A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA APRENDIZAGEM DE DERIVADA DE UMA FUNÇÃO DE ALUNOS DE 11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Miriam Miranda Pinto
miriam.m.pinto@gmail.com

Floriano Augusto Veiga Viseu
CIEd-Universidade do Minho
fviseu@ie.uminho.pt

Maria do Carmo Fernandes da Cunha
Escola Secundária Alberto Sampaio
carmo.fernandes@gmail.com

Paula Mendes Martins
CMAT–Universidade do Minho
pmendes@math.uminho.pt

Resumo. Nas sucessivas reformulações dos programas de matemática, a resolução de problemas tem ganho um lugar de destaque em prol do desenvolvimento de capacidades, atitudes e conhecimentos dos alunos. Ao integrarmos essa atividade nas estratégias de ensino de uma futura professora de matemática, procuramos identificar o contributo da resolução de problemas na aprendizagem de tópicos de derivada de uma função de alunos do 11.º ano de escolaridade e os constrangimentos sentidos na concretização dessas estratégias. Seguindo uma metodologia qualitativa e interpretativa, analisamos os dados recolhidos através de produções realizadas pelos alunos, um questionário, gravação em vídeo de aulas e reflexões sobre a prática pedagógica. Nas produções dos alunos integram-se as suas resoluções dos problemas, as suas respostas a questões soltas e a momentos de avaliação. Como estratégia de ensino-aprendizagem foram resolvidos problemas na introdução, desenvolvimento e avaliação de conhecimentos de tópicos do tema derivada de uma função. Da análise dos dados recolhidos, constatamos que as principais atividades desenvolvidas pelos alunos na aprendizagem da derivada de uma função com recurso à resolução de problemas foram a interpretação de informação, a definição de estratégias e a discussão de processos e resultados. Estas atividades contribuíram para envolverem os alunos na formalização dos conceitos e regras do estudo de derivada de uma função, assim como na sua aplicação a novas situações. Os principais constrangimentos que surgiram na prática da futura professora foram a gestão do tempo, a extensão do programa e os diferentes ritmos de aprendizagem dos alunos.

Palavras-chave: formação de professores, prática docente, resolução de problemas, atividades desenvolvidas pelos alunos.

Introdução

A derivada de uma função faz parte dos programas do 11.º e 12.º anos de escolaridade, sendo os conhecimentos adquiridos sobre este conceito essenciais para qualquer aluno como pré-requisito em todas as disciplinas científicas que usem a matemática como ferramenta. O tópico derivada de uma função surge contemplado nas sucessivas reformas curriculares do ensino de Matemática (Almeida & Viseu, 2002). Permite trabalhar um grande leque de situações-problema com os alunos, com o intuito de desenvolver atitudes, capacidades e aprendizagens. Segundo o NCTM (2008), um dos principais objetivos da Matemática é munir os alunos de conhecimentos e ferramentas que lhes permitam abordar qualquer tipo de problema. Halmos (1980) defende que a resolução de problemas é o 'coração' da matemática e para que este processo ocorra é necessário conhecimento de conteúdos matemáticos, de estratégias de resolução de problemas e uma predisposição para a colocação e resolução de problemas. Partindo desta perspetiva, procuramos identificar o contributo da resolução de problemas na aprendizagem de tópicos de derivada de uma função de alunos do 11.º ano de escolaridade e os constrangimentos sentidos na concretização dessas estratégias.

Derivada de uma função

O conceito de derivada de uma função foi introduzido pela primeira vez nos programas oficiais do ensino secundário em 1905 e com exceção da reforma de 1936 o estudo das derivadas esteve sempre presente nos programas até aos nossos dias. As orientações metodológicas para o ensino deste tópico dão grande importância à sua definição formal e à interpretação física e geométrica. Para Lauten et al. (1994), os alunos não apresentam grandes dificuldades no cálculo de derivadas, o que já não acontece com a respetiva representação gráfica. Tais dificuldades podem-se dever às práticas de ensino onde a representação gráfica é utilizada apenas na introdução do conceito (Riddle, 1994). Ferrini-Mundy e Lauten (1993) referem a dificuldade que os alunos manifestam em interpretar como é que as retas secantes, ao reduzir-se cada vez mais a amplitude do intervalo de variação de x, atingem, no seu limite, a reta tangente. Um estudo realizado por Orton (1983) mostrou que os alunos participantes eram capazes de responder corretamente a perguntas acerca do declive da reta tangente a uma dada curva num dado ponto, mas quando lhes era pedido o mesmo através do gráfico, cerca de 90% mostraram dificuldades em fazê-lo. Tall (1977) e Artigue (1991) referem também a facilidade que os alunos têm em usar algoritmos algébricos o que contrasta com as dificuldades que apresentam nas representações gráficas e geométricas.

Resolução de problemas

Na disciplina de matemática, a formulação e resolução de problemas são elementos fundamentais para que a mesma tenha um caráter criativo, sem problemas não se faz matemática (Lara, 2004). Os bons resolvedores de problemas têm como primeiro propósito analisar as situações em termos matemáticos e formular problemas baseados nas condições com que se deparam. Em primeiro consideram casos simples para depois passarem a situações mais complexas (NCTM, 2008). De acordo com Vergnaud (1993), a aprendizagem matemática resulta da resolução de problemas propostos. As normas para a resolução de problemas defendem que os programas de ensino do pré-escolar ao 12.º ano devem habilitar os alunos a: construir novos conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas; resolver problemas que surgem em vários contextos, para além da Matemática; aplicar diversas estratégias para resolver problemas; analisar e ponderar acerca do processo de resolução de problemas (NCTM, 2008).

