicando o seu procedimento à Sofia, que apesar de se aperceber do seu erro não o corrigiu na sua resolução.

Álvaro: Vamos tirar os 0,50 da sua mesada.

Sofia: Sim, tiramos e dá o valor que ele gastou.

Álvaro: Quanto te deu? Deixa ver, o que estás a fazer?

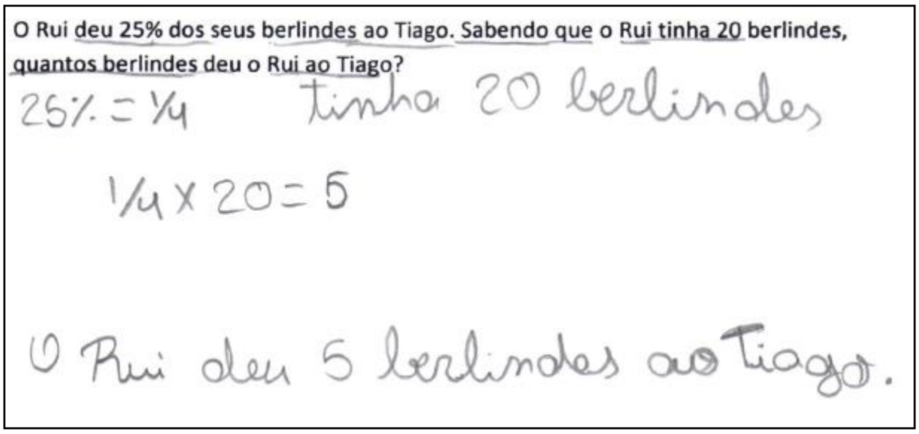
Sofia: Tiro os 50 cêntimos aos 25 euros.

Álvaro: Aqueles 0,50 não são euros, são centésimas! É como se fosse 0,5, a metade. Metade de 25€é 12,5, vês?

Sofia: Ah, tens razão.

Transcrição 4.18. Extrato de diálogo entre o par do grupo B relativamente à resolução da tarefa 8

No problema 2, tanto o grupo A como o grupo B converteram os 25% em fração, trabalhando depois com $\frac{1}{4}$ de 20, que automaticamente souberam dizer que era 5 (ver Fig.4.38.).


O Rui deu 25% dos seus berlindes ao Tiago. Sabendo que o Rui tinha 20 berlindes, quantos berlindes deu o Rui ao Tiago?

25% = 1/4 tinha 20 berlindes

1/4 x 20 = 5

O Rui deu 5 berlindes ao Tiago.

Figura 4.38. Resolução da tarefa 8 pelo grupo A

À semelhança dos grupos anteriores, o grupo C mostrou que também prefere trabalhar com fração do que com percentagem. Através da transcrição 4.19. podemos perceber que o aluno toma o 50% como referência para ter noção do quanto é 25% e que a sua colega percebendo que 25% corresponde a metade da metade faz o paralelismo com $\frac{1}{4}$.

Assim, indicam a divisão que têm de fazer para resolver o problema, concretizando este processo na indicação 20:4, dividindo a quantidade que tinha sido dada pelo numerador da fração que escreveram (ver Fig.4.39.).

Ricardo: 50% é metade de 100% por isso 25% é metade da metade.

Natália: Sim, é um quarto de 100. Por isso 25% é igual a $\frac{1}{4}$.

Natália: O total de berlindes do Rui é 20, temos de dividir o 20 por 4 caixinhas e fica...

Ricardo: [interrompe] 5 berlindes.

Natália: 20 a dividir por 4 dá 5, o Rui deu 5 berlindes.

Transcrição 4.19. Extrato de diálogo entre o par do grupo C relativamente à resolução da tarefa 8

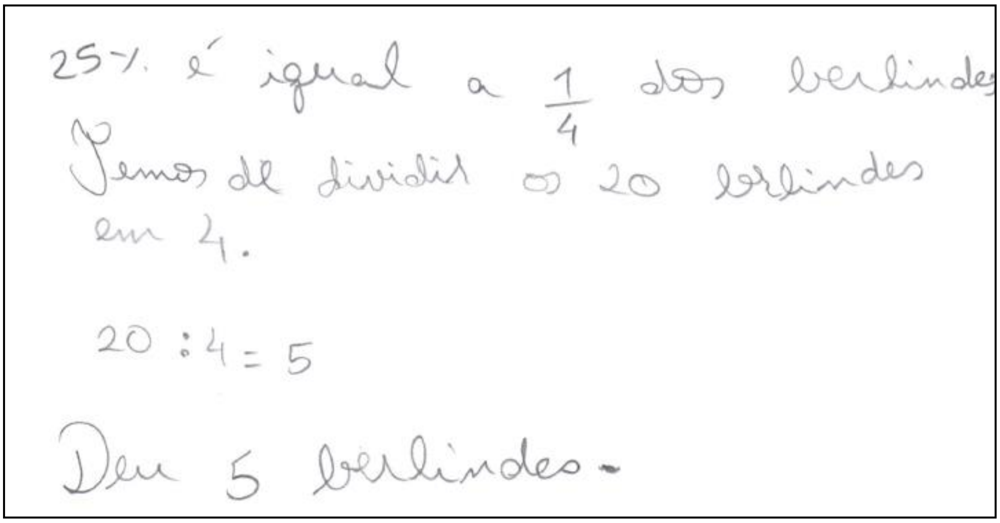


Figura 4.39. Resolução da tarefa 8 pelo grupo C

No problema 3, o grupo A optou por fazer o algoritmo da divisão, dividindo o número total de peças necessárias para o colar por 3, número que está no denominador da fração $\frac{2}{3}$ (ver Fig.4.40.). Os alunos demonstram destreza no trabalho com fração de referência, como o $\frac{2}{3}$, sabendo, com facilidade, que o 7 do quociente corresponde a fração $\frac{1}{3}$ do total.

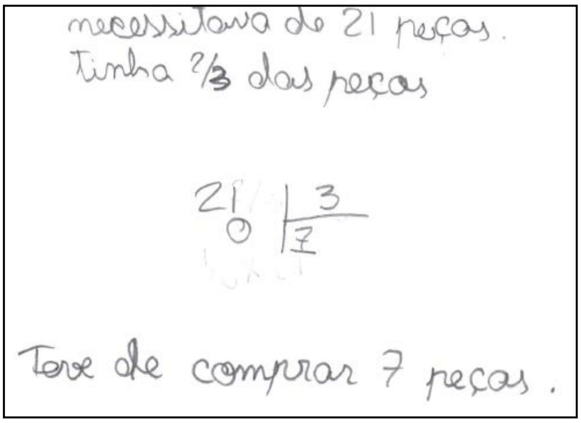


Figura 4.40. Resolução da tarefa 8 pelo grupo A

O grupo B, numa tentativa de justificar o seu raciocínio (ver Transcrição 4.20.), após ter efetuado a divisão do número total de peças, 20, por 3 para saber quanto é um terço de 21 ainda subtraiu os dois terços de peças que a mãe já tem ao número de peças necessárias, confirmando assim que 7 é o número de peças que é preciso comprar (ver Fig. 4.41.).

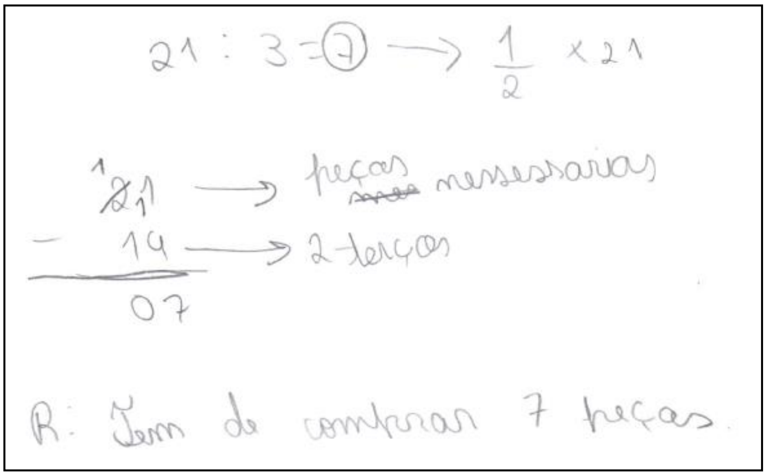


Figura 4.41. Resolução da tarefa 8 pelo grupo B

Álvaro: 21 peças é o total.

Sofia: A mãe já tem $\frac{2}{3}$ das peças que precisa.

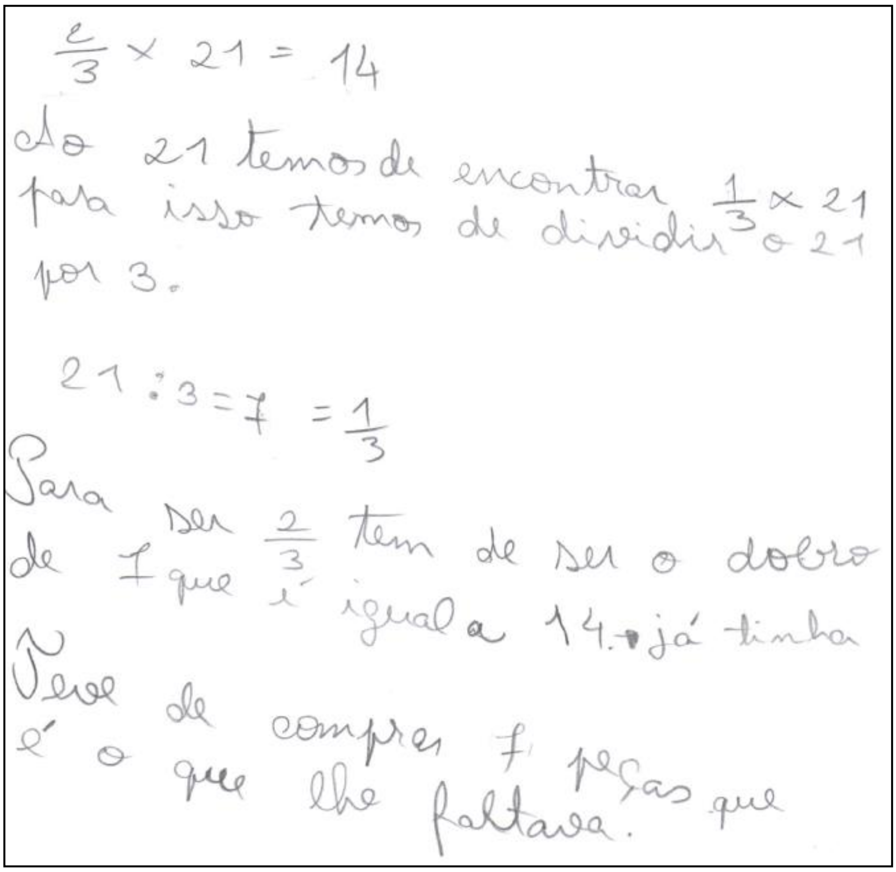
Álvaro: $\frac{2}{3}$ é duas vezes $\frac{1}{3}$. Se 21 é o todo é igual a $\frac{3}{3}$.

Sofia: Temos de dividir o todo em 3 partes iguais. (...) Este sete é $\frac{1}{3}$ de 21.

Álvaro: Às 21 peças temos de tirar os $\frac{2}{3}$ que ela já tem e dá 7.

Transcrição 4.20. Extrato de diálogo entre o par do grupo B relativamente à resolução da tarefa 8

O grupo C teve um procedimento similar ao grupo B, partindo logo do conhecimento do valor de $\frac{2}{3}$ de 21. Porém, para mostrar quanto é $\frac{1}{3}$ de 21 os alunos efetuam a divisão chegando ao 7, como podemos ver na figura 4.42.



$\frac{2}{3} \times 21 = 14$

Ao 21 temos de encontrar $\frac{1}{3} \times 21$
para isso temos de dividir o 21
por 3.

$21 : 3 = 7 = \frac{1}{3}$

Para ser $\frac{2}{3}$ tem de ser o dobro
de 7 que é igual a 14. já tinha
Teve de comprar 7 peças que
é o que lhe faltava.

Figura 4.42. Resolução da tarefa 8 pelo grupo C

Os grupos resolveram de uma forma semelhante os três problemas (ver Fig.4.43) no significado operador do dia 12.

1. O Marcelo convidou 40 amigos para sua festa de aniversário. No final da festa ele verificou que apenas 4/5 dos convidados compareceram.

   Quantos amigos foram à festa de Marcelo?

2. A Alexandra estava a resolver os exercícios de Matemática. Ao terminar 12 exercícios, verificou que já tinha completado 3/4 dos exercícios.

   Qual era o número total de exercícios de Matemática?

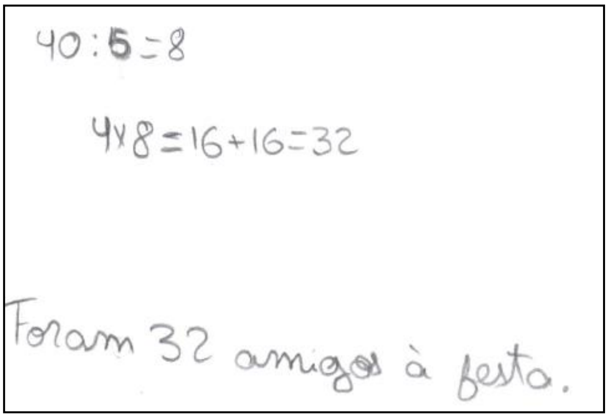
3. A Ana comprou um saco com 30 berlindes. Separou 1/3 para si própria e dividiu o restante entre quatro amigas.

   Quantos berlindes receberá cada amiga?

Figura 4.43. Tarefa 10 no significado operador

Os três grupos assumiram que a quantidade a trabalhar, apesar de discreta, era contínua e aplicaram o pensamento que utilizariam para uma situação de parte-todo.

O grupo A, como se pode ver pela figura 4.44, dividiu o número total de amigos convidados para a festa por 5, e ao quociente multiplicou-o por 4, sendo que $\frac{4}{5}$ de 40 é 32.

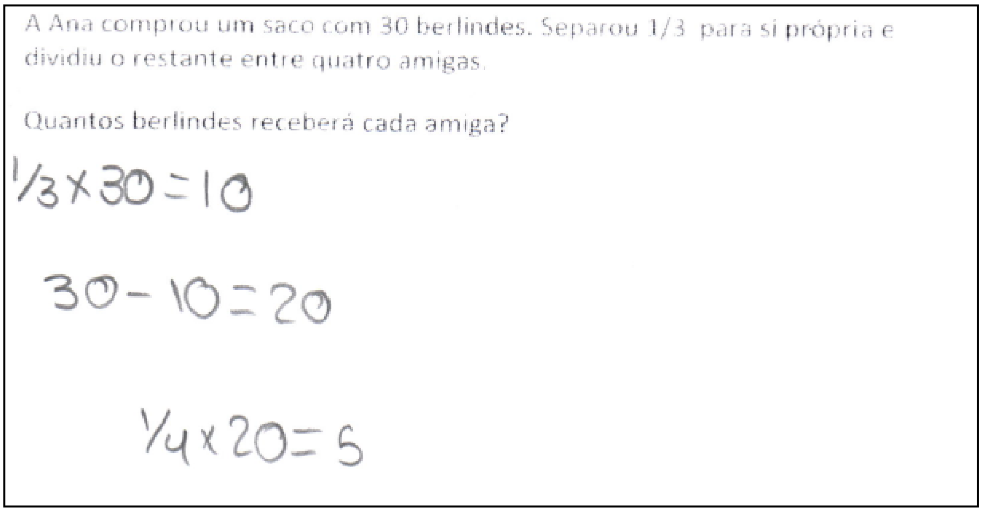

$40 : 5 = 8$

$4 \times 8 = 16 + 16 = 32$

Foram 32 amigos à festa.

Figura 4.44. Resolução da tarefa 10 pelo grupo A

Na resolução do problema 3, o grupo A continua a demonstrar que se sente confortável na resolução de problemas com fração, fazendo de imediato o valor de $\frac{1}{3}$ de 30 e $\frac{1}{4}$ de 20. (ver Fig.4.45.).


A Ana comprou um saco com 30 berlindes. Separou 1/3 para si própria e dividiu o restante entre quatro amigas.

Quantos berlindes receberá cada amiga?

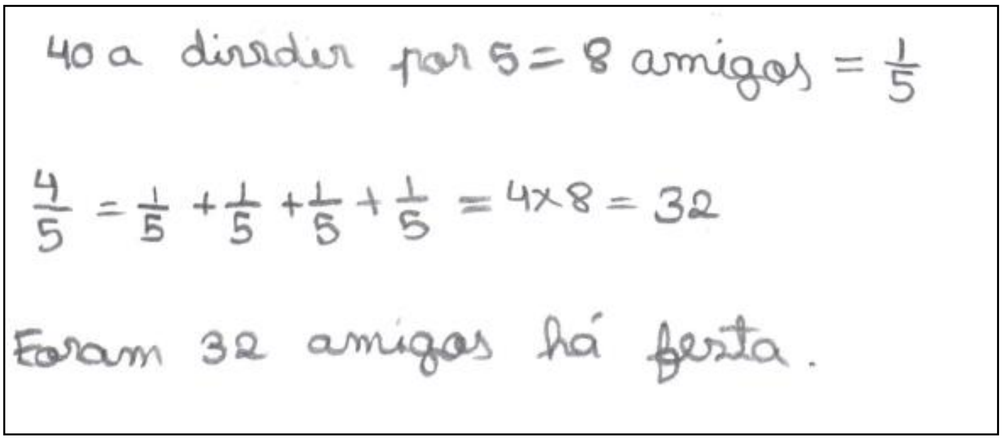
$1/3 \times 30 = 10$

$30 - 10 = 20$

$1/4 \times 20 = 5$

Figura 4.45. Resolução da tarefa 10 pelo grupo A

Em relação ao grupo B, aquando da resolução do problema 1, as alunas dividiram 40 por 5 para calcular $\frac{1}{5}$ de 40, não bastando este cálculo, escreveram uma expressão utilizando a adição de fração de forma a mostrar como chegaram ao valor final de 23 (ver Fig.4.46.).


40 a dividir por 5 = 8 amigos = $\frac{1}{5}$

$\frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 4 \times 8 = 32$

Foram 32 amigas há festa.

Figura 4.46. Resolução da tarefa 10 pelo grupo B

No problema 2, o grupo B continua a registar o seu raciocínio através de operações com fração, calculando $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ (ver Fig.4.47.).

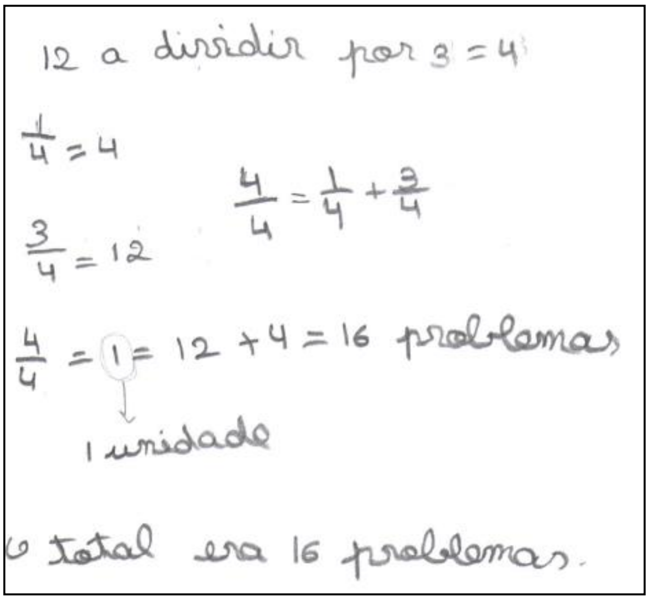


Figura 4.47. Resolução da tarefa 10 pelo grupo B

Como se pode ver na figura 4.48 os alunos, para resolver o problema 3,primeiro calculam quanto é $\frac{1}{3}$ de 30 e é curioso a forma como reduzem este significado ao significado parte-todo, representando a quantidade discreta, os berlindes, por um círculo. Visualmente é fácil verificar que sobram 20 berlindes, e é sobre este valor que as alunas depois calculam a quarta parte, dividindo-o por 4.

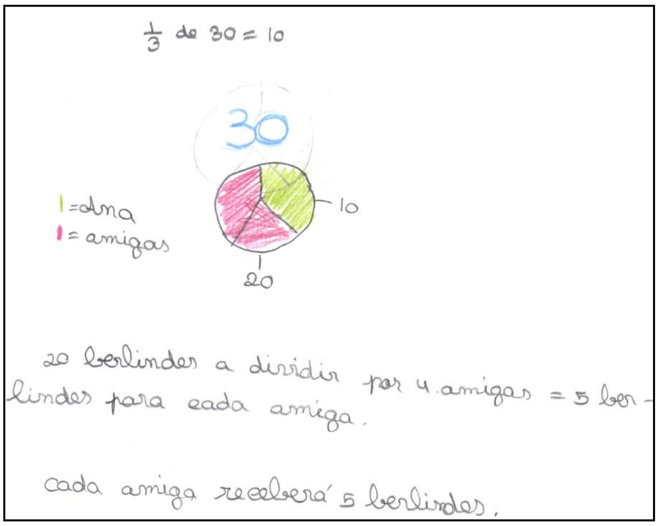


Figura 4.48. Resolução da tarefa 10 pelo grupo B

O grupo C, tal como os outros dois grupos, no problema 1, optou por, de uma forma simples, dividir o número correspondente ao número de amigos, 40, por 5, número apresentado no denominador da fração $\frac{4}{5}$ (ver Fig.4.49.). O grupo revela entender que se o todo está dividido em quintos então é porque cada uma das partes é $\frac{1}{5}$, logo 40 a dividir por 5 corresponde à quinta parte de 40.Posteriormente, para saber quantos amigos foram à festa, o grupo teve necessidade de multiplicar o 8, que corresponde a $\frac{1}{5}$ de 40, por 4, para obter o valor pedido.

