Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria das Dores Picão Ferreira

Jogos Matemáticos e Matemática Elementar

outubro de 2013

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria das Dores Picão Ferreira

Jogos Matemáticos e Matemática Elementar

Doutoramento em Estudos da Criança
Especialidade em Matemática Elementar

Trabalho realizado sob a orientação do
Professor Doutor Pedro Palhares
e do
Professor Doutor Jorge Nuno Silva

outubro de 2013

DECLARAÇÃO

Nome Maria das Dores Picão Ferreira

Endereço eletrónico: doresferreira@gmail.com

Título dissertação: Jogos Matemáticos e Matemática Elementar

Orientadores: Professor Doutor Pedro Palhares e Professor Doutor Jorge Nuno Silva

Ano de conclusão: 2013

Designação do Doutoramento:

Doutoramento em Estudos da Criança, Especialidade em Matemática Elementar

Universidade do Minho, ____/____/________

Assinatura: ____

Ao meu marido

Aos meus filhos Susana e Hugo

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho só foi possível graças à colaboração de um grande número de pessoas a quem quero expressar aqui o meu agradecimento.

Ao Professor Doutor Pedro Palhares por me ter lançado este desafio, que veio transformar a minha vida.

Aos meus orientadores, Professor Doutor Pedro Palhares e Professor Doutor Jorge Nuno Silva, pela orientação, sugestões, correções e incentivo.

A todos os alunos intervenientes no estudo, pela sua grande colaboração, abertura e total envolvimento.

Aos professores das turmas, pela amizade, disponibilidade e simpatia com que me receberam.

Ao meu colega Leonel pela sua colaboração.

Aos meus pais, pelo acompanhamento que me têm dado em todas as etapas da minha vida e cujo exemplo é difícil de igualar.

À minha família pelo constante acompanhamento e compreensão.

RESUMO

Jogar é uma atividade que se encontra presente em diferentes domínios da cultura, sendo também uma atividade com forte ligação à matemática. A componente lúdica dos jogos tem contribuído para que sejam encarados como agentes motivadores do ensino e aprendizagem da matemática ou de outras áreas. A recomendação da prática de determinados jogos de estratégia, como meio de desenvolvimento de competências úteis ao ensino e aprendizagem da matemática, tem vindo a ser manifestada em documentos curriculares e na literatura. Nomeadamente, os jogos de tabuleiro são referidos como potenciadores de benefícios para o desempenho dos alunos em matemática, onde os tabuleiros podem constituir contexto para a resolução de problemas interessantes.

A identificação de padrões é considerada, pela literatura e pelos documentos curriculares, um dos aspetos essenciais à aprendizagem matemática. A ligação entre padrões e jogos encontra-se presente em vários aspetos do jogo, como o material ou a análise de alguns jogos, onde é possível identificar diferentes padrões, que permitem o estabelecimento de conexões entre diferentes campos da matemática. A capacidade de identificar padrões foi analisada num estudo, desenvolvido junto de alunos do Ensino Básico, que revelou existir relação entre a força de jogo em xadrez e a capacidade de identificar padrões.

A implementação do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos veio divulgar e incentivar a prática deste tipo de jogos de tabuleiro. Atendendo a que os jogos matemáticos não são jogos didáticos, interessava verificar se a prática deste tipo de jogos teria alguma relação com aspetos ligados ao ensino da matemática, nomeadamente à identificação de padrões. Consequentemente surgiu o interesse em aferir possíveis diferenças nessas relações entre jogos matemáticos distintos, bem como estre estes jogos e outro tipo de jogos.

Este estudo pretende verificar se a capacidade de identificar padrões está relacionada com a capacidade de jogar jogos matemáticos, um jogo de informação imperfeita e um jogo para um jogador; se existem, para os grupos dos melhores jogadores e dos piores jogadores, relações específicas e diferenciadas entre a capacidade de jogar e a capacidade de identificar padrões; se a capacidade de jogar está relacionada com a avaliação escolar a matemática; se existem diferenças na capacidade de identificação de padrões entre a prática sistemática de jogos matemáticos e a resolução de problemas em contexto de jogo.

O estudo é de natureza quantitativa, e foi desenvolvido em duas etapas complementares: um estudo correlacional e um estudo quase-experimental. A população é constituída por alunos do Ensino Básico, sendo utilizada uma amostra de alunos do 3.º ao 6.º ano. Como instrumentos de recolha de dados utilizou-se um teste que mede a capacidade de identificar padrões, o ranking dos campeonatos, os resultados obtidos nas provas de aferição e uma bateria de problemas em contexto de jogo. A análise estatística dos dados foi efetuada recorrendo aos testes adequados a cada especificidade, utilizando o programa *SPSS* para *Windows*, versão 17.

A análise dos dados revelou que dos quatro jogos de informação perfeita (jogos matemáticos) apenas o Ouri e o Semáforo apresentaram relação significativa com a capacidade de identificar padrões. O jogo de informação imperfeita, Dominó Belga, e o jogo Syzygies (para um jogador) revelaram estar relacionados com a capacidade de identificar progressões numéricas e geométricas e padrões que envolvem números pares e ímpares, respetivamente. No que respeita aos melhores jogadores, a análise revelou que a identificação de padrões apresenta uma relação muito forte com a capacidade de jogar Semáforo e Pontos e Quadrados. Esta análise também identificou uma relação moderada entre a capacidade de jogar Ouri, Semáforo, Pontos e Quadrados, Dominó Belga e Syzygies e tipos particulares de padrões. Relativamente ao grupo de piores jogadores identificaram-se relações entre os jogos Semáforo, Pontos e Quadrados, Gatos & Cães e Syzygies e determinado tipo de padrões. Os resultados da análise também mostraram que apenas o jogo Semáforo tem uma relação moderada com os resultados globais nas provas de aferição, embora os jogos Ouri e Semáforo revelassem relação com alguns dos domínios. Para o jogo Semáforo, a análise da covariância (ANCOVA) revelou a existência de diferenças significativas entre os grupos. Os resultados obtidos sugerem-nos que a identificação de padrões é significativamente diferente quando os alunos praticam sistematicamente o jogo Semáforo.

ABSTRACT

Play is an activity that is present in different fields of culture and with a strong link to mathematics. The recreational aspect of games has contributed to being seen as motivators of the teaching and learning of mathematics or other areas. The recommendation of the practice of certain strategy games as a means for developing useful skills to teaching and learning mathematics has been present in curriculum documents and literature. In particular, board games are referred to as driving forces of benefits for student performance in mathematics, where the boards can be the context for solving interesting problems.

Patterns identification is considered, by the literature and the curriculum documents, one of the essential aspects of learning mathematics. The connection between patterns and games is present in different aspects of games, such as materials or the analysis of some games, where it is possible to identify different patterns that enable connections between different fields of mathematics. The ability to identify patterns was analyzed in a study with students of elementary education, which revealed a relationship between the strength of chess and the ability to identify patterns.

The realization of the National Championship Game Mathematicians disseminated and encouraged the practice of this group of board games. Since mathematical games are not educational games, we were interested in verifying whether the practice of this kind of games would have some relation to aspects related to the teaching of mathematics, including the identification of patterns. Consequently, we became interested in assessing possible differences in relationships between different mathematical games, as well as between these games and other games.

This study aimed to assess whether the ability to identify patterns is related to the ability to play mathematical games , a game of imperfect information and a game for one player; if there is, for the groups of the best players and the worst players, specific and differentiated relationships between the ability to play and the ability to identify patterns; if the ability to play is related to school mathematics assessment;

and if there are differences in the ability to identify patterns among the systematic practice of mathematical games and problem solving in a game context.

The study is quantitative, and was developed in two complementary steps: a correlational study and a quasi-experimental study. The population consists of elementary school students and we used a sample of students from 3^{rd} to 6^{th} grade. As instruments to collect data we used a test that measures the ability to identify patterns, the ranking of the championships, the results obtained from the standardized tests and a set of problems in a game context. The statistical analysis was performed using the appropriate tests for each specific case, using SPSS for Windows, version 17.

Data analysis revealed that concerning the four games of perfect information (mathematical games) only *Ouri* and Traffic Lights showed a significant relationship with the ability to identify patterns. The game of imperfect information, *Dominó Belga*, and the game Syzygies (one player) proved to be related to the ability to identify numerical and geometric progressions and patterns involving even and odd numbers, respectively. Concerning the best players, analysis revealed that the identification of patterns has a strong relationship with the ability to play Traffic Lights and Dots and Boxes. This analysis also identified a moderate relationship between the ability to play *Ouri*, Traffic Lights, Dots and Boxes, *Dominó Belga* and Syzygies and particular types of patterns. Regarding the group of worst players relationships were identified between games Traffic Lights, Dots and Boxes, Cats & Dogs and Syzygies and particular types of patterns. The results analysis also revealed that only the game Traffic Lights has a moderate relationship with the overall results of the standardized tests, although games Traffic Lights and *Ouri* revealed relationships with some of the specific fields. Concerning the game Traffic Lights, the analysis of covariance (ANCOVA) revealed significant differences between groups. The results suggest that the identification of patterns is significantly different when students systematically practice the game Traffic Lights.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO AO ESTUDO

1.1. Introdução

Este capítulo introdutório tem por objetivo apresentar a pertinência, enquadramento e razões que motivaram a realização deste estudo. Serão aqui também enunciados os aspetos essenciais ao desenvolvimento do estudo, nomeadamente a delimitação do problema, a definição dos termos em destaque no estudo (para ajudar a diminuir alguma ambiguidade que possa existir na sua interpretação), as questões e respetivas hipóteses de investigação. A finalizar o capítulo, apresentar-se-á uma síntese da organização definida para este trabalho.

1.2. Fundamentos do estudo

O pensamento matemático é provocado pela contradição, tensão e surpresa e suportado por uma atmosfera de questionamento, desafio e reflexão (Mason, Burton & Stacey, 1985). Mason e colegas consideram, ainda, que o pensamento matemático pode ser melhorado através da prática reflexiva e que nos ajuda a uma melhor compreensão do mundo e de nós mesmos.

Investigações realizadas em diferentes contextos culturais conduzem à tese de que a matemática deve ser entendida como uma espécie de conhecimento cultural que todas as culturas desenvolvem, embora podendo não ser necessariamente igual de cultura para cultura, à semelhança do que acontece com a língua, a religião, os rituais, entre outos (Bishop, 1988). Considerando a matemática universal às culturas, Bishop aponta seis atividades promotoras do conhecimento matemático que são comuns a todas as culturas. Uma dessas atividades é a de jogar, a qual envolve num primeiro nível jogos e *puzzles,* e noutro nível regras, procedimentos, análise de jogos, acaso, estratégias, previsão, adivinhas e raciocínio hipotético. Desta forma, jogar é apresentada como uma atividade com forte ligação à matemática, estando na génese de conhecimento matemático.

Dado o aspeto lúdico dos jogos, estes têm sido encarados como agentes motivadores para o ensino de várias áreas, incluindo a matemática, havendo várias indicações de mais-valias para a aprendizagem da matemática.

Numa análise a alguns jogos de tabuleiro, Silva e Santos (2011) referem determinados jogos de tabuleiro como potenciadores de benefícios para o desempenho dos alunos em matemática.

Palhares (2004) considera que os jogos de estratégia permitem desenvolver capacidades semelhantes às que os alunos desenvolvem e necessitam para a resolução de problemas.

Segundo Yeo (2010) só através de jogos matematicamente ricos é possível envolver nos alunos simultaneamente a mente e o coração. Todos gostam de ganhar e na procura de estratégias vencedoras os alunos utilizam as heurísticas da resolução de problemas. O autor apela, desta forma, para o envolvimento dos alunos em atividades ao mesmo tempo apelativas e ricas do ponto de vista matemático. Fazendo uma analogia entre a procura de estratégias nos jogos e os processos envolvidos no pensamento matemático referidos por Mason, Burton e Stacey, Yeo (2010) refere que, ao investigarem a estratégia vencedora os alunos têm de começar por analisar cenários ou casos específicos (especializar), formular hipóteses ou conjeturas (conjeturar) e testá-las. Se comprovarem a validade da conjetura (justificar), então elas podem ser considerados como generalizações de casos específicos (generalizar).

As mais-valias dos jogos de tabuleiro não se esgotam no jogo em si mesmo. Como revela Palhares (2011), os próprios materiais, nomeadamente os tabuleiros, podem constituir contexto para a resolução de problemas interessantes do ponto de vista da educação matemática.

Apesar disto, após a análise de diferentes investigações envolvendo jogos, Gobet, de Voogt e Retschitzki (2004) referem que as diversas declarações proferidas acerca dos benefícios dos jogos de tabuleiro carecem de confirmações empíricas sólidas.

Um dos aspetos essenciais à aprendizagem matemática é a identificação de padrões. Para Devlin (1997) a matemática é a ciência dos padrões e Resnik (1997) afirma que a finalidade principal da matemática não são os objetos matemáticos em si mesmos mas a estrutura na qual se encontram organizados. A identificação de padrões encontra-se também presente em partes específicas da matemática, como a resolução de problemas, sendo a procura de regularidades considerada como uma das estratégias mais poderosas da resolução de problemas (Vale & Pimentel, 2004).

A ligação entre padrões e jogos não parece difícil. Provavelmente, os padrões visuais proporcionados pelo material de jogo são o primeiro foco das nossas atenções. Há jogos, como os *string games* (jogos de cordel) que permitem construir facilmente figuras geométricas e investigar os padrões formados com essas figuras, nomeadamente a relação entre o número de triângulos e de retângulos e entre o número de polígonos e o número de vértices (Gibbs, 1999). Também a análise de alguns jogos possibilita a descoberta de padrões numéricos e geométricos muito interessantes, que permitem o estabelecimento de conexões entre diferentes campos da matemática. Essa análise entusiasmou alguns matemáticos, que se dedicaram à descoberta de soluções elegantes para alguns jogos, algumas utilizando conceitos matemáticos complexos.

A capacidade de identificar padrões foi utilizada no âmbito de um estudo correlacional, desenvolvido junto de alunos do Ensino Básico. Os resultados obtidos nesse estudo revelaram a existência de uma relação entre a força de jogo em xadrez e a capacidade de identificar padrões (Ferreira & Palhares, 2008). A identificação desta relação entre o xadrez e os padrões levanta a hipótese de a identificação de padrões poder estar relacionada com outros jogos, o que levou os autores a sugerir o alargamento em futuras investigações a outro tipo de jogos.

Havendo tanta referência da ligação entre jogo e matemática (especialmente padrões), questionou-se a possibilidade de essa ligação ser diferenciada consoante o tipo de jogo. Desta forma, surgiu o interesse em investigar a possível relação entre diferentes tipos de jogos com os padrões.

1.3. Definição de termos

Há conceitos que não sendo propriamente ambíguos possuem diferentes significados consoante o contexto. Outros são por si só tão ricos que necessitam de ser clarificados para se poder incidir numa especificidade particular. Assim, este ponto irá apresentar a definição de alguns conceitos pertinentes ao estudo, procurando, deste modo, afastar possíveis ambiguidades e centrar os termos no preciso aspeto em que irão ser abordados ao longo deste estudo.

O termo 'jogo' é utilizado para referir jogos de estratégia, sendo no estudo utilizados vários jogos para dois jogadores e um jogo para um jogador.

Os 'jogos matemáticos' são aqui referidos como sendo jogos de estratégia em que não há informação escondida nem intervenção de qualquer elemento de aleatoriedade. Estes jogos são também designados como jogos de informação perfeita.

O termo 'padrões' tem o significado de regularidades presentes em sequências numéricas ou geométricas/pictóricas.

Na categoria de 'melhores' e 'piores' jogadores estão os jogadores que ocuparam respetivamente os primeiros e os últimos lugares nos campeonatos correspondentes. No caso específico do xadrez, tal categorização pôde ser feita através da pontuação 'ELO' dos jogadores, que é publicada cada seis meses pela Federação de xadrez.

'Problemas em contexto de jogo' são situações de jogo onde é colocada uma questão, que o aluno tem de responder fazendo uso das regras de jogo, mas para a qual não conhece um procedimento de resolução, à partida.

1.4. Delimitação do problema e questões de investigação

No âmbito de uma investigação correlacional foi identificada a existência de relação entre a capacidade de identificar padrões e a capacidade de jogar xadrez (Ferreira & Palhares, 2008), um jogo matemático. Uma das recomendações desse estudo consistia no alargamento da procura de relações com a identificação de padrões a outros jogos. A recomendação da prática de determinados jogos de estratégia como meio de desenvolvimento de competências úteis ao ensino/aprendizagem da matemática tem vindo a ser manifestada em vários documentos curriculares (DEB,1998, 2001; DGIDC, 2007) e na literatura (Lee, 1996; Moreira & Oliveira, 2004; Palhares, 2004; Bragg, 2006; Smole, Diniz & Cândido, 2007; Silva & Santos, 2011), o que não se tem refletido em investigações neste âmbito. Esta falta de investimento produziu uma lacuna que se pretende ajudar a preencher com este estudo.

A grande participação das escolas a nível nacional no Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos é reveladora do interesse, por parte de alunos e professores, pela prática de jogos matemáticos. Atendendo a que os jogos matemáticos não são jogos didáticos, interessa-nos verificar se a prática deste tipo de jogos terá alguma relação com aspetos ligados ao ensino da matemática, nomeadamente à identificação de padrões. Consequentemente surge o interesse em aferir possíveis diferenças nessas relações entre jogos matemáticos distintos, bem como entre estes jogos e outro tipo de jogos.

O interesse da investigadora no 1.º ciclo do Ensino Básico, enquanto professora deste nível de ensino, e a existência de um teste para medir a capacidade de identificar padrões validado para alunos do 3.º ao 6.º ano de escolaridade conduziram a que a população do estudo incidisse sobre os alunos destes dois níveis de ensino, a saber o 1.º e o 2.º ciclos do Ensino Básico.

Na organização deste estudo foram delineadas duas análises sequenciais e complementares, constituídas por uma investigação correlacional seguida de uma investigação quase-experimental.

Com a investigação correlacional pretende verificar-se a existência ou não de relação entre a capacidade de jogar determinado tipo de jogos e a capacidade de identificar padrões, incluindo também sete fatores resultantes de análise fatorial conduzida no teste. Outro dos objetivos do estudo consiste na verificação da possível existência de relação entre a capacidade de identificar padrões e os grupos dos melhores e dos piores jogadores. Pretende-se, ainda, verificar a existência ou não de relação entre a capacidade de jogar jogos matemáticos e os resultados obtidos nas provas de aferição de matemática. Os jogos em análise distinguem-se fundamentalmente em três tipos: a) jogos matemáticos, que constituem o grupo dos jogos de informação perfeita; b) jogos de informação imperfeita; c) jogos para um jogador.

A investigação quase-experimental tem por objetivo verificar se a) a resolução de problemas em contexto de jogo e b) a prática sistemática de jogos de estratégia, melhoram a capacidade de identificar padrões nos alunos do 4.º ano de escolaridade. Paralelamente pretende-se verificar se existe diferença entre as duas abordagens mencionadas na capacidade de identificar padrões.

Assim, surgem as seguintes questões de investigação:

1. A capacidade de identificar padrões está relacionada com a capacidade de jogar:
    a) jogos matemáticos?
    b) um jogo de informação imperfeita?
    c) um jogo para um jogador?
2. Existem, para os grupos dos melhores jogadores e dos piores jogadores, relações específicas e diferenciadas entre a capacidade de jogar e a capacidade de identificar padrões?
3. A capacidade de jogar está relacionada com a avaliação escolar a matemática?
4. Existem diferenças na capacidade de identificação de padrões entre a prática sistemática de jogos matemáticos e a resolução de problemas em contexto de jogo?

Das questões de investigação acima referidas foram formuladas as seguintes hipóteses de investigação:

a) Existe relação entre a capacidade de jogar jogos de informação perfeita e a capacidade de identificar padrões.
b) Existe relação entre a capacidade de jogar jogos de informação imperfeita e a capacidade de identificar padrões.
c) Existe relação entre a capacidade de jogar jogos para um jogador e a capacidade de identificar padrões.

d) Existem, para os grupos dos melhores jogadores e dos piores jogadores, relações específicas e diferenciadas entre a capacidade de jogar e a capacidade de identificar padrões.
e) Existe relação entre a capacidade de jogar e a avaliação escolar a matemática.
f) Existem diferenças significativas na capacidade de identificar padrões entre a prática sistemática de jogos matemáticos e a resolução de problemas em contexto de jogo.

1.5. Estrutura

Este trabalho encontra-se estruturado em nove capítulos, onde se vão delineando as diferentes fases de desenvolvimento, desde o levantamento do problema à conclusão.

Assim, no capítulo 1 são apresentados os fundamentos do estudo e a definição de termos essenciais à desambiguação. Neste capítulo é, ainda, delimitado o problema em estudo e formuladas as respetivas questões e hipóteses de investigação. Por fim apresenta-se a estrutura do trabalho.

Os capítulos 2, 3 e 4 constituem a fundamentação teórica inerente ao problema de investigação. O capítulo 2 apresenta os aspetos fundamentais aos padrões, nomeadamente a identificação de padrões, perspetivas da classificação de padrões, os padrões e a educação matemática e os padrões na análise de jogos e resolução de problemas. Por fim apresenta-se uma síntese do capítulo. O capítulo 3 aborda a resolução de problemas, nomeadamente o que se entende por resolução de problemas e o seu enquadramento na educação matemática. Este capítulo apresenta, ainda, uma secção dedicada ao conceito de *puzzle*. O capítulo 4 apresenta a revisão de literatura nos aspetos ligados ao jogo. A introdução ao estudo dos jogos apresenta a definição do conceito e as características principais. Seguidamente apresentam-se diferentes perspetivas da classificação dos jogos. Para uma melhor compreensão da abrangência do conceito e da sua evolução, apresentam-se algumas teorias do jogo desenvolvidas por diferentes autores. Depois de analisar com algum detalhe investigações sobre jogo, continua-se referindo o papel que ele desempenha na educação matemática, bem como as consequentes implicações no currículo. Um dos pontos está dedicado à clarificação do que se entende por jogos matemáticos, na visão de alguns autores. Por fim apresenta-se uma breve síntese do capítulo.

O capítulo 5 é dedicado à metodologia. Nele são abordados o paradigma de investigação, nomeadamente a investigação correlacional e a investigação quase-experimental. Neste capítulo apresenta-se a organização do estudo, as hipóteses de investigação e variáveis envolvidas, os sujeitos, os instrumentos de recolha de dados, bem como os procedimentos inerentes à recolha de dados. Um ponto está dedicado às especificidades da análise dos dados. O capítulo termina com uma síntese do essencial apresentado em cada ponto.

Os capítulos 6 e 7 fazem a apresentação dos resultados, respetivamente da investigação correlacional e da investigação quase-experimental. Ao longo destes capítulos os resultados são apresentados para cada hipótese de investigação.

O capítulo 8 está dedicado à discussão dos resultados obtidos no estudo. Esta discussão encontra-se estruturada por jogo.

O capítulo 9 constitui a conclusão do estudo. Aqui é apresentada a resposta a cada uma das questões de investigação.

Termina-se com a indicação das referências bibliográficas.

CAPÍTULO 2

PADRÕES

2.1. Introdução

Este capítulo apresenta diferentes aspetos considerados essenciais ao estudo de padrões em matemática. Em primeiro lugar inclui-se o conceito de padrão, onde se procura clarificar o termo 'padrão' utilizado ao longo deste estudo e se apresenta a importância da identificação de padrões. Seguidamente, atendendo aos diferentes tipos de padrões referidos na literatura, pareceu-nos essencial uma abordagem às diferentes perspetivas da classificação de padrões. O ponto seguinte encontra-se dedicado à importância do estudo dos padrões, bem como aos estudos desenvolvidos sobre padrões, no âmbito da educação matemática. Dado este estudo se encontrar centrado na relação entre jogos e padrões, é apresentado um ponto dedicado à presença dos padrões na análise de jogos e na resolução de problemas. Por último faz-se uma breve síntese dos aspetos considerados mais relevantes ao longo dos pontos desenvolvidos neste capítulo.

2.2. A identificação de padrões

Antes de iniciarmos a abordagem à identificação de padrões, torna-se necessário esclarecer primeiramente o que consideramos ser um padrão. Em Portugal, o termo 'padrão' utiliza-se para designar realidades muito diferentes, como facilmente se pode constatar, por exemplo, consultando o Dicionário da Língua Portuguesa, da Academia de Ciências de Lisboa (Verbo, 2001). De forma muito sucinta, podemos afirmar que o termo tem duas derivações distintas que produziram dois caminhos de significação disjuntos. Um deles proporcionou a que um padrão possa representar o marco colocado para assinalar um acontecimento importante, como aqueles que foram colocados pelos navegadores nas terras descobertas ou o arco enfeitado que ainda hoje é utilizado em festas e romarias. O outro conduziu a um campo semântico diferenciado do primeiro e está associado à ideia de modelo ou norma, ou seja, algo que se utiliza para servir de referência, como as medidas padrão, os padrões de conduta ou o padrão de determinado tecido. Este último caso, o padrão de tecido, tem intrínseca a ideia de que há um modelo, imagem, ou desenho, que serve de referência a toda a construção ou decoração do referido tecido. Este caso será, provavelmente, também aquele que é mais frequentemente empregue na linguagem, para fazer referência a diferentes decorações de tecidos, pavimentos, peças de vestuário, entre outros. Apesar da beleza e significado histórico dos padrões utilizado na época dos Descobrimentos, o primeiro caminho não é aquele que nos interessa abordar aqui. O segundo caminho, esclarece um pouco acerca do que em matemática consideramos como padrões, mas muito fica ainda por esclarecer.

Habitualmente, o termo *padrão* é utilizado para nos referirmos às regularidades formadas por determinada disposição de números, formas, cores ou sons, onde se encontram regularidades. Para Mulligan e Mitchelmore (2009) um padrão é uma regularidade previsível envolvendo relações numéricas, espaciais ou lógicas. A opinião de diferentes autores revela que o conceito de padrão se encontra relacionado com conceitos como motivo, regularidade, regra e ordem (Vale, Palhares, Cabrita & Borralho, 2006). Papic e Mulligan (2005) referem, ainda, a relação entre os conceitos de padrão e de estrutura. Para as autoras um padrão pode ser definido como uma regularidade numérica ou espacial, sendo a estrutura construída pela relação entre os diferentes elementos do padrão. Desta forma, verifica-se que a noção de padrão é ainda mais abrangente do que à partida possa parecer, estando também presente nas poesias, no nosso comportamento, nos fenómenos cíclicos da natureza e em quase tudo o que nos rodeia. Essa grande abrangência do conceito encontra-se muito presente nas considerações de Keith Devlin (1998), que aponta a existência de padrões em diversas áreas, padrões que podem ser observados nos mais variados locais da natureza, como as órbitas dos planetas, os nós, a simetria das flores, a sequência de notas que formam uma música, a relação entre as palavras para formar uma frase ou as marcas no pelo dos leopardos. Aliás, Devlin (1997) refere que a matemática pode ser considerada a ciência dos padrões. Esta ideia é partilhada por Davis e Hersh (In Vale, Palhares, Cabrita & Borralho, 2006, p. 2) quando referem que "O próprio objectivo da Matemática é, em certa medida, descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, extrair a estrutura e a invariância da desordem e da confusão". Ou seja, a identificação de padrões encontra-se intrinsecamente relacionada com a matemática (Devlin, 1997), sendo esta considerada a ciência que procura compreender todo o tipo de padrões, sejam os que ocorrem na natureza ou aqueles que são inventados pelo próprio ser humano (Steen, 1990). Como referem Ponte e Serrazina (2000, p. 29), "saber matemática é investigar relações entre regularidades, identificar os padrões que lhes estão na origem".

Como se pode observar no que foi referido anteriormente, o termo padrão é muito abrangente e facilmente aparece relacionado com outros termos. Após a análise das ideias expressas por vários autores, Vale, Palhares, Cabrita e Borralho (2006) consideram que o conceito de padrão se encontra associado aos termos regularidade, sequência, motivo, regra e ordem. Sawyer (1982) define padrão como sendo qualquer tipo de regularidade capaz de ser reconhecido pela mente. Refere ainda que os padrões são a única coisa relativamente estável num mundo em constante mudança.

Se refletirmos acerca dos diferentes tipos de padrões e o local e o modo onde e como podem ser observados, facilmente se conclui que o estudo do conceito de padrão não se restringe à matemática. Muitas outras áreas se relacionam com este conceito, interessando-se por aspetos como a estética de padrões visuais, os padrões comportamentais de diferentes espécies, as simetrias presentes em composições musicais, as sequências de fenómenos ambientais, entre muitos outros assuntos, pois, como já foi referido, os padrões encontram-se até na nossa imaginação. No entanto, o nosso interesse recai sob o ponto de vista da educação matemática, pelo que se incidirá nesse campo, tendo consciência de que muito mais haverá para explorar no domínio dos padrões.

A relação dos padrões com a matemática tem sido amplamente divulgada por diversos autores (Steen, 1990; Devlin, 1997; 1998, Resnik, 1997). A matemática é referida como sendo a ciência dos padrões, a ciência que descobre e interpreta os padrões existentes na natureza ou inventados pelo Homem. Na mesma linha de pensamento, Mason (2011) salienta que o trabalho envolvendo a elaboração de padrões e a expressão de relações é central em matemática, pelo que considera fundamental que faça parte integrante do ensino de qualquer assunto matemático.

A representação e identificação de padrões encontram-se presentes num grande número de atividades desenvolvidas desde muito cedo pelas crianças, nomeadamente no ritmo de algumas músicas, nas letras das canções e nas lengalengas. Aliás, na opinião de Threlfall (1999) padrões complexos são por vezes identificados pelas crianças precisamente através do seu ritmo. A regularidade presente nos padrões de repetição cria um ritmo que é identificado pela criança e lhe permite continuar o padrão. Assim, o facto de a criança conseguir dar continuidade a determinado padrão não representa que tenha identificado a regra subjacente a esse padrão ou a unidade de repetição. Como refere Egan (In Zazkis & Liljedahl, 2011, p. 101) “As rhythm is to the ear, so pattern is to the eye”. A criança é sensível à imagem que o padrão possa representar, mas é também sensível ao ritmo que o padrão possa produzir e que se encontra muito presente nos padrões de repetição.

Segundo Palhares e Mamede (2002) os padrões de repetição têm por base a articulação das diferenças e das semelhanças numa alternância de atributos diversificados, como a cor, a forma, o tamanho, o som, a posição, que podem ser conjugados produzindo uma grande diversidade de possibilidades. Estes atributos podem também ser irrelevantes, em determinado padrão. Por exemplo, numa alternância de forma independentemente da cor, como triângulo amarelo, quadrado azul, triângulo verde, quadrado verde, triângulo amarelo (…).

A maneira de percecionar os padrões varia de pessoa para pessoa. O modo de ver e relacionar determinado padrão está relacionado com características intrínsecas a cada indivíduo. Segundo Krutetskii (1976) os alunos apresentam três tipos de abordagem, nomeadamente a lógico-verbal ou analítica, a visual-pictórica ou geométrica e uma terceira que combina as duas anteriores. Este conhecimento é relevante para a abordagem das tarefas em sala de aula. A propósito dos padrões de pontos, Orton, Orton e Roper (1999) referem que “ver” o padrão pode estar relacionado com a figura ou com o número de pontos que a figura representa. Os autores referem, ainda, que tem sido frequente uma abordagem baseada na conversão das figuras em números. No entanto, alertam para o facto de ao adotar este procedimento ser necessário estar ciente dos diferentes tipos de abordagem apontados por Krutetskii. Referindo como exemplo uma sequência de números triangulares formados por pontos, os autores apresentam exemplos dos três métodos. O primeiro constitui a contagem dos pontos de cada figura, convertendo imediatamente as figuras numa sequência de números. O segundo carateriza-se pela observação do número de pontos que acresce em cada novo termo da sequência, obtendo o termo sucessivo através das diferenças entre os termos da sequência. O terceiro método consiste em conseguir fazer a extensão da sequência mentalmente ou através do desenho, antes de a transformar em números, que poderão depois ser manipulados através de operações aritméticas.

Segundo Lee e Freiman (In Vale & Pimentel, 2009), a capacidade de ver um padrão constitui o primeiro passo necessário à exploração de padrões. Vale e Pimentel (2009) consideram importante levar os alunos a ver os padrões de diferentes modos, uma vez que isso pode permitir que estudantes de níveis elementares resolvam problemas que envolvem generalizações. Uma capacidade específica ligada à visão é referida na literatura como *subitizing*. Para Clements (1999) *subitizing* é a capacidade de ver, ou percecionar, imediatamente o número de um determinado grupo de elementos. O autor considera que a capacidade de *subitizing* pode ser percetual ou concetual. A percetual corresponde à capacidade de reconhecer um número de elementos, mesmo que não haja capacidade de efetuar a contagem desses elementos. Será, possivelmente o nível mais básico. A concetual implica o reconhecimento de um número de elementos como um todo e como composição das suas partes. O desenvolvimento desta capacidade revela-se útil na aprendizagem da matemática, nomeadamente para reconhecer qualquer padrão numérico como uma unidade ou como composição de partes. Isso permitirá melhorar a capacidade de efetuar cálculos ou ajudar na aquisição do conceito de número. Papic, Mulligan e Mitchelmore (2011) referem que autores como Bobis, Hunting e Wright consideram esta visão instantânea (*subitize*) fundamental no desenvolvimento da memória visual e no reconhecimento de padrões.

Apesar dos estudos referirem estas diferentes abordagens, Presmeg alerta para o facto de professores e currículos tenderem para considerar a aproximação visual como uma primeira etapa ou como uma etapa acessória para a passagem da figura ao número (Orton, Orton & Roper, 1999).

Jean Orton (1999) apresenta diferentes perspetivas acerca do reconhecimento de padrões. Por exemplo, refere a perspetiva de Vitz e Todd que sugerem a existência de uma hierarquia na perceção de figuras geométricas. A um primeiro nível são percecionadas as linhas, posteriormente são percecionados os ângulos e, a um nível mais avançado é percecionada a área. Orton refere, entre outras, a teoria Gestaltista, onde a perceção da figura como um todo precede o reconhecimento das partes que a constituem. A autora considera importante a análise das figuras tendo em consideração o todo e a parte, dois aspetos do reconhecimento de padrões geométricos, alertando ser necessário promover a discussão em sala de aula para que se possa identificar se é o todo ou as partes que a criança vê, bem como identificar os possíveis lapsos na identificação de todas as partes de uma figura complexa. Kolinsky (In Orton, 2004) conclui que experiências de reconhecimento de padrões que envolvam a discussão do tipo de figuras (parte) em vez de se centrarem na configuração geral (todo) permitem desenvolver nas crianças a capacidade de reconhecer e analisar padrões em figuras.

Dois conceitos associados aos padrões geométricos são o conceito de simetria e de transformação geométrica. Na identificação deste tipo de padrões é essencial que a criança seja capaz de identificar uma dada figura em diferentes posições e orientações (Orton, 2004). Segundo Orton (1999) essa identificação evolui com a idade e desenvolve-se ao longo de três níveis. No primeiro a criança é capaz de copiar e identificar padrões simples, fazer correspondências e identificar figuras dentro de outras figuras. Neste nível a criança identifica, ainda, reflexões de eixo vertical e é capaz de completar rotações simples e reflexões a partir de um quadro de referência. No segundo nível a criança é capaz de fazer a correspondência de figuras agrupadas e de figuras com diferente orientação. Consegue também realizar rotações e reflexões complexas a partir de um quadro de referência. No terceiro nível a criança já faz a correspondência de figuras complexas em diferentes orientações, já é capaz de completar padrões complexos incluindo com rotações, bem como de identificar a maioria das reflexões e rotações. Segundo Mendelson (In Orton, 2004) as crianças entre os seis e os doze anos apresentam diferentes sensibilidades a diferentes tipos de simetria axial. Primeiro são capazes de identificar simetrias duplas (de eixo vertical e horizontal) e simetrias verticais (de eixo vertical) e só posteriormente identificam simetrias horizontais (de eixo horizontal) e simetrias diagonais (de eixo oblíquo).

Diferentes formas de abordagens e diferentes tipos de padrões são utilizados no ensino e aprendizagem da matemática, procurando desenvolver nos alunos a aptidão para identificar regularidades, expressar relações e generalizar. No entanto, como refere Resnik (1997), o conhecimento de padrões, tal como todo o conhecimento em geral, inicia-se com a experiência. É através da experiência que nos apercebemos da forma, da organização, das semelhanças e diferenças de objetos, entes ou figuras. Provavelmente será também a experiência que nos faz identificar de forma rápida os pontos quando se encontram dispostos como num dado. Como refere Mason (2011, p. 217), "por muito que leia acerca de aptidões e temas, estes não se tornarão vivos para si da forma como experienciá-los os torna".

2.2.1. Perspetivas da classificação de padrões

A matemática, como ciência que procura a ordem no caos (Davis & Hersh In Vale et al., 2006) tem por natureza a tendência a organizar os assuntos, procurando agrupá-los pelas regularidades que lhes são comuns. Esta organização permite que nos direcionemos mais facilmente aos assuntos que nos interessam. É frequente encontrar referências de classificações de polígonos, de conjuntos de números, de problemas, de pavimentações, entre muitas outras, em diferentes campos da matemática. Assim seria expectável uma classificação de padrões, principalmente devido à sua extraordinária presença na natureza e nos entes matemáticos.

A grande abrangência dos padrões está bem presente quando Devlin (1997) refere que os padrões podem ser reais ou imaginários, visuais ou mentais, utilitários ou recreativos, dinâmicos ou estáticos, qualitativos ou quantitativos. Uma apresentação feita por contraste ou oposição entre padrões distintos. Ao estruturar a sua obra

"Matemática a ciência dos padrões", Devlin (Idem) apresenta os padrões agrupados na seguinte estrutura:

- Padrões de contagem;
- Padrões de raciocínio e de comunicação;
- Padrões de movimento e mudança;
- Padrões de forma;
- Padrões de simetria e regularidade;
- Padrões de posição (topologia).

Segundo Steen (1990) a matemática é uma ciência exploratória que procura compreender todo o tipo de padrões. Na sequência desta afirmação, Steen distingue três tipos de padrões: a) os padrões que ocorrem na natureza, b) os padrões criados por outros padrões e c) os padrões criados pela mente humana.

Os *Principles and Standards for School Mathematics* recomendam a investigação de padrões, utilizando a diferenciação entre padrões numéricos e geométricos. Aparece ainda referência a padrões visuais quando esses padrões não se encontram diretamente relacionados com a geometria mas com a forma como os alunos visualizam os padrões, salientando a importância da ligação entre os padrões visuais e os padrões numéricos (NCTM, 2007).

O programa de matemática para o Ensino Básico (DGIDC, 2007) não ficou alheio à importância do estudo dos padrões, fazendo diversas referências a padrões geométricos e a regularidades numéricas, nomeadamente nos objetivos gerais, nos objetivos específicos e nas indicações metodológicas. Ao longo de todo o documento a palavra padrão é relacionada com a geometria e a palavra regularidade com os números, embora apareça também referência a sequências numéricas e não numéricas.

Em 2001, o Departamento de Ensino Básico publicou um documento com as competências essenciais a desenvolver por todos os alunos do Ensino Básico. Apesar de ter sido recentemente revogado, possivelmente devido a opções de natureza política, tratou-se de um documento de relevo para a educação matemática. Nesse documento, havia claramente a preocupação em envolver os alunos na identificação e exploração de padrões. A abordagem aos padrões encontrava-se presente em vários domínios, nomeadamente em números e cálculo, geometria e álgebra e funções. No domínio correspondente aos números e cálculo era referida "a predisposição para procurar padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas" (DEB, 2001, p. 60); no domínio da geometria salientava-se a necessidade de desenvolver nos alunos "a aptidão para procurar e explorar padrões geométricos" (Ibidem, p. 62); no domínio da álgebra e funções, pretendia-se desenvolver nos alunos "a predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos" (Ibidem, p.66).

Vale e Pimentel (2009), numa abordagem aos padrões direcionada para o ensino e aprendizagem da matemática, referem os seguintes tipos de padrões: padrões de repetição; padrões de crescimento; padrões visuais; padrões numéricos. Na sua abordagem apresentam uma referência aos diferentes padrões a trabalhar em sala de aula, nomeadamente no que respeita aos padrões de repetição e aos padrões de crescimento, também diferenciados em lineares e não lineares. Relativamente aos padrões visuais e aos numéricos, os primeiros são reforçados através da necessidade de se trabalharem diferentes modos de “ver” os padrões, realçando o importante papel da visualização, assim como a relação entre esses padrões e os padrões numéricos a eles intrínsecos.

Os padrões de repetição são provavelmente os mais utilizados nos primeiros anos de escolaridade (Warren, 2005). No entanto, Barros e Palhares (1997, p. 34) apontam para o trabalho com padrões repetitivos e não repetitivos no pré-escolar, alertando para o facto de alguns padrões não repetitivos poderem ser “bastante complicados, tanto quanto se queira”. A menor incidência em sala de aula e a maior dificuldade inerentes aos padrões de crescimento, ou não repetitivos, poderá condicionar a performance dos alunos na identificação deste tipo de padrões. Segundo Warren (2005), os alunos revelam mais dificuldade em identificar padrões de crescimento do que padrões de repetição.

A propósito da ideia de que o trabalho com padrões repetitivos é muito incipiente e desadequado para crianças mais velhas (parecendo, assim, estar mais adequados ao ensino pré-escolar), Vale e Pimentel (2010) salientam que o trabalho com este tipo de padrões pode envolver tópicos que requerem uma abordagem mais profunda, como a multiplicação, as relações numéricas, o raciocínio proporcional e os processos de generalização, sendo para estes últimos essencial o trabalho de identificação do grupo de repetição. Também Zazkis e Liljedahl (2011) consideram que os padrões de repetição podem servir como meio para introduzir e melhorar conceitos e relações subjacentes à teoria dos números a um nível elementar, nomeadamente no que respeita à estrutura multiplicativa dos números naturais.

A grande diversidade de padrões de repetição inclui diferentes graus de complexidade. Um padrão de repetição de três termos (ABCABC) é diferente de um padrão cíclico (ABCCBAACBBAC) ou de um padrão simétrico (ABCDDCBA) (Threfall, 1999). Vitz e Todd (In Threfall, 1999) apresentam um modelo de ordenação dos padrões de repetição estruturado em sete níveis de dificuldade. Os autores consideram que, para as crianças mais novas, um padrão do tipo ABCABC, que no seu modelo se encontra na sexta posição, é mais difícil do que um padrão do tipo AABAAB, posicionado na quarta posição.

Segundo Vale e Pimentel (2010, p. 35) "nos padrões de crescimento, cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior", podendo a análise dessa mudança utilizar diferentes modos de ver que conduzem a diferentes representações. As autoras referem, ainda, que esse modo de ver condiciona o processo de generalização. A utilização do raciocínio recursivo é mais utilizado em sala de aula, mas é mais pobre do que o raciocínio funcional, que permite relacionar qualquer termo com a respetiva ordem.

Na opinião de Rivera (2011) os padrões podem ter uma estrutura figural ou numérica. Como o próprio nome indica, os padrões figurais envolvem figuras e os padrões numéricos envolvem números. O autor defende a utilização do termo 'figural' em detrimento dos termos geométrico ou pictórico pois considera poderem suscitar imprecisões. No primeiro caso por poder haver confusão com as progressões geométricas e no segundo porque um padrão figural não representa meras figuras. Rivera (Idem) considera que os padrões visuais envolvem a perceção visual, que pode ser sensorial ou cognitiva. Perceção sensorial, quando o indivíduo vê um objeto como sendo apenas um mero objeto, e perceção cognitiva quando o indivíduo vê ou reconhece um facto ou propriedade em relação ao objeto.

Liljedahl (2004) considera essencial no trabalho com padrões a apresentação de definições precisas do que são padrões numéricos e padrões de repetição. A esse respeito, esclarece que na classificação de padrões numéricos não devem estar incluídos todos os padrões que utilizam números, propondo que a designação de padrões numéricos apenas inclua aqueles em que o valor numérico do elemento é importante para o padrão e, por isso, não possa ser transferido para outras representações não numéricas. Por exemplo, o padrão 123123 pode ser transferido para ABCABC ou ♣♠♦♣♠♦. No entanto o mesmo não acontece com o padrão 1,1,2,3,5,8. Aqui, o valor numérico de cada um dos elementos é que produz o padrão, pois cada elemento depende do valor numérico do elemento precedente. Liljedahl (Idem) refere, ainda, que muito do trabalho com padrões numéricos desenvolvido inicialmente com os alunos envolve contagens de números com "saltos", números pares e ímpares e tabelas da multiplicação. Nos anos posteriores os alunos são expostos a sequências geométricas e aritméticas, sendo-lhes ensinadas as ferramentas necessárias para lidar com este tipo de padrões numéricos.

Orton (2004) refere que os padrões numéricos mais enfatizados no ensino primário são os números pares e ímpares. Este tipo de números faz parte dos primeiros padrões numéricos que as crianças conseguem identificar, juntamente com a sequência dos números naturais e com os quadrados perfeitos. Orton refere, ainda, que os padrões numéricos podem ser apresentados de forma pictórica. O autor alerta para o facto de, ao investigar estes padrões, apesar de procurar diferenças entre os termos poder ser útil para compreender progressões aritméticas e procurar a primeira e segunda diferenças poder ser útil na compreensão de progressões quadráticas, não é suficiente, pelo que os alunos devem ser encorajados a não ficar só pela análise das diferenças nas suas investigações.

A grande abrangência dos padrões encontra-se bem patente na multiplicidade de diferentes tipologias propostas por diversos autores. A procura de subcategorias inerentes à identificação de padrões foi objeto de um estudo realizado por Ferreira e Palhares (2009). Para o efeito foi conduzida uma análise fatorial sobre um conjunto de 24 padrões que constituíam um teste de identificação de padrões, envolvendo uma amostra de cerca de 600 alunos do Ensino Básico. Como resultado, os autores identificaram a existência de sete fatores inerentes à capacidade de identificar padrões. A análise e interpretação desses fatores originaram a seguinte tipologia: 1) padrões que se identificam com progressões numéricas; 2) padrões que envolvem a repetição de três termos: ABC, ABC; 3) padrões que envolvem simultaneamente progressões geométricas e numéricas; 4) padrões que envolvem contagens; 5) padrões que envolvem a identificação de números pares e ímpares; 6) padrões onde está presente uma rotação; 7) padrões que envolvem mais do que uma lei de formação.

2.3. Os padrões e a educação matemática elementar

Para Resnik (1997) a finalidade principal da matemática não são os objetos matemáticos em si mesmos mas a estrutura na qual se encontram organizados.

A forte ligação dos padrões com a matemática, refletida na opinião de diferentes autores, não poderia ser ignorada por todos os interessados na educação matemática. Como referem Vale e Pimentel (2010), as potencialidades inerentes aos padrões levam a um grande desenvolvimento do estudo dos padrões nos currículos de matemática de vários países. A procura e identificação de padrões passa a ser vista como uma ferramenta útil em diversos campos da educação matemática, sendo transversal a vários níveis de escolaridade do Ensino Básico (Vale et al., 2006). Nomeadamente, Steen (1990) refere que aprender a visualizar padrões matemáticos é uma estratégia fundamental na educação matemática.

Segundo Anthony Orton (2004) antes de se utilizar padrões como suporte para a aprendizagem matemática é necessário garantir que as crianças apreciem e compreendam os padrões, bem como clarificar o que é que consideramos como padrões em matemática. Vale e Pimentel (2009, p. 14), consideram que "a ideia fundamental de um padrão envolve mudança e repetição", sendo a ideia de repetição muito forte neste conceito. A propósito dos padrões de repetição as autoras referem que, apesar de poderem ser trabalhados com crianças mais novas, habitualmente são trabalhados de forma superficial, sendo desejável que o trabalho de exploração seja mais aprofundado e que inclua processos de generalização. Relativamente aos padrões de crescimento, alertam para a sua importância na transição da aritmética para a álgebra, sendo essencial a experiência com padrões figurativos.

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) referem que a identificação e investigação de padrões são muito úteis ao desenvolvimento da abstração e do pensamento algébrico. Estas mais-valias do estudo dos padrões são também salientadas no programa de matemática do Ensino Básico, que refere, logo nos objetivos gerais, a necessidade dos alunos reconhecerem e explorarem regularidades (DGIDC, 2007). Neste programa, o estudo da Álgebra está delineado a partir do 2.º ciclo do Ensino Básico. No entanto, no que respeita ao 1.º ciclo, o programa de matemática salienta o desenvolvimento do pensamento algébrico através do estudo de regularidades. Na mesma linha de pensamento, Kaput e Blanton (In Ponte, 2006) apontam a necessidade de promover o estudo de padrões e regularidades, a partir deste nível de ensino, como um dos aspetos necessários para que o pensamento algébrico se apresente como uma orientação transversal ao currículo.

A identificação de padrões apresenta também uma forte ligação com a resolução de problemas, sendo a procura de regularidades considerada como uma das estratégias mais poderosas da resolução de problemas (Vale & Pimentel, 2004). Por outro lado, a resolução de problemas não rotineiros é também um poderoso caminho para envolver os alunos na exploração e formalização de padrões (Vale & Pimentel, 2009). Segundo Posamentier e Krulik (1998), problemas que requerem a identificação do elemento seguinte de uma sequência de números são tipicamente resolvidos pela procura de um padrão. Aliás, os matemáticos usam a análise de padrões na resolução de problemas em diversas áreas da Matemática, não restringindo essa estratégia a uma área específica. No entanto, Hardy refere que os padrões matemáticos ultrapassam o conceito de estratégia de resolução de problemas, a que muitas vezes o termo *padrão* está confinado. Para Hardy "Os padrões do matemático, tais como os do pintor ou do poeta, devem ser belos, as ideias, da mesma forma que as cores ou as palavras, devem combinar-se harmoniosamente"(Hardy in Devlin, 1997, p. 12). Esta ideia de beleza encontra-se presente nas *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar,* onde se defende que "Explorar padrões ajuda os alunos a desenvolver o poder da matemática e leva-os a apreciar a beleza da matemática" (NCTM, 1991, p.117).

O interesse pela investigação envolvendo padrões não é novo. Como referem Zazkis e Liljedahl (2011), as potencialidades do estudo de padrões, pelo seu valor, quer estético, quer pedagógico, no ensino e aprendizagem da matemática, promoveram o interesse dos investigadores em educação matemática por esta matéria. Assim, ao longo das últimas décadas diversas investigações procuraram analisar o papel que o trabalho com padrões representa na educação matemática dos alunos envolvidos. A investigação realizada com alunos dos primeiros anos de escolaridade tem vindo a mostrar a ligação entre o envolvimento em tarefas com padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico e do pensamento funcional (Blanton & Kaput, 2004). Esta ligação está também presente em documentos curriculares, como o NCTM (2000), onde o estudo dos padrões, da álgebra e das funções, se funde no mesmo tópico. Em Portugal, o programa de matemática para o Ensino Básico, entretanto revogado, apontava também para o trabalho com regularidades, logo no 1.º ciclo, referindo que

> *"A exploração de situações relacionadas com regularidades de acontecimentos, formas, desenhos e conjuntos de números é importante neste ciclo. Os alunos devem procurar regularidades em sequências de números finitas ou infinitas (estas usualmente chamadas sucessões), e podem também observar padrões de pontos e representá-los tanto geométrica como numericamente, fazendo conexões entre a geometria e a aritmética. Este trabalho com regularidades generalizáveis, segundo regras que os alunos podem formular por si próprios, ajuda a desenvolver a capacidade de abstracção e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico"*(DGIDC, 2007, p. 14).

Esse programa de matemática apontava para a identificação e investigação de padrões numéricos e geométricos, que permitem fazer conexões entre a geometria e a aritmética, e promovem o desenvolvimento da capacidade de abstração e do pensamento algébrico (DGIDC, 2007). A exploração de padrões é também referida como meio para desenvolver nos alunos o seu poder matemático e ajudá-los a apreciar a beleza matemática (NCTM, 1991), sendo utilizada como uma das estratégias de resolução de problemas (Posamentier & Krulik, 1998). No entanto, Zazkis e Liljedahl (2011) alertam para o facto de, nos currículos, nem sempre o que é apresentado nos objetivos se encontrar em consonância com o que é apresentado nos conteúdos.

Apesar de o estudo de padrões fazer parte dos objetivos e finalidades do currículo, por vezes, ao nível dos conteúdos é apenas referido como pertencente à categoria das atividades de enriquecimento ou extracurriculares.

Para Williams e Shuard (1994) a procura de padrões e regularidades deve ser a força condutora do trabalho com crianças na área de Matemática, referindo ainda que os padrões podem surgir naturalmente através da experiência com números.

Segundo alguns autores (Baroody & Coslick, 1998; Gingburg & Seo, 1999; Vale et al., 2006) as crianças têm uma apetência intrínseca pela procura de padrões e revelam muito entusiasmo na sua descoberta. Este tipo de características revelam-se bons aliados para o investimento em atividades com padrões em sala de aula, nomeadamente atividades de construção e reconstrução de padrões. Hershkowitz, Parzysz e Dormolen (1996) salientam que ao identificar e memorizar padrões para os reconstruir a criança interioriza o conceito de padrão. Para Nickson (2000) a construção de padrões encontra-se interligada com o desenvolvimento da capacidade espacial e a aprendizagem de conceitos geométricos. O autor aponta como essencial a manipulação de objetos, envolvendo rotações e construção de padrões, para o desenvolvimento da capacidade espacial, uma vez que o desenvolvimento desta capacidade se revela fundamental na aprendizagem de conceitos geométricos.

Barros e Palhares (1997) consideram que o trabalho com padrões repetitivos e não repetitivos deve ser desenvolvido ao nível do pré-escolar e pode ter dois tipos de abordagem. Uma consiste em promover a descoberta da regra subjacente a determinado padrão, a outra consiste em estimular a criança a desenvolver padrões da sua imaginação. Os autores salientam, ainda, que deve ser estimulada a generalização, pois, apesar de não se esperar que a criança consiga generalizar globalmente, ela é capaz de generalizar localmente.

Moss e McNab (2011) referem que nos primeiros anos há tipicamente incidência apenas nos padrões repetitivos. Este facto não permite que os alunos beneficiem do potencial do trabalho com padrões que serve como suporte para aprendizagens futuras. As escolhas sobre o tipo de trabalho realizado em sala de aula e a forma como esse trabalho é conduzido têm consequências no tipo de aprendizagens dos alunos. Uma investigação conduzida por Fox (2006) identificou algumas dificuldades de professores e alunos ao nível da compreensão dos diferentes tipos, níveis e complexidade dos padrões. O autor salienta a necessidade do envolvimento dos professores no trabalho com padrões, nomeadamente a necessidade de compreenderem quando, como e que padrões trabalhar com os alunos para promover o desenvolvimento dos alicerces necessários ao pensamento algébrico. Carraher e Schliemann (2007) alertam para o tipo de abordagem ao trabalho com padrões, referindo que muitas vezes os alunos analisam as sequências de figuras geométricas atendendo apenas a uma variável. Por exemplo, numa sequência de números triangulares formada por pontos, os alunos tendem a ter apenas em consideração o número total de pontos, não os relacionando com a posição a que cada desenho (termo da sequência) corresponde.

Segundo Moss e McNab (2011) os alunos, e mesmo os adultos, têm tendência para ignorar as propriedades geométricas dos padrões figurais e a centrarem-se no número de elementos do padrão. No entanto, a investigação revela que quando se dá prioridade às representações visuais e se incentiva a incidência nos padrões figurais como um meio para a descoberta da regra geral, os alunos são mais capazes de descobrir essas regras, bem como de as expressar e justificar.

A forma como os alunos visualizam o padrão influencia a forma como irão continuar, completar ou generalizar esse padrão. Os alunos analisam as sequências de diferentes formas, por vezes inesperadas. A propósito dos números triangulares formados por pontos, Carraher e Schliemann (2007) verificaram que os alunos podem não prestar qualquer atenção ao número total de pontos, nem ao número adicional de pontos que o termo seguinte contém e, por exemplo, utilizar o computador para copiar e colar a figura anterior, a diagonal dessa figura e acrescentar um ponto.