O ensino da Matemática direcionado para a resolução de problemas implica mais do que a "resolução isolada de problemas não rotineiros ou de problemas típicos dos manuais escolares" (NCTM, 1994, p. 97). Requer a ideia de que estudar Matemática é uma atividade de exploração, formulação de conjeturas, observação e experimentação. Ao planear as aulas, o professor deve ter em mente que deverá ser dada ao aluno oportunidade para formular problemas a partir de situações criadas e para elaborar novos problemas através de problemas já dados. É importante que sejam ouvidas diferentes estratégias de resolução e diferentes soluções contribuindo para que os alunos sintam que podem contribuir na discussão de um problema.

Podemos começar por perguntar o que é um problema? Para Zuffi e Onuchic (2007), problema é algo que não se sabe fazer, onde o objetivo é estimular o pensamento a procurar uma solução. Um problema é um desafio para a mente onde a memória ou esquemas mecânicos não são recursos viáveis para a sua resolução. Vianna (2002) advoga que um problema é quando um aluno é confrontado com uma questão à qual não sabe responder de imediato e não possui um método de resolução pré-determinado. Segundo Polya (1985), os problemas podem ser classificados em problemas rotineiros e não-rotineiros. Os problemas rotineiros podem ser resolvidos com a aplicação direta de uma lei ou fórmula conhecida pelo aluno. Neste caso, o aluno apenas precisa de conhecer os dados do problema e saber como aplicá-los numa determina fórmula já conhecida. Os problemas não-rotineiros são aqueles onde o aluno tem que criar uma resolução com base nos conhecimentos matemáticos que possui, mas neste caso é importante que use a sua criatividade e originalidade. Para Polya (1985), o uso deste tipo de problemas é bem mais proveitoso e eficiente para o processo de ensino-aprendizagem de Matemática do que o uso de problemas rotineiros.

O que implica resolver um problema? De acordo com o NCTM (2008), envolve os alunos numa tarefa sobre a qual não conhecem o método de resolução. Para chegarem à solução é necessário existir uma exploração de conhecimentos e através deste processo são desenvolvidos novos conhecimentos matemáticos. Nas aulas de Matemática é crucial que surjam oportunidades para que os alunos possam formular, discutir e resolver problemas e de seguida os mesmos sejam incentivados a refletir sobre os seus raciocínios (NCTM, 2008). Para Polya (1977), a resolução de um problema implica: (1) compreensão do problema; (2) estabelecimento de um plano – é preciso encontrar a conexão entre os dados e a incógnita. No caso de não se encontrar uma conexão imediata devem considerar-se problemas auxiliares; (3) execução do plano; (4) retrospetiva – é preciso examinar a solução obtida.

A resolução de problemas não é uma ferramenta útil apenas para a sala de aula de Matemática. A prática de aprender a resolver situações problemáticas ajuda os alunos a "adquirir modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas" (NCTM, 2008, p. 57). Bons problemas dão oportunidade aos alunos de consolidar e ampliar conhecimentos e se forem escolhidos de forma adequada estimulam a aprendizagem de matemática. A resolução de problemas pode e deve ser utilizada como uma ferramenta para ajudar os alunos a desenvolverem destreza em capacidades específicas (NCTM, 2008).

O professor desempenha um papel crucial na escolha dos problemas, ao analisar e adaptar um determinado problema, antecipar as ideias que podem surgir na sala de aula, as questões que podem ser levantadas tanto pelo professor como pelos alunos e decidir se determinados problemas podem ou não ajudar os alunos a atingirem os objetivos desejados (NCTM, 2008). Trata-se de uma tarefa complexa a escolha, utilização e adaptação de problemas no ensino de matemática.

O insucesso dos alunos perante a resolução de problemas, geralmente, nem sempre se deve à falta de conhecimentos matemáticos mas sim a um defeituoso uso dos mesmos (Garofalo & Lester, 1985; Schoenfeld, 1987). Os alunos que resolvem problemas de um modo mais eficaz analisam e avaliam o seu próprio progresso, ajustando, se necessário, as suas estratégias à medida que vão surgindo obstáculos (Bransford et al., 1999).

Metodologia

Com este estudo pretendemos identificar o contributo da resolução de problemas na aprendizagem de tópicos de derivada de uma função de alunos do 11.º ano de escolaridade e os constrangimentos sentidos na concretização dessas estratégias. A turma frequenta o 11.º ano do Curso Científico Humanístico de Ciências Socioeconómicas, Matemática A, é constituída por 24 alunos (13 rapazes e 11 raparigas) com uma idade média de 16 anos.

Atendendo à natureza deste estudo, adotamos por uma abordagem qualitativa, na procura de compreender as atividades dos alunos na resolução de problemas em contexto de sala de aula (Bogdan & Biklen, 1994). Com esta finalidade, os dados foram recolhidos através de um questionário, gravações em vídeo de aulas e das produções dos alunos às tarefas propostas (problemas e testes de avaliação de conhecimentos). O questionário, respondido pelos alunos no final deste estudo, é composto por questões sobre o tópico derivada de uma função, a resolução de problemas e o trabalho de grupo. A gravação em vídeo de aulas permitiu, com base na sua observação, perceber melhor o que se diz, o que fica por dizer, o que é feito e o que devia ser feito (Vale, 2000). A análise dessas gravações possibilitou a transcrição dos diálogos entre o professor e os alunos nas aulas lecionadas.

Da análise dos dados recolhidos, apresentamos a informação sob a designação de: (i) A resolução de problemas no estudo de derivada de uma função; (ii) Apreciação da resolução de problemas no estudo de derivada de uma função.