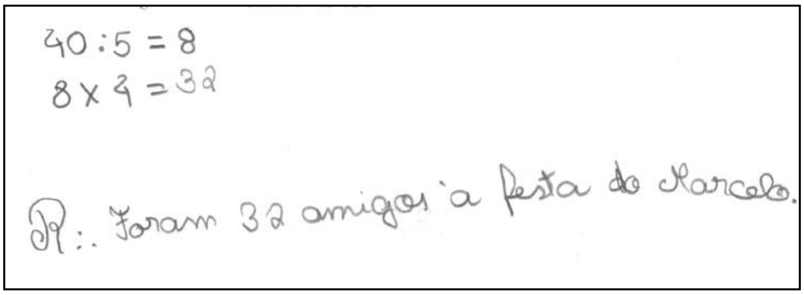


Figura 4.49. Resolução da tarefa 10 pelo grupo C

Face ao problema 2 os alunos do grupo C recorrem a uma reta numérica (ver Fig.4.50.) para registar a informação que retiram do problema e utilizam-na como auxílio na resolução do mesmo. Desta forma, os alunos dividem a reta numérica marcando 4 traços e marcam no quarto traço a fração $\frac{3}{4}$ e o seu valor correspondente, 12. A partir daqui, como se pode ver na Transcrição 4.21. os alunos recorrem aos múltiplos de 4 para encontrar os valores de cada fração, na tentativa de encontrar o valor que corresponde a $\frac{4}{4}$, logo à unidade pretendida.

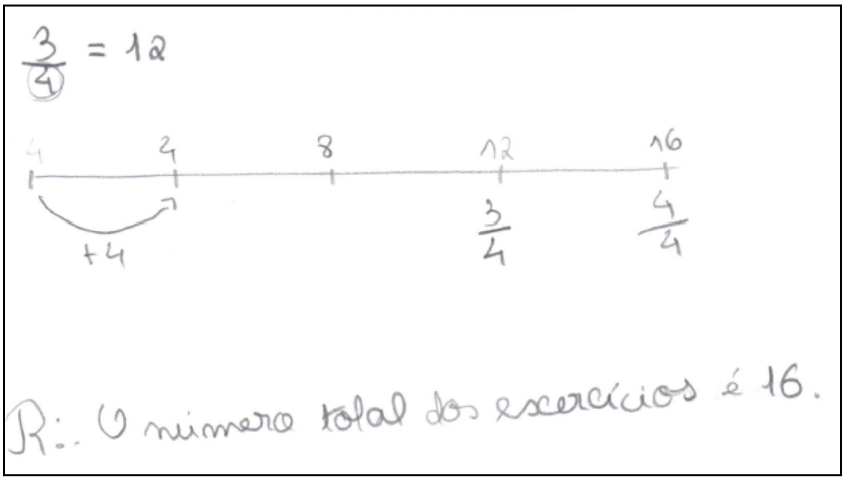


Figura 4.50. Resolução da tarefa 10 pelo grupo C

Natália: Vamos fazer assim uma reta e traçar os valores que temos.

Ricardo: Temos de a dividir em 4, para ser $\frac{4}{4}$.

Natália: Marcamos aqui o $\frac{3}{4}$, podemos pôr por cima quanto é, não achas?

Ricardo: Sim, pomos o 12.

Natália: Se aqui é 12 e damos 2 saltinhos é porque é sempre mais 4, ora deixa-me tentar (...) Se não tenho nada e tenho mais 4 fico com 4, que era o $\frac{1}{4}$, depois mais 4 que dá 8 e era o $\frac{2}{4}$, mais 4 e dá o 12 que já sabíamos e agora, para ser $\frac{4}{4}$ temos de pôr mais uma vez o 4, que é 16.

Transcrição 4.21. Extrato de diálogo entre o par do grupo C relativamente à resolução da tarefa 10

Na resolução do problema 3, o grupo resolveu rapidamente e sem hesitações como se pode ver pela figura 4.51., calculando primeiro $\frac{1}{3}$ de 30 e depois de subtrair este resultado ao total de berlindes, dividiu-o por 4, uma vez que se falava em os distribuir pelas 4 amigas.

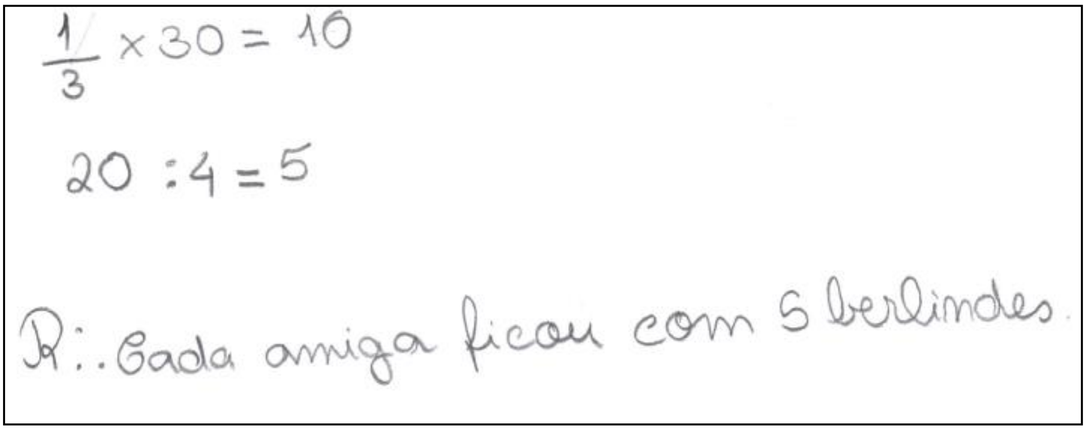


Figura 4.51. Resolução da tarefa 10 pelo grupo C

4.3.1.6. Sessão 8 - significados quociente e operador

A quarta aula onde os alunos se defrontaram com o significado quociente é na oitava sessão, após terem tido contacto com fração com significado operador.

Na tarefa com significado quociente, quatro meninas dividem três tartes e cinco meninos dividem quatro tartes iguais às das meninas (ver Fig.4.52).

Quatro meninas dividem três tartes e cinco meninos dividem quatro tartes iguais às das meninas. a) Cada menina vai comer o mesmo que cada menino? Justifica a tua resposta. b) Que fração da tarte vai comer cada menina? E cada menino? c) Quem é que come mais, cada menino ou cada menina? Explica o teu raciocínio.

Figura 4.52. Tarefa 9 no significado quociente

No grupo A, os alunos selecionam os dados da tarefa e demonstram que continuam a saber bem que nesta tarefa, com significado quociente, o numerador corresponde ao número de tartes e o denominador ao número de pessoas (ver Fig.4.53. e ver Transcrição 4.22.).

Angelina: Precisamos de ver o que cada menina come. 4 meninas dá $\frac{3}{4}$ de tarte para cada uma. Neles é quatro tartes a dividir para os cinco, que é 4 sobre 5.

Alberto: Os meninos comem fatias mais pequenas porque cada fatia é $\frac{1}{5}$ e essa fatia é mais pequena do que as das meninas que é um quarto da tarte.

Angelina: Então eles não podem comer o mesmo!

Alberto: As meninas comem $\frac{3}{4}$ e os meninos comem $\frac{4}{5}$. Desenhamos para mostrar. As fatias dos meninos são mais pequenas por isso sobra menos em cada um do que nas meninas.

Angelina: As meninas comem $\frac{3}{4}$ e sobra $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{4}$ é maior, logo sobra mais tarte às meninas.

Transcrição 4.22. Extrato de diálogo entre o par do grupo A relativamente à resolução da tarefa 9

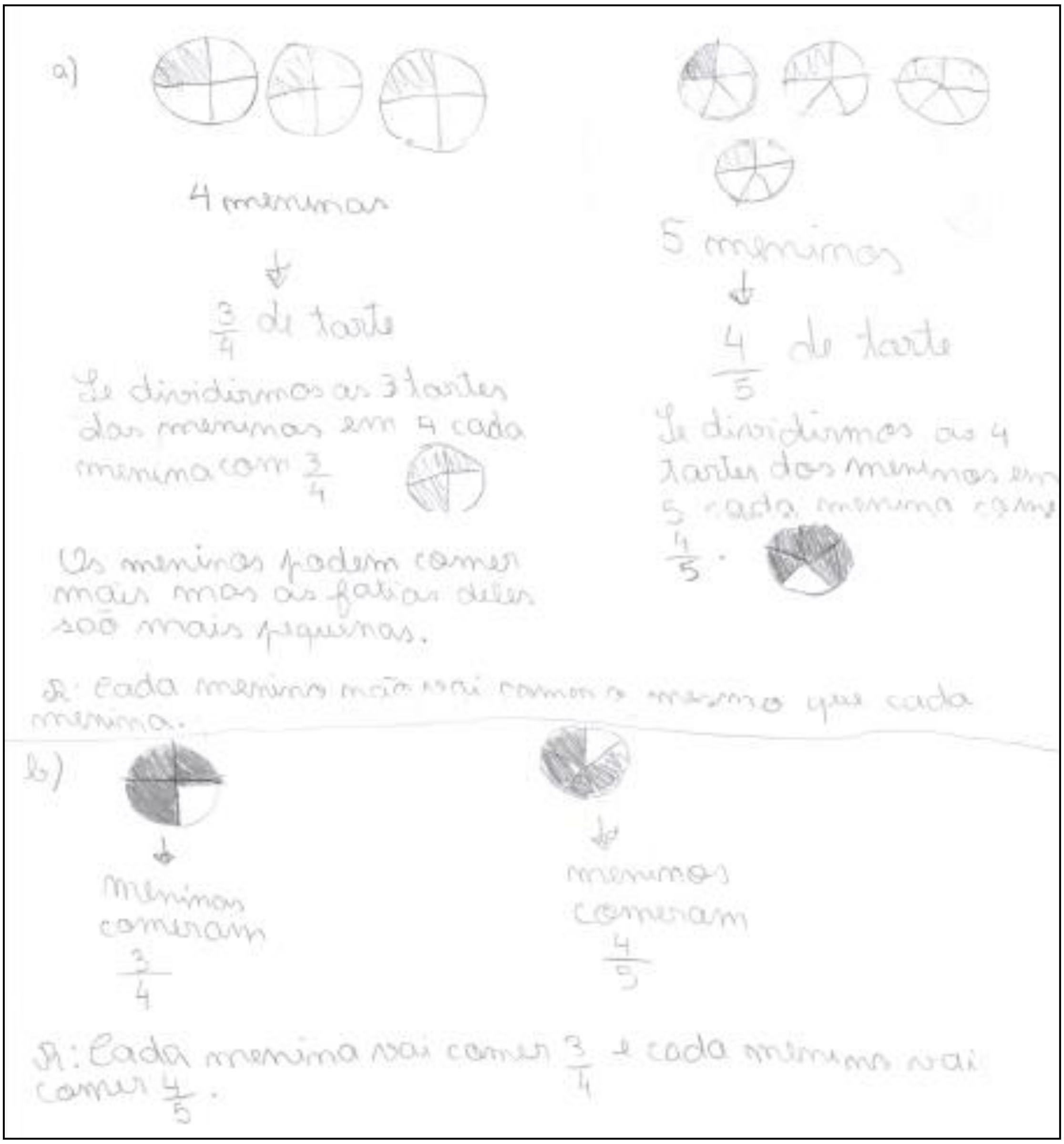


Figura 4.53. Resolução da tarefa 9 pelo grupo A

No grupo B, o Álvaro continua a revelar um domínio das operações com fração. Intuitivamente o aluno adiciona e subtrai fração, tendo sempre consciência do significado do numerador e do denominador destas (ver Transcrição 4.23). Sofia continua a precisar ainda de concretizar a divisão das tartes pelo número de meninos (ver Fig.4.54).

Álvaro: Se temos 3 tartes para 4 meninas é porque cada uma vai comer $\frac{3}{4}$ de tarte. O mesmo para os meninos, estás a ver aqui na tabela [aponta para a pequena tabela que construiu na folha]?

Sofia: Então quatro meninas e três tartes. Para ser justo cada tarte é dividida em quatro e assim cada menina come $\frac{1}{4}$ da tarte. Tinhas razão, cada menina come ao todo $\frac{3}{4}$ da tarte.

Álvaro: Os meninos é igual. 4 tartes, 5 meninos, logo cada um come $\frac{4}{5}$ das tartes. Mas assim não sabemos quem come mais. Temos que ver quem come mais. Só dá vendo quem deixa mais tarte.

Sofia: No que cada um come as meninas deixam mais.

Álvaro: Sim, nas meninas para haver $\frac{4}{4}$ é preciso haver mais $\frac{1}{4}$ e nos meninos é só preciso haver $\frac{1}{5}$. Nas meninas sobra $\frac{1}{4}$ que é mais do que nos meninos. Cada menino come mais porque sobra menos quantidade de tarte.

Transcrição 4.23. Extrato de diálogo entre o par do grupo B relativamente à resolução da tarefa 9

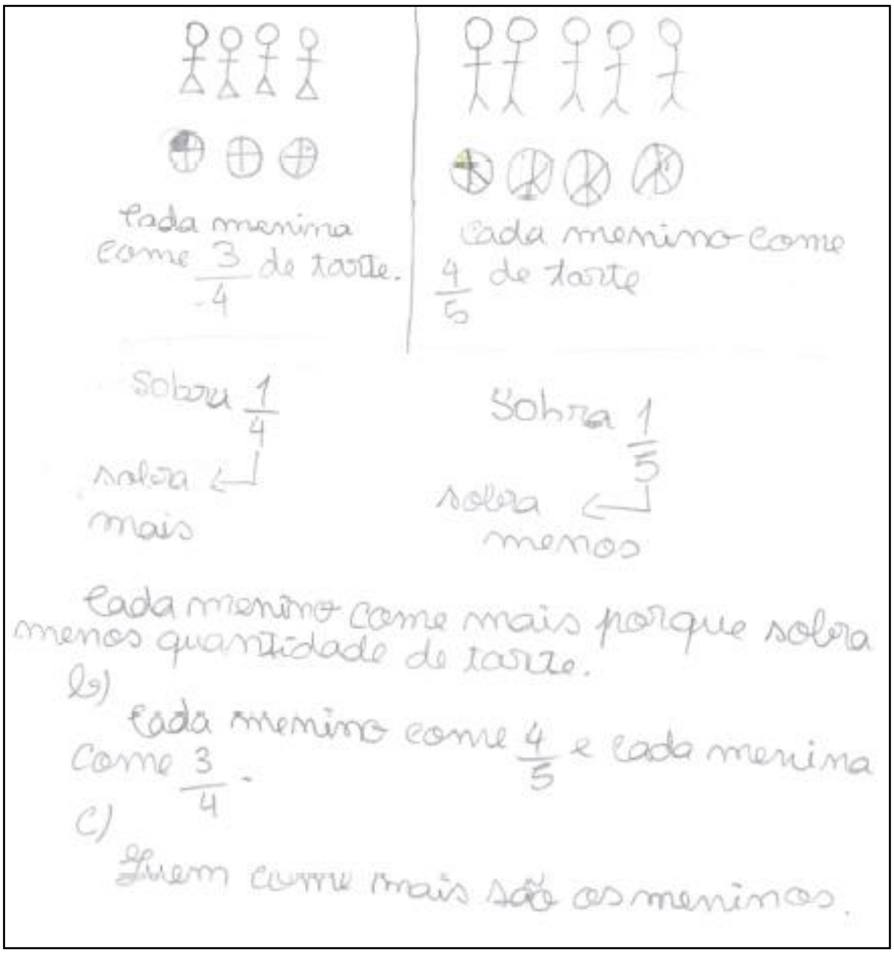


Figura 4.54. Resolução da tarefa 9 pelo grupo B

No grupo C, de forma a confirmar o que discutem (ver Transcrição 4.24.), os alunos desenham as tartes e dividem-nas, apesar de não atenderem a divisões com igual tamanho. Desde logo que têm noção da fração de tarte que cada menino e cada menina comem, contudo precisam de recorrer ao registo pictórico para confirmar as quantidades comidas e para comparar os seus tamanhos. Só depois fazem o paralelismo com a escrita simbólica das frações (ver Fig.4.55.).

Natália: Temos de fazer a tabela, é mais fácil. No lado dos meninos há mais uma tarte e mas um menino do que no lado das meninas. Se são 4 tartes e 5 meninos cada um come $\frac{4}{5}$, não é?

Ricardo: Sim, e as meninas como são quatro a comer três tartes cada uma come uma fatia se dividirmos as tartes em quatro partes iguais.

Natália:	Cada menina vai comer menos que os meninos porque $\frac{4}{5}$ é menor do que $\frac{3}{4}$. Cada tarte pode ser dividida assim, com estes traços faz de conta que ficam iguais. Cada menino come quatro fatias, por isso é $\frac{4}{5}$. As meninas é igual, cada uma come três do mesmo tamanho destas quatro [fatias] de uma tarte. Vamos ver como vimos ali. Quem é que come mais?
Ricardo:	Não se vê bem nos desenhos… Podemos tentar o que sobra na tarte.
Natália:	Nos meninos uma fatia é menos que nas meninas. Sobra menos nos meninos! Por isso têm de ser eles a comer mais.

Transcrição 4.24. Extrato de diálogo entre o par do grupo C relativamente à resolução da tarefa 9

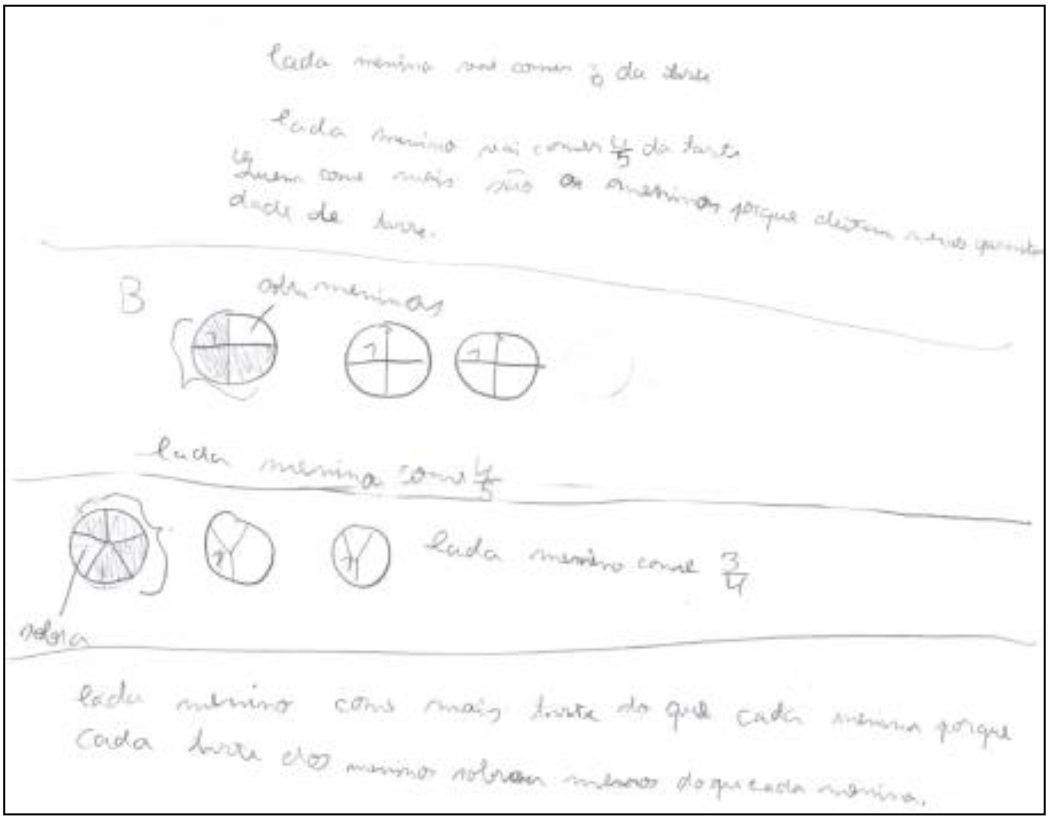


Figura 4.55. Resolução da tarefa 9 pelo grupo C

Na tarefa relativa ao significado operador, os alunos tinham duas situações problemáticas para resolver (ver Fig.4.56.).

1. Eu tinha 40 cromos e dei ¾ aos meus colegas da escola.
   a) Quantos cromos dei aos colegas?
   b) Com quantos cromos fiquei?

2. O Marcelo tem uma coleção com 150 cromos.
   a) Calcula o número de cromos que a Diana tem, sabendo que tem 0,3 do número de cromos que o Marcelo tem.

Figura 4.56. Tarefa 10 no significado operador

Em todos os problemas os alunos dos diferentes grupos conseguiram responder corretamente com exceção do grupo A que errou a 2.ª situação problemática.

À semelhança das resoluções das tarefas anteriores no significado operador, o grupo A efetuou a divisão do número total de cromos por 4, uma vez que estavam a trabalhar com $\frac{3}{4}$ do todo (ver Fig.4.57.). Desta forma descobriram quanto era $\frac{1}{4}$ de 40 e multiplicaram esse valor por 3, conseguindo assim calcular o valor da fração correspondente aos cromos dados aos colegas. Para saberem com quantos cromos ficou o menino este grupo faz uma simples subtração.