Um dos objetivos dos estudos acerca dos padrões é compreender a forma como as crianças analisam diferentes padrões. Segundo Orton e Orton (1999), os alunos têm mais sucesso com as sequências lineares do que com as quadráticas. O estudo realizado pelos autores permitiu verificar também que algumas crianças eram capazes de seguir um método geral para determinar o termo seguinte de uma dada sequência, sem conseguir, no entanto, aplicar esse método a outras sequências. No entanto havia também crianças que apresentavam num nível mais avançado da capacidade de generalização, que conseguiam fazer a extensão a sequências futuras. Os autores concluem que a utilização exclusiva do método recursivo pode causar muitas dificuldades no progresso necessário para a generalização.

Examinando o processo utilizado pelas crianças na identificação de sequências lineares e quadráticas, Hargreaves e colegas verificaram que a maioria das crianças entre os 7 e os 11 anos de idade utilizam estratégias para analisar estes dois tipos de sequências e empregam-nas para fazer generalizações. As estratégias utilizadas são as seguintes: a) procurar diferenças entre os termos; b) observar a natureza das diferenças; c) observar a diferença entre as diferenças; d) observar a natureza dos números (pares ou ímpares); e) combinar termos para obter outros termos (Hargreaves et al., 1999).

Num estudo desenvolvido com alunos do pré-escolar ao 4.º ano de escolaridade, envolvendo a identificação de padrões numéricos, Blanton e Kaput (2004) verificaram que os alunos dos diferentes anos faziam a identificação de padrões começando por fazer a descrição de relações aditivas com recurso à linguagem natural, seguindo-se a representação simbólica de relações multiplicativas, sendo as relações aditivas mais comuns. Verificaram, ainda, que a ênfase na procura de padrões em variáveis individuais, nos primeiros anos de escolaridade, pode impedir o desenvolvimento do pensamento funcional nos anos posteriores. Segundo Blanton e Kaput (Idem) encontrar padrões em variáveis individuais envolve menor capacidade preditiva e é matematicamente menos potente do que o pensamento funcional. Os autores referem que nos primeiros anos de escolaridade, incluindo o pré-escolar, os alunos devem participar em atividades que permitam verificar como duas ou mais quantidades variam simultaneamente, desenvolvendo deste modo o pensamento funcional.

A identificação de padrões como uma atividade inerente à atividade matemática foi utilizada no âmbito de um estudo correlacional, desenvolvido junto de alunos do Ensino Básico. Esse estudo procurava identificar possíveis relações entre uma capacidade matemática, mais precisamente a capacidade de identificar padrões, e a capacidade de jogar xadrez (Ferreira & Palhares, 2008). Os resultados obtidos nesse estudo revelaram a existência de uma relação entre a força de jogo em xadrez e a capacidade de identificar padrões. A identificação desta relação entre o xadrez e os padrões levantou a hipótese de a identificação de padrões poder estar relacionada com outros jogos, o que levou os autores a sugerir o alargamento de futuras investigações a outro tipo de jogos.

Marina Papic, Joanne Mulligan e Michael Mitchelmore (2011) realizaram um estudo, envolvendo 53 crianças do ensino pré-escolar, cujo foco central eram os padrões espaciais e os padrões de repetição. Nesse estudo puderam verificar que o grupo experimental, sujeito a um grande número de tarefas envolvendo padrões, demonstrou maior compreensão da unidade de repetição e da estrutura espacial dos padrões. O estudo revelou, ainda, que após um ano estas crianças eram capazes de ampliar o conhecimento e explicar padrões de crescimento, em contraste com as crianças do grupo de controlo que raramente reconheciam padrões geométricos simples e consideravam os padrões de repetição como sendo uma alternância de itens. Concluíram, ainda, que se as crianças tiverem oportunidade de se envolverem em tarefas que promovam a emergência da generalização, nomeadamente trabalhando com um grande número de padrões, são capazes de realizar a abstração de padrões complexos mesmo antes de iniciarem a escolaridade formal.

Cuoco, Goldenberg e Mark (1996) consideram essencial a organização do currículo de matemática centrada em determinados hábitos de pensamento, que permitam envolver os alunos em processos relacionados com a criatividade, a conjetura, a invenção, a experimentação e a vivenciarem o genuíno processo de investigação. Consideram, ainda, que o desenvolvimento desses hábitos de pensamento ajuda os alunos a procurar conexões lógicas e heurísticas entre as novas ideias e as anteriormente adquiridas. Os autores apresentam uma lista dos hábitos de pensamento importantes para preparar os alunos para a vida depois da escola, para os preparar para os desafios do século XXI. A procura de padrões é o primeiro hábito de pensamento a desenvolver nos alunos, referido pelos autores, sendo fundamental dar particular atenção a padrões que ocorrem quando se efetuam cálculos, quando se resolvem problemas e mesmo aos padrões que ocorrem no ambiente quotidiano. Mais recentemente acrescentam ao hábito de procurar padrões a capacidade de expressar em linguagem precisa e explicar essas regularidades. Assim, no trabalho que pretende desenvolver o hábito de pensamento relacionado com padrões, são apontados três aspetos fundamentais: a) a procura do padrão; b) expressar de forma precisa em linguagem matemática o padrão identificado; c) explicar porque é que o padrão existe (Cuoco, Goldenberg & Mark, 2010).

Ao longo dos últimos anos, um dos grandes objetivos da educação matemática tem sido o combate ao insucesso escolar. Para isso investiu-se em currículos que enfatizam a compreensão dos conceitos e a ligação da matemática ao quotidiano, centrados na resolução de problemas e na procura de regularidades. Como referem Vale e Pimentel (2010, p. 33)

> *"Muito do insucesso em matemática deve-se ao facto de os alunos recorrerem apenas à memorização e não à compreensão. O primeiro passo para aprender a pensar matematicamente é aprender a descobrir padrões e a estabelecer conexões".*

2.4. Os padrões na análise de jogos e na resolução de problemas

Na observação de um jogo facilmente se detetam padrões de diferentes tipos. Provavelmente, numa das primeiras observações somos de imediato confrontados com os padrões visuais proporcionados pelo material de jogo e só posteriormente nos apercebemos da existência de padrões de outra natureza. Um dos exemplos disso são os *string games* (jogos de cordel) em que através de um cordel fechado, duas pessoas produzem uma sequência de movimentos com o objetivo de criar figuras (como por exemplo a cama de rede). Segundo Gibbs (1999) estes jogos permitem construir facilmente figuras geométricas e investigar os padrões formados com essas figuras, nomeadamente a relação entre o número de triângulos e de retângulos e entre o número de polígonos e o número de vértices.

A análise de determinados jogos possibilita a descoberta de padrões numéricos e geométricos muito interessantes, que permitem o estabelecimento de conexões entre diferentes campos da matemática. Essa análise entusiasmou alguns matemáticos, que se dedicaram à descoberta de soluções elegantes para os jogos analisados.

O interesse da matemática pelos jogos está interligado com o natural interesse do ser humano em jogar e vencer. Quem joga gosta de ganhar, mesmo que a vitória esteja relacionada com o fator sorte. No entanto, os matemáticos têm um interesse particular em analisar todas as possibilidades em jogo, identificar a melhor jogada para cada situação, calcular as probabilidades de vitória e descobrir as estratégias para vencer o jogo. Como refere Beasley (1990) se jogar faz parte do instinto natural do ser humano, a análise de jogos é um instinto natural dos matemáticos.

Enquanto os jogos de azar cativaram o interesse dos matemáticos desde o aparecimento da teoria das probabilidades, a atenção pela análise dos jogos de estratégia veio mais tarde a ser despoletada pela publicação, em 1944, da obra de Neumann e Morgenstern, "Theory of Games and Economic Behavior" (Dimand & Dimand, 1992). A obra do matemático John von Neumann e do economista Oskar Morgenstern constituiu um marco da Teoria dos Jogos e do aparecimento de um novo ramo da matemática.

Na teoria dos Jogos, modelos de conflitos sociais, militares ou económicos são representados por jogos, uma vez que facilmente se identificam o mesmo tipo de conflito de interesses em jogos como o Xadrez, o Monopólio, o Jogo do Galo ou o Poker (Thomas, 2003). Tomando como analogia um jogo de poker, Williams (1986) mostra como os jogos contêm alguns dos elementos básicos comuns à maioria dos conflitos. No poker os jogadores têm interesses opostos, na medida em que todos querem vencer; há ações controladas pelo jogador, como as suas opções e ações que o jogador não controla, na medida em que são controladas pelos adversários; há ações que nem sequer são controladas pelos jogadores, como a ordem das cartas no baralho; a informação do jogo é imperfeita, uma vez que os jogadores desconhecem as cartas dos adversários.

Thomas (2003) apresenta a terminologia importante na teoria dos Jogos, nomeadamente os participantes ou jogadores, as jogadas, o *payoff*, a estratégia e o tipo de informação. As jogadas ou movimentos correspondem às sequências de jogo determinadas por decisões dos jogadores ou pelo elemento sorte. O *payoff* representa o resultado final do jogo. Quando a diferença entre o resultado dos jogadores, tomando como positiva a vitória e negativa a derrota, é zero temos os chamados jogos de soma zero. Os jogos que não usufruem desta propriedade são referidos como jogos de soma não zero. A estratégia é o conjunto das decisões para um jogador, considerando sempre a jogada ótima, ou seja, a melhor jogada possível. Um jogo em que a cada momento de jogo todos os jogadores têm conhecimento de todas as jogadas efetuadas diz-se ter informação perfeita, caso contrário diz-se ter informação imperfeita.

Williams (1986) aponta noções importantes na Teoria dos Jogos cujos termos podem ter diferentes significados dos usualmente utilizados no nosso quotidiano. Uma dessas noções tem a ver com o número de pessoas envolvidas, que na Teoria dos Jogos representam grupos de interesses, podendo duas pessoas representar efetivamente dois jogadores ou duas equipas, desde que, como refere Zagare (1984), cada equipa ou grupo funcione como uma unidade de decisão. Outros dos termos é a estratégia, que representa um plano de jogo completo de jogo, independente das opções do adversário.

Um dos jogos de estratégia com interesse para a análise matemática é o Nim. O Nim foi o primeiro jogo combinatório[1] a ser tratado matematicamente, sendo a teoria apresentada por Charles L. Bouton, em 1901 (Beasley, 1990; Santos, Neto & Silva, 2007a). O jogo tem regras simples, mas é elegante quando se sabe jogar (Beasley, 1990). Trata-se de um jogo para dois jogadores que jogam alternadamente. Joga-se com qualquer material que é disposto em pilhas. O número de objetos em cada pilha é arbitrário, desde que, no início do jogo, cada pilha tenha um número de objetos diferente. Na sua vez de jogar, o jogador pode retirar um número de objetos igual ou superior a um de uma das pilhas à sua escolha, podendo retirar a pilha inteira. O jogador que retirar o último objeto ganha o jogo (Bouton, 1901). Na sua teoria, Bouton utiliza o sistema de numeração binário para representar o número de objetos em cada pilha e coloca-os de forma que cada ordem pertença à mesma coluna (Figura 1). Bouton define uma combinação segura como sendo aquela cuja soma das colunas seja

[1] Segundo Nowakowski (1998), jogos combinatórios são jogos em que dois jogadores jogam alternadamente, com informação perfeita, sem elemento sorte, sem empates e cuja vitória é determinada por quem termina primeiro.

par, ou seja cuja soma-nim é nula. A soma-nim representa-se pelo símbolo ⊕ e procede-se adicionando os dígitos da mesma ordem, sendo que 0 ⊕ 0 = 1 ⊕ 1 = 0 e 0 ⊕ 1 = 1 ⊕ 0 = 1. O jogador que conseguir deixar sempre o adversário perante uma situação de combinação segura vence o jogo.

Sistema Binário					Sistema Decimal
1	0	0	1		9
	1	0	1		5
1	1	0	0		12
0	0	0	0	9 ⊕ 5 ⊕ 12 = 0	

Figura 1. Combinação segura.

Como refere Bouton (1901), num jogo com três pilhas, uma sequência que contenha 9, 5 e 12 objetos constitui uma combinação segura. O autor acrescenta, ainda que, dados três números *a*, *b* e *c*, se esses números formam uma combinação segura, quaisquer dois números determinam o terceiro. Assim, o jogador seguinte (B) terá de retirar pelo menos um objeto de uma das pilhas e como dois números determinam o terceiro, já determinado pelo adversário ao constituir a sequência 9, 5, 12, o jogador B não poderá deixar uma combinação segura. No entanto, após a jogada de B, o jogador A poderá sempre retomar a situação de combinação segura e acabará por ganhar o jogo.

Uma representação diferente desta teoria é proposta por Beasley (1990), que utiliza o sistema binário na representação de potências de 2. Ao que Bouton (1901) designou de combinação segura Beasley considera uma situação *em equilíbrio.* Retomando a situação formada por 9, 5 e 12 objetos, o número de objetos de cada pilha pode ser representado por 8+1, 4+1 e 8+4, respetivamente. Desta forma temos no total 2 subgrupos de 8, 2 subgrupos de 4 e 2 subgrupos de 1. Temos um número par em cada subgrupo, ou seja, uma situação em equilíbrio. Se o adversários nos deixar uma posição de desequilíbrio, contendo subgrupos em número ímpar, para voltar a uma posição vencedora basta retirar os objetos necessários de modo a deixar cada tipo de subgrupo em número par. Assim, uma situação de equilíbrio tem soma-nim nula. A soma-nim de dois números *a* e *b* representa-se por $a \oplus b$. Com os números representados no sistema binário adiciona-se da forma usual quando as potências de 2 são diferentes e é nula a soma de potências de 2 iguais. Voltando às pilhas de 9, 5 e 12 objetos, temos que $9 \oplus 5 \oplus 12 = (8 + 1) \oplus (4 + 1) \oplus (8 + 4) = 8 \oplus 8 \oplus 4 \oplus 4 \oplus 1 \oplus 1 = 0$.

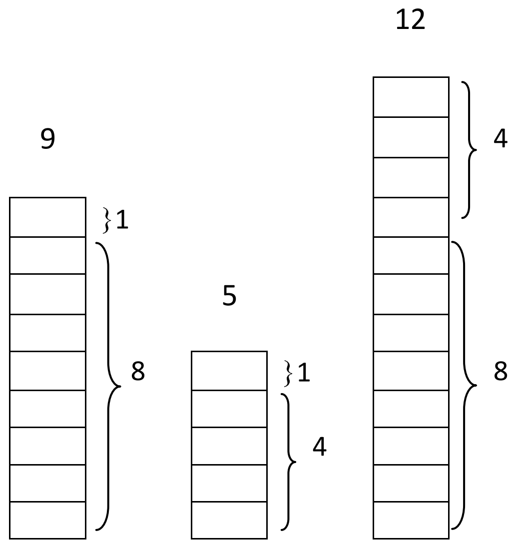


Figura 2. Situação em equilíbrio.

Perante uma situação de soma-nim não nula, esta operação permite-nos saber qual o número de objetos a retirar. Tomemos o exemplo de uma situação de jogo com três pilhas contendo 10, 9 e 6 objetos (Figura 2). A solução apontada por Beasley (1990) consiste em equilibrar o jogo retirando 3 objetos à pilha de 6 que fica assim com 2+1 objetos. A soma-nim das duas pilhas maiores ($10 \oplus 9 = 3$) revela-nos que a terceira pilha deverá ter 3 objetos (11 na base 2) para que a soma-nim das três pilhas seja nula ($10 \oplus 9 \oplus 3 = 0$).

Segundo Binmore (2007), a maior parte das configurações iniciais do Nim são não equilibradas, o que dá vantagem ao primeiro jogador. Caso a situação inicial esteja em equilíbrio então a vantagem é do segundo jogador.

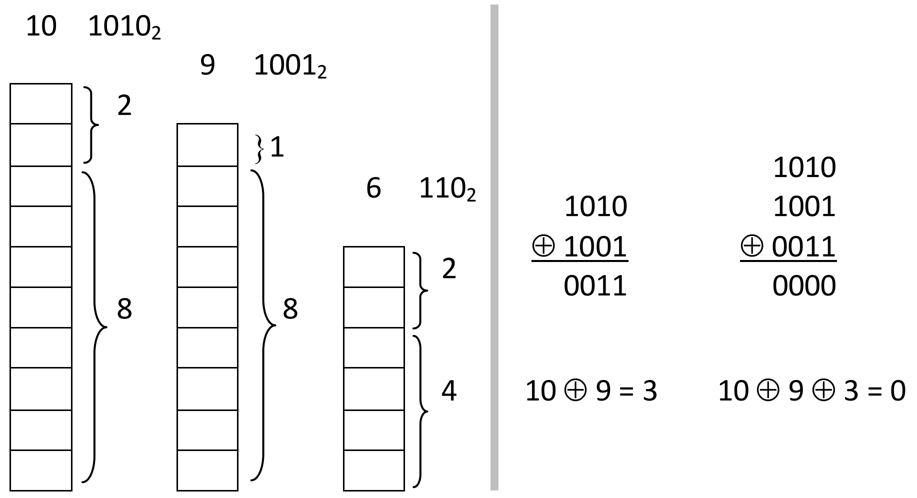


Figura 3. Situação em desequilíbrio e somas-nim para encontrar o equilíbrio.

O jogo Pontos e Quadrados é um jogo à primeira vista simples, mas cuja teoria desenvolvida por Berlekamp (2000) revela poder ser jogado com um nível de sofisticação elevado. O jogo utiliza uma grelha retangular formada por pontos de dimensões estipuladas à partida. Berlekamp considera os tabuleiros 5 x 5 de tamanho suficiente para possibilitarem jogos interessantes e não muito longos. Dois jogadores alternadamente unem dois pontos adjacentes na vertical ou na horizontal. Quando um jogador completa os quatro lados de um quadrado coloca a inicial do seu nome no interior desse quadrado e é obrigado a jogar novamente. Os jogadores não são obrigados a completar qualquer quadrado, desde que disponham de outra jogada possível. O objetivo do jogo consiste em conseguir fechar mais quadrados do que o adversário.

Berlekamp (2000) verificou a existência de um padrão que permite ajudar a manter ou retomar o controlo do jogo Pontos e Quadrados. O primeiro jogador deve tentar que o número de pontos inicial mais o número de jogadas *doublecrossed* (jogada que fecha dois quadrados) deve ser ímpar, enquanto o segundo jogador tenta que essa soma seja par. Ou seja a paridade é um aspeto importante e a ter em consideração ao longo do jogo. Outra regularidade identificada por Berlekamp, também relacionada com a paridade, encontra-se ligada ao número de cadeias longas (conjunto de três ou mais quadrados). Assim, para o jogador inicial é favorável que a soma do número de pontos inicial mais o número de cadeias longas seja par, enquanto para o segundo jogador essa soma deve ser ímpar.

No jogo Pontos e Quadrados há situações em que para retomar o controlo do jogo é necessário sacrificar alguns quadrados, usualmente 2 (*double-dealing*) ou 4 (*long loop*). Aliás, como refere West (1998) este jogo é usualmente uma luta por manter o controlo do número de cadeias longas na paridade adequada, mesmo que para isso se sacrifiquem alguns quadrados.

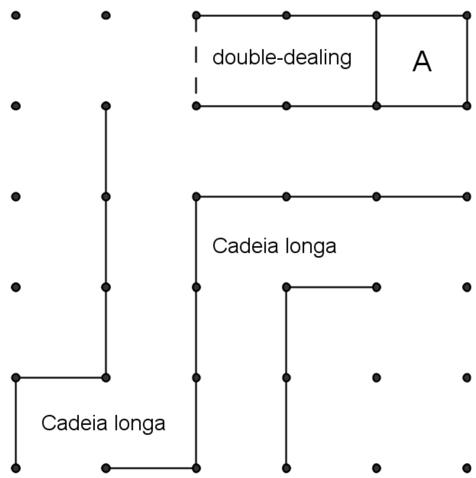


Figura 4. Exemplo de cadeias longas e de *double-dealing* feito por A.

O 'Pentalfa', um jogo de tabuleiro para um jogador provavelmente originário da ilha de Creta (Santos, Neto & Silva, 2007d), tem por objetivo colocar nove peças nas dez interseções de um pentagrama. As peças têm de ser colocadas de modo que cada peça visite dois pontos, sendo o segundo ponto o ponto de destino. Os pontos visitados têm de estar alinhados e intercalados por outro ponto. Apenas os pontos visitados têm de estar livres. Este jogo tem uma estratégia de resolução simples, que consiste em colocar as peças de modo que o ponto de colocação de uma peça corresponda ao ponto de partida dessa jogada, com exceção da primeira peça que é colocada partindo de um ponto ao acaso. Se numerarmos a ordem de colocação das peças obtemos dois tipos de padrões diferentes, consoante a primeira peça seja colocada nos vértices do pentágono maior ou nos vértices do pentágono menor, interior ao pentagrama. Assim, aos dois pentágonos é atribuída uma sequência de números pares ou de números ímpares, consoante o caso.

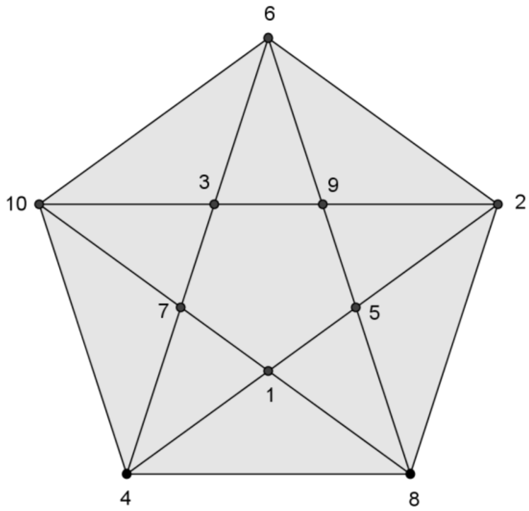


Figura 5. Uma resolução do Pentalfa.

Se a primeira peça for colocada num dos pontos interiores à figura, então as jogadas pares correspondem aos vértices do pentágono maior. Se unirmos os números pares consecutivos obtemos um pentagrama. Por sua vez, se unirmos os números ímpares consecutivos iremos obter outro pentagrama inscrito no anterior.

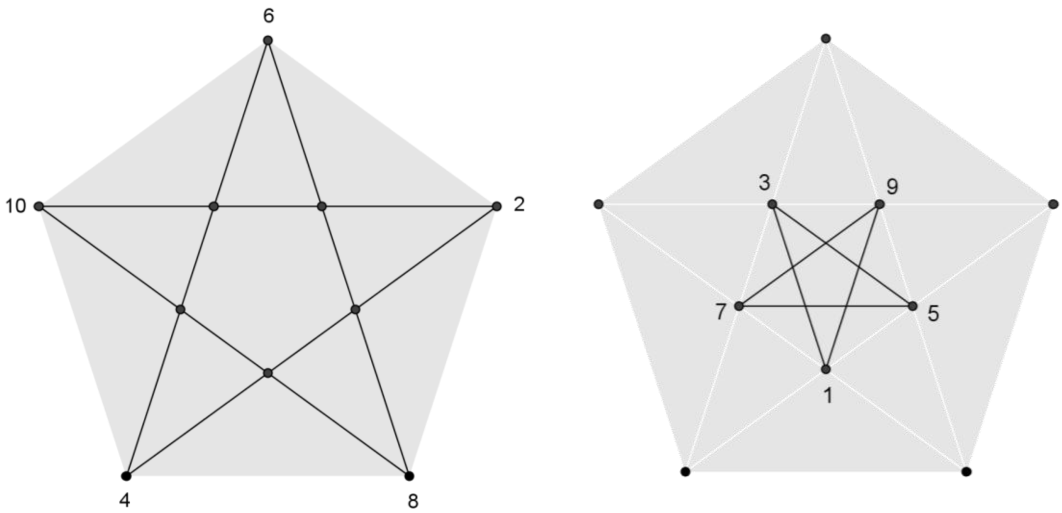


Figura 6. Padrões resultantes da união dos números pares e ímpares.

As Torres de Hanói, um *puzzle* inventado por Édouard Lucas, em 1883, sob o pseudónimo de N. Claus de Siam, um anagrama de Lucas D'Amiens, apresenta ligação com padrões, quer numéricos quer geométricos. O *puzzle* é constituído por discos (inicialmente era composto por oito) de diferentes dimensões e três colunas, onde os discos podem ser inseridos. Os discos devem ser colocados na coluna da esquerda, começando pelo maior e terminando no menor. O objetivo consiste em deslocar todos os discos da coluna da esquerda para a coluna da direita, de modo que um disco maior nunca fique em cima de um disco menor. O número mínimo de movimentos para solucionar o *puzzle* cresce exponencialmente relativamente ao número de discos existentes nas torres. O *puzzle* com 1 anel resolve-se num movimento (2^1-1), com dois anéis resolve-se em três movimentos (2^2-1), com 3 anéis já são precisos pelo menos 7 movimentos (2^3-1) e assim sucessivamente. Ou seja para *n* anéis serão necessários 2^n-1 movimentos.

O *puzzle* é apresentado através de uma lenda, segundo a qual existiria um mosteiro budista no Extremo oriente, onde os monges estariam a resolver uma Torre de Hanói com 64 discos. Diz a lenda que quando terminassem o puzzle o mundo acabaria. Atendendo a que o menor número de movimentos necessários para solucionar o jogo é dado pela expressão $2^n - 1$, sendo n o número de discos da torre, ou seja, a solução é exponencialmente proporcional ao número de discos da torre, não surpreende o final da lenda. Se os monges demorassem apenas 1 segundo a mudar cada disco, ainda assim demorariam $2^{64} - 1$ segundo, o que representaria cerca de 585 mil milhões de anos (Danesi, 2002; Santos, Neto & Silva, 2007e).

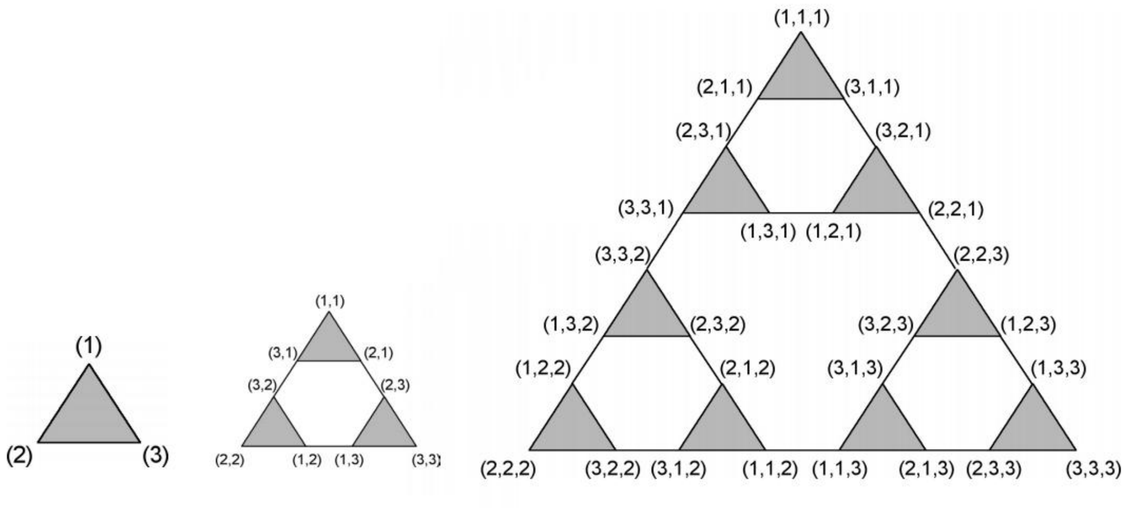


Figura 7. Solução com 1, 2 e 3 discos, retirada de Santos, Neto e Silva, 2007e

Numa outra perspetiva, Santos, Neto e Silva (2007e) apresentam um diagrama da solução do *puzzle* onde se vão obtendo aproximações sucessivas ao fractal de Sierpinski à medida que se vai aumentando o número de anéis da torre. Neste tipo de diagrama, as três torres são representadas pelos vértices de um triângulo e a descrição da posição é representada por números indicadores da sequência de colunas onde se encontram os discos, do menor para o maior. Por exemplo, a posição (3,1,3) revela que há em jogo três discos, que o disco menor se encontra na terceira coluna, o disco intermédio está colocado na primeira coluna e o disco maior na terceira. Um jogador poderá não se aperceber dos padrões matemáticos do jogo, mas um matemático terá, certamente, todo o interesse em descobri-los. Há um padrão na resolução do jogo e a sua representação pode originar um fractal.

Segundo Stadler (2009), o grafo da resolução das Torres de Hanói permite ainda visualizar um caminho Hamiltoniano, revelado nos movimentos de cada anel. Seguindo a notação utilizada acima para a formação do fractal de Sierpinsky (Santos, Neto & Silva, 2007e), podemos visualizar os movimentos de cada anel neste percurso de 3 discos.

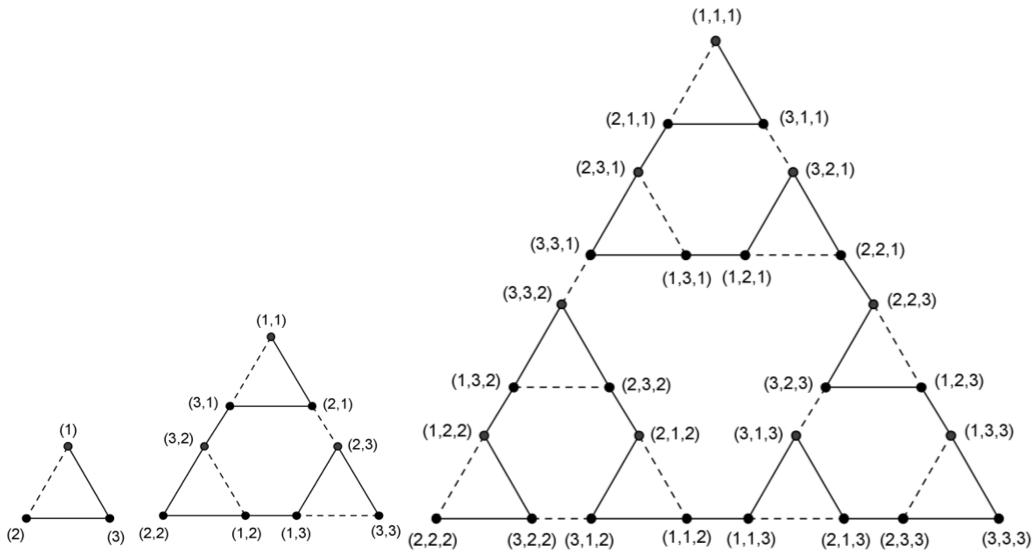


Figura 8. Caminho Hamiltoniano no grafo das Torres de Hanói

Outro *puzzle* com forte ligação aos padrões, como se apresentará de seguida, é conhecido como Anéis Chineses. Petković (2009) refere que ainda não se provou a origem deste jogo, apesar do nome sugerir uma origem chinesa. No entanto, acrescenta que, na opinião de S. Culin, poderá ter sido uma invenção do general Hung Ming (181-284 d. C.) para a sua mulher se distrair enquanto ele estava na guerra. Segundo Petković a primeira referência a este jogo deve-se a Gerolamo Cardano, em 1550. Este *puzzle*, que consiste em libertar um determinado número de anéis interligados, onde cada anel restringe a mobilidade dos restantes, foi resolvido de forma interessante pelo inventor das Torres de Hanói, Édouard Lucas. A sua resolução apresenta algumas semelhanças com a resolução das Torres de Hanói, na medida em que se utiliza uma estratégia recursiva em ambos os casos e ambos se encontram relacionados com o crescimento exponencial. A solução está dependente do número de anéis e apresenta o seguinte padrão, para o número mínimo de movimentos necessários de um *puzzle* com 1, 2, 3, (…) anéis:

1	2	5	10	21	42	85	170	341 (…)
1 anel	2 anéis	3 anéis	4 anéis	5 anéis	6 anéis	7 anéis	8 anéis	9 anéis (…)

A generalização deste padrão é feita através das expressões $\frac{1}{3}(2^{n+1}-1)$ e $\frac{1}{3}(2^{n+1}-2)$ respetivamente para um número ímpar e para um número par de anéis. (Santos, Neto & Silva, 2007f; Petković, 2009). Assim, se quisermos saber a solução de um *puzzle* com 5 anéis, aplicando a primeira expressão temos que $\frac{1}{3}(2^{6}-1)=21$. Ou seja, 21 é o número mínimo de movimentos necessários para resolver um *puzzle* de Anéis Chineses constituído por 5 anéis.

Posição	Código Gray	Esquema
0	11111	
1	01111	
2	01011	
3	11011	
4	10011	
5	00011	

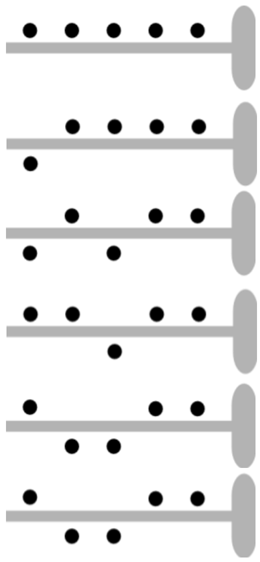


Figura 9. Primeiros cinco movimentos para resolver cinco anéis.

Santos, Neto e Silva (2007f) apresentam uma forma recursiva de resolver o *puzzle*. Para um puzzle de n anéis presos, a resolução R_n é dada pelos seguintes passos: a) soltar os n-2 anéis à esquerda (R_{n-2}); b) soltar o n-ésimo anel; c) prender os n-2 anéis à esquerda (o inverso de R_{n-2}); d) executar R_{n-1}. Se considerarmos R_5 como a resolução de 5 anéis, temos a seguinte sequência de passos:

a) Soltar 3 anéis à esquerda;
b) Soltar o 5.º anel;
c) Prender os 3 anéis à esquerda;
d) Realizar R_4;
e) Realizar R_3;
f) R_2.

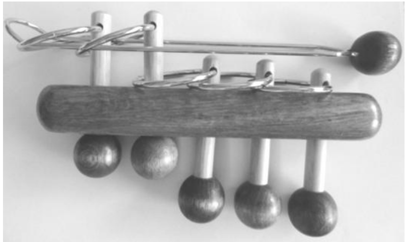


Figura 10. Anéis Chineses com 2 anéis presos e 3 soltos (11000)

Tomando um *puzzle* de cinco anéis como exemplo, a solução utilizando o código Gray também apresenta regularidades interessantes. Uma delas consiste no facto de cada número da sequência formada por este código diferir apenas em um dígito do número anterior e do número seguinte. A libertação efetiva (sem voltar a prender) dos anéis dá-se por ordem inversa. O 5.º anel é solto no movimento 6; o 4.º anel é solto no movimento 14; o 3.º anel é solto no movimento 18; o 2.º anel é solto no movimento 20; o 1.º anel é solto no movimento 21.

0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1
2	0	1	0	1	1
3	1	1	0	1	1
4	1	0	0	1	1
5	0	0	0	1	1
6	0	0	0	1	0
7	1	0	0	1	0
8	1	1	0	1	0
9	0	1	0	1	0
10	0	1	1	1	0
11	1	1	1	1	0
12	1	0	1	1	0
13	0	0	1	1	0
14	0	0	1	0	0
15	1	0	1	0	0
16	1	1	1	0	0
17	0	1	1	0	0
18	0	1	0	0	0
19	1	1	0	0	0
20	1	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0

Figura 11. Código Gray para os 21 movimentos.

A resolução de problemas interessou, ao longo da história, diversas personalidades, sendo ainda hoje um dos passatempos preferidos de um grande número de pessoas. Uma das personalidades associadas ao grande interesse pela resolução de problemas foi Carlos Magno. Alcuin terá inventado para o imperador muitas recreações matemáticas, entre as quais as conhecidas como problemas de travessia de rios (Danesi, 2002; Nogueira, 2010). Um desses problemas consiste na travessia de um rio feita por um homem que transportava um lobo, uma cabra e uma couve. O barco apenas levava dois de cada vez. Como terá o homem resolvido o problema? Este problema tem diferentes variações, como “Os maridos ciumentos”, inventado pelo matemático italiano Tartaglia (Danesi, 2004) ou “Os missionários e os canibais”, mas esta é certamente a mais simples e, segundo Nogueira (2010) a mais conhecida. A solução requer sete viagens, podendo ser a seguinte: 1) o homem terá de atravessar primeiro com a cabra; 2) regressa; 3) leva o lobo; 4) regressa com a cabra; 5) leva a couve; 6) regressa; 7) leva a cabra. Na terceira viagem o homem pode optar por duas situações: leva o lobo ou leva a couve. A primeira opção está acima descrita. Se opta por levar a couve, então apenas se altera na quinta viagem a couve pelo lobo.

Margem E	**Rio**	**Margem D**
Lobo Cabra Couve Homem		
Lobo Couve	Homem Cabra	
Lobo Couve	Homem	Cabra
Lobo	Homem Couve	Cabra
Lobo	Homem Cabra	Couve
Cabra	Homem Lobo	Couve
Cabra	Homem	Lobo Couve
	Homem Cabra	Lobo Couve
		Homem Lobo Cabra Couve

Figura 12. Uma solução do problema da travessia do homem, o lobo a cabra e a couve.

Backhouse (2011) apresenta uma abordagem diferente ao problema, que consiste em estudar as diferentes possibilidades de os quatro elementos se combinarem em cada margem, sabendo que a cabra nunca pode ficar sozinha com o lobo ou com a couve.

H	L	Co	Ca
E	E	E	E
E	E	E	D
E	E	D	E
E	D	D	E
E	D	E	E
D	E	D	D
D	E	E	D
D	D	E	D
D	D	D	E
D	D	D	D

Figura 13. Combinações possíveis entre o homem, o lobo, a cabra e a couve.

De todas as combinações possíveis apenas dez satisfazem as condições do problema, não consentindo nenhuma situação em que a cabra coma a couve ou o lobo coma a cabra, o que só acontece se o homem não estiver presente. A passagem de todos os elementos de uma margem EEEE para a outra DDDD origina um esquema que proporciona a visão de duas resoluções possíveis.

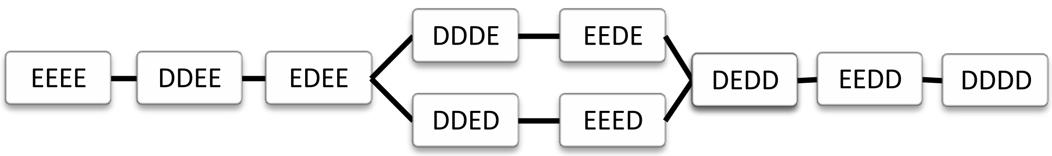


Figura 14. Localização do homem, lobo, cabra e couve por etapa (adaptado de Backhouse, 2011)

Os problemas de travessia de rio variam de cultura para cultura, variando quer no tipo de elementos envolvidos, quer no número de elementos, existindo versões muito antigas em Africa, nomeadamente em Cabo Verde, na Argélia, nos Camarões, na Etiópia ou na Zâmbia (Nogueira, 2010). No entanto nem todos apresentam solução. Um desses casos é o problema da travessia com quatro maridos e quatro esposas, apresentado por Tartaglia. No problema são apresentados quatro casais que tinham de atravessar um rio num pequeno barco, onde apenas cabiam duas pessoas. Como os maridos eram ciumentos, só permitiam que uma mulher ficasse com outro homem se o marido estivesse presente. Sam Loyd e Henry Dudeney descobriram que este problema não tinha solução, a menos que houvesse uma paragem no meio do rio, por exemplo uma ilha, para a transição dos elementos (Danesi, 2004).

As palavras cruzadas continuam a marcar presença em muitos jornais e nas bancas dos quiosques, bem como o sudoku. Este interesse pelos jogos para um jogador poderá ter alguma ligação com o facto de não ser necessário encontrar um adversário e desse modo poder ser jogado quando se quer ou há disponibilidade para o fazer. Esse aspeto tem também alguma ligação com o tempo, já que ao não ter outros intervenientes, para além do próprio jogador, este pode geri-lo da forma que entender.

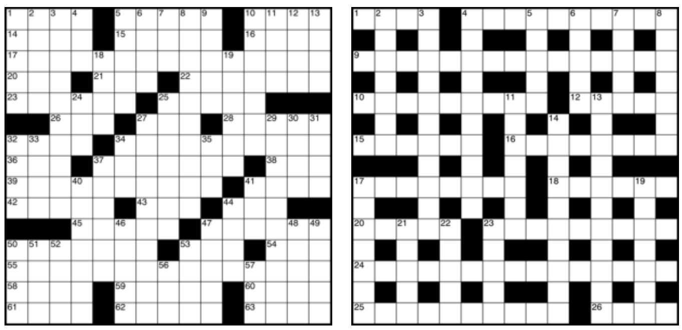


Figura 15. Simetria nas palavras cruzadas[2].

Neste tipo de jogos é frequente haver uma preocupação com os padrões visuais resultantes das células que não são para preencher, normalmente colocadas a preto. Muitas configurações apresentam simetria.

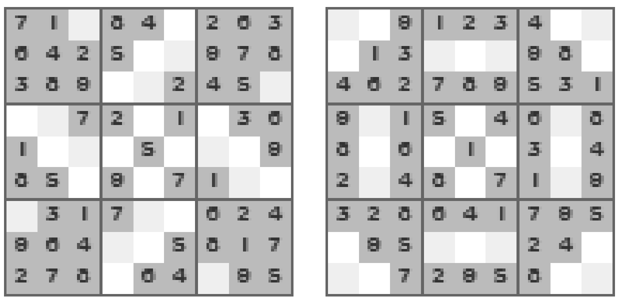


Figura 16. Simetria no sudoku[3].

[2] Retirado de http://en.wikipedia.org/wiki/Crossword

A simetria é também utilizada como ferramenta para criar novos *puzzles*, fazendo a rotação ou a reflexão do padrão e tornando visíveis ou escondendo os números de modo que se adequem ao novo desenho.

O Xadrez tem sido um jogo bastante utilizado para a resolução de problemas, como o “problema da volta do cavalo” e o “problemas das oito damas”. O “problema da volta do cavalo” consiste em fazer um cavalo percorrer todas as casas de tabuleiro sem repetir nenhuma. Segundo Nogueira (2010), o primeiro registo da solução do problema terá pertencido a Al-Adli ar-Rumi, um filósofo do séc. IX. Este problema apresenta soluções particularmente interessantes do ponto de vista da simetria. A procura de soluções que apresentam simetria proporciona padrões distintos. Quando é possível ligar o início e o fim do percurso, os problemas dizem-se reentrantes e constituem um desafio acrescido. Nogueira (Idem) refere uma extensão deste tipo de problemas à poesia através dos criptopercursos. O criptopercurso consiste num quadro de sílabas pertencentes a uma poesia, que é reconstruída através de uma “volta do cavalo”. O “problema das oito damas”, inventado pelo jogador de xadrez Max Bezzel, em 1848, consiste em colocar oito damas num tabuleiro de xadrez de modo que nenhuma se ataque. Este problema atraiu o interesse de muitos matemáticos, incluindo Gauss, mas foi Gunther que, em 1874, descobriu um algoritmo para a rápida resolução das soluções do problema. O problema admite 92 soluções, das quais apenas 12 são distintas, já que as restantes podem ser obtidas por reflexão ou rotação. As soluções apresentam o seguinte padrão: metade das damas ocupa uma casa branca e a outra metade ocupa uma casa negra (Nogueira, 2010). Este tipo de problemas proporciona padrões visuais interessantes, com grande ligação à simetria.

O tabuleiro de xadrez é também utilizado na resolução de problemas fora do contexto do jogo. Vakil (1996) apresenta alguns problemas de pavimentação do tabuleiro de xadrez por poliminós. Um desses problemas consiste em pavimentar um tabuleiro de xadrez com 21 peças, cada uma constituída por três quadrados em linha e uma peça, constituída por um quadrado. Cada quadrado das peças tem medida igual à dos quadrados unitários do tabuleiro de xadrez.

[3] Retirado de http://www.sudokudragon.com/symmetry.htm

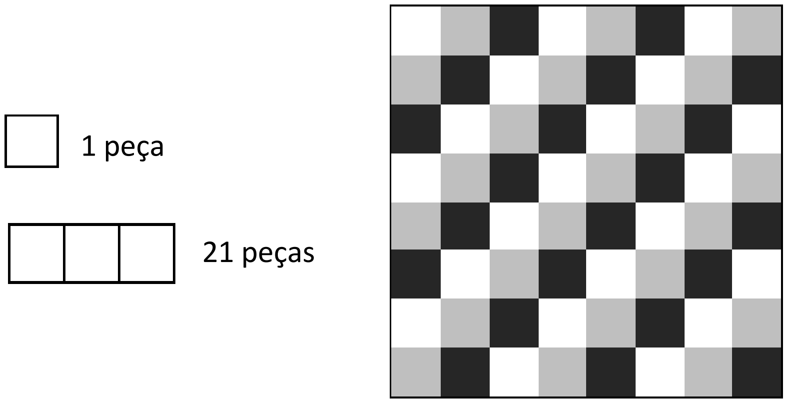


Figura 17. Pavimentação do tabuleiro de xadrez.

A resolução do problema é apresentada recorrendo a padrões visuais, que permitem uma rápida perceção do local a colocar a peça com um quadrado. O tabuleiro é colorido com três cores alternadas (Figura 17), ficando 21 quadrados de branco, 21 de preto e 22 de cinzento. Este padrão permite verificar que a peça composta por 3 quadrados irá ocupar sempre um quadrado de cada cor, independentemente do local em que se coloque. Assim, depois de colocar as 21 peças iguais, ao quadrado unitário apenas resta o quadrado colorido a cinzento. Este é um exemplo de como um padrão visual nos pode auxiliar a resolver um problema.

A procura de padrões é referida como uma das estratégias de resolução de problemas (Vale & Pimentel, 2004). Já tivemos oportunidade de referir algumas situações onde os padrões emergem na análise da resolução de puzzles ou problemas envolvendo jogos. Iremos apresentar de seguida uma situação em que a paridade se revela um padrão a contemplar na resolução de determinado tipo de problemas. Aliás, Vakil (1996) considera a análise da paridade como uma ferramenta poderosa da resolução de problemas e propõe uma análise do Triângulo de Pascal tendo em consideração a paridade.

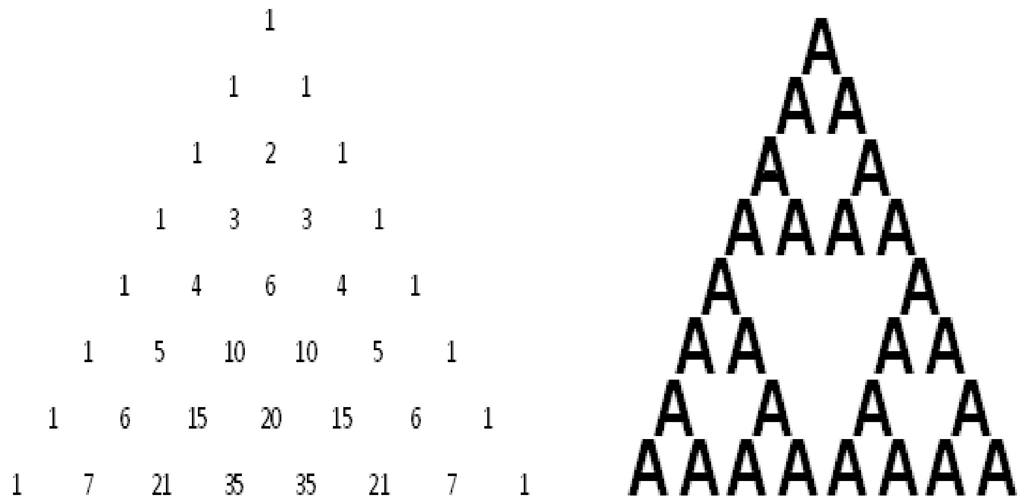


Figura 18. Paridade no Triângulo de Pascal.

Vakil (Idem) transforma os números ímpares do Triângulo de Pascal na letra A e os números pares na letra B. A observação atenta do padrão resultante conduz-nos ao fractal de Sierpinski, mais facilmente identificável se eliminarmos a letra B, ou seja os números pares.

2.5. Síntese da abordagem aos padrões

O conceito de padrão é muito abrangente e não se restringe à área de matemática. Mesmo nesta área o conceito continua a abranger um grande número de tópicos. Keith Devlin (1998) aponta a existência de padrões que podem ser observados nos mais variados locais da natureza, como as órbitas dos planetas, os nós, a simetria das flores, a sequência de notas que formam uma música, a relação entre as palavras para formar uma frase ou as marcas no pelo dos leopardos. Aliás, Devlin (1997) refere que a matemática pode ser considerada a ciência dos padrões. A opinião de diferentes autores revela que o conceito de padrão se encontra relacionado com conceitos como motivo, regularidade, regra e ordem. A multiplicidade de sentidos atribuídos ao termo *padrão* traduz a riqueza do conceito pelo que ele deve ser explorado nessa mesma multiplicidade (Vale et al., 2006).

A relação dos padrões com a matemática tem sido amplamente divulgada por diversos autores (Steen, 1990; Devlin, 1997; 1998, Resnik, 1997).

Os padrões encontram-se presentes num grande número de atividades desenvolvidas desde muito cedo pelas crianças, nomeadamente no ritmo de algumas músicas, nas letras das canções e nas lengalengas. Aliás, os padrões encontram-se ligados ao mundo em que vivemos, numa estreita ligação com a matemática, que é referida como sendo a ciência dos padrões, a ciência que descobre e interpreta os padrões existentes na natureza ou inventados pelo Homem. Mason (2011) considera fundamental que o estudo dos padrões faça parte integrante do ensino de qualquer assunto matemático.

A importância dos padrões está também presente em documentos curriculares, como o NCTM (2000), onde o estudo dos padrões, da álgebra e das funções, constitui o mesmo tópico. Em Portugal, o programa de matemática para o Ensino Básico referia também o trabalho com regularidades, logo no 1.º ciclo, apontando para a identificação e investigação de padrões numéricos e geométricos, na medida em que permitem fazer conexões entre a geometria e a aritmética, promovendo o desenvolvimento da capacidade de abstração e do pensamento algébrico (DGIDC, 2007).

Nas últimas décadas foram conduzidas diversas investigações envolvendo a identificação de padrões. Apesar da identificação de padrões ser um aspeto central dessas investigações, há claramente diferentes abordagens e ligações entre os padrões e outros aspetos, como o pensamento funcional ou os jogos.

Ao longo dos séculos o interesse de matemáticos pela análise de jogos permitiu a emergência de padrões numéricos e geométricos utilizados para a resolução de alguns jogos.

CAPÍTULO 3

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

3.1. Introdução

Ao longo deste capítulo são apresentados de forma sucinta os aspetos inerentes à resolução de problemas que consideramos mais relevantes. O capítulo desenrola-se em quatro pontos: Introdução; O que é a resolução de problemas; A resolução de problemas e a educação matemática elementar; Síntese da abordagem à resolução de problemas. Após esta introdução, o segundo ponto aborda o conceito de problemas e uma breve tipologia dos problemas, bem como o conceito, a importância da resolução de problemas, etapas e estratégias da resolução de problemas. O ponto seguinte encontra-se dedicado à importância da resolução de problemas no currículo da educação matemática elementar, onde se faz uma abordagem dos documentos curriculares. O último ponto sintetiza os aspetos principais focados ao longo do capítulo.

3.2. O que é a resolução de problemas

Resolver problemas faz parte do nosso quotidiano. No entanto, por norma é na escola que a criança é confrontada com o ensino formal da resolução de problemas. Esse ensino deve cativar a criança e facultar-lhe as ferramentas necessárias. Como referem Krulik e Rudnick (1993), cabe aos professores do Ensino Básico a responsabilidade de desenvolverem nos seus alunos as capacidades necessárias para que sejam bons resolvedores dos problemas que se lhes forem deparando.

Quando falamos de resolução de problemas do quotidiano e de resolução de problemas na escola estaremos a falar do mesmo? Primeiramente é essencial clarificar o que se entende por problema, dado que este conceito nem sempre é usado da mesma forma. O que por vezes é referido como um problema por uns, não passa de um exercício para outros.

Para Macias (1976), resolver um problema é a aplicação de um resultado obtido na teoria a um caso particular, substituindo, por exemplo, uns valores numéricos na fórmula apropriada. Esta definição contextualiza-se na escola tradicional, uma vez que o objetivo da resolução de tarefas era fundamentalmente a aplicação de algoritmos.

Pólya (1980) considera que resolver um problema é encontrar um caminho para sair de uma dificuldade, atingir um objetivo desejado que não é imediatamente acessível, utilizando os meios apropriados.

Para Kantowski, um indivíduo encontra-se perante um problema “quando se confronta com uma questão a que não pode dar resposta ou uma situação que não sabe resolver, usando os conhecimentos imediatamente disponíveis" (Vale & Pimentel, 2004, p. 13).

Segundo Charles e Lester, para que uma tarefa seja um problema é necessário que o indivíduo "queira ou necessite de encontrar uma solução, que ele não tenha nenhum procedimento imediatamente disponível, que ele faça uma tentativa de a resolver" (Palhares, 1997, p.162). Também Matos e Serrazina (1996) salientam a necessidade de o indivíduo se empenhar ativamente na procura da solução para que uma dada tarefa constitua um problema. Ou seja, o indivíduo tem de reagir mostrando interesse e empenho na busca de uma solução, para que determinada tarefa possa ser considerada um problema. Para isso, o problema tem de ter uma estrutura adequada a esse indivíduo, nem demasiado complexo que cause frustração, nem demasiado fácil que cause desinteresse. Esta problemática foi apresentada por Pólya (1981), que considerou essencial a vontade e determinação para que um dado problema seja efetivamente um problema para quem o enfrenta. A determinação produtiva na resolução do problema irá, eventualmente, fazer surgir a solução e produzirá alterações no comportamento mental do resolvedor. Mais, ainda, Pólya (Idem) considera importante a persistência, mas desde que haja expectativas de que essa persistência produza efeitos ou alterações no processo e não conduza a uma repetição infrutífera. Alerta para a necessidade de ponderar a observação de uma variedade de aspetos ou detalhes que permitam ‘ver’ o problema de uma perspetiva diferente.

Para Palhares (2000, p. 89) a definição de problema subentende "uma situação inicial, uma situação final requerida, um obstáculo que tem que ser vencido por raciocínio e pela aplicação de um procedimento que não é conhecido *a priori*". Neste trabalho o conceito de problema enquadra-se nesta definição. Consideramos ainda essencial a motivação para a resolução do problema, onde o papel do professor é essencial, nomeadamente na seleção adequada dos problemas a propor aos seus alunos. Como referem Vale e Pimentel (2004), a mesma tarefa pode ser um problema para determinados alunos e um exercício para aqueles que já conhecem o procedimento ou algoritmo a utilizar para obter a solução.

Tal como uma dada tarefa pode constituir um problema ou um exercício, dependendo do indivíduo a quem se destina, a classificação dos problemas não é um processo uniforme, dado estar igualmente condicionada ao tipo de resolvedores. A diferença no conhecimento matemático de dois resolvedores pode fazer com que o mesmo problema seja de um tipo para um e de outro tipo para o outro.

Palhares (1997) apresenta uma classificação dos problemas assente no procedimento a utilizar, alertando que, por vezes, são necessários diversos procedimentos para a resolução de determinados problemas: Problemas de processo; problemas de conteúdo; Problemas de capacidades; Problemas tipo *puzzle*; Problemas de aplicação; Problemas abertos; Problemas de aparato experimental; Problemas abertos de aplicação. Os Problemas de processo requerem a utilização de estratégias de resolução; Os Problemas de conteúdo são aqueles onde é necessário a aplicação de conhecimentos matemáticos recentemente adquiridos ou não adquiridos na totalidade; Os Problemas de capacidades, como o próprio nome indicia, implicam a utilização de capacidades matemáticas (cálculo mental, estimativa…); Os Problemas tipo *puzzle* requerem o alargamento do espaço de resolução e, por vezes, 'olhar' para o problema sob um ponto de vista diferente; Os Problemas de aplicação são aqueles em que há maior incidência na recolha e tratamento da informação; Os Problemas abertos são caracterizados pela necessidade de ponderar os vários caminhos possíveis; Os Problemas de aparato experimental requerem a utilização de esquemas investigativos; Os Problemas abertos de aplicação requerem simultaneamente os procedimentos utilizados pelos Problemas de aplicação e pelos problemas abertos.