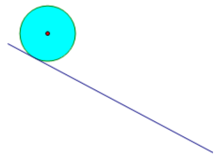
A resolução de problemas no estudo de derivada de uma função

Das aulas lecionadas no âmbito deste estudo, a resolução de problemas foi integrada nas estratégias de ensino nos momentos de: (1) introdução de tópicos de derivada de uma função; (2) desenvolvimento de tópicos de derivada de uma função; (3) avaliação de conhecimentos de tópicos de derivada de uma função. Para ilustrar o que foi concretizado em cada um destes momentos, apresentamos um exemplo da resolução de problemas quer na introdução quer no desenvolvimento de tópicos de derivada de uma função, enquanto na avaliação de conhecimentos apresentamos a análise da resolução de três problemas pelos alunos. A diferença entre o número de exemplos que analisamos em cada um dos momentos contemplados deve-se à quantidade de informação recolhida na explanação dos tópicos tratados.

A resolução de problemas na introdução de tópicos de derivada de uma função

Um dos tópicos introduzidos na intervenção pedagógica através da resolução de problemas foi a derivada de uma função num ponto e a sua interpretação geométrica. A noção de taxa média de variação num intervalo serviu de requisito para a introdução da taxa de variação local de uma dada função através do seguinte problema:

Uma esfera desce num plano inclinado. A distância d, em metros, percorrida pela esfera, t segundos após ter sido largada, é dada por $\mathrm{d(t)} = 2{,}1\mathrm{t}^2 + 6{,}6\mathrm{t}$.



Utilizando a calculadora gráfica resolve as seguintes alíneas.

a) Representa graficamente a função d na situação descrita e interpreta o gráfico obtido.
b) Determina a velocidade média da esfera no primeiro segundo do movimento.
c) Qual será a velocidade da esfera no instante $\mathrm{t} = 2$ segundos?
d) Calcula o declive da reta tangente à função d em $\mathrm{t} = 2$. Que concluis?
e) Em que instante terá atingido a esfera a velocidade de $40\ m/s$?

Na representação gráfica da função que representa a distância percorrida por uma esfera num plano inclinado em função do tempo, a maior parte dos alunos atendeu ao contexto do problema (Figura 1).

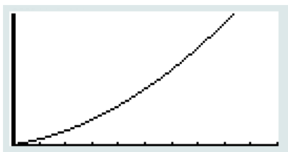


Figura 1. Representação gráfica da função d.

Na determinação da velocidade média da esfera no primeiro segundo do movimento, os alunos manifestaram dificuldades sobre a noção de velocidade média:

Prof: Imaginem que o aluno RF quer ir ver o jogo Benfica-Porto deste fim de semana. Ele tem que percorrer uma distância de cerca de 350 km. O aluno GL empresta-lhe o seu carro para a viagem e ele demora cerca de 5 horas a chegar ao estádio da Luz. Digam-me a velocidade média da viagem feita pelo aluno RF.

Aluno: É fácil, basta dividir a distância pelo tempo que ele levou a chegar, $\frac{350}{5} = 70$ km/h.

Prof: Será que isso quer dizer que o aluno RF foi sempre a 70 km/h?

Aluno: Quer dizer que em média foi a 70 km/h, podendo haver instantes em que foi mais rápido e instantes em que foi mais devagar.

Prof: Exatamente. A conclusão que podemos tirar é que se quisesse fazer uma viagem de 350 km em 5 horas teria de ir a uma velocidade média de 70 km/h. Como já sabem, a velocidade média pode ser calculada da seguinte forma $\mathrm{Velocidade}_{\mathrm{média}} = \frac{\mathrm{distância}_{\mathrm{final}} - \mathrm{distância}_{\mathrm{inicial}}}{\mathrm{momento}_{\mathrm{final}} - \mathrm{momento}_{\mathrm{inicial}}}$. Para calcularmos a velocidade média calculamos a $\mathrm{t.m.v.}_{[0;1]} = \frac{\mathrm{d}(1) - \mathrm{d}(0)}{1-0} = 8.7$ m/s.

Após a clarificação do procedimento de como se determina a velocidade média num dado intervalo de tempo, os alunos preencheram uma tabela para que compreendesse o significado de velocidade instantânea, no caso do movimento da esfera no instante $t = 2$ segundos:

Tabela 1. Tabela preenchida pelos alunos.

h	$b = 2 + h$	$[2, b]$	$t.m.v._{[2,b]}$
1	$b = 2 + \mathbf{1}$	$[2; 3]$	**17,1**
0,1	$b = 2 + \mathbf{0,1}$	$[\mathbf{2}; \mathbf{2,1}]$	**15,21**
0,01	$b = 2 + \mathbf{0,01}$	$[\mathbf{2}; \mathbf{2,01}]$	**15,021**
0,001	$b = 2 + \mathbf{0,001}$	$[\mathbf{2}; \mathbf{2,001}]$	**15,0021**
0,0001	$b = 2 + \mathbf{0,0001}$	$[\mathbf{2}; \mathbf{2,0001}]$	**15,00021**
h	$b = 2 + h$	$[\mathbf{2}; \mathbf{2} + \boldsymbol{h}]$	…

Prof: Relativamente aos intervalos que criámos na terceira coluna da tabela o que podemos concluir relativamente à sua amplitude?

Aluno: Temos intervalos cada vez menores.

Prof: A alínea c pede-nos a velocidade da esfera num instante e não num intervalo. Perante a quarta coluna da tabela o que podem concluir?

Aluno: Pelos valores que temos será 15 m/s.

Prof: Na terceira coluna o que nós fizemos foi reduzir cada vez mais a amplitude do intervalo para que a reta secante passe a ser uma reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 2.

Aluno: Então como vamos fazer agora para calcular?