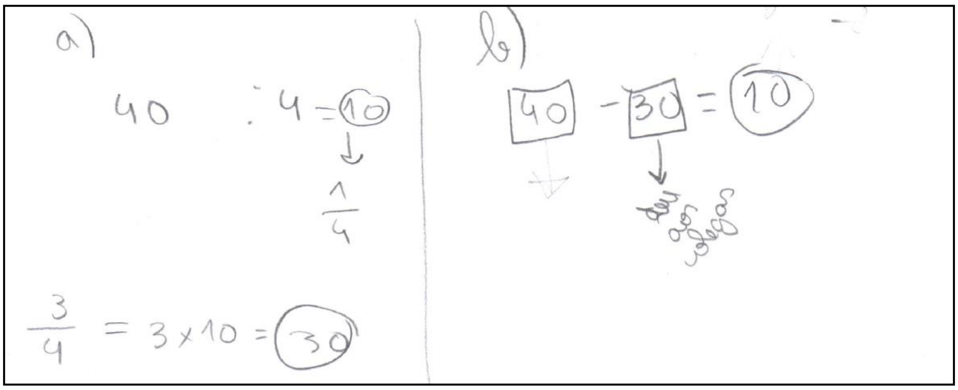
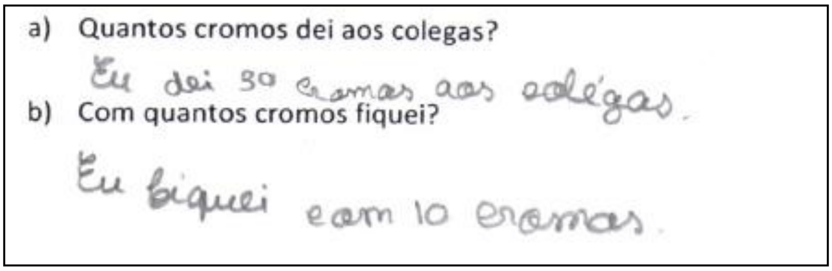


Figura 4.57. Resolução da tarefa 10 pelo grupo A

O grupo B resolve a situação recorrendo ao cálculo mental (ver Fig.4.58), acabando por justificar o seu raciocínio verbalmente e apenas dar por escrito a resposta às perguntas colocadas. Uma aluna diz logo que $\frac{3}{4}$ de 40 é 30 pois cada quarto é 10 e explica o seu pensamento à colega (ver Transcrição 4.25.) .


a) Quantos cromos dei aos colegas?

Eu dei 30 cromas aos colégas.

b) Com quantos cromos fiquei?

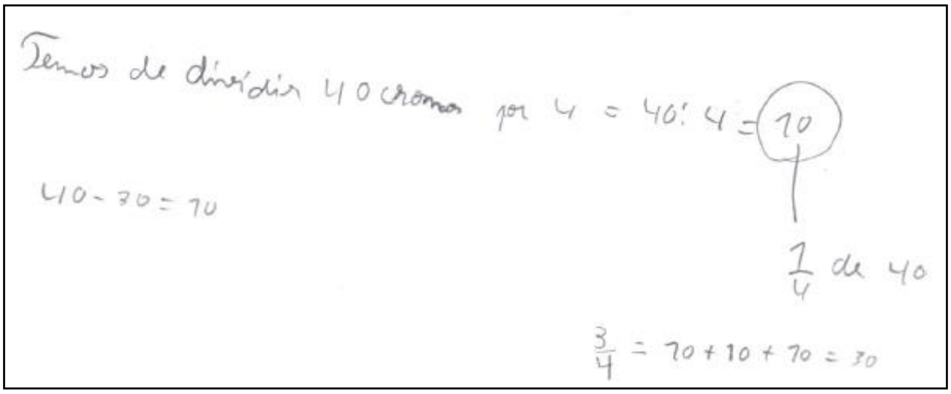
Eu fiquei com 10 cromas.

Figura 4.58. Resolução da tarefa 10 pelo grupo B

Álvaro: Fazer este problema com estes dados é fácil! [...] Se o 40 foi dividido em quartos, cada quarto é 10. Quantos cromos dei ao colega? Se dei $\frac{3}{4}$ foi 30 e sobrou-me o restante, que são 10.

Transcrição 4.25. Extrato de diálogo entre o par do grupo B relativamente à resolução da tarefa 10

O grupo C seguiu a linha de pensamento dos grupos A e B, desta vez não utilizou uma reta para dividir a unidade mas sim resolveu fazer a operação de imediato, utilizando para divisor o denominador da fração que aparecia no enunciado. Tal como o grupo A, após ter calculado o valor correspondente a $\frac{3}{4}$ recorrendo à soma de três $\frac{1}{4}$ ainda fez a subtração para saber qual a quantidade de cromos com que se ficou (ver Fig.4.59.).


Temos de dividir 40 cromos por 4 = 40 : 4 = 10

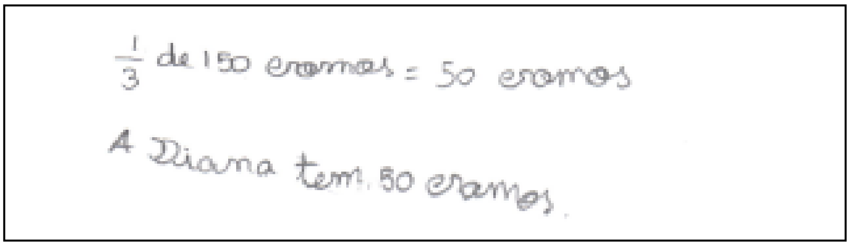
40 - 30 = 10

$\frac{1}{4}$ de 40

$\frac{3}{4}$ = 10 + 10 + 10 = 30

Figura 4.59. Resolução da tarefa 10 pelo grupo C

No problema 2, os alunos do grupo A baralharam 3 décimas com um terço. Pensa-se que os alunos terão cometido este erro por falta de atenção (ver Transcrição 4.26.), assim, quando viram um 3 foram induzidos a pensar que seria para dividir o 150 por 3 (ver Fig.4.60.).



$\frac{1}{3}$ de 150 cromos = 50 cromos

A Diana tem 50 cromos.

Figura 4.60. Resolução da tarefa 10 pelo grupo A

Angelina: A Diana tem 0,3 dos cromos do Marcelo. É só fazer o terço de 150.

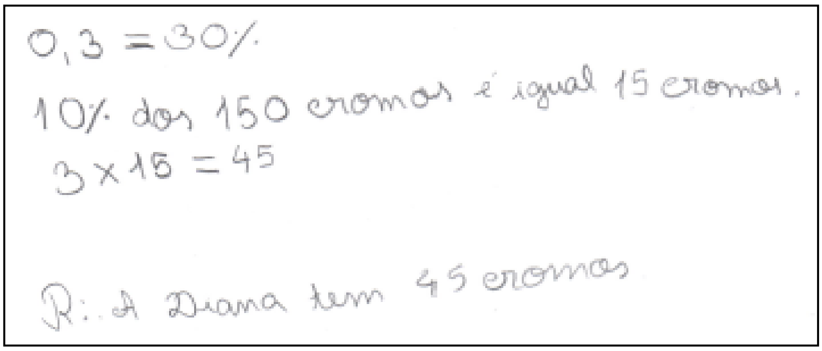
Alberto: Hummm, 150 a dividir por 3 é 50.

Angelina: $\frac{1}{3}$ de 150 cromos é igual a 50. A Diana tem 50 cromos

Transcrição 4.26. Extrato de diálogo entre o par do grupo A relativamente à resolução da tarefa 10

.

O grupo B fez a correspondência entre o número decimal e a percentagem, calculando assim 30% do total de cromos (ver Fig.4.51.). Para isso primeiro, como cálculo auxiliar, recorreu a 10% de 150, de seguida, já de uma forma completamente seguram calculou 30% de 150 (ver Transcrição 4.27.).



0,3 = 30%

10% dos 150 cromos é igual 15 cromos.

3 × 15 = 45

R: A Diana tem 45 cromos

Figura 4.61. Resolução da tarefa 10 pelo grupo B

Sofia: Como é que vamos saber 0,3 de 150...se fosse 0,5 era metade... assim...

Álvaro: Sofia, podemos resolver com os por cento, é igual!

Sofia: 150 é igual a 100%.

Álvaro: E 0,3 é 30%. Sabemos que 10% dos cromos é 150 a dividir por 10. 150 a dividir por 10 é 15 cromos.

Sofia: Então 10% dos cromos é igual a 15 cromos.

Álvaro: 30% é como nas fatias, é igual a 10% mais 10% mais 10%. Fica 3 vezes o 10% que é o 15. 3 vezes 15 dá 45.

Sofia: Ah, 30% é 45.

Transcrição 4.27. Extrato de diálogo entre o par do grupo B relativamente à resolução da tarefa 10

O grupo C continuou a trabalhar com a representação do número racional dada e, à semelhança da estratégia de cálculo do grupo B (ver Fig.4.62.), calculou primeiro 0,1 de 150 e depois multiplicou esse valor por 3 para conseguir descobrir quanto seria 0,3 de 150 (ver Transcrição 4.28.).

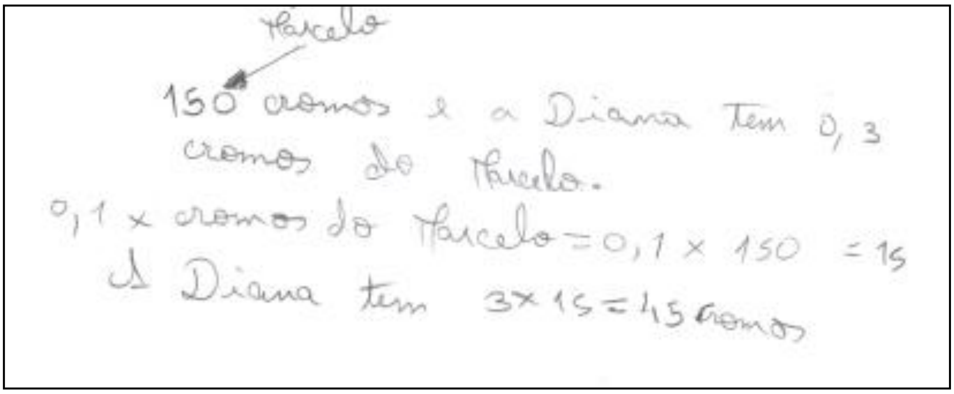

Marcelo
150 cromos e a Diana tem 0,3 cromos do Marcelo.
0,1 x cromos do Marcelo = 0,1 x 150 = 15
A Diana tem 3x15 = 45 cromos

Figura 4.62. Resolução da tarefa 10 pelo grupo C

Natália: O Marcelo tem 150 cromos e a Diana tem 3 décimas dos cromos dele. Uma décima de 100 é 10.

Ricardo: Sabemos que multiplicar por uma décima é igual a dividir por 10.

Natália: Boa Manel, 0,1 vezes 150 é só fazer 150 a dividir por 10. Vamos escrever. [fala enquanto acompanha a escrita] uma décima dos cromos do Marcelo é igual a uma décima de 150 que é igual a... [espera]

Ricardo: 150 a dividir por 10 é só tirar o último zero, 15. Agora é fazermos 3 vezes o 15 que vai dar igual ao 0,3.

Natália: 3 x 15 é igual a: 15 e 15, 30 mais 15, 45. A Diana tem 45 cromos.

Transcrição 4.28. Extracto de diálogo entre o par do grupo C relativamente à resolução da tarefa 10

4.3.1.7. Sessão 9 - significados parte-todo e operador

Na sessão 9, no dia 16 de Março, os alunos resolveram duas tarefas onde o número racional apresenta diferentes significados, significado parte-todo e significado operador.

Na tarefa no significado parte-todo (ver Fig.4.63.) os alunos tiveram contacto com uma história onde um Rei morre e deixou um testamento com as partilhas da sua fortuna pelos seus filhos.

Ao longo das questões relacionadas com este problema, os alunos demonstram ter compreendido as relações entre as partes e as partes e o todo, relacionando-as também operativamente na situação problemática envolvendo a representação fracionária, decimal e percentual.

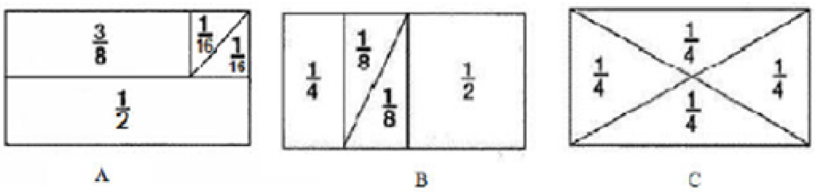
1. Há muitos anos viveu um Rei que deixou em testamento toda a sua fortuna aos seus quatro filhos. Segundo as leis da época a sua fortuna foi distribuída do seguinte modo:

- O filho mais velho recebeu 50% da fortuna;

- O filho mais novo recebeu 25% da fortuna;

- A restante fortuna foi dividida igualmente pelos restantes filhos.

1.1 Qual das seguintes representações (A, B ou C) corresponde à distribuição da fortuna pelos quatro filhos?



1.2 O valor da herança do filho mais velho foi de 4500 pesos reais. Quanto receberam, em pesos reais, os restantes filhos?

1.3 Se tu fosses o Rei como dividias a fortuna pelos quatro filhos? Justifica.

1.4 De acordo com a tua opção que percentagem da fortuna recebia cada filho? Quanto recebia cada um em pesos reais?

Figura 4.63. Tarefa 11 no significado parte-todo

De forma a descobrir qual a representação pictórica correspondente à distribuição da fortuna do rei seguindo as indicações dadas, o grupo A demonstrou que escolheu a figura B depois de ter relacionado a percentagem de cada porção de terreno com as frações dadas (Fig.4.64.), depois de ter estabelecido paralelismo da fração $\frac{1}{2}$ com 50% e da fração $\frac{1}{4}$ com 25%, os alunos calcularam a percentagem destas duas frações e subtraíram essa quantidade a 100%. Continuaram estes cálculos e mostraram quanto era $\frac{1}{8}$ em percentagem, calculando $\frac{1}{2}$ de 25.

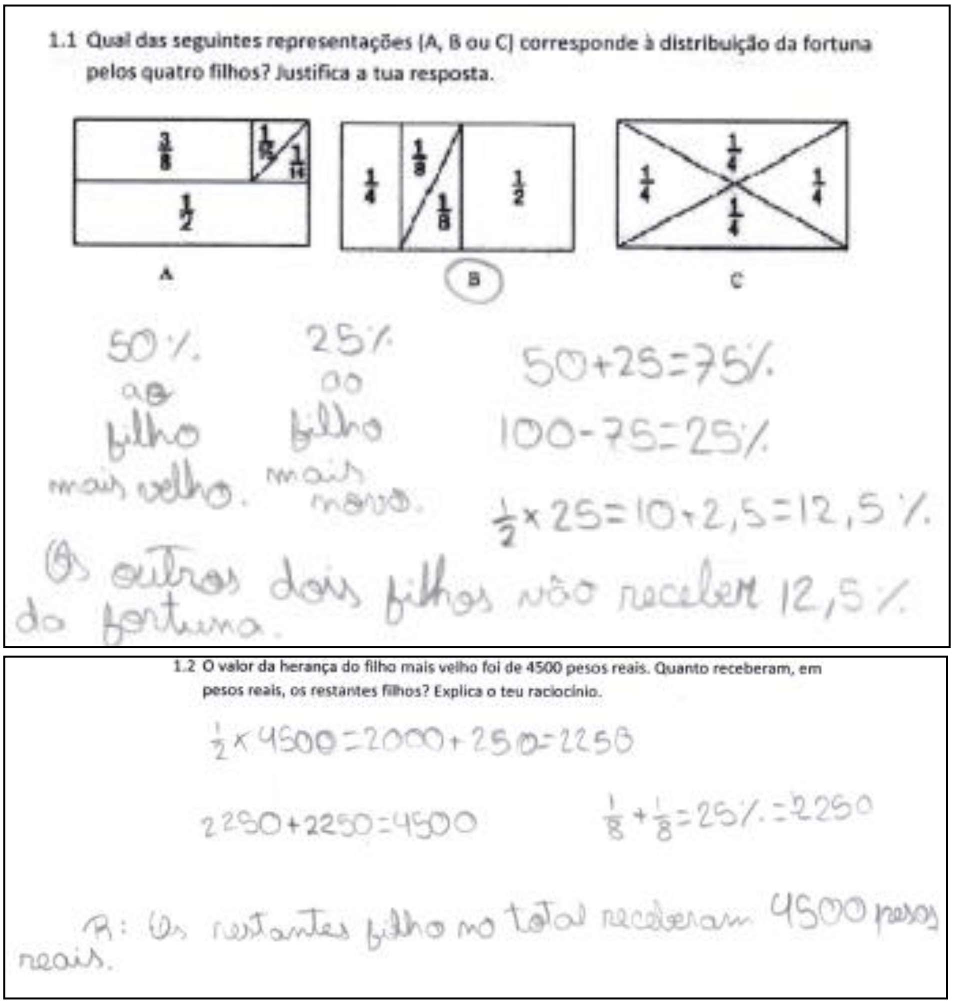


Figura 4.64. Resolução da tarefa 11 pelo grupo A

O grupo B identificou a unidade do terreno e dividiu-a recorrendo a cores para marcar as divisões (ver Fig.4.65.), conseguindo estabelecer relação entre a percentagem e as frações do terreno, tendo deixado para o fim a identificação da fração $\frac{1}{8}$ por ser a que se repete duas vezes, para ser dada aos dois irmãos.

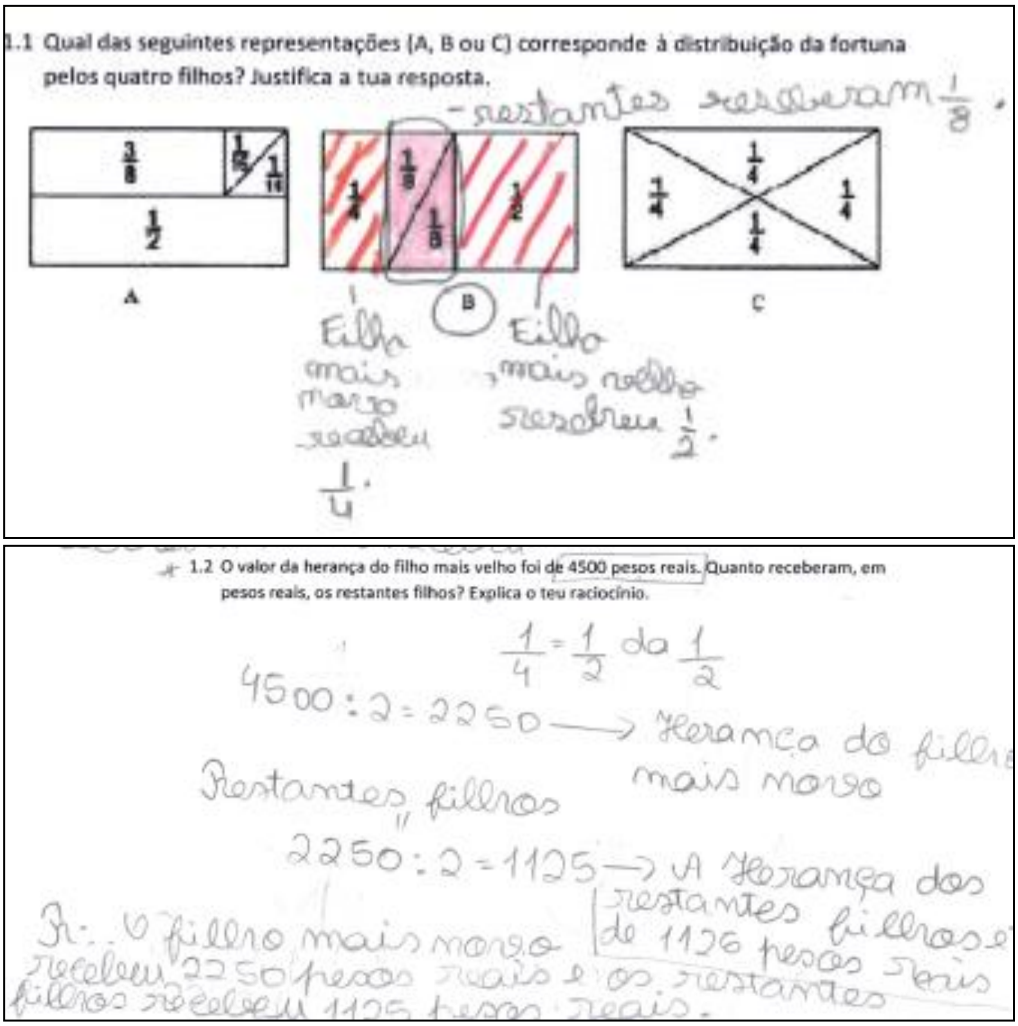
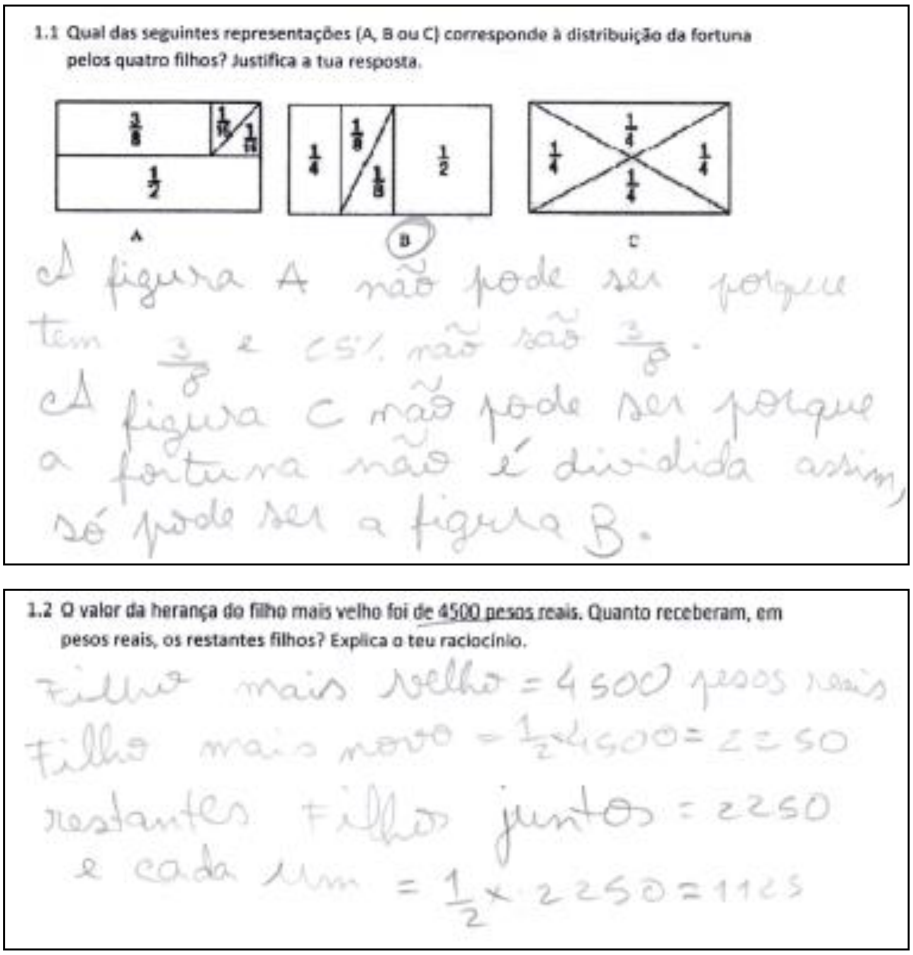


Figura 4.65. Resolução da tarefa 11 pelo grupo B

O Grupo C analisa os três terrenos e seleciona o B por exclusão de partes (ver Fig.4.66.). Demonstra que a figura A não pode ser uma vez que sabem que 25% não corresponde a $\frac{3}{8}$ da figura e excluem a figura C uma vez que sabem que o terreno não foi dividido em quatro partes iguais (ver transcrição 4.29.).