Pelo facto de ter subjacentes os procedimentos, esta classificação implica o conhecimento dos indivíduos a quem os problemas vão ser aplicados. O mesmo problema pode ser um problema de processo para um indivíduo e de conteúdo para outro, dependendo do conhecimento matemático de cada um.

Relativamente à resolução de problemas, Lester (1993) refere que é uma atividade complexa de desafio que se desenvolve lentamente num período de tempo alargado. Esta atividade envolve uma grande variedade de ações cognitivas que exigem conhecimentos e capacidades. Trata-se de uma atividade complexa e como tal requer muito mais do que o recordar de factos ou a aplicação de procedimentos. O autor refere que, apesar de toda a investigação conduzida sobre a temática, há, ainda, necessidade de clarificar o significado da resolução de problemas, necessidade que é também corroborada por Schoenfeld (1996). Facto que denota a complexidade que a resolução de problemas envolve.

Schoenfeld (1996) considera que a resolução de problemas é uma parte significativa do pensamento matemático, ou seja da visão do mundo do ponto de vista matemático modelando, simbolizando, abstraindo e aplicando ideias matemáticas a diferentes situações usando as ferramentas adequadas. O autor considera, ainda, que atividades com sentido matemático, como modelar e simbolizar, comunicar, analisar, explorar, conjeturar e provar, representam aquilo que a matemática realmente é. Esta ideia é igualmente defendida por Vale e Pimentel (2004) que consideram a resolução de problemas como um meio essencial para a aprendizagem de novas ideias e capacidades matemáticas e sem a qual os conhecimentos e capacidades matemáticas, bem como a utilidade e poder das ideias matemáticas ficariam limitados, na medida em que a grande finalidade da matemática escolar é proporcionar as condições para que os alunos sejam capazes de utilizar a matemática no seu quotidiano.

Numa perspetiva diferente, Getzels divide os problemas em três categorias distintas: os problemas que são apresentados; os problemas que são descobertos; os problemas que são inventados (Pretz, Naples & Sternberg, 2003). Esta classificação tem subjacente a forma como nos deparamos com os problemas.

Para Schoenfeld (1996) problemas potencialmente valiosos devem ter as seguintes propriedades: serem facilmente compreendidos; poderem ser resolvidos ou abordados por diferentes caminhos; servirem como introdução a importantes ideias matemáticas; possibilitarem o desenvolvimento de novas explorações matemáticas.

A importância da resolução de problemas no desenvolvimento de capacidades e na introdução de novas ideias encontra-se também presente no ensino e mestria de jogos. É com relativa facilidade que se encontram livros de jogos, nomeadamente de xadrez, onde problemas de diferentes graus de dificuldade são apresentados como forma de aprender o jogo ou progredir a performance no jogo. Também a publicação de problemas de xadrez faz parte de quase todas as revistas da especialidade (Palhares, 2004). A resolução dos problemas e posterior análise ajudam os praticantes a refletir sobre situações específicas do jogo e sobre o jogo como um todo, permitindo o desenvolvimento de estratégias de resolução. Também neste tipo de problemas, tal como nos problemas matemáticos ou do quotidiano, é no destinatário que se define se a tarefa que tem pela frente constitui realmente um problema ou se é um exercício (já conhece a jogada ou jogadas). Esta ênfase na resolução de problemas de jogo tem subjacente uma ideia defendida por Pólya (1973), que considera essencial resolver problemas para aprender a resolver problemas. Ericsson (2003) afirma que os indivíduos, nomeadamente os jogadores/praticantes de alto nível, envolvem-se deliberadamente na prática da resolução de problemas, sejam de jogo ou relacionados com a prática de instrumentos musicais ou dança. Esta prática de resolução de problemas permite-lhes aumentar a sua mestria. No entanto, estudos realizados por French e Sternberg com jogadores de *bridge* e por Chase e Simon e Gobet e Simon com jogadores de xadrez revelaram que o grande conhecimento de estratégias pode tornar-se um impedimento à resolução de problemas, onde essas estratégias não são úteis (Pretz, Naples & Sternberg, 2003; Ericsson, 2003). Uma das mais-valias da resolução de problemas reside na diversificação dos tipos de problemas enfrentados para a formação do indivíduo como um todo. A resolução de problemas envolve pensar e fazer, ou agir com um determinado objetivo (Fisher, 1990), onde as emoções e a determinação desempenham um papel importante (Pólya, 1973).

Segundo Pólya (1973) a resolução de problemas inclui quatro etapas: a) Compreensão do problema; b) Elaboração dum plano; c) Execução do plano; d) Verificação dos resultados.

Lester (1993) considera que o desempenho na resolução de problemas se encontra relacionado com cinco fatores: a) aquisição e utilização de conhecimentos; b) controlo; c) conceções; d) fatores do domínio afetivo; e) contextos socioculturais.

Na aprendizagem da resolução de problemas a familiaridade com o uso de estratégias de resolução revela-se importante para a evolução da capacidade de resolução (Vale & Pimentel, 2004). Assim, o professor deve permitir aos alunos a resolução de diversos problemas que promovam a utilização de um número significativo de estratégias de resolução.

Posamentier e Krulik (1998) apontam dez estratégias que consideram particularmente úteis na resolução de problemas, tendo o cuidado de referir que muitos problemas podem requerer mais do que uma estratégia de resolução: a) *Working backwards*; b) Procurar um padrão; c) Abordar o problema de um ponto de vista diferente; d) Resolver um problema análogo mais simples; e) Considerar casos extremos; f) Fazer um desenho ou uma representação visual; g) Conjeturar e testar; h) Considerar todas as possibilidades; i) Organizar os dados; j) Dedução lógica. Posamentier e Krulik (Idem) apontam, ainda, para a necessidade de os resolvedores 'olharem' para os problemas de um ponto de vista crítico de modo a poderem, se possível, resolver os problemas utilizando a estratégia mais eficaz e não aquela que é mais comum ou óbvia à partida, desenvolvendo a flexibilidade do raciocínio.

Na resolução de problemas, as estratégias são utilizadas de acordo com o tipo de problemas, podendo para o mesmo problema utilizar-se mais do que uma estratégia. O papel do professor poderá ser o de orientar os alunos no sentido de utilizarem a 'melhor' estratégia para determinado problema. Para resolver determinado tipo de problemas podemos recorrer a um problema mais simples ou/e organizar os dados numa tabela que analisaremos na tentativa de encontrar um padrão que ajude a solucionar o problema. Por vezes as estratégias têm mais valor pela sua complementaridade.

Segundo Palhares (1997) para resolver um problema é necessário a aplicação de procedimentos que o resolvedor não pode à partida saber qual é o mais adequado. Um dos vários procedimentos referidos por Palhares é o uso de estratégias de resolução tais como: a) conjetura e teste; b) tentativa e erro; c) identificação de um padrão; d) construção de um modelo ou outro desenho; e) tabela ou lista organizada, f) dedução lógica ou eliminação; g) do fim para o princípio.

Na opinião de Posamentier e Krulik (1998, pp. 4-5) os professores devem verificar quais as estratégias de resolução de problemas mais adequadas para os seus alunos e como e quando devem ser utilizadas. Para além disso, estes autores referem que os professores devem preocupar-se, antes de mais, com a sua própria capacidade para se tornarem resolvedores de problemas.

Relativamente ao ensino e aprendizagem da resolução de problemas no 1.º Ciclo, Ponte e Serrazina (2000) consideram que algumas das estratégias de resolução de problemas mais usadas neste nível de ensino consistem em utilizar diagramas e outras representações matemáticas, procurar regularidades, elaborar uma lista de todas as possibilidades, experimentar casos particulares, usar a tentativa e erro e pensar de trás para a frente.

Apesar de as diferentes estratégias anteriormente abordadas serem todas elas importantes e desempenharem o seu papel na resolução de problemas, a procura de regularidades é para Vale e Pimentel (2004, p.32) "Uma das estratégias mais poderosas da resolução de problemas”.

No ensino e prática de jogos, como o xadrez, recorre-se com frequência à resolução de problemas, que constituem a análise de situações de jogo. Esta análise permite encontrar jogadas mais vantajosas e prever possíveis jogadas futuras, quer de defesa, quer de ataque. A invenção destes problemas constitui uma atividade de grande criatividade e atraiu a atenção de grandes apreciadores e criadores de *puzzles* como Sam Loyd, Henry Dudeney e Martin Gardner, todos eles com uma forte ligação à matemática recreativa. No entanto, como refere Dudeney (2008) por vezes os *puzzles* envolvendo jogos, nomeadamente o xadrez, não têm grande relação prática com o jogo em si mesmo, constituindo simplesmente enigmas formulados naquele contexto. Esse facto não tira o mérito a este tipo de *puzzles*. Aliás, segundo Dudeney, a vantagem reside em resolver *puzzles* e não no tipo de *puzzles* que se resolvem, pois constituem um verdadeiro treino para a mente. A compilação de *puzzles* diversificados permite que estes possam ir ao encontro das diferentes preferências de cada indivíduo e concretizarem a sua grande finalidade que é serem resolvidos.

Os jogadores deparam-se com o processo de resolução de problemas ao longo do jogo, à medida que as situações de jogo se vão alterando. O problema colocado por cada nova jogada exige uma tomada de decisão. De Groot considera que no jogo de xadrez o processo de tomada de decisão envolve três fases. Na primeira fase o jogador familiariza-se com a situação de jogo e observa possíveis estratégias, planos e potenciais jogadas. Na fase seguinte, a fase de aprofundamento progressivo, o jogador põe em prática a procura das potenciais jogadas. Na terceira e última fase o jogador recapitula o resultado da sua procura e verifica a validade da decisão tomada (Gobet, Voogt & Retschitzki, 2004). Estas fases de tomada de decisão vão ao encontro das fases de resolução de problemas propostas por Pólya (1973). No jogo de xadrez, a fase de procura de potenciais jogadas parece ter uma forte ligação com a identificação de padrões. Chase e Simon consideram que, no momento em que os jogadores interiorizam uma determinada posição de jogo, essa posição passa pelo sistema mental de perceção de padrões e novos padrões são identificados. Esses padrões irão sugerir novas jogadas (Gobet, Voogt & Retschitzki, 2004). Desta forma a identificação de padrões revela-se também uma estratégia importante na resolução de problemas de jogo.

3.3. A resolução de problemas e a educação matemática elementar

Em 1989, o *National Council of Teachers of Mathematics* publica um documento orientador para a matemática escolar, cuja edição portuguesa, de 1991 se intitula *Normas para o Currículo e Avaliação da Matemática Escolar*. Segundo as Normas, a resolução de problemas deve proporcionar aos alunos a oportunidade de aplicarem os seus conhecimentos, desenvolverem as suas capacidades e apreciarem o poder e a beleza da matemática (NCTM, 1991). Posteriormente, a publicação de *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, em 2000 (publicação portuguesa em 2007) vem dar continuidade e ampliar as Normas de 1989. A resolução de problemas é apresentada como parte integrante de toda a aprendizagem matemática, constituindo um conjunto de normas específicas para cada um dos quatro níveis de aprendizagem (do pré-escolar ao 2.º ano, do 3.º ano ao 5.º ano, do 6.º ano ao 8.º ano e do 9.º ano ao 12.º ano).

A resolução de problemas tem vindo a constituir um foco central dos documentos curriculares destinados ao ensino da matemática elementar. Desses documentos, destacam-se aqui dois documentos nacionais: o programa do 1.º ciclo, de 1998 e o Programa de Matemática do Ensino Básico, de 2007. Em 1998, o programa do 1.º ciclo apresentava a resolução de problemas como um tópico central no ensino da matemática, sendo o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas uma das três grandes finalidades do ensino da matemática, juntamente com o desenvolvimento da capacidade de raciocínio e da capacidade de comunicar (DEB, 1998).

O Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais, de 2001, constituiu um marco em diretrizes para o ensino. Este documento referia que uma das competências gerais do Ensino Básico consiste em "adoptar estratégias adequadas à resolução de problemas e à tomada de decisões" (DEB, 2001, p. 15). Desta forma, a resolução de problemas aparecia como uma competência a desenvolver globalmente em todos os alunos do Ensino Básico e transversal a todas as áreas, não sendo exclusiva da matemática.

Esta filosofia de ensino onde se destacava a importância da resolução de problemas manteve presença no Programa de Matemática do Ensino Básico, de 2007. Este documento reuniu num único documento o programa de matemática de todo o Ensino Básico e, para além dos temas matemáticos, salientava três competências transversais à aprendizagem matemática: a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. A resolução de problemas aparecia assim como uma atividade fundamental ao ensino e aprendizagem da matemática. A capacidade de resolver problemas constituía, ainda, um dos objetivos gerais deste documento, onde era referido que

> *"A resolução de problemas é uma actividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático. Neste processo, os alunos devem compreender que um problema matemático, frequentemente, pode ser resolvido através de diferentes estratégias e dar atenção à análise retrospectiva da sua resolução e apreciação das soluções que obtêm (DGIDC, 2007, p. 6).*

No entanto, nem sempre o currículo valorizou a resolução de problemas e é possível que o futuro nos reserve algumas mudanças. Como refere Ponte (2003, p. 3)

> *"Cada época valoriza diferentes objectivos de aprendizagem dos alunos – que variam à medida que variam as grandes finalidades da educação. Não é a mesma coisa preparar elites para frequentar o ensino superior numa sociedade obscurantista e ditatorial ou proporcionar uma educação para todos visando o exercício da cidadania numa sociedade democrática. Mas será de ter presente que o discurso sobre os "maus" resultados dos alunos no ensino básico e secundário não é de hoje".*

Ao verificar que alguns manuais apresentavam a resolução de problemas como um capítulo distinto, Ron Aharoni (2008, p. 131), a propósito do ensino e aprendizagem da aritmética, refere que "A resolução de problemas não é mais um capítulo entre os capítulos da aritmética mas a sua essência. É o ponto de partida e a meta…".

A preocupação centrada na resolução de problemas tem subjacente um conceito de ensino, no qual se procura preparar os indivíduos para uma sociedade que exige uma adaptação contínua face à grande evolução social e tecnológica. Como refere Bishop (2000), a matemática tornou-se muito importante nos países desenvolvidos e a sociedade espera que se ensine muita matemática a todos os alunos. No entanto, as alterações sociais e tecnológicas têm sido tão complexas e rápidas que se torna difícil prever os problemas com que os indivíduos se irão deparar no futuro. Como referem Baroody e Coslick (1998), é necessário promover nas crianças a disposição para enfrentar os problemas e muni-las com estratégias gerais de resolução de problemas.

Por outro lado, a má prestação dos alunos nos testes internacionais de matemática, nomeadamente o TIMSS[4] e o PISA[5], bem como nas Provas de Aferição, estiveram também na origem dessa mudança, face a um anterior ensino mais focado em conceitos e procedimentos. Procurando fazer face aos maus resultados obtidos nesses testes o Ministério da Educação incidiu maior atenção no ensino e aprendizagem da matemática nos níveis mais elementares, implementando um programa de acompanhamento e formação contínua em Matemática para os

[4] Trends in International Mathematics and Science Study
[5] Project for International Student Assessment.

professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico, uma formação onde também era valorizada a resolução de problemas (Mamede, 2008). Os frutos dessa mudança no Ensino Básico português parecem estar a revelar-se gratificantes, com uma melhoria nos resultados a matemática, obtidos pelos alunos portugueses nos últimos testes internacionais.

Uma frase de Schoenfeld (1996, p. 11) explicita a importância que este autor atribui ao ensino e aprendizagem da resolução de problemas: "Se nós fizermos o nosso trabalho correctamente, talvez as escolas se tornem lugares onde os alunos realmente aprendam a pensar".

Segundo Pólya (1981), ensinar a pensar deverá ser o principal objetivo do ensino da matemática, cujo currículo deverá estar assente na resolução de problemas. Pólya (Idem) considera que o papel dos professores de matemática não deverá ser meramente o de transmissores de conhecimento. Os professores deverão desenvolver nos alunos a capacidade de usar a informação recebida, promovendo atitudes proveitosas e bons hábitos mentais. Paralelamente devem envolver os alunos num processo de ensino e aprendizagem ativo e motivá-los para as diferentes fases de aprendizagem.

3.4. *Puzzles*

O termo *puzzle* suscita alguma necessidade de esclarecimento, dado ser apresentado, por vezes, de forma algo ambígua, não ficando muito claro se pertencem à categoria dos problemas ou dos jogos. Kasner e Newman (1988) referem-se aos *puzzles* como sendo problemas apresentados de forma particular. Este tipo de problemas apresenta-se de forma recreativa e tem servido de divertimento ao longo dos séculos. Como exemplos os autores fazem referência aos *puzzles* inventados no antigo Egito, aos problemas de travessia e aos Anéis Chineses, entre outros. No entanto referem-se ao jogo das Torres de Hanói. Em contrapartida, Averbach e Chein (2000) consideram que, de certo modo, todos os problemas recreativos são jogos para um jogador, enquadrando nesta área as Torres de Hanói, o Tangram e os Poliminós.

Assim, se por um lado Kasner e Newman (1988) nos encaminham para uma visão de *puzzle* como representativa de problemas recreativos, por outro lado, levam-nos a refletir acerca da ténue fronteira que separa os jogos para um jogador dos problemas. Para Wickelgren (1974), um problema é composto por três tipos de informação: a relacionada com os dados do problema, a relacionada com as operações e a relacionada com a meta a atingir. O autor considera, ainda, que no caso particular de alguns puzzles, os dados são o material. No caso dos problemas de xadrez, os dados são as peças dos dois jogadores, a sua posição no tabuleiro e a informação de quem é a vez de jogar.

Como já foi referido anteriormente, durante o jogo o jogador depara-se com a necessidade de resolver os problemas que são colocados por cada nova jogada. A solução pode visar diferentes propósitos, a melhor jogada ou ataque ou como vencer o jogo. Por outro lado, a utilização de problemas em contexto de jogo é frequentemente utilizada no ensino e aprendizagem dos jogos (Ferreira & Palhares, 2008). A análise de situações de jogo e a resolução dos problemas a elas inerentes ajudam os jogadores a estarem melhor preparados para enfrentar problemas semelhantes em situação de jogo. No entanto, há problemas cuja ligação ao jogo se cinge ao material de jogo e às regras de movimentos de determinadas peças. São exemplos os problemas da 'volta do cavalo' ou das 'cinco damas'. Estes problemas utilizam particularidades do jogo, mas não se constituem em contexto de jogo. Contudo, seja ou não em contexto de jogo, estes problemas são ou podem ser resolvidos individualmente, como qualquer outro problema.

O que distinguirá, então, os jogos para um jogador dos problemas? Se tomarmos por exemplo os Anéis Chineses e decidirmos tentar libertar todos os anéis para nos recrearmos com essa atividade possivelmente estaremos perante um jogo. Estaremos perante uma atividade que fazemos livremente, cumprindo as regras estabelecidas e sem certeza acerca do resultado final. No entanto, se o nosso objetivo for descobrir a maneira de libertar os anéis com o menor número de movimentos possível, então provavelmente estaremos perante um problema. Como refere Pólya (1981) para resolver o problema temos de idealizar um sistema coerente de operações, desde a formulação da hipótese até à conclusão. Este sistema coerente de procedimentos referido por Pólya para a resolução de problemas não se enquadra no conceito de jogo.

Retomando o termo *puzzle*, é comum traduzir-se por quebra-cabeças, dos quais fazem parte uma grande variedade de desafios, nomeadamente os chamados jogos de engenho ou os enigmas e charadas. Observando alguma literatura sobre *puzzles* e matemática recreativa (Gardner, 1994; Danesi, 2002; Nogueira, 2010) verificamos que é essencialmente sobre problemas ou enigmas que os autores se debruçam. Nessa literatura é frequente o uso da dicotomia jogos e *puzzles* (Wakeling, 1992), que por si só já nos remete para duas categorias distintas. Apesar de, por vezes, os jogos para um jogador serem referidos como *puzzles*, neste trabalho consideramos que os jogos, sejam eles para um ou mais jogadores, pertencem a uma categoria distinta. No entanto, quer façam parte dos jogos, como sugerem Kasner e Newman (1988), quer façam parte dos problemas recreativos, na visão de Averbach e Chein (2000), os *puzzles* continuam a ter um papel importante na matemática recreativa.

3.5. Síntese da abordagem à resolução de problemas

A resolução de problemas tem vindo a preocupar investigadores e professores de matemática ao longo das últimas décadas, no sentido de melhorar o ensino e aprendizagem da matemática. No entanto, apesar do passar do tempo, o conceito de problema e o conceito de resolução de problemas continua a necessitar de clarificação e de continuada ênfase, como alertam Lester (1993) e Schoenfeld (1996).

A definição do conceito de problema e, consequentemente de resolução de problemas, não é consensual. A aplicação de um procedimento ou uma cadeia de procedimentos já conhecidos para chegar à solução de uma determinada tarefa proposta é, por vezes, considerada a resolução de um problema. Neste trabalho seguimos a ideia de que um problema requer o não conhecimento, à partida, de qual ou quais procedimentos levam à solução. Desta forma, a resolução de problemas requer o envolvimento do resolvedor na procura de estratégias e conhecimentos adequados para enfrentar com sucesso o dito problema. Assim, este processo deve conduzir a novos conhecimentos e, de preferência a novos desafios. Como refere Pólya (1973), a prática e o conhecimento de heurísticas ajudam o desenrolar de todo o processo.

Documentos curriculares nacionais e internacionais têm incidido sobre a importância da resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem da matemática. No entanto, a resolução de problemas tem subjacente uma filosofia de ensino que nem sempre marcou presença nos currículos, como referem Ponte (2003) e Schoenfeld (1996). A melhoria dos resultados a matemática dos alunos portugueses nos mais recentes testes internacionais pode traduzir o esforço dos últimos anos no investimento num ensino onde a resolução de problemas constitui uma parte importante. Como refere Schoenfeld (1996), é desejável que a escola seja realmente um local onde os alunos aprendam a pensar.

CAPÍTULO 4

FUNDAMENTOS DO JOGO

4.1. Introdução

Este capítulo pretende fazer uma abordagem ao conceito de jogo nas suas diferentes vertentes, de forma a proporcionar uma visão abrangente do que é o jogo e daquilo que ele pode representar, procurando simultaneamente clarificar o conceito de jogo utilizado no estudo. Assim, inicia-se com o estudo dos jogos, que assume a função de abertura ao conceito de jogo, nomeadamente ao interesse demonstrado pelo ser humano ao longo da história e à posição que tomamos neste estudo relativamente tipo de jogos e à abordagem pretendida. Tratando-se de um conceito amplamente utilizado na linguagem, seguidamente abordam-se os diferentes significados que os termos 'jogo' e 'jogar' assumem na língua portuguesa, bem como as definições de jogo propostas por diversos autores, apontam-se algumas das características do jogo, explorando a dicotomia entre jogo e brincadeira, finalizando com diferentes propostas de classificação dos jogos. No ponto seguinte apresenta-se uma perspetiva da evolução histórica das teorias do jogo defendidas por diferentes autores. A análise do jogo é também apresentada na perspetiva de alguns matemáticos, ao longo da história, que nos legam o seu interesse, descobertas e invenções. Seguidamente, analisa-se a relação entre o jogo e a educação matemática, realçando a posição do currículo face ao jogo e o contributo do jogo à matemática e à educação matemática. Por último faz-se um ponto de situação acerca dos jogos matemáticos e da posição que defendemos neste estudo acerca do que define este tipo de jogos.

4.2. Estudo dos jogos

Ao longo da história da humanidade, o ser humano tem revelado interesse pelo jogo, nas suas variadas dimensões (Caillois, 1990; Huizinga, 2003). No que respeita aos jogos de tabuleiro, esse interesse é visível no grande número de artefactos encontrados em escavações arqueológicas, nomeadamente peças de jogo e tabuleiros inscritos em madeira ou pedra, que fazem parte do espólio de muitos museus. No entanto, datar o início do jogo como atividade humana, não é fácil, na medida em que muitos jogos não carecem de material passível de ser preservado no tempo, ou de nenhum material. Provavelmente, o seu início remonta ao próprio aparecimento do Homem, pois como refere Huizinga (2003, p. 17) "o jogo é mais velho do que a cultura". Quanto aos jogos de tabuleiro, Murray (1952) refere que este tipo de jogos remonta a mais de quatro mil anos, sendo exemplo disso as pinturas encontradas nos templos e túmulos do antigo Egito. O facto de os jogos de tabuleiro necessitarem de um tabuleiro, como o próprio nome indica, facilitou o conhecimento das suas origens e existência, através da análise dos achados arqueológicos, sendo essa a principal razão para que, dos jogos antigos, os de tabuleiro sejam os que melhor se conhecem (Dunn-Vaturi, 2007). As referências mais antigas a jogos de tabuleiro provêm do antigo Egito, da Mesopotâmia, Assíria, Chipre e Creta devido a essas culturas terem por tradição enterrarem os mortos juntamente com os seus pertences, o que permitiu a preservação de artefactos reveladores da existência de determinados jogos (Murray, 1952). No entanto, vestígios de jogos são encontrados noutros locais, nomeadamente em habitações, igrejas e mosteiros. Em Portugal foram encontrados mais de uma centena de jogos gravados na pedra (Fernandes & Alberto, 2009) o que traduz de alguma forma a importância da arqueologia no estudo da história dos jogos também no nosso país. O trabalho de pesquisa arqueológica, conduzido por Lídia Fernandes (2013), tendo como pano de fundo os jogos de tabuleiro, culminou, numa obra pioneira, em Portugal, que constitui o roteiro dos vestígios dos jogos utilizados no nosso país pelos povos que por cá se estabeleceram, ao longo dos séculos. Como referem Avedon e Sutton-Smith (1971), a arqueologia fornece não só artefactos, como informação gráfica presente em pinturas de murais de túmulos e decoração de peças cerâmicas, que se têm revelado muito importantes no estudo dos jogos. Aliás, a ligação da pintura aos jogos não se resume apenas às pinturas presentes nos túmulos. Ao longo dos séculos tem havido pintores a representar o jogo nos seus quadros, legando-nos informação importante acerca de alguns dos jogos praticados na época.

Uma referência famosa é a pintura *Children's Games*, criada em 1560 por Pieter Bruegel. Nesta obra, Jean-Pierre Vanden Branden (1982) identifica 86 jogos realizados por 168 rapazes e 78 raparigas, retratados por Bruegel em pleno ato de jogo. Na sua obra *Histoire des jeux de société*, ricamente ilustrada, Jean-Marie Lhôte (1994) faz referência a diversas pinturas onde estão representados diferentes jogos, como o ténis, gamão, jogos mancala, jogos de dominós, jogos de cartas, entre muitos outros. Uma das referências é a pintura de Pieter Bruegel, acima mencionada, e gostaríamos também de salientar a pintura *La Partie d'échecs*, executada por Vieira da Silva, em 1943. Apesar das pinturas serem também uma importante referência no estudo dos jogos, Murray (1952) alerta para o facto de as representações nem sempre serem precisas, indicando exemplos de imprecisões no detalhe de jogos, nomeadamente quanto ao número de casas em tabuleiros de damas e de xadrez. Essas imprecisões são detetadas porque conhecemos bem os jogos em questão, que são ainda jogados. No entanto, esta realidade deve servir para sermos cautelosos na identificação de achados arqueológicos como pertencentes a jogos ou a determinado jogo.

A literatura constitui também uma fonte importante no estudo dos jogos. Poetas de diferentes épocas utilizaram jogos de palavras, como anagramas e acrósticos nos seus poemas (Palhares, Ferreira & Vieira, 2010), revelando assim o seu interesse por este tipo de jogos, que ainda hoje são muito populares. Exemplo disso são as palavras cruzadas e o Scrabble, considerado por David Parlett (1999) o 'xadrez dos jogos de palavras'. Muitos escritores, desde a antiguidade à atualidade, introduziram informação acerca de jogos nos seus livros, retratando possivelmente a realidade que os envolveu. Avedon e Sutton-Smith (1971) referem autores da antiguidade como Homero, Platão, Séneca, Aristóteles, Sócrates, entre outros, como exemplos da inclusão de jogos na literatura. Uma análise à obra de Shakespeare revela que este menciona cerca de cinquenta jogos diferentes (Brewser, 1971). Mas os jogos, apesar de serem referências circunstanciais nos autores anteriormente mencionados, são também referidos na literatura de forma intencional. Os *Cinco Clássicos Chineses* serão provavelmente a referência mais antiga relativamente à literatura que aborda intencionalmente os jogos (Avedon & Sutton-Smith, 1971). No que respeita ao estudo dos jogos de tabuleiro, uma referência importante é o *Livro dos jogos* de Afonso X, o sábio, completado em 1283 (López, Montes, Murillo & Negro, 2010), constituindo o primeiro livro de jogos na literatura europeia. Recentemente foi editada a primeira tradução portuguesa, desta obra de referência (Silva, 2013). Neste tipo de jogos é de referir, ainda, as obras de Murray, *A history of chess* (1913) e *A history of board-games other than chess* (1952), que constituem um marco na literatura moderna sobre jogos. Os regulamentos e leis sobre o jogo constituem outra fonte escrita que importa referir, nomeadamente o “Ordenamiento de las tafurerias ” elaborado por ordem de Afonso X, considerado o regulamento mais detalhado da Idade Média (Schädler, 2012). No entanto, apesar de este documento promulgado pelo rei Afonso X constituir uma referência em termos de regulamentação dos jogos, a existência destes documentos parece remontar à Roma Antiga, onde os excessos nas apostas conduziam a problemas sociais. A legislação sobre os jogos de apostas surge como forma de combater esses excessos (Avedon & Sutton-Smith, 1971). A publicação das obras *Fontes para a História dos Jogos em Portugal* (Frazão, 2013) e *Tabuleiros de Jogo Inscritos na Pedra: Um roteiro Lúdico Português* (Fernandes, 2013) constitui um dos contributos mais recentes e de grande importância para o estudo dos jogos, principalmente no nosso país, onde só muito recentemente se tem investido nesta área.

Falar de jogos é falar de algo que é universal e que pode abranger diferentes coisas mediante o propósito a que nos determinarmos (Avedon & Sutton-Smith, 1971). Daí que para falarmos de jogos, dado a vasta dimensão que o conceito abrange, torna-se premente clarificar o tipo de jogos a que nos estamos a referir. Futebol, ténis, sueca, xadrez, macaca, scrabble, monopólio, polícias e ladrões, mikado e super mário, são apenas alguns exemplos da diversidade do mundo dos jogos. Devido a esta grande variedade e complexidade de jogos, o seu estudo pode abranger áreas distintas, como a história, a psicologia ou a sociologia (Caillois, 1990), sendo hoje em dia objeto de estudos multidisciplinares (Neto & Silva, 2010). Mais recentemente, com a evolução tecnológica, os jogos digitais surgiram como um novo foco de interesse.

A psicologia foi provavelmente a área que até à data contribuiu com mais estudos no âmbito dos jogos de tabuleiro. Gobet, de Voogt e Retschitzki (2004) apresentam um estudo sistemático de psicologia e jogos de tabuleiro, cujo objetivo é revelar as potencialidades de diferentes jogos na psicologia cognitiva. Dos estudos apresentados, os primeiros utilizaram o xadrez e foram conduzidos com o propósito de compreender os processos envolvidos no ato de jogar. Binet foi o pioneiro a desenvolver investigação nesta área. Posteriormente, outros jogos de tabuleiros foram âmbito de estudo, nomeadamente jogos do tipo mancala, o Go e o Othello. No entanto, a maioria dos estudos realizados utilizou o jogo de xadrez, havendo necessidade de desenvolver mais investigação envolvendo outros jogos de tabuleiro (Gobet et al., 2004).

Neste estudo, a nossa atenção recai essencialmente sobre os jogos de tabuleiro sem informação escondida e sem qualquer intervenção do elemento sorte, sendo também objeto de análise um jogo de palavras e um jogo de dominó. O nosso objetivo é estudar a ligação entre o jogo e a matemática, mais precisamente entre o jogo e a educação matemática elementar. Ou seja, apesar de considerarmos importante o conhecimento das diferentes perspetivas que o estudo dos jogos pode abarcar ao nível das diferentes áreas de estudo, a abordagem que pretendemos fazer do jogo terá sempre uma ligação ao ensino e aprendizagem da matemática, mesmo que os jogos em estudo possam ter ligações a outras áreas.

4.2.1. A definição de jogo

À semelhança do que acontece noutras línguas, como bem documenta Huizinga (2003) na sua obra Homo Ludens, na língua portuguesa o termo ‘jogo’ está associado a diferentes significados. A palavra ‘jogo’ tanto pode significar a própria atividade em si, “o jogo tinha começado”, como o material utilizado, “ ofereci-lhe um jogo de damas”, o que foi distribuído ao jogador, “o jogador de sueca observa o seu jogo” ou, ainda, a estratégia de jogo ou modo de jogar, “aquele jogador tem um jogo bonito, não joga à defesa”. ‘Jogo’ pode também ser utilizado para referir uma parte específica de um torneio ou partida, como no caso da sueca em que uma partida é composta por quatro jogos. Mas há muitos outros contextos em que ‘jogo’ tem outros significados. Nomeadamente, “jogo de sinos” é um instrumento musical. Neste caso a palavra ‘jogo’ parece referir-se ao conjunto de peças que formam o instrumento e que, quando tocadas, fazem lembrar o som de sinos. Aliás, um dos conceitos associados ao termo 'jogo' é precisamente a ideia de conjunto ou agrupamento. Assim, temos por exemplo a expressão "jogo de lençóis" que se refere a um conjunto específico de roupa de cama e "jogo de luzes", que representa o conjunto de luzes necessárias ao automóvel. A expressão "jogo de cintura" apesar de apontar para a flexibilidade do indivíduo para contornar o inesperado, também subentende uma certa ideia de conjunto, na medida em que normalmente é necessário recorrer a um amplo conjunto de conhecimentos para ter o dito "jogo de cintura". Outras expressões como, "abrir o jogo", ou seja, revelar a intenção ou algo que se encontrava em segredo e "pôr em jogo", que significa arriscar, têm intrinsecamente uma relação com a atividade de jogo propriamente dita. Isto porque em alguns jogos, os adversários não veem o jogo uns dos outros, ou seja, as peças atribuídas a cada um. Portanto, há informação que não é revelada, que se encontra escondida. E, por outro lado, jogar implica que o jogador se arrisca a perder ou a ganhar.

Também o verbo jogar pode ser empregado para descrever atividades diferentes. Jogar um determinado jogo implica participar nesse jogo, cumprindo as suas regras. Normalmente jogar significa divertir-se praticando um jogo. Mas quando um jogador de cartas joga as cartas na mesa, ou no jogo do pião quando o jogador joga o pião, o verbo jogar adquire o significado de movimento no ato de colocar as cartas na mesa de jogo ou de lançar o pião. Neste caso 'jogar' assume-se como um sinónimo de deitar, atirar, arremessar ou lançar. Por outro lado, jogar pode significar apostar, "jogar na Bolsa" e arriscar, "jogar a última cartada".

A palavra jogo pertence ao tipo de conceitos incrivelmente ricos da atividade humana, com muitas raízes e implicações (Abt, 1987). Esta grande diversidade do emprego do termo 'jogo' não deixa de revelar a importância que a sociedade atribui ou atribuiu ao jogo, assim como a amplitude que o conceito pode abranger. De facto, falar de jogo é falar de um conceito abrangente que, como refere Huizinga (2003), não se encontra restrito à atividade humana uma vez que os animais também jogam. No entanto, o que nos interessa de momento é o jogo na sua vertente de atividade humana e dos diferentes conceitos a ela inerentes. Assim, definir jogo em termos gerais não se revela uma tarefa fácil, parecendo haver em cada definição lacunas que culminam com a exclusão de um determinado aspeto do jogo, ou de um determinado grupo de jogos, como poderemos constatar nas definições que apresentaremos de seguida.

O Dicionário da Língua Portuguesa Contemporânea, da Academia das Ciências de Lisboa (Verbo, 2001), define jogo como uma “atividade recreativa, mais ou menos espontânea, que tem como única finalidade o prazer, o divertimento”. Tratando-se de uma definição restritiva, exclui à partida todos os jogos em que se procure adquirir algo mais para além do divertimento ou prazer, como nos jogos de apostas, nos jogos educativos e até mesmo nos jogos olímpicos, onde a finalidade inclui também a aquisição de um bem ou destreza seja ela intelectual ou física.

A enciclopédia Luso-Brasileira de Cultura (Verbo, 1995) salienta as várias definições e conceitos que a palavra jogo pode abranger e que, segundo esta fonte, dificulta a formulação de uma definição “dada a impossibilidade de reduzir à unidade a espantosa multiplicidade das suas formas e concretizações”. Aponta então para uma definição de jogo centrada nas suas funções. Assim, o jogo é definido como sendo uma atividade espontânea, gratuita e livre que se opõe ao trabalho, à utilidade e à seriedade. Uma atividade sujeita a regras cuja finalidade primária é o próprio jogo, mas que serve também para realizar a sublimação de instintos e tendências como a agressividade a tensão, a fruição, o vício inato de querer ser sempre o primeiro e a vontade de poder.

O filósofo Ludwig Wittgenstein (Wittgenstein & Anscombe, 2001) foi provavelmente um dos primeiros filósofos a interessar-se pelo jogo, muito embora a análise do conceito seja feita no âmbito de uma análise centrada nas questões da linguagem. Wittgenstein considera que, apesar de termos plena perceção do que é um jogo, não é possível definir a fronteira entre o que é e o que não é jogo. Para Wittgenstein não é possível encontrar um denominador comum para todas as coisas a que chamamos jogos, concluindo que o conceito jogo não é suscetível de ser definido em termos de condições necessárias e suficientes.

Contrariando a ideia de Wittgenstein, o filósofo Bernard Suits (2005) considera que podemos definir qualquer jogo através de três conceitos: “prelusory goal”, “constitutive rules” e “lusory attitude”. Suits salienta que ‘lusory’ deriva do termo latino ‘ludus’ que significa jogo. Assim sendo, poderíamos traduzir os conceitos da seguinte forma: o objetivo de jogo pré-determinado; as regras instituídas; a atitude de jogo. Ou seja, qualquer jogo tem um objetivo, regras e requer atitude, no sentido de que o jogador deve querer jogar. Esta atitude não se refere ao prazer, mas a uma atitude intencional para a atividade. O jogador aceita voluntariamente seguir as regras do jogo para atingir o objetivo. Como refere Suits,

> *"To play a game is to attempt to achieve a specific state of affairs [prelusory goal], using only means permitted by rules [lusory means], where the rules prohibit use of more efficient in favour of less efficient means [constitutive rules], and where the rules are accepted just because they make possible such activity [lusory attitude]." (pp. 54-55)*

Com a sua obra "Homo Ludens", o professor e historiador holandês Johan Huizinga, legou-nos um importante contributo sobre o conceito de jogo e a sua presença na cultura. Para Huizinga (2003, p. 29), o jogo

> *"(…) é uma actividade livre, conscientemente exterior à vida "normal", um aspecto "não sério" da vida, mas que, ao mesmo tempo, absorve intensa e completamente o jogador. É uma actividade que não está relacionada com qualquer interesse material, e da qual não advém lucro. Desenrola-se no interior dos seus próprios limites de tempo e de espaço, de forma ordeira e de acordo com regras antecipadamente estabelecidas. Promove a formação de agrupamentos sociais que tendem a rodear-se de secretismo e a sublinhar a sua diferença em relação ao mundo exterior, por meio de disfarces ou por qualquer outro processo."*

Trata-se de uma definição que para Caillois (1990) é demasiado ampla e demasiado restrita. Em primeiro lugar porque insere o secretismo e mistério na definição de jogo quando este tende a ser espetáculo; em segundo porque exclui as apostas e os jogos de azar. Huizinga omite da sua definição de jogo os jogos de azar, uma vez que, segundo Caillois, é mais difícil estabelecer a riqueza cultural deste tipo de jogos do que a dos jogos de competição. No entanto, é de salientar que o estudo de Huizinga versa sobre o ponto de vista lúdico da cultura, instituindo a teoria culturalista do jogo (Verbo, 1995). O próprio Huizinga refere que, tendo em vista o seu objetivo de relacionar o jogo com a cultura, não necessita de abordar todas as modalidades de jogo, restringindo-se ao que considera serem as formas mais elevadas do jogo, ou seja, as suas manifestações sociais. Na definição acima referida, Huizinga explana sobre o que considera resumidamente serem as características formais do jogo. Quando se propõe a apresentar uma definição de jogo propriamente dita define-o da seguinte forma:

> *"o jogo é uma actividade voluntária, ou uma ocupação, que tem lugar dentro de certos limites estabelecidos de tempo e lugar, de acordo com regras livremente aceites mas estritamente vinculativas, e que se institui como um fim em si mesmo, sendo acompanhado por um estado de espírito de tensão e de alegria, bem como pela consciência de ser "diferente" da "vida normal" "(Huizinga, 2003, p. 45).*

Como se pode constatar, Huizinga apresenta, assim, uma definição de jogo bem mais abrangente, apesar de continuar a excluir outras finalidades do jogo para além do próprio jogo. Para Huizinga, o jogo separa-se da vida ´normal' através do que considera ser o 'círculo mágico', onde a atividade jogo se desenrola.

O sociólogo e antropólogo francês, Roger Caillois (1990) dedicou-se ao estudo do jogo, incidindo essencialmente no ponto de vista sociológico. Sendo crítico à obra "Homo Ludens" de Huizinga pelo facto de excluir alguns jogos, procura uma definição de jogo que se apresente como denominador comum a todos os jogos, incluindo os jogos de apostas e de azar excluídos do estudo de Huizinga, bem como os jogos de representação e mímica. Caillois, tal como Huizinga, observa a dificuldade de alcançar o objetivo a que se propôs, ou seja, de abarcar todos os jogos numa definição, e define jogo como sendo uma atividade com seis características fundamentais: livre, delimitada, incerta, improdutiva, regulamentada e fictícia.

Argumentando que a definição de jogo é difícil de alcançar e que se encontra interdependente da área de estudo implicada nessa definição, Avedon e Sutton-Smith (1971) consideram que, no seu nível mais elementar o jogo é

> *"an exercise of voluntary control systems in which there is an opposition between forces, confined by a procedure and rules in order to produce a disequilibrial outcome" (p.7).*

Os autores referem, ainda, que esta definição talvez permita compreender a razão pela qual o termo 'jogo' é utilizado para referir diversas atividades, na medida em que representa um comportamento voluntário que tanto pode aplicar-se à interação entre pessoas como a uma ação individual. Ou seja, o jogo, seja ele individual ou não, é um ato voluntário. Para além deste aspeto, Avedon e Sutton-Smith consideram essencial ao jogo a existência de conflito, determinado pela presença dos adversários, e de regras. Quanto aos adversários, os autores referem que nos solitários apesar de não existir um adversário ‘real’ o sentimento de conflito mantém-se presente através do desafio para consigo próprio, para com obstáculos impessoais ou para com a sorte.

Segundo Clark C. Abt (1987), o facto de o termo jogo ser largamente utilizado de forma metafórica em muitas atividades, nomeadamente sociais, económicas, políticas e militares, é revelador do quanto assumimos acerca das semelhanças formais entre o jogo e diferentes atividades da vida real. Numa análise às palavras que usualmente são utilizadas para definir jogo, divide-as em duas categorias: a) as que descrevem a estrutura formal do jogo, como procedimentos, regras, jogada, ganhar, participantes; b) as que sugerem a motivação dos participantes, como alegria, competição, brincadeira. Esta bipartição do jogo em racional e emocional está bem presente quando o autor refere que “a game is a particular way of looking at something, anything. This ‘way of looking’ has two main components, a rational, analytic one and an emotional, creative, dramatic one“ (Ibidem, p. 6). Trata-se de uma visão de jogo que se centra no indivíduo, na sua particular capacidade de ‘olhar’ e que nos remete à própria visão de Huizinga, onde tudo é ou pode ser jogo. Abt considera que, se o reduzirmos à sua essência formal, “a game is an activity among two or more independent decision-makers seeking to achieve their objectives in some limiting context” (Ibidem, p. 6). É de salientar a ausência de referência a regras, de onde se poderia concluir que Abt considera que as regras não são essenciais ao jogo. No entanto, elas encontram-se implícitas no que é referido como “limiting context”. Trata-se de uma definição que reduz o jogo a uma atividade limitada a um determinado contexto, onde mais do que um participante tomam decisões por forma a atingirem os seus objetivos. O aspeto lúdico de divertimento não é considerado fundamental à definição, o que se adequa à abordagem de Abt, na medida em que esta se encontra centrada nos jogos digitais, mais precisamente nos chamados “serious games”, cujo objetivo principal é a aprendizagem. Outro aspeto importante nesta definição é o facto de não incluir os jogos individuais, considerando sempre a interação entre jogadores. A este propósito, Murray (1952) refere que a maior parte dos jogos de tabuleiro são jogados por dois ou mais opositores e apenas alguns são jogados por uma pessoa. Fica claro que Murray inclui os solitários na categoria dos jogos, na mesma linha de pensamento já acima referida por Avedon e Sutton-Smith (1971). No entanto, é de salientar um aspeto fundamental apontado por Abt (1987), que é a tomada de decisões por parte dos jogadores. Este é um dos fatores essenciais ao jogo apontado pelo autor. No jogo tomam-se decisões.

David Parlett, no seu livro "The Oxford History of Board Games", apesar de considerar desnecessário definir jogo, na medida em que o termo é utilizado em atividades muito distintas e a sua abordagem incidir sobre um tipo particular de jogos, que são os jogos de tabuleiro, não deixa de referir que "a game is what you play, and to play is to do a game; therefore game and play are basically the same, except that one is a noun and the other a verb" (Parlett, 1999, p. 1). Esta explicação procura rematar a problemática do uso e significado dos termos 'game' e ´play' na língua inglesa que, à semelhança da língua portuguesa nos termos ´jogo' e 'jogar', podem ter diferentes significados consoante o contexto. A propósito dos jogos em geral, Parlett (1999) considera a existência de jogos informais e jogos formais. Os primeiros referem-se a brincadeiras infantis e vão ao encontro do termo 'play'; os segundos possuem uma estrutura baseada em finalidade e meios. Nesta estrutura são destacadas duas características deste tipo de jogos: terem um objetivo e material a ser utilizado de acordo com as regras.

Procurando compilar os elementos essenciais propostos por diferentes autores, como Huizinga, Callois, Parlett, Abt, entre outros, Salen e Zimmerman (2003) propõem uma definição que consideram propositadamente restrita, pois tem o propósito de demarcar o que consideram fazer parte do reino dos jogos. Consideram que um jogo é um sistema onde os jogadores se envolvem num conflito artificial que é definido por regras e cujo resultado é quantificável. As regras são consideradas essenciais, na medida em que constituem a estrutura do jogo, delimitando o que o jogador pode ou não fazer. O facto de o resultado ser quantificado, quer por uma pontuação atribuída no final, quer pelo facto do jogador ganhar ou perder, é o que, para os autores distingue o jogo de outras atividades recreativas.

Para Neumann e Morgenstern (1972) um jogo é simplesmente o conjunto de regras que o descrevem. Na mesma linha de pensamento, Neto e Silva (2004) consideram as regras como um elemento essencial para a definição de jogo, pois são elas que distinguem o jogo da brincadeira, apesar do termo jogo ser empregue para estes dois tipos distintos de atividade. As regras funcionam como “um acordo mental, uma memória partilhada de como se inicia o jogo, como se processa, como termina e como se encontra o vencedor” e fazem parte das restrições a que o jogador se compromete a aceitar para poder jogar. No entanto, apesar da existência obrigatória de restrições, os jogos são apontados pelos autores como “as atividades criadas pelo homem com mais liberdade” onde o ser humano expressa genuinamente a sua criatividade, livre de quaisquer constrangimentos, ainda que inseridas no contexto cultural (Neto & Silva, 2010, p. 5).

Nas definições aqui abordadas destacamos a dificuldade assumida por alguns autores em definir jogo devido à diversificada utilização do termo em campos distintos da atividade humana. Outro aspeto a salientar é o facto de os autores assentarem as suas definições numa visão de jogo particular, seja ela focalizada na cultura, na sociologia ou nos jogos digitais. Cada autor restringe ou acrescenta particularidades do jogo à sua definição, de acordo com a sua perspetiva de estudo. Esta visão, não deixando de enviesar a definição e o conceito de jogo, permite-nos adquirir maior conhecimento acerca deste conceito pela riqueza de tão distintos contributos. Afinal, tratando-se de um conceito tão abrangente será que se tornará mesmo essencial uma definição que abarque todas as áreas? Não será o jogo como que um termo primitivo do estudo dos jogos e como tal não carece de definição? Não tendo resposta para estas questões, consideramos que, provavelmente no estudo dos jogos, mais importante do que definir jogo será categorizar os jogos que se pretendem abordar, pois como referem Avedon e Sutton-Smith (1971) acerca das diferentes abordagens à definição de jogo por estudiosos de áreas distintas, dependendo da finalidade, jogo pode ser aquilo que quisermos que seja.

4.2.2. Características do jogo

Ao abordar o jogo em função da cultura, Huizinga (2003) considera-o como um fator anterior à própria cultura, presente em toda a parte como uma atividade distinta daquilo que se considera a ‘vida normal’. No entanto, uma vez que a sua abordagem incide na função cultural do jogo e, por isso mesmo, não abarca todos os jogos, ao enumerar aquelas que considera serem as características principais do jogo o autor alerta para o facto de algumas dessas características estarem particularmente ligadas aos jogos sociais.

Numa análise aprofundada sobre o jogo, Huizinga (2003) considera a liberdade a primeira das suas características principais. Para Huizinga, o jogo é uma atividade voluntária, livre, e, consequentemente, jogar por obediência ou obrigação não é jogar. Assim, o jogo não é trabalho; é supérfluo; é uma atividade acessória, levada a cabo em tempo livre e que não é imposta por obrigações morais ou físicas. A segunda característica enumerada pelo autor é a sua natureza desinteressada, situando-se à margem das necessidades e dos desejos na medida em que não faz parte da vida dita 'normal'. Apesar dessa ligação ao fictício, o jogo desenrola-se em grande seriedade, absorvendo os jogadores. Aliás, Huizinga, alerta para a ténue fronteira entre o que é 'a brincar' e o que é 'a sério', na medida em que qualquer jogo pode escapar ao controlo dos jogadores. A delimitação no tempo e no espaço é considerada por Huizinga a terceira grande característica do jogo. Para ele, o jogo inicia num dado momento e joga-se a si mesmo até ao fim, dentro de um território previamente delimitado, seja ele uma arena, uma mesa de jogo, um campo, um recreio, uma tela ou um palco. Estes territórios funcionam como mundo temporários onde o jogo, como ação à parte do mundo normal, tem lugar. É precisamente no território que se manifesta outra das características fundamentais do jogo: a ordem. O jogo cria ordem no terreno de jogo. A sua ligação ao belo advém da sua ordem e do fascínio que exerce nos jogadores. Como refere Huizinga, o jogo é 'encantador', é 'cativante', tem ritmo e harmonia. Outra característica do jogo é a sua tensão. No jogo há um risco que se corre, uma incerteza sobre o resultado final. E é precisamente nessa tensão que, para Huizinga, reside o seu valor ético, na medida se apresenta como um teste às capacidades do jogador, nomeadamente ao respeito pelas regras. No entanto, o elemento tensão desempenha um papel que consideramos mais importante ainda, na medida em que é precisamente nessa tensão, na incerteza, que reside o fascínio, a beleza e o prazer do jogo. As regras são inerentes ao jogo, pois todos os jogos têm regras. As regras desempenham um fator de tal forma importante no conceito de jogo que o jogador que viola ou ignora as regras é considerado um 'desmancha-prazeres' e tem de ser excluído do jogo. Por último, Huizinga considera que o jogo promove a formação de agrupamentos sociais, referindo que "o clube está para o jogo como o chapéu para a cabeça" (Huizinga, 2003, p. 28).

Caillois (1990) define o jogo através do que considera serem as suas características fundamentais. No entanto, adverte que essas características são puramente formais podendo ser até reciprocamente exclusivas como acontece com a regulamentação e o fictício. Para Caillois, o jogo é livre pois se assim não fosse perderia a componente de diversão. O jogador entrega-se espontaneamente e por exclusivo prazer ao jogo, que é incerto na medida em que o final é imprevisível. Porém, está circunscrito no espaço e no tempo estabelecidos. Tem o seu espaço próprio, fechado, seja ele um tabuleiro ou uma arena. Como não produzem riqueza nem bens no interior do círculo de jogadores, os jogos são considerados improdutivos. Caillois considera ainda que nem todos os jogos têm regras, como os jogos de simulação ou de imitação, pelo que os jogos ou são regulamentados ou são fictícios.

Como se pode observar, muitas das características do jogo apresentadas por Caillois são comuns às apresentadas por Huizinga. A grande diferença reside no facto de Caillois valorizar o aspeto improdutivo do jogo, considerando que o diferencia do trabalho e da arte, enquanto Huizinga salienta ainda a ordem, a beleza, o fascínio proporcionados pelo jogo e os laços que cria entre os jogadores.

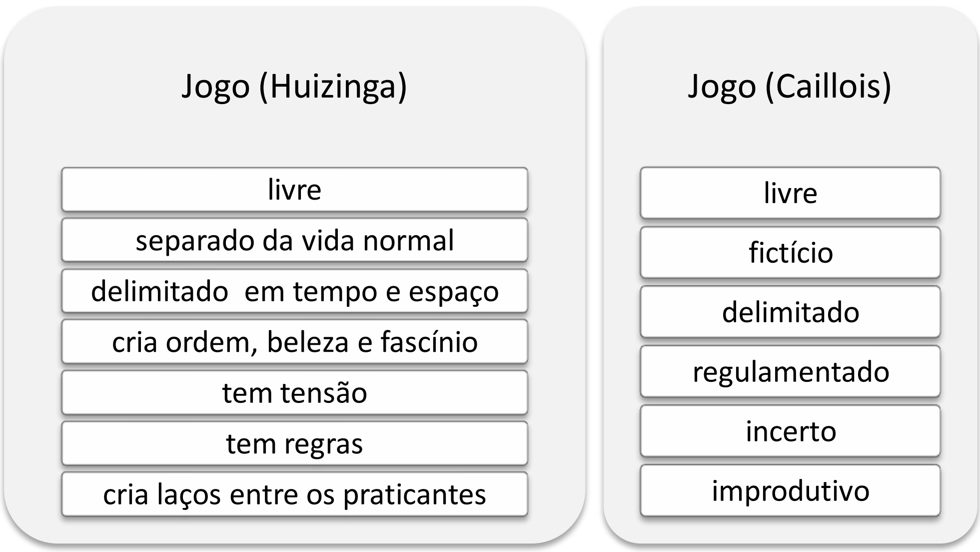


Figura 19. Características do jogo segundo Huizinga e Caillois.

Salen e Zimmerman (2003) referem que para Huizinga, o conceito de jogo (*game*) é visto como um subconjunto do conceito que na língua inglesa se escreve 'play' e que iremos traduzir como brincadeira, na medida em que reflete a ação e o divertimento implícitas na palavra 'play'. Ao analisarmos a obra *Homo Ludens* é de facto notória a abrangência do termo 'jogo' ao teatro, à música, à poesia, ao que tenha implícito o afastamento do aspeto 'sério´ da vida. Nessa grande abrangência vão sendo encaixadas diferentes espécies de jogo como as representações teatrais ou os jogos de azar.

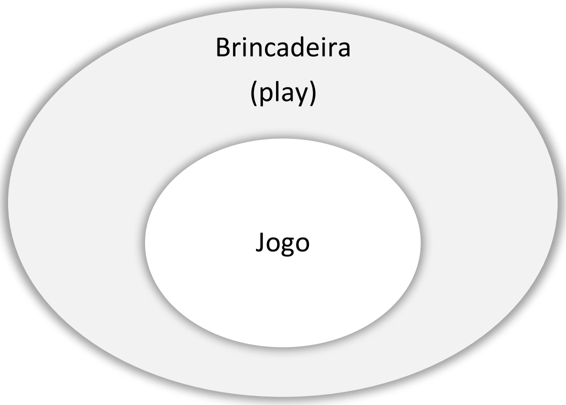


Figura 20. O jogo como um subconjunto das brincadeiras.