Prof: Através da fórmula para o cálculo da taxa média de variação temos $\mathrm{t.m.v.}_{[a;a+h]} = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, sendo o nosso $a + h = b$ como podemos verificar na tabela. Para obtermos o valor da velocidade no instante a o ideal seria que $h = 0$, mas como o ideal não existe então vamos introduzir o conceito de limite onde o $h \to 0$, ou seja, $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ que passaremos a chamar de $f'(a)$ (derivada de f no ponto a).

Aluno: Vamos ter que substituir o h por números muito pequenos?

Prof: O que significa é a variação da taxa média à medida que os valores de h se aproximam de zero. O que pretendemos então calcular?

Aluno: Queremos calcular $d'(2)$.

Alunos: Então$d'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{d(2+h)-d(2)=\lim_{h\to 0}\frac{(2.1h^2+15h+21.6)-21.6}{h}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2.1h^2+15h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2.1h+15)}{h} = \lim_{h\to 0}(2.1h + 15) = 2.1 \times 0 + 15 = 15\ \mathrm{m/s}.$

Aluno: Teremos que fazer sempre uma tabela neste tipo de questão?

Prof: Não. A tabela foi apenas uma estratégia para que vocês pudessem chegar à conclusão que $d'(2) = 15$ m/s antes de aplicarem a fórmula da derivada da função d no ponto de abcissa 2 e para perceberem que podemos considerar valores tão próximos de 2 à medida que h tende para zero.

A transição da noção de taxa média de variação de uma função num dado intervalo do seu domínio para a noção de derivada de uma função num ponto decorreu numa fase em que os alunos ainda não tinham bem presente a perceção dinâmica do comportamento de uma função na vizinhança de um dado valor no seu domínio. Numa abordagem intuitiva, os alunos recorreram à calculadora gráfica para determinar o declive da reta tangente ao gráfico da função d no ponto de abcissa 2.

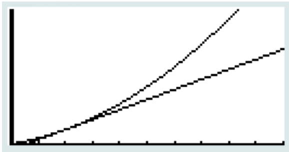


Figura 2. Representação gráfica da função d e da reta tangente ao seu gráfico em $t = 2$.

Prof:	O que concluímos relativamente à relação existente entre o declive da reta tangente a uma função num dado ponto e a sua taxa de variação nesse mesmo ponto?
Aluno:	É igual. E analiticamente como mostramos isso?
Prof:	Utilizamos o processo da alínea c para provarmos analiticamente e o processo da alínea d para provarmos geometricamente. E se agora eu vos perguntar qual o instante em que a esfera terá atingido a velocidade de 40 m/s?
Aluno:	Basta resolvermos a equação $\mathrm{d}'(\mathrm{t}) = 40$ para obtermos o instante t.

Um aluno resolveu no quadro a equação $d'(t) = 40$, tendo obtido, através da definição da derivada de uma função num ponto, que $t \simeq 7.95$ segundos. Nesta aula foi formalizado o conceito de derivada de uma função num ponto, o qual corresponde, geometricamente, ao declive da reta tangente ao gráfico da função nesse mesmo ponto.

A resolução de problemas no desenvolvimento de tópicos de derivada de uma função

Na consolidação dos tópicos taxa de variação de uma função e a sua interpretação geométrica, os alunos resolveram alguns exercícios e problemas, como é exemplo o seguinte problema:

Um fabricante de porta-chaves produz um porta-chaves com a forma do número π, ao preço unitário de 2€ e vende-os a 5€ cada um. A este preço consegue vender mensalmente 4000 unidades do produto. O fabricante pensa em elevar o preço do porta-chaves e estima que, por cada euro de aumento, deixará de vender 400 unidades mensalmente.

a. Exprime a expressão que representa o lucro mensal $L(p)$ do fabricante em função do preço p de venda de cada um dos porta-chaves.
b. Esboça o gráfico da função L e descreve a velocidade de variação do lucro do fabricante.
c. Recorrendo à taxa de variação instantânea da função num ponto calcula o preço ótimo de venda (o preço p que gerará mais lucro).
d. Estabelece a expressão da função, L', que te permite relacionar o preço de venda com o lucro obtido pelo fabricante.

Na resolução deste problema, os alunos revelaram dificuldades em traduzir a informação dada para linguagem matemática:

Prof: Imaginem que são padeiros, como é que calculariam o vosso lucro?

Aluno: Bastava multiplicar o número de pães vendidos pelo preço de cada um.

Prof: Atenção que vocês têm de pagar a quem fez o pão, o vosso lucro é a multiplicação do número de pães vendidos pelo lucro que têm por cada pão, esse lucro é o valor que fica após terem pago ao fabricante de pães.

Aluno: Penso que já sei como fazer, posso ir ao quadro explicar?

Prof: Apresenta-nos a tua explicação.

Aluno: Temos $\text{Lucro} = \text{Lucro por unidade} \times \text{unidades vendidas} = (\mathrm{p}-2) \times (4000 - 400(\mathrm{p}-5))$, $\mathrm{p}-2$ representa o lucro por unidade, p é o preço de venda de cada um dos porta-chaves e 2 é o custo de produção. A 4000 peças vendidas mensalmente deixarão de se vender 400 unidades por cada euro que for aumentado ao preço inicial de 5 euros.

Aluno: Eu estive perto da expressão final, apenas me faltava multiplicar pelo lucro por unidade, $\mathrm{p}-2$.

Prof: Podemos então concluir que a função $\mathrm{L}(\mathrm{p}) = (\mathrm{p}-2) \times \left(4000 - 400(\mathrm{p}-5)\right) = -400\mathrm{p}^2 + 6800\mathrm{p} - 12000$ terá como representação gráfica uma parábola com concavidade voltada para baixo.