1.1 Qual das seguintes representações (A, B ou C) corresponde à distribuição da fortuna pelos quatro filhos? Justifica a tua resposta.

A: $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{2}$ — B: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$ — C: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$

A figura A não pode ser porque tem $\frac{3}{8}$ e 25% não são $\frac{3}{8}$.
A figura C não pode ser porque a fortuna não é dividida assim, só pode ser a figura B.

1.2 O valor da herança do filho mais velho foi de 4500 pesos reais. Quanto receberam, em pesos reais, os restantes filhos? Explica o teu raciocínio.

Filho mais velho = 4500 pesos reais
Filho mais novo = $\frac{1}{2}\times 4500 = 2250$
restantes filhos juntos = 2250
e cada um = $\frac{1}{2}\times 2250 = 1125$

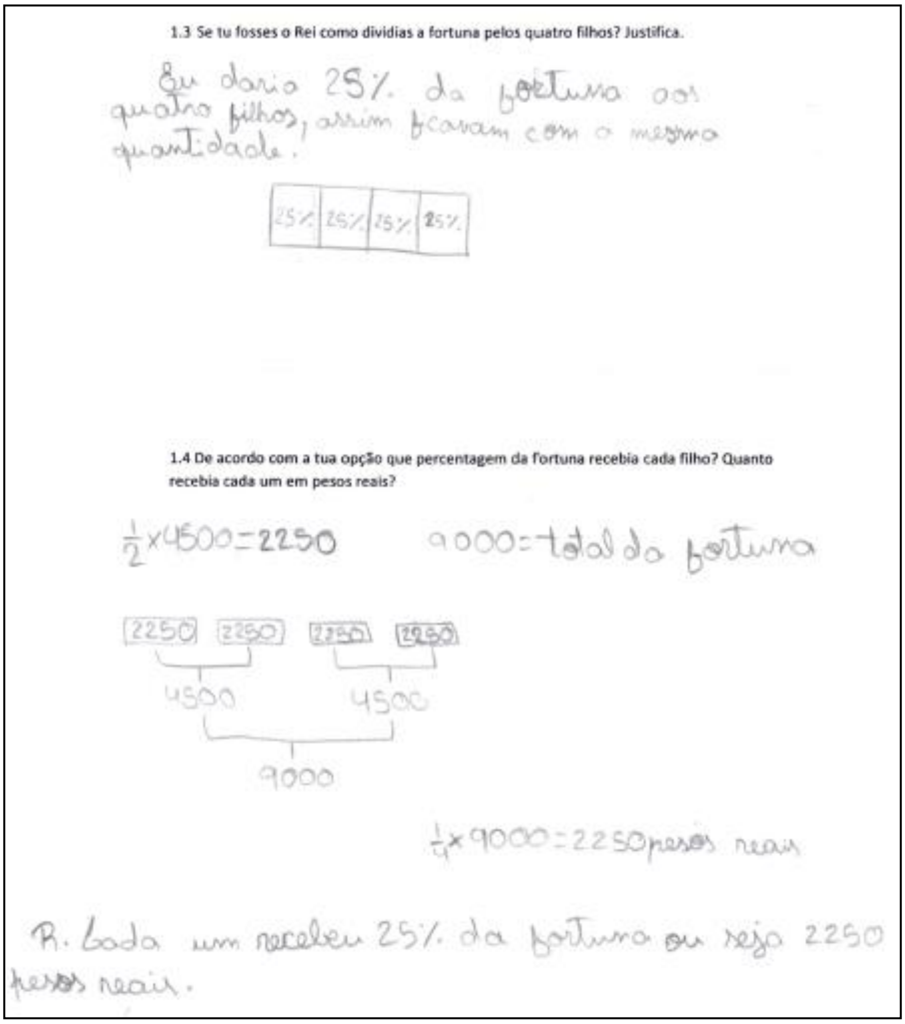
Figura 4.66. Resolução da tarefa 11 pelo grupo C

Natália: Olha, esta figura [aponta para a figura C] não pode ser pois está dividida em quatro partes iguais.

Ricardo: E os irmãos não receberam todos a mesma quantidade de terreno!

Transcrição 4.29. Extrato de diálogo entre o par do grupo C relativamente à resolução da tarefa 11

Todos os grupos resolveram as questões 3 e 4 da mesma forma (ver Fig.4.67.). Apropriaram-se de uma divisão justa e equitativa, dividindo a fortuna do rei por quatro, desta forma, cada filho iria receber 2250 pesos reais.



1.3 Se tu fosses o Rei como dividias a fortuna pelos quatro filhos? Justifica.

Eu daria 25% da fortuna aos quatro filhos, assim ficavam com a mesma quantidade.

25%	25%	25%	25%

1.4 De acordo com a tua opção que percentagem da fortuna recebia cada filho? Quanto recebia cada um em pesos reais?

$\frac{1}{2} \times 4500 = 2250$ 9000 = total da fortuna

$\underbrace{\underbrace{\boxed{2250}\ \boxed{2250}}_{4500}\ \underbrace{\boxed{2250}\ \boxed{2250}}_{4500}}_{9000}$

$\frac{1}{4} \times 9000 = 2250$ pesos reais

R. Cada um recebeu 25% da fortuna ou seja 2250 pesos reais.

Figura 4.67. Resolução da tarefa 11 pelo grupo A

A título de exemplo, pode-se ver que os alunos do grupo A optaram por representar as divisões feitas na fortuna por percentagem, utilizando o 25%, contudo, quando calcularam quanto recebia cada filho em pesos reais, os alunos recorreram à representação fracionária, partindo da metade de 9000 calcularam depois a $\frac{1}{2}$ de 4500. De forma a justificar os seus cálculos, apresentam um esquema onde se pode ver que 4 vezes 2250 é igual a 9000.

Na tarefa com significado operador, os alunos tinham um conjunto de três situações problemáticas para resolver.

Na primeira (ver Fig.4.68.), era pedido que descobrissem o número de tampas perdidas sabendo que havia 6 tampas e se perderam $\frac{2}{6}$. O facto do total de tampas ser 6 e a fração perdida estar representada em sextos fez com que os alunos nesta tarefa manifestassem um grande a vontade e domínio sobre o pedido.

1. O Manuel coleciona tampinhas de garrafas de água. Quando tinha 6 tampinhas perdeu dois sextos das tampas. Quantas tampinhas perdeu? Explica o teu raciocínio.

Figura 4.68. Tarefa 11 no significado operador

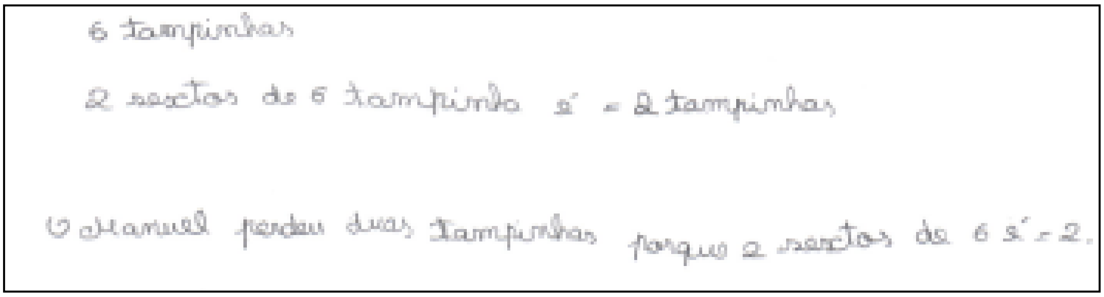
O grupo A recorre ao seu conhecimento de fração e apercebe-se que $\frac{2}{6}$ é equivalente a $\frac{1}{3}$, logo $\frac{1}{3}$ de 6 tampas é 2 tampas (ver Fig.4.69.).

6 Tampinhas $2/6 = \frac{1}{3}$

O Manuel perdeu 2 tampinhas.

Figura 4.69. Resolução da tarefa 12 pelo grupo A

Por sua vez o grupo B calcula de imediato quanto é $\frac{2}{6}$ de 6, considerando que 6 tampas é o todo, $\frac{2}{6}$ será 2 tampas (ver Fig.4.70.).


6 tampinhas

2 sextos de 6 tampinha é = 2 tampinhas

O Manuel perdeu duas tampinhas porque 2 sextos de 6 é = 2.

Figura 4.70. Resolução da tarefa 12 pelo grupo B

O grupo C ainda necessita de fazer um registo pictórico para descobrir quanto são $\frac{2}{6}$ de 6 (ver Fig.4.71.). Faz as divisões para ter $\frac{1}{6}$ de 6, que corresponde a uma tampa e depois riscou duas tampas, o correspondente a $\frac{2}{6}$.

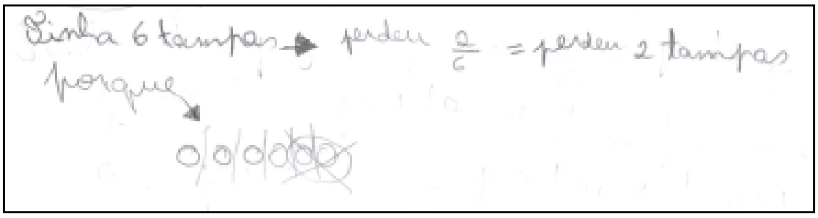


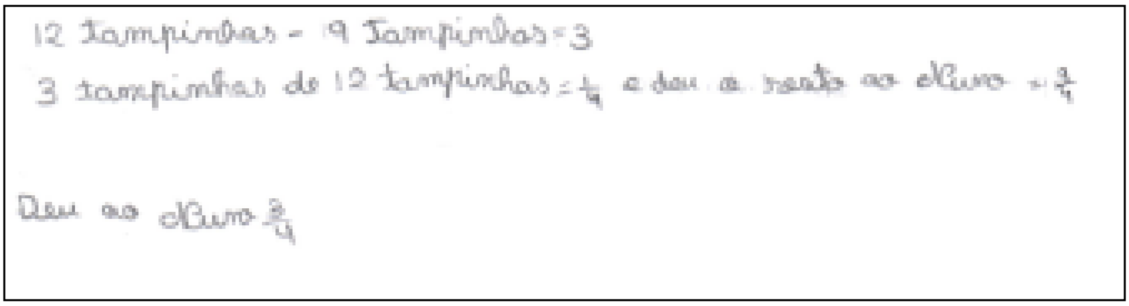
Figura 4.71. Resolução da tarefa 12 pelo grupo C

Na segunda tarefa, sabendo que o Ricardo tinha 12 tampas e deu 9 a um amigo, era pedido que os alunos calculassem a fração de tampas dada pelo Ricardo (ver Fig.4.72.).

2. O amigo do Manuel tinha 12 tampinhas e deu 9 ao Nuno. Que fração das suas 12 tampas deu ao Nuno? Explica o teu raciocínio.

Figura 4.72. Tarefa 12, pergunta 2

Tanto o grupo A como o grupo B subtraíram as 9 tampas ao total de tampas que havia. Os alunos rapidamente souberam que 3 era $\frac{1}{4}$ de 12 e que se o Nuno recebeu 9 tampas, então recebeu 3 vezes $\frac{1}{4}$, sendo a fração correspondente $\frac{3}{4}$ (ver Fig.4.73.).



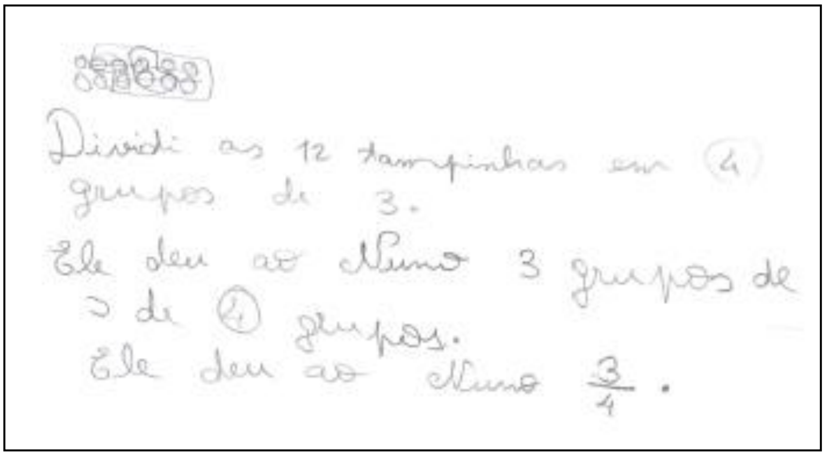
12 tampinhas - 9 tampinhas = 3

3 tampinhas de 12 tampinhas = $\frac{1}{4}$ e deu o resto ao Nuno = $\frac{3}{4}$

Deu ao Nuno $\frac{3}{4}$

Figura 4.73. Resolução da tarefa 12 pelo grupo B

Seguindo a linha de raciocínio do exercício anterior o grupo C recorre à representação pictórica do problema (ver Fig.4.74.), dividindo as 12 tampas em quatro grupos de 3 e posteriormente vendo que 9 tampas correspondem a três grupos de um total de quatro grupos de 3 tampas.



Dividi as 12 tampinhas em 4 grupos de 3.

Ele deu ao Nuno 3 grupos de 3 de 4 grupos.

Ele deu ao Nuno $\frac{3}{4}$.

Figura 4.74. Resolução da tarefa 12 pelo grupo C

Na terceira situação problemática (ver Fig.4.75.) os alunos tinham que calcular quanto eram as tampas do menino sabendo que 3 tampas correspondiam a $\frac{1}{4}$ do total das tampas.

3. O Nuno continuou a colecionar tampinhas de garrafas de água. Passado alguns dias, três tampinhas correspondiam a um quarto do número total de tampinhas da sua coleção. Quantas tampinhas já tinha o Nuno? Explica o teu raciocínio.

Figura 4.75. Tarefa 12, alínea 3

Mais uma vez, tanto o grupo A como o grupo B utilizaram a mesma estratégia, multiplicando 3 tampas por 4 (ver Fig.4.76.), demostrando que têm noção de que tendo informação de quanto é $\frac{1}{4}$conseguem facilmente calcular o total repetindo esse valor 4 vezes.

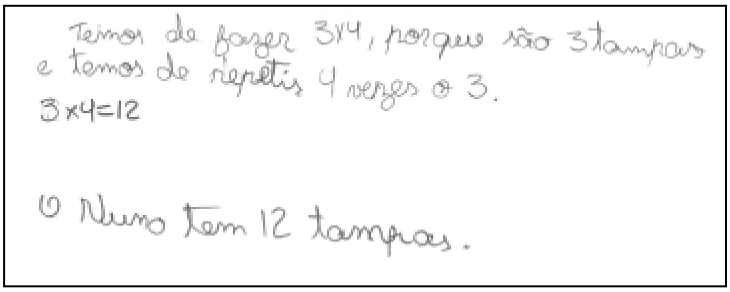


Figura 4.76. Resolução da tarefa 12 pelo grupo A

O grupo C recorre à representação pictórica e esquemática (ver Fig.4.77.) para conseguir calcular o número de tampas que corresponde à unidade, ou seja a $\frac{4}{4}$.

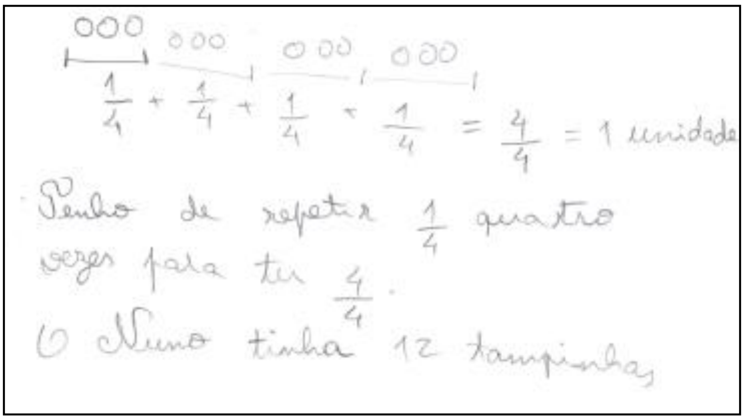


Figura 4.77. Resolução da tarefa 12 pelo grupo C

4.3.1.8. Sessão 10 significado medida

Na sessão 10 do dia 19 de Março, os alunos resolveram duas tarefas onde o número racional apresenta o significado de medida.

Foi proposto aos alunos que na primeira tarefa (ver Fig.4.78.) depois de observarem a figura dissessem quanto mede o segmento de reta C tendo como unidade de medida o segmento de reta A e utilizando como unidade de medida o segmento de reta A dissessem quanto mede o segmento de reta B.

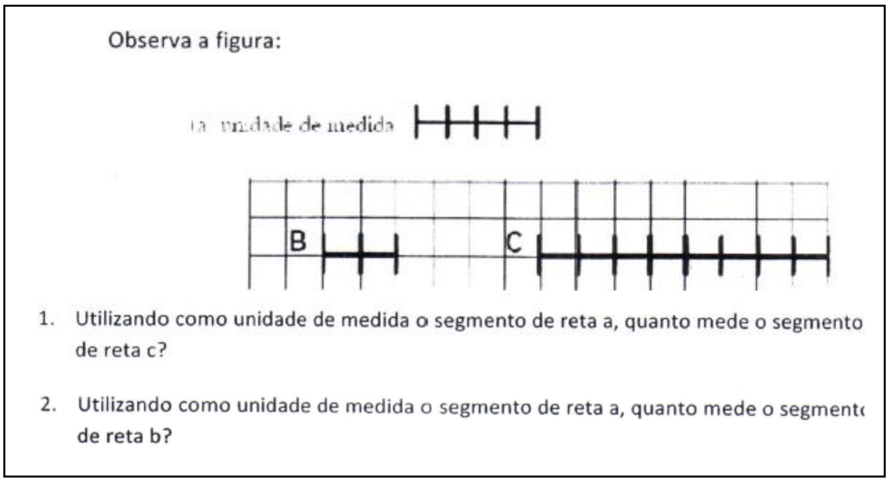


Figura 4.78. Tarefa 13 no significado medida

Todos os grupos responderam acertadamente ao que lhes foi pedido concretizando as suas respostas de uma forma muito uniforme. Como exemplo, o grupo A reconhece o segmento de reta A como unidade de medida e verifica que este cabe duas vezes no segmento de reta C, medindo assim o dobro da unidade de medida.

Em relação ao segmento de reta B, o grupo verifica que é metade da unidade de medida e representa esse valor recorrendo à representação decimal (ver Fig.4.79. e 4.80.).

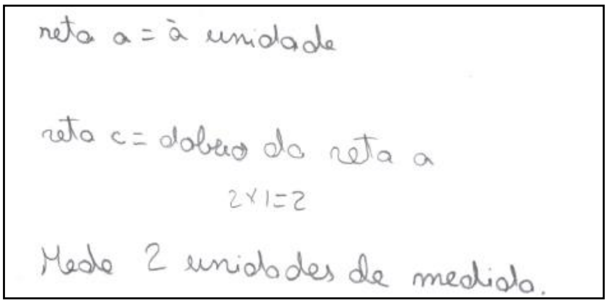


Figura 4.79. Resolução da tarefa 13, alínea 1, pelo grupo A

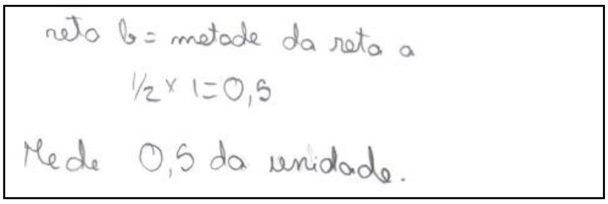


Figura 4.80. Resolução da tarefa 13, alínea 2, pelo grupo A

Na segunda tarefa os alunos tinham de observar o comprimento de 5 barras e responder a 4 perguntas, comparando-as (ver Fig.4.81.).