Salen e Zimmerman (2003) referem ainda que a relação entre os dois conceitos (jogo e 'play') é complexa e pode ser descrita de dois modos distintos. O primeiro refere-se à visão de Huizinga representada acima, em que algumas brincadeiras têm determinadas características que as distinguem, as quais designamos por jogos. Uma outra visão, defendida pelos autores, é a de que 'play', no sentido de divertimento, é uma das características dos jogos. O jogo enquanto fenómeno pode ser compreendido através de três aspetos distintos: brincadeira, cultura e regras. Desta forma a brincadeira será uma das perspetivas do jogo, constituindo um subconjunto do conjunto formado por todos os jogos.

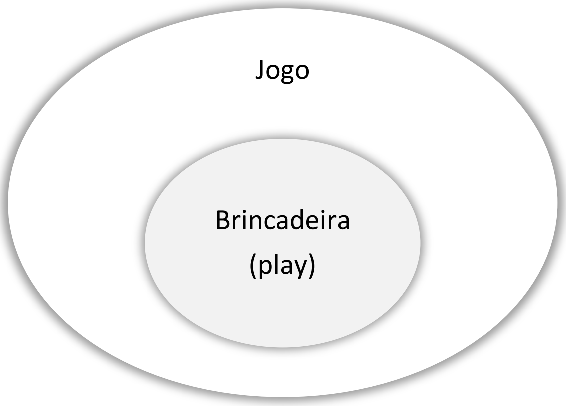


Figura 21. A brincadeira como caraterística do jogo

Jogo e brincadeira são conceitos muito interligados, contudo diferentes. O jogo tem intrinsecamente a associação às respetivas regras, enquanto a brincadeira está associada ao divertimento, ao sentimento de prazer provocado pela atividade em si mesma. Daí que a expressão “estão a jogar” quase implica a pergunta “a quê?”, enquanto “estão a brincar” significa que se estão a divertir, a recrear. Apresentando de forma sucinta a opinião de alguns autores poderemos dizer que brincar é a livre circulação dentro de uma estrutura rígida (Salen & Zimmerman, 2003) onde a criança despende energia de forma espontânea e para proveito próprio (Santayana, 2004) numa atividade onde o seu comportamento se encontra além da sua idade média, ou seja na zona de desenvolvimento próximo (Vygotsky, 1978). ‘Play’ é livre mas restrito a uma estrutura, dentro do que Huizinga chama o círculo mágico. No entanto, é também dentro do círculo mágico que o jogo se desenrola. Para Suits (2005) jogar é necessariamente um ato voluntário; é a ação do jogador na tentativa de superar obstáculos desnecessários. Esta ideia tem subjacente a ação de jogar como um esforço que se faz por vontade própria e cujo objetivo nem sempre se alcança.

Procurando clarificar a sua abordagem aos jogos e cientes da ambiguidade do termo ‘jogar’, Neto e Silva (2004) esclarecem que o termo jogar é utilizado tanto no âmbito da brincadeira como do jogo. No entanto no jogo há obrigatoriamente regras, sendo estas essenciais à própria definição de jogo.

Ritterfeld, Cody e Vorderer (2009), a propósito da dicotomia entre o jogo e o sério, referem que Neumann considerava os jogos por natureza divertidos e não sérios. No entanto, alertam para o facto de, apesar dessa aparente contradição, académicos e praticantes considerarem os "serious games" simultaneamente divertidos e educativos. Como refere Abt (1987, p. 10)

> *"games may be significant without being solemn, interesting without being hilarious, earnest and purposeful without being humorless, and difficult without being frustrating. They may deal with important behavioral problems, and they may concern substantive problems in almost all academic and intellectual fields".*

Para Abt (1987) o jogo tem uma componente emocional, criativa e dramática que advém de uma combinação entre o otimismo e o pessimismo perante a incerteza do resultado. Tem ainda uma componente ética relacionada com a responsabilidade pessoal de cumprir os objetivos do jogo e tentar vencer, onde a má sorte serve apenas como justificação se acontecer esporadicamente.

Uma das características do jogo é a existência de objetivos ou metas a atingir, nomeadamente ganhar, não perder ou fazer determinada pontuação. A este respeito Salen e Zimmerman (2003) consideram que uma das características fundamentais ao jogo é o facto de ser quantificável. Para os autores é precisamente esta caraterística que distingue o jogo das restantes atividades lúdicas que se apelidam de brincadeiras.

Como podemos verificar através das opiniões dos diferentes autores acima referidos, são muitas as características apontadas aos jogos. As características de um determinado jogo podem condicionar o sucesso e a qualidade desse mesmo jogo, constituindo uma preocupação dos inventores de jogos. A propósito dos jogos abstratos (jogos sem informação escondida e sem intervenção de nenhum elemento que produza aleatoriedade) Thompson (2000) considera que há uma ligação muito próxima entre estes jogos e os problemas, na medida em que cada situação de jogo apresentada no tabuleiro se apresenta como um desafio na procura da melhor jogada, escrutinando as diferentes possibilidades. Assim um bom jogo abstrato deve permitir uma fonte inesgotável de problemas interessantes proporcionados pelas diferentes posições que as jogadas vão revelando no tabuleiro de jogo. Thompson considera, ainda, que o mérito e a longevidade de um jogo abstrato são condicionados por quatro características: profundidade; clareza; drama; determinação.

Na mesma linha de pensamento Neto e Silva (2004), também entusiastas dos jogos abstratos, vão ao encontro das características fundamentais a este tipo de jogos, acima referidas por Thompson (2000), ampliando-as e restruturando-as. Assim, referem serem que essenciais a um bom jogo abstrato algumas características como a profundidade, clareza, drama, tempo, ramificação e interação. A determinação proposta por Thompson é incluída na categoria do drama e são acrescentadas a ramificação, o tempo e a interação. A profundidade de um jogo consiste na sua complexidade estratégica. Quando se consegue encontrar uma estratégia vencedora ou de empate de um determinado jogo, a sua profundidade será completa e o jogo perde a sua função lúdica. A clareza de um jogo determina a capacidade de visualizar mentalmente um determinado número de jogadas futuras. O drama é a qualidade que permite o *volte-face* do jogo, devendo ser decisivo. Ou seja o drama deve permitir que o jogador possa construir uma estratégia vencedora a médio prazo. O tempo médio do jogo é também uma medida importante, na medida em que o jogador necessita de disponibilizar esse tempo ao jogo. A ramificação é uma caraterística em oposição à clareza do jogo e consiste no número de jogadas que o jogador pode fazer em média no seu turno. Apesar da profundidade e da clareza serem contrárias, há jogos com grande ramificação que não penalizam muito a clareza. Por último, a interação, como o próprio nome indica, é a forma como as peças dos jogadores interagem, permitindo ou não arranjos complexos entre peças adversárias.

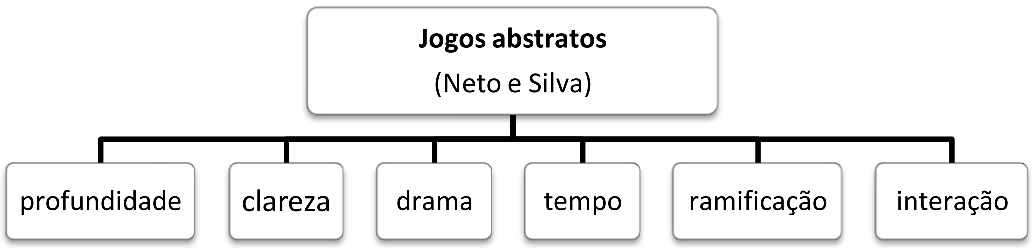


Figura 22. Propriedade dos jogos abstratos.

Um jogo que consiga uma boa classificação no conjunto de critérios acima indicado será certamente um bom jogo, muito embora ser ou não considerado um bom jogo está também dependente das características do próprio jogador. Ou seja, um bom jogo será certamente um jogo considerado por nós interessante, que nos cative jogar. Por vezes, os jogos perdem interesse, quer porque já não constituem um desafio, quer porque os consideramos difíceis em demasia. Conseguir o equilíbrio é a tarefa dos inventores de jogos, e nem sempre é tarefa fácil, dado o grande número de jogos inventados até à data e o contínuo afinco dos muitos inventores. No entanto, há aqueles que possuem uma capacidade criativa invejável à grande maioria das pessoas e em muito pouco tempo conseguem inventar um jogo. Um exemplo a referir é Fred Horn, que durante o *Board Games Studies Colloquium IX*, realizado em 2006, no Brasil, inventou o jogo *Can the sardines,* para mostrar como é possível em pouco tempo inventar um bom jogo abstrato (Neto, 2002b).

De todas as características apontadas aos jogos, o fascínio e beleza referidos por Huizinga serão provavelmente as que conduziram à grande panóplia de jogos e ao grande número de jogadores que têm existido ao longo do percurso da humanidade. Joga-se um jogo porque se sente prazer em fazê-lo, mesmo que haja tensão e medo de perder, porque a possibilidade de ganhar e os momentos de pura recreação são únicos.

4.2.3. Taxonomia dos jogos

A necessidade de classificar os jogos está presente em muitas das referências sobre jogos. Uma das razões será a utilidade da classificação como elemento de distinção entre os jogos que se pretendem abordar e os restantes jogos. Como já foi referido anteriormente, o conceito de jogo é muito abrangente, podendo abarcar a música ou a poesia, como nos documenta Huizinga (2003).

O interesse nos jogos e o seu estudo mais aprofundado promoveu o aparecimento de diversas taxonomias, ajustadas às diferentes áreas em estudo, como a psicologia, a sociologia ou a antropologia. No entanto, de acordo com Avedon e Sutton-Smith (1971), o problema destas taxonomias reside no facto de servirem os propósitos da área dos seus criadores na medida em que são elaboradas tendo em vista um determinado aspeto, seja do comportamento humano ou de outra área.

Assente numa visão filosófica do jogo, Carse (1986) divide os jogos em duas grandes categorias: jogos finitos e jogos infinitos. Os jogos finitos são jogados livremente segundo regras acordadas pelos jogadores e têm como propósito a vitória. Estes jogos têm um momento exato que marca o início e o final é definitivo. Apesar de livre, o jogo é limitado externamente pelas regras de jogo. Os jogos infinitos são também livres como os jogos finitos, mas o seu objetivo é manter o jogo, não deixar que termine. Assim, não são limitados no tempo. As regras são flexíveis, na medida em que vão sofrendo alterações no decorrer do jogo e mesmo os participantes podem sofrer alterações, desde que se garanta que o jogo não termine. Neste segundo tipo de jogos inclui-se a cultura, a religião a linguagem ou a música, onde o objetivo é manter o jogo mesmo que seja necessário ir fazendo alterações às regras. No primeiro, incluem-se as diferentes competições inerentes ao quotidiano, podendo também incluir-se jogos como o xadrez, as damas, jogos de dominó, entre outros jogos de regras cuja finalidade é a vitória sobre o oponente.

Na obra intitulada *Livro dos jogos*, Afonso X refere que os jogos descritos no livro são para jogar sentado, em oposição aos jogos de destreza física (Boutin, 1999). A preocupação com uma classificação fundamentada na estrutura dos jogos surge com Murray (1952) na sua obra *A History of Board-Games other than Chess.* Os jogos de tabuleiro foram aqueles que mais cativaram a atenção de Murray que os classifica em cinco categorias distintas, nomeadamente jogos de alinhamento e configuração, jogos de guerra, jogos de caça (ou captura), jogos de corrida e jogos do tipo Mancala. Murray sustenta a sua classificação na ideia de que os jogos são representativos das primeiras atividades humanas, como o combate, a caça, a corrida, o alinhamento, as combinações e as contagens, considerando insuficiente a divisão em jogos de sorte e jogos de habilidade (ou perícia) ou ainda em jogos de pura sorte e jogos de sorte e habilidade, como encontrou em diversos manuais de jogos e ainda se encontra atualmente.

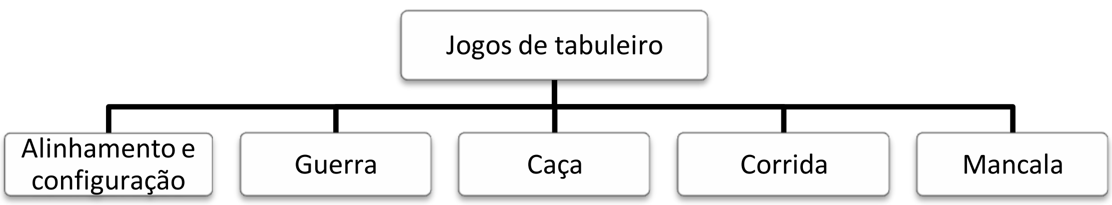


Figura 23. Classificação dos jogos de tabuleiro de H. J. R. Murray.

Bell e Cornelius (1991) interessam-se também pelos jogos de tabuleiro que consideram universalmente apelativos e com interesse para a investigação. Apresentam uma divisão muito semelhante à de Murray (1952) também constituída por cinco grupos: posição; mancala; guerra; corrida; dados, cálculo e outros jogos. Os autores reconhecem a dificuldade em classificar os jogos e alertam para a possibilidade de alguns poderem pertencer a mais do que um grupo.

Caillois (1990) considera que no jogo coexistem dois conceitos distintos e opostos: *paideia* e *ludus*. *Paideia* corresponde à liberdade de improvisação, de repouso, de distração e alegria que abrange as manifestações espontâneas do instinto de jogo e persiste nas formas iniciais dos jogos mais complexos. *Ludus* surge como complemento de *paideia* e reflete o gosto pela vitória e pela resolução de uma dificuldade que livremente se escolhe enfrentar. É também o elemento por excelência das manifestações culturais mais surpreendentes do jogo. Porém, Caillois clarifica que *ludus* e *paideia* não constituem duas categorias do jogo, mas antes duas maneiras de jogar. Procurando criar setores que agrupem jogos da mesma espécie, Caillois propõe a divisão dos jogos em quatro categorias fundamentais, onde l*udus* e *paideia* se combinam: *Agôn, Alea, Mimicry e Ilinx*. Nessas categorias, à medida que o elemento *paideia* diminui, aumenta o elemento *ludus* e vice-versa. A primeira categoria, *Agôn*, corresponde ao grupo de jogos que implicam competição entre adversários, onde se procura que haja igualdade de oportunidades à partida. Em Agôn os jogadores procuram que a sua excelência seja reconhecida num determinado domínio e treinam para que tal aconteça. Procura-se o mérito e para o conseguir os jogadores servem-se da disciplina e perseverança. Neste grupo de jogos incluem-se jogos de tabuleiro sem elemento sorte e diversos desportos, assim como outras competições não regulamentadas. A segunda categoria é *Alea* que representa o elemento sorte do jogo e confina um grupo de jogos cuja vitória não depende do mérito do jogador mas do destino. Os jogos de simulação, de faz-de-conta e as artes de espetáculo constituem o grupo de jogos pertencentes a *Mimicry*, o simulacro. Esta é a terceira classe de jogos proposta por Caillois e é caraterizada pela mímica e pelo disfarce. Apresenta todas as características do jogo com exceção da submissão a regras imperativas. Para o ator a regra consiste apenas em fascinar o espectador e para o espectador consiste em deixar-se fascinar. Finalmente, *Ilinx* representa a vertigem. Este grupo de jogos é caraterizado pela procura de um êxtase momentâneo, pela instabilidade da perceção e pelo prazer que essa instabilidade provoca. Apesar de procurar ser abrangente na classificação dos jogos, Caillois refere que a divisão por ele proposta apenas delimita os jogos da mesma espécie em setores, mas não abrange por inteiro todo o universo dos jogos. Por isso mesmo estabeleceu os dois polos extremos constituídos por *ludus* e *paideia*. Estas quatro divisões, competição, sorte, simulação e vertigem, nem sempre se encontram isoladas, mas associam-se e dão expressão a um vasto número de jogos caraterizados pela associação de cada uma delas a uma das outras três. A conjugação de *Agôn* e *Alea* está presente nos jogos em que a competição está também condicionada pela sorte. É o caso de alguns jogos de cartas ou de dominós em que o baralhar determina o jogo de cada jogador à partida e que poderá ser melhor ou pior consoante a sorte ditar. Outro exemplo é o gamão, em que a sorte é ditada pelos dados. Neste tipo de jogos o jogador tenta fazer o seu melhor, explorando o que o elemento *Alea* lhe concede.

	Agôn **(Competição)**	*Alea* **(Sorte)**	*Mimicry* **(Simulacro)**	*Ilinx* **(Vertigem)**
Paideia *Ludus*	não regulamentada xadrez futebol desportiva	cara ou coroa apostas loto	Imitação ilusionismo teatro	baloiço alpinismo acrobacias

Figura 24. Divisão dos jogos proposta por Roger Caillois.

David Parlett (1999), apesar de revelar maior interesse num grupo particular de jogos de tabuleiro, apresenta uma taxonomia que abrange todos os jogos e os divide em duas grandes categorias: jogos informais e jogos formais. Os primeiros representam as brincadeiras infantis espontâneas, frequentemente observadas nos recreios, como por exemplo a imitação dos heróis favoritos. Os segundos são caraterizados por uma estrutura baseada fundamentalmente nas regras e nos objetivos de cada jogo. Os jogos formais distinguem-se ainda em desportivos e não-desportivos. Os jogos desportivos têm uma componente física e requerem obrigatoriamente a presença física do jogador. Parlett considera que uma forma simples de distinguir estas duas categorias consiste na estrita ligação que os jogos desportivos têm em relação ao tempo de resposta/jogada e na liberdade de tempo que carateriza os jogos não-desportivos. Essa liberdade de tempo de jogada levou à introdução de mecanismos que controlassem o tempo, como o caso dos relógios no xadrez. É precisamente na categoria dos jogos não-desportivos que insere os jogos de tabuleiro.

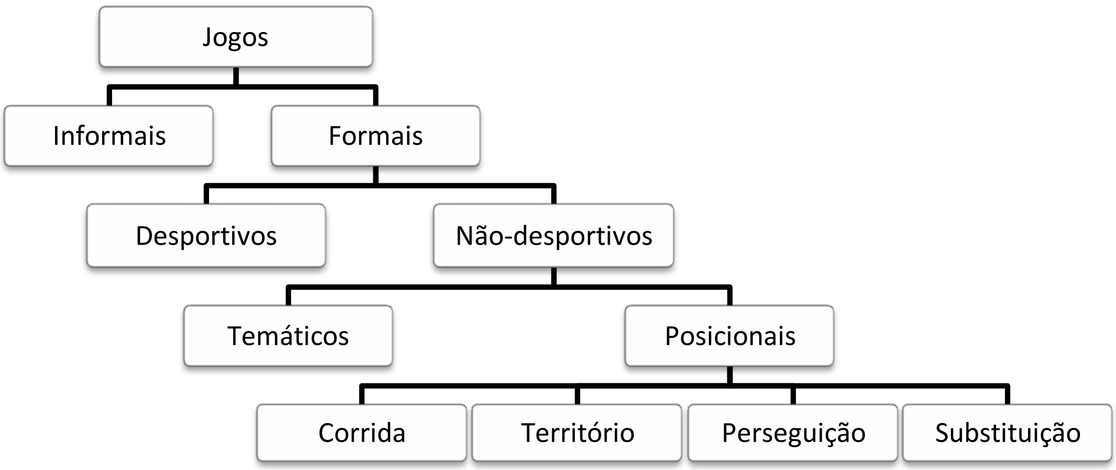


Figura 25. Classificação dos jogos proposta por David Parlett.

Parlett (1999) considera que é usual excluir dos jogos de tabuleiro os jogos de cartas e de dados, mas salienta a dificuldade de consenso sobre o que esta categoria de jogos inclui. Tomando como referência a classificação proposta por Murray (1952), Parlett, classifica os jogos de tabuleiro em dois grandes grupos, nomeadamente jogos temáticos e jogos posicionais. Os jogos posicionais são subdivididos também nas seguintes quatro categorias: jogos de corrida, jogos de território, jogos de perseguição e jogos de substituição. Os jogos de corrida enquadram o tipo de jogos cujo objetivo consiste em conseguir ser o primeiro a fazer chegar uma ou mais peças à casa de chegada após um percurso determinado pelo tabuleiro de jogo. Estes jogos são subdivididos em quatro categorias: simples, complexos, multiplex e estratégicos. Os jogos de corrida simples são jogos de pura sorte onde cada jogador possui apenas uma peça para deslocar da casa de partida até à cada de chegada (ex. Serpentes & Escadas); nos jogos de corrida complexos os jogadores possuem duas a quatro peças, o que ao elemento sorte determinado pelos dados introduz a estratégia de jogo escolhida pela opção do jogador (ex. Ludo); na categoria multiplex o número de peças por jogador aumenta consideravelmente, sendo usuais as quinze peças, facto que vem aumentar a influência da capacidade do jogador em tomar as melhores decisões para ganhar o jogo (ex. Gamão); nos jogos de corrida estratégicos não são utilizados dados, pelo que as jogadas são determinadas por cálculos e estratégia do jogador (ex. A lebre e a Tartaruga). Os jogos de território são caraterizados por utilizarem um tabuleiro bidimensional, onde os jogadores colocam ou movem peças com o objetivo de formar um determinado padrão. Estes jogos encontram-se agrupados em sete categorias: alinhamento, conexão, travessia, realização, configuração, restrição e ocupação. Os jogos de alinhamento têm por objetivo colocar três ou mais peças em linha (ex. Moinho); nos jogos de conexão o objetivo consiste em formar uma linha que ligue lados opostos do tabuleiro de jogo (ex. Hex); nos jogos de travessia o objetivo consiste em ser o primeiro a conseguir conduzir todas as peças ao longo do tabuleiro até à posição correspondente (ex. Damas Chinesas); os jogos de realização têm um objetivo idêntico aos jogos de travessia com a diferença de que para ganhar apenas é necessário fazê-lo com uma peça (ex. Epaminondas); os jogos de configuração têm por objetivo colocar todas as peças num padrão específico (ex. Agon); nos jogos de restrição o objetivo consiste em inibir o oponente de jogar, de modo que o jogador que não conseguir jogar perde (ex. Pentaminós); nos jogos de ocupação, como o próprio nome indica, o objetivo consiste em ocupar o maior número de casas (ex. Go). Os jogos de perseguição são caraterizados pela grande diferença entre o número de peças dos oponentes na posição inicial de jogo. Usualmente o jogador com menos peças tem maior mobilidade e capacidade de capturar, enquanto o jogador possuidor de muitas peças tem restrições de movimento e impossibilidade de captura. O objetivo deste jogador é conseguir imobilizar o oponente (ex. Tablut). Os jogos de substituição são também designados de jogos de guerra, utilizam usualmente um tabuleiro de grelha quadrada e têm por objetivo capturar ao adversário todas ou a maior parte das suas peças, ou uma peça particularmente valiosa. Esta categoria de jogos está dividida em quatro subcategorias de jogos: lineares, indiferenciados, semi-diferenciados e diferenciados. Os jogos lineares são jogados numa pista linear ou num tabuleiro unidimensional (ex. Puluc); nos jogos indiferenciados as peças têm todas a mesma função apenas se diferenciando em função do jogador (ex. Alquerque); nos jogos semi-diferenciados as peças resultam diferenciadas pela promoção (ex. Damas); nos jogos diferenciados as peças são diferentes e têm funções específicas, sendo característico o objetivo de capturar uma determinada peça (ex. Xadrez). A categoria dos jogos temáticos é composta essencialmente por jogos como o Monopólio, incluindo os jogos de palavras como o Srabble.

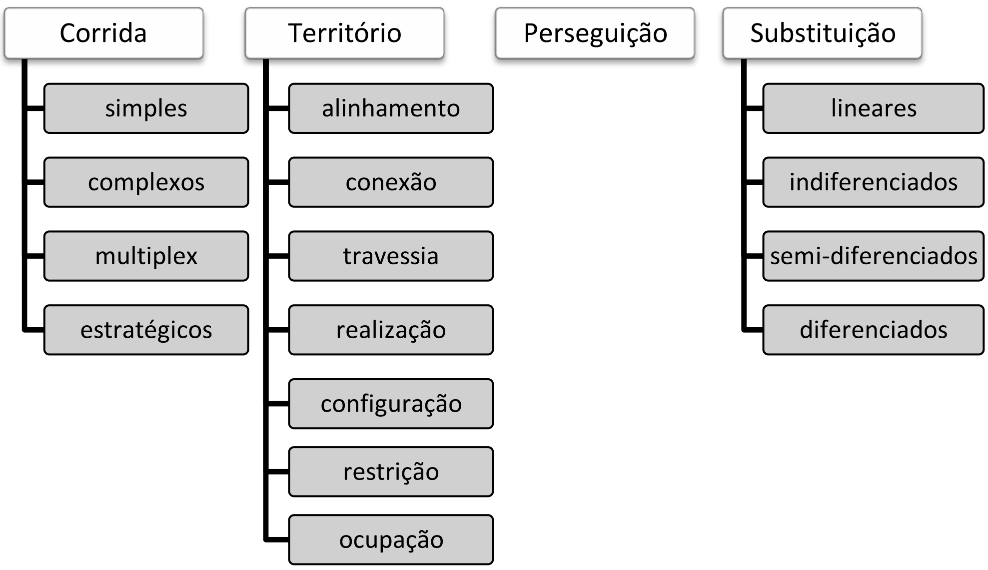


Figura 26. Classificação dos jogos posicionais proposta por David Parlett.

Na teoria dos jogos uma das classificações dos jogos de estratégia contempla o tipo de informação que os intervenientes têm acerca do jogo, distinguindo jogos de informação perfeita e jogos de informação imperfeita. (Neumann & Morgenstern, 1972; Zagare, 1984; Osborne & Rubinstein, 1994). Nos jogos de informação perfeita todos os jogadores têm conhecimento de todas as jogadas efetuadas quer no momento atual do jogo, quer das jogadas previamente realizadas. Neumann e Morgenstern (1972) referem o jogo de xadrez como exemplo de um jogo de informação perfeita, onde todas as peças se encontram visíveis no tabuleiro em qualquer momento do jogo. No entanto, há muitos outros jogos de estratégia de informação perfeita, assim como jogos de informação imperfeita, nomeadamente a maioria dos jogos de cartas e de dominós. Em grande parte dos jogos de cartas e de dominós o jogador não tem conhecimento do jogo do adversário, conhecendo apenas a peça (carta ou pedra) que coloca em jogo após a jogada ser efetuada. Nestes jogos há peças às quais é vedado o conhecimento de pertencerem ou não ao adversário, pois, para além de os jogadores não revelarem as peças que possuem, por vezes há também aquelas que fazem parte do baralho, ou seja, que não foram distribuídas a nenhum dos jogadores. Nestes casos a informação é imperfeita. Para Mycielski (1992), num jogo de informação perfeita os jogadores devem jogar alternadamente e o resultado deve depender apenas das decisões tomadas pelos jogadores. Desta forma, jogos que incluam o elemento sorte são excluídos da categoria dos jogos de informação perfeita, bem como os jogos que não permitam jogadas alternadas. A mesma opinião é refletida por Zermelo (In Myerson, 1991) que considera para os jogos de informação perfeita a existência de um equilíbrio sequencial de pura estratégia, onde a sorte é excluída. No entanto a exclusão do elemento sorte da categoria dos jogos de informação perfeita não é consensual. Salen e Zimmerman (2003) referem que para Thompson o Gamão é considerado um jogo de informação perfeita. Neste jogo existe elemento sorte ditado pela utilização de um dado. No entanto, os jogadores possuem informação de todas as jogadas efetuadas, que são realizadas alternadamente. Salen e Zimmerman mencionam, ainda, que apesar de confirmarem que a sorte não é considerada na sua classificação dos jogos em jogos de informação perfeita ou imperfeita, não deixam de afirmar que esse elemento condiciona de alguma forma a informação de jogo. A existência de elemento sorte conduz a que o jogo não resulte apenas das decisões tomadas pelos jogadores e não permite informação precisa (está condicionada pelo dado) sobre as diferentes possibilidades de jogada que cada jogador possui a cada momento de jogo.

Michel Boutin (1999) propõe uma classificação “des jeux de pions” que iremos enquadrar nos jogos de tabuleiro, apesar de o autor alertar para as questões linguísticas que dificultam a tradução deste tipo de jogos. Boutin refere que os “jeux de pions" não se identificam inteiramente no grupo de jogos que na língua inglesa se exprime por "board games", expressão que considera não ter equivalência em francês, uma vez que os jogos que a representam são identificados por diferentes expressões francesas como "jeux de stratégie", "jeux de plateau" e "jeux de réflexion". Esta última expressão é utilizada por Martine Clidère (1968) na sua obra intitulada "Le guide marabout des jeux de société", para classificar determinados jogos de estratégia, como o Ouri, o Xadrez, o Solitário, o Pachisi e os jogos de dominó. Boutin aponta como mais oportuna a expressão "abstract games". No entanto, considera que a tradução para o francês "jeux abstraits" também não se adequa a todos os "jeux des pions", nomeadamente a jogos como o Tablut, o Ouri ou o Reversi que em português se enquadram perfeitamente nos jogos de tabuleiro e mais precisamente na categoria de jogos abstratos proposta por Neto e Silva (2004). No entanto, a classificação proposta por Boutin inclui também o elemento sorte, elemento que também se encontra presente nos jogos apresentados pelo autor, nomeadamente no jogo Parcheesi (Pachisi), o que exclui a possibilidade de incluir os "jeux des pions" nos jogos abstratos e daí a nossa opção em considera-los no grupo dos jogos de tabuleiro. Este facto alerta-nos para uma outra dificuldade inerente à classificação de jogos que é representada pela própria terminologia em si mesma. Uma forma de ultrapassar essa dificuldade consiste no grande número de jogos descritos pelos autores que nos permite melhor identificar o tipo de jogos inerente a cada categoria. Michel Boutin apresenta uma classificação dos jogos de tabuleiro tendo como critérios o número de jogadores envolvidos, o aspeto combinatório, a sorte e o tipo de informação. Baseando-se na teoria dos jogos proposta por von Neumann, onde os jogos para um jogador são analisados separadamente dos jogos para dois ou mais jogadores, Boutin exclui da sua classificação os jogos para um jogador, considerando ainda que este tipo de jogos não se enquadra nos jogos de tabuleiro em questão. Da combinação dos restantes três critérios resulta uma classificação composta por cinco categorias: jogos determinados de informação completa; jogos determinados de informação incompleta; jogos mistos de informação completa; jogos mistos de informação incompleta; jogos de pura sorte. Os jogos determinados são aqueles onde não há o envolvimento do elemento sorte e podem ser de informação completa, cuja informação de jogo é igual para os jogadores envolvidos (ex. xadrez) ou de informação incompleta (ex. Batalha naval). Nos jogos mistos há o fator sorte associado ao aspeto combinatório. Estes jogos podem também ser de informação completa (ex. Parcheesi) ou de informação incompleta (ex. Tantalus). Finalmente, a categoria dos jogos de pura sorte (ex. Jogo do Ganso). Na sua classificação, Boutin utiliza a categoria dos jogos de informação completa, que difere da categoria dos jogos de informação perfeita, embora as ideias se encontrem relacionadas. Segundo Zagare (1984), enquanto nos jogos de informação perfeita o jogador tem toda a informação acerca das anteriores jogadas, quando chega a sua vez de jogar, nos jogos de informação completa o jogador tem conhecimento das regras de jogo e das preferências do adversário ao longo do jogo. Ou seja o facto de haver informação completa não quer dizer que haja informação perfeita, pois nos jogos de informação completa o jogador pode não ter pleno conhecimento de todas as jogadas efetuadas pelo adversário.

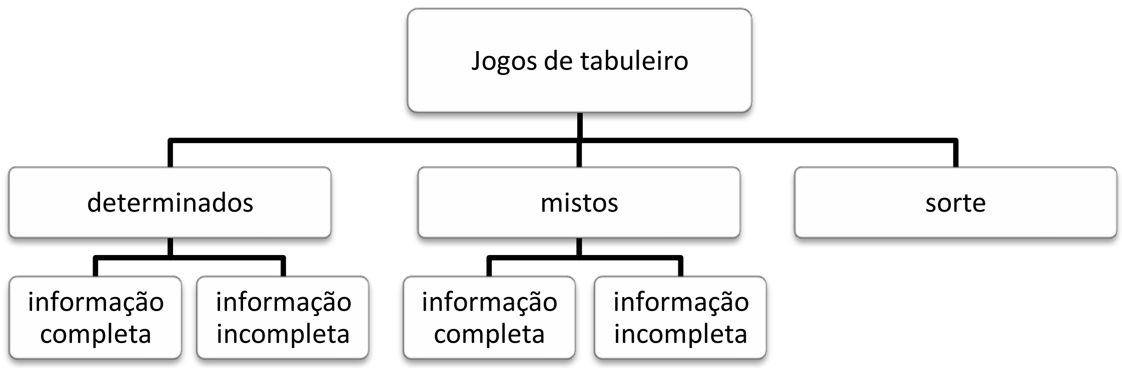


Figura 27. Classificação proposta por Michel Boutin

Uma classificação diferente é proposta por Neto e Silva (2004) a propósito dos jogos abstratos, também designados de jogos matemáticos, onde não há informação escondida nem o envolvimento de qualquer elemento sorte. Os autores apresentam uma estrutura para estes jogos composta por seis famílias, assentes no tipo de objetivo que leva à vitória, salvaguardando o facto de um jogo poder pertencer a mais do que uma família. Os jogos abstratos apresentam-se estruturados nas seguintes seis famílias: território, bloqueio, captura, posição, padrões e conexão. A família dos jogos de território é constituída pelos jogos cujo objetivo é obter a maior área possível (ex.

Go); os jogos de bloqueio são os que têm como finalidade impedir o adversário de jogar (ex. Amazonas); os jogos de captura são aqueles cujo objetivo é capturar um determinado número de peças do adversário (ex. Nosferatu); nos jogos de posição vence quem conseguir deslocar uma ou mais peças para determinada zona do tabuleiro (ex. Rastos); os jogos de padrões têm como objetivo é obter determinado padrão, como por exemplo três-em-linha (ex. Semáforo); nos jogos de conexão vence quem conseguir criar um conjunto de peças que satisfaça um determinado critério, como por exemplo ligar dois lados opostos do tabuleiro (ex. Hex).

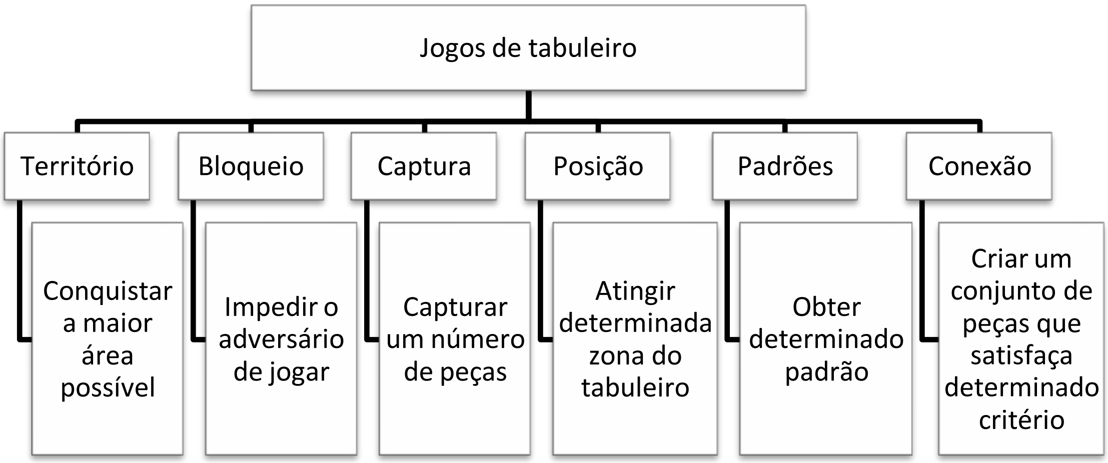


Figura 28. Classificação dos jogos de tabuleiro proposta por Neto e Silva.

Bruce Whitehill (2009) considera essencial a classificação dos jogos para a compreensão das similaridades e diferenças entre o leque de jogos que atravessa diferentes culturas ao longo dos tempos e, ao mesmo tempo, para desenvolver um sistema de terminologia que simplifique a comunicação acerca de jogos. Whitehill inicia com uma classificação geral dos jogos dividindo-os em duas grandes secções: Jogos de interior e jogos de exterior. Os jogos de interior são também separados em duas categorias tendo como critério a necessidade ou não de material de jogo. Nos jogos de interior surgem os jogos sem material e os jogos com material. Os jogos que não necessitam propriamente de material de jogo são também apelidados de jogos de salão ou jogos de festas, categoria que se encontra em algumas coletâneas de jogos, como por exemplo no livro “Jogos de Família”, de Glenn e Denton (2003). Os jogos com material encontram-se subdivididos em três categorias: jogos de papel e lápis; jogos que utilizam objetos comuns de uso doméstico; jogos clássicos e jogos patenteados. É precisamente nesta última categoria de jogos que se vão enquadrar os jogos de mesa e, posteriormente, os jogos de tabuleiro. Whitehill divide a categoria dos jogos clássicos e jogos patenteados em tês grupos, nomeadamente em jogos para crianças e jogos educativos, jogos de família, jogos de adultos, onde cada uma destas categorias se subdivide em quatro novas categorias: jogos de mesa; jogos de perícia e ação; jogos de salão; jogos de cultura geral. Assim poderemos ter jogos de mesa que se adequam mais a adultos, a crianças ou a jogar em família, o mesmo acontecendo para cada uma das restantes três categorias. Trata-se de uma classificação cujo critério subjacente é o público-alvo. De entre os jogos de interior Whitehill centra-se em jogos de mesa que divide em sete categorias: jogos de tabuleiro; jogos de cartas; jogos de dados; jogos de palavras; jogos de destreza; jogos de “tile-laying”; jogos de memória. Os jogos de tabuleiro podem também incluir cartas ou dados, pelo que o autor alerta para o facto da classificação proposta estar sujeita a exceções e sobreposições. Assim, mais uma vez se confirma a dificuldade em classificar os jogos numa classificação exclusiva em que não haja permeabilidade entre as categorias. Voltando à classificação de Whitehill, os jogos de cartas incluem duas novas categorias baseadas no tipo de cartas utilizadas: jogos de cartas *standard* e jogos de cartas específicas (de determinado jogo). Os jogos de dados compreendem os jogos cujo uso de dados constitui o único material de jogo ou o principal material de jogo. Os jogos de palavras utilizam como principal método de jogo o uso de palavras ou frases, independentemente dos materiais utilizados. Muitos dos jogos deste tipo também podem ser inseridos na categoria dos jogos de salão. Os jogos de destreza, também designados jogos de habilidade e ação, estão usualmente ligados à habilidade do jogador para realizar uma determinada ação/movimento. O tipo de jogos classificado como “tile-laying” corresponde aos jogos cujas peças são utilizadas para construir determinado caminho ou pavimentação, onde se inserem os jogos de dominó e jogos como o *Mahjong*. Whitehill considera que os jogos de memorização constituem um diferente grupo de jogos, na medida em que todos os jogos de memória utilizam o mesmo tipo de mecanismo de jogo. Finalmente, os jogos de tabuleiro, considerados como uma categoria predominante, são alvo de uma análise mais pormenorizada e subdivididos em sete diferentes categorias: corrida; sobrevivência; alinhamento; construção; comércio e negócio; captura; outros. Esta última categoria pretende abarcar não só as exceções como deixar em aberto o aparecimento de novos jogos que não se possam incluir em nenhuma outra categoria. Os jogos de alinhamento e de corrida constituem dois grupos idênticos aos já apresentados por Murray (1952) e Parlett (1999). No entanto, Whitehill divide os jogos de corrida em três tipos distintos: jogos de percurso; jogos de pista; jogos de meta ou objetivo. Os jogos de sobrevivência têm como objetivo evitar a perda das peças à medida que o tabuleiro vai desaparecendo ao longo das jogadas. Um exemplo apresentado consiste no jogo Survive, também conhecido por Atlantis. Os jogos de construção são jogos cujo objetivo consiste em construir, desenvolver ou adquirir peças ou território. São exemplos deste grupo os jogos pertencentes à família do jogo Os Descobridores de Catan e o jogo Carcassonne. Nos jogos de comércio e negócio os jogadores interagem de forma a negociar materiais ou metas a atingir, como por exemplo nos jogos Cluedo e Diplomacia. Os jogos de captura são objeto de uma nova subdivisão em cinco categorias: posicionamento; posição e movimento; movimento; guerra e simulação; jogos do tipo Mancala. Destas, as três primeiras assentam no tipo de ação permitida às peças, nomeadamente se apenas se vão posicionando no tabuleiro (ex. Reversi), vão-se movendo após um posicionamento pré-estabelecido (ex. Xadrez) ou se lhes é permitido executar as duas ações -posicionar e mover- (ex. Stratego). Os jogos de guerra e simulação são jogos temáticos representativos de batalhas. Os jogos Mancala constituem uma categoria pela especificidade destes jogos, considerados também pelo autor como jogos abstratos. Whitehill considera, ainda, que os jogos de tabuleiro podem ser divididos em dois grupos distintos, determinado pelas características do tabuleiro, nomeadamente se o tabuleiro é invariável ao longo do jogo ou se vai sofrendo alterações na sua estrutura à medida que os jogadores vão fazendo as respetivas jogadas.

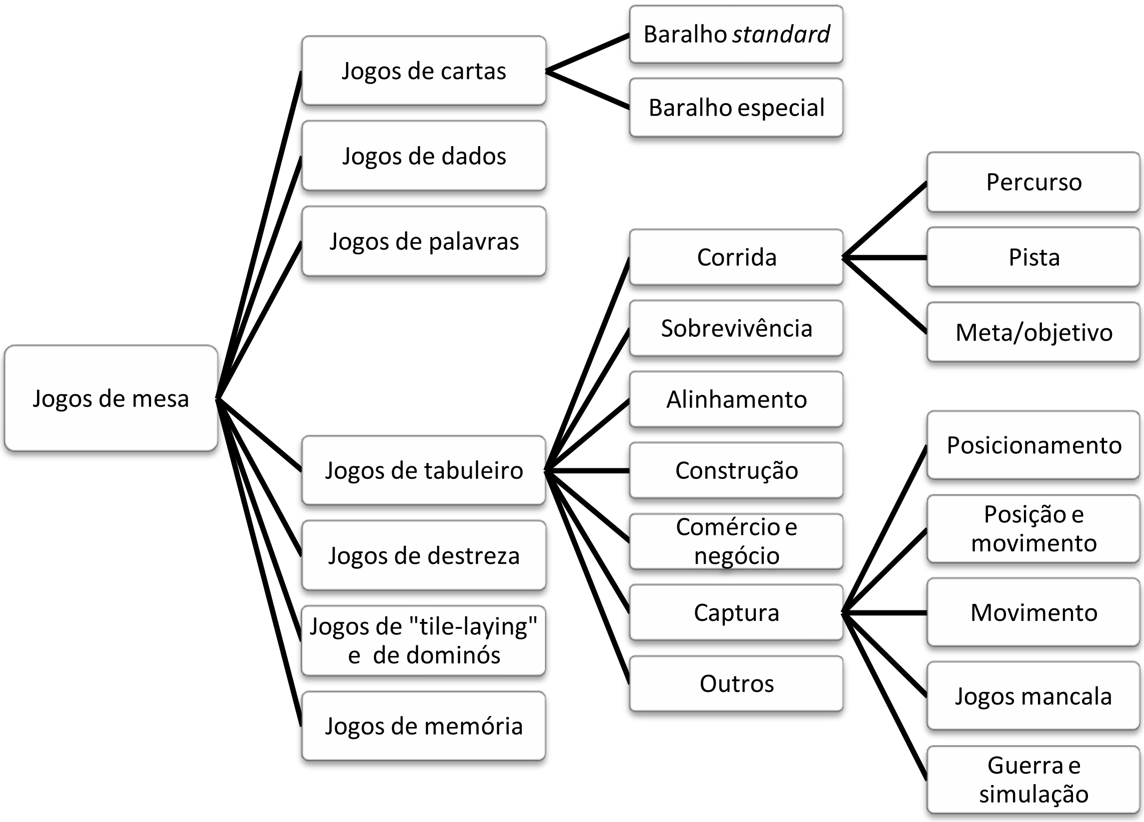


Figura 29. Classificação dos jogos de mesa proposta por Whitehill

Há certos tipos de material de jogo que são utilizados para jogar diversos jogos. Por exemplo, com um baralho de cartas pode jogar-se uma grande variedade de jogos, como a Sueca, as Orelhas ou as diferentes variantes da Bisca, muito populares entre os portugueses de diferentes idades. Outro exemplo consiste nos jogos de dominó, onde as 28 pedras (o set com doble de seis é mais comum em Portugal) são utilizadas também para muitos jogos. Neto e Silva (2010) referem que a este tipo de material mais versátil é usual chamar-se *sistema de jogos*, considerando o baralho de cartas como sendo, provavelmente, o mais incrível sistema de jogos inventado até à data. Uma caraterística dos *sistemas de jogos*, para além de servirem para jogar vários jogos, é a capacidade combinatória, que lhes permite criar inúmeras possibilidades de interação a partir de um conjunto de peças básicas. Os autores comparam este sistema com outros sistemas de combinação de elementos, como a escrita, a matemática, a música ou a linguagem de programação. Tendo por base os sistemas de jogos, João

Pedro Neto (2003) divide os jogos abstratos em três grupos: jogos de soldados; jogos de reis e soldados; jogos de torres. Os jogos de soldados utilizam apenas um tipo de peças para cada jogador. São exemplos desta categoria jogos como o Alquerque, o Hex, ou o Gatos & Cães. Usualmente, mas não obrigatoriamente, os jogadores têm peças de cor diferente. Os jogos de reis e soldados utilizam dois ou mais tipos de peças para cada jogador, sendo o Semáforo incluído nesta categoria. Os jogos de torres utilizam peças com as quais se podem criar torres, ou pilhas. Um exemplo deste tipo de jogos é a família de jogos Mancala.

Numa visão diferente, Richard Vickery (2003) propõe uma classificação dos jogos assente nas principais experiências dos jogadores, mais precisamente nas sensações que os jogos permitem vivenciar. Vickery considera que as diferentes classificações dos jogos pouco dizem acerca do divertimento que o jogo possa provocar, o que considera essencial no momento de escolher um jogo para jogar. Esse divertimento é constituído por diferentes *nuances,* dependendo do jogo, podendo o mesmo jogo propiciar diferentes experiências. Tendo por base as experiências positivas, Vickery divide os jogos em catorze categorias: plano; avaliação antecipada; aha!; jogos psicológicos; tensão; narrativa; encenação; simulação; comunicação; pensamento lateral; conhecimento; pressão de tempo; destreza; constante envolvimento. O plano traduz a estratégia e planeamento anterior ao próprio jogo, sendo, em alguns casos, mais interessante que o próprio jogo. A avaliação antecipada encontra-se presente nos jogos em que é vantajoso conseguir prever futuras situações de jogo, diferindo do plano devido a ocorrer em tempo real de jogo. A categoria aha!, como a própria designação refere, traduz-se no elemento surpresa com o qual se pode confrontar o adversário e que muitas vezes surge de uma descoberta casual. Essa jogada inteligente em si já proporciona prazer, mesmo que se venha a perder o jogo. Os jogos psicológicos fazem parte da capacidade de negociação e constituem a experiência de tentar adivinhar o pensamento do adversário, escondendo o próprio. A tensão refere-se à excitação e entusiasmo provocados pelo jogo, muitas vezes traduzida por risos e gritos. Jogos que não pertençam a nenhuma das categorias anteriores podem ainda provocar tensão se lhe adicionarem o elemento sorte, de forma adequada. Na categoria narrativa incluem-se os jogos onde o maior divertimento consiste em fazer parte da história que se vai desenrolando num enredo plausível e convincente. A encenação é um elemento importante dos jogos cujo maior divertimento reside em gracejos ou resposta-pronta, onde há uma justificação divertida para suavizar o golpe ao adversário. A simulação tem por base um tema, onde se podem apreender muitas informações, no caso de ser bem realizada. Nesta categoria a experiência está centrada na aprendizagem. O autor considera as restantes categorias menos atraentes, embora as considere informativas. A título de exemplo, Vickery considera como experiências principais do jogo Os Descobridores de Catan a tensão, os jogos psicológicos e o constante envolvimento. Como elementos secundários inclui a narrativa, o plano e a avaliação antecipada. A caraterística fundamental desta classificação consiste numa perspetiva do jogo diferente da apresentada pelos autores antes focados e que deixa em aberto a possibilidade de diferentes classificações assentes noutros interesses ou finalidades.

Avedon (1971) considera que as diferentes taxonomias se encontram centradas num determinado parâmetro ou elemento do jogo, agrupando os jogos que têm em comum esse elemento. Assim temos os jogos de exterior, os jogos infantis, os jogos de papel e lápis, os jogos de tabuleiro, entre outros. Para Avedon tornou-se essencial delimitar os elementos estruturais comuns a todos os jogos. Combinando o trabalho realizado por behavioristas, matemáticos e estudiosos no campo do jogo no âmbito recreativo, Avedon conclui que os jogos são constituídos pelos seguintes dez elementos estruturais:

1. objetivo do jogo, meta, intenção, razão de ser;
2. maneira de agir, operações específicas, ações obrigatórias, método de jogo;
3. regras de ação, princípios que determinam a conduta e normas de comportamento;
4. número de participantes, número mínimo e máximo necessário ao jogo;
5. papel dos participantes, função e estatuto;
6. resultados, valores atribuídos ao resultado da ação;
7. capacidades e competências necessárias à ação, aspetos dos três domínios comportamentais utilizados numa dada atividade:
    a. cognitivo;

    b. sensório-motor;
    c. afetivo;
8. padrões de interação;
    a. ação intra-individual no interior da mente;
    b. ação extra-individual do indivíduo para com um objeto, não necessitando de contacto com outro indivíduo;
    c. ação conjunta direcionada por diferentes indivíduos para com um objeto, sem que haja interação entre os participantes;
    d. ação inter-individual de natureza competitiva entre indivíduos;
    e. ação unilateral de natureza competitiva entre três ou mais pessoas, uma das quais é o oponente;
    f. ação multilateral de natureza competitiva entre três ou mais indivíduos;
    g. ação intra-grupos de natureza cooperativa entre duas ou mais pessoas que procuram atingir um objetivo comum através de ações verbais e não verbais;
    h. ação inter-grupos de natureza competitiva entre dois ou mais intra-grupos;
9. espaço físico e requisitos ambientais:
    a. espaço físico onde a ação decorre, seja ambiente natural ou não;
    b. condições naturais indispensáveis ou obrigatórias;
10. equipamento necessário.

Avedon (1971) considera, no entanto, que a estrutura acima apresentada deve ser considerada como uma abordagem preliminar à classificação de jogos que possa auxiliar trabalhos futuros nesse âmbito.

As classificações de jogos têm a particularidade de incidirem nas características intrínsecas e/ou extrínsecas ao material de jogo ou às suas regras. Curiosamente, a dificuldade expressa por diferentes autores na procura de uma definição abrangente de jogo parece refletir-se também na classificação de jogos. Classificar os jogos abrangendo todos os jogos, de modo que cada jogo pertença apenas a uma só categoria, revela-se uma tarefa difícil mesmo quando a classificação assenta apenas num determinado tipo de jogos. Aliás é precisamente quando se vai entrando mais profundamente na especificidade dos jogos que estes se revelam possuidores de características que lhes permitem pertencer a mais do que uma categoria. Uma das vantagens da classificação dos jogos consiste em proporcionar uma análise à luz de diferentes perspetivas, o que se traduz num conhecimento mais aprofundado dos jogos em questão. As classificações acima apresentadas não esgotam o assunto da taxonomia dos jogos pois cada aspeto particular do jogo pode originar uma nova classificação. No interesse da educação matemática elementar, parece-nos premente uma classificação assente nas características matemáticas presentes em determinados jogos e no grau de dificuldade desses mesmos jogos, que permitam uma melhor orientação dos professores na seleção dos jogos adequados aos conceitos ou competências matemáticas a desenvolver nos alunos dos diferentes níveis de ensino. Uma taxonomia com estas características revelar-se-ia útil, não só aos professores, mas também a toda a comunidade educativa, na medida em que o desenvolvimento de competências, da área de Matemática ou de qualquer outra área, não se encerra na escola. Assim, num futuro próximo, seria desejável uma taxonomia dos jogos, fundamentada nas características matemáticas dos diferentes jogos, que possa contribuir para o desenvolvimento de competências matemáticas e para a sua utilização objetiva no ensino e aprendizagem da Matemática.

Para finalizar esta secção dedicada a diferentes visões acerca da classificação dos jogos, importa referir que não se pretende de todo esgotar as classificações existentes mas referir as que nos parecem mais importantes para o enquadramento do estudo.

4.2.4. Algumas teorias do jogo

Vários autores, nomeadamente historiadores, filósofos e psicólogos, têm manifestado interesse sobre o estudo do jogo, evidenciando diferentes visões sobre o assunto e, consequentemente, propondo diferentes explicações para a sua existência. Destas diferentes abordagens surgiram diferentes teorias, das quais iremos apenas salientar algumas, onde o ato de jogar é analisado por alguns autores com o objetivo de melhor compreendermos as razões que nos levam a jogar.

O historiador, poeta e filósofo Friedreich Schiller apresenta o jogo como sendo o princípio e a explicação de toda a arte. Para Schiller (1994)

> *"o homem joga somente quando é homem no pleno sentido da palavra, e somente é homem pleno quando joga. Esta afirmação, que há-de parecer paradoxal neste momento, irá ganhar uma grande e profundo significado quando chegarmos a relacioná-la à dupla seriedade do dever e do destino; suportará, prometo-vos, o edifício inteiro da arte estética e da bem mais dificultosa arte de viver" (p. 80).*

Para Schiller (1994) é através do jogo que o homem se completa na medida em que concilia o sério e o prazer, o material e o espiritual. No jogo o ideal de beleza está sempre presente pois é através da beleza que o homem joga. É o jogo, ou impulso lúdico, que faz a ponte entre a dupla natureza humana formal, expressa pelo pensamento e material, expressa pelos sentidos. E é através dessa ponte, ou seja do jogo, que a beleza surge. Mas Schiller tem uma outra visão de jogo, enquanto divertimento (play). O autor considera o jogo como sendo a libertação do excesso de energia acumulado pelo organismo. Ao jogar, tanto a criança como o animal libertam esse excesso acumulado. A energia que não era utilizada no processo de sobrevivência ficava acumulada, sendo gasta através do jogo. Um processo que tanto se aplicava ao ser humano como aos animais (Saracho & Spodek, 2003).

O filósofo Herbert Spencer adota a teoria da *energia excedente* proposta por Schiller mas sob um ponto de vista diferente, considerando não ser essa a única explicação para o fenómeno jogo (Coelho, 2011). Para Spencer o jogo é uma *atividade supérflua* associada à evolução das espécies. O autor considera que nas espécies de ordem superior os mais novos jogam mais devido ao facto de estarem dependentes dos progenitores durante mais tempo (Saracho & Spodek, 2003).

Contrapondo a teoria de Schiller e Spencer, o poeta Moritz Lazarus defende que jogar é o oposto de trabalhar. O jogo é apresentado como uma necessidade de recreação do indivíduo para repor a energia gasta no trabalho (Saracho & Spodek, 2003). Lazarus apresenta-se assim como o grande defensor da teoria da recreação proposta por Kames, que considerava o jogo necessário para restabelecer o homem psíquica e mentalmente, referindo que este necessita de jogar para se refrescar após o trabalho. Esta ideia da utilização do jogo como recreação vai ao encontro da teoria do *relaxamento* defendida por Patrick, para o qual o jogo é um padrão de comportamento que advém da necessidade de relaxamento (Courtney, 1989).

Retomando uma ideia de Spencer, onde o jogo seria um treino, *prática* ou *pré-exercício* (Courtney, 1989), Karl Groos formula a teoria construtivista, pela qual o jogo é um processo de preparação da criança para a vida adulta (Verbo, 1995). O jogo adquire o papel de exercitar funções (Chateau, 1975) que preparam a criança para o trabalho, pois é através da prática da atividade lúdica que as pessoas desenvolvem as suas capacidades. Jogar serve, então, de treino para a vida futura (Coelho, 2011). Esta ideia terá tido o apoio de educadores como Makarenko que, assente na teoria de Groos, salientou a importância do jogo bem orientado para formar as qualidades do futuro trabalhador e cidadão (Mello, 1989). Piaget (1999) alerta para o facto de Karl Groos considerar o jogo como um pré-exercício e não um exercício, uma vez que através do jogo a criança vai desenvolvendo funcionalidades para as quais só terá maturidade no final da infância.