Com a determinação da expressão que traduz o enunciado do problema, os alunos esboçaram o gráfico da função L recorrendo à calculadora gráfica.

Figura 3. Representação gráfica da função L.

Nesta representação não surgiram dúvidas relativamente à janela adequada para a visualização do gráfico da função L e na descrição da velocidade de variação do lucro do fabricante. Os alunos concluíram que no intervalo $[2; 8.5]$ a velocidade de variação do lucro diminui à medida que o preço aumenta. À medida que o preço dos porta-chaves aumenta o lucro que o fabricante obtém é cada vez menor. No intervalo $[8.5; 15]$ a velocidade de variação do lucro aumenta. Na determinação do preço ótimo de venda, recorrendo à noção de taxa de variação, um aluno fez a seguinte afirmação:

Aluno: Para determinar o preço ótimo de venda basta determinar onde a derivada se anula.

Prof: Porquê concluis isso?

Aluno: Porque o declive da reta tangente ao gráfico da função L no seu ponto máximo é zero.

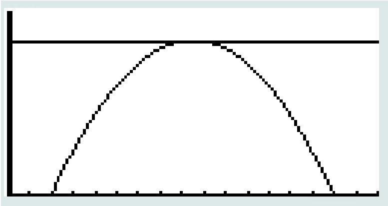


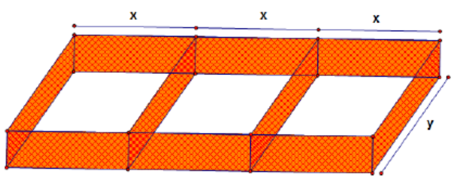
Figura 4. Representação gráfica da função L e da reta tangente ao gráfico da função L no ponto de abcissa 8.5 (maximizante da função L).

A resposta deste aluno permitiu que os restantes se apercebessem de que teriam de desenvolver a expressão $\lim_{h\to 0}\frac{L(p+h)-L(p)}{h}=0$ para obter o preço ótimo de venda recorrendo à taxa de variação instantânea da função num ponto. Aplicando a definição de derivada de uma função os alunos obtiveram a expressão $L'(p)=-800p+6800$ que lhes possibilitou relacionar o preço de venda com o lucro obtido pelo fabricante (à medida que o preço aumenta o lucro diminui).

A resolução de problemas na avaliação de conhecimentos de tópicos de derivada de uma função

Um dos momentos de avaliação teve o formato de um problema de otimização. Para esse efeito, pretendia-se que os alunos obtivessem a expressão que representa a área dos canteiros em função de x, sabendo que o seu perímetro é de 300 metros. Para obterem essa expressão, relacionaram duas variáveis, x e y, como sendo $300=6x+4y \Leftrightarrow y=75-1.5x$.

1. Um jardineiro pretende criar três canteiros retangulares vedados como se indica na figura.



Ele tem 300 metros de rede.

1.1 De acordo com os dados da figura, mostra que a área dos canteiros em função de x é dada por:

$$A(x)=225x-4.5x^2.$$

1.2 Por processos exclusivamente analíticos, determina as dimensões dos canteiros de modo que a sua área seja máxima e indica o seu valor máximo.

Da análise das respostas dos alunos, constata-se que 30.4% apresentaram uma resposta correta; 4.4% apresentaram uma resposta incompleta, porque estabeleceram a relação entre as variáveis x e y mas não obtiveram a expressão que representa a área dos canteiros em função da variável independente; 26.1% fizeram-no de modo incorreto apresentando uma resposta como os exemplos que se encontram na Figura 5 e 39.1% não respondeu.

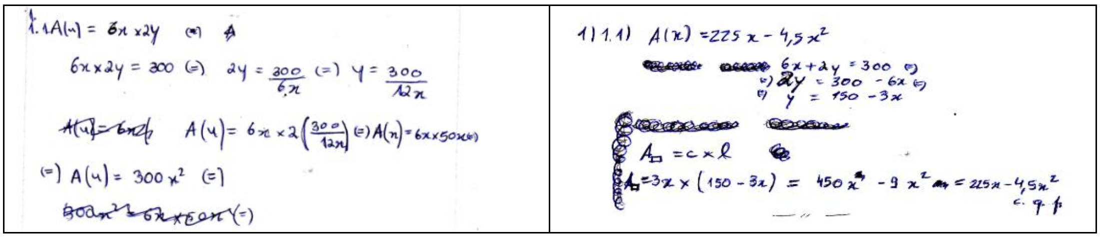


Figura 5. Exemplos de respostas incorretas dadas por dois alunos à alínea 1.1 da Questão 1.

Na primeira resposta incorreta verifica-se que o aluno estabeleceu uma relação incorreta entre as variáveis x e y e não considerou a informação dada no enunciado do problema. Na segunda resposta, o erro cometido pelo aluno foi ter considerado que $300 = 6x + 2y$. Este aluno não incluiu as duas parcelas de rede que separavam os três canteiros e também estavam incluídas na quantidade total de rede gasta.

Com a segunda alínea da questão pretendia-se que os alunos indicassem, por processos exclusivamente analíticos, o máximo da área dos canteiros. Para esse efeito teriam que obter a derivada da função A, $A'(x) = 225 - 9x$, e determinar os zeros da derivada ($A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 25\, m$). A variável x varia entre 0 e 50 e a área máxima dos canteiros é de $2812.5\, m^2$ quando $x = 25$.

Tabela 2. Sinal de A' e variação de A.

x	0		25		50
A'		$+$	0	$-$	
A		↗	Máximo $A(25) = 2812.5\, m^2$	↘	

A percentagem de respostas corretas a esta alínea (1.2) é igual à da alínea anterior (1.1). A percentagem de respostas parcialmente corretas, nesta alínea, foi consideravelmente superior (43.5%), o que se deveu à não indicação do valor da variável y para a área máxima. Nesta alínea a percentagem de alunos que não respondeu (17.4%) foi bastante menor, como também a percentagem de respostas erradas (8.7%).