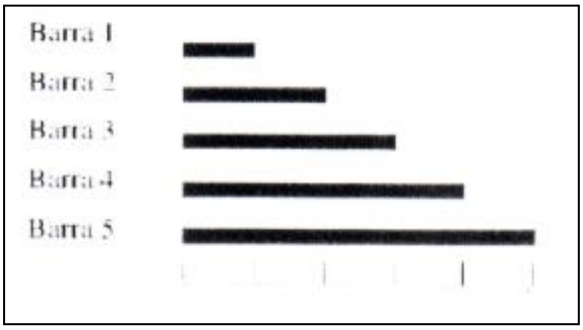
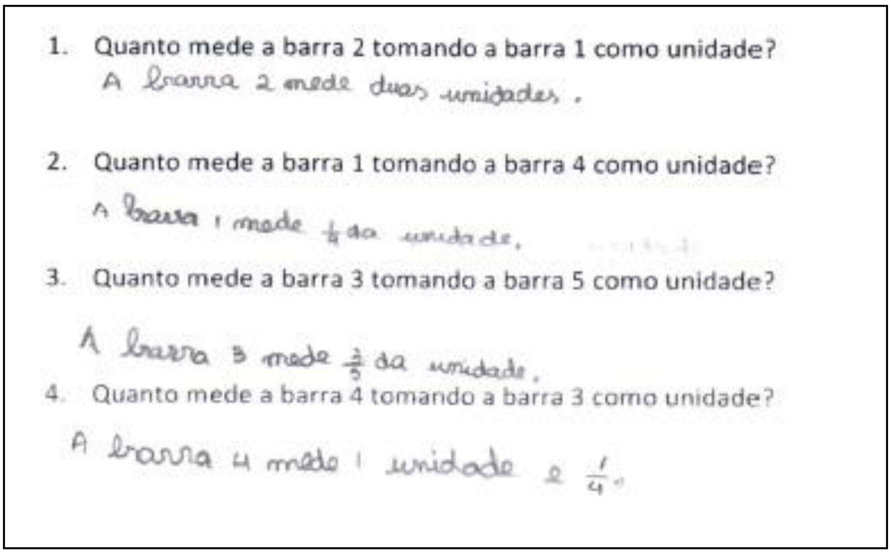


Figura 4.81. Tarefa 14 no significado medida

Todos os alunos responderam corretamente, à excepção do grupo B que, como se pode observar na figura 4.82., na última questão respondeu incorrectamente, dizendo que a barra 4 mede 1 unidade e $\frac{1}{4}$.



1. Quanto mede a barra 2 tomando a barra 1 como unidade?
A barra 2 mede duas unidades.
2. Quanto mede a barra 1 tomando a barra 4 como unidade?
A barra 1 mede $\frac{1}{4}$ da unidade.
3. Quanto mede a barra 3 tomando a barra 5 como unidade?
A barra 3 mede $\frac{3}{5}$ da unidade.
4. Quanto mede a barra 4 tomando a barra 3 como unidade?
A barra 4 mede 1 unidade e $\frac{1}{4}$.

Figura 4.82. Resolução da tarefa 14 pelo grupo B

Este erro poderá ter sido devido a uma leitura errada da barra, havendo uma confusão da unidade de medida considerada. Assim, desta forma, para descobrir qual era a fração correspondente à parte excedente da barra 4 em relação à barra 3, o grupo B tomou como unidade de medida a própria barra 4.

4.3.1.9. sessão 11 significados quociente

A 21 de março e depois de ser explorado o conceito de fração com significado medida, os alunos realizaram uma tarefa com significado quociente.

Nessa tarefa um grupo de amigos foi a uma festa de anos. Seis raparigas comeram quatro pizzas e três rapazes comeram uma pizza. As pizzas eram todas do mesmo tamanho. Foi questionado aos alunos quem comeu mais pizza, cada menino ou cada menina, sabendo que todos comiam fatias de igual tamanho, e por que razão.

O grupo A revela uma compreensão muito grande sobre frações equivalentes e de forma informal transforma $\frac{4}{6}$ em $\frac{2}{3}$ para lhes ser mais fácil (ver Transcrição 4.30.). Assim, compara a quantidade comida pelas meninas com a quantidade comida pelos meninos, ou seja, compara $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{3}$ (ver Fig.4.83.).

Alberto:	6 meninas comem $\frac{2}{3}$porque podemos dividir as tartes em três e é mais fácil para comparar com os rapazes.
Angelina:	Também podemos dizer que os rapazes comeram $\frac{2}{6}$ em vez de $\frac{1}{3}$, é a mesma quantidade, só que dividimos a pizza em 6 partes iguais.
Alberto:	Então, se as meninas comem $\frac{2}{3}$ e os meninos comem $\frac{1}{3}$ as meninas é que comem mais pizza.

Transcrição 4.30. Extrato de diálogo entre o par do grupo A relativamente à resolução da tarefa 15

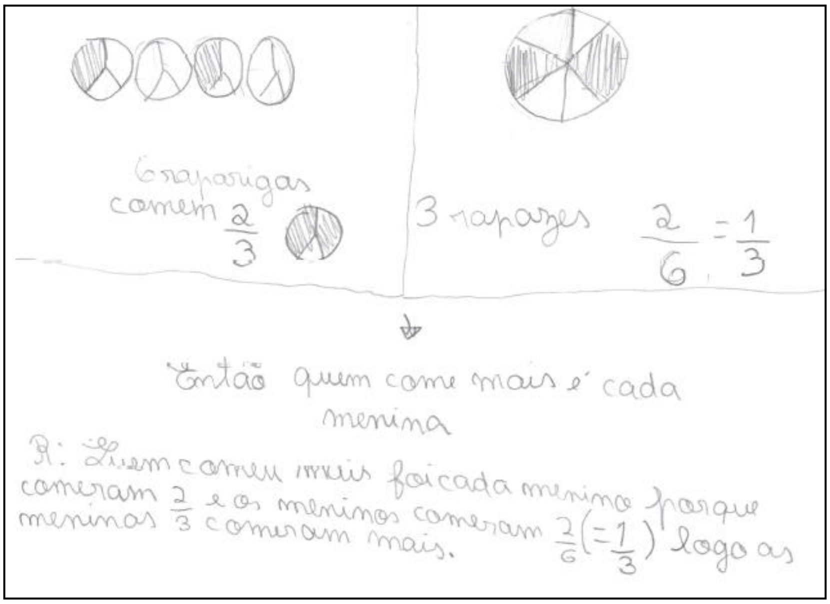


Figura 4.83. Resolução da tarefa 15 pelo grupo A

No grupo B assiste-se aos alunos recorrerem à quantidade que sobra das pizzas para comparar a quantidade comida por cada um. Os alunos apercebem-se que as raparigas comem $\frac{4}{6}$ e que este valor é maior do que a metade da pizza ($\frac{3}{6}$). Como os rapazes comem $\frac{1}{3}$ de pizza então os alunos comparam os dois valores tendo como referencial a metade da pizza. O Álvaro, depois da discussão com a colega e depois do registo por desenhos do que falaram (ver Fig.4.84.),apercebe-se que $\frac{4}{6}$ é equivalente a $\frac{2}{3}$ e que $\frac{2}{3}$ é mais $\frac{1}{3}$ do que a quantidade comida pelos rapazes (ver Transcrição 4.31.).

Álvaro:	Vamos fazer o registo, seis raparigas, 4 pizzas, 3 rapazes e uma pizza.
Sofia:	Posso dividir cada pizza em 6 fatias para dar uma a cada menina.
Álvaro:	E podes fazer o mesmo para os meninos, vai dar $\frac{1}{3}$ para cada um.
Sofia:	Sim, e cada menina come $\frac{4}{6}$.
Álvaro:	Claro, 4 pizzas para as 6 e uma para os 3. Vamos ver quem comeu mais. Temos $\frac{4}{6}$ e $\frac{1}{3}$.

Sofia: Nas pizzas ... $\frac{4}{6}$ passa a metade da pizza e $\frac{1}{3}$ é menos que metade. As raparigas comem mais.

Álvaro: Pois é! Cada rapariga come mais do que $\frac{1}{3}$ porque come o mesmo que $\frac{2}{3}$ se as divisões fossem em três partes e não em seis. E $\frac{2}{3}$ é mais $\frac{1}{3}$ do que $\frac{1}{3}$ que é o que cada rapaz comeu.

Transcrição 4.31. Extrato de diálogo entre o par do grupo B relativamente à resolução da tarefa 15

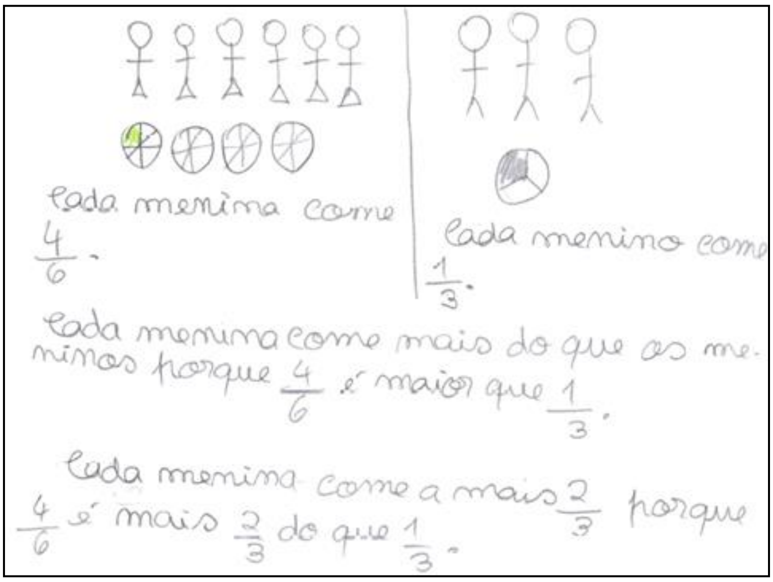


Figura 4.84. Resolução da tarefa 15 pelo grupo B

No grupo C, os alunos reconhecem o valor do numerador e do denominador com facilidade (ver Transcrição 4.32.) contudo optam por comparar a quantidade de pizza que sobra em cada situação (ver Fig.4.85.).

Natália: Havia 4 pizzas para 6 raparigas por isso é preciso dividir as 4 (pizzas) pelas 6 (meninas) que é $\frac{4}{6}$. Os rapazes eram três e comeram quatro pizzas.

Ricardo: Eles são menos que elas mas as pizzas também são menos. Se comessem todos a mesma quantidade tinha de haver mais uma pizza para os meninos para ser igual.

Natália: Cada rapaz come $\frac{1}{3}$, se comessem o mesmo (que elas) tinham de comer $\frac{2}{3}$.

Quem comeu mais foi cada rapariga. Sobra-lhes menos quantidade de pizza.

Transcrição 4.32. Extrato de diálogo entre o par do grupo B relativamente à resolução da tarefa 15

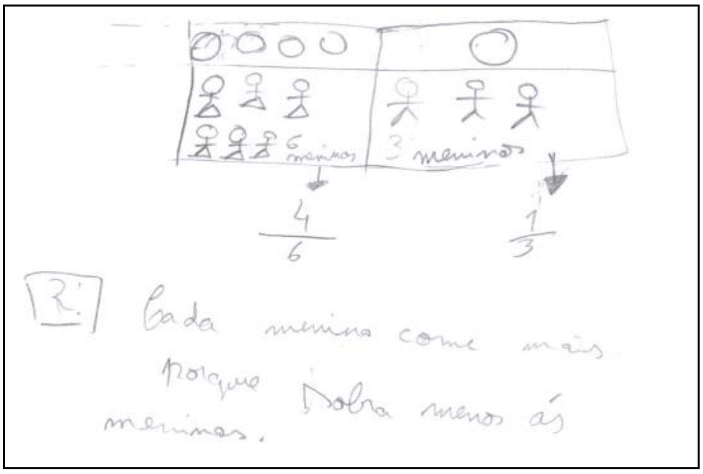
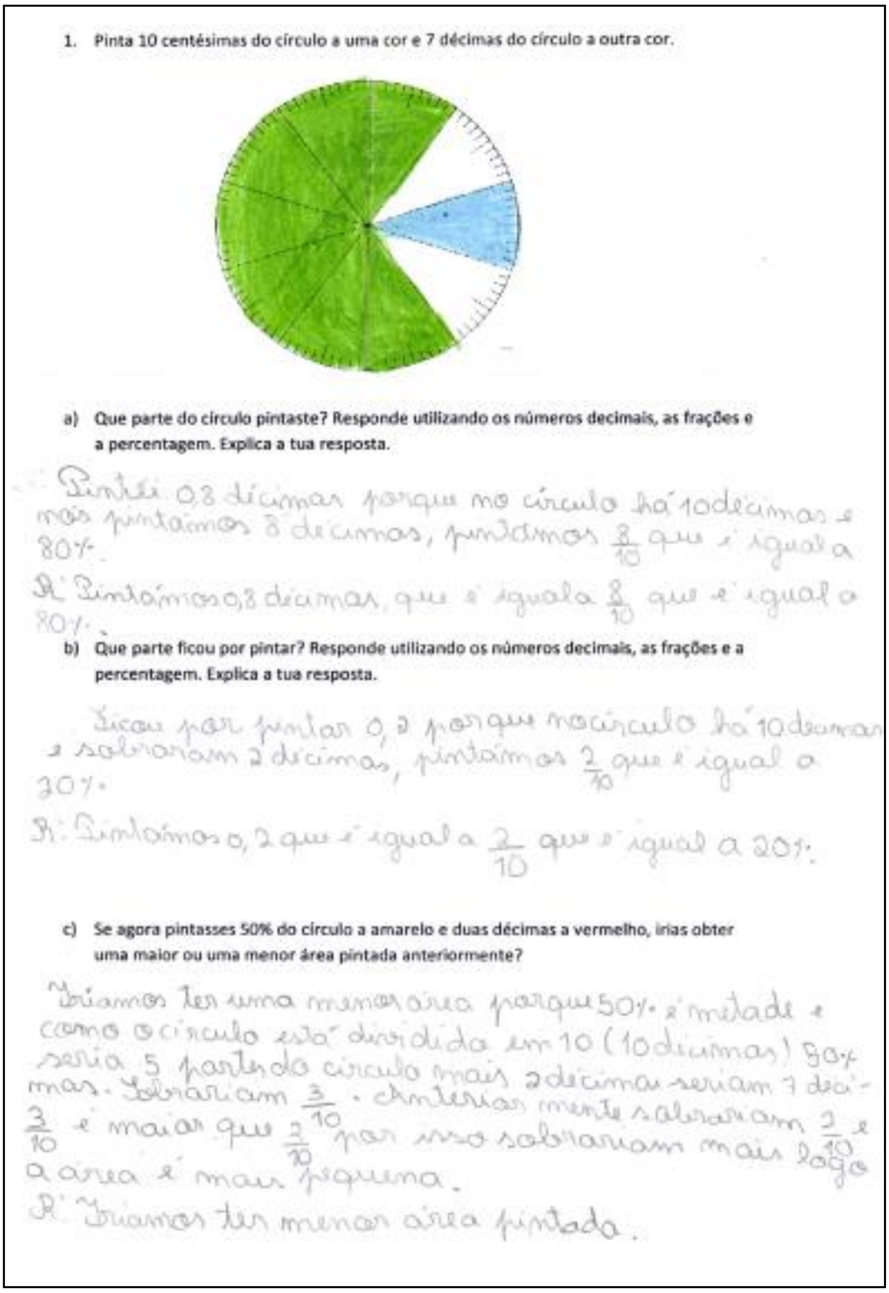


Figura 4.85. Resolução da tarefa 15 pelo grupo C

4.3.1.10. sessão 12 significados parte-todo e medida

No dia 23 de Março, na tarefa no significado parte-todo foi pedido aos alunos que respondessem a um conjunto de 3 perguntas em relação a um modelo circular. Todos os grupos responderam de acordo com o esperado, conseguindo fazer o paralelismo da quantidade pintada ou por pintar em fração, decimal e percentagem.

O grupo A, demonstrando um domínio consciente do seu trabalho, apresentou as suas respostas de uma forma muito completa e narrativa (ver Fig.4.86), explanando os seus argumentos para as respostas dadas.


1. Pinta 10 centésimas do círculo a uma cor e 7 décimas do círculo a outra cor.

a) Que parte do círculo pintaste? Responde utilizando os números decimais, as frações e a percentagem. Explica a tua resposta.

Pintei 0,8 décimas porque no círculo há 10 décimas e nós pintamos 8 décimas, pintamos $\frac{8}{10}$ que é igual a 80%.
R: Pintámos 0,8 décimas, que é igual a $\frac{8}{10}$ que é igual a 80%.

b) Que parte ficou por pintar? Responde utilizando os números decimais, as frações e a percentagem. Explica a tua resposta.

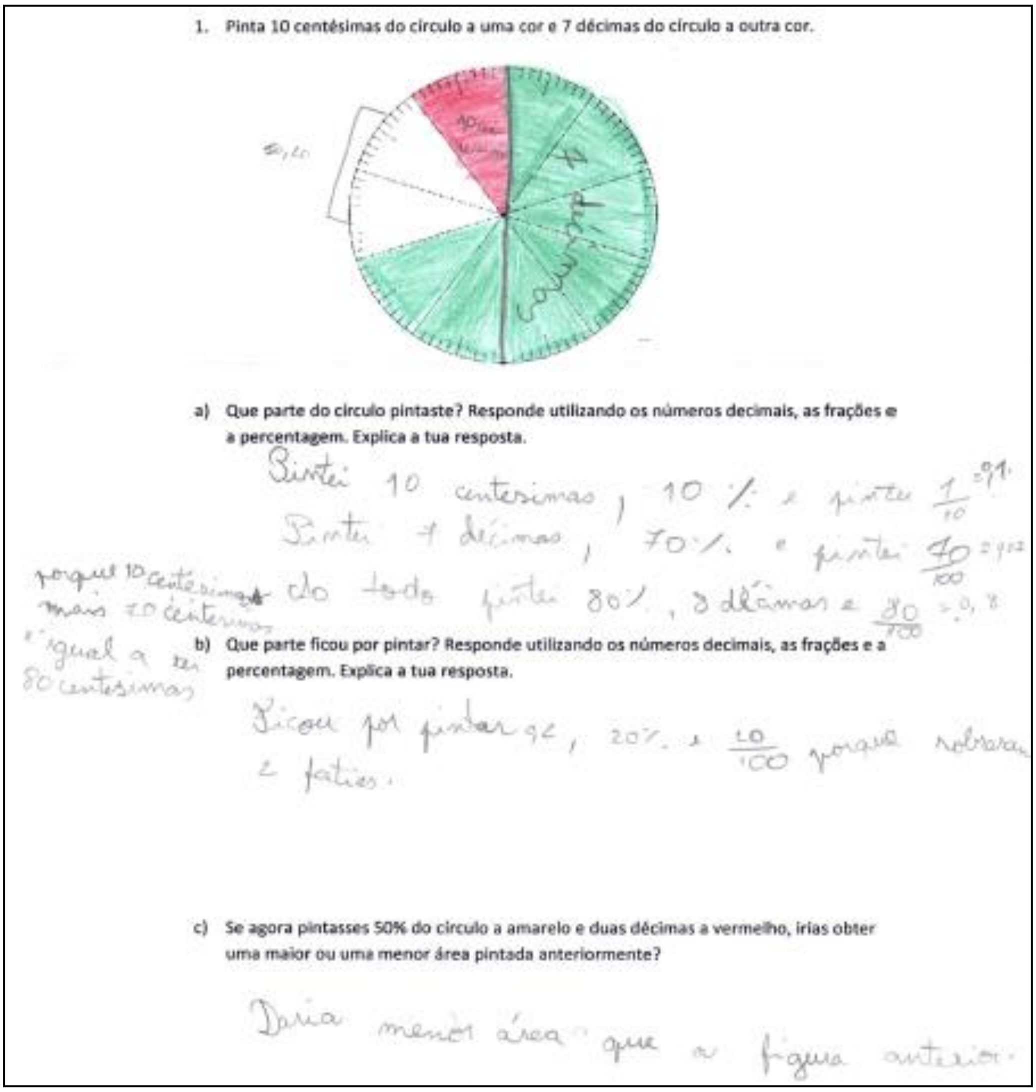
Ficou por pintar 0,2 porque no círculo há 10 décimas e sobraram 2 décimas, pintámos $\frac{2}{10}$ que é igual a 20%.
R: Pintámos 0,2 que é igual a $\frac{2}{10}$ que é igual a 20%.

c) Se agora pintasses 50% do círculo a amarelo e duas décimas a vermelho, irias obter uma maior ou uma menor área pintada anteriormente?

Iríamos ter uma menor área porque 50% é metade e como o círculo está dividido em 10 (10 décimas) 50% seria 5 partes do círculo mais 2 décimas seriam 7 décimas. Sobrariam $\frac{3}{10}$. Anteriormente sobraram $\frac{2}{10}$ e $\frac{3}{10}$ é maior que $\frac{2}{10}$ por isso sobrariam mais logo a área é mais pequena.
R: Iríamos ter menor área pintada.