Outra visão é defendida pelo psicólogo G. Stanley Hall com a sua teoria da *recapitulação*, que Courtney (1989) encara como uma teoria do relaxamento, embora mais complexa. Hall considerava o jogo como a forma do ser humano se libertar de instintos residuais que permaneceram no percurso evolutivo, como que ligando o ser humano aos restantes animais, mas que deixaram de ser necessários (Brock, Dodds, Jarvis & Olusoga, 2009).

As teorias apresentadas anteriormente são representativas do pensamento sobre o jogo anterior ao século XX. Mellou considera que as diferentes teorias do jogo podem ser divididas em duas categorias. A primeira, a teoria clássica, envolve pensadores do século XIX e inícios do século XX; a segunda, a teoria moderna, está representada pelas teorias emergentes após 1920 (Saracho & Spodek, 2003). Segundo Olivia Saracho e Bernard Spodek (2003) a teoria clássica procura descrever a razão e funções do ato de jogar, e está representada por quatro teorias: 1) *a teoria da energia excedente*; 2) *a teoria recreacional ou de relaxamento*; 3) a *teoria da prática ou pré-exercício*; 4) a *teoria da recapitulação*. Segundo os autores, estas teorias constituem dois pares de teorias distintos. As primeiras duas explicam o jogo através do controlo de energia e as duas últimas através do instinto, estando cada par como que em oposição entre si. A teoria moderna, por sua vez, procura explicar o papel essencial do jogo no desenvolvimento da criança, vendo o jogo como um sistema capaz de promover as capacidades cognitivas.

Uma das teorias modernas do jogo foi a teoria *psicanalítica* desenvolvida por Sigmund Feud. Freud considerava que jogar desempenhava um papel importante no desenvolvimento emocional da criança. Através do jogo a criança libertava as emoções negativas, permitindo-lhe atingir o equilíbrio emocional (Saracho & Spodek, 2003). Nesta perspetiva, jogar é a forma da criança resolver os conflitos que ocorrem na sua vida de forma a poder crescer emocionalmente saudável. Freud considerava que o jogo é a forma da criança lidar com a realidade, tornando-a mais aceitável. Esta teoria teve repercussões no trabalho de muitos psicoterapeutas e educadores, fundamentando-se nela para os seus programas de tratamento a crianças com disfunções (McLean & Hurd, 2012).

A teoria da *modulação da excitação* assume que o indivíduo necessita do jogo para manter o nível ótimo de estimulação/excitação do sistema nervoso central. Esta teoria, desenvolvida por Berlyne, descreve como através do jogo o organismo consegue controlar os níveis de excitação, procurando atividades que proporcionem excitação ou atividades que reduzam o seu excesso (Saracho & Spodek, 2003).

Outra das teorias modernas, a teoria *meta-comunicativa*, foi desenvolvida por Gregory Bateson. Para Bateson, o jogo constitui também uma forma de comunicação, onde determinadas ações em contexto de jogo têm diferente significado do atribuído fora desse contexto porque o jogador sabe que 'é um jogo' (Salen & Zimmerman, 2003). Quando a criança joga ao 'faz-de-conta' tem consciência de que o jogo não é 'real', aprendendo a agir simultaneamente em dois níveis: a função 'faz-de-conta' da ação e dos objetos e a autenticidade da vida (Saracho & Spodek, 2003). Ou seja, Bateson considera que ao jogar a criança tem presente os significados dos objetos e ações do jogo e, ao mesmo tempo, está consciente da verdadeira identidade dos jogadores envolvidos, bem como do real significado dos objetos e ações. Segundo Saracho e Spodek (2003), Bateson conclui, ainda, que o jogo e a fantasia são importantes para o desenvolvimento cognitivo, pelo que a sua teoria terá motivado o aparecimento das teorias cognitivas.

As teorias cognitivas procuram relacionar o jogo com o desenvolvimento cognitivo, sendo Piaget e Vygotsky duas referências muito importantes neste campo. Para Piaget a criança vai adquirindo conhecimento através de um equilíbrio entre o processo de assimilação e acomodação. Através da assimilação a criança vai integrando a informação que vai adquirindo através da interação com o meio envolvente, criando novas estruturas mentais. Pela acomodação, a criança vai integrando e modificando as suas estruturas mentais à medida que vai confrontando a nova informação adquirida com a existente. Piaget (1999) considera que o jogo vai acompanhando o desenvolvimento da criança evoluindo ao longo de três etapas: jogos de prática ou sensório-motor, de simbolismo e de regras. Ao longo destas etapas o jogo, tal como a criança, vai evoluindo para um nível de complexidade superior, que culmina com os jogos de regras. Piaget considera que os jogos de regras raramente ocorrem antes dos 4-7 anos de idade, podendo iniciar-se entre os 7 e os 11 anos. Este tipo de jogos marcam o declínio dos jogos infantis e a transição para os jogos dos adultos. Ou seja, à medida que os jogos de regra se impõem, os jogos sensoriomotores e simbólicos são desaparecendo. Os jogos de regras são os que prevalecem na idade adulta, na medida em que são, segundo o autor, a atividade lúdica do ser humano enquanto ser social. Piaget considera, ainda, que nestes jogos há um equilíbrio subtil da assimilação entre o ego e a vida social. Existe satisfação ao nível sensório-motor e intelectual mas também na possibilidade de vitória sobre os outros, onde a competição é controlada pelas regras e pelo *fair play*. Para Piaget, os jogos de regras são jogos com combinações sensórios-motores ou intelectuais onde existe competição entre os jogadores e regulamentados por um código transmitido pelas gerações anteriores ou por um acordo temporário entre os indivíduos.

Tal como Piaget, Lev Vygotsky considerava o jogo essencial ao desenvolvimento da criança. Para Vygotsky (1978), através do jogo a criança tem oportunidade de se envolver com um leque de atividades consideradas ótimas para criar a zona de desenvolvimento próximo. Ou seja, o jogo ajuda a criança a alcançar um novo nível de desenvolvimento. Esse desenvolvimento está também visível no próprio jogo, quando a criança passa dos jogos com situação imaginária explícita e regras implícitas para os jogos com regras explícitas e situação imaginária implícita. Porque para Vygotsky todo o jogo tem regras e envolve a criança numa situação imaginária. E é precisamente esta última caraterística que, segundo Vygotsky, distingue o jogo das restantes atividades infantis. Saracho e Spodek (2003) consideram que Vygotsky acrescenta à teoria de Piaget o facto de o jogo estimular na criança o desenvolvimento cognitivo no contexto social onde os aspetos culturais desse desenvolvimento ocorrem. O jogo adquire assim um carácter marcadamente social, através do qual crianças e adultos aprendem a dominar, tanto as suas capacidades, como as normas sociais (García & Llull, 2009).

Uma perspetiva diferente do jogo é a defendida por Huizinga, que institui o que se pode considerar uma teoria do "jogo cultural", como refere George Steiner na introdução a Homo Ludens (Huizinga, 2003). Para Huizinga o jogo faz parte da própria cultura, sendo expresso nas diferentes vertentes que a cultura abarca. A cultura é apresentada como um jogo onde a sensibilidade e criatividade humanas se expressam, criando assim a própria cultura. Desta forma são justificadas a poesia, a música, o conhecimento, a lei e todas as expressões culturais. A poesia está de tal forma interligada com o jogo, na medida em que a linguagem poética brinca com as imagens, organizando-as, imbuindo-as em mistério de forma a produzir enigmas, que Huizinga considera dispensável a apresentação de exemplos. Huizinga refere que tudo o que diz respeito à música se insere dentro da esfera do jogo, acrescentando que "em poucas atividades humanas o espírito competitivo está tão arreigado como na música"(p.186). Relativamente a outras atividades humanas, mesmo em relação à guerra, Huizinga justifica-as como o resultado do jogo e do ímpeto que leva o ser humano a jogar com palavras, artefactos, ideologias, os sons, pelo prazer da competição, da recreação, da vitória. Deste jogo nasceu a cultura.

As teorias apresentadas, embora se debrucem essencialmente sobre o jogo como atividade recreativa de jogar, independentemente desta ser praticada pela criança ou pelo adulto, por seres humanos ou animais, permitem-nos perceber o quanto o tema é abrangente e tem, ao longo de décadas, sido âmbito do interesse de diferentes estudiosos. O jogo, estando presente em crianças e adultos, necessitava de ser explicado, de ser compreendida a sua função e o porquê da sua existência.

Procurou-se e ainda se procura fazer um aproveitamento do jogo para melhorar capacidades, porque o jogo cativa e porque todos, em vários momentos ao longo da nossa vida, jogamos, desfrutando esse momento de lazer. De todas as funções atribuídas ao jogo pelas diferentes teorias, provavelmente a mais evidente, como refere Palhares (2000), será a de recreação.

4.2.5. Investigações sobre jogos

Nem sempre o estudo dos jogos decorre em contexto educacional, o que não inibe que os resultados desses estudos possam ter implicações educacionais. A psicologia foi certamente uma das ciências que maior interesse revelou pelo estudo dos jogos. O jogo de xadrez foi o jogo que mais interesse despertou para investigação. As investigações incidiram sobre alguns aspetos considerados relevantes, como a perceção, a memória ou o processo de tomada de decisões.

Gobet, Voogt e Retschitzki (2004) afirmam que a pesquisa científica em psicologia, envolvendo jogos de tabuleiro, teve início com Binet, em 1894, em Paris. Binet desenvolveu um estudo utilizando *blindfold chess* (xadrez às cegas) através do qual concluiu ser importante o estudo e a experiência adquirida pela prática de jogo, a capacidade de visualizar uma posição e a memória, em particular a memória verbal. Os estudos desenvolvidos por Chase e Simon, que conduziram à teoria *chunking* são também importantes. Gobet e colegas (2004) referem tratar-se de uma teoria de grande relevância, dado uma grande parte dos estudos envolvendo jogos de tabuleiro em psicologia terem sido desenvolvidos no sentido de testar aspetos desta teoria.

Um dos estudos sobre o jogo de xadrez envolveu a monotorização do movimento dos olhos dos jogadores no processo de tomada de decisão de jogadas. O estudo envolveu 24 jogadores de xadrez com idades compreendidas entre os 18 e os 34 anos, sendo 12 jogadores experientes e 12 jogadores de nível intermédio. O estudo revelou que os jogadores experientes eram mais rápidos e mais eficazes a solucionar problemas de escolha da melhor jogada. Os investigadores observaram, ainda, que nas primeiras cinco fixações os jogadores experientes tendiam a fixar mais as casas de tabuleiro vazias. No entanto, relativamente às casas ocupadas verificou-se que os jogadores de xadrez experientes fixavam mais em peças relevantes do que os jogadores de nível intermédio (Charness, Reingold, Pomplun & Stampe, 2001).

Segundo Gobet e colegas (2004), de Groot foi o primeiro investigador a realçar a importância da perceção na perícia da resolução de problemas no jogo de xadrez. No seu estudo de Groot utilizou tarefas de resolução de problemas e de memória. Verificou que os jogadores de xadrez experientes conseguem memorizar a posição de um maior número de peças do que jogadores menos experientes. Verificou, ainda, que nos jogadores de xadrez a memória é composta por conhecimento explícito e experiência intuitiva.

McGregor e Howes (2002) estudaram o papel da posição de ataque ou defesa na memorização de posições de peças de xadrez. O estudo envolveu três investigações distintas com jogadores de xadrez de diferentes níveis de experiência. Aos jogadores foram apresentadas situações de jogo para avaliar (qual a cor em vantagem ou situação neutra) e para numa fase seguinte identificar as posições vistas na fase anterior. A análise dos dados revelou que o papel de ataque ou defesa é relevante na identificação das peças numa determinada posição. Os jogadores experientes eram mais rápidos e eficazes na discriminação de novas relações entre as peças do que de nova posição das peças.

Os resultados destes estudos permitem concluir que as diferenças entre os bons jogadores e os restantes jogadores não se resumem à maior capacidade de uns vencerem mais jogos do que os outros, mas que provavelmente existirão outras capacidades que poderão estar interrelacionadas. Ou seja, ser bom jogador pode conduzir a outras mais-valias para além do evidente sucesso no jogo.

Em relação ao jogo Awele, para se ser um bom jogador é necessário ter capacidades intelectuais gerais e conhecimento específico do jogo (Gobet et al., 2004). Investigações desenvolvidas com o propósito de identificar as diferenças cognitivas entre os melhores jogadores de Awele e os restantes jogadores permitiram verificar que o facto de se ser bom jogador não está relacionado com a capacidade de estimar (calcular) quantidades, capacidades aritméticas ou com a memória, mas encontra-se relacionado com conhecimento específico de jogo adquirido através da prática (Gobet et al., 2004).

Rayner (In Gobet et al., 2004) comparou a performance entre adultos e crianças entre os 5 e 15 no jogo Pegity, um jogo de tabuleiro (uma variante do Gomaku) onde dois jogadores alternadamente colocam uma peça numa casa vazia do tabuleiro, com o objetivo de alinhar cinco peças na vertical, horizontal ou diagonal. O estudo permitiu verificar que os adultos utilizam mais tempo para pensar nas jogadas e são capazes de prever certos finais de jogo antes das crianças. Também se verificaram diferenças entre os alunos de 5 e de 7 anos no tipo de jogadas. Os alunos de 5 anos tentavam colocar as cinco peças em linha sem prestarem grande atenção ao jogo do adversário, enquanto os alunos de 7 anos já eram capazes de antecipar a intenção do oponente.

No âmbito da etnomatemática, Palhares (2012), refere a necessidade de se continuar a investigar o pensamento matemático envolvido na prática de jogos, bem como investigar os tabuleiros gravados na pedra de monumentos/construções antigas, procurando relacioná-los com o pensamento matemático dos seus construtores.

No âmbito educacional e direcionadas para a área da matemática também foram realizadas algumas investigações que importa referir.

Um estudo foi realizado por Grando (2000) com 8 alunos da 6ª série (11-12 anos) do Ensino Fundamental brasileiro, envolvendo dois jogos de regras, um dos quais o Nim e o outro o Contig 60. A investigação foi conduzida em ambiente de sala de aula e tinha como objetivo principal investigar as possibilidades do desenvolvimento de um trabalho pedagógico com jogos no ensino da Matemática, envolvendo os dois jogos mencionados e a resolução de problemas sobre esses jogos. O estudo de natureza qualitativa revelou que estes jogos, quando utilizados com objetivos pré-definidos, podem conduzir ao desenvolvimento da capacidade de cálculo mental e à construção de noções, procedimentos e conceitos matemáticos. Nomeadamente, a resolução de problemas de jogo impulsionou o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental, onde se pôde identificar o pensamento algébrico, por vezes presente na estrutura dos cálculos. O registo permitiu a explicitação dos procedimentos de resolução de problemas conduzindo os sujeitos para a análise do seu próprio raciocínio. Através do jogo os alunos articularam diferentes jogadas e estratégias, estabeleceram relações, identificaram padrões, compuseram, decompuseram, associaram e construíram relações algébricas abstratas, a partir das previsões e análises de possibilidades. O jogo permitiu à investigadora analisar e discutir com os sujeitos envolvidos o conceito de divisibilidade, multiplicidade, bem como a propriedade distributiva e a propriedade comutativa. Grando (Idem) concluiu que a utilização do jogo se revelou eficaz no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Bottino, Ferlino, Ott e Tavella (2007) realizaram um estudo sobre a introdução de alguns jogos matemáticos em ambiente digital, utilizando duas turmas do ensino primário, em Itália. O estudo acompanhou esses alunos desde o segundo ano (7-8 anos) ao quarto (9-10 anos). A experiência prévia desses alunos em jogos de computador era muito pequena ou inexistente e nenhum possuía o seu próprio computador. Ao longo do estudo foram disponibilizados computadores e *software* de jogos para cada aluno utilizar individualmente. As sessões tiveram a duração de uma hora por semana, sendo acompanhadas pelos professores dos alunos e pelos investigadores. Neste estudo puderam observar que as crianças deixavam de trabalhar de forma aleatória, na medida em que se apercebiam da improdutividade desse comportamento, e optavam pela procura e aplicação de estratégias de trabalho mais produtivas. Também observaram o impacto positivo nas capacidades de raciocínio das crianças proporcionado pela utilização destes jogos. A análise dos resultados obtidos pelos alunos do quarto ano das turmas experimentais, em comparação com duas turmas de quarto ano da mesma escola não intervenientes no tratamento experimental, no que concerne à área de matemática, numa avaliação promovida pelo Instituto de Avaliação Nacional do Ministério da Educação italiano, permitiu verificar que a utilização ao longo do tempo de atividades bem estruturadas baseadas em jogos pode ter um impacto positivo na capacidade de raciocínio dos alunos. As turmas experimentais evidenciaram maior percentagem de alunos em rankings mais elevados (23% e 24%) do que as turmas não experimentais (0% e 6%).

Em Portugal, o jogo de xadrez foi objeto de um estudo correlacional com o objetivo de identificar possíveis relações entre a força de jogo e a capacidade de identificar padrões (Ferreira & Palhares, 2008). O estudo envolveu 437 alunos do 3.º ao 6.º ano de escolaridade, jogadores e não jogadores de xadrez. Na categoria dos jogadores de xadrez estavam incluídos os alunos que participavam nos torneios distritais e nacionais de xadrez. A força de jogo foi medida através do ELO dos jogadores e a capacidade de identificar padrões mediu-se através de um teste constituído por 24 questões envolvendo a identificação de padrões numéricos e padrões geométricos/pictóricos, cuja estrutura se baseou na formulação de questões semelhantes observadas em Krutetskii (1976), bem como nas conclusões do mesmo autor, que apontam para a existência de três tipos de tipos de abordagem às tarefas: predominantemente lógico-verbal ou analítica, visual-pictórica ou geométrica e harmónica (que combina as duas anteriores). Este teste seguiu determinadas etapas para a sua validação, nomeadamente a análise das questões por um júri e a fiabilidade do teste através do Alpha de Cronbach, que mede a consistência interna dos itens. Neste estudo concluiu-se a existência de relação entre a capacidade de identificar padrões e a capacidade de jogar xadrez (r = 0,458) e que, apesar destra relação ser afetada pelo ano de escolaridade, retirado esse efeito a relação ainda mantém um valor significativo (r = 0,38). O estudo revelou, ainda, que a relação entre a capacidade de jogar xadrez e a capacidade de identificar padrões é superior para os padrões numéricos (r = 0,463) do que para os padrões geométricos (r = 0,320). A análise do teste revelou que, inversamente à maioria dos alunos, os alunos participantes em torneios distritais e nacionais de xadrez resolvem melhor padrões numéricos do que padrões geométricos. Os resultados obtidos no estudo levaram os autores a considerar desejável um maior investimento dos professores no ensino sistemático do xadrez, procurando que os alunos sejam bons jogadores de xadrez.

Mais recentemente, Leicha Bragg (2012), conduziu um estudo com 222 alunos dos 9 aos 12 anos, envolvendo-os na resolução de tarefas que utilizavam jogos não digitais e tarefas que não utilizavam jogos. Com a investigação pretendia-se o estudo da relação entre a utilização de jogos e a aprendizagem matemática, atitudes e comportamentos dos alunos. A amostra foi constituída por oito turmas do 5.º e 6.º ano, de três escolas australianas. O estudo envolveu a aplicação de quatro programas de ensino que envolviam exclusivamente a atividade de jogo ou atividades matemáticas focalizadas na multiplicação e divisão de decimais. Estes programas diferiam na utilização ou não de jogos, no tempo dedicado ao jogo, na utilização ou não de discussão após o jogo. Os jogos utilizados implicavam cálculos envolvendo multiplicações e divisão com números decimais. Ao longo de quatro semanas cada grupo teve duas intervenções, no total de oito sessões. Neste estudo pôde verificar-se que os alunos evidenciavam maior envolvimento nas tarefas com jogos comparativamente com o envolvimento apresentado nas restantes tarefas. O estudo realizado permitiu concluir que a utilização de jogos que abordam explicitamente conteúdos matemáticos a serem ensinados em sala de aula aumenta o envolvimento dos alunos e potencia a aprendizagem. Dados das entrevistas dos alunos revelaram que alguns estudantes estavam a desenvolver uma crescente compreensão do efeito da multiplicação e divisão em números decimais. Os resultados do estudo revelaram que os jogos utilizados tiveram um efeito positivo, ajudando os alunos na compreensão dos principais conceitos matemáticos. No entanto, apesar de nos testes de desempenho ter sido evidente um maior entendimento em itens específicos, os benefícios em termos gerais foram insuficientes para se poder reivindicar os jogos como um veículo útil para promover a aprendizagem de matemática. Neste estudo, a investigadora refere, ainda, que na utilização de jogos com intencionalidade pedagógica há necessidade de fazer a ligação entre os conteúdos do jogo e os conceitos aprendidos com o currículo. Apesar de considerar que os professores devem continuar a ser encorajados para a utilização de jogos, alerta para a necessidade de implementar ações específicas que maximizem a utilização dos jogos em sala de aula. A utilização de jogos na sala de aula implica a adequação do nível de jogo, do tempo de jogo e do acompanhamento dado pelo professor.

Numa perspetiva inclusiva, tem vindo a ser desenvolvida uma investigação envolvendo a prática de jogos de tabuleiro por jogadores com baixa visão ou cegueira, tendo sido construídos tabuleiros adaptados para o efeito. Esta investigação tem como objetivo identificar as competências desenvolvidas por estes alunos através da prática de jogos matemáticos (Dias, Palhares & Silva, 2009). Este estudo teve implicações imediatas na participação de alunos com baixa visão ou cegueira no Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, tendo sido elaborados tabuleiros de jogo adaptados para o efeito. Dias (2013) conduziu a investigação com 18 alunos dos três ciclos do Ensino Básico (9 - 17 anos) com baixa visão ou cegueira, utilizando os jogos Semáforo, Konane e Rastros. Os alunos foram distribuídos por três grupos, sendo atribuídos seis alunos a cada jogo, dois com baixa visão moderada, dois com baixa visão severa e dois com cegueira. Estes alunos foram observados ao longo de três anos, com o objetivo de analisar as competências envolvidas nos respetivos jogos, bem como a evolução da destreza no jogo. Os objetivos da investigação consistiam na adaptação de tabuleiros de jogo para serem utilizados por alunos com baixa visão ou cegueira e a identificação de competências matemáticas desenvolvidas por este tipo de alunos ao utilizarem os tabuleiros adaptados. O estudo permitiu verificar o desenvolvimento de competências como a memorização, o raciocínio espacial e a resolução de problemas em alunos com baixa visão e cegueira, com o aumento da prática dos jogos matemáticos envolvidos no estudo. Verificou-se, ainda, que apesar de a deficiência visual afetar a memória a curto prazo das crianças, uma vez que não permite uma identificação do objeto e respetiva localização espacial de forma pormenorizada, as crianças com cegueira atingiram melhores resultados aquando da reprodução das situações no jogo Konane, embora utilizando mais tempo. A disposição das peças na oblíqua revelaram causar maior dificuldade a estes alunos, nomeadamente no Semáforo na identificação de sequências e no Konane na memorização de peças. Neste estudo foi também possível verificar que as partidas têm maior duração e há maior frequência de falhas de antecipação, à medida que o grau de visão diminui. No estudo encontram-se detalhadas todas as etapas inerentes ao processo de validação dos tabuleiros adaptados.

As diferentes investigações apresentadas revelam que o interesse pelos jogos, quer pelo seu potencial no âmbito do desenvolvimento de capacidades, quer pelo seu potencial no âmbito do processo de ensino e aprendizagem, se tem mantido ao longo de décadas. Neste ponto foram destacadas investigações no campo da psicologia e da educação matemática. No entanto, outras áreas, como o desporto, a história e a informática, têm desenvolvido investigações sobre diversos jogos. Os jogos continuam a ser objeto de estudo e revelam-se um campo vasto para a investigação. Há um grande número e variedade de jogos com características distintas, mas que continuam, tal como já o faziam nos primórdios da História humana, a cativar adultos e crianças para o jogo.

4.3. O Jogo e a matemática

A relação entre jogo e matemática pode parecer estranha pela ligação ao lazer do primeiro e ao estudo do segundo. No entanto, as características de alguns jogos propiciaram a investigação, a invenção e análise de problemas, estimularam a curiosidade de matemáticos e levaram também a que fossem considerados um aliado no ensino da matemática. Esta ligação encontra-se presente ao longo da história no interesse revelado por diversos matemáticos na prática e análise de diferentes jogos. Kasner e Newman (2001) referem que ao praticar jogos como os quebra-cabeças, o ser humano aguçou o seu engenho e desenvolveu a sua capacidade criativa. O interesse pela matemática recreativa, e mais precisamente pelos jogos, foi relevante ao ponto de originar um novo ramo da matemática: a teoria dos jogos.

O fascínio de Leibniz pelo jogo está bem presente quando refere que "Não há homens mais inteligentes do que aqueles que são capazes de inventar jogos" (Providência, 2001, p.133). Relaciona, desta forma, a inteligência com a criatividade, dando o devido valor ao processo criativo inerente aos jogos. Esta é provavelmente a referência mais frequentemente utilizada para expressar o interesse de grandes matemáticos pelos jogos. No entanto, muitos outros matemáticos deixaram a sua marca na atenção dedicada a determinados jogos, que não se restringem aos jogos de estratégia, como se poderia pensar.

A teoria das probabilidades terá tido a sua origem num jogo de dados, mais precisamente em questões envolvendo o jogo, colocadas pelo nobre francês Chevalier de Méré a Blaise Pascal, e que promoveram uma longa correspondência entre este último e Pierre de Fermat (Boyer, 2002; Caillois, 1990).

Mais recentemente, a análise de jogos de estratégia conduziu à teoria dos jogos (Neumann & Morgenstern, 1972) com implicações em vários campos como a biologia (Smith, 1982) ou a economia. A teoria dos jogos estuda jogos para dois ou mais jogadores, mas inspirado no trabalho de Neumann, Conway inventa um jogo para zero jogadores, o conhecido Jogo da Vida. O jogo foi popularizado por Martin Gardner e está na origem dos Autómatos Celulares, um novo ramo da matemática (Santos, Neto & Silva, 2007a).

Como referem Kasner e Newman (2001), os matemáticos não se dedicaram à matemática recreativa unicamente por divertimento, mas pela ligação intrínseca entre a matemática e determinadas recreações. Os autores consideram que a investigação neste campo da matemática nasce da mesma vontade de saber, é conduzida pelos mesmos princípios e requer o exercício das mesmas faculdades do que a investigação que conduziu às mais profundas descobertas matemáticas.

4.3.1. O papel do jogo na educação matemática

Usualmente, jogar é considerado como uma atividade relacionada com a diversão e o tempo de lazer. No entanto, isso nem sempre é verdadeiro para todos e depende muito das circunstâncias em que o jogo ocorre. É sabido que, por vezes, jogar faz parte de uma das diferentes atividades que as pessoas têm de desenvolver durante a semana de trabalho e que nem sempre traz felicidade. Para além do esforço físico e/ou intelectual que alguns jogos acarretam, principalmente quando jogados a alto nível, todos os jogadores sofrem quando perdem um jogo, ou quando se apercebem que estão prestes a perdê-lo. No entanto, gostam de jogar precisamente porque não sabem ao certo se vão ganhar ou não. A incerteza sobre o resultado é a própria essência do prazer de jogar. Esta característica motivadora proporcionou a que os jogos passassem a ser vistos como uma potencial ferramenta na educação. Como afirma Caillois (1990), através do prazer proporcionado pelo jogo e da perseverança tudo se torna mais fácil. Pode acrescentar-se que cada jogo tem a particularidade de reforçar e estimular alguma atividade física ou intelectual, o que é um aspeto importante na educação. De facto, jogar nunca foi indiferente para as diferentes civilizações e, ao longo do tempo, o ser humano tem demonstrado interesse pelas diferentes dimensões do jogo (Caillois, 1990; Huizinga, 2003). Aliás, como referem Neto e Silva (2004, p.11), os jogos são "provavelmente os responsáveis pelas primeiras actividades estritamente mentais que o Homem inventou (ou descobriu)".

Segundo Schädler (2007), a apetência pelo jogo é mais evidente na criança, através do qual ela se ‘abre’ ao mundo. Atentos a este facto, os professores devem aproveitar a emotividade gerada pelo jogo para promover as aprendizagens, uma vez que, como afirmam Krulik e Rudnick (1993), as competências adquiridas por/com prazer são mais duradouras, facto que por si só já faz do jogo um bom aliado do ensino. Como referem Baroody e Coslick (1998), se os alunos gostarem de determinada atividade há maior probabilidade de se manterem concentrados nessa atividade e de realizarem aprendizagens efetivas.

Ao longo dos séculos, os jogos de tabuleiro têm constituído a oportunidade para momentos de lazer e intercâmbio social. No entanto, os jogos são também vistos como um agente facilitador do processo de ensino e aprendizagem pelas suas características motivadoras e pelo facto de promoverem o desenvolvimento de capacidades matemáticas (Lopes et al., 1990; Moreira & Oliveira, 2004). A utilização orientada de jogos, no ensino da matemática, é referida como um dos instrumentos facilitadores do desenvolvimento de competências (Palhares, Gomes & Mamede, 2002), como a observação, a reflexão, a argumentação, o raciocínio lógico e a resolução de problemas (Smole, Diniz & Cândido, 2007). Lee (1996) considera que os professores devem selecionar jogos matemáticos que possibilitem o envolvimento dos alunos na resolução de problemas, que se encontram incorporados nos próprios jogos. Desta forma contribuem para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos na procura de soluções estratégicas. Neto e Silva (2006) referem também o valor pedagógico dos bons jogos de tabuleiro na medida em que permitem aos jogadores

> *"aprender a concentrar-se, a controlar o impulso da jogada rápida, a aceitar um modelo de regras fixo (aprender a separar a brincadeira do jogo), a estabelecer planos e a analisar linhas de raciocínio, a abstrair-se da parte física das peças para as considerar entes abstractos regidos por certas regras" (p. 11).*

No âmbito da educação matemática, Bell e Cornelius (1991) propõem investigações envolvendo diversos jogos, apresentando também algumas das investigações matemáticas já realizadas. Os autores consideram que, para além de os jogos constituírem uma fonte motivadora e poderem ser um ponto de partida para a resolução de problemas, promovem a utilização do pensamento lógico. Na mesma linha de pensamento, Smole, Diniz e Cândido (2007) referem que a utilização de jogos permite o desenvolvimento da observação, da reflexão, da argumentação, do raciocínio lógico e da resolução de problemas. Boutin (1999) salienta que o ensino tradicional não deixa muito espaço à criatividade, à imaginação e ao convívio. Acrescenta, ainda, que a utilização de jogos de regras permite estabelecer uma relação de confiança entre professores e alunos e entre alunos, que as atividades escolares tradicionais não favorecem.

A propósito do momento adequado para a introdução dos jogos, Palhares (2004) refere que o jogo pode ser introduzido antes, durante ou depois da abordagem de um determinado conceito ou capacidade matemática, dependendo do objetivo e de acordo com as perspetivas defendidas por diferentes psicólogos. Assim, segundo Sylva, Bruner e Genova, o jogo deverá ser introduzido antes para permitir experimentar combinações e ganhar mapas mentais das situações ou objetos. Na opinião de Vygotsky, a introdução do jogo deverá ser feita durante para desencadear a zona de desenvolvimento próximo. Finalmente, Piaget defende a utilização do jogo a *posteriori* para a consolidação das aprendizagens. Defensores das mais-valias da utilização de jogos na sala de aula, Smole, Diniz e Cândido (2007) consideram importante a elaboração de um plano adequado, onde distinguem as seguintes etapas: a apresentação do jogo; a organização da turma; o tempo; a exploração do jogo. Na exploração do jogo os autores incluem a 'problematização', que consideram poder ser feita durante o jogo, para aferir se as regras foram assimiladas corretamente ou depois do jogo, fazendo análises de jogadas e/ou criando novos jogos a partir do jogo em questão.

O uso de jogos com propósito educacional pode revelar-se muito positivo para os alunos, na medida em que dessa forma desenvolvem capacidades e adquirem conhecimento de uma forma agradável. Mas, esse uso deve ter objetivos claramente definidos e ter subjacente o currículo. Como refere Carlson (1971), quando usados de forma apropriada, juntamente com outros materiais, os jogos podem constituir um bom ponto de partida. No entanto, salienta que os estudos desenvolvidos não têm confirmado que as aprendizagens feitas através do jogo não pudessem ter sido adquiridas pelo método tradicional. Silva e Santos (2011) referem que os jogos não substituem a matemática, nem mesmo para transmitir determinados conteúdos curriculares, devendo, no entanto, ser usados como uma atividade complementar.

Conscientes do potencial dos jogos de estratégia os autores selecionam alguns dos que consideram úteis para o ensino da matemática, referindo algumas relações entre estes jogos e a matemática.

A utilização de jogos ao nível da educação matemática não é de todo novidade das últimas décadas. No séc. XI foi inventado o jogo Rithmomachia, um jogo pedagógico jogado por estudantes de aritmética, astronomia e astrologia, do qual foram publicados diversos livros (Silva, 2007). Guy Beaujouant acrescenta que este jogo era utilizado no ensino da teoria da música (Lhôte, 1994), o que é pertinente na medida em que o ensino da matemática na Idade Média estava ligado ao *quadrívium*, que incluía também os estudos da música, bem como da astronomia, da aritmética e da geometria. Segundo Stigter (2008), tratava-se do único jogo ensinado nas escolas da época medieval, ou seja nos mosteiros, tendo sido jogado também por eruditos. Para além de ser um jogo de números, Rithmomachia é, à semelhança do xadrez, a representação de uma batalha (Parlett, 1999). O jogo terá perdido popularidade nos finais do séc. XVII, altura em que emerge a popularidade do xadrez (Stigter, 2008). No entanto, na opinião de Jean-Marie Lhôte (1994) o Rithmomachia deixou a sua marca como o jogo académico de reflexão que precedeu o xadrez e que merecia ter tido referência no livro dos jogos de Afonso X. Segundo Lhôte, essa ausência poderá dever-se ao facto do Rithmomachia ser um jogo com influências da filosofia pitagórica e a obra de Afonso X versar sobre jogos de influência islâmica. Mais tarde, em 1578, aparece o Metromachia, um jogo geométrico, onde as peças do jogo são figuras geométricas utilizadas numa hierarquia em conformidade com a hierarquia militar, nomeadamente os polígonos representam a infantaria e os sólidos geométricos a cavalaria (Catarino, 2007). Esta ligação dos jogos ao ensino da matemática revela-se com particular interesse na divulgação e incentivo da própria matemática. Como refere Miguel de Guzmán (1990)

> *"the attempts to popularize mathematics through its applications, its history, the biography of the most interesting mathematicians, through the relationships with philosophy or other aspects of the human mind can serve very well to let mathematics be known by many persons. But possibly no other method can convey what is the right spirit of doing mathematics better than a well chosen game" (p. 87-88).*

Não queremos deixar de referir um aspeto que consideramos importante analisar por parte de quem tenha por objetivo utilizar o jogo como instrumento educativo. Primeiramente, importa salientar uma das características do jogo: a liberdade. Carse (1986) afirma que o jogo é livre e ninguém pode jogar se for forçado a jogar "whoever must play, cannot play". Mas essa caraterística do jogo não é necessariamente impeditiva de o utilizar com propósitos educativos. O jogo é livre e por essa razão é necessário reunir as condições para que o aluno queira jogar.

Como refere Caillois (1990, p.193) "quanto mais o jogo se afasta da realidade, maior é o seu valor educativo. E isto porque não segue receitas, fomenta aptidões. (…) As faculdades que ele desenvolve beneficiam certamente desse treino suplementar, que além do mais é livre, intenso, agradável, criativo e protegido." A esse propósito, Silva salienta não só o papel educativo do jogo mas da matemática recreativa em geral, na medida em que consiste numa série de atividades, como jogos, problemas e curiosidades que, não sendo matérias curriculares estruturadas, são enriquecedoras e promovem o gosto pela matemática (Paenza, 2008).

Segundo Delahaye (1998), os jogos são a melhor maneira de praticar e apreciar a matemática. Ao optar pela utilização dos jogos, o professor assume assim um papel importante como agente responsável pela motivação, para que os alunos sintam vontade de jogar os jogos que se consideram úteis ao desenvolvimento da sua aprendizagem. Uma estratégia poderá consistir na escolha do jogo, que deve ir ao encontro do interesse dos alunos e ter o grau de dificuldade adequado. Ninguém gosta de jogar um jogo que está sempre a perder. No entanto, Botturi e Loh (2008) alertam para um aspeto fundamental do jogo, que é a sua capacidade de causar divertimento. Eles referem que as pessoas gostam de jogar porque os jogos são divertidos e se os educadores utilizarem os jogos como meras atividades ou exercícios comprometem, dessa forma, o verdadeiro potencial dos jogos. Segundo Moreira (2004) existe um potencial pedagógico no jogo que deve ser utilizado para fomentar uma postura desafiadora em relação aos problemas matemáticos. O professor pode encontrar no jogo e no tipo de pensamento e comportamentos inerentes à sua prática uma forma de aproximar a criança da matemática.

4.3.2. Implicações no currículo

A ligação entre determinados jogos e a matemática não é claramente uma novidade. Ao longo da história, muitos matemáticos foram grandes entusiastas da análise e prática de jogos. Esse interesse revelou-se importante, promovendo a emergência de um novo ramo da matemática, nomeadamente a teoria dos jogos (Neumann & Morgenstern, 1972). Alguns jogos foram designados de jogos matemáticos, que Muniz (2010) classifica como sendo jogos de matemática recreativa, salientando a ligação entre este tipo de jogos e a matemática. De facto, os jogos e a matemática envolvem a utilização do pensamento abstrato e do raciocínio, em particular determinado tipo de jogos, como é o caso dos jogos matemáticos. Os jogos matemáticos são considerados uma prática benéfica para a matemática por desenvolverem competências úteis, quer à prática dos jogos, quer à matemática, nomeadamente a concentração, a visualização, pensar bem antes de agir, "pesar" as opções, a memorização, o cálculo, entre outras (Carvalho & Santos, 2011). Há jogos em que os jogadores usam as mesmas estratégias que são utilizadas na resolução de problemas (Krulik & Rudnick, 1993), nomeadamente seguindo as etapas do modelo proposto por Pólya, que constitui uma referência importante no âmbito da educação matemática. Na mesma linha de pensamento, Palhares (2004) considera que a resolução de problemas proporcionada pelos jogos de estratégia contribui para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas. Estes aspetos comuns entre a matemática e os jogos devem constituir um ponto de referência para que a utilização dos jogos e da matemática recreativa não fique à margem do currículo ou das orientações curriculares.

Ao longo dos tempos, os professores de matemática têm enfrentado a problemática da falta de sucesso de um grande número de alunos nesta área. A matemática tem sido considerada por muitos alunos como um pesadelo devido, em parte, às dificuldades que esses alunos apresentam neste domínio, mas também à falta de motivação por parte de alguns para aprender matemática. Esta falta de sucesso poderá ter motivos e interpretações diversos que não iremos discutir neste capítulo. No entanto, é sabido que os estudantes aprendem melhor aquilo de que gostam, sendo a motivação um ponto central no âmbito da educação das diferentes áreas do saber.

Todos os alunos, ou quase todos (se quisermos salvaguardar alguma exceção), gostam de jogar e apreciam esta atividade mesmo quando não são sempre bem-sucedidos, embora a preferência pelos diferentes tipos de jogos varie de indivíduo para indivíduo, variando também ao longo das diferentes etapas da vida. A explicação para esta motivação pelos jogos poderá ser inerente às características intrínsecas aos próprios jogos e ao prazer adquirido no ato de jogar. As orientações curriculares no âmbito da educação matemática não têm sido indiferentes a estas características dos jogos. Conscientes do importante papel da motivação no processo de ensino e aprendizagem e do potencial dos jogos como uma fonte motivadora de aprendizagem, apontam para a sua utilização como uma das diferentes atividades em que os alunos devem ser envolvidos, na medida em que constituem recursos facilitadores de aprendizagem (NCTM, 1991, DGIDC, 2007). Os aspetos recreativos da matemática são referidos nos *Principle and Standards for School Mathematics*, da *American National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) como fazendo parte de uma herança cultural que os alunos devem aprender e apreciar (NCTM, 2007). Outro exemplo são os *Standards for Excellence in Teaching Mathematics in Australian Schools*, adotados pela *Australian Association of Mathematics Teachers* (AAMT), nos quais são destacados os objetivos dos excelentes professores, visto que estes professores estão conscientes de uma série de estratégias e técnicas eficazes capazes de promover do gosto pela aprendizagem, bem como de atitudes positivas face à matemática (Bragg, 2006). Hinebaugh (2009) apresenta diversos exemplos da integração de jogos, como o xadrez, as damas ou o *scrabble*, no currículo em escolas de diferentes estados americanos, com o objetivo de desenvolver nos alunos um leque de capacidades consideradas 'educacionais'. Hinebaugh (2009) afirma que os resultados da integração de jogos no currículo têm sido uniformemente positivos, levando a um aumento de diferentes capacidades nos alunos, nomeadamente o pensamento crítico, a resolução de problemas, a comunicação, a análise e o raciocínio. A utilização de jogos levou a melhores resultados nos testes de matemática e ciências, assim como melhorou a performance dos alunos em testes que medem capacidades cognitivas, o pensamento crítico e o pensamento criativo, respetivamente *Test of Cognitive Skills*, *Watson-Glaser Critical Thinking Appraisal* e *Torrance Tests of Creative Thinking*. No entanto, nos últimos anos, as alterações nos documentos curriculares portugueses têm vindo a revelar uma diminuição do foco do papel central dos jogos na educação matemática, nomeadamente com a revogação do Currículo Nacional do Ensino Básico — Competências Essenciais, em 2011 (DEB, 2001). Como refere Pacheco (2000), a política de currículo nem sempre é racional ou fundamentada na investigação. Contudo, no ensino pré-escolar, documentos orientadores para educadores de infância destacam o uso de jogos, nomeadamente jogos de dominós, para promover o desenvolvimento do sentido de número nos alunos deste nível etário (Castro & Rodrigues, 2008). Para algumas orientações educativas, parece haver uma grande diferença entre o facto de a idade dos alunos ser de 5 ou de 6 anos, uma vez que, para os alunos de 6 anos que iniciam a escolaridade obrigatória, os jogos são apenas alvo de uma breve referência nos documentos mais recentes. A razão desta diferença poderá centrar-se no facto de o currículo da educação matemática iniciar no 1.º ano de escolaridade, com alunos de seis anos de idade (podendo excecionalmente ter 5 anos), marcando o início de uma educação mais formal, onde o ato de jogar já não é tão bem aceite. No entanto, a investigação tem revelado mais-valias da utilização de determinados jogos junto de alunos do Ensino Básico (Grando, 2000; Bottino, Ferlino, Ott & Tavella, 2007; Ferreira & Palhares, 2008, Bragg, 2012; Dias, 1013).

Como já foi mencionado anteriormente, a investigação revela que a utilização de determinados jogos de estratégia pode desenvolver capacidades que são utilizadas no processo de aprendizagem da matemática. Assim, os jogos podem constituir um recurso útil no âmbito da educação matemática, a ser utilizado pelos professores de matemática do Ensino Básico, pelos encarregados de educação ou outros intervenientes no processo educativo dos alunos. Como os estudantes permanecem muitas horas na escola, o ambiente escolar será provavelmente um dos locais mais adequados para fomentar e implementar a prática dos jogos que se considerem benéficos para o desenvolvimento dos alunos. Aliás, a prática de jogos de estratégia, nomeadamente do xadrez, faz parte da realidade de algumas escolas, através da implementação de clubes. Porém, a implementação, organização e coordenação desses clubes representa uma carga de trabalho adicional para os professores envolvidos, o que por vezes os desmotiva, dificultando a manutenção desses projetos no tempo. Espera-se que os resultados da investigação possam contribuir também com uma fonte de motivação acrescida. Outra fonte de motivação é certamente o Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos[6], que tem contribuído de forma relevante na promoção dos jogos matemáticos, estimulando a sua prática, como o comprova o grande número de participantes presentes na final do campeonato, ao longo destes anos. As atividades extracurriculares constituem também uma excelente oportunidade para implementar a prática de bons jogos, como os jogos matemáticos ou outros jogos relacionados com a matemática.

Finalmente, embora jogos não substituam nem tenham como objetivo substituir a matemática, alguns jogos podem ser usados em contexto educacional como uma ferramenta para a aprendizagem da matemática. No entanto, deve ficar claro que, ao utilizar os jogos nesse contexto, o foco não é a atividade lúdica propriamente dita mas os conceitos ou capacidades que queremos consolidar ou desenvolver através de um jogo em particular. Se queremos que os alunos joguem um tipo específico de jogos que consideramos poder ajudá-los a desenvolvem capacidades matemáticas, como por exemplo o reconhecimento de padrões, primeiramente é importante motivá-los para esses jogos e possibilitar-lhes a oportunidade para que os possam jogar. Na verdade, o que é realmente importante é a atividade em si e não o lugar onde ela ocorre. Os jogos proporcionam momentos de aprendizagem e desenvolvimento, que se podem revelar importantes para a formação geral do indivíduo, na medida em que se estendem muito para além do campo específico da educação matemática, nomeadamente a oportunidade para conviver e aprender a respeitar os seus adversários; aprender o valor das regras; saber como lidar com a derrota; aprender com os erros; desenvolver novas estratégias de pensamento; desafiar as próprias capacidades com o objetivo de as superar; desenvolver o raciocínio e o pensamento abstrato, bem como a capacidades de resolução de problemas. Como refere Silva (In Paenza, 2008, p.17), a propósito dos problemas que o ensino da matemática tem vindo a atravessar nos últimos tempos,

[6] http://ludicum.org/cnjm

> *"o papel da Matemática Recreativa deve ser enfatizado. Há que ensinar melhor, mas há também que cativar mais, e não somente os alunos do ensino formal. Os aspetos culturais e recreativos da matemática devem ser disseminados por toda a sociedade, estendendo uma teia de ideias e cumplicidades que só poderão conduzir ao aliciamento de muitos para a matemática".*

Assim, o papel da matemática recreativa, onde se incluem os jogos, devia marcar mais presença nos documentos curriculares, nomeadamente salientando a divulgação do seu conhecimento e a promoção da sua prática, independentemente dos contextos. O papel da educação matemática não se encontra confinado às salas de aula, vai muito mais além, extrapolando para a comunidade educativa e para a sociedade em geral.

4.4. Os Jogos matemáticos

Quando apresentamos as diferentes definições de jogo, procuramos fazer uma abordagem do conceito à luz da opinião de diferentes autores, representantes de diferentes áreas do saber, dedicados ao estudo dos jogos. Como já foi referido anteriormente, os estudiosos interessam-se pelo jogo sob diferentes pontos de vista, que refletem muitas vezes os seus interesses de estudo.

No campo da matemática e da educação matemática aparece com alguma frequência a referência a jogos matemáticos. No entanto, apesar do interesse que essas referências revelam tanto nos jogos como na matemática, não é sempre consensual o tipo de jogos que inserem esta categoria. Entre 1956 e 1981, Martin Gardner publicou uma coluna na revista *Scientific American* intitulada jogos matemáticos. Os desafios lançados aos leitores constituíam jogos, charadas, problemas sempre envolvidos no espírito matemático. Martin Gardner (1961; 1990) apelava à criatividade e ao cultivo pelo gosto de resolver desafios matemáticos, tornando-se o percursor do que hoje chamamos matemática recreativa.

Segundo Alves (2001), Lima considera que jogos matemáticos são situações-problema que englobam três aspetos: jogos disputados entre duas ou mais pessoas; quebra-cabeças de montagem ou movimentação de peças; desafios, enigmas, paradoxos. Nesta visão, o conceito de jogos matemáticos não se restringe aos jogos, abarcando também outro tipo de atividades, embora dentro do âmbito da matemática recreativa.

Lee (1996) afirma que o facto de um jogo possuir um conteúdo matemático ou envolver algum processo matemático não significa que seja um jogo matemático. Para o autor, um jogo matemático deve constituir um desafio contra uma ou mais pessoas com um determinado objetivo. Para atingir esse objetivos os jogadores devem fazer um número finito de jogadas, onde cada jogada resulte de uma tomada de decisão. Essa tomada de decisão deve ser regulamentada por regras, as quais devem basear-se em ideias matemáticas. O jogo termina quando o objetivo for atingido.

Bragg (2006) refere que um jogo matemático deve ter as seguintes características: possuir objetivos específicos do conhecimento matemático; ser agradável e com potencialidades para gerar envolvimento; possuir um conjunto definido de regras; implicar um desafio contra um ou mais adversários; cada jogada afeta as jogadas subsequentes do adversário; incluir habilidade e/ou estratégia, não podendo o resultado resultar da sorte; ter um final definido. A autora considera que um jogo com as características acima enunciadas tem potencialidades para promover o envolvimento dos alunos e o desenvolvimento do conhecimento matemático.

O Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, que decorre anualmente desde 2004/2005, apesar de ir modificando alguns dos jogos em competição ao longo de cada ano, tem utilizado jogos de estratégia, que são disputados entre dois jogadores. Esses jogos são jogos sem informação escondida nem elemento sorte, constituindo jogos de pura estratégia ou como referem Neto e Silva (2004) jogos matemáticos ou abstratos. Neste estudo foram utilizados jogos que fazem ou fizeram parte deste campeonato, nomeadamente o Semáforo, o Gatos & Cães, o Pontos e Quadrados e o Ouri. Todos estes jogos se enquadram nos jogos de informação perfeita. No entanto, no caso do Ouri, nem sempre é fácil ter informação de todas as peças (sementes) que se encontram em cada casa do tabuleiro, na medida em que os jogadores podem acumular muitas, caso assim entendam, constituindo até uma das estratégias de jogo. Porém, um jogador experiente, um jogador com boa memória poderá ter esse conhecimento. No estudo é também utilizado um jogo de dominó, que se enquadra nos jogos de informação imperfeita, na medida em que os jogadores não possuem conhecimento das peças atribuídas ao adversário. Por último optou-se por um jogo de palavras que vamos considerar numa categoria à parte. O jogo Syzygies é um jogo de palavras cujas jogadas não são alternadas pelos jogadores. O jogo é individual, mas o resultado entra num ranking competitivo onde vence o jogador que acumula mais pontos em cada jogo. Assim, não parece fazer nenhum sentido definir o tipo de informação. Trata-se de um jogo que entra na categoria dos jogos individuais. O que todos estes jogos têm em comum é o facto de possibilitarem a resolução de problemas, constituídos pelas situações de jogo, sendo o próprio Syzygies lançado sob a forma de um problema.

4.5. Síntese dos fundamentos do jogo

Ao longo dos tópicos deste capítulo tivemos oportunidade de ir revelando diferentes aspetos e diferentes visões acerca do jogo. Estes aspetos e conceções evidenciam a amplitude do conceito e a importância que teve ao longo dos tempos, marcada pelo interesse que grandes pensadores de diferentes áreas do saber lhe dispensaram.

A explicação para a existência e função do jogo é marcada pela opinião de muitos pensadores e pela evolução que o conceito foi apresentando ao longo da história. Para Schiller (1994) o jogo é o princípio e a explicação de toda a arte, através do qual o homem se completa. Spencer (In Saracho & Spodek, 2003) considera que o jogo é uma atividade supérflua associada à evolução das espécies, estando mais presente nos elementos mais novos das espécies de ordem superior pelo facto de estarem dependentes dos progenitores durante mais tempo (Saracho & Spodek, Idem). Patrick refere que o jogo é um padrão de comportamento que advém da necessidade de relaxamento (Courtney, 1989), enquanto para Chateau (1975) o jogo tem o papel de exercitar funções. Uma perspetiva diferente foi apresentada por Freud, onde jogar desempenha um papel importante no desenvolvimento emocional da criança, libertando as emoções negativas e atingindo o equilíbrio emocional (Saracho

& Spodek, Idem). Segundo Saracho e Spodek (idem), para Bateson o jogo e a fantasia são importantes para o desenvolvimento cognitivo. Para Vygotsky (1978), o jogo ajuda a criança a alcançar um novo nível de desenvolvimento, criando a zona de desenvolvimento próximo.

O jogo encontra-se presente em diferentes culturas ao longo da história da humanidade, sendo anterior à própria cultura, como refere Huizinga (2003). O jogo é livre (Caillois, 1990); é definido pelas suas regras (Neumann & Morgenstern, 1972) regras; é fonte de divertimento e de aprendizagem (Botturi & Loh, 2008); é interação e conflito (Avedon & Sutton-Smith, 1971); é formal e informal (Parlett, 1999).

A extensão dos jogos e grande diversidade dificulta a sua classificação. Avedon e Sutton-Smith (1971) apontam para o que consideram ser elementos estruturais para classificar os jogos, enquanto a maioria dos autores, que se dedicam ao estudo dos jogos, opta por selecionar um determinado tipo de jogos e dentro dessa categoria propor uma classificação. Mesmo assim, é claramente assumida a dificuldade em classificar os jogos onde as categorias sejam exclusivas. É comum a referência a que determinados jogos podem pertencer a mais do que uma categoria.

A caraterística lúdica do jogo torna-o motivador e esse facto despertou o interesse do seu uso como recurso educacional em diferentes áreas. Matemáticos importantes na história da matemática interessaram-se pela análise de jogos e de problemas envolvendo esses jogos. Em alguns casos, essa análise origina novos campos da matemática, como a teoria dos jogos, as probabilidades ou o estudo dos grafos. Os jogos matemáticos cativam o interesse de educadores matemáticos pelas suas potencialidades. O recurso adequado de determinados jogos pode ser um grande aliado para que os alunos desenvolvam capacidades úteis também à aprendizagem da matemática. Afinal, como refere João Pedro Neto (2002b), *a game may be a tool for learning how to think properly,* o que vai ao encontro dos objetivos a que se propõe para o ensino da matemática.

CAPÍTULO 5

METODOLOGIA

5.1. Introdução

Neste capítulo apresentam-se os aspetos relacionados com a metodologia utilizada no estudo. Assim, no ponto seguinte aborda-se o paradigma de investigação e estudos a ele associados, nomeadamente o estudo correlacional e o estudo quase-experimental. No ponto 5.3 está delineada a estrutura e organização do estudo. No ponto 5.4 são apresentadas as questões de investigação e correspondentes hipóteses de investigação, que se procuram confirmar com o estudo. No ponto 5.5 encontram-se referidas as variáveis intervenientes nas diferentes análises levadas a cabo no estudo. No ponto 5.6 são apresentados os jogos envolvidos no estudo com as particularidades inerentes a cada jogo, como a história, regras essenciais, estratégias e mais-valias. O ponto 5.7 é dedicado à recolha de dados. Neste ponto são referidos os aspetos pertinentes à recolha de dados, nomeadamente os sujeitos envolvidos no estudo e os instrumentos utilizados. No ponto 5.8 são explanados os procedimentos. No ponto 5.9 são abordados os aspetos pertinentes à análise de dados. Finalmente é apresentada uma síntese do capítulo, fazendo referência às partes essenciais apresentadas em cada um dos pontos.

5.2. Paradigma de investigação

A investigação em educação, como em outras áreas, pode ser conduzida com base em diferentes paradigmas, nomeadamente o positivismo, ou mais recentemente o pós-positivismo, e o construtivismo, encontrando-se o primeiro mais ligado à investigação quantitativa e o segundo mais ligado à investigação qualitativa. Estes paradigmas são historicamente considerados em oposição, apesar de atualmente essa divisão não ser considerada tão estanque como no passado (Muijs, 2004). Algumas investigações optam mesmo por utilizar os dois tipos de investigação (quantitativa e qualitativa) de forma combinada, no que se chama de metodologia mista. A opção pelo tipo de investigação encontra-se muitas vezes interligada com o tipo de questão ou questões de investigação que estão na origem do estudo a desenvolver. Outra das condicionantes pode ser a área de estudo, como veremos de seguida. Como refere Koetting (In Coutinho, 2006), o paradigma quantitativo tem por objetivo controlar e prever os fenómenos, enquanto o qualitativo se interessa pela compreensão desses fenómenos. Assim, se o investigador tem interesse em explicar a realidade educativa para fazer previsões e desenvolver teorias explicativas a opção deve incidir numa abordagem quantitativa ao problema em questão.