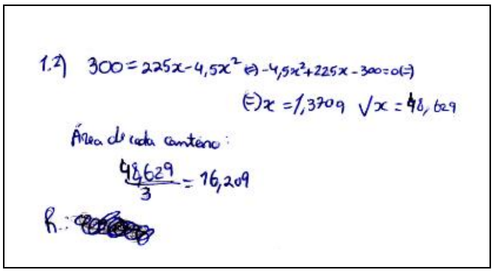
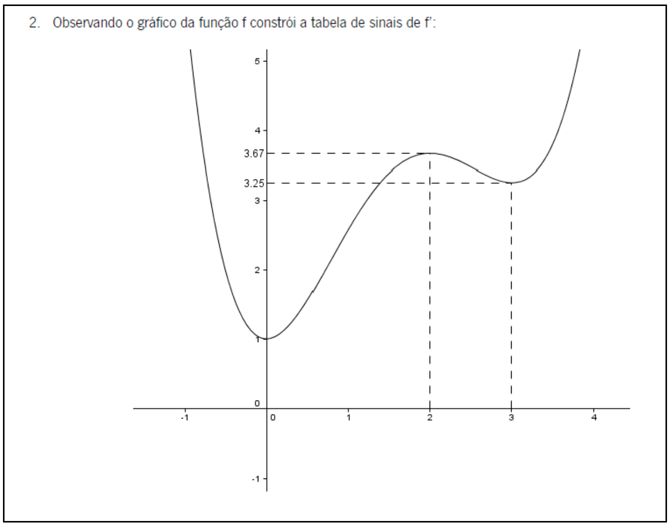
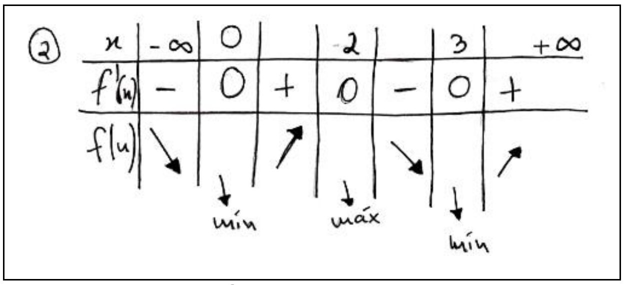


Figura 6. Exemplo de uma resposta incorreta à alínea 1.2 da Questão 1.

A segunda questão colocada aos alunos foi a seguinte:



Como a própria questão indica, através da observação do gráfico da função f pretendia-se que os alunos construíssem a tabela de sinais de f'. O domínio de validade da função f é o conjunto dos números reais, tem como extremos 1 (para $x = 0$), 3.67 (para $x = 2$) e 3.25 (para $x = 3$). Nos intervalos $]-\infty; 0]$ e $[2; 3]$ a função é estritamente decrescente e nos intervalos $[0; 2]$ e $[3; +\infty[$ a função é estritamente crescente. Com esta informação é possível construir a seguinte tabela:



(2)

x	$-\infty$	0		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	mín	↗	máx	↘	mín	↗

Figura 7. Tabela de sinais de f' e de variação de f construída por um aluno.

Nesta pergunta, 21.7% dos alunos não apresentou resposta, 43.5% respondeu corretamente, 21.7% respondeu de modo incompleto e 13.1% respondeu incorretamente. A percentagem de respostas incompletas deveu-se à ausência da indicação de que os extremos da função correspondiam aos zeros da função derivada, o que poderá tratar-se de um lapso por parte dos alunos pois a tabela estava corretamente preenchida, à exceção dos zeros da função derivada. Os 13.1% dos alunos que responderam incorretamente fizeram-no porque atribuíram aos zeros da derivada o valor dos máximos e mínimos da função, ou seja, indicaram como zeros de f' $x = 1$, $x = 3.25$ e $x = 3.67$.

A última questão colocada aos alunos era de desenvolvimento:

3. Sabendo que $g'(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$, indica os extremos da função g. Numa pequena composição justifica a tua resposta.

A visualização do gráfico da função g' na calculadora gráfica permite intuir que os zeros desta função são $x = -1$ e $x = 3$:

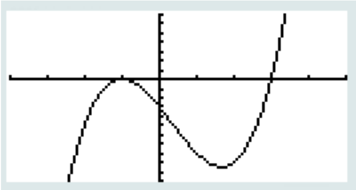


Figura 8. Representação gráfica de g' utilizando a janela $[-4; 5] \times [-11; 7]$.

Mas era necessário ter em atenção que os zeros da função derivada só nos dão os extremos da função no caso de existir uma mudança de sinal na função derivada. Neste caso, $\mathrm{g}(3)$ será um mínimo da função g mas $\mathrm{g}(-1)$ não será extremo porque a função derivada não sofre uma mudança de sinal em $\mathrm{x} = -1$. Nesta questão seria uma ajuda preciosa para os alunos a construção do quadro de sinais de g' e de variação de g:

Tabela 3. Sinal de g' e variação de g.