Figura 4.86. Resolução da tarefa 16 pelo grupo A

O grupo C resolve igualmente a tarefa, contudo é muito mais contido e linear no seu raciocínio (ver Fig.4.87.), respondendo, por exemplo $\frac{80}{100}$, tendo alguma dificuldade em passar o mesmo valor para décimas.


1. Pinta 10 centésimas do círculo a uma cor e 7 décimas do círculo a outra cor.

a) Que parte do círculo pintaste? Responde utilizando os números decimais, as frações e a percentagem. Explica a tua resposta.

Pintei 10 centesimas, 10 % e pintei $\frac{1}{10}$ =0,1

Pintei 7 décimas, 70 % e pintei $\frac{70}{100}$ =0,70

do todo pintei 80 %, 8 décimas e $\frac{80}{100}$ =0,8

porque 10 centesimas mais 70 centesimas é igual a ter 80 centesimas

b) Que parte ficou por pintar? Responde utilizando os números decimais, as frações e a percentagem. Explica a tua resposta.

Ficou por pintar 0,2, 20% e $\frac{10}{100}$ porque sobraram 2 fatias.

c) Se agora pintasses 50% do circulo a amarelo e duas décimas a vermelho, irias obter uma maior ou uma menor área pintada anteriormente?

Daria menor área que a figura anterior.

Figura 4.87. Resolução da tarefa 16 pelo grupo C

A tarefa com significado medida consistia em verificar como é que os alunos conseguiam utilizar pacotes de 1 kg, $\frac{1}{2}$ kg e $\frac{1}{4}$ kg para ter no final 2kg e $\frac{1}{4}$ de café (ver Fig.4.88.).

Tenho de comprar 2 quilograma e $\frac{1}{4}$ de café. No supermercado há pacotes de $\frac{1}{2}$kg, $\frac{1}{4}$ kg e 1 kg.

a) Que pacotes devo levar? Quais as possibilidades?

b) Quais escolho para levar a menor quantidade de pacotes?

Figura 4.88. Tarefa 16 no significado medida

O grupo A optou por construir uma tabela (ver Fig.4.89.) onde registasse todas as hipóteses possíveis. Assim, de uma forma muito intuitiva, o grupo operou com as quantidades dadas de café, conseguindo adicionar meios quilograma e quartos de quilograma.

a)

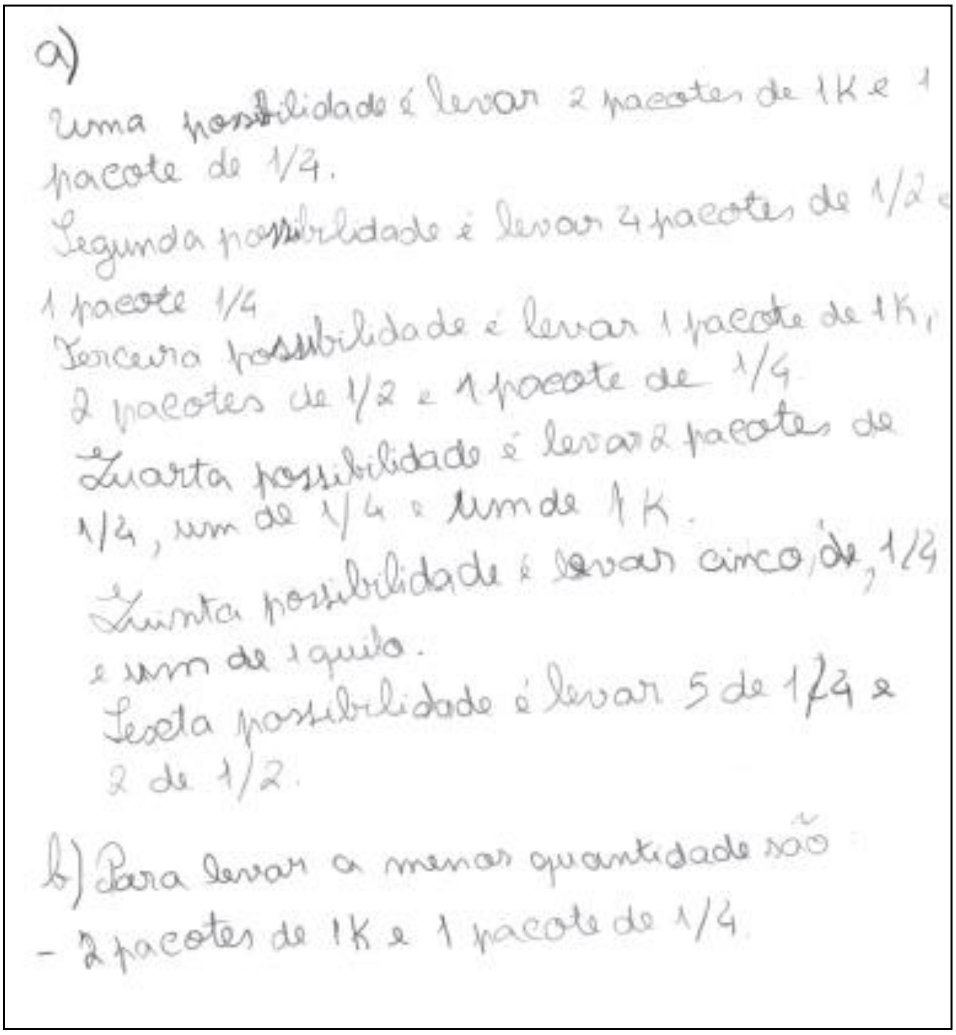
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	Total	Nº Pacotes
2	0	1	2 kg + $\frac{1}{4}$	3
1	2	1	2 kg + $\frac{1}{4}$	4
1	1	3	2 kg + $\frac{1}{4}$	5
1	0	5	2 kg + $\frac{1}{4}$	6
0	4	1	2 kg + $\frac{1}{4}$	5
0	3	3	2 kg + $\frac{1}{4}$	6
0	2	5	2 kg + $\frac{1}{4}$	7
0	1	7	2 kg + $\frac{1}{4}$	8
0	0	9	2 kg + $\frac{1}{4}$	9

b)

Para levar menos pacotes tenho de 3 pacotes.

Figura 4.89. Resolução da tarefa 16 pelo grupo A

Tanto o grupo B como o grupo C registaram algumas possibilidades de forma aleatória. A título de exemplo, o grupo C (ver Fig.4.90.) começou pela combinação mais simples, passando depois por utilizar pacotes de $\frac{1}{2}$ kg, e, sem grande organização, descobriram seis possibilidades.


a)
Uma possibilidade é levar 2 pacotes de 1K e 1 pacote de 1/4.
Segunda possibilidade é levar 4 pacotes de 1/2 e 1 pacote 1/4
Terceira possibilidade é levar 1 pacote de 1K, 2 pacotes de 1/2 e 1 pacote de 1/4
Quarta possibilidade é levar 2 pacotes de 1/4, um de 1/4 e um de 1K.
Quinta possibilidade é levar cinco de 1/4 e um de 1 quilo.
Sexta possibilidade é levar 5 de 1/4 e 2 de 1/2.

b) Para levar a menor quantidade são
- 2 pacotes de 1K e 1 pacote de 1/4

Figura 4.90. Resolução da tarefa 16 pelo grupo C

4.2.2. Algumas reflexões

Os alunos foram bem-sucedidos conseguindo responder acertadamente na maioria das questões, porém as estratégias encontradas e as interações são diferentes e alvo de análise.

Significado quociente

Na trajetória de aprendizagem com tarefas no significado quociente, o grupo A revela um raciocínio proporcional e reconhece a correspondência da representação do número racional como fração e como percentagem, mesmo quando esta representação como percentagem não é pedida.

No grupo B, verifica-se que ao longo das tarefas, as alunas divergem nos seus argumentos e na concretização da resolução dos problemas. Um dos alunos necessita sempre de levar a cabo a divisão e distribuição das tartes pelos meninos, percebendo assim que existe uma relação inversa entre numerador e denominador, sendo que para melhor concretizar essa divisão, o aluno recorre a cores nos seus esquemas. Por sua vez, o outro aluno do grupo não precisa de levar a cabo a divisão das tartes, operando apenas simbolicamente. É este último aluno o motor das resoluções das tarefas, trazendo para a discussão momentos importantes de reflexão sobre a comparação e equivalência de frações, promovendo a construção de conhecimento.

No final da cadeia de tarefas com significado quociente, o grupo C mostra que, sem dificuldades, consegue determinar corretamente a fração correspondente a cada recipiente e consegue relacioná-las, comparando-as e ordenando-as corretamente. Recorrentemente, os alunos do grupo C, justificam as respostas levando a cabo a divisão dos itens a dividir reduzindo o significado quociente ao significado parte-todo, uma vez que apenas identificam a parte da piza comida em relação ao total e não relacionam o número de itens com o número de recipientes.

Ao longo das atividades, denotou-se que quase todos os alunos recorreram à estratégia de, através de tabelas ou desenhos, colocar tartes em cima e meninos em baixo, com exceção dos alunos do grupo B na tarefa seis e de um aluno do grupo A nas tarefas cinco e seis, onde se verificou o contrário. A estratégia de colocar tartes em cima e meninos em baixo indiciam a correspondência da representação simbólica das frações: número de tartes como numerador e número de meninos como denominador da fração, revelando compreensão na resolução das tarefas e apropriação do conceito de fração.

Ao longo das tarefas, os alunos conseguem encontrar as principais relações existentes entre as frações. Contudo, exprimem essas relações em linguagem verbal e mostram dificuldades em representá-las utilizando a linguagem matemática. Ao longo deste percurso, os alunos não ficam apenas pela representação pictórica da situação, todos avançam com a representação simbólica da fração baseada nessa mesma representação. Em todas as tarefas propostas, os alunos manifestaram à vontade na resolução das mesmas, conseguindo de uma forma intuitiva resolver as questões colocadas e chegar à resposta correta das mesmas. Todos os alunos operam intuitivamente com as fração, sendo capazes de as adicionar quando estas têm o mesmo denominador, e ainda há alguns alunos capazes de adicionar frações com denominadores distintos desde que possam substituir uma das frações por outra que lhe equivalente e de igual denominador à fração a adicionar, utilizando sempre a representação sob a forma de fração.

Significado parte-todo

Em relação às tarefas com significado parte-todo, o grupo A resolveu-as com facilidade, mostrando-se muito à vontade com as diferentes representações de número racional. Desde cedo, não constituiu dificuldade para este grupo trabalhar com números racionais representados sob a forma de dízima, nem compará-los. O grupo conseguiu explicar o seu raciocínio acabando por, muitas vezes, operar de forma intuitiva com as frações para justificar as suas respostas.

Desde o início da trajetória que estes alunos conseguem usar, com sucesso, a equivalência de fração e operar com a representação do número racional em percentagem, sem estes conteúdos terem sido previamente trabalhados formalmente. No final da trajetória, os alunos apresentam facilidade em relacionar o número racional apresentado sobre a forma de percentagem com o número racional apresentado como uma fração, usando as traduções como $\frac{1}{2}$ = 50% e $\frac{1}{4}$ = 25% como referência. Demonstram também ter facilidade em relacionar estas duas representações com a representação decimal.

Ao longo das tarefas com significado parte-todo, o grupo A demonstrou um domínio consciente do seu trabalho, apresentando as suas respostas de uma forma muito completa e narrativa, argumentando na justificação das mesmas. Na fase inicial das tarefas com este significado, o grupo B revelou à vontade na sua resolução. As alunas compreenderam a relação entre a unidade, a décima e a centésima, e conseguiram operar, de uma forma informal com as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. Denota-se neste grupo o frequente recurso à representação pictórica e ao uso da cor para orientação do raciocínio. No final da trajetória estabelecem, com facilidade, relações entre a percentagem, a fração e o número decimal.

O grupo C acompanhou todo o desenvolvimento das tarefas no significado parte-todo, contudo, teve pequenos erros por falta de domínio de terminologia, acabando por confundir na representação do número decimal, as décimas com as centésimas. Estes alunos tiveram dificuldade na construção da unidade sabendo a décima parte, construindo uma tabela 10x10, como se o pequeno quadrado valesse 1%. Foram capazes de, junto da professora, desconstruir esta confusão e no fim conseguiram fazer uma figura em que o quadrado inicial valesse 10%, como era desejado.

Ao longo da trajetória, o grupo C resolve todas as tarefas com significado parte-todo, contudo é mais contido e linear no seu raciocínio do que os outros dois grupos em estudo. Estes alunos revelam ter mais dificuldades na correspondência das diferentes representações do número racional, tendo mesmo alguma dificuldade em converter centésimas em décimas.

No final das tarefas neste significado, todos os alunos demonstram ter compreendido as relações entre as partes e as partes e o todo. Os alunos do grupo A e do grupo B relacionam-nas, operando sobre elas e envolvendo as representações fracionária, decimal e percentual. Os alunos do grupo C revelaram mais fragilidades quando foi necessário envolver diferentes tipos de representação em simultâneo.

Significado operador

Ao longo das tarefas no significado operador, o grupo A frequentemente dividiu o número total dado pelo número que se encontrava no denominador da fração a trabalhar. Os alunos demonstraram destreza no trabalho com fração de referência, como o $\frac{2}{3}$, sabendo, com facilidade, que o quociente corresponde à fração pedida em relação ao total dado. Estes alunos demonstraram que se sentem confortáveis na resolução de problemas com os números racionais, calculando com rapidez $\frac{1}{3}$ de 30 e $\frac{1}{4}$ de 20. Numa das tarefas, este grupo confundiu três décimas com um terço. Os alunos poderão ter cometido este erro por falta de atenção, pois quando viram um 3 precipitadamente associaram-no ao denominador de $\frac{1}{3}$, e desta forma dividiram o total por 3.

O grupo A descobre informalmente fração equivalentes, constatando por exemplo que $\frac{2}{6}$ é equivalente a $\frac{1}{3}$. Em relação ao grupo B, aquando da resolução das tarefas no significado operador, os alunos recorreram à divisão, concretizando-a. Ao longo das tarefas, os alunos conseguem realizar operações com fração, calculando por exemplo $\frac{1}{4}$ + $\frac{3}{4}$. Uma das alunas confundiu, na primeira tarefa, 0,50 com 0,50€. Esta confusão foi impeditiva da boa resolução da tarefa. Contudo, a outra aluna do mesmo grupo resolveu este problema recorrendo à representação simbólica da representação oral de "metade".

No final das tarefas com significado operador, o grupo B resolve os problemas recorrendo ao cálculo mental, acabando por justificar o seu raciocínio oralmente, escrevendo apenas a resposta às perguntas colocadas, por exemplo, um aluno diz que $\frac{3}{4}$ de 40 é 30, pois cada quarto é 10. Uma das alunas deste grupo fez um percurso mais estruturado ao longo das tarefas, conseguindo entender as situações problemáticas, resolvendo-as e explicando o seu procedimento ao seu par. O grupo foi capaz de fazer correspondência entre o número decimal e a percentagem, sempre que necessário.

O grupo C demostrou, ao longo da resolução das tarefas, que se sente mais à vontade em trabalhar com o número racional sobre a forma de fração do que com a percentagem. Os alunos tomam o 50% como referência para ter noção do quanto é 25% e associam este último a metade da metade, fazendo assim o paralelismo com $\mathbf{\frac{1}{4}}$. Tal como os outros dois grupos, optou por em algumas tarefas deste significado dividir o número correspondente ao número total dado pelo denominador da fração.

Numa resolução, a meio da trajetória, estes alunos do grupo C recorrem à reta numérica para registar a informação que retiram do problema e utilizam-na como auxílio na resolução do mesmo. Desta forma, os alunos dividem a reta numérica marcando 4 traços e marcam no quarto traço a fração $\frac{3}{4}$ e o seu valor correspondente. Posteriormente, nas últimas tarefas com este significado, o grupo C não utilizou uma reta para dividir a unidade, mas sim resolveu fazer a divisão, utilizando para divisor o denominador da fração que aparecia no enunciado, tal como aconteceu com os outros dois grupos.

Os grupos A, B e C foram consistentes nas suas resoluções e recorreram à divisão da quantidade dada pelo número indicado no denominador da fração. Quando o valor não foi dado sobre a forma de fração, os alunos do grupo A e do grupo B optaram por representar a percentagem ou o número decimal em fração, para assim operarem com um registo que lhes era mais familiar, como por exemplo converter 25% em fração. O grupo C, por norma, trabalhou com a representação do número racional dada, necessitando de fazer um registo pictórico para ajudar a resolver os problemas.

Numa das situações problemáticas, os três grupos reduzem o significado operador ao significado parte-todo, representando a quantidade discreta, berlindes neste caso concreto, por um círculo. Visualmente é fácil verificar quantos berlindes sobram, e é sobre este valor que os alunos calculam a fração do total pedido.

Significado Medida

Em relação às tarefas no significado Medida, todos os grupos responderam acertadamente ao que lhes foi pedido concretizando as suas respostas de uma forma muito uniforme. Por exemplo, o grupo A reconhece um segmento de reta como unidade de medida e consegue saber quantas vezes esta medida cabe noutro segmento de reta, medindo assim dobros e metades da unidade de medida dada. Todos resolveram com sucesso, à excepção de uma pergunta onde o grupo B respondeu incorrectamente, dizendo que uma barra mede 1 unidade e $\frac{1}{4}$. Este erro poderá ter sido devido a uma leitura errada da barra, havendo uma confusão da unidade de medida considerada. Assim, desta forma, para descobrir qual era a fração correspondente à parte excedente da barra em questão, em relação à outra barra, o grupo B tomou como unidade de medida a própria barra a medir.

Uma das tarefas com significado medida consistia em verificar como é que os alunos conseguiam utilizar pacotes de 1 kg, $\frac{1}{2}$ kg e $\frac{1}{4}$ kg para ter no final 2 kg e $\frac{1}{4}$ de café. O grupo A destaca-se na sua resolução, optando por construir uma tabela onde registou todas as hipóteses possíveis. Assim, de uma forma muito intuitiva, o grupo operou com as quantidades dadas de café, conseguindo adicionar meios quilograma e quartos de quilograma. Tanto o grupo B como o grupo C registaram algumas possibilidades de forma aleatória. A título de exemplo, o grupo C começou pela combinação mais simples, passando depois por utilizar pacotes de $\frac{1}{2}$ kg, e, sem grande organização, tendo conseguido descobrir seis possibilidades

Globalmente, o trabalho desenvolvido ao longo das aulas, nos diferentes significados possibilitou a construção do conceito de número racional aos diferentes grupos do estudo, tendo assim contribuído para o desenvolvimento do sentido do número destes alunos.

Esta trajetória constitui um exemplo de tarefas integradoras da abordagem aos diferentes significados do número racional no 4.º ano de escolaridade, tal como era indicado no Programa de matemática de então, ainda que até ao final do 3.º ano os alunos tenham tido um contacto pobre com o conceito de número racional, na medida em que usufruíram do Programa tradicional (ver DEB, 1991) em que o trabalho com o número racional se resumia quase exclusivamente à abordagem da representação decimal.

Capítulo 5 - DISCUSSÃO DE RESULTADOS

De uma forma geral os alunos, no início da trajetória, comparavam com facilidade apenas pares de fração com denominadores iguais sendo mais complicado comparar ou ordenar pares de fração com numeradores iguais. Ao longo das sessões, indo ao encontro do que a literatura nos diz em Post *et al.*, (1985), Nunes *et al.*, (2004), os alunos demonstraram ser capazes de compreender que quando os denominadores são iguais para ordenar basta atender à ordenação dos numeradores, manifestam que percebem que o tamanho da fração depende do quociente da mesma, dividindo os dois números naturais, numerador pelo denominador e compreendem a relação inversa entre o denominador e o numerador, reconhecendo que quanto maior for o denominador em relação ao numerador menor a fração.

O grupo C, que apresenta mais dificuldades em matemática, tende a superar algumas dificuldades no trabalho com o número racional fracionário, transformando-o na sua representação decimal. Bezuc e Cramer (1989) referem que quando se usa esta estratégia há que ter em atenção à confusão que os alunos fazem com o número de casas decimais e este problema manifestou-se nos alunos, sendo preciso sempre uma grande regulação aquando da representação de décimas e centésimas pois, tendencionalmente, baseando-se no domínio dos números naturais, 5 é menor do que 25 (Post *et al.*, 1993).

Indo ao encontro de Mamede (2008) numa fase inicial os alunos revelavam algumas dificuldades em comparar números racionais uma vez que estes surgem em diversas representações, contudo, ao longo das tarefas propostas que partiam de resolução de problemas das vivências do dia-a-dia, os alunos manifestaram compreender que diferentes fração podem representar a mesma quantidade surgindo assim, de forma intuitiva, o conceito de fração equivalente, e como corroboram Nunes *et al.*, (2004) e Kamii e Clark (1995) os alunos apropriam-se do conceito de racional e compreendem que esta classe de números também ela pode ser ordenada.

Os três grupos recorrem, predominantemente, ao pensamento residual (Post, *et al.*, 1986) onde, comparando a fração que falta para chegar à unidade, conseguem concluir qual das frações dadas é maior.

De forma a comparar números racionais, verifica-se que os alunos tendem a escrever os números sobre a mesma representação (fração, decimal e percentual) e que fazem esta conversão com alguma agilidade ao longo da trajetória de aprendizagem.

Não se identificam grandes dificuldades inerentes ao confronto dos números racionais com o conhecimento prévio dos números naturais nos alunos, o que conforme Post *et al.* (1986) é fundamental para a construção da noção quantitativa de número racional. Em contrapartida os resultados vão ao encontro do estudo de Behr e colegas (1984) que afirmam que as crianças nesta idade são capazes de desenvolver e trabalhar com os números racionais, particularmente com os seus invariantes operacionais.