A investigação quantitativa foi evoluindo ao longo dos últimos anos através de diferentes paradigmas, evoluindo do empirismo e positivismo para o realismo e pragmatismo. Ou seja, da assunção de que a experiência consiste na única fonte de informação capaz de justificar a natureza do conhecimento, para a visão de que o conhecimento constitui um instrumento que guia a ação e facilita a adaptação à realidade; da ciência baseada na experiência para a ciência como uma das formas de compreender a realidade social (Hartas, 2010a).

Existem fundamentalmente dois tipos de estudos quantitativos, nomeadamente os estudos experimentais e os não experimentais. Nos estudos experimentais incluem-se o experimental puro e o quase-experimental, e nos não experimentais incluem-se os estudos correlacionais, entre outros (Coutinho, 2006). Segundo Hoy (2010), a maior parte da investigação quantitativa realizada em educação é do tipo não experimental. Hoy refere, ainda, que é difícil realizar investigações experimentais puras em educação, na medida em que há variáveis difíceis de controlar e os pais não gostam que os filhos sejam envolvidos em experiências. O autor conclui que é mais fácil conduzir uma investigação experimental num laboratório do que em ambiente social.

Em educação, a investigação quantitativa confronta-se com alguns problemas de controlo de variáveis, na medida em que os sujeitos são analisados no seu contexto, já que se transferidos para um laboratório poderiam sofrer a influência dessa deslocação da realidade e enviesar os resultados, bem como poderiam levantar questões de natureza ética. Assim, há uma série de variáveis que podem influenciar a experiência, como a diferença de professores, a diferença de interação entre pares, a diferença de ambientes familiares, entre outras (Muijs, 2004). No entanto, como referem Cohen e Manion (1989), seja qual for o paradigma subjacente à investigação em educação esta deve ter sempre presente o contexto educativo. Segundo Muijs (2004), é precisamente devido às razões acima enunciadas que a investigação quantitativa em educação utiliza tipicamente o desenho quase-experimental. Johnson e Christensen (2000) consideram que, apesar de apresentarem abordagens diferentes, tanto a investigação quantitativa como a investigação qualitativa podem ser utilizadas para produzir conhecimento útil e importante. Para Newman e Benz (1998) a dicotomia quantitativa/qualitativa não faz muito sentido na medida em que o método de investigação se encontra condicionado pelo tipo de questões de investigação, considerando, ainda, que ambas as estratégias qualitativas e quantitativas se encontram de alguma forma presentes em qualquer estudo. Assim, cabe ao investigador tomar a decisão da metodologia a adotar no estudo, que deverá ter como ponto de partida a natureza das questões de investigação.

Hartas (2010b, p. 255) alerta para alguns cuidados a ter ao utilizar desenhos experimentais em educação, referindo que

> *we should be aware of the strengths and limitations of experimental designs, and balance the need for randomization and causal inferences with the pedagogical nature of an intervention and the particularities of its context.*

Neste estudo optou-se por seguir uma metodologia de natureza quantitativa, onde se enquadram duas investigações complementares, uma de natureza correlacional e outra seguindo o paradigma quase-experimental.

As razões inerentes à opção por um paradigma quantitativo centram-se no facto de não haver muito investimento na investigação educacional envolvendo jogos e, nestes casos, haver referências que apontam para estudos de natureza quantitativa, nomeadamente os estudos correlacionais, que são considerados adequados numa primeira fase, onde se procuram identificar relações entre as variáveis em estudo

(Cohen & Manion, 1989; Tuckman, 2002). Os estudos quase-experimentais revelam-se também adequados na investigação em educação, na medida em que permitem a comparação de grupos intactos (Johnson & Christensen, 2000). Tanto os estudos correlacionais como os quase-experimentais permitem descrever e fazer previsões de uma variável para outra, ou seja conhecendo o comportamento de uma variável prever o comportamento da outra. No entanto, como não se conseguem controlar todas as possíveis variáveis estranhas à investigação e que podem ser responsáveis pela relação identificada, estes estudos não permitem estabelecer relações de causa-efeito (Jackson, 2012). Ou seja, pode existir uma explicação alternativa para a relação entre as variáveis e é precisamente a dificuldade de controlo de todas as variáveis potencialmente responsáveis pela relação identificada que condiciona a formulação de causalidade. Com este estudo pretende-se fazer a identificação de possíveis relações entre as variáveis, que possam servir de fundamento a posteriores estudos e que permitam ajudar a explicar o papel dos jogos na educação matemática.

5.2.1. Investigação correlacional

O estudo dos jogos é um campo onde tem sido feita pouca investigação, nomeadamente no que concerne ao âmbito da educação matemática. Os investigadores que mais se têm debruçado sobre o assunto têm sido, possivelmente, os psicólogos. A psicologia cognitiva debruçou-se maioritariamente sobre o estudo das capacidades dos bons jogadores de xadrez e, mais recentemente, os jogos têm sido investigados sob o ponto de vista da neurociência (Gobet et al., 2004).

Os estudos correlacionais são estudos em que se investigam possíveis relações entre as variáveis sem, no entanto, as manipular, o que os torna úteis em educação, onde nem sempre é possível ou desejável manipular as variáveis. Estes estudos servem, por vezes, de ponto de partida para futuros estudos.

A investigação correlacional descreve a relação existente entre variáveis, mais precisamente o grau de variação entre duas ou mais variáveis quantitativas, utilizando para o efeito coeficientes de correlação. Estes coeficientes variam de +1 (relação positiva perfeita) a -1 (relação negativa perfeita). Uma relação positiva indica que aos maiores (ou menores) scores de uma variável correspondem os maiores (ou menores) scores da outra variável. Ou seja, se uma variável sobe, a outra também sobe ou se uma desce, a outra desce. Uma relação negativa indica que para maiores scores de uma variável correspondem baixos scores de outra variável. Ou seja, se uma sobe, a outra desce. Quando os coeficientes se aproximam de +1 ou de -1 são indicadores de uma forte relação entre as variáveis. Obter uma relação linear perfeita entre duas variáveis é um acontecimento muito raro e provavelmente nunca acontecerá em investigação educacional (Wallen & Fraenkel, 2001). Assim, o facto de o coeficiente ser positivo ou negativo não diz nada acerca da força da relação. Um coeficiente de -0,5 indica uma relação mais forte do que um coeficiente de + 0,03, na medida em que se afasta mais do zero (inexistência de relação). Quanto mais o coeficiente se afasta de zero mais forte é a relação. Os níveis de significância (*p-value*) que acompanham os coeficientes de correlação não indicam a importância da relação. Um coeficiente significante estatisticamente pode, na realidade, traduzir relações com pouco significado ou importância. Por exemplo, uma relação cujo coeficiente é $r = 0{,}01$ e $p < 0{,}001$, apesar de ser altamente significante a variância explicada (R^2) é de apenas 0,01%. O coeficiente de determinação dado por R^2 pode ser interpretado como uma percentagem e mede a variância comum a duas variáveis. Segundo Ary, Jacobs, Sorensen e Razavieh (2010) trata-se de um coeficiente útil para avaliar o tamanho da relação, sendo também útil para mostrar que o sinal do coeficiente não interfere na força da relação, já que $r = 0{,}5$ e $r = -0{,}5$ ambos correspondem a $R^2 = 0{,}25$, ou seja 25%, o que os torna aos dois bons indicadores para fazer previsões.

Atendendo a que este estudo pretende ser um contributo para a compreensão do envolvimento e importância do jogo na educação matemática, pareceu-nos adequado utilizar inicialmente uma investigação correlacional. Esta escolha é fundamentada na literatura por autores como Cohen e Manion (1989), que afirmam que a investigação correlacional em Educação é apropriada quando se pretende descobrir ou clarificar relações entre as variáveis e há pouca ou nenhuma investigação prévia sobre o assunto, na medida em que "*the investigation and its outcomes may then be used as a basis for further research or as a source of additional hypotheses*" (p.161). Esta opinião é corroborada por Tuckman (2002) quando afirma que os estudos correlacionais constituem uma primeira fase de investigação muito útil pois, apesar de não serem adequados para estabelecer uma relação causal, são úteis para determinar a existência de relação entre as variáveis e na sugestão de uma possível causalidade. Ainda a propósito da causalidade, Johnson e Christensen (2000) referem que, nos estudos correlacionais, observar a relação entre duas variáveis não é suficiente para concluir a existência de uma relação de causalidade, sendo necessário o controlo de outras possíveis variáveis que possam afetar a relação entre as variáveis em estudo. Apesar de os estudos correlacionais não permitirem estabelecer relações de causalidade, Jackson (2012) refere que os coeficientes de correlação permitem fazer previsões de uma variável para outra. Se é identificada uma correlação entre duas variáveis, é possível dizer, com alguma precisão, como se manifestará uma variável relativamente à outra.

Neste estudo, é analisada a correlação entre a capacidade de jogar e uma capacidade matemática. A capacidade de jogar é medida através da força de jogo identificada em campeonatos, envolvendo jogos matemáticos e outros jogos, nos quais se inserem os jogos de informação imperfeita e um jogo para um jogador. Os coeficientes de correlação são analisados à luz dos critérios propostos por diferentes autores, como Cohen e Manion (1989), Fraenkel e Wallen (1990) e Christmann e Badgett (2009). A capacidade matemática em análise é a capacidade de identificar padrões numéricos ou geométricos/pictóricos. Esta capacidade é medida através de um teste validado para uma população de alunos do 3.º ao 6.º ano do Ensino Básico (Ferreira & Palhares, 2008). Na análise da capacidade de identificar padrões foram, ainda, tidos em consideração os resultados de uma análise fatorial que identificou a existência de sete fatores por detrás dessa capacidade (Ferreira & Palhares, 2009). Estes fatores constituem grupos de padrões específicos de uma capacidade mais geral, a capacidade de identificar padrões.

5.2.2. Investigação quase-experimental

Na investigação quantitativa a seleção aleatória da amostra é essencial para garantir a validade interna da investigação, pelo que é uma condição essencial aos verdadeiros estudos experimentais. No entanto, quando se investiga em educação nem sempre é possível satisfazer essa condição, por questões de natureza prática ou ética. Assim, o investigador em educação confronta-se com a impossibilidade de um total controlo experimental, nomeadamente no que consigna a seleção dos sujeitos e condições de manipulação (Tuckman, 2002). Por outro lado, se o investigador em educação estiver interessado em investigar turmas com as suas características reais, ou seja sem sofrerem uma alteração intencional de número e forma, então poderá optar pelo desenho quase-experimental. Nesta perspetiva, Muijs (2004) afirma que os desenhos quase-experimentais se revelam adequados quando pretendemos observar o efeito de uma intervenção educativa, tendo vantagem sobre os desenhos experimentais na medida em que ocorrem em contexto educativo natural. Como referem Johnson e Christensen (2000), quanto maior for o controlo exercido sobre as variáveis estranhas menos natural o estudo se torna, o que coloca em causa a sua validade externa. Referem, ainda, que nos estudos experimentais os investigadores por vezes sacrificam a validade externa em prol de uma boa validade interna. Assim, ao longo de processo de investigação há sempre toda uma série de opções que o investigador tem de tomar, sendo essencial que as suas opções sejam conscientes das repercussões a elas inerentes.

O desenho quase-experimental apresenta-se como sendo quase um desenho experimental, onde o investigador estuda o efeito de um determinado tratamento em grupos intactos em vez de fazer a seleção aleatória dos sujeitos da amostra (Mertens, 2009). A não seleção aleatória dos sujeitos é a diferença mais importante, referida por Cohen e Manion (1989), entre a investigação experimental e quase-experimental. Como refere Vazquez Gómez (In Bisquerra, 1989) os estudos quase-experimentais são o máximo grau de controlo pertinente para um estudo em educação.

Segundo Campbell e Stanley (1963), no desenho quase-experimental com pré-teste e pós-teste e grupo de controlo não equivalente, ou seja em que não se procedeu à seleção aleatória de sujeitos, para controlar os efeitos principais da história e maturação, testagem e instrumentação, que constituem ameaças à validade interna dos estudos, é fundamental que os grupos de tratamento e controlo sejam o mais similares possível. Os autores referem, ainda, que apesar de poder haver diferenças entre os grupos nas médias do pré-teste, se forem utilizados grupos intactos e não houver escolha no grupo de tratamento (se este for atribuído aleatoriamente) este tipo de desenho aproxima-se do verdadeiro estudo experimental. No entanto, atendendo a que neste tipo de investigação (quase-experimental) não se controlam todas as fontes de distorção, Johnson e Christensen (2000) alertam para o facto de as inferências causais apenas se poderem retirar quando as explicações rivais se revelam improváveis.

Como pretendíamos trabalhar com grupos intactos, e pelas razões cima defendidas na literatura, optámos pelo desenho quase-experimental, constituído por pré-teste, pós-teste e grupos de controlo e de tratamento não equivalentes. Neste desenho, considerámos que a análise apropriada seria a análise da covariância (ANCOVA), uma vez que pretendíamos estudar o efeito de dois tratamentos diferentes na capacidade de identificar padrões. Segundo Johnson e Christensen (2000) a análise da covariância pode ser usada para comparar grupos relativamente às diferenças numa determinada variável, na medida em que a análise da covariância permite ajustar as diferenças existentes no pré-teste. Neste estudo, a ANCOVA permitiu-nos fazer a comparação entre os resultados obtidos no pós-teste, de cada uma das turmas experimentais, com os resultados obtidos pela turma de controlo, nesse mesmo teste, controlando os efeitos do pré-teste (covariável).

No estudo quase-experimental foram utilizados cinco grupos intactos, que constituíram todos os grupos de turmas do 4.º ano de escolaridade existentes no agrupamento de escolas da investigadora. Desta forma, todos os grupos pertencem à mesma área geográfica, o que nos permite controlar algumas ameaças à validade interna. Estes grupos intactos são então constituídos por cinco turmas, sendo uma turma de controlo e quatro turmas de tratamento. As turmas de tratamento foram divididas por dois jogos: Semáforo e Ouri. Dado não se ter optado pela seleção aleatória dos sujeitos, mas sim pela utilização de grupos intactos, procurou-se limitar a influência de variáveis estranhas à investigação através da atribuição aleatória da turma de controlo e das turmas de tratamento. Uma vez que as turmas de tratamento diferiam, quer no jogo utilizado, quer no tipo de tratamento, também se atribuiu de forma aleatória, quer o jogo, quer o tipo de tratamento. Este procedimento permite-nos controlar algumas ameaças à validade interna. Como referem Cohen e Manion (1989), quando se investiga com grupos não equivalentes, é possível reforçar a equivalência entre os grupos procurando ser o mais equilibrado (se) possível na seleção de amostras da mesma população, para que sejam parecidas, e na seleção aleatória dos tratamentos.

5.3. Organização do estudo

Este estudo envolve a participação de alunos a frequentar o Ensino Básico, do 3.º ao 6.º ano de escolaridade no âmbito de duas investigações de natureza quantitativa, interligadas e sequenciais, respetivamente uma investigação correlacional e uma investigação quase-experimental. O estudo encontra-se estruturado em diferentes fases, às quais estão inerentes os respetivos procedimentos. Numa primeira fase teve lugar a revisão de literatura, a construção dos instrumentos de recolha de dados e os contactos necessários ao acesso aos alunos envolvidos no estudo. Seguidamente deu-se início à segunda fase do estudo que envolveu o processo de recolha de dados inerentes à investigação correlacional. Este processo incluiu a recolha de dados junto dos finalistas do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos e, posteriormente, a organização de campeonatos em escolas do Ensino Básico para a consequente recolha de dados junto dessa amostra de alunos. Nesta fase foram recolhidos dados referentes a jogos de informação perfeita, jogos de informação imperfeita e outro tipo de jogos. No total foram recolhidos dados referentes a cinco jogos, nomeadamente os jogos Pontos e Quadrados, Semáforo, Ouri, Gatos & Cães, Dominó Belga e Syzygies. Após a recolha de dados teve lugar o respetivo tratamento com análise estatística e interpretação dos dados recolhidos. A terceira fase do estudo envolveu uma investigação quase-experimental. Nesta investigação foram utilizados os jogos Semáforo e Ouri e uma bateria de problemas em contexto de jogo, para cada um desses jogos. A investigação quase-experimental envolveu as seguintes etapas:

a) Seleção dos grupos que constituíram a amostra, num total de cinco turmas (uma de controlo e duas para cada jogo);
b) Aplicação do pré-teste a uma amostra de alunos (grupos experimentais e grupo de controlo);
c) Aplicação de problemas em contexto de jogo (Ouri ou Semáforo) a dois grupos experimentais (um grupo para cada jogo);
d) Prática sistemática do jogo (Ouri ou Semáforo) a dois grupos experimentais (um grupo para cada jogo);
e) Aplicação do pós-teste aos grupos experimentais e ao grupo de controlo;
f) Tratamento e análise estatística dos dados recolhidos e interpretação dos resultados obtidos.

A última fase do estudo constituiu a redação da tese.

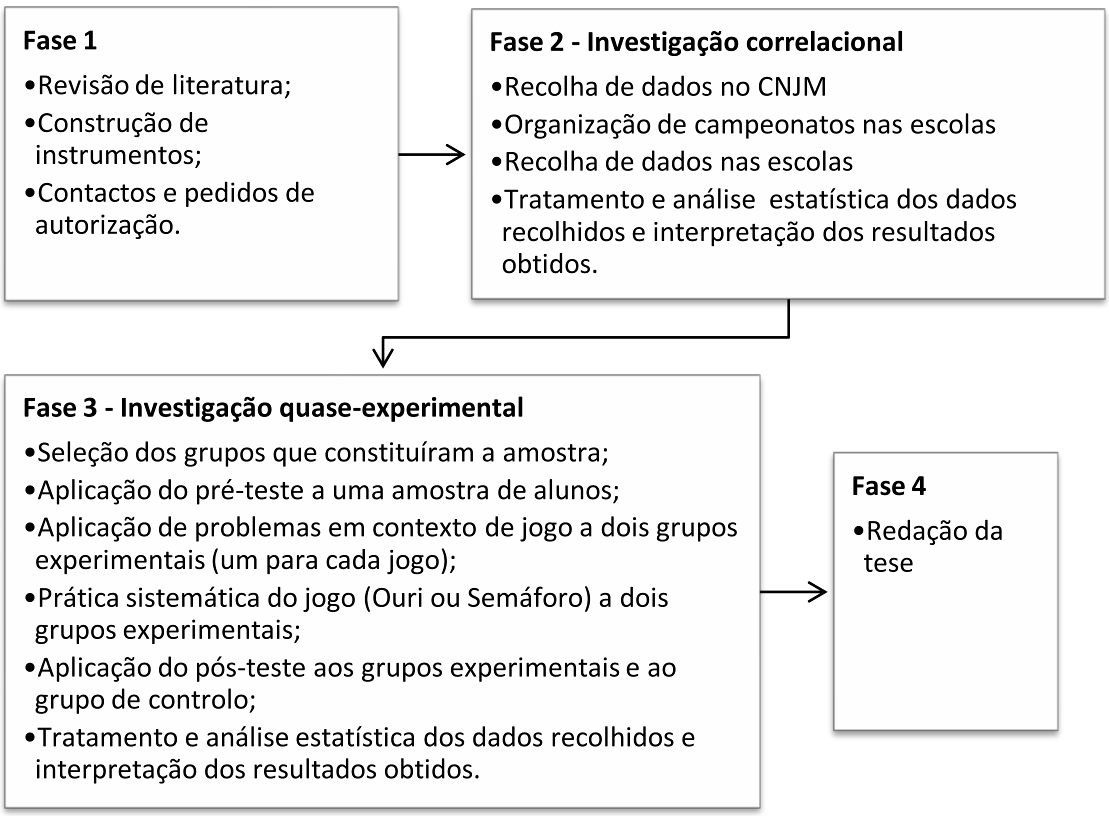


Figura 30. Fases do estudo.

5.4. Hipóteses de investigação

Com a investigação correlacional pretendia verificar-se a existência ou não de relação entre a capacidade de jogar determinado tipo de jogos e a capacidade de identificar padrões, incluindo a discriminação em sete fatores resultante de análise fatorial efetuada ao teste. Outro dos objetivos do estudo consistia em verificar a existência de relação entre a capacidade de jogar e a capacidade de identificar padrões nos grupos dos melhores jogadores e dos piores jogadores. Pretendia-se, ainda, verificar a existência ou não de relação entre a capacidade de jogar jogos matemáticos e os resultados obtidos nas provas de aferição de matemática. Os jogos em análise distinguem-se fundamentalmente em três tipos: jogos matemáticos, que constituem o grupo dos jogos de informação perfeita; jogos de informação imperfeita; jogos para um jogador.

Com a investigação quase-experimental pretendíamos verificar se a) a resolução de problemas em contexto de jogo e b) a prática sistemática de jogos de estratégia, melhoram a capacidade de identificar padrões nos alunos do 4.º ano de escolaridade. Paralelamente, ir-se-ia verificar se existiria diferença entre as duas abordagens mencionadas na capacidade de identificar padrões.

Assim, surgem as seguintes questões de investigação:

1. A capacidade de identificar padrões está relacionada com a capacidade de jogar:
    a) jogos matemáticos?
    b) um jogo de informação imperfeita?
    c) um jogo para um jogador?
2. Existem, para os grupos dos melhores jogadores e dos piores jogadores, relações específicas e diferenciadas entre a capacidade de jogar e a capacidade de identificar padrões?
3. A capacidade de jogar está relacionada com a avaliação escolar a matemática?
4. Existem diferenças na capacidade de identificação de padrões entre a prática sistemática de jogos matemáticos e a resolução de problemas em contexto de jogo?

Estas duas investigações apresentam-se sequenciais e complementares, na medida em consideramos necessário: 1) a análise da correlação entre as variáveis para identificar se existe ou não relação entre as variáveis em jogo; 2) a análise da covariância para verificar se existem diferenças significativas entre a) a resolução de problemas em contexto de jogo e b) a prática sistemática de jogos de estratégia, na capacidade de identificar padrões dos alunos do 4.º ano de escolaridade.

Das questões de investigação acima referidas foram formuladas as seguintes hipóteses de investigação:

a) Existe relação entre a capacidade de jogar jogos de informação perfeita e a capacidade de identificar padrões.
b) Existe relação entre a capacidade de jogar jogos de informação imperfeita e a capacidade de identificar padrões.
c) Existe relação entre a capacidade de jogar jogos para um jogador e a capacidade de identificar padrões.
d) Existem, para os grupos dos melhores jogadores e dos piores jogadores, relações específicas e diferenciadas entre a capacidade de jogar e a capacidade de identificar padrões.
e) Existe relação entre a capacidade de jogar e a avaliação escolar a matemática.
f) Existem diferenças significativas na capacidade de identificar padrões entre a prática sistemática de jogos matemáticos e a resolução de problemas em contexto de jogo.

5.5. Variáveis

Neste estudo pretende-se analisar a relação entre duas variáveis: a capacidade de identificar padrões e a capacidade de jogar determinado tipo de jogos.

A capacidade de identificar padrões é uma das particularidades da capacidade matemática, considerada de grande importância na educação matemática (Steen, 1990; Devlin, 1997; NCTM, 2000; DGIDC, 2007), e foi medida através de um teste construído e validado por Ferreira e Palhares (2008). Este teste mede a habilidade dos alunos a identificar determinado tipo de padrões, nomeadamente padrões numéricos, geométrico/pictóricos, e foi validado para alunos do 3.º ao 6.º ano de escolaridade do ensino português. No teste, quanto maior a cotação, melhor a identificação de padrões.

Uma análise fatorial efetuada ao teste (Ferreira & Palhares, 2009) permitiu a identificação de sete fatores. Assim, a capacidade de identificar padrões integrou outras capacidades, nomeadamente 1) progressões numéricas, 2) padrões de repetição, 3) progressões numéricas e geométricas, 4) padrões envolvendo contagem, 5) padrões envolvendo paridade, 6) padrões envolvendo rotação, 7) padrões envolvendo mais do que uma lei de formação. Estes sete fatores foram igualmente utilizados como sub-variáveis representando capacidades específicas de identificar padrões.

A capacidade de jogar refere-se sempre a um jogo em particular e é medida através da prestação obtida (ranking) nos campeonatos realizados com jogos de informação perfeita (jogos matemáticos), jogos de informação imperfeita e outro tipo de jogos (jogos para um jogador). Neste ranking, nos jogos de informação perfeita (Ouri, Semáforo, Pontos e Quadrados e Gatos & Cães) quanto maior o número, pior o jogador. Nos jogos Dominó Belga e Syzygies o ranking é constituído pelo número total de pontos adquiridos no campeonato, pelo que quanto maior o número, melhor o jogador. Esta diferença deveu-se às particularidades das pontuações destes dois jogos e à opção por utilizar estas pontuações nas análises estatísticas. Uma das consequências desta diferença é visível através dos coeficientes negativos, apresentados pelos jogos de informação perfeita, e nos coeficientes positivos apresentados nos restantes jogos. Este facto deve-se à diferente ou igual direção das variáveis. Os melhores e piores jogadores são medidos através da seleção dos primeiros e últimos lugares do ranking, sofrendo, de igual modo, a influência da diferente ou igual direção entre as variáveis em análise. Para colmatar estas diferenças, da secção onde se apresentam os resultados, será sempre indicado quando houver diferente direção das variáveis, que no caso deste estudo se refletirá em coeficientes negativos.

Outra variável analisada corresponde ao desempenho em matemática, medido através das classificações nas provas de aferição de matemática, quer global, quer nos tópicos Números e Operações, Geometria e Medida, Álgebra e Funções e Organização e Tratamento de Dados. As provas de aferição utilizam testes standardizados, aplicados a todos os alunos, de determinado ano, do ensino português. Neste estudo utilizaram-se os resultados obtidos pelos alunos do 4.º ano, na prova de matemática. A partir de 2013 estes testes deixaram de ser aplicados, passando esses alunos a fazer exame nacional.

Na investigação quase-experimental a variável dependente corresponde ao pós-teste (teste que mede a capacidade de identificar padrões), a variável independente representativa de uma categoria, também designada de fator, corresponde ao grupo e a covariável corresponde ao pré-teste. O fator grupo é representado por grupos distintos: os grupos de tratamento e o grupo de controlo. Os grupos de tratamento constituem, para cada jogo (Ouri e Semáforo) a) um grupo sujeito a resolução de problemas em contexto de jogo; b) um grupo sujeito à prática sistemática de jogo.

5.6. Os jogos

Os jogos utilizados no estudo pertencem a categorias distintas, nomeadamente jogos de informação perfeita, também conhecidos como jogos matemáticos, jogos de informação imperfeita e outro tipo de jogos que não se enquadram nas anteriores.

Os jogos selecionados são maioritariamente jogos utilizados no CNJM, ou seja jogos de informação perfeita. A opção pelos jogos de informação perfeita escolhidos deveu-se ao facto de este tipo de jogos não ter a intervenção de elementos aleatórios, como por exemplo o uso de dados, pelo que o sucesso na sua prática está intimamente ligado às estratégias utilizadas pelos jogadores. Outra razão inerente à opção por este tipo de jogos deveu-se à possibilidade de poder haver maior motivação para a sua aprendizagem e prática, dado a inclusão destes no CNJM. Estes jogos também não requerem material sofisticado, podendo ser facilmente construídos pelos alunos. Os jogos de informação perfeita utilizados neste estudo são o Ouri, o Semáforo, o Pontos e Quadrados e o Gatos & Cães. Destes jogos, o Ouri e o Semáforo foram os que estiveram presentes em quase todas as edições do CNJM, que teve em 2012/2013 a sua nona edição. O Pontos e Quadrados esteve presente nas quatro primeiras edições e o Gatos & Cães, nas três últimas (Tabela 1).

Na categoria de jogos de informação imperfeita foi selecionado o jogo Dominó Belga e representando outro tipo de jogos encontra-se um jogo para um jogador, o jogo de palavras denominado Syzygies.

Tabela 1. Distribuição dos jogos nas edições do CNJM.

Edição	Ouri	P & Q	Semáforo	G & C
CNJM 1	X	X		
CNJM 2	X	X	X	
CNJM 3	X	X	X	
CNJM 4	X	X	X	
CNJM 5	X		X	
CNJM 6	X		X	
CNJM 7	X		X	X
CNJM 8	X		X	X
CNJM 9			X	X

5.6.1. Ouri

O Ouri, também designado Wari, Awari, Awale, Ouril, pertence à família de jogos Mancala. O termo Mancala parece ter derivado do árabe das palavras mangala, mingala ou magala e do verbo naqala, que significa mover, deslocar, transportar de um lado para o outro (Sá, Almiro, Cavaleiro, Reis, Abreu & Zenhas, 2009). Trata-se de um jogo de tabuleiro bastante antigo que tem sido jogado, ao longo de séculos, em diversas partes do globo, como documentam os achados arqueológicos. Segundo de Voogt (1999, p. 104)

> *“mancala boards games show an extensive range of distribution from West Africa to the Caribbean and parts of South America, from Northern to Southern Africa, from South East Asia, to South Asia and the Middle East”.*

O Ouri é um jogo de captura que se encontra presente em quase todo o continente africano, existindo, no entanto, muitas versões do jogo com pequenas variações nas regras, cujo nome vai diferindo de país para país e de tribo para tribo (Silva & Santos, 2011).

O Ouri terá chegado a Portugal através da comunidade Caboverdiana, apresentando maior proliferação a partir de 1968 (Silva, 1994). Em Portugal foram documentados alguns achados arqueológicos com grande semelhança a tabuleiros de jogo Mancala. No entanto, um trabalho recente de Lídia Fernandes (2013) foca os esclarecimentos de Alex de Voogt, que não rejeitando inteiramente a hipótese de esses achados constituírem tabuleiros de jogo, a considera muito pouco plausível, dado ser praticamente impossível jogar naqueles tabuleiros. Assim, parece mais provável que o jogo tenha sido trazido recentemente para o nosso país, como documenta Elísio Santos Silva (1994). O Ouri joga-se num tabuleiro de madeira com doze (2 x 6) concavidades e 48 sementes, que podem ser substituídas por pequenas pedras ou conchas. Por vezes os tabuleiros contêm um reservatório, de cada lado do tabuleiro, para colocar as sementes capturadas. Os tabuleiros de jogo, usualmente simples, podem ser ricamente decorados, como pode ser observado em museus. Segundo Walker (2008) a riqueza dos ornamentos, o tamanho e a qualidade do material distinguiam o estatuto social, estando o jogo reservado a determinado grupo de indivíduos. Apesar de se utilizarem tabuleiros de madeira, também aparecem registos de tabuleiro de pedra ou metais preciosos. No entanto, o tabuleiro também pode facilmente ser escavado na terra ficando, deste modo, a sua prática acessível a todos. Trata-se de um jogo com maior complexidade de regras que o Semáforo. Nas regras do Ouri há uma recorrente referência a casos particulares, como por exemplo os finais de jogo, o que as torna mais difíceis de memorizar. Porém, através da prática do jogo, facilmente se adquirem todas as regras. O jogo inicia com quatro sementes em cada concavidade e tem como objetivo conseguir recolher mais sementes do que o opositor (no mínimo 25). A cada um dos dois jogadores pertencem as seis concavidades do seu lado. Os jogadores jogam alternadamente e, na sua vez, devem recolher as sementes de uma das concavidades do seu campo e distribuí-las, uma a uma, pelas concavidades seguintes, incluindo as do adversário, caso necessário. A distribuição é feita no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Os jogadores capturam sementes, sempre que terminem numa concavidade que fique com duas ou três sementes, recolhendo também as sementes das concavidades imediatamente anteriores que satisfaçam essa condição. Para uma melhor compreensão do jogo, a totalidade das regras é apresentada em anexo (Anexo B). Trata-se de um jogo relacionado com a capacidade de cálculo e com a capacidade de memorizar o número de sementes acumuladas nas concavidades ao longo das jogadas (Silva, 1994). Os jogadores experientes são rápidos, jogando quase simultaneamente, o que leva a concluir que conseguem prever o final da jogada do adversário antes que este termine a sua distribuição. Silva e Santos (2011) referem que o Ouri é um jogo que requer precisão de cálculo aliada à reflexão e à prática. Os autores referem, ainda, que jogar Ouri permite a utilização de raciocínios relacionados com os números, com contagens simples, com estratégias de cálculo mental e com a simetria. Segundo Powell e Temple (In Retschizki & Wicht, 2008) o Ouri tem subjacentes determinadas ideias matemáticas e culturais, como operações aritméticas, técnicas de contagem, pensamento estratégico, tomada de decisões, cooperação, planeamento, competição, entre outras. Segundo Alexander de Voogt (1999), atendendo à grande variabilidade de variantes da família de jogos Mancala, à grande distribuição por diferentes partes do globo e ao facto de as regras do jogo se manterem constantes em grupos de indivíduos, mas alterarem de grupo para grupo e de indivíduo para indivíduo, o estudo desta grande família de jogos pode permitir a compreensão de padrões migratórios desses grupos de indivíduos. Como refere o autor,

> *If identical mancala games are the result of human migration then the track of these mancala games across the world gives a clear indication of migratory patterns of people. In this way it contributes to historical evidence on the human diaspora (Voogt, 1999, p. 109).*

Segundo Silva (1994) existem muitas subtilezas lúdicas na prática do Ouri que só são dominadas pelos bons jogadores e que requerem muita experiência de jogo. Os bons jogadores conseguem fazer a “mentalização do jogo”, ou seja jogar tendo em vista um plano tático para um determinado objetivo futuro, em vez de jogar para um objetivo imediato. O jogo apresenta situações clássicas, como aberturas e finais de jogo. Silva refere, ainda, que é precisamente nos finais de jogo, onde os movimentos são mais rápidos e as jogadas decisivas, que se revelam os bons jogadores. Uma das estratégias referidas por Carvalho e Santos (2007) consiste no armazenamento de um grande número de sementes numa concavidade para utilizar de forma oportuna, considerando ainda que, por vezes, é essencial à vitória o número de movimentos que o jogador pode efetuar no seu campo. Para identificar facilmente a casa onde irá terminar a sementeira, quando se parte de uma casa com 12 ou mais sementes, apresentam a estratégia de subtrair 11 a esse número de sementes, ou múltiplos de 11, quando necessário. Os autores referem ainda análises do jogo em que se observa alguma relação com questões de paridade, nomeadamente o facto de ser necessário um número ímpar de sementes para se atingir uma casa oposta do tabuleiro.

5.6.2. Semáforo

O jogo Semáforo (Traffic Lights, na versão original) é um jogo de tabuleiro inventado por Alan Parr em 1998 (Neto & Silva, 2004). O Semáforo é um jogo de estratégia que se joga num tabuleiro retangular, dividido em 9 (3 x 3) ou 12 casas iguais (3 x 4) com peças amarelas, verdes e vermelhas. No CNJM utiliza-se a versão do tabuleiro 3 x 4. As peças devem ser pelo menos 8 de cada cor. As regras são poucas e simples. Dois jogadores jogam alternadamente e, em cada jogada, o jogador deve fazer uma das seguintes ações: a) colocar uma peça verde numa casa vazia; b) substituir uma peça verde do tabuleiro por uma peça amarela; c) substituir uma peça amarela do tabuleiro por uma peça vermelha. O objetivo do jogo é ser o primeiro a conseguir três peças da mesma cor em linha, na horizontal, vertical ou diagonal.

Segundo Silva e Santos (2011) o Semáforo pertence à categoria dos jogos de alinhamentos, tal como o Jogo do Galo, mas é mais complexo. Trata-se de um jogo com regras simples e rápido de jogar, duas características que o tornam favorável para o ensino a crianças. No entanto, é um jogo que requer alguma precisão de cálculo, na medida em que, como referem Neto e Silva (2004), a vitória depende do número de movimentos disponíveis a cada jogador até se conseguir formar uma posição que dê três em linha. O primeiro jogador que conseguir entender qual a sequência de movimentos que conduz a essa posição será o vencedor. No entanto, os autores referem, ainda, que não é fácil determinar esse número numa fase inicial do jogo, sendo necessário manter as opções abertas até que a sequência de jogadas que conduzem à vitória se tornem evidentes. Segundo Carvalho e Santos (2007) existem estratégias que permitem facilitar o cálculo dos movimentos disponíveis para alcançar a vitória, nomeadamente a procura das casas interditas ou temporariamente interditas. Por vezes, é precisamente o momento de decisão de manter ou não uma casa temporariamente interdita que dita o resultado futuro do jogo. Assim, o uso de estratégias aliadas ao cálculo de movimentos constituem duas condições essenciais para ganhar o jogo.

No tabuleiro 3 x 3 existe uma estratégia vencedora para o 1.º jogador. Este joga no centro do tabuleiro, obrigando o adversário a trocar essa peça verde por uma amarela (se jogar uma peça verde perde mais rapidamente). O 1.º jogador troca a peça amarela por uma vermelha e passa a jogar simetricamente em relação às jogadas do 2.º jogador (Neto & Silva, 2004).

O jogo Semáforo é um jogo interessante para a educação matemática, dado exigir concentração, precisão de cálculo de movimentos, nomeadamente na contagem das jogadas disponíveis, e estratégias relacionadas com a simetria (Silva & Santos, 2011).

5.6.3. Pontos e Quadrados

Pontos e Quadrados (Dots-and-Boxes, na versão inglesa) é um jogo popular, que se pode jogar com papel e lápis. Joga-se numa grelha quadrada formada por pontos, podendo utilizar-se os pontos de interseções numa quadrícula. A versão do CNJM utilizava tabuleiros de 6 x 6 pontos, o que permitia construir um total de 25 quadrados. Desta forma o empate não é possível. Trata-se de um jogo para dois jogadores que, alternadamente, unem dois pontos consecutivos do tabuleiro, na horizontal ou na vertical. Sempre que um jogador completa um quadrado (unitário) coloca a inicial do seu nome no interior e é obrigado a voltar a jogar. No entanto, o jogador não é obrigado a completar um quadrado, mesmo que esta possibilidade esteja disponível. O jogo termina quando todos os quadrados tiverem sido fechados. O objetivo do jogo consiste em conseguir o maior número de quadrados identificados com a inicial do seu nome.

Apesar de ser um jogo fácil de aprender, pode ser jogado a diferentes níveis de dificuldade, como muito bem documenta Berlekamp (2000). O jogo, que inicialmente parece simples, vai adquirindo maior nível de complexidade à medida que o jogador vai adquirindo mestria e conquistando algumas estratégias fundamentais do jogo. Berlekamp revela a importância da observação de determinados padrões no jogo, nomeadamente as cadeias longas que se formam e o número de quadrados existentes nessas cadeias. É importante para o primeiro jogador que a soma do número de pontos iniciais com o número de cadeias longas seja par, enquanto para o segundo jogador essa soma deverá ser ímpar. Assim, é muito importante o jogador verificar se o número de cadeias longas é par ou ímpar para poder manter o controlo do jogo. Berlekamp considera que uma cadeia é longa quando tem três ou mais quadrados. Uma das formas de controlar o jogo é feita através de uma estratégia designada de *doublecrossed move*, que consiste em sacrificar dois quadrados de uma cadeia longa (deixa uma cadeia de dois quadrados em posição de ser fechada pelo adversário). Segundo Carvalho e Santos (2007), esta é uma das primeiras estratégias que o jogador deve aprender. Trata-se de uma estratégia que pode funcionar como defesa ou ataque e permite controlar o jogo ou, pelo menos o final de jogo. Para um conhecimento de estratégias a um nível mais avançado recomendamos a leitura de *The Dots-and-Boxes Game: Sophisticated Child's Play*, de Berlekamp (2000).

O Pontos e Quadrados é um bom jogo para promover nos jogadores a aprendizagem de que é essencial ponderar sobre as consequências das jogadas, na medida em que as estratégias mais básicas nem sempre são as melhores (Silva & Santos, 2011). Como já foi referido, completar todos os quadrados em todas as oportunidades e evitar que o adversário complete quadrados pode não ser a melhor estratégia, sendo preferível sacrificar alguns quadrados para, posteriormente, ganhar o controlo do jogo.

5.6.4. Gatos & Cães

O jogo Gatos & Cães foi inventado por Simon Norton, na década de 70, com o nome Snort, sendo posteriormente reinventado por Chris Huntoon, em 2001 (Neto, 2002a). À semelhança do que acontece com outras descobertas matemáticas, que parecem ter ocorrido em diferentes e distantes locais, por estudiosos distintos, como por exemplo a invenção do cálculo diferencial e integral realizada por Newton e Leibniz de forma independente (Boyer, 2002), na invenção dos jogos esse facto também ocorre, e provavelmente é o que se terá passado com este jogo. O Gatos & Cães joga-se num tabuleiro quadrado com 64 casas (8 x 8). Um jogador corresponde aos Gatos e o adversário aos Cães. A cada jogador são atribuídas 28 peças, usualmente negras para os Gatos e brancas para os Cães (como no CNJM), podendo também ser usadas peças com a configuração dos respetivos animais. Os jogadores jogam alternadamente, colocando uma peça numa casa vazia do tabuleiro. O objetivo do jogo é conseguir ser o último a jogar. Ou seja, o jogador que não conseguir jogar perde. Os Gatos são os primeiros a iniciar o jogo e a primeira peça deve ser colocada numa das quatro casas centrais do tabuleiro. Na sua primeira jogada, os Cães devem colocar uma peça fora dessa zona central. As peças não podem ser colocadas numa casa, cuja casa adjacente, quer na horizontal, quer na vertical contenha uma peça adversária. Um Gato não pode ser colocado ao lado de um Cão e *vice-versa*.

5.6.5. Dominó Belga

Para a categoria de jogos de informação imperfeita optou-se por um jogo de dominós, conhecido em Portugal como Dominó Belga. Este jogo utiliza o conjunto de 28 pedras (doble de seis) que é o mais usual em Portugal. Das 28 pedras resultam 56 quadrados marcados de zero a seis, totalizando 8 brancos, 8 ases (uma pinta), 8 duques (duas pintas), 8 ternos (três pintas), 8 quadras ou quadernas (quatro pintas), 8 quinas (cinco pintas) e 8 senas (seis pintas). Quando os dois quadrados duma pedra têm o mesmo número de pintas, esta designa-se doble ou carrão ou, ainda, parelha. As combinações das pedras são sempre diferentes pelo que não existem duas pedras iguais. Os 28 dominós totalizam 168 pontos.

O Dominó Belga é extremamente semelhante ao Muggins, ao All Fives ou à versão francesa Cinq Partout (Clidière, 1968). Este jogo é jogado por 2, 3 ou 4 jogadores embora seja mais corrente o jogo com quatro jogadores. As regras são as usuais ao Dominó Tradicional (juntam-se os quadrados com igual número de pintas) com a diferença de que, após cada jogada, contam-se os pontos dos quadrados que ficam nas extremidades do jogo e pontuam caso formem múltiplos de cinco. O objetivo do jogo é obter o maior número possível de pontos e ganhar a partida. Para isso jogam-se os jogos necessários. Normalmente, uma partida é constituída por 500 pontos. A pontuação pode marcar-se através de "X", ao qual corresponde 10 pontos. No caso de o jogo ser fechado (nenhum jogador consegue jogar e foram esgotadas as pedras do baralho), o jogador que tiver menos pontos em mão ganha a soma de todos os pontos das pedras dos seus adversários, arredondando o total para o múltiplo de cinco mais próximo (as regras detalhadas encontram-se no Anexo C).

Os jogos de dominó são jogos de salão de raiz popular, cujo nome deriva da cor das suas pedras serem ordinariamente pintadas de negro ou cor muito escura e por dominó também se designar uma cógula ou capuz de origem monástica, usada antigamente em algumas regiões (Verbo, 1976). Dominó é também o nome dado às pedras do jogo. Como refere Moulidars (1888) na sua enciclopédia, nestes jogos o cálculo consegue, em certa medida, corrigir os efeitos da sorte. O autor refere, ainda uma caraterística dos jogos de dominó, que consiste na possibilidade de se conseguir formar uma linha fechada, casando (juntando quadrados com o mesmo número de pintas) todas as pedras do jogo, seja ele constituído por 28 (doble de seis) dominós ou 91 (doble de doze).

O dominó era um jogo muito popular entre alguns povos da Antiguidade, como gregos, hebreus e chineses (Pedrazzani, 1984). Apesar de ainda não se saber ao certo a sua origem, há historiadores que supõem tratar-se de um jogo com origem na China. Segundo Fisher (1990), o princípio da representação dos números por pontos no dominó, parece ter precedido em vários séculos a invenção dos numerais, como revela um manuscrito Chinês datado de 2200 a.c. que mostra números de 1 a 9, em pontos, arranjados em quadrados mágicos. As primeiras referências deste jogo na Europa surgem na Itália, onde terá sido introduzido por mercadores, no século XVIII, e de onde terá passado para a França, Espanha (Kelley, 1999; Sanz, 2000) e, posteriormente, chegado a Portugal.

5.6.6. Syzygies

Para a última categoria utilizou-se um jogo de palavras para um jogador. Os jogos e puzzles de palavras encontram-se muito presentes nos livros de matemática recreativa, provavelmente devido ao facto das palavras serem constituídas por uma combinação de letras ligadas entre si por regras de sintaxe, tendo assim semelhanças com a teoria combinatória de números (Gardner, 1990). O raciocínio lógico é também uma presença nestes jogos, bem como o conceito de simetria associado aos palíndromos.

O jogo escolhido é o Syzygies e, apesar de ser jogado individualmente, os jogadores competiram num campeonato. Na classificação dos jogos aparecem referências aos jogos para um jogador, como na classificação proposta por Murry (1952), os quais se inserem igualmente na definição de jogo proposta por Whitehill (2009, p. 55), que define jogo como "a form of play, in which players compete, each trying to emerge winner *according to specific set of rules and a predeterminated end"*. No campeonato organizado para este jogo, os jogadores acumulavam a pontuação dos Problema-Syzygy que resolviam individualmente.

O jogo Syzygies foi inventado pelo matemático Charles Lutwidge Dodgson em 1879 (Wakeling, 1995). Lewis Carroll, o pseudónimo pelo qual é mais conhecido, para além de ter escrito livros famosos, como *Alice no país das Maravilhas* e *Alice do outro lado do espelho*, bem como livros académicos de matemática, inventou uma grande variedade de jogos. Lewis Carroll gostava de brincar com as palavras e com o duplo sentido que algumas palavras podem conter, tendo um sentido de humor muito particular. O facto de algumas palavras permitirem uma dupla interpretação permite aliar o sentido de humor ao raciocínio lógico e ao jogo combinatório, podendo resultar em recreações de interesse particular. Como refere John Allen Paulos (1988, p.110) o sentido de humor muito presente nos matemáticos é

> "…um sentido de humor muito característico, resultante sem dúvida da sua prática profissional. Na prática, têm a tendência para tomar as expressões

> literalmente, e esta interpretação literal é muitas vezes incongruente com a comummente aceite, pelo que se torna cómica. Os matemáticos adoram as reduções ao absurdo, prática lógica que consiste em levar qualquer premissa ao extremo, e deliciam-se ainda com os vários aspectos do jogo combinatório de palavras."

O jogo Syzygies parece ter surgido com base num outro jogo de palavras, o Doublets, também inventado por Lewis Carroll e que teve muito sucesso na época com a sua publicação na revista Vanity Fair de março de 1879 a abril de 1881 (Wakeling, 1992).

O objetivo do jogo Syzygies consiste em ligar duas palavras, previamente dadas, seguindo um conjunto de definições e regras, que foram divulgadas por Wakeling (1995). Essas palavras iniciais são fornecidas através de uma frase denominada Problema-Syzygy, onde está presente o característico sentido de humor de Lewis Carroll, como por exemplo "Introduce 'Walrus' to 'Carpenter' " ou "Lay 'knife' by 'fork'". Na nossa versão portuguesa procurou imitar-se, dentro do possível, o humor de Lewis Carroll com problemas como "Leva a minhoca ao peixe" ou "Torna o quadrado perfeito" A ligação entre essas duas palavras dadas é feita através de novas palavras, chamadas elos, que partilhem uma ou mais letras. Quando duas palavras contêm o mesmo conjunto de uma ou mais letras consecutivas, uma cópia desse conjunto, colocada entre parêntesis entre duas palavras, é chamado um 'Syzygy'. Um conjunto de quatro ou mais palavras, com Syzygy entre cada duas, é chamado uma 'Cadeia'. Quando uma letra numa cadeia, não esteja emparelhada a alguma outra, diz-se um desperdício. No jogo há regras para a formação das cadeias e regras para a atribuição da pontuação, com recomendações, interdições e penalizações. Na pontuação são contabilizados os elos, os Syzygies e os desperdícios, de acordo com as respetivas regras. Dado a complexidade das regras de jogo, estas serão apresentadas em anexo (Anexo D). Para facilitar a pontuação do jogo Lewis Carroll apresenta a seguinte expressão:

Nessa expressão as variáveis têm a seguinte correspondência:

a = maior número de letras num syzygy final;

b = menor número de letras num syzygy final;

m = menor número de letras num syzygy;

k = número de cadeias;

w = número de desperdícios.

Lewis Carroll contribuiu com o *puzzle* para a revista *The Lady,* em 1891, tendo, dois anos mais tarde, publicado o Syzygies num folheto juntamente com outro jogo a que chamou Lanrick (Wakeling, 1995). Um artigo publicado pela revista *The lady*, em 14 de dezembro de 2012, revela alguns pormenores sobre a forma como Lewis Carroll respondia aos participantes na competição do jogo Syzygies, nomeadamente uma resposta em verso, e alguns problemas colocados pela interpretação das regras, bem como persistência em manter a sua interpretação como sendo a final.

5.7. Recolha de dados

Neste ponto serão apresentados os aspetos fundamentais inerentes à fase de recolha de dados, nomeadamente no que respeita aos sujeitos envolvidos no estudo e aos instrumentos de recolha de dados.

5.7.1. Os sujeitos

Como já foi referido, nos estudos em educação, razões de natureza ética ou prática levam a que não se opte pela seleção aleatória dos sujeitos. Assim, neste estudo não se utilizou a seleção aleatória dos sujeitos, optando-se por investigar maioritariamente grupos intactos. No entanto, sempre que possível, procurou-se eliminar a influência de variáveis estranhas, que pudessem interferir na investigação. Os sujeitos participantes no estudo são alunos do Ensino Básico português a frequentar o 1.º ou o 2.º ciclo. A seleção fez-se de acordo com a participação na final do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos (CNJM) e, posteriormente, em escolas da área de residência da investigadora.

A recolha de dados fez-se inicialmente de forma exploratória junto 43 alunos dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico, finalistas do CNJM, no fim da sua participação no campeonato. Posteriormente, foram organizados campeonatos para os diferentes jogos envolvidos no estudo, nomeadamente o Ouri, o Semáforo, o Pontos e Quadrados, o Gatos & Cães, o Dominó Belga e o Syzygies.

O Ouri envolveu 9 alunos do 2.º ciclo do Ensino Básico finalistas do CNJM, e alunos do 1.º ciclo do Ensino Básico, dos 3.º e 4.º anos de escolaridade, participantes em três campeonatos organizados nas escolas, num total de 213 alunos envolvidos. Ao todo este jogo envolveu a participação de 222 alunos. O Semáforo envolveu 22 alunos do Ensino Básico finalistas do CNJM, dos quais 10 pertenciam ao 1.º ciclo e 12 ao 2.º ciclo. Posteriormente, nos campeonatos organizados nas escolas participaram 221 alunos dos 3.º e 4.º anos de escolaridade, perfazendo uma totalidade de 243 alunos participantes neste jogo. O jogo Pontos e Quadrados envolveu apenas alunos do 1.º ciclo do Ensino Básico, nomeadamente 7 alunos finalistas do CNJM e 189 alunos nos campeonatos das escolas. No total foram envolvidos, neste jogo, 196 alunos dos 3.º e 4.º anos. No jogo Gatos & Cães a recolha de dados foi efetuada num campeonato realizado numa escola, onde participaram 31 alunos do 4.º ano de escolaridade. No jogo Dominó Belga participaram alunos dos 3.º e 4.º anos de escolaridade, respetivamente 23 e 18 alunos, realizando-se dois campeonatos com um total de 41 alunos. Finalmente, o Syzygies envolveu alunos dos 1.º e 2.º ciclos, respetivamente 18 alunos do 4.º ano e 26 alunos do 5.º ano. Para este jogo realizaram-se dois campeonatos, um para cada nível de ensino, que envolveram um total de 44 alunos.

No estudo quase-experimental foram utilizadas cinco turmas do 4.º ano de escolaridade de um agrupamento de escolas do ensino público português, que constituíram uma amostra de 120 alunos. As turmas foram selecionadas aleatoriamente entre as turmas de 4.º ano existentes nesse agrupamento, de entre as turmas constituídas apenas por alunos do 4.º ano. Também de forma aleatória, considerou-se uma das turmas como turma de controlo e as restantes constituíram as turmas experimentais. Estas turmas experimentais foram divididas em dois grupos. A um dos grupos constituído por duas das turmas foi atribuído aleatoriamente o jogo Semáforo e ao outro grupo, constituído pelas duas turmas restantes, foi atribuído o jogo Ouri. Em cada um dos grupos experimentais as turmas foram sujeitas a tratamentos distintos: a) resolução de problemas em contexto de jogo (Semáforo ou Ouri); b) prática sistemática do jogo (Semáforo ou Ouri). Este tratamento foi também atribuído de forma aleatória. Assim, para cada um dos jogos estávamos perante um desenho de três grupos não equivalentes sujeitos a um pré-teste e um pós-teste, sendo dois deles alvo de aplicação experimental. O pré-teste e o pós-teste correspondem ao mesmo teste, apenas aplicado em momentos diferentes. Para o grupo cujo tratamento era a resolução de problemas foi produzida uma série de 20 problemas, baseados nos problemas produzidos por Alda Carvalho e Carlos Santos (2007) no âmbito do CNJM.

5.7.2. Os instrumentos de recolha de dados

Como instrumentos de recolha de dados, neste estudo utilizou-se um teste que mede a capacidade de identificar padrões e problemas em contexto de jogo para os jogos Syzygies, Ouri e Semáforo.

5.7.2.1. O teste

Como já foi referido anteriormente, o teste foi construído e validado no âmbito de uma investigação correlacional conduzida por Ferreira e Palhares (2008). Trata-se de um teste constituído por 24 questões (Anexo A), das quais 12 envolvendo a identificação de padrões geométricos/pictóricos e 12 envolvendo a identificação de padrões numéricos. Estas questões têm subjacente a seguinte estrutura: a) identificar o elemento seguinte de determinado padrão; b) identificar o elemento que não se enquadra no padrão; c) produzir o elemento seguinte, ou os elementos em falta, de determinado padrão. A elaboração das questões fundamentou-se em questões semelhantes às observadas noutros autores, nomeadamente nas colocadas por Krutetskii (1976), bem como nas conclusões do estudo de Krutetskii, que apontam para a existência de três tipos de abordagem por parte dos alunos: a) predominantemente lógico-verbal ou analítica; b) visual-pictórica ou geométrica e c) harmónica (que combina as duas anteriores). Os critérios de correção foram elaborados de acordo com os princípios referidos por Charles, Lester e O'Daffer (1992), em particular no ponto "*Analityc Scoring Scale*" (p. 30), fazendo uma analogia com o teste do estudo. A validação seguiu todos os cuidados necessários, nomeadamente a validação por um júri e a medição da consistência interna do teste. Para esse efeito foi utilizado o Alpha de Cronbach, uma vez que é referido como uma das medidas mais usadas para medir a consistência interna (Pestana & Gageiro, 2000). O Alpha de Cronbach revelou um coeficiente de 0,76, superior ao nível mínimo estabelecido de 0,70 (Fraenkel & Wallen, 1990). Posteriormente, uma análise fatorial realizada a uma amostra de mais de 600 testes revelou a existência de sete fatores, implícitos na capacidade de identificar padrões. Da análise desses fatores surgiu a seguinte interpretação, que corresponde, respetivamente, à ordem de cada um dos fatores, e exprime padrões que envolvem: 1) progressões numéricas; 2) repetição de três termos: ABC ABC; 3) progressões numéricas e geométricas; 4) contagens; 5) números pares e ímpares; 6) rotação; 7) mais do que uma lei de formação (Ferreira e Palhares, 2009). Segundo Gorsuch (1983), uma das finalidades da análise fatorial é minimizar o número de variáveis enquanto se maximiza a quantidade de informação a ser usada em investigação posterior. O conjunto das variáveis resultantes da análise fatorial pode ser usado como representativo dos constructos subjacentes ao conjunto inicial de variáveis. O conjunto de variáveis identificado através da análise fatorial permitiu a realização de análises entre a capacidade de identificar os padrões que constituíram essas variáveis e jogar os jogos envolvidos no estudo, constituindo uma mais-valia ao estudo em geral.