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
g'	$-$	0	$-$	0	$+$
g	↘	Sem significado	↘	Mínimo	↗

Entre as respostas dos alunos, 39.1% não responderam a esta questão, 8.7% responderam corretamente e 52.2% apresentaram uma resposta incompleta. Os alunos que apresentaram uma resposta tinham a noção que era necessário estudar a derivada da função g para poderem concluir algo relativamente aos extremos da função. Os erros surgiram no estudo da derivada. As respostas parcialmente corretas resultaram dos alunos considerarem que todos os zeros da derivada correspondem a extremos da função, não tendo em conta que, para definirem extremos, a função derivada deverá apresentar uma mudança de sinal nessa raiz, como exemplifica a seguinte resposta:

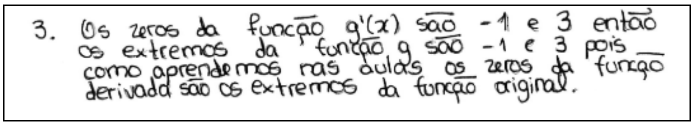

3. Os zeros da função g'(x) são -1 e 3 então os extremos da função g são -1 e 3 pois como aprendemos nas aulas os zeros da função derivada são os extremos da função original.

Figura 9. Exemplo de resposta dada à Questão 3.

Como muitos seus colegas, este aluno fala em extremos da função referindo-se aos objetos e não às imagens. Esta incorreção de linguagem não acontece quando o estudo é feito através da construção das tabelas de sinais de *f'* e monotonia de *f*. É sempre importante realçar estas pequenas diferenças de nomenclatura, que ajudarão os alunos a, num futuro, lerem melhor a linguagem matemática.

Apreciação da resolução de problemas no estudo de derivada de uma função

Na concretização da estratégia com base na resolução de problemas no ensino e na aprendizagem de tópicos de derivada de uma função, a maior preocupação foi com os alunos e a sua aquisição de conceitos matemáticos e consolidação dos mesmos. Um dos maiores problemas que surgiu foi a procura de problemas adequados aos conceitos a explorar e que envolvessem os alunos. Relativamente ao apoio dado aos alunos durante a resolução de problemas, não foi uma tarefa fácil devido ao reduzido hábito que estes tinham de resolver problemas, o que levou a solicitarem constantemente a professora.

Outro problema foi o fator tempo. Uma aula desta natureza tem que prever a existência de um tempo inicial para que os alunos se agrupem e se organizem e comecem a resolver o problema proposto em conjunto. Foram várias as queixas dos alunos relativamente ao tempo que tinham para trabalhar devendo-se ao facto de não o saberem gerir da melhor forma.

As reações dos alunos ao longo das aulas revelaram a necessidade de se proporem e trabalharem problemas que visem desenvolver as competências mencionadas no programa de Matemática do ensino secundário (Ministério da Educação, 2002). A pouca colaboração entre os elementos do grupo são uma falha mencionada por alguns alunos, o que realça a necessidade de se desenvolverem competências de trabalho em grupo, partilhando saberes e responsabilidades. A grande dependência do professor para o esclarecimento de dúvidas mostra que os alunos necessitam de desenvolver mais confiança em si próprios para que se tornem autónomos ao abordarem novas situações. A grande dificuldade na tradução dos dados fornecidos em linguagem matemática para interpretar e resolver problemas da vida real é também uma competência a desenvolver. Alguns alunos sentiram que esta estratégia tornava o processo mais simples e dinâmico, permitindo-lhes ser autónomos na construção do seu conhecimento, enquanto outros se queixaram da complexidade da estratégia e da falta de tempo para conseguirem compreender e interiorizar os conceitos.

No final das aulas lecionadas no âmbito deste estudo, os alunos tiveram a oportunidade de explicitar a sua opinião, respondendo a um questionário, sobre as estratégias delineadas nas aulas sobre a derivada de uma função, mais concretamente sobre a organização das suas atividades em trabalho de grupo, a resolução de problemas e o tema lecionado. A maioria dos alunos (87.0%) considera que trabalhar em grupo foi benéfico e permitiu que os elementos do grupo se ajudassem uns aos outros, mas só 65.2% referem que todos os elementos colaboraram de igual forma na resolução dos problemas.

A maior parte dos alunos (73.9%) participou na correção dos problemas, enquanto 8.7% considera que não o fez. Este facto pode dever-se aos diferentes ritmos de aprendizagem onde alguns alunos acabam por tomar a dianteira. A estratégia de ensino delineada indicia que foi entendida pelos alunos, o que é traduzido por 87.0% que consideram que tiveram oportunidade para comparar resultados e diferentes processos de resolução de problemas.

Nas questões abertas do questionário, os alunos expressaram a sua opinião sobre o tipo de tarefas que mais gostaram de resolver e os aspetos positivos e negativos das aulas com recurso à resolução de problemas. Relativamente ao tipo de tarefas que mais gostam de resolver, 56.5% manifestam preferir os problemas, 30.4% os exercícios, 8.7% ambos os tipos de tarefas e 4.4% não se manifestam. Os alunos que elegem os problemas justificam essa escolha afirmando que os mesmos exigem mais concentração e raciocínio e podem ser aplicados em situações de vida real. Os 30.4% que elegem os exercícios fazem-no por os considerarem mais fáceis de resolver.

Relativamente aos aspetos positivos e negativos das aulas onde foi utilizada a resolução de problemas os alunos mencionam o trabalho de grupo como um aspeto positivo e também como um aspeto negativo, pois apesar de ser uma forma de trabalhar onde os alunos se apoiam entre si também gera mais agitadas e nem todos se sentem à vontade a trabalhar com este método. Os alunos também consideram positivo a inexistência de pressão para se dirigirem ao quadro ou se manifestarem perante a turma, a resolução de problemas, a troca de ideias existente entre a professora e a turma e a participação ativa dos alunos nas aulas. Como aspetos negativos, além do trabalho de grupo, mencionam o fator tempo e a desorganização na sala de aula derivada ao trabalho em grupo.