Se no início da resolução das tarefas é notório o uso de estratégias informais, no decorrer das sessões os alunos apropriaram-se de novas estratégias e de melhores formas de traduzirem o seu raciocínio, melhorado assim a sua comunicação matemática. Nas últimas sessões desta trajetória os alunos evidenciaram poucas dificuldades em comparar e ordenar números racionais nos significados quociente, parte-todo, operador e medida.

Desta forma, pode-se dizer que a trajetória de aprendizagem escolhida foi facilitadora da construção do conceito de número racional, começando com o significado quociente, onde os alunos reconhecem intuitivamente duas frações equivalentes e ordenam fração com diferentes numeradores e denominadores. Esta ideia é convergente com o que Nunes *et al.*, (2004) e Mamede *et al.*, (2005) concluíram nos seus estudos com alunos da mesma faixa etária. Passando para a abordagem ao significado parte-todo, significado este que lhes era mais familiar na resolução de problemas antes deste estudo, indo de seguida explorar a resolução dos problemas com significado operador e por fim as tarefas com significado medida.

Após serem introduzidas tarefas com significados novos, foi sempre proposto aos alunos que realizassem uma tarefa com os significados previamente trabalhados e, apesar dos alunos contactarem com tarefas inovadoras conseguiram de uma forma integrada e consistente resolver, com sucesso, o que lhes foi proposto.

Capítulo 6 - CONCLUSÕES

Este capítulo apresenta as conclusões desta investigação procurando dar resposta às questões de investigação, respondendo, tanto quanto possível ao problema em estudo.

À luz do Programa de matemática do Ensino Básico (ver DEB, 1991) vive-se nas escolas e entre os professores um momento de mudança nas práticas de sala de aula, havendo um maior cuidado com o sentido do número e, mais especificamente, no sentido do número racional.

Revisitando a literatura toma-se consciência de que o conceito de número racional é um dos mais complexos e importantes a ser adquirido nesta fase inicial e, contudo, é um conceito subexplorado tanto por alunos como professores, havendo estudos (ver Post *et al.*, 1986) que revelam as inúmeras dificuldades no processo de ensino-aprendizagem deste conceito. De forma a compreender o conceito de número é fundamental ter em conta as suas diferentes representações e os seus diferentes significados.

Procura-se, com esta investigação, estudar como crianças do 4.º ano do ensino básico constroem o conceito de número racional quando este é trabalhado nos significados quociente, parte-todo, operador e medida, após terem sido previamente expostos a um contacto com o Programa de matemática tradicional. O estudo pretende assim entender como os alunos compreendem a representação, a ordenação e a equivalência do número racional em cada um dos significados e como articulam os diferentes modos de representação de um número racional nestes significados.

6.1. Conclusões do estudo

6.1.1. Como compreendem os alunos a ordenação, a equivalência e a representação

A trajetória de aprendizagem parece ter contribuído para uma melhoria do desempenho dos alunos na realização das tarefas que envolvem os invariantes operacionais (ordenação e equivalência). À luz da teoria dos campos conceptuais de Vergnaud (1996), pode-se dizer que houve compreensão do número racional uma vez que houve interação entre as situações, os invariantes e as representações.

Em relação à resolução de tarefas com números racionais sob a forma decimal, os alunos não revelam grande dificuldade, trabalhando bem com decimais. Os alunos que revelam dificuldades na comparação de números decimais com número desigual de casas decimais adotam a estratégia de transformarem as décimas em centésimas ou vice-versa. Também se verificou que os alunos, em situações onde se sentiam mais desconfortáveis, transformaram os números decimais em fração, comparando-as nesta forma.

Em relação à comparação de fração, os alunos bons demonstram que têm mais facilidade em resolver os problemas do que os alunos razoáveis. Estes últimos apresentam mais dificuldade no início em reconhecer o significado do numerador e do denominador. À semelhança do que acontece com os números decimais, quando a tarefa é com números racionais sob a forma de fração e com números decimais, os alunos mais fracos escrevem-nos todos sob a mesma forma.

Ao longo das tarefas com diferentes significados, sempre que os numeradores eram iguais, os alunos compararam as fração com rapidez e sem dificuldade. É de salientar que, para fração com o mesmo denominador, todos os alunos comparam os numeradores e compreendem que o todo tem o mesmo número de partes. Sempre que estão envolvidas fração unitárias, os alunos revelam compreender que quanto menor for o denominador menor será o tamanho da fração. Quando os numeradores e os denominadores são diferentes, os alunos precisam de recorrer a representações pictóricas e a esquemas para conseguir percecionar a grandeza de cada fração face a unidade. Depois de várias tarefas, os alunos quando confrontados com ter que justificar qual a fração maior, com numerador e denominador diferentes, recorreram à estratégia de verificar qual a fração que falta para ter o todo, e depois compará-las. Esta estratégia já foi identificada anteriormente na literatura (ver Post *et al.*, 1986).

Quando as tarefas envolviam medidas com unidades de medida diferentes, o grupo dos alunos razoáveis em matemática revelou ter dificuldades aquando da medição de uma medida menor do que a unidade.

No decorrer das sessões, o grupo dos alunos bons a matemática utilizam a representação pictórica para justificar o seu pensamento, enquanto que os alunos dos restantes grupos recorrem a este registo para traduzir o enunciado da tarefa e para, posteriormente, resolverem o problema. Durante a trajetória denota-se nos alunos um maior rigor na formulação da sua justificação, não recorrendo tanto a estratégias informais, experimentando e resolvendo as situações problemáticas através de estratégias mais formais. Ao longo das tarefas, uma das alunas do grupo razoável começa por construir uma pequena tabela onde regista a informação que posteriormente passa para o numerador e para o denominador.

À medida que os alunos vão ganhando à vontade e vão resolvendo as tarefas com outros significados, sente-se que os alunos resolvem mais agilmente o que lhes é pedido, surgindo mesmo quando não era pedido, valores em percentagem. Esta ação mostra flexibilidade na utilização das diferentes representações de número racional e na conversão de fração e decimais para percentagem.

Nas últimas tarefas da trajetória de aprendizagem, os alunos revelam ser capazes de utilizar estratégias adequadas à comparação e ordenação de números racionais, quer na forma fracionária, decimal ou percentual. Conseguem comparar números racionais nos significados quociente, parte-todo, operador e medida em situações de maior complexidade.

Ao longo dos 4 anos, os alunos aprenderam a dominar as operações com os números naturais, sendo que os números racionais sob a forma de fração surgiram sempre de uma forma um pouco descontextualizada e muito formal. Seria expectável que, seguindo o que nos alerta a literatura, os alunos aplicassem aos números racionais propriedades inerentes aos números naturais, contudo, este contágio não se revela, verificando-se um entender de números racionais como uma quantidade. Esta situação leva a concluir que, de acordo com Post *et al.*, (1986) há um avanço significativo na construção da noção quantitativa de número racional.

Pensa-se que esta noção de conceito de número racional está intimamente ligada com as opções das tarefas escolhidas ao longo da trajetória, onde se intercalou os diferentes significados de número racional com as suas diferentes representações, numa forma contextualizada e realista.

Os alunos não dominavam a noção de fração equivalente, no entanto, ao longo do processo, foi proporcionado aos alunos que se confrontassem com situações onde esta noção fosse necessária e desenvolvida. Assim, de uma forma intuitiva e de registo informal, através do significado quociente, os alunos confrontaram-se com fração com numeradores e denominadores diferentes que queriam representar a mesma quantidade. Há uma aluna razoável que revela um domínio grande desta noção ao longo das tarefas, calculando intuitivamente fração equivalentes, multiplicando o numerador e do denominador pelo mesmo número natural. Tanto o grupo dos alunos razoáveis como o grupo dos alunos mais fracos a matemática recorreram, durante várias sessões, à representação pictórica e verbal, suportando depois as suas estratégias recorrendo à representação fracionária. O grupo dos alunos bons revela, desde cedo na trajetória, facilidade com a representação fracionária, revelando alguma dificuldade na linguagem matemática simbólica, na escrita das suas justificações.

Todos os alunos são bem-sucedidos a escrever a fração correspondente a uma representação pictórica ou vice-versa, e também convertem fração em percentagens de referência, como por exemplo $\frac{2}{4}$ = 50%.

Os alunos revelam facilidade em relacionar percentagens básicas de referências com a sua representação decimal, fracionária e também pictórica. No geral, os alunos mostram mais dificuldade em relacionar a representação decimal com a representação fracionária.

Recorrendo à representação pictórica, os alunos reconstroem a unidade tendo uma fração desta e fazem o equivalente com a representação em número racional. Denota-se um entendimento do número racional na construção de partes e reconstrução da unidade em situações que envolvem o significado parte-todo, no entanto apresentam algumas dificuldades em dividir a unidade para obter a fração unitária que depois têm de repetir para construírem o todo.

Em todos os grupos, ao longo das tarefas, os alunos revelam que compreendem que um número racional pode ser representado através de números fracionários, decimais e percentuais. Há um melhorar de adequações de representação do número racional no decorrer das sessões, sendo que os alunos revelam ter facilidade em transformar o número na representação que mais lhes dá jeito para a resolução da tarefa.

6.1.2. Diferentes significados do número racional

Os resultados desta investigação confirmam que o processo de ensino-aprendizagem do número racional é bastante complexo. Para que haja compreensão deste conceito é necessário que os alunos tenham contacto com os diferentes significados que o número racional pode ter e pode-se afirmar que começar com o significado quociente, tal como é sugerido na literatura (ver Nunes *et al.*, 2004, Mamede, 2008) revelou ser uma opção estratégica positiva, pois são estas tarefas que recorrem mais rapidamente ao conhecimento informal e intuitivo dos alunos, levando-os a construir conhecimento formal (ver Kieren, 1988), e ajudando-os a desenvolver a sua compreensão do número racional.

Durante a trajetória de aprendizagem, os diferentes significados foram abordados sequencialmente, havendo claramente um maior domínio do significado parte-todo, uma vez que este significado foi o mais abordado até então, seguindo as indicações do Programa tradicional.

Em relação ao significado operador, os alunos revelaram estar seguros, resolvendo as tarefas propostas conscientes do que cada valor representava. Mesmo com quantidades discretas, os alunos aderiram e resolveram as situações problemáticas.

Nas tarefas com significado medida, apesar de serem menos em número, houve um desenvolvimento importante no que se espera da compreensão do número racional. Os números fracionários têm o significado importante de servir para medir e, por exemplo, a tarefa que envolvia a medida do café serviu para que se acabasse esta trajetória com uma noção concreta de fração equivalentes como fração que representam a mesma quantidade.

As tarefas desta trajetória de aprendizagem foram propostas intercaladas, sendo que após exploração de um significado havia sempre uma tarefa de um significado trabalhado anteriormente. Os alunos denotaram grande destreza na resolução das tarefas, alternando tanto nas representações de número racional como nos significados, adequando as suas estratégias e mostrando que não há necessidade de saberem formalmente os nomes dos significados, há antes que promover o contacto com os diferentes significados de número racional.

6.2. Limitações da Investigação

Uma das principais limitações desta investigação prende-se com o facto deste estudo ter sido desenvolvido apenas em algumas aulas do 2.º período e não ao longo do ano escolar como seria desejável. Pois o trabalho com números racionais deve ser desenvolvido ao longo do ano, dando aos alunos mais tempo para construíram e interiorizarem conceitos. Contudo, tal não foi possível num trabalho deste tipo por constrangimentos de tempo. Outra limitação deste estudo diz respeito ao número de tarefas desenvolvidas com os grupos. As tarefas foram escolhidas e lançadas de acordo o seguimento da trajetória, contudo, na hora da análise dos dados, o material recolhido parece ainda insuficiente de modo a contemplar outras situações e promover diferentes resoluções dos alunos. Tal situação, tornar-se-ia inviável, dado a limitação do tempo para elaborar a investigação e o número de horas necessárias para que a investigadora estivesse no terreno a recolher dados, contudo fica aqui a sugestão de criar tarefas recorrendo à reta numérica e mais tarefas onde as diferentes representações se misturassem mais.

O número limitado de pares analisados no estudo e o não poder integrar no estudo a análise de todos os alunos da turma, o que obrigaria o prolongamento deste trabalho por tempo incomportável, pode também ser apontado como uma limitação.

6.3. Recomendações para futuras Investigações

Após a reflexão deste estudo sugerem-se algumas recomendações para futuras investigações. Sendo este trabalho um estudo de caso, os dados aqui apresentados não servem de generalização, contudo, contribuem para o aprofundamento da investigação sobre como os alunos constroem a noção de número racional.

Seguindo a ideia de que é fundamental trabalhar as diferentes representações de número racional, e sobretudo, as relações entre elas e a flexibilidade de escolher a representação mais adequada a um determinado contexto ou situação problemática, considera-se pertinente realizar este estudo com crianças mais novas, começando com esta sequência desde o início do 1° Ciclo do Ensino Básico.

Sugere-se também que se modifique a sequência de significados, sendo que se recomenda que comece por tarefas com o significado quociente.

Capítulo 7 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P., Serrazina, L.& Oliveira, I. (1999). *A matemática na Educação Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Behr, M.J., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In Grouws, D.A. (Ed.).*Handbook of research on Mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan Publishing Company.

Behr, M.J., Lesh, R. & Post, T. (1982).*Interpretations of rational number concepts*. Mathematics for the Middle Grades.NCTM.

Behr, M.J., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983).Rational-Number concepts. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press.

Behr, M.J., Wachsmuth, I., Post T. & Lesh R., (1984). Order and equivalence of rational numbers: a clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(5), 323-341.

Bezuc, N.& Cramer, K. (1989). Teaching about fractions: What, when and how? In P. Trafton (Ed.).*New directions for elementary school mathematics* (NCTM 1989 Yearbook, pp. 156-167). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bogdan, R.& Biklen, S. K. (1994).*Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Bright, G. & Litwiller, B. (2002).*Classroom activities for making sense of fractions, ratios, and proportions*: 2002 Yearbook. Reston, Virginia: NCTM.

Cardoso, P. & Mamede, E. (2009). Considerações sobre o ensino-aprendizagem do conceito de fração à luz de um estudo com alunos do 6° ano do ensino básico. *Actas do X Congresso Galego-Português de Psicopedagogia*. Portugal, Braga: CIEd-Universidade do Minho.

De Lange, J. (2001). Mathematics for literacy. In NRC, *Quantitative literacy: Why numeracy matters for schools and colleges* (pp. 52-80). Washington, D.C.: National Academy of Sciences.

Frankenstein, M. (2000).In addition to the mathematics — goals for a critical mathematical literacy curriculum. In A. Ahmed, J. M. Kraemer & H. Williams (Eds.), *Cultural Diversity in Mathematics Education*: *CIEAEM 51* (pp. 19–29). Chichester: Ellis Horwood.

Gal, I. (2002). Adult statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review* 70(1), 1-25.

Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275-285).Reston, VA: NCTM.

Goldin, G. A. & Shteingold, N. (2001).Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM.

Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Greenes, C., Schulman, L. & Spungin, R. (1993).Developing sense about numbers. *Arithmetic Teacher*, 40(5), 279-284.

Hart, K. (1981). Children´s understanding of Mathematics 11-16. London: John Murray.

Jablonka, E. (2002). Mathematical literacy. In A. Bishop, M. A. Clemnets, C. Keitel, J. Kilpatrick e F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 75–102). London: Kluwer Academic Publishers.

Kamii, C. & Clark, F.B. (1995). Equivalent fractions: Their difficulty and educational implications. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 365-378.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: children´s strategies and errors – A report of the strategies and errors in secondary Mathematics Project*. Berkshire: NFER-NELSON.

Kieren, T. (1976).On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: paper from a research workshop*. Columbus, OH:ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: It's intuitive a formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: NCTM.

Kieren, T. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. Carpenter, E. Fennema and T Romberg (Eds.), *Rational Numbers – An Integration of Research*. Hillsdale, New Jersey: LEA.

Kieren, T. (1995).Creating spaces for learning fractions. In T. Sowder & B.P. Schapelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp.31-66). Albany, NY: SUNY Press.

Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities: considerations for identification, diagnosis and remediation. In R. Lesh, D. Mierkiewicz, & M. G. Kantowski (Eds.), *Applied Mathematical Problem Solving*. Ohio: RIC/SMEAC.

Lesh, R., Post, T.& Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in Mathematics learning and problem solving. In C. Janvier, (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mamede E. (2008). *Matemática ao encontro das práticas.* Instituto de Estudos da Criança – Universidade do Minho.

Mamede, E. & Nunes, T. (2008). Building on children´s informal knowledge in the teaching of fractions, In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proc. 32th Conference of the Int. Group for Psychology of Mathematics Education and PME-North America XXX* (Vol.3, pp.345-352). PME, Morélia, Mexico.

Mamede, E., Nunes, T.& Bryant, P. (2005).The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quotient situations. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp.281-288). Melbourne: University of Melbourne.

Marshall, S. (1993). Assessment of rational number understanding: A Schema-Based Approach. In T.Carpenter, E. Fennema and T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers – An Integration of Research* (pp.261-288). Hillsdale, New Jersey: LEA.

McIntosh, A., Reys, B. J. & Reys, R. E. (1992).A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8 e 44.

Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática: plano de organização do ensino-aprendizagem, 1.º Ciclo do ensino básico* (Vol. II). Lisboa: Imprensa Nacional da Casa da Moeda.

Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática: plano de organização do ensino-aprendizagem, 2.º Ciclo do ensino básico* (Vol. II). Lisboa: Imprensa Nacional da Casa da Moeda.

Ministério da Educação (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Ministério da Educação (2007*). Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa:DGIDC.http://sitio.dgidc.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, 14 (1), 89-108.

Monteiro, C. & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM.

Monteiro, C., Pinto, H.& Figueiredo, N. (2005). As fração e o desenvolvimento do sentido do número racional. *Educação e Matemática*, 85, 47-51.

Moss, J.& Case, R. (1999).Developing children´s understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 122-147.

NCTM (1989).*Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

NCTM (2000).*Principles and standards for school Mathematics*. Reston: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Nóvoa, A. (1992). *Os professores e sua formação*. Lisboa: Dom Quixote.

Nunes, T.Bryant, P. & Henry, J. (2003). The effect of situations on children´s understanding of fractions. In: *British Society for Research on the Learning of Mathematics*, Oxford.

Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Evans, D., Wade. J. & Bell, D. (2004). Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching. *Annual Meeting for the Association pour la Rechercher e sur le Développement des Compétences*, Paper presented in Paris : 28-31, January.

Orton, R., Post, T., Behr, M., Cramer, K., Harel, G.& Lesh, R. (1995).Logical and psychological aspects of rational number pedagogical reasoning. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 3, 63-75.

Piaget, J. (1952). *The child´s conception of number*. London: Routledge & Kegan Paul.

Pinto, H. (2011).*O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais*, Dissertação de doutoramento, Educação (Didáctica da Matemática), Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Lisboa, Portugal.

Ponte, J. P. (1994). O Estudo de Caso na Investigação em Educação Matemática. Quadrante, 3 (1), pp.3-18.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Post, T. (1981). Fractions: results and implications from National Assessment. *The Arithmetic Teacher*, 28(9), 26-31.

Post, T., Behr, M. & Lesh, R. (1986). Research-Based observations about children´s learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 8(1), 39-48.

Post, T.& Cramer, K. (1989).Knowledge, representation and quantitative thinking. In M. Reynolds (Ed.) *Knowledge Base for the Beginning Teacher – Special publication of the AACTE* (pp.221-231). Oxford: Pergamon Press.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R. & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the Learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), *Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts. Lawrence Erlbaum and Associates*.

Post, T., Wachsmuth, I., Lesh, R.& Behr, M. (1985). Order and equivalence of rational number: A cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16 (1), 18-36.

Quaresma, M. (2010). *Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino*. Dissertação de Mestrado em Educação – Didáctica da Matemática. Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Reys, R. E. (1998). Computation versus number sense. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 4(2), 110-112.

Rosen, L. P., Weil, L.& Von Zastrow, C. (2003). Quantitative literacy in the workplace: Making it a reality. In B. L. Madison, & L. A. Steen (Eds.),*National Forum on Quantitative Literacy. Quantitative literacy: Why numeracy matters for schools and colleges*. (pp.43-52).Princeton, NJ: National Council on Education and the Disciplines.

Serrazina, M. L. (2007) (coord). *Ensinar e aprender Matemática no 1.ºCiclo*. Lisboa: Texto Editores.

Serrazina, L.& Oliveira, I. (2001). O professor como investigador: Leitura crítica de investigações em educação matemática. In I. C. Lopes & M. C. Costa (Orgs.), *Atas do SIEM 2001* (pp. 29-56). Lisboa: APM.

Serrazina, L. & Oliveira, I. (2005). O currículo de Matemática do ensino básico sob o olhar da competência matemática. In APM-GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 35-62).Lisboa: APM.

Serrazina, L. & Oliveira, I. (2010). Trajetórias de aprendizagem e ensinar para a compreensão. In GTI (Ed.), *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico* (pp.43-59). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Grupo de Trabalho de Investigação.

Sowder, J. & Schappelle, B. (1994).Number sense-making. *Arithmetic Teacher*, 41(6), 342-345

Vale, I.& Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas. Em P. Palhares (Coord.). *Elementos de Matemática para professores do ensino básico*. Lisboa: Lidel.

Vergnaud, G. (1996). A Teoria dos campos conceptuais. In J. Brun (Org.), *Didáctica das Matemáticas* (pp. 155-191). Lisboa: Instituto Piaget.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics — An International Perspective* (pp. 5–28). East Sussex: Psychology Press

Webb, D., Boswinkel, N. & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14 (2), 110-113.