5.7.2.2. Os problemas

Para além do teste que mede a capacidade de identificar padrões neste estudo foram utilizados ainda os seguintes instrumentos:

a) uma bateria de problemas para o jogo Syzygies;

b) uma bateria de problemas em contexto de jogo de Ouri (Anexo E);

c) uma bateria de problemas em contexto de jogo de Semáforo (Anexo F).

No jogo Syzygies, não se conhecia uma versão portuguesa para os problemas colocados por Lewis Carroll e a tradução não parecia muito adequada. Lewis Carroll tinha a particularidade de jogar com o duplo sentido das palavras, num sentido de humor muito particular e subtil. Ao inventar os problemas utilizados no estudo procurou-se ir ao encontro do humor praticado por Lewis Carroll, muito embora se reconheça a dificuldade de igualar um grande mestre. As duas turmas envolvidas neste jogo resolveram um máximo de 13 problemas, onde as palavras a utilizar no jogo se encontravam devidamente sinalizadas (Tabela 2).

Tabela 2.Problemas para o jogo Syzygies

Problema- Syzygy
Leva o <u>cavalo</u> até ao <u>campo</u>
Como o <u>veado</u> fica <u>cansado</u>
Leva o <u>gato</u> até à <u>ratazana</u>
Chega o <u>castiçal</u> ao <u>telefone</u>
Com a <u>escada</u> vai ao <u>telhado</u>
Leva a <u>minhoca</u> ao <u>peixe</u>
Como se faz <u>pudim</u> de <u>laranja</u>
Liga a <u>casa</u> ao <u>dinheiro</u>
Vai da <u>aresta</u> ao <u>vértice</u>
Põe o <u>quadrado</u> <u>perfeito</u>
Do <u>crivo</u> tira o <u>primo</u>
Torna o <u>espaço</u> <u>plano</u>
Chega ao <u>número</u> de <u>ouro</u>

Na elaboração dos problema-Syzygy procurou-se criar situações com diferentes níveis de dificuldade, utilizar algumas palavras com mais de sete letras, mas utilizando preferencialmente palavras da área vocabular dos alunos. Apenas duas palavras suscitaram necessidade de explicação, nomeadamente as palavras castiçal e crivo.

Os problemas em contexto de jogo foram inventados com base nos problemas produzidos por Alda Carvalho e Carlos Santos (2007) no âmbito do CNJM (Figuras 31 e 32). Foi produzida uma bateria de 20 problemas para o jogo Semáforo e uma bateria de 15 problemas para o jogo Ouri. Produziram-se mais problemas para o Semáforo dado ser um jogo mais rápido e, por essa razão, prever-se que os alunos poderiam resolver os problemas em menos tempo que no caso dos problemas de Ouri. O objetivo consistia em envolver os alunos na resolução de problemas em contexto de jogo, semanalmente, durante 45 minutos.

Imagina que estavas a jogar com um teu amigo a partir da situação abaixo representada.
Qual preferias, ser o primeiro ou o segundo a retomar o jogo?

Explica como pensaste.

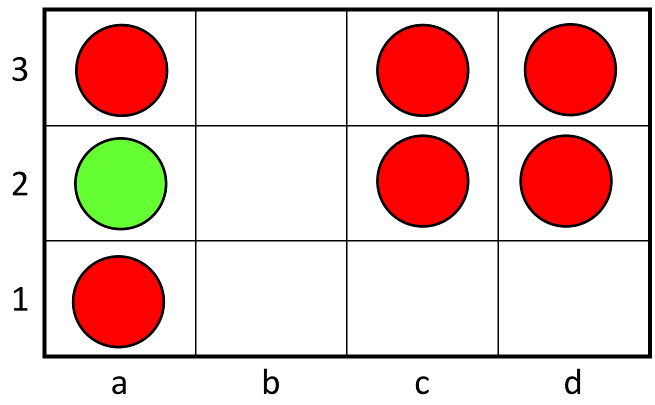


Figura 31. Problema n.º 6 de Semáforo.

No grupo atribuído ao Semáforo os alunos resolveram um total de 14 situações problema em contexto de jogo. Os problemas levantavam questões relacionadas com situações de jogo distintas, envolvendo diferentes tipos de abordagem ao jogo, nomeadamente:

a) Como deverá jogar, determinado jogador, para ganhar;
b) Identificar as jogadas possíveis;
c) Identificar casas onde o jogador pode mas não deve jogar;
d) Expressar a opinião acerca de afirmações produzidas acerca da situação de jogo;
e) Expressar a opinião acerca de afirmações produzidas acerca de possíveis jogadas.

No grupo atribuído ao Ouri os alunos resolveram um total de 13 situações problema em contexto de Ouri, apenas menos uma situação do que as propostas para o Semáforo. Estes problemas levantavam questões relacionadas com situações de jogo, envolvendo diferentes tipos de abordagem ao jogo, como por exemplo:

a) Como deverá jogar, determinado jogador, para capturar sementes;
b) Como deverá jogar, determinado jogador, para ganhar;
c) Quem ganha o jogo;
d) Identificar o número necessário de sementes, em determinadas casas do tabuleiro, para capturar um número de sementes;
e) Expressar a opinião acerca de afirmações produzidas acerca da situação de jogo.

A Ana (jogador A) e o Bruno (jogador B) estão a jogar Ouri.
Joga o Bruno e ganha.

Como terá de jogar o Bruno? Justifica a tua resposta.

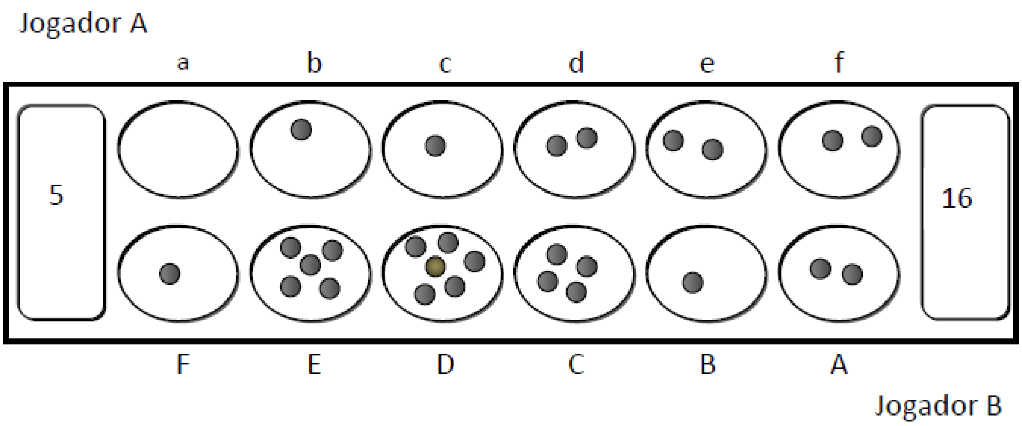


Figura 32. Problema n.º 4 do Ouri.

Em ambos os grupos, Semáforo e Ouri, era pedido aos alunos que explicassem o seu raciocínio.

5.8. Procedimentos

O estudo desenrolou-se em etapas distintas, nomeadamente no que diz respeito à recolha e análise de dados. Neste ponto, procuraremos expor os aspetos que nos parecem essenciais à compreensão do modo como essas etapas se desenrolaram. Assim, para o estudo correlacional, a recolha de dados teve início em Évora, junto de grupos de finalistas de Semáforo, dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico (3.º ao 6.º ano), e de Ouri e Pontos e Quadrados, do 1.º ciclo. Nessa recolha incluíram-se ainda os jogo Hex e Amazonas, que não foram utilizados neste estudo, dado a idade desses jogadores não se enquadrar na população em estudo. Nesta recolha de dados participaram 64 alunos. O teste foi aplicado no final dos jogos.

A recolha de dados efetuada nas escolas obedeceu às seguintes etapas: ensino do jogo a professores e alunos; organização de campeonatos; aplicação do teste. Para este efeito foram utilizadas turmas dos 3.º e 4.º anos do Ensino Básico, da área de residência da investigadora. A opção pela utilização de escolas dá área da residência deveu-se a uma maior rentabilização do tempo dedicado a esta fase. Todas as fases foram implementadas pela investigadora, nomeadamente o ensino dos jogos, a organização dos campeonatos e a aplicação do teste. A referência ao ensino dos jogos aos professores deve-se ao facto de estes se encontrarem presentes aquando o ensino dos jogos aos alunos.

Nos campeonatos de Ouri, Semáforo, Pontos e Quadrados e Gatos & Cães utilizou-se o programa *Suiss Perfect* para fazer os emparceiramentos, sendo contabilizado um ponto por cada vitória. O jogo Ouri envolveu a realização de três campeonatos distintos: dois utilizando o sistema suíço e um o sistema todos contra todos. Com o jogo Semáforo procedeu-se de forma análoga ao Ouri. Os campeonatos com o sistema todos contra todos envolveram duas turmas distintas de alunos do 4.º ano, utilizadas no âmbito do estudo quase-experimental. Para o jogo Pontos e Quadrados organizaram-se dois campeonatos com o sistema suíço. Para o jogo Gatos & Cães organizou-se um campeonato, com o sistema suíço, onde participaram alunos do 4.º ano. Nos dois jogos restantes, o Dominó Belga e o Syzygies, os campeonatos tiveram particularidades diferentes, que passaremos a referir.

O jogo Dominó Belga envolveu a realização de dois campeonatos, um com alunos do 3.º ano e o outro com alunos do 4.º ano. Nestes campeonatos utilizou-se o programa *Suiss Perfect* para fazer os emparceiramentos, sendo contabilizados a totalidade de pontos acumulada em cada jogo, em vez de o número de pontos acumulados por cada vitória, como se procedeu para os jogos matemáticos.

O jogo Syzygies envolveu dois campeonatos, para o 4.º e para o 5.º ano. Neste jogo, tratando-se de um jogo para realização individual, não se realizaram emparceiramentos. Em cada um destes campeonatos, os jogadores resolviam individualmente um problema-Syzygy, num total de 13. Cada problema-syzygy foi considerado um jogo, tendo em conta o aspeto competitivo inerente. Estes jogos eram realizados uma vez por semana, durante cerca de 30 minutos. O problema-Syzygy era apresentado numa folha de formato A5 com o jogo da semana e espaço de resposta. Antes de ser apresentado o jogo da semana, era distribuída a correção/cotação do jogo anterior a cada aluno, sento também apresentada a melhor resposta ao jogo anterior, bem como o ranking dos pontos atribuídos até à data. Desta forma, os jogadores tinham oportunidade de analisar os erros cometidos, bem como as boas jogadas, e tentar melhorar a sua performance. Recolhidos os jogos anteriores, era então apresentado o novo problema-Syzygy.

Na recolha de dados, o facto se terem realizado dois campeonatos com o sistema todos contra todos deveu-se às turmas envolvidas nesse tipo de campeonato fazerem parte do estudo experimental. Nesse estudo, dado pretender-se implementar a prática sistemática de jogo (Ouri ou Semáforo) ao longo dos três meses em que decorreu o tratamento do estudo, isso permitiu o tempo suficiente para a realização do campeonato no sistema todos contra todos. Para além da disponibilidade de tempo, a realização do campeonato funcionou como agente motivador acrescido para a prática do jogo. Este interesse pelos campeonatos esteve bem presente nas turmas sujeitas à resolução de problemas em contexto de jogo, que mostraram sempre interesse na realização de um campeonato e na prática do jogo.

No estudo quase-experimental, as quatro turmas de tratamento foram sujeitas a tratamentos distintos. Duas turmas foram sujeitas à prática sistemática de jogo, como já foi referido anteriormente, uma com o jogo Semáforo e outra com o jogo

Ouri. Estas turmas foram sujeitas à prática de jogo, uma vez por semana, durante 45 minutos, efetuada pela investigadora. Uma aula foi utilizada também para o ensino do jogo. Ao longo das sessões implementou-se um campeonato no sistema todos contra todos, mantendo-se todos os alunos em atividade de jogo. As restantes duas turmas foram sujeitas ao tratamento da resolução de problemas em contexto de jogo (Semáforo ou Ouri). Uma sessão foi utilizada para a aprendizagem do jogo, sendo os problemas aplicados pela investigadora. Estas turmas sujeitas à resolução de problemas em contexto de jogo resolveram problemas envolvendo situações de jogo, uma vez por semana, durante 45 minutos. Nesse tempo resolviam uma ou mais situações, tendo disponível o material de jogo que poderiam utilizar para simular as situações, caso assim o pretendessem. Os problemas eram distribuídos à turma pela investigadora que aconselhava uma leitura cuidada e se disponibilizava para explicar qualquer palavra que não compreendessem. Após a resolução as folhas eram recolhidas e, o tempo restante era utilizado para os alunos demonstrarem a opinião acerca do (s) problema (s) em questão, nomeadamente o grau de dificuldade. A turma que ficou com o Semáforo resolveu um total de 14 problemas e a turma que ficou com o Ouri resolveu 13 problemas. Na primeira e na última sessão fez-se a aplicação do teste (pré-teste e pós-teste) a todas as turmas, incluindo a turma de controlo. Nas turmas de tratamento não houve envolvimento por parte do professor titular de cada uma das turmas no tratamento efetuado, quer na aplicação dos problemas, quer na implementação da prática de jogo.

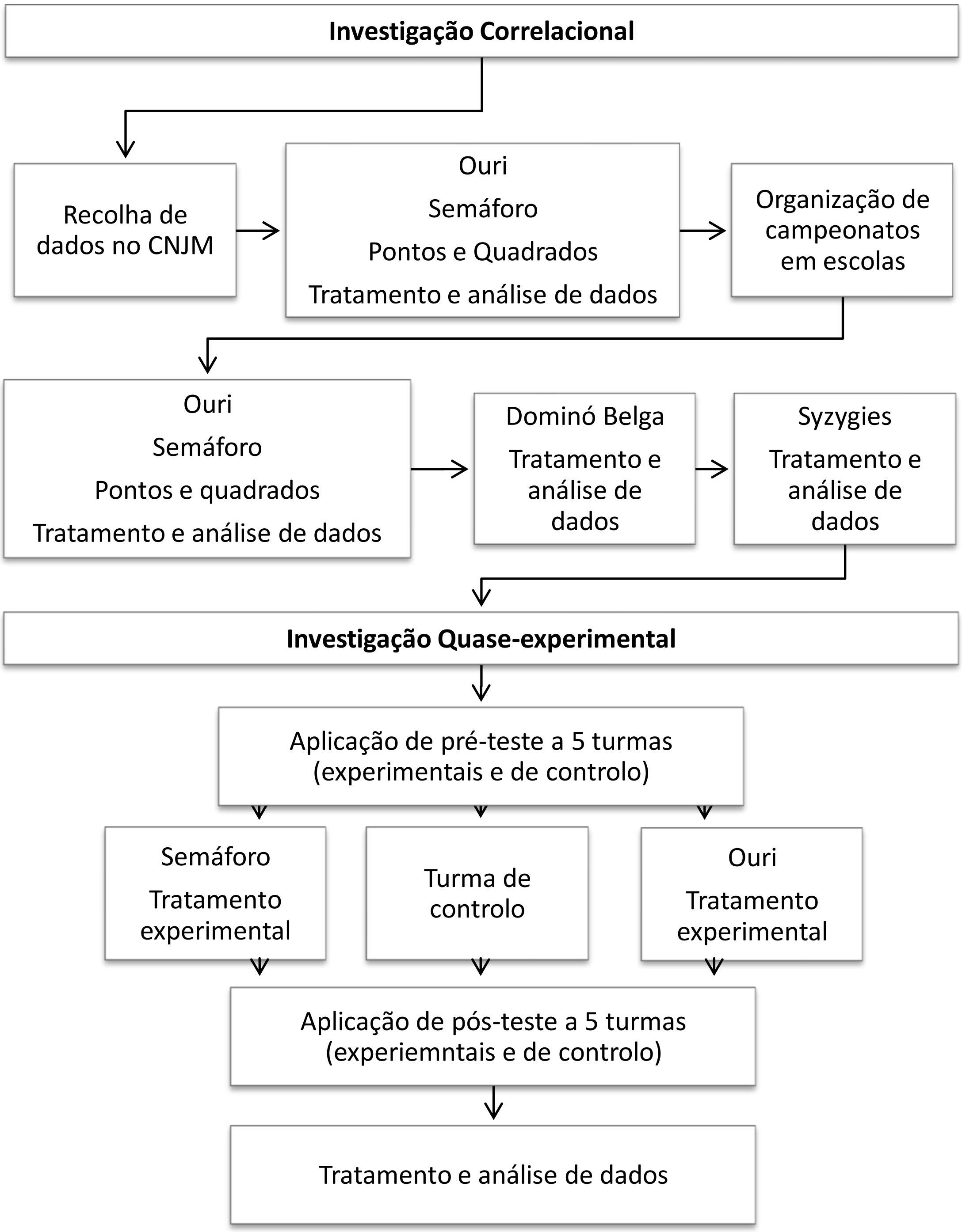


Figura 33. Etapas sequenciais do estudo.

No final de cada recolha de dados fez-se o tratamento e análise de dados, nomeadamente a correção e análise estatística. A correção dos testes fez-se através dos critérios propostos por Ferreira e Palhares (2008), que assenta nos princípios referidos por Charles, Lester e O'Daffer (1992), nomeadamente no ponto "*Analityc Scoring Scale*"(p. 30). A fiabilidade da correção foi medida através dos coeficientes de correlação. Para o efeito foram utilizados 30 testes que, após o intervalo superior a um mês, voltaram a ser novamente corrigidos. A análise revelou a existência de uma correlação muito forte entre as duas correções (r = 0,99, p < 0,01).

A correção dos testes foi efetuada após cada recolha, realizando-se de seguida a introdução dos resultados no programa *SPSS* para *Windows*, versão 17, para a respetiva análise estatística. Para salvaguardar possíveis lapsos, todas as correções, bem como a introdução dos dados foram sujeitas a uma segunda verificação, para a qual se utilizou uma grelha de resultados. Este procedimento evitou erros na introdução de dados, que podem ocorrer quando existe um grande número de dados a tratar. A correção dos problemas-Syzygy envolveu bastante tempo dado a particularidade das regras. Optou-se por recorrer à expressão algébrica sugerida por Lewis Carrol, após a sistemática recolha do maior e menor número de letras num syzygy final, o menor número de letras num syzygy, o número de cadeias e o número de desperdícios. A sistematização contribuiu para uma correção mais eficaz.

5.9. Análise dos dados

A análise dos dados fez-se através de tratamento estatístico utilizando para o efeito a versão 17 do programa *SPSS*, para *Windows*. Ao longo da análise foram utilizados os testes estatísticos adequados a cada situação e a cada tipo de investigação.

Na organização dos campeonatos, utilizou-se o programa *Suiss Perfect* para fazer os emparceiramentos. O *Suiss Perfect* (disponível em http://www.swissperfect.com) é um programa usualmente utilizado para fazer os emparceiramentos dos torneios de xadrez e em torneios de jogos cujo emparceiramento segue o sistema suíço ou o sistema round-robin (todos contra todos), como o Go, o Bridge ou o Scrabble. Neste estudo utilizamos maioritariamente o sistema suíço, utilizando o sistema todos contra todos em dois campeonatos, pelo que o *Suiss Perfect* revelou-se muito vantajoso. Trata-se de um programa útil para realizar campeonatos de forma rápida, mesmo com um grande número de participantes (Snyder, 2007), e o tempo é sempre um bem precioso, principalmente numa investigação.

A estatística descritiva é apresentada através de tabelas e gráficos, fazendo referência à média, mediana, desvio padrão, 1.º e 3.º quartil, valor máximo e valor mínimo. Estas medidas, de localização e dispersão, permitem caraterizar a amostra resumindo a informação aos aspetos essenciais.

Na análise da relação entre as variáveis foi utilizado o nível de significância usualmente recomendado, $p < 0,05$, indicando, sempre que justificado, o nível de significância correspondente a $p < 0,01$ ou $p < 0,001$. O nível de significância de 0,05 ou inferior permite rejeitar a hipótese nula (H_0), conservando a hipótese alternativa, com alguma segurança. Para um nível de significância de 0,05 há 5% de probabilidade de observar as diferenças identificadas na análise se as médias fossem idênticas (se H_0 fosse verdadeira). Ou seja, há 5% de hipóteses de cometer um erro de tipo I (rejeitar H_0 quando é verdadeira). Assim, quanto maior for o nível de significância (*p-value*) maior é a probabilidade de cometer um erro do tipo I, assumindo que o resultado obtido não é representativo da população teórica (Maroco, 2003). Atendendo ao exposto poder-se-ia concluir que a melhor opção seria utilizar níveis de significância mais rigorosos, correspondentes a $p < 0,01$ ou $p < 0,001$. No entanto, Jackson (2012) alerta para o facto de, ao procurarmos reduzir o risco de ocorrência de um erro de tipo I, estarmos a aumentar a probabilidade de ocorrência de um erro de tipo II (não rejeitar H_0 quando é falsa). Apesar de usualmente se dar mais importância aos erros de tipo I, é muito importante uma cuidada análise e cautelosa interpretação dos resultados. Leech, Barrett, e Morgan (2012) referem que, por vezes, os resultados significantes são erradamente interpretados como tendo significado prático ou serem importantes. Resultados estatisticamente muito significativos podem na realidade traduzir uma fraca relação, associação ou diferenças. Para analisar a força ou o tamanho da relação entre as variáveis devemos observar a magnitude do efeito (*effect size*).

Para fazer a interpretação dos coeficientes de correlação seguiram-se critérios recomendados na literatura, nomeadamente considerou-se que coeficientes entre 0,2 e 0,35 revelam uma pequena relação entre as variáveis, podendo ter alguma importância em investigação exploratória; coeficientes entre 0,35 e 0,65 revelam uma relação moderada entre as variáveis que permite previsões de grupo, sendo necessário o valor de pelo menos 0,5 para previsões individuais; coeficientes entre 0,65 e 0,85 revelam uma forte relação entre as variáveis; coeficientes acima de 0,85 revelam uma relação muito forte entre as variáveis (Cohen & Manion, 1989; Fraenkel & Wallen, 1990; Christmann & Badgett, 2009). No entanto, há critérios de interpretação ligeiramente diferentes em que a opinião dos autores varia em função do que é considerado uma relação moderada, forte e muito forte (Tabela 3). Por exemplo, Sherri L. Jackson (2012) considera que a relação é forte quando os coeficientes são superiores a 0,70 enquanto Nancy Leech, Karen Caplovitz Barrett e George A. Morgan (2009) consideram que a partir de 0,50 os coeficientes já representam uma relação forte. Segundo Cohen e Manion (1989) os coeficientes de 0,40 já permitem fazer previsões relativamente a grupos, que serão mais precisas com coeficientes a partir de 0,65. Referem ainda que, apesar de coeficientes de 0,40 já permitirem fazer algumas previsões individuais o seu grau de precisão aumenta consideravelmente a partir de 0,85.

Tabela 3. Interpretação do coeficiente de correlação.

	Fraca	Moderada	Forte	Muito Forte
Leech, Barrett e Morgan	0,10	0,30	0,50	0,70
Christmann e Badgett	0,20	0,40	0,60	> 0,80
Cohen e Manion	0,20	0,35	0,65	> 0,85
Jackson	≤ 0,29	0,30	≥ 0,70	

Para testar a normalidade, ou seja, para verificar se a distribuição dos dados era paramétrica, recorreu-se aos testes de Kolmogorov-Smirnov e Shapiro-Wilk. A normalidade é essencial para determinar o tipo de teste adequada à análise, sendo também um dos pressupostos subjacentes à análise da covariância (ANCOVA).

Para testar a correlação entre as variáveis utilizou-se o teste de Pearson (*r*) Trata-se de um teste considerado muito robusto e que requer a normalidade da distribuição. Utilizamos o quadrado desse coeficiente (R^2), também designado de coeficiente de determinação (Ary, et al., 2010), para fazer a interpretação da importância do efeito provocado pela variável (Field, 2000), na medida em que, contrariamente a *r,* R^2 pode ser interpretado como uma proporção (Chen & Popovich, 2002). O coeficiente de determinação permite verificar a variância comum às duas variáveis.

Sempre que os resultados revelavam muitos empates, como no caso de se analisarem grupos de melhores ou piores jogadores ou nos resultados das provas de aferição, foi utilizado o teste de Kendall's tau (τ). Este teste é referido como alternativa ao *r* de Spearman quando existem muitos empates (Pestana & Gageiro, 2000). Segundo Andy Field (2000), apesar de o Kendall's tau ser considerada uma medida estatística menos popular é mais robusta.

Para testar os pressupostos inerentes a ANCOVA, além dos testes Kolmogorov-Smirnov, Shapiro-Wilk e Pearson utilizados, respetivamente para testar a da normalidade e a relação linear entre as variáveis, acima referidos, foram utilizados outros testes recomendados para o efeito, nomeadamente o teste de Levene para testar a homogeneidade das variâncias. O teste de Levene é o teste mais robusto para este efeito, na medida em que é robusto a desvios da normalidade (Maroco, 2003). O Alpha de Cronbach foi utilizado para testar a fiabilidade da medição da covariante. Segundo Fraenkel e Wallen (1990) este teste deve apresentar um coeficiente superior a 0,70. No entanto, Santos (1999) considera aceitável a existência de valores inferiores, próximos desse nível.

Uma vez que na ANCOVA a razão F revela se existem ou não diferenças significativas entre as variáveis sem especificar onde as diferenças existem, foi necessário conduzir a análise de contrastes, que permitem identificar quais os grupos que apresentam essas diferenças (Field, 2000). Acerca da análise dos contrastes Andy

Field refere, ainda, que quando o intervalo de confiança não inclui o zero pode confiar-se que as diferenças entre os grupos são genuínas.

5.10. Síntese da metodologia

Iremos aqui apresentar, de forma sucinta, os pontos essenciais inerentes à metodologia desenvolvida neste estudo. Assim, o paradigma é de natureza quantitativa, onde se enquadram duas investigações complementares, uma de natureza correlacional e outra quase-experimental. Estas duas investigações têm por objetivos 1) a análise da correlação entre as variáveis para identificar se existe ou não relação entre as variáveis em jogo; 2) a análise da covariância (ANCOVA) para verificar se existem diferenças significativas entre a) a resolução de problemas em contexto de jogo e b) a prática sistemática de jogos de estratégia, na capacidade de identificar padrões dos alunos do 4.º ano de escolaridade.

As variáveis em estudo são essencialmente a capacidade de identificar padrões e a capacidade de jogar determinado tipo de jogos. Na capacidade de identificar padrões foram considerados padrões específicos determinados por uma análise fatorial inerentes a essa capacidade. Foi ainda tida em consideração a capacidade matemática medida através dos resultados obtidos nas provas de aferição, bem como a força dos jogadores, medida através da seleção dos melhores e dos piores jogadores. Na investigação quase-experimental a variável dependente corresponde ao pós-teste (teste que mede a capacidade de identificar padrões), a variável independente representativa de uma categoria, também designada de fator, corresponde ao grupo e a covariável corresponde ao pré-teste.

A população do estudo consiste em alunos do Ensino Básico português, do 3.º ao 6.º ano de escolaridade, da qual se recolheu uma amostra de 400 alunos. No estudo quase-experimental utilizaram-se cinco turmas do 4.º ano de escolaridade do mesmo agrupamento de escolas, constituindo a totalidade das turmas de 4.º ano desse agrupamento. O tipo de tratamento, bem como a turma de controlo foram atribuídos de forma aleatória. Assim, foram constituídos dois grupos de tratamento para o jogo

Ouri, dois grupos de tratamento para o jogo Semáforo e um grupo de controlo. Em cada jogo o tratamento consistiu na prática sistemática de jogo, para uma turma e na resolução de problemas em contexto de jogo, para a outra.

O estudo envolveu a utilização de um total de seis jogos, sendo quatro de informação perfeita (jogos matemáticos), um de informação imperfeita e um jogo de palavras para um jogador, respetivamente Pontos e Quadrados, Semáforo, Ouri, Gatos & Cães, Dominó Belga e Syzygies.

Como instrumentos de recolha de dados utilizou-se um teste que mede a capacidade de identificar padrões e problemas-syzygy. A recolha de dados foi desenvolvida ao longo de vários meses, três dos quais dedicados ao estudo quase-experimental.

A análise dos dados fez-se através de tratamento estatístico utilizando para o efeito a versão 17 do programa de análise estatística *SPSS*, para *Windows*. Na organização dos campeonatos, utilizou-se o programa *Suiss Perfect* para fazer os emparceiramentos. Ao longo da análise foram utilizados os testes estatísticos recomendados na literatura como os mais adequados a cada situação e a cada tipo de investigação, bem como os procedimentos estatísticos que precedem a análise, nomeadamente a testagem da normalidade e dos pressupostos inerentes à ANCOVA.

CAPÍTULO 6

CORRELATIONAL ANALYSIS

6.1. Introduction

The results obtained from correlational analysis will be presented in this section taking into account the research questions related to this analysis, which are as follows:

1. Is the ability to find patterns related to the ability to play:
    a) mathematical games?
    b) perfect information games?
    c) one player games?
2. Is there, for the groups of better players and worse players, specific and differentiated relations between the ability to play and the ability to identify patterns?
3. Is the ability to play games related to standard assessments in Mathematics?

From the research questions presented above, the following hypothesis emerged:

a) There is a relationship between the ability to play games of perfect information and the ability to identify patterns.
b) There is a relationship between the ability to play games of imperfect information and the ability to identify patterns.
c) There is a relationship between the ability to play one-person games and the ability to identify patterns.

d) There is, for the groups of better and worse players, specific and differentiated relations between the ability to play and the ability to identify patterns.
e) There is a relationship between the ability to play games and the standard assessments in Mathematics.

In this study, the data organization did not always take into account the different direction of variables. Consequently, some negative coefficients emerged. In the statistical analysis, when variables have the same direction we expect to find positive coefficients, it means that if a variable increases the other also increases. The negative coefficients of correlation presented in the following results are explained by an opposite direction between variables (e.g. in the ranking of players, the highest the number, the worse the player). Therefore, besides the negative coefficients presented in the results they actually reveal an increase of the two variables analyzed. To avoid any doubt in the interpretation of results presented in the following sections, each table will be signaled when the negative coefficients arise from an opposite direction between variables.

In correlacional analysis the Pearson coefficient (r) is used when data has a normal distribution and the Kendall's tau (τ) test was used whenever data presented many ties. The Kendall's tau test is considered as a more robust alternative to the Spearman test (Pestana & Gageiro, 2000; Field, 2000). The Spearman coefficient is an alternative to the Pearson coefficient when we have non parametric data.

Concerning the significance level, in this study we use the 5% ($p < 0.05$) level, and report when other more accurate significance levels show, such as $p < 0.01$ or $p < 0.001$.

In a previous study (Ferreira, 2006; Ferreira & Palhares, 2009) we have developed and validated a pattern identification test, consisting of 24 task, half contemplating numerical patterns and the other half visual/pictoric patterns. We have applied this test to all students and we will describe the results in this section. The test is in Annex A. Consequently, data collected from 631 students of 3rd to 6th year of schooling was used in an exploratory factor analysis. Pett, Lackey and Sullivan (2003) claim that factor analysis is indicated when we are interested in the structure of a particular phenomenon because it provides us with the means to undertake a structural analysis of this phenomenon. According to Gorsuch (1983), one of the purposes for which factor analysis can be used is to minimize de number of variables for further research while maximizing the amount of the information in the analysis. Then, the resulting set of variables can be used as representatives of the basis underlying the initial set of variables. This was our purpose in the exploratory factor analysis since we intended to know if there were other skills behind the ability to identify patterns identified by the test. Factor analysis allowed us to find the existence of seven factors behind this ability. The interpretation of each factor results in the following seven points:

1. Patterns involving numeric progressions;
2. Patterns involving three terms repetition;
3. Patterns that involve both geometric and numeric progressions;
4. Patterns involving counting;
5. Patterns involving odd and even numbers;
6. Patterns involving rotation;
7. Patterns involving more than one rule.

The seven factors are also taken into account in this research and the results will be presented in this section.

6.2. Exploratory analysis of data

The study involved six games and students from 1st and 2nd cycle of elementary education. In this section we will present some essential elements to characterize data. As students from 1st and 2nd cycles have distinct curriculum guidelines we will present the exploratory data concerning each one of the games by cycle.

For the 1st cycle players, and concerning each one of the games, mathematical games revealed the following results (Table 4):

- for *Ouri* players, the test average score was 51. 99 (*SD* = 16.61) and the median was 50.52. The analysis of quartiles reveals that 50% of the scores are between 41.06 (*Q*1) and 63.54 (*Q*3);
- for Traffic Lights players, the average scores in the test was 50.08 (*SD* = 16.79), the median was 48.61 and 50% of the scores are between 38.80 (*Q*1)and 60.24 (*Q*3);
- for Dots and Boxes players, the average scores in the test was 51.47 (*SD* = 17.25) and the median was 50.00. The analysis of quartiles reveals that 50% of the scores are between 39.58 (*Q*1) and 63.54 (*Q*3);
- for Cats & Dogs players, the average scores in the test was 55.16 (*SD* = 16.55), the median was 54.86 and 50% of the scores are between 42.27 (*Q*1) and 64.84 (*Q*3).

The game of imperfect information, *Dominó Belga*, revealed an average score of 44.35 (*SD* = 13.11) and a median very close to this score (44.10), which means that these students did not perform so well in the test. The analysis of quartiles reveals that 50% of the scores are between 36.28 (*Q*1) and 51.74 (*Q*3).

The word game Syzygies revealed an average score of 44.02 (*SD* = 9.63), a median of 44.10 and 50% of the scores between 35.24 (*Q*1) and 49.91 (*Q*3).

Table 4. Descriptive statistics of the Test from 1st cycle players by game.

	N	***M***	***SD***	***Q1***	**Median**	***Q3***	**Min**	**Max**
Ouri	172	51.99	16.61	41.06	50.52	63.54	13	94
Traffic Lights	182	50.08	16.79	38.80	48.61	60.24	13	94
Dots and Boxes	155	51.47	17.25	39.58	50.00	63.54	13	94
Cats & Dogs	30	55.16	16.55	42.27	54.86	64.84	19	96
Dominó Belga	41	44.35	13.11	36.28	44.10	51.74	16	88
Syzygies	18	44.02	9.63	35.24	44.10	49.91	29	61

Concerning the elementary students from 1st cycle playing mathematical games, the performance in the test was slightly above 50%. The average for *Dominó Belga* and Syzygies, both non mathematical games, was below the 50% level.

The box plot analysis of the distribution of scores revealed a larger range of scores for mathematical games, and the absence of outliers (Figure 34).

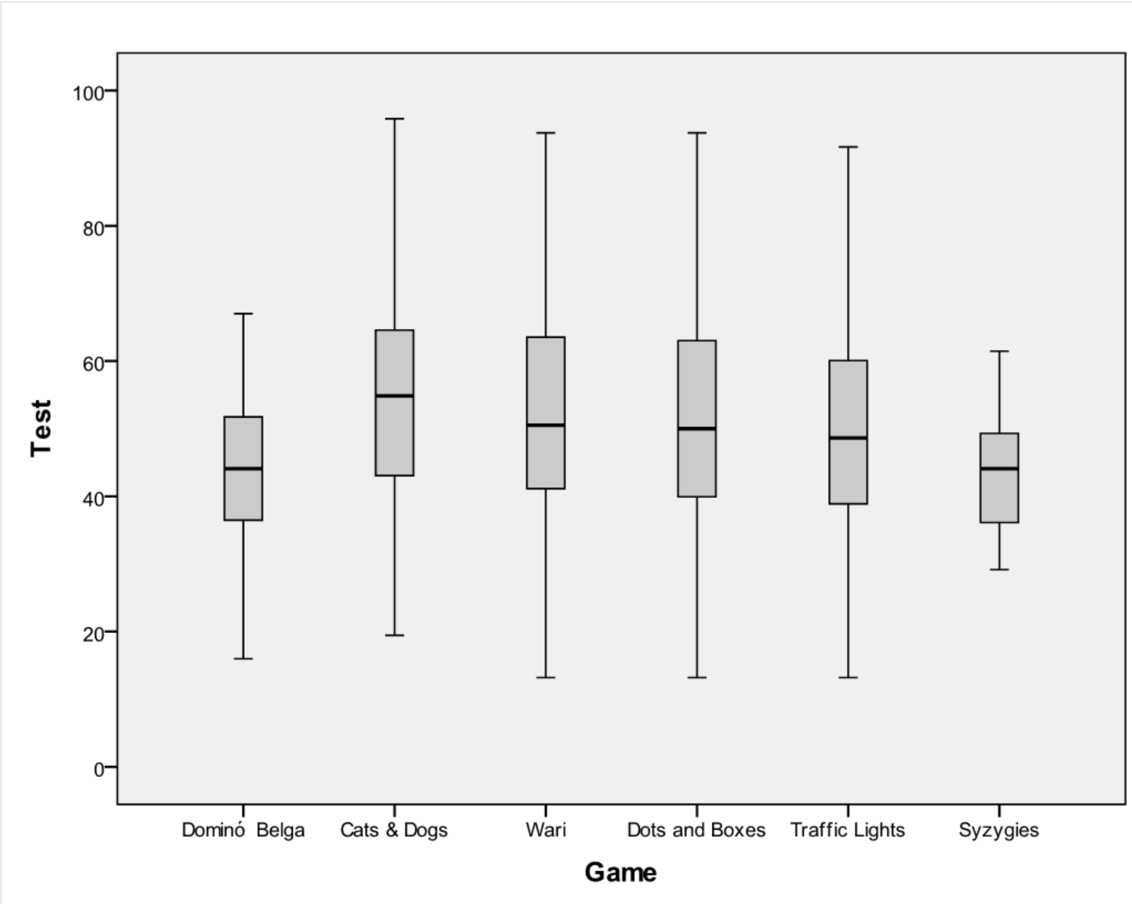


Figure 34. Box plots of test from 1st cycle players.

The normality of distribution is a necessary condition to use some tests in the analysis, such as the Pearson coefficient. Therefore, before the analysis of correlation between variables, we have conducted an analysis of the distribution of the test results for each one of the games. The Kolmogorov-Smirnov and Shapiro-Wilk tests (Table 5) revealed that for each one of the games (*Ouri*, Traffic Lights, Dots and Boxes, Cats & Dogs, *Dominó Belga* and Syzygies) played by 1st cycle students, distributions did not differ significantly from normal distribution ($p > 0.05$). Therefore, we will assume normality for every game.

Table 5. Normality analyses (1st cycle).

Test	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	*Df*	*Sig.*	*Statistic*	*Df*	*Sig.*
Ouri	.048	172	.200*	.992	172	.477
Traffic Lights	.051	182	.200*	.990	182	.251
Dots and Boxes	.038	155	.200*	.989	155	.290
Cats & Dogs	.073	30	.200*	.990	30	.991
Dominó Belga	.078	41	.200*	.968	41	.296
Syzygies	.141	18	.200*	.956	18	.531

a. Lilliefors Significance Correction

*. This is a lower bound of the true significance.

For the 2nd cycle players the analysis involved two mathematical games (*Ouri* and Traffic Lights) and the word game Syzygies. Concerning each one of the games, the analysis revealed an average score of 55.48 (SD = 11.76), a median of 58.33, higher than the mean, and 50% of the scores between 49.14 ($Q1$) and 63.36 ($Q3$) in the test of *Ouri* players. The other mathematical game (Traffic Lights) revealed an average score of 51.27 (SD = 14.95), the median slightly below the mean (50.18) and 50% of the scores between 37.06 ($Q1$) and 62.07 ($Q3$). Concerning the word game Syzygies the analysis of quartiles revealed that 50% of the scores are between 41.32 ($Q1$) and 66.93 ($Q3$) (Table 6).

The analysis of descriptive statistics disclose that players have in all games a good performance in the test since the average is higher than the 50% level, especially for *Ouri* and Syzygies players.

Table 6. Descriptive statistics of the Test from 2nd cycle players by game.

	N	*M*	*SD*	*Q1*	Median	*Q3*	Min	Max
Ouri	9	55.48	11.76	49.14	58.33	63.36	32	69
Traffic Lights	12	51.27	14.95	37.06	50.18	62.07	33	80
Syzygies	26	55.13	15.74	41.32	55.90	66.93	26	89

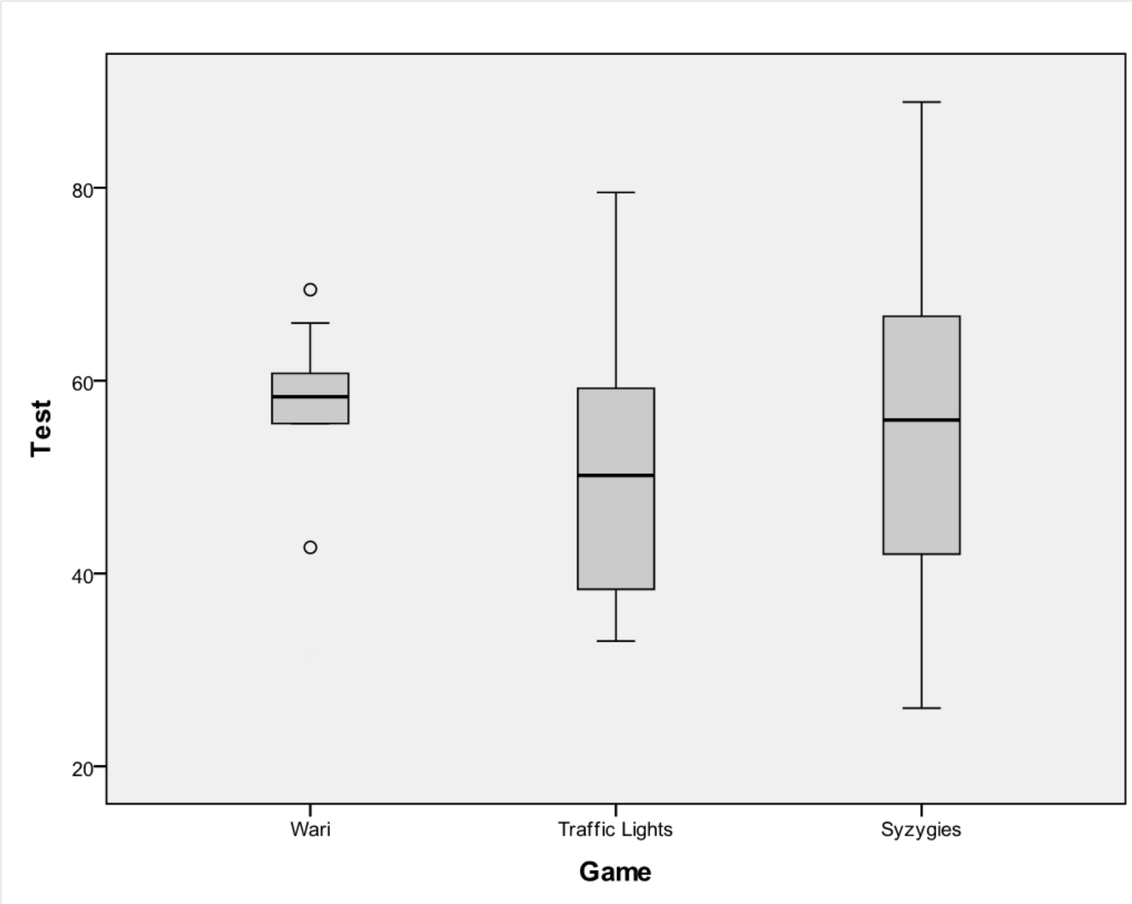


Figure 35. Box plots of the test from 2nd cycle players.

The box plots analysis of the distribution of the scores revealed differences between the ranges of scores from the three games players. Syzygies is the game with a larger range of scores and *Ouri* has the smaller. For the game *Ouri* players there are two outliers that represent the higher (69) and the lower scores (32) (Figure 35).

The normality of distributions of the test was tested by Kolmogorov-Smirnov and Shapiro-Wilk tests (Table 7). Analysis revealed that data from Traffic Lights and Syzygies players do not differ significantly from normal distribution (p > 0.05). However, data from *Ouri* players have significant differences from normal distributions (p < 0.05). Therefore, for Traffic Lights and Syzygies players data is parametric and for *Ouri* players data is non parametric.

Table 7. Normality analyses (2nd cycle).

Test	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	*Df*	*Sig.*	*Statistic*	*Df*	*Sig.*
Ouri	.281	9	.040	.894	9	.220
Traffic Lights	.192	12	.200*	.931	12	.391
Syzygies	.074	26	.200*	.985	26	.954

a. Lilliefors Significance Correction

*. This is a lower bound of the true significance.

The word game Syzygies was analyzed in two distinct groups. First one is constituted by 18 students of the 4th year of schooling (1st cycle). Second one is constituted by 26 students of the 5th year of schooling (2nd cycle). Students from the 4th year performed well on Syzygy-Problems except in problems 2, 4, 6 e 7 where more than 50% of students had no score.

Table 8. Performance on Syzygy-Problem (1st cycle).

N.	Syzygy-Problem	Success (%)
1	**Como o veado fica cansado**	50
2	**Leva o gato até à ratazana**	17
3	**Chega o castiçal ao telefone**	61
4	**Com a escada vai ao telhado**	22
5	**Leva a minhoca ao peixe**	50
6	**Como se faz pudim de laranja**	33
7	**Liga a casa ao dinheiro**	44
8	**Vai da aresta ao vértice**	50
9	**Põe o quadrado perfeito**	67
10	**Do crivo tira o primo**	67
11	**Torna o espaço plano**	72
12	**Chega ao número de ouro**	72

Student success on Syzygy-Problems was between 1 and 10 Syzygy-Problems, average being 6. Students have scored between 2 and 53 points, with an average score of 17 points. The number of students with success on Syzygy-Problems is between 3 (17%) and 13 (72%).

Students from the 5th year performed better on Syzygy-Problems than 1st cycle students. More than 50% of the 5th year students had scores on Syzygy-Problems, except in problems 1, 2, 3 and 7 where less than 50% of students have scored.

Table 9. Performance on Syzygy-Problem (2nd cycle).

N.	Syzygy-Problem	Success (%)
1	**Leva o cavalo até ao campo**	27
2	**Como o veado fica cansado**	12
3	**Leva o gato até à ratazana**	46
4	**Chega o castiçal ao telefone**	54
5	**Com a escada vai ao telhado**	73
6	**Leva a minhoca ao peixe**	58
7	**Como se faz pudim de laranja**	42
8	**Liga a casa ao dinheiro**	69
9	**Vai da aresta ao vértice**	62
10	**Põe o quadrado perfeito**	69
11	**Do crivo tira o primo**	69
12	**Torna o espaço plano**	88
13	**Chega ao número de ouro**	62

Like 4th year students, 5th year students have succeeded in at least one Syzygy-Problem, being 10 the maximum of Syzygy-Problems well succeeded. These students have scored between 2 and 58 points, being the average score of 24 points. The number of students that scored on a Syzygy-Problem is between 3 (12%) and 23 (88%).

6.3. Relationship between mathematical games or other games and patterns

This section presents the results analysis concerning the first research question:
1. Is the ability to find patterns related to the ability to play:

a) mathematical games?

b) perfect information games?

c) one player games?

The research hypotheses that emerged from the first research question are as follows:

a) There is a relationship between the ability to play games of perfect information and the ability to identify patterns.

b) There is a relationship between the ability to play games of imperfect information and the ability to identify patterns.

c) There is a relationship between the ability to play one-person games and the ability to identify patterns.

6.3.1. Games of perfect information

In this point we are going to present the results analyses related to the first research hypothesis:

a) There is a relationship between the ability to play games of perfect information and the ability to identify patterns.

In attempting to confirm this hypothesis four distinct mathematical games were used: *Ouri*, Traffic Lights, Dots and Boxes and Cats & Dogs. In the following sections we will present the result analysis concerning each one of these games.

6.3.1.1. Ouri

In 2004, the first edition of the Championship of Mathematical Games (CNJM – *Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos*) was a landmark in the dissemination of mathematical games in Portuguese schools. The game *Ouri* was present since the 1st edition, being only removed from the game selection in the last edition so far (9th edition). Data collected from 9 students of 2nd cycle (5th and 6th grades) participating in the final of the CNJM, revealed a non-significant relation between the strength to play *Ouri* and the ability to identify patterns (r = 0.320, p > 0.05). Subsequently data collection implicated the organization of championships in primary schools were selected. The first championship involved 41 students from 3rd and 4th year of schooling. The statistical analysis revealed the existence of a relationship between the ability to play and the ability to identify patterns (r = -0.398, p < 0.01). The negative coefficient is explained by the different direction of variables, since in the ranking of players the highest the number, the worse the player, what did not occur with the score of the test.

Table 10. Correlation between the game *Ouri* and the patterns identification test.

		Test
Ouri	*Pearson Correlation*	-0.398(**) (1)
	Sig. (2-tailed)	0.010
	N	41

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

1 The negative coefficients are explained by an opposite direction between variables.

6.3.1.2. Traffic Lights

The game Traffic Lights was introduced in the 2nd edition of the national Championship of Mathematical Games and has remained in the following editions. The final of this championship brings together students from different schools all over the country, which provided a good opportunity to collect data. Data collected in one of these finals from 12 students from the 5th and 6th year of schooling, players of Traffic Lights, revealed a non-significant relationship between the ability to play Traffic Lights and pattern recognition (r = -0.090, $p > 0.05$). Data collected from 10 students from the 3rd and 4th year of schooling, players of Traffic Lights, revealed a strong positive relationship between the ability to play and the ability to identify patterns (r = -0.757, $p < 0.05$[7]).

Table 11. Correlation between the game Traffic Lights and the patterns identification test (CNJM)

		Test
Traffic Lights	*Pearson Correlation*	-.757(*) (1)
	Sig. (2-tailed)	.011
	N	10

* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

1 The negative coefficients are explained by an opposite direction between variables.

Subsequently, a championship organized in a primary school with 40 students from 3rd and 4th year revealed a positive relationship between the ability to play and the ability to identify patterns (r = -0.316, $p < 0.05$[8]).

Table 12. Correlation between the game Traffic Lights and the patterns identification test.

		Test
Traffic Lights	*Pearson Correlation*	-0.316(*) (1)
	Sig. (2-tailed)	0.023
	N	40

* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

1 The negative coefficients are explained by an opposite direction between variables.

In a different situation, as part of a quasi-experimental research, we had the opportunity to organize a championship with 24 students from 4th year where all students competed with each other, instead of using the Swiss Perfect tournament

[7] Negative because the ability to play was measured reverse to the ability to identify patterns.
[8] The same as footnote 7.

management software. The statistical analysis revealed a positive relationship between the ability to play and the ability to identify patterns (r = -0.486, p < 0.05[9]).

Table 13. Correlation between the game Traffic Lights and the patterns identification test.

		Test
Traffic Lights	*Pearson Correlation*	-0.486(*) (1)
	Sig. (2-tailed)	0.016
	N	24

* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

1 The negative coefficients are explained by an opposite direction between variables.

6.3.1.3. Dots and Boxes

The game Dots and Boxes was introduced in the 1st edition of the National Championship of Mathematical Games and has remained for four editions, being replaced by another game in the following editions. Data collected from 7 students participants in the final revealed a non-significant relationship between the ability to play this game and pattern recognition (r = 0. 408, p > 0.05).

In this study, the Dots and Boxes players from 3rd and 4th year were analyzed in two distinct situations. The first was in a championship organized with 41 students and the second involving 148 students from three primary schools. The results of the analysis were not significant for both championships. These findings mean that the level of significance for the correlation coefficients were greater than 0.05, the 5% level. In this study we only accepted coefficients lower than 0.05, corresponding to the 5% level.

6.3.1.4. Cats & Dogs

To collect data from Cats & Dogs players we have organized a championship with 31 4th year students. In this game, as with Dots and Boxes, the coefficients of correlations were not significant, which means they were greater than 0.05.

[9] Negative because the ability to play was measured reverse to the ability to identify patterns.

6.3.2. Games of imperfect information

In the previous sections we analyzed mathematical games, more precisely games of perfect information. However, the first research question also covers other games in addition to mathematical games. Therefore, in this section we are going to present the results analyses related to the second research hypothesis:

b) There is a relationship between the ability to play games of imperfect information and the ability to identify patterns.

The research concerning games of imperfect information was carried out using a dominoes game. The game selected was *Dominó Belga*, a game similar to Muggins and All Five, which is played in Portugal. *Dominó Belga* was implemented on 41 students from two classes: one constituted by 23 3rd year students and other by 18 4th year students. Although it is a popular game, most of the students did not know how to play it, finding it hard to spot the connections between two dominoes. Therefore, the first sessions were devoted to teaching the rules of the game and to clarify doubts. It was notoriously the most difficult game for the 3rd grade students to playing according to the rules. The championship for this game was also organized using the Swiss Perfect software, but the ranking was obtained from the total points of the cumulative score. Therefore, the variables have the same direction.

In this game, as with Dots and Boxes, and Cats & Dogs, the coefficients of correlations were not significant, which mean they were greater than 0.05.

In this game any significant relationships were only found concerning the seven factors. The analysis of the coefficients of correlation pointed out the existence of a positive relationship between the ability to play for these players and the ability to identify patterns involving both numeric and geometric progressions (r = 0.353, p < 0.05).

Table 14. Correlation between the game *Dominó Belga* and Factor 3.

		Factor 3
Dominó Belga	*Pearson Correlation*	0.353(*)
	Sig. (2-tailed)	0.023
	N	41

* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

6.3.3. One-person games

The third research hypothesis is the last hypothesis of the first research question and sought to ascertain the existence of a relationship between the ability to find patterns and the ability to play games that are substantially different from nither the games of perfect information and the games of imperfect information already presented. To carry out the analysis concerning this research hypothesis we selected a word game invented by Lewis Carroll. In this section we are going to present the results analysis concerning the following hypothesis:

c) There is a relationship between the ability to play one-person games and the ability to identify patterns.

The last game in analysis is the word game Syzygies. To implement this game some syzygy-problems have been invented based on those implemented by Lewis Carroll. Next step was teaching the basic rules of the games as well the rules of scoring to the students involved with this game. Then, for twelve and thirteen weeks, respectively, 18 students of 4th year and 26 of 5th year had to solve a syzygy-problem once a week. Every session, before knowing the syzygy-problem of the week, the students received their own result of the previous week with corrections and comments. Then, the best solution was written on the blackboard with the respective score. Students also knew the ranking of the week. The ranking of these championships is the cumulative score of each player, as well as in the *Dominó Belga* championship. The results analysis will be presented separately for each of the schooling years.

The statistical analysis carried out between the ability to play Syzygies and the ability to identify patterns, concerning the group of 4th year students, revealed that the coefficients of correlations were not significant ($p > 0.05$).

The analysis took also into account the seven patterns identified on data. Concerning the seven patterns, in the group of 4th year students, the statistical analysis revealed a positive relationship between the ability to play Syzygies and Factor 5, interpreted as the ability to identify patterns involving odd and even numbers ($r = 0.617$, $p < 0.01$).

Table 15. Correlation between the word game Syzygies and Factor 5 (4th year).

		Factor 5
Syzygies	*Pearson Correlation*	0.617(**)
	Sig. (2-tailed)	0.006
	N	18

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Concerning the group of 5th year students, the statistical analysis revealed a positive relationship between the ability to play and the ability to identify patterns ($r = 0.523$, $p < 0.01$).

Table 16. Correlation between the word game Syzygies and the patterns identification test (5th year).

		Test
Syzygies	*Pearson Correlation*	0.523(**)
	Sig. (2-tailed)	0.006
	N	26

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Concerning the seven factors, in the group of 5th year students, the statistical analysis revealed a positive relationship between the ability to play Syzygies and Factor 1, interpreted as the ability to identify numeric progressions ($r = 0.655$, $p < 0.01$).