Conclusões

Da análise da informação recolhida constata-se que as principais atividades desenvolvidas pelos alunos na aprendizagem da derivada de uma função com recurso à resolução de problemas foram a interpretação de informação, a definição de estratégias e a discussão de resultados (Polya, 1977).

A participação dos alunos foi uma constante ao longo deste estudo. Existiram avanços e recuos, mediante as necessidades que iam surgindo no decorrer da resolução de problemas, assim como a utilização de diferentes abordagens (Huete & Bravo, 2006). A resolução de problemas ao longo das aulas constituiu um fator de interação entre professora e alunos (individualmente ou em turma) e proporcionou a discussão de respostas e comparação de diferentes estratégias que ajudaram na construção de novos conhecimentos, conforme recomenda Parra e Saiz (2001). O ato de pensar perante os problemas propostos contribuiu para o desenvolvimento da capacidade de raciocínio dos alunos, o que se traduziu na elaboração de estratégias de resolução válidas, como defendem Zuffi e Onuchic (2007) e Dante (1994). De acordo com o que é recomendado pelo NCTM (2008), a resolução de problemas deu oportunidade aos alunos de consolidar e ampliar os seus conhecimentos e estimularam a aprendizagem matemática levando os alunos a compreender que a Matemática não é um 'conjunto de fórmulas'.

Relativamente aos constrangimentos que surgiram no processo de ensino-aprendizagem do tema derivada de uma função, a falta de tempo surge como um obstáculo que torna difícil a tentativa do professor mudar a prática pedagógica (Floriani, 2000) e é um constrangimento bastante apontado pelos alunos. Quando indagados relativamente às desvantagens que encontravam no método aplicado ao longo das aulas deste projeto quase todos os alunos apontaram a falta de tempo para poderem dedicar à resolução de um problema. Este constrangimento surge como resultado do extenso programa a ser concretizado.

O trabalho de grupo foi utilizado ao longo das aulas com o intuito de ajudar os alunos a partilharem ideias para que os elementos do grupo se entreajudassem na resolução dos problemas. Este método de trabalho foi benéfico para alguns, que concordaram ter recebido e dado apoio e ajuda dentro do grupo, enquanto outros disseram não se ter sentido à vontade para trabalhar e que se sentiram um pouco postos de parte. A divergência de opiniões relativamente ao trabalho de grupo poderá dever-se aos diferentes ritmos de aprendizagem que uma só turma tende a apresentar e que foi o caso da turma onde foi aplicado este estudo.

Durante a lecionação de derivada de uma função os alunos não apresentaram grandes dificuldades no cálculo de derivadas (Lauten et al., 1994), o que traduz a sua aprendizagem na aquisição de definições e de regras. O mesmo já não aconteceu nas questões com representações gráficas onde revelaram estar menos à vontade sempre que tinham de estabelecer o domínio de validade para a função que estivessem a considerar. Este constrangimento dever-se-á à falta de confiança que alguns alunos manifestam no uso da calculadora gráfica, atribuindo à ferramenta uma dificuldade que lhes pertence, pois a mesma só poderá fornecer resultados mediante os dados que lhe forem 'fornecidos'.

Referências bibliográficas

Almeida, C., & Viseu, F. (2002). Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, 15(1), 193-219.

Artigue, M. (1991). Analysis. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (167-198). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers,.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Bransford, J. D., Ann, L. B., & Rodney, R. C. (1999). *How people learn: Brain, mind, experience, and school*. Washington, D.C.: National Academy Press.

Dante, L. (1994). *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. São Paulo: Editora Ática.

Ferrini-Mundy, J., & Lauten, D. (1993). Teaching and learning calculus. In P. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: high school mathematics* (pp. 155-176). Nova York: MacMillan.

Floriani, J. V. (2000). *Exemplificação apoiada na matemática*. Blumenau: FURB.

Garofalo, J., & Lester, F. K. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring, and Mathematical Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3), 163-176.

Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly*, 87(7), 519-524.

Huete, J. C., & Bravo, J. A. (2006). *O ensino da matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artmed.

Lara, I. C. M. (2004). Ensino inadequado de Matemática. *Ciências e Letras*, 35, 137-152.

Lauten, A., Graham, K., & Ferrini-Mundy, J. (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphic calculator. *The Journal of Mathematical Behavior*, 13(2), 225-237.

Ministério da Educação (2002). *Matemática A – Programa do 10.º ano*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

NCTM (1994). *Normas* profissionais *para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2008). Princípios *e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.

Parra, C., & Saiz, I. (2001). *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artmed.

Polya, G. (1977). *A arte de resolver problemas: um novo aspeto do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

Polya, G. (1985). O ensino por meio de problemas. *Revista do Professor de Matemática*, 7, 11-16.

Riddle, L. (1994). Introducing the derivative through the iteration of linear functions. *The Mathematics Teacher*, 87(5), 377-381.

Schoenfeld, A. H. (1987). "What's All the Fuss about Metacognition?" In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 189-215). Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Tall, D. (1977). Conflicts and catástrofes in the learning of mathematics. *Mathematical Education for Teaching*, 2 (4), 2-18.

Vale, I. (2000) *Didática da Matemática e Formação Inicial de Professores num Contexto de Resolução de Problemas e de Materiais Manipuláveis*. Aveiro. Universidade de Aveiro.

Vergnaud G. (1993). Theorical frameworks and empirical facts in the psychology of mathematics education. In *Proceedings of the International Congress on Mathematical Education* (pp. 39-41). Budapest: ICME.

Vianna, C. R. (2002). Resolução de problemas. *Jornadas da Educação* (pp. 401-410). Curitiba.

Zuffi, E. M, & Onuchic, L. R. (2007). O ensino e a aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas e os processos cognitivos superiores. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 11, 79-97.