Yin, R. K. (2009). Case study research (4th Ed.): Design and methods. Newbury Park, CA: Sage.

Anexos

Anexo 1 - Informação à Direção da Escola

Exma. Sr.ª Diretora Pedagógica,

No âmbito da realização de um trabalho de Mestrado na área da Didática da Matemática, onde procuro estudar como desenvolvem as crianças a noção de número racional, pretendo realizar a recolha de dados na minha turma, de 4.º ano de escolaridade.

A recolha de dados irá decorrer ao longo do 2.º período e será realizada apenas por mim, implicará a realização de gravações áudio e vídeo do trabalho realizado pelos alunos, bem como fotografias dos seus cadernos. Os nomes dos alunos serão alterados, de modo a preservar a sua identidade.

Obrigada pela atenção dispensada, sempre ao dispor,

(Magda Fernandes)

Anexo 2 - Informação aos Encarregados de Educação

Exmo. Sr.ª Encarregado de Educação,

No âmbito da realização de um trabalho de Mestrado na área da Didática da Matemática, onde procuro estudar como desenvolvem as crianças a noção de número racional, pretendo realizar a recolha de dados na nossa turma.

Para o desenvolvimento do estudo será necessário realizar gravações áudio e vídeo do trabalho realizado pelos alunos, bem como fotografias dos seus cadernos, pelo que solicito e agradeço desde já a sua compreensão. Acrescento ainda que a recolha de dados será feita apenas por mim e que os nomes dos alunos serão alterados, de modo a preservar a sua identidade.

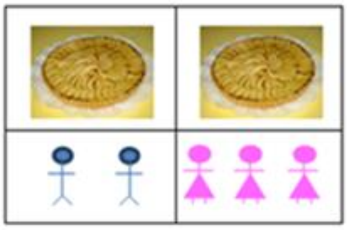
Obrigada pela atenção dispensada, sempre ao dispor,

(Magda Fernandes)

Anexo 3 - Tarefas realizadas nas sessão 1 e 2 nos dias 27 e 29 de fevereiro

Tarefa 1 – Tartes I

As meninas dividem igualmente uma tarte e os meninos também dividem igualmente uma tarte igual à das meninas.



a) Cada menina vai comer o mesmo que cada menino? Justifica a tua resposta.
b) Que fração de tarte vai comer cada menina? E cada menino?
c) Quem é que come mais, cada menino ou cada menina?

Tarefa 2 – Tartes II

Numa festa, 8 meninas dividiram igualmente 6 tartes.

a) Quantos meninos têm de existir para dividir igualmente 3 tartes, sabendo que têm de comer exatamente a mesma quantidade que as meninas? Justifica a tua resposta.
b) Que fração da tarde vai comer cada menina? E cada menino?

Tarefa 3 – Tartes III

No lanche, 6 meninas dividiram igualmente 4 tartes.

a) Quantas tartes têm de existir para serem divididas igualmente por 3 meninos, sabendo que cada um deles tem de comer exatamente a mesma quantidade que cada uma das meninas? Justifica a tua resposta.
b) Que fração da tarte vai comer cada menina? E cada menino?

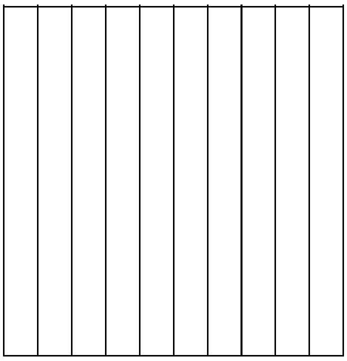
Anexo 4 - Tarefas realizadas nas sessões 3 e 4 nos dias 2 e 5 de março

Tarefa 4 - Mafalda e as suas toalhas

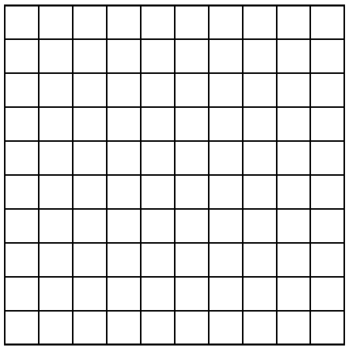
A Mafalda quis pôr na mesa da festa de anos uma toalha bonita. Tinha duas hipóteses: uma toalha às listas e outra toalha aos quadrados.

1. Pinta metade da toalha A de uma cor e metade da toalha B de outra cor.

Toalha A



Toalha B



1.1.Quantas décimas da toalha A pintaste?

1.2.Quantas centésimas da toalha B pintaste?

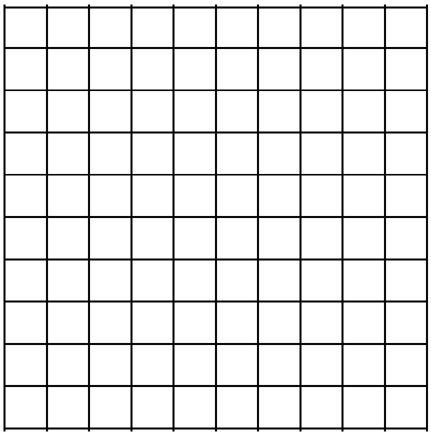
1.3 Pintaste a mesma quantidade de toalha nas duas situações? Porquê?

1.4. Que percentagem das toalhas está pintada?

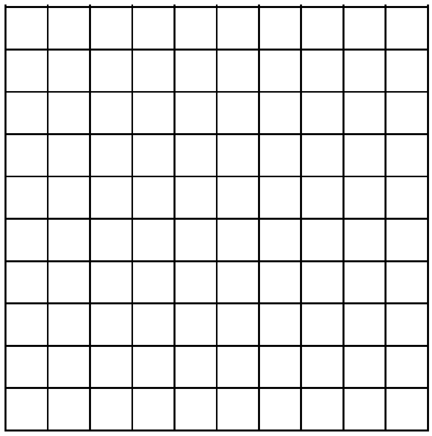
1.5. Na toalha B pinta de azul-escuro mais 25% da toalha. Quantas décimas ficaram por pintar?

2. Pinta a quarta parte da toalha C de uma cor e 25 centésimas da toalha D de outra cor.

Toalha C



Toalha D



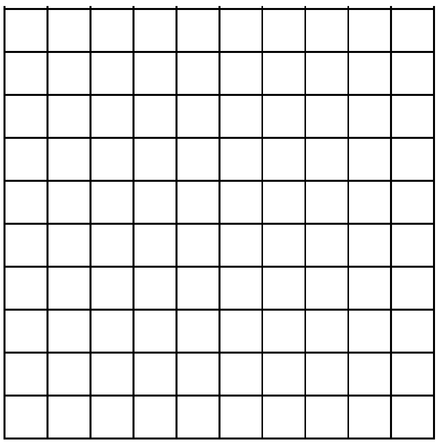
2.1 Pintaste a mesma quantidade de toalha nas duas situações? Porquê?

2.2.Regista a quantidade pintada das duas toalhas em número fracionário, em número decimal e em percentagem.

2.3. Que conclusões podes tirar?

2.4 Na toalha E pinta 0,02 de uma cor, 0,20 de outra cor e $\frac{2}{4}$ de outra.

Toalha E

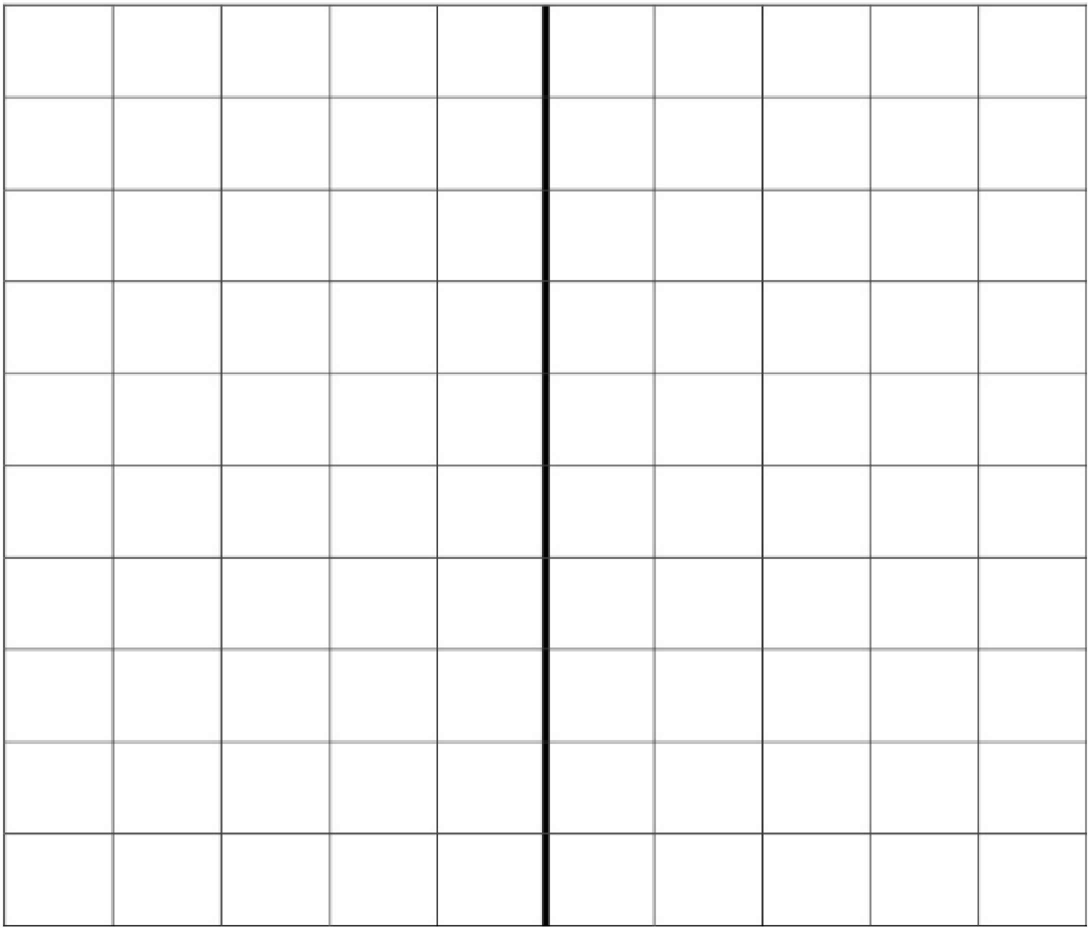


2.5 Que parte da toalha ficou em branco?

3. Uma das toalhas que a mãe da Mafalda vai utilizar nos anos da filha é aos quadrados. Tem 100 quadrados. Pinta de modo a ficar uma toalha bonita utilizando apenas três cores: azul, amarelo e uma cor à tua escolha.

   Pinta 50% da toalha de azul, 0,25 da toalha de amarelo e $\frac{1}{4}$ de uma cor à escolha. Achas que fica algo por pintar? Porquê?

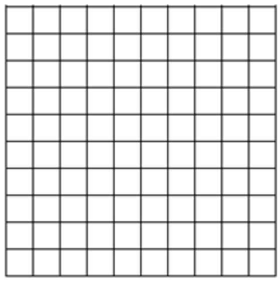
   Tem atenção ao padrão da toalha, deve ficar simétrico em relação ao eixo de simetria.



4. Observa as figuras:

toalha F

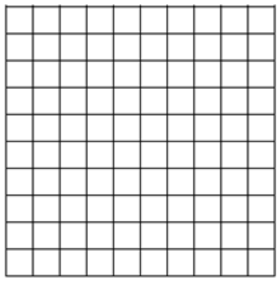
a) Se pintares 25% da toalha F de amarelo, 25% da toalha F de azul e 30% da toalha F de vermelho, quanto fica por pintar?



Pinta para veres.

toalha G

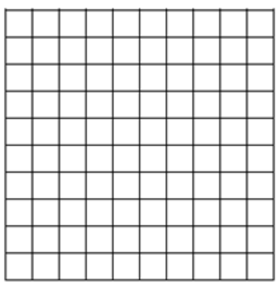
b)Se pintares $\frac{1}{4}$ da toalha de amarelo, $\frac{1}{4}$ da toalha de azul e 30% da toalha de vermelho, quanto fica por pintar?



Pinta para confirmares.

toalha H

c)Se pintares 0,25 da toalha de amarelo, 50% da toalha de azul quanto terias de pintar de verde para teres a toalha toda pintada?



Pinta para veres.

Anexo 5 - Tarefas realizadas na sessão 5 no dia 7 de março

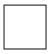
Tarefa 5 – Tartes IV

Três meninas dividem duas tartes e nove meninos dividem seis tartes iguais às das meninas.

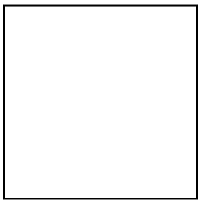
a) Cada menina vai comer o mesmo que cada menino? Justifica a tua resposta.
b) Que fração da tarte vai comer cada menina? E cada menino?
c) Quem é que come mais? Cada menino ou cada menina? Exlica o teu raciocínio.

Tarefa 6 – O todo

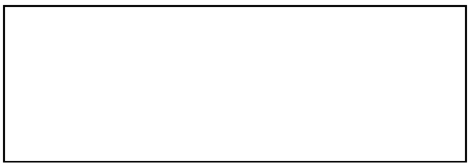
1. Se a figura seguinte representar 10% do todo, desenha a figura completa.



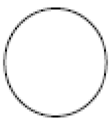
2. Representa 25% desta figura.



3. Se a figura representar $\frac{4}{3}$ da unidade, desenha o todo.



4. Se a figura seguinte representar $\frac{1}{3}$ da unidade, desenha a figura completa.



Anexo 6 - Tarefas realizadas nas sessões 6 e 7 nos dias 9 e 12 de março

Tarefa 7 – Situações problemáticas

1. A Ana gastou 0,50 da sua mesada na compra de uma prenda para o aniversário da mãe. Tinha 25€, quanto gastou?

2. O Rui deu 25% dos seus berlindes ao Tiago. Sabendo que o Rui tinha 20 berlindes, quantos berlindes deu o Rui ao Tiago?

3. A mãe da Luísa queria fazer um colar para o qual necessitava de 21 peças. Reparou que tinha apenas $\frac{2}{3}$ das peças que necessitava. Quantas peças teve de comprar a mãe da Luísa para terminar o colar?

Tarefa 8 – Marcelo e Ana

1. O Marcelo convidou 40 amigos para a sua festa de aniversário. No final da festa ele verificou que apenas $\frac{4}{5}$ dos convidados compareceram. Quantos amigos foram à festa do Marcelo?

2. A Alexandra estava a resolver os exercícios de matemática. Ao terminar 12 exercícios verificou que já tinha completado $\frac{3}{4}$ dos exercícios. Qual era o número total de exercícios de matemática?

3. A Ana comprou um saco com 30 berlindes. Separou $\frac{1}{3}$ para si própria e dividiu o restante entre quatro amigas. Quantos berlindes receberá cada amiga?

Anexo 7 - Tarefas realizadas na sessão 8 no dia

Tarefa 9 – Tartes V

Quatro meninas dividem três tartes e cinco meninos dividem quatro tartes iguais às das meninas.

a) Cada menina vai comer o mesmo que cada menino? Justifica a tua resposta.
b) Que fração da tarte vai comer cada menina? E cada menino?
c) Quem é que come mais, cada menino ou cada menina? Explica o teu raciocínio.

Tarefa 10 - Cromos

1. Eu tinha 40 cromos e dei $\frac{3}{4}$ aos meus colegas da escola.
    a. Quantos cromos dei aos colegas?
    b. Com quantos cromos fiquei?

2. O Marcelo tem uma coleção com 150 cromos.

    a. Calcula o número de cromos que a Diana tem, sabendo que tem 0,3 do número de cromos que o Marcelo tem.

Anexo 8 - Tarefas realizadas na sessão 9 no dia 16 de março

Tarefa 11 – Testamento do rei

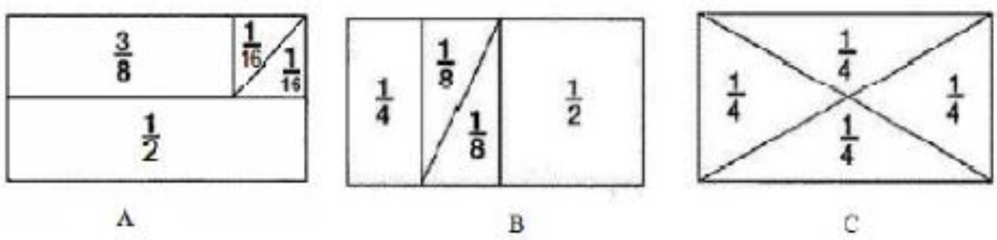
1. Há muitos anos viveu um Rei que deixou em testamento toda a sua fortuna aos seus quatro filhos. Segundo as leis da época a sua fortuna foi distribuída do seguinte modo:

   - O filho mais velho recebeu 50% da fortuna;

   - O filho mais novo recebeu 25% da fortuna;

   - A restante fortuna foi dividida igualmente pelos restantes filhos.

1.1 Qual das seguintes representações (A, B ou C) corresponde à distribuição da fortuna pelos quatro filhos? Justifica a tua resposta.



1.2 O valor da herança do filho mais velho foi de 4500 pesos reais. Quanto receberam, em pesos reais, os restantes filhos? Explica o teu raciocínio.

1.3 Se tu fosses o Rei como dividias a fortuna pelos quatro filhos? Justifica.

1.4 De acordo com a tua opção que percentagem da fortuna recebia cada filho? Quanto recebia cada um em pesos reais?

Tarefa 12 - Tampinhas

1. O Manuel coleciona tampinhas de garrafas de água. Quando tinha 6 tampinhas perdeu dois sextos das tampas. Quantas tampinhas perdeu? Explica o teu raciocínio.

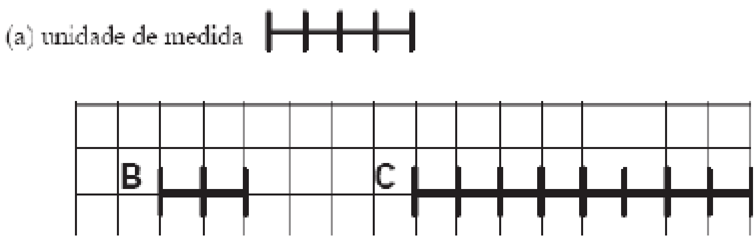
2. O amigo do Manuel tinha 2 tampinhas e deu 9 ao Nuno. Que fração das suas 12 tampas deu ao Nuno? Explica o teu raciocínio.

3. O Nuno continuou a colecionar tampinhas de garrafas de água. Passado alguns dias, três tampinhas correspondiam a um quarto do número total de tampinhas da sua coleção. Quantas tampinhas já tinha o Nuno? Explica o teu raciocínio.

Anexo 9 - Tarefas realizadas na sessão 10, dia 19 de março

Tarefa 13 - Unidades de medida

Observa a figura:



1. Utilizando a unidade de medida dada, quanto mede o segmento de reta C?

2. Utilizando a unidade de medida dada, quanto mede o segmento de reta B?

Anexo 10 - Tarefas realizadas na sessão 10 no dia 19 de março

Tarefa 14 - Comparando barras

Observa as barras:

1. Quanto mede a barra 2 tomando a barra 1 como unidade?

2. Quanto mede a barra 1 tomando a barra 4 como unidade?

3. Quanto mede a barra 3 tomando a barra 5 como unidade?

4. Quanto mede a barra 4 tomando a barra 3 como unidade?

Anexo 11 - Tarefas realizadas na sessão 11 no dia 21 de março

Tarefa 15 - Pizza

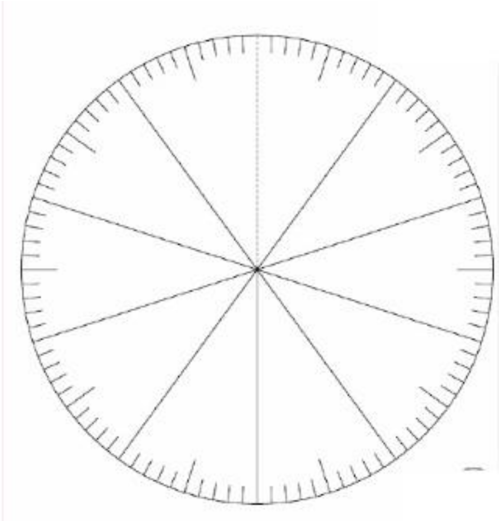
1. Um grupo de amigos foi a uma festa de anos. As 6 raparigas comeram 4 pizzas e os 3 rapazes comeram uma pizza. As pizzas eram todas do mesmo tamanho.

   Quem comeu mais, cada menino ou cada menina? Por quê?

Anexo 12 - Trabalho realizado na sessão 12 no dia 23 de março

Tarefa 16 - Modelo circular

1. Pinta 10 centésimas do círculo a uma cor e 7 décimas do círculo a outra cor.



a) Que parte do círculo pintaste? Responde utilizando os números decimais, as frações e a percentagem. Explica a tua resposta.

b) Que parte ficou por pintar? Responde utilizando os números decimais, as frações e a percentagem. Explica a tua resposta.

c) Se agora pintasses 50% do círculo a amarelo e duas décimas a vermelho, irias obter uma maior ou uma menor área pintada anteriormente?

Tarefa 17 - Café

Tenho de comprar 2 quilograma e $\frac{1}{4}$ de café. No supermercado há pacotes de $\frac{1}{2}$kg, $\frac{1}{4}$ kg e 1 kg.

a) Que pacotes devo levar? Quais as possibilidades?

b) Quais escolho para levar a menor quantidade de pacotes?