Table 17. Correlation between the word game Syzygies and Factor 1 (5th year).

		Factor 1
Syzygies	*Pearson Correlation*	0.655(**)
	Sig. (2-tailed)	0.000
	N	26

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

6.4. Relationship between being better or worse player and patterns

With the second research question we wanted to know if the ability to play for the better or worse players is related to the ability to identify patters.

In this section we will present the results of statistical analysis carried out on data seeking to answer the second research question and ascertain the following research hypothesis:

d) There is, for the groups of better and worse players, specific and differentiated relations between the ability to play and the ability to identify patterns.

In the statistical analysis of the groups of the best and worst players we decided to use the Kendall's Tau test whenever data presented many ties. The foundations for this option are based on the literature, which recommend Kendall's Tau test as a more robust test when too many ties are present on data (Field, 2000).

Next results will be presented concerning each of the games used in the study.

6.4.1. Ouri

Concerning the game *Ouri*, data collected from of 3rd and 4th years of schooling students of three primary schools allowed us to select 18 students that were better positioned in the ranking of championships. The analysis concerning this group of students revealed a positive relationship between the best players of *Ouri* ability to play and factor 7, that represents patterns involving more than one rule (τ = -0.542, $p <$ 0.01[10]). The group of the worst players did not reveal significant results. In other words, the coefficients presented significance below the 0.05 level.

Table 18. Correlation between the *Ouri* (best players) and Factor 7.

Kendall's tau		**Factor 7**
Ouri best players	*Correlation Coefficient*	-0.542(**) (1)
	Sig. (2-tailed)	0.008
	N	18

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

1 The negative coefficients are explained by an opposite direction between variables.

6.4.2. Traffic Lights

In the analysis of the best and worst players of the mathematical game Traffic Lights there are different situations, concerning each one of the championships organized. In the first, the seven better positioned students were selected from the ranking. The analysis of these best players of the championship reveled the existence of a strong positive relationship (r = -0.808, $p <$ 0.05[11]) close to the values obtained from the participants in the final of the national championship (CNJM).

[10] Negative because the ability to play was measured reverse to the ability to identify patterns.
[11] The same as footnote 10.

Table 19. Correlation between the Traffic Lights (best players) and the patterns identification test.

		Test
Traffic Lights	*Pearson Correlation*	-0.808(*) (1)
best players	*Sig. (2-tailed)*	0.014
	N	7

* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

1 The negative coefficients are explained by an opposite direction between variables.

Concerning the seven factors, a championship involving three primary schools and 13 students better positioned in the ranking showed the existence of a positive relationship between ability to play and Factor 2, identifying patterns that involve three terms repetition, for the best players ($\tau = -0.549$, $p < 0.05$[12]).

Table 20. Correlation between the Traffic Lights (best players) and Factor 2.

Kendall's tau		**Factor 2**
Traffic Lights	*Correlation Coefficient*	-0.549(*) (1)
best players	*Sig. (2-tailed)*	0.027
	N	13

* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

1 The negative coefficients are explained by an opposite direction between variables.

The analysis of the group of the worst players of this championship showed a negative relationship between the ability to play of these players and the ability to find patterns involving odd and even numbers ($\tau = 0.324$, $p < 0.05$). This coefficient was positive because the variables have different directions.

[12] Negative because the ability to play was measured reverse to the ability to identify patterns.

Table 21. Correlation between the Traffic Lights (worst players) and Factor 5.

Kendall's tau		**Factor 5**
Traffic Lights	*Correlation Coefficient*	0.324(*)
worst players	*Sig. (2-tailed)*	0.018
	N	43

* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

6.4.3. Dots and Boxes

In this study, Dots and Boxes players from 3rd and 4th year were organized in two distinct championships. From the first one, eight better players were selected. The results of the analysis, concerning these students, disclosed a strong positive relationship between the ability to play of the group of best players and the ability to identify patterns (r = -0.788, p < 0.05[13]).

Table 22. Correlation between the Dots and Boxes (best players) and the patterns identification test.

		Test
Dots and Boxes	*Pearson Correlation*	-0.788(*) (1)
best players	*Sig. (1-tailed)*	0.010
	N	8

* Correlation is significant at the 0.05 level (1-tailed).

1 The negative coefficients are explained by an opposite direction between variables.

The second one involved three primary schools from where we selected the seventeen better players. Concerning the seven factors identified behind the ability to identify patterns, we found a positive relationship between the ability to play Dots and Boxes and the ability to identify patterns involving numeric progressions - Factor 1 –

[13] Negative because the ability to play was measured reverse to the ability to identify patterns.

for the group of the best players (τ = -0.451; $p < 0.05$[14]) and counting – Factor 4 - (τ = -0.447; $p < 0.05$[15]).

Table 23. Correlation between the Dots and Boxes (best players) and Factor 1.

Kendall's tau		**Factor 1**
Dots and Boxes	*Correlation Coefficient*	-0.451(*) (1)
best players	*Sig. (2-tailed)*	0.025
	N	17

* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

1 The negative coefficients are explained by an opposite direction between variables.

Table 24. Correlation between the Dots and Boxes (best players) and Factor 4.

Kendall's tau		**Factor 4**
Dots and Boxes	*Correlation Coefficient*	-0.447(*) (1)
best players	*Sig. (2-tailed)*	0.048
	N	17

* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

1 The negatives coefficients are explained by an opposite direction between variables.

Concerning the group of the worst players, forty-five students with the lower performance in the championship were selected from the ranking. For these students a relationship was found between the ability to play and the ability to identify patterns involving odd and even numbers – Factor 5 - (τ = 0.287; $p < 0.05$).

Table 25. Correlation between the Dots and Boxes worst players and Factor 5.

Kendall's tau		**Factor 5**
Dots and Boxes	*Correlation Coefficient*	0.287(*)
worst players	*Sig. (2-tailed)*	0.039
	N	45

* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

[14] Negative because the ability to play was measured reverse to the ability to identify patterns.
[15] The same as footnote 14.

6.4.4. Cats & Dogs

From the championship organized with the game Cats & Dogs we selected the eight students with the worst performance. The statistical analysis revealed a relationship between the ability to play of the worst players and the ability to identify patterns involving more than one rule – Factor 7 - ($\tau = 0.626$; $p < 0.05$).

Table 26. Correlation between the Cats & Dogs (worst players) and Factor 7.

Kendall's tau		**Factor 7**
Cats & Dogs	*Correlation Coefficient*	0.626(*)
worst players	*Sig. (2-tailed)*	0.047
	N	8

* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

6.4.5. Dominó Belga

From the Championships of *Dominó Belga*, involving 3rd and 4th year students we selected the ten best players of the ranking. Concerning these best players, a positive relationship between the ability to play and the ability to find patterns involving odd and even numbers – Factor 5 - has been found (τ=-0.632; $p < 0.05$[16]).

Table 27. Correlation between the Dominó Belga (best players) and Factor 5.

Kendall's tau		**Factor 5**
Dominó Belga	*Correlation Coefficient*	-0.632(*)
best players	*Sig. (2-tailed)*	0.034
	N	10

* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

[16] Negative because the ability to play was measured reverse to the ability to identify patterns.

6.4.6. Syzygies

The statistical analysis of data collected from these players take into account the five players better positioned in the ranking and the six players with the worse position.

Regarding the group of best players of the 5th year we found a positive relationship between the ability to play and two factors: one related with the ability to find numeric progressions (r = -0.906, p < 0.05[17]) and the other with the ability to find patterns involving counting (r = -0.949, p < 0.05[18]).

Table 28. Correlation between the Syzygies (best players) and Factor 1.

		Factor 1
Syzygies	*Pearson Correlation*	-0.906(*) (1)
best players	*Sig. (2-tailed)*	0.034
	N	5

* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

1 The negative coefficients are explained by an opposite direction between variables.

Table 29. Correlation between the Syzygies (best players) and Factor 4.

		Factor 4
Syzygies	*Pearson Correlation*	-0.949(*) (1)
best players	*Sig. (2-tailed)*	0.014
	N	5

* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

1 The negative coefficients are explained by an opposite direction between variables.

The group of worst players also revealed a positive relationship between the ability to play and with the factor 1 - interpreted as numeric progressions (r = 0.878, p < 0.05). In fact, this group also showed a positive relationship with patterns involving

[17] Negative because the ability to play was measured reverse to the ability to identify patterns.
[18] The same as footnote 17.

counting failing the 5% significance level but close enough to deserve being pointed out (r = 0.791, p = 0.061).

Table 30. Correlation between the Syzygies (worst players) and Factor 1.

		Factor 1
Syzygies	*Pearson Correlation*	0.878(*)
worst players	*Sig. (2-tailed)*	0.021
	N	6

* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

Table 31. Correlation between the Syzygies worst players and Factor 4.

		Factor 4
Syzygies	*Pearson Correlation*	0.791
worst players	*Sig. (2-tailed)*	0.061
	N	6

6.5. Relationship between the ability to play games and standard assessments in Mathematics

With the third research question we wanted to know if the ability to play mathematical games or other games is related to the performance in the national standard assessments in Mathematics. These tests assess both together and separately the following four subjects: Numbers and Calculations; Geometry and Measurement; Algebra and Functions; Probability and Statistic.

In this section we will present the results of statistical analysis carried out on data seeking to answer the third research question and ascertain the following research hypothesis:

e) There is a relationship between the ability to play games and the standard assessments in Mathematics.

In attempting to confirm this hypothesis we collected the results of the assessment in the national standardized test in Mathematics from the 4^{th} year students participating in five distinct games, namely *Ouri*, Traffic Lights, Cats & Dogs and Syzygies. In the following sections we will present the results analysis concerning each one of these games.

6.5.1. Ouri

There were 24 4^{th} year of schooling students participating in the championship of *Ouri*. Concerning the standardized national tests (ST) of these students, the analysis revealed e positive relationship between the ability to play and the domain of Geometry and Measurement (r = -0.366, p < 0.05[19]).

Table 32. Correlation between the game *Ouri* and Geometry and Measurement.

Kendall's tau		**Geometry and Measurement**
Ouri	*Correlation Coefficient*	-0.366(*) (1)
	Sig. (2-tailed)	0.025
	N	24

* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

1 The negative coefficients are explained by an opposite direction between variables.

[19] Negative because the ability to play was measured reverse to the performance on ST.

6.5.2. Traffic Lights

Concerning the national standardized tests (ST) the analysis revealed a positive relationship between the ability to play and the global results in these tests (τ = -0.486, $p < 0.01$[20]).

Table 33. Correlation between the game Traffic Lights and ST.

Kendall's tau		**Standardized Tests**
Traffic Lights	*Correlation Coefficient*	-0.486(**) (1)
	Sig. (2-tailed)	0.004
	N	24

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

1 The negative coefficients are explained by an opposite direction between variables.

Taking into account the four areas of these tests we found positive relationships between the ability to play and the following areas: Numbers and Calculations (τ = -0.448, $p < 0.01$[21]); Geometry and Measurement (τ = -0.428, $p < 0.05$[22]); Algebra and Functions (τ = -0.431, $p < 0.05$[23]). The results concerning the area of Statistic and Probability were not significant at least at the 5% level so they are not reported.

Table 34. Correlation between the game Traffic Lights and Numbers and Calculations.

Kendall's tau		**Numbers and Calculations**
Traffic Lights	*Correlation Coefficient*	-0.448(**) (1)
	Sig. (2-tailed)	0.008
	N	24

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

1 The negative coefficients are explained by an opposite direction between variables.

[20] Negative because the ability to play was measured reverse to the performance on ST.
[21] The same as footnote 20.
[22] The same as footnote 20.
[23] The same as footnote 20.

Table 35. Correlation between the game Traffic Lights and Geometry and Measurement.

Kendall's tau		**Geometry and Measurement**
Traffic Lights	*Correlation Coefficient*	-0.428(*) (1)
	Sig. (2-tailed)	0.011
	N	24

* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

1 The negative coefficients are explained by an opposite direction between variables.

Table 36. Correlation between the game Traffic Lights and Algebra and Functions.

Kendall's tau		**Algebra and Functions**
Traffic Lights	*Correlation Coefficient*	-0.431(*) (1)
	Sig. (2-tailed)	0.013
	N	24

* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

1 The negatives coefficients are explained by an opposite direction between variables.

6.5.3. Cats & Dogs

The analysis from the thirty-one students of 4th year of schooling did not reveal any significant relationship between the ability to play Cats & Dogs and the performance in the mathematics national standardized tests.

6.5.4. Dominó Belga

The analysis from the eighteen students of 4th year of schooling did not reveal any significant relationship between the ability to play *Dominó Belga* and the performance in the mathematics national standardized tests.

6.5.5. Syzygies

The analysis from the eighteen students of 4th year of schooling did not reveal any significant relationship between the ability to play Syzygies and the performance in the mathematics national standardized tests.

CAPÍTULO 7

QUASI-EXPERIMENTAL ANALYSIS

7.1. Introduction

With the fourth research question we wanted to know if playing systematically mathematical games or solving problems in a game context would cause changes in the ability to identify patterns. To seek to answer this research question we carried out a quasi-experimental analysis involving two mathematical games, the game Traffic Lights and the game *Ouri*.

Results obtained from quasi-experimental analysis will be presented in this section taking into account the research question related to this analysis (4), and the research hypotheses that emerged from this question (f), which are as follows:

4. Are there significant differences in the ability to identify patterns when comparing the systematic practice of mathematical games with problem solving in a game context?

   f) There are significant differences in the ability to identify patterns between the systematic practice of mathematical games and problem solving in a game context.

As it was intended to verify if there were significant differences between the results obtained in the post-test of groups, controlling the effect of the pre-test, we used the analysis of covariance (ANCOVA). This analysis allows to verify the effect of the group factor on the dependent variable (post-test) controlling the effect of the variable pre-test (covariate).

In the following sections the results will be presented taking into account the two games (Traffic Lights and *Ouri*) used in the quasi-experimental analysis.

7.2. Traffic Lights

To determine if there are significant differences in the ability to identify patterns between the systematic practice of Traffic Lights and problem solving in a Traffic Lights context we decided to use the analysis of covariance (ANCOVA). In this analysis the factor is the group (0 = Control, 3 = Problem Traffic Lights, 4 = Game Traffic Lights), the dependent variable is the posttest result and the covariate is the pretest result. The independent variable is the pretest which allows controlling its influence on the posttest, even if partially. Therefore, it makes possible the analysis of the relationship between the dependent variable posttest and the group factor.

For the quasi-experimental analysis we used a sample of 73 students, 24 belonging to the control group (control), 25 to the experimental group whose treatment was problem solving in a game context (Traffic-Lights Problems) and 24 to the group whose treatment was systematic game practice (Game Traffic-Lights). The experimental groups had a treatment of 13 sessions with 45 minutes each one, which was undertaken for approximately three months, between January and March.

Throughout the sessions, the group subject to systematic practice of Traffic Lights, learned and practiced the game, after which a championship was organized. The group subject to problem solving in a Traffic Lights context solved a total of 14 problems. The first and the last sessions were used for testing all classes with respectively pretest and posttest.

The test used in this research (pretest and posttest) has 24 questions and a maximum score of 288 points. In the analysis we used the percentage to the total score. The box plots analysis of the distribution of scores in the pretest and posttest with the experimental group of problem solving in a game context revealed the existence of an outlier in the posttest (Figure 36). This outlier corresponds to 22, which is the lowest score achieved in the posttest. This diagram also revealed an increase in the average of posttest scores and a larger range of scores in the pretest.

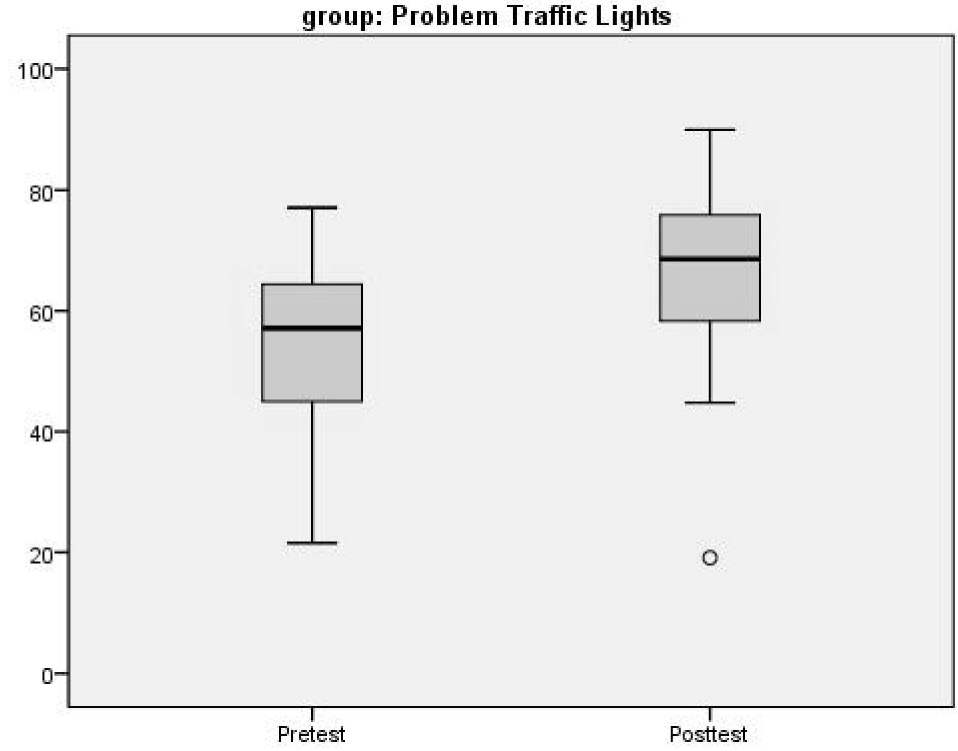


Figure 36. Box plots of Pretest and Posttest from Problem Traffic Lights Problems group.

Table 37. Descriptive statistic of pretest and posttest from Problem Traffic Lights group.

	Pretest	Posttest
M	53.59	66.00
SD	15.66	15.80
Q1	42.53	56.25
Median	57.12	68.58
Q3	64.41	75.95
Min	22	19
Max	77	90

For the treatment group of Traffic Lights Problems (problem solving in a game context) the average score in the pretest was 53.59 (*SD* = 15.12) and the median was 57.12, slightly above the average. The descriptive statistic analysis also reveals that 50% of the scores are between 42.53 (*Q*1) and 64.41 (*Q*3). The range is 55. Concerning the posttest the average score was 66 (*SD* = 15.80) and the median was 68.58. The analysis of quartiles reveals that 50% of the scores are between 56.25 (*Q*1) and 75.95 (*Q*3). The posttest has a range of 71 (Table 37).

The box plots analysis of the distribution of scores in the pretest and posttest from the experimental group of systematic practice of game Traffic Lights revealed the existence of an outlier in the pretest (Figure 37). This outlier correspond to 84, which is the highest score achieved in the pretest. This diagram like in the previous group revealed an increase in the average of posttest scores and a larger range of scores in the pretest.

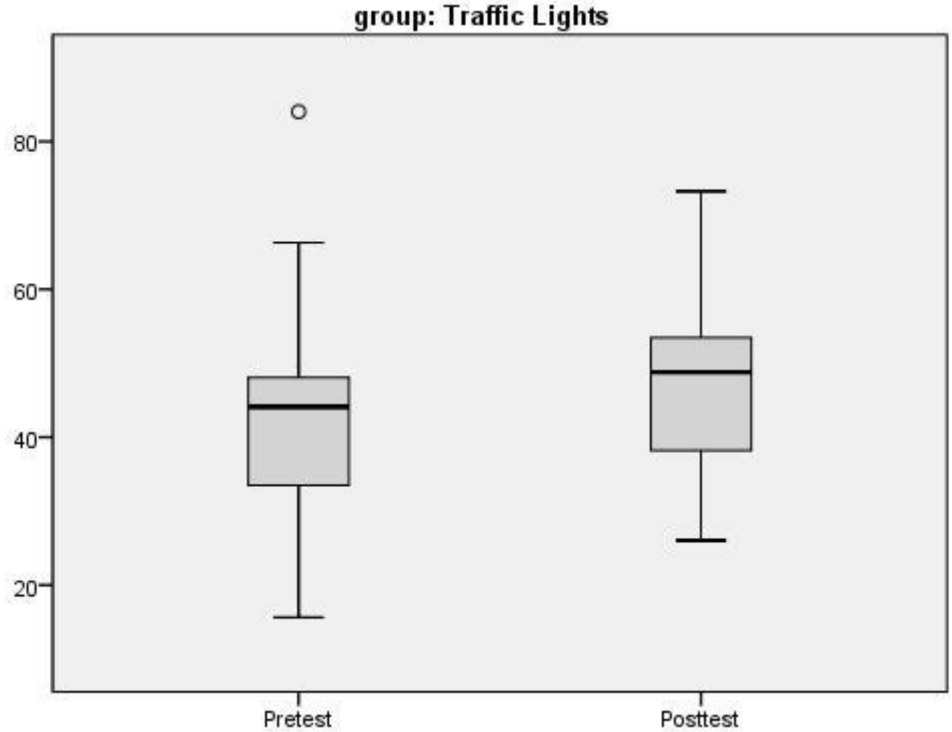


Figure 37. Box plots of Pretest and Posttest from Game Traffic Lights group.

Concerning the group Game Traffic Lights, the average score in the pretest was 41.75 (*SD* = 15.10) and the median was 44.10. The descriptive statistic analysis also reveals that 50% of the scores are between 32.73 (*Q*1) and 48.35 (*Q*3), as well as a range of 68. In the posttest the average score was 47.60 (*SD* = 12.88) and the median was 48.78. The analysis also reveals that 50% of the scores of the posttest are between 37.85 (*Q*1) and 53.82 (*Q*3). The range is 47(Table 38).

Table 38. Descriptive statistic of pretest and posttest from Game Traffic Lights group.

	Pretest	**Posttest**
M	41.75	47.60
SD	15.10	12.88
Q1	32.73	37.85
Median	44.10	48.78
Q3	48.35	53.82
Min	16	26
Max	84	73

The analysis of covariance (ANCOVA) allows us to find the existence of significant differences among groups on posttests scores (dependent variable) controlling the effect of pretests scores (covariate). In the analysis of ANCOVA we used intact groups, which are the classes already existent in schools prior the study. The use of intact groups instead of randomizations is due to ethical reasons related to the nature of the study that fits in an educational research.

Concerning the analysis involving the game Traffic Lights we used three intact groups. One was used as a control group and the other two were the experimental groups. The experimental groups experienced different interventions over three months. The different treatments were as follows: a) problem solving in a game context; b) systematic practice of game.

There are some assumptions that underline the analysis of ANCOVA. In this analysis we considered the following five assumptions: 1) normality of distribution; 2) homogeneity of variance; 3) the covariate is measured without error; 4) the covariate and dependent variable are linearly related to each other; 5) homogeneity of regression slops. Although it is present in the last point, the homogeneity of regression slops is very important in the analysis of Covariance (Field, 2000).

The normality of distribution was tested by the Kolmogorov-Smirnov and Shapiro-Wilk tests. In the statistical analysis it was found that for all groups both pretest and posttest showed a significance level greater than 0.05 (p > 0.05), which reveals that the distributions are not significantly different from the normal distribution. This confirms the assumption of normality.

Table 39. Normality tests of pretest for all groups.

	Group	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
		Statistic	*Df*	*Sig.*	*Statistic*	*Df*	*Sig.*
Pretest	Control	0.107	24	0.200*	0.968	24	0.618
	Problem-Traffic Lights	0.125	24	0.200*	0.945	24	0.215
	Game-Traffic Lights	0.142	24	0.200*	0.944	24	0.205

a. Lilliefors Significance Correction

*. This is a lower bound of the true significance.

Table 40. Normality tests of posttest for all groups.

	Group	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
		Statistic	*Df*	*Sig.*	*Statistic*	*Df*	*Sig.*
Posttest	Control	0.129	24	0.200*	0.954	24	0.331
	Problem-Traffic Lights	0.163	24	0.101	0.916	24	0.047
	Game-Traffic Lights	0.120	24	0.200*	0.951	24	0.281

a. Lilliefors Significance Correction

*. This is a lower bound of the true significance.

The assumption of the homogeneity of variance was tested by the Levene's test. The statistical analysis revealed that variances did not differs significantly between groups F (2.69) = 0.374 and p > 0.05. This means that the assumption of variance was assumed.

Table 41. Homogeneity of variance for posttests of all groups.

		Levene Statistic	**df1**	**df2**	**Sig.**
Posttest	Based on Mean	0.374	2	69	0.690
	Based on Median	0.259	2	69	0.773
	Based on Median and with adjusted df	0.259	2	65.546	0.773
	Based on trimmed mean	0.331	2	69	0.720

The reliability of the covariate was measured with Cronbach's Alpha, which measures the internal consistency of items. This analysis was conducted in a previous study for which the test was constructed and validated (Ferreira & Palhares, 2008). Fraenkel and Wallen (1990) claim that the Cronbach's Alpha coefficient must be greater than 0.70. However, there are some references accepting values lower than 0.70 (Santos, 1999). In the test presented by Ferreira e Palhares (2008) the Cronbach's Alpha coefficient established was 0.763.

The fourth assumption stated that covariate (pretest) and dependent variable (posttest) must be linearly related to each other. To test this assumption we used the Pearson (r) correlation coefficient within each group.

Table 42. Correlation between pretest and posttest for control group.

Group		Pretest	Posttest
Control	*Pearson Correlation*	1	0.614**
	Sig. (2-tailed)		0.001
	N	24	24
**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).			

Table 43. Correlation between pretest and posttest for problem Traffic Lights group.

Group		Pretest	Posttest
Problem-Traffic Lights	*Pearson Correlation*	1	0.679**
	Sig. (2-tailed)		0.000
	N	25	24
**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).			

Table 44. Correlation between pretest and posttest for Game Traffic Lights group.

Group		Pretest	Posttest
Game-Traffic Lights	*Pearson Correlation*	1	0.660**
	Sig. (2-tailed)		0.000
	N	24	24
**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).			

The analysis of correlations coefficients revealed that there is a linear relationship statistically significant between pretest and posttest for all groups, namely $r = 0.614$, $p < 0.01$ for the Control group, $r = 0.679$, $p < 0.01$ for Traffic Lights Problems and $r = 0.660$, $p < 0.01$ for Game-Traffic Lights.

Finally, the assumption of the homogeneity of regression slops was tested. The statistical analysis revealed there is no significant interaction between the results of pretest and group (F (2.66) = 0.507, $p > 0.05$). As the covariate by factor group interaction is non-significant ($p > 0.05$), the homogeneity of regression slops has been assumed.

Table 45. Homogeneity of regression slops in the Group and Pretest interaction.

Source	**Type III Sum of Squares**	**Df**	**Mean Square**	**F**	**Sig.**
Corrected Model	11039.244[a]	5	2207.849	17.569	0.000
Intercept	6241.790	1	6241.790	49.669	0.000
Group	249.896	2	124.948	0.994	0.375
Pretest	6064.943	1	6064.943	48.262	0.000
Group * Pretest	127.312	2	63.656	0.507	0.605
Error	8294.026	66	125.667		
Total	271555.869	72			
Corrected Total	19333.270	71			

a. R Squared = 0.571 (Adjusted R Squared = 0.538)

In this point, all the assumptions were satisfied and the analysis of covariance was conducted to determine the existence of significant differences between groups.

Table 46. Covariance analysis between groups.

Source	**Type III Sum of Squares**	**Df**	**Mean Square**	**F**	**Sig.**
Corrected Model	10911.933[a]	3	3637.311	29.370	0.000
Intercept	6574.274	1	6574.274	53.085	0.000
Pretest	6027.402	1	6027.402	48.670	0.000
Group	1699.064	2	849.532	6.860	0.002
Error	8421.337	68	123.843		
Total	271555.869	72			
Corrected Total	19333.270	71			

a. R Squared = 0.564 (Adjusted R Squared = 0.545)

The analysis of covariance revealed significant differences between groups, F (2.68) = 6.860 and p <0.01. With this result we found that there are at least two groups in which the performance in the post-test differs significantly.

The results of contrast analysis revealed that the group Traffic Lights Problems (level 2) and control group (level 1) do not differ significantly (p > 0.05). Comparing the group game Traffic Lights (level 3) and the control group, it was found that the differences are significant (p < 0.05). As the confidence interval does not include zero, we were confident that the differences between groups Game Traffic Lights and control are genuine (Field, 2009).

Table 47. Contrast analysis.

group Simple Contrast[a]			**Dependent Variable**
			Posttest
Level 2 vs. Level 1	Contrast Estimate		1.768
	Hypothesized Value		0
	Difference (Estimate - Hypothesized)		1.768
	Std. Error		3.213
	Sig.		0.584
	95% Confidence Interval for Difference	Lower Bound	-4.643
		Upper Bound	8.179
Level 3 vs. Level 1	Contrast Estimate		-9.888
	Hypothesized Value		0
	Difference (Estimate - Hypothesized)		-9.888
	Std. Error		3.344
	Sig.		0.004
	95% Confidence Interval for Difference	Lower Bound	-16.561
		Upper Bound	-3.215

a. Reference category = 1

7.3. Ouri

To determine if there are significant differences in the ability to find patterns between the systematic practice of *Ouri* and problem solving in a *Ouri* context we decided to use the analysis of covariance (ANCOVA). In this analysis the factor is the group (0 = Control, 1 = Problem *Ouri*, 2 = Game *Ouri*), the dependent variable is the posttest results and the covariate is the pretest results. The independent variable is the pretest which allows controlling its influence on the posttest, even if partially, therefore making possible the analysis of the relationship between the dependent variable posttest and the factor group.

For the quasi-experimental analysis, concerning the game *Ouri*, we used a sample of 71 students belonging to the three groups and distributed as follows: 24 for the control group (control), 24 for the experimental group whose treatment was problem solving in a game context (Problem *Ouri*) and 23 to the group whose treatment was systematic practice of game (Game *Ouri*). The experimental groups had a treatment of 13 sessions with 45 minutes each one, which was undertaken for approximately three months, between January and March.

Throughout the sessions, the group subject to systematic practice of *Ouri*, learned and practiced the game, after which a championship was organized. The group subject to problem solving in a *Ouri* context solved a total of 13 problems. The first and the last sessions were used for testing all classes with respectively pretest and posttest.

As mentioned before, the test used in this research (pretest and posttest) has 24 questions and a maximum score of 288 points. However, in the analysis we used the percentage of scores. The box plots analysis of the distribution of the scores in pretest and posttest from the experimental group of problem solving in a game context revealed the existence of two outliers in the pretest (Figure 38). These outliers correspond of 31 and 87, respectively the lowest and the highest scores achieved in the pretest. This diagram also revealed an increase in the average of posttest scores.

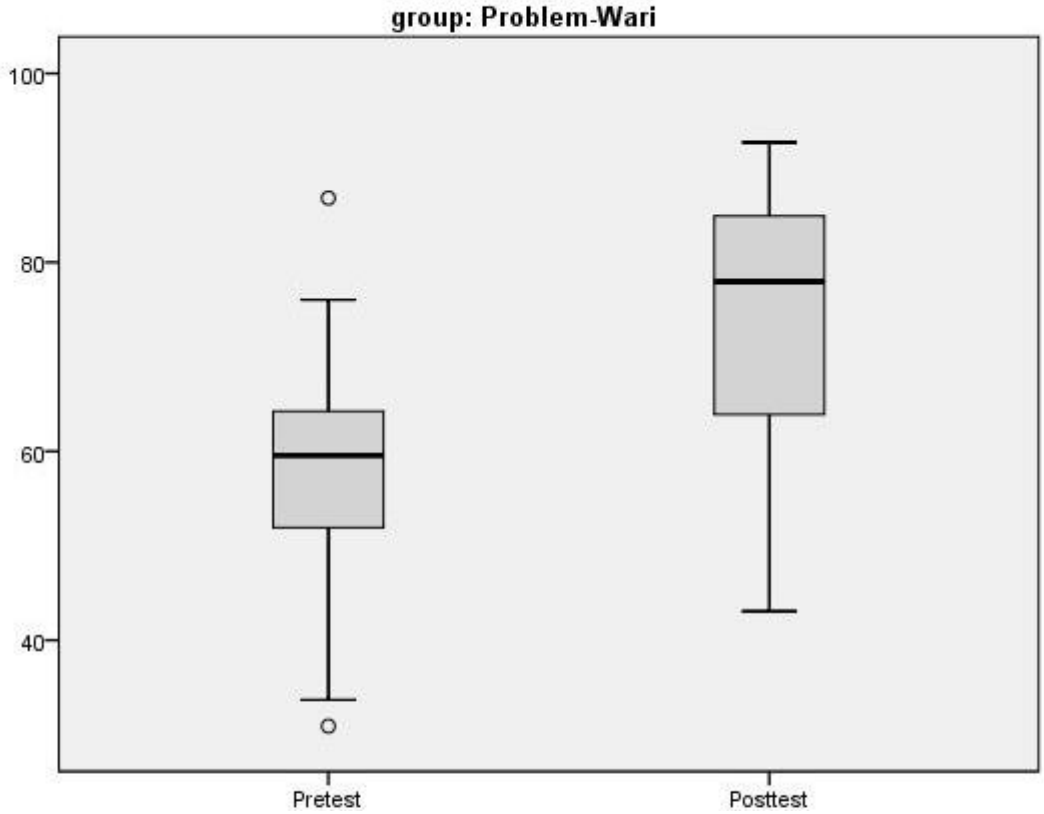


Figure 38. Box plots of Pretest and Posttest from *Ouri* Problems group.

Table 48. Descriptive statistic of pretest and posttest from Problem *Ouri* group.

	Pretest	Posttest
M	57.29	73.86
SD	13.25	13.79
Q1	51.65	63.54
Median	59.55	77.95
Q3	64.41	84.98
Min	31	43
Max	87	93

Concerning the group *Ouri* Problems, the average scores in the pretest was 57.29 (*SD* = 13.25) and the median was 59.55. In the posttest the average score was 73.86 (*SD* = 13.79) and the median was 77.95. The analysis of descriptive statistic also revealed that 50% of the scores of the pretest were between 51.65 (*Q*1) and 64.41

(*Q*3), and 50% of the scores of the posttest were between 63.54 (*Q*1) and 84.98 (*Q*3). The range of pretest and posttest are respectively 56 and 50 (Table 48).

The box plots analysis of the distribution of scores in the pretest and posttest from the experimental group of systematic practice of *Ouri* revealed an increase in the average of posttest scores and a large range in the posttest scores (Figure 39).

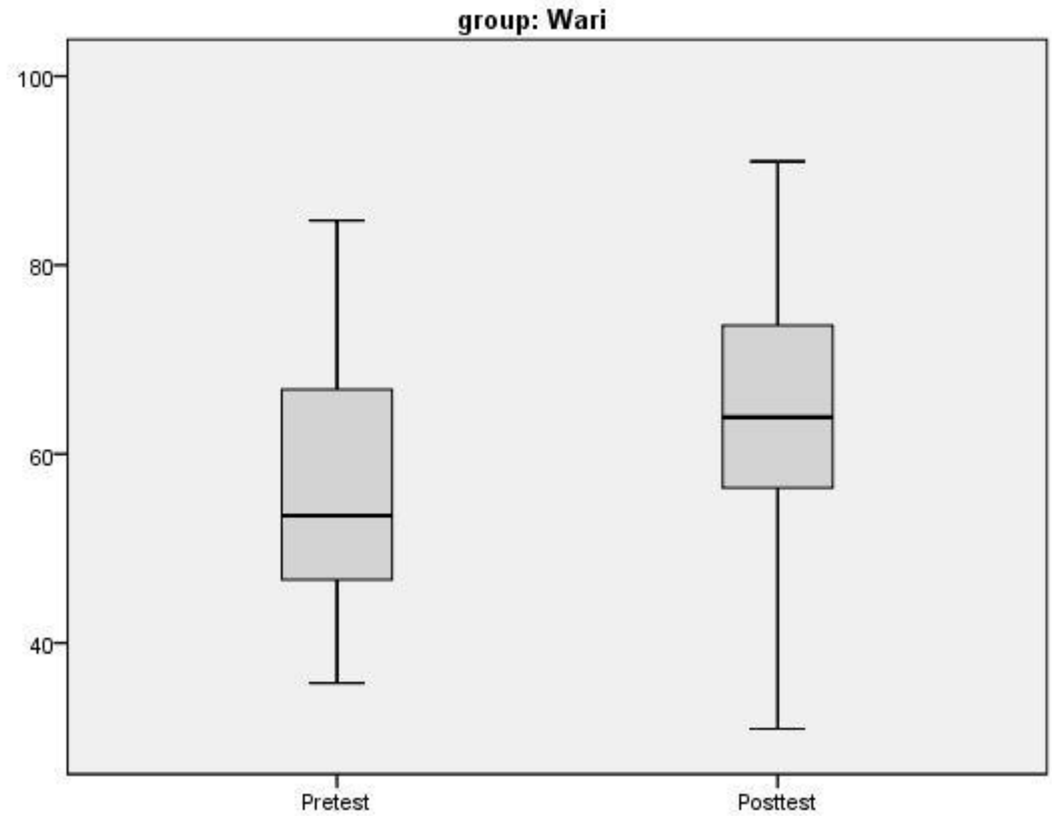


Figure 39. Box plots of Pretest and Posttest from Game *Ouri* group.

By the analysis of descriptive statistic we found that the average scores of the group game *Ouri* in the pretest was 57.15 (*SD* = 13.97), the median was 53.47 and the range was 49. In the posttest the average score was 65.01 (*SD* = 14.84, the median was 63.89 and the range was 60. The analysis of descriptive statistic also reveals that 50% of the scores of the pretest are between 46.09 (*Q*1) and 71.53 (*Q*3), and 50% of the scores of the posttest are between 55.56 (*Q*1) and 75.35 (*Q*3) (Table 49).

Table 49. Descriptive statistic of pretest and posttest from Game *Ouri* group.

	Pretest	**Posttest**
M	57.15	65.01
SD	13.97	14.84
Q1	46.09	55.56
Median	53.47	63.89
Q3	71.53	75.35
Min	36	31
Max	85	91

Concerning the analysis involving the game *Ouri* we used three intact groups. One was used as a control group and the other two were the experimental groups. The experimental groups experienced different interventions over three months. The different treatments were as follows: a) problem solving in a game context; b) systematic practice of game. The option for the analysis of covariance (ANCOVA) is due to the fact that this analysis is appropriate to find the existence of significant differences among groups on posttests scores (dependent variable) controlling the effect of pretests scores (covariate). Ethical reasons related to the nature of the study that fits in educational research led us to use intact groups, which are the classes already existent in schools prior the study.

As in the ANCOVA conduced with the game Traffic Lights, we had into account some assumptions that underline the analysis of ANCOVA, namely 1) normality of distribution; 2) homogeneity of variance; 3) the covariate is measured without error; 4) the covariate and dependent variable are linearly related to each other; 5) homogeneity of regression slops. Field (2000) claims that the homogeneity of regression slops is very important in the analysis of Covariance.

The normality of distribution was tested by the analysis of Kolmogorov-Smirnov and Shapiro-Wilk tests. In the statistical analysis it was found that for all groups both pretest and posttest showed a significance level greater than 0.05 ($p > 0.05$), which reveals that the distributions are not significantly different from the normal distribution. This confirms the assumption of normality.

The assumption of the homogeneity of variance was tested by the Levene's test. The statistical analysis revealed that variances did not differs significantly between groups F (2.68) = 0.328 and $p > 0.05$. This means that the assumption of variance was assumed.

The third assumption is the reliability of the covariate. As already presented in the previous point, the reliability of the covariate was measured using Cronbach's Alpha in a different study for which the test was constructed and validated (Ferreira & Palhares, 2008). The Cronbach's Alpha must be greater than 0.70 (Fraenkel & Wallen, 1990) and the coefficient established was 0.763.

The fourth assumption stated that covariate (pretest) and dependent variable (posttest) must be linearly related to each other. To test this assumption we used the Pearson (*r*) correlation coefficient within each group. The analysis revealed a linear relationship statistically significant between pretest and posttest for all groups, namely $r = 0.614$, $p < 0.01$ for Control group, $r = 0.677$, $p < 0.01$ for *Ouri* Problems and $r = 0.511$, $p < 0.05$ for Game-Ouri.

The last assumption was the assumption of the homogeneity of regression slops. The statistical analysis revealed a significant interaction between the results of pretest and group (F (3.67) = 16.113, $p < 0.01$). As the covariate by factor group interaction is significant ($p < 0.001$), the homogeneity of regression slops has been broken. This assumption is considered in literature as being important in the analysis of covariance (Field, 2009) and it is not recommended to insist on the ANCOVA when it is not tenable. Therefore it is not possible to find if there are significant differences between the systematic practice of *Ouri* and problem solving on *Ouri* context in the ability to identify patterns.

CAPÍTULO 8

DISCUSSION OF THE FINDINGS

8.1. Introduction

This chapter will discuss the main findings achieved in the research. As we have conducted two distinct studies, although complementary, we will present the discussion in two sections. The first one will address the correlational study and the other one the quasi-experimental study. In these distinct studies we decided to present the discussion for each game what we think is a better way to disclose the different relationships between the ability to play each one of the games and the ability of pattern identification, and the national standard test of mathematics.

8.2. Correlation between games and patterns

One of the goals of this study was to identify possible relationships between the ability to play different games and pattern identification. According to the literature, in the game of chess there are relevant differences between Grand Masters and lower level players (Simon, 1992) or experienced and less experienced players (Charness, Reingold, Pomplun & Stampe, 2001). The conclusions pointed out by these authors led us to focus on the existence of possible differences between better and worse players. In addition, as in Portugal the 4th grade students are every year assessed in mathematics by standardized tests, it was also probed to find the existence or not of relationships between the ability to play games and the results obtained in this national assessment in mathematics, concerning the group of 4th grade students. These tests assess together and separately the following four subjects: Numbers and

Calculations; Geometry and Measurement; Algebra and Functions; Probability and Statistic.

As a result of the aims of the study the research questions emerged. With the first question we wanted to know if the ability to play mathematical games or other games is related to the ability to find patterns. With the second research question we wanted to know if being better or worse player disclosed different relationships between the ability to play and the ability to identify patterns. With the third research question we wanted to know if the ability to play mathematical games or other games is related to the performance on the national standard assessments in Mathematics. A correlational study was undertaken to answer these questions. In this analysis were involved mathematical games (games of perfect information), such as Traffic Lights, *Ouri*, Dots-and-Boxes and Cats & Dogs. The analysis also took into account one game of imperfect information and one one-person game. The game of imperfect information selected was *Dominó Belga* and the one-person game was Syzygies, a word game. In the following sections we will discuss the findings for each one of these games.

In the statistical analysis several tests were used, namely the Pearson test of correlation and using the square of this coefficient (R^2) for interpretation (Field, 2000). According to Chen and Popovich (2002) R^2 can be interpreted as a ratio of the explained variation to the total variation. The Kendall's tau (τ) test was used whenever data presented many ties. The use of this test is considered as a more robust alternative to the Spearman test (Pestana & Gageiro, 2000; Field, 2000).

8.2.1. Traffic-Lights

Throughout the study it was necessary to teach students how to play Traffic Lights. In these sessions it was possible to observe that students easily learned the rules of the game. However in the first games it was often noticed some play inaccuracies, such as the incorrect insertion of the pieces, for instance by placing a yellow or red piece in an empty house. It was also detected that some students persisted in the use of green pieces, thus losing the game quickly. Nevertheless most of the students soon overcame these difficulties. Students played the game in a very short time. Therefore, Traffics Lights seems to be an easy game to teach students of 3rd and 4th grades. Moreover, it is easy to make the pieces and the board, has simple rules and it is played quickly.

Considering the mathematical game Traffic Lights the correlational analysis involved students from 3rd and 4th grades. In this analysis, the ability to play Traffic Lights revealed to be related to the ability to identify patterns, having a higher correlation coefficient for the group constituted only by 4th year students. The results revealed that for 4th grade students 24% of the variance in the ability to find patterns can be accounted for by the ability to play Traffic Lights. It was also found that this relationship was stronger in the group of the best players. In the analysis conducted with groups of the best players, the correlation coefficients were higher than 0.75, revealing a strong relationship between variables. In addition, the r-squared allow us to say that for the best players 64% of the variability on the ability to find patterns can be explained by the variability on the ability to play. As the group of the best players is always a group consisting of a few students, further research would be desirable involving more groups. However the analysis carried out in this research showed consistency in the results.

Considering the results obtained in the analysis of these students we are able to say that the better a student plays the game Traffic Lights, the more successful he will be at identifying patterns. For the group of best players, the study results also suggest that more particularly the better the player, the more successful he will be at identifying repeating patterns involving three terms repetition. This relationship can be explained by characteristics inherent to the game itself, including the fact that the pieces have three colors, the aim of the game (to place three pieces in a row) and the fact that there are three rules for the placement of the pieces. By internalizing these patterns present in the game, students may develop higher predisposition to identify the unit that repeats in the repeating patterns present in the test, since this unit also consists of three elements. These characteristics combined with game strategies may possibly increase the student's ability to identify repeating patterns.

Concerning the group of worst players of Traffic Lights it was found that there is a small relationship between the ability to play and the ability to identify patterns involving odd or even numbers. This relation shows that in the group of worst players of Traffic Lights, the worse the player is in the game, the less success in the identification of patterns that involve parity issues. Neto and Silva (2004) claim that victory or defeat in the game Traffic Lights depends on the number of moves available to players, being decisive whether the number is odd or even. Therefore, the relationship identified among the worst players and factor 5 (odd and even numbers) may be explained by the peculiarity of the count of moves available which is also conditioned by parity issues.

One of the goals of this study was to find the existence or not of relationships between the ability to play games and the results obtained in the national assessment in mathematics through standardized tests (ST). Regarding the group of 4^{th} grade students Traffic Lights players, the statistical analysis revealed that there is a relationship between the ability to play Traffic Lights and the global results in the ST. The analysis revealed that this relationship is also present for three of the four subjects measured through ST, namely Numbers and Calculations, Geometry and Measurement and Algebra and Functions. The relationship between the ability to play Traffic Lights and ST is moderate for both global results and the three subjects. Moreover 18 to 24% of the total variance in the ability to identify patterns accounts for the results obtained in standardized tests in mathematics and *vice versa*.

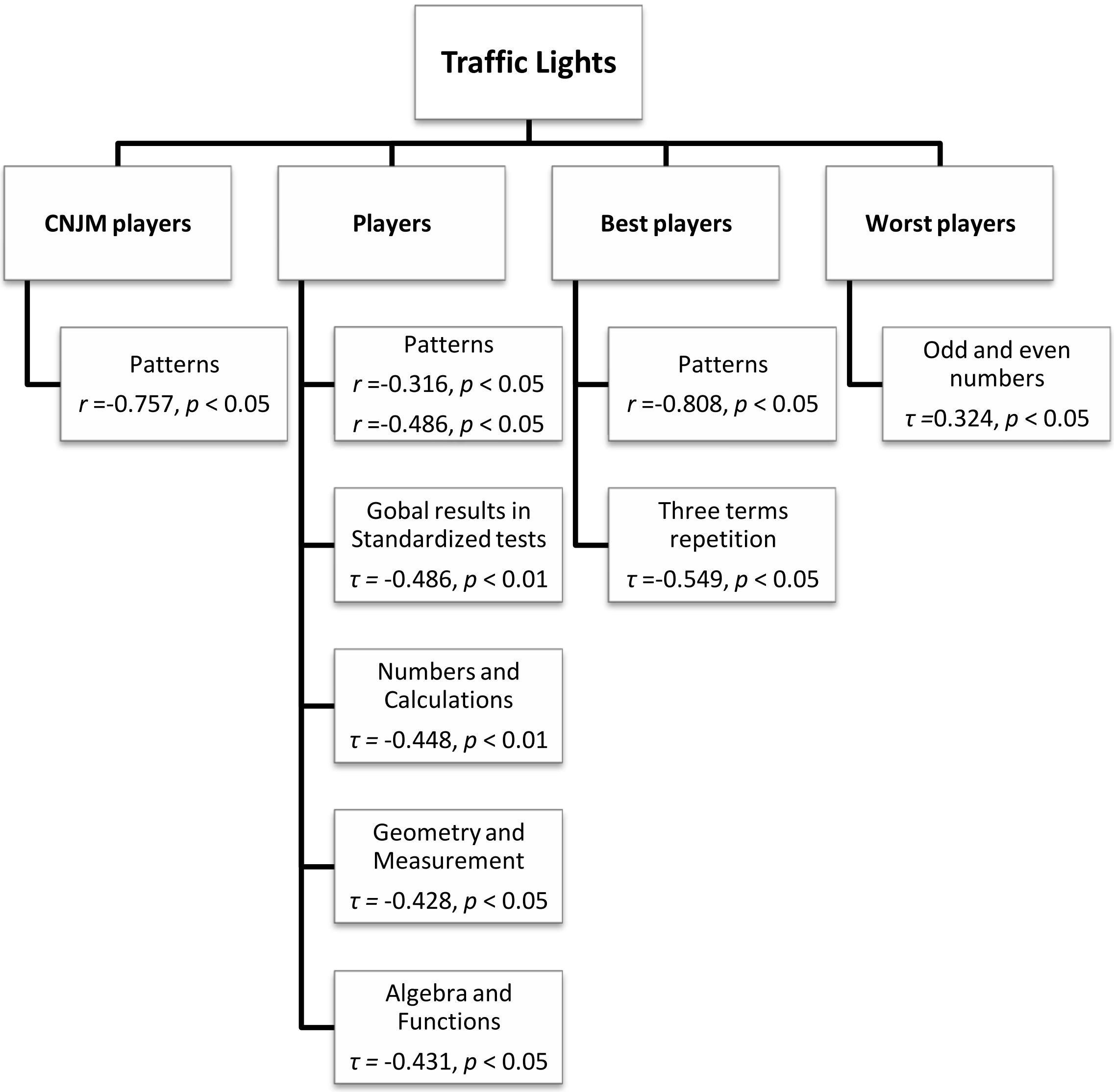


Figure 40. Relationships concerning the game Traffic Lights.

8.2.2. Ouri

The *Ouri* is a mathematical game as is Traffic Lights. However *Ouri* is very different in many aspects. First of all, it is not as quickly played as Traffic Lights. Students take much longer to play one *Ouri* game. They spend some time counting pieces and sometimes scattering seeds in their turn. Secondly, the rules are more complex, especially in end game situations. There are some particular cases and students revealed some difficulty in the acquisition and comprehension of all the rules.

Finally, it takes longer to find the winner, or at least it is not as immediate as in Traffic Lights. Students do not always count the pieces that accumulate in their side and, sometimes it is necessary the help of someone else. The material is specific and it is not very easy to find. Nevertheless, the material is easily replaced by recyclable material such as egg boxes and beans. Students enjoyed playing *Ouri* and were always very anxious to know the ranking of the championship.

Results revealed that for these students the ability to play *Ouri* has a moderate relationship significant at the 1% level (more accurate than the 5% level) with pattern recognition and a moderate relationship at the 5% level with the mathematical domain of Geometry and Measurement in the national standardized tests. In the group of the best players the moderate relationship identified at the 1% level of significance allows us to conclude that the better you are, the more successful you are at identifying patterns where more than one rule is intrinsic. The results also revealed that a) 16% of the variance in the ability to identify patterns can be explained by the variance in the ability to play *Ouri*; b) 13% can be explained in the ability in tasks involving geometry and measurement skills; c) 29% of the variance in the ability to identify patterns involving more than one rule can be explained by the variance in the ability to play for the group of *Ouri* best players. Therefore, if playing *Ouri* may predict the student's ability to identify patterns, playing *Ouri* very well allows a more secure and more particular prediction on that ability. Playing *Ouri* seems to be a good activity to implement with students in order to develop the ability to identify patterns, but it is better to play it very well. Like with Traffic Lights, the game *Ouri* plays an important role in elementary student's ability to identify patterns, an important issue in mathematics education.

The results obtained in this study are in accordance to some aspects of what is reported in literature. In fact there are some references linking the practice of *Ouri* with mathematics issues. Lancy (In Retschitzki & Wicht, 2008) states that in some societies the game *Ouri* is the activity that requires more math skills. From an etnomathematics perspective Chemillier (2007) argues the existence of a relationship between *Ouri* experts reasoning and that of mathematicians interested in the game. According to Retschitzki and Wicht (2008) playing *Ouri* allows students to practice counting as well as the basic operations used in elementary school. However, in this research the analysis concerning specific patterns (the seven patterns of factorial analysis) revealed a relationship between the *Ouri* best players and patterns involving more than one rule instead of patterns involving counting skills. Probably, for the students involved in this research it is more relevant to understand the rules well than to have counting skills to be successful at *Ouri*. In fact *Ouri* rules are full of exceptions and students have some difficulties in handling them. Moreover, the analysis concerning national standardized tests in mathematics shows that playing *Ouri* seems to be related only with geometry and measurement issues, although we expected a relationship with the domain of numbers and calculations. One possible explanation could be that these students have a geometric approach of the game *Ouri* instead of a numeric. Board games have a symmetric configuration and symmetry is used as a strategy to play *Ouri* in some problems analyzed by Carvalho and Santos (2007).

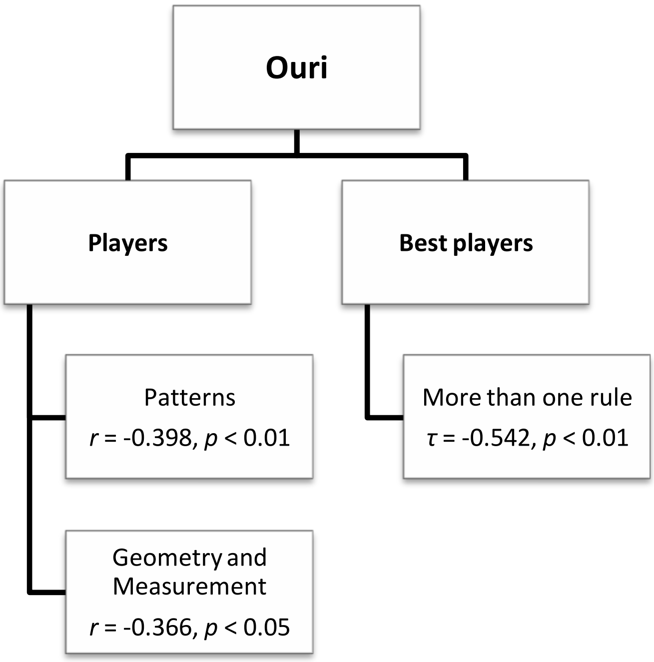


Figure 41. Relationships concerning the game *Ouri*.

8.2.3. Dots and Boxes

Dots and Boxes is a simple game but even so it can be played at different levels of sophistication. As Richard Nowakowsky (1991) states there are four hierarchic levels of play. The first one is related to the attitude of collecting all the boxes that are available to take. Players try not to give away any boxes to the opponent. The second level is reached when players know how to use the double-dealing endgame strategy. In this move, players gets the control of the game, mainly the control of the long chains of boxes, by giving to the opponent the last two boxes and forcing him to open the next chain. A double-dealing move is followed by a doublecrossed move, where the opponent gets two boxes in one turn. The third level is concerned with the use of the parity rule for long chains. This rule depends on three conditions: the number of dots, the number of doublecrossed moves and if you are the first or the second player. Therefore, the sum of the initial points with the doublecrossed moves must be odd if you play first and even if you play second. The last level is the professional level. Nowakowsky also points out that most of the players remain in the first level, taking boxes as soon as they are available. The use of this strategy by most of the players probably explains the results obtained in the analysis. The group of best players revealed a strong relationship with the ability to identify patterns. Moreover 62% of the common variance is explained by the relationship between the two variables. Concerning the results presented we can say that for the best Dots and Boxes players the better you are, the more successful you are at identifying patterns involving numeric progressions or counting. Counting seems to be important in this game. Players should pay attention to the number of boxes that are available to take as well as to the dots. However, for the group of worst players it seems to be relatively important the relationship with a different factor. For this group, the statistical analyses reveal a small relationship with patterns that involve odd and even numbers. Subsequently, the worse the player, the less successful he will be at identifying patterns related with odd and even numbers. As we stated previously, parity is associated to the third level of expertise in playing the Dots and Boxes game. Therefore, these results seem to be consistent with some aspects reported in literature. Perhaps, not to be aware of the parity rule is more decisive to the worst players than to the other players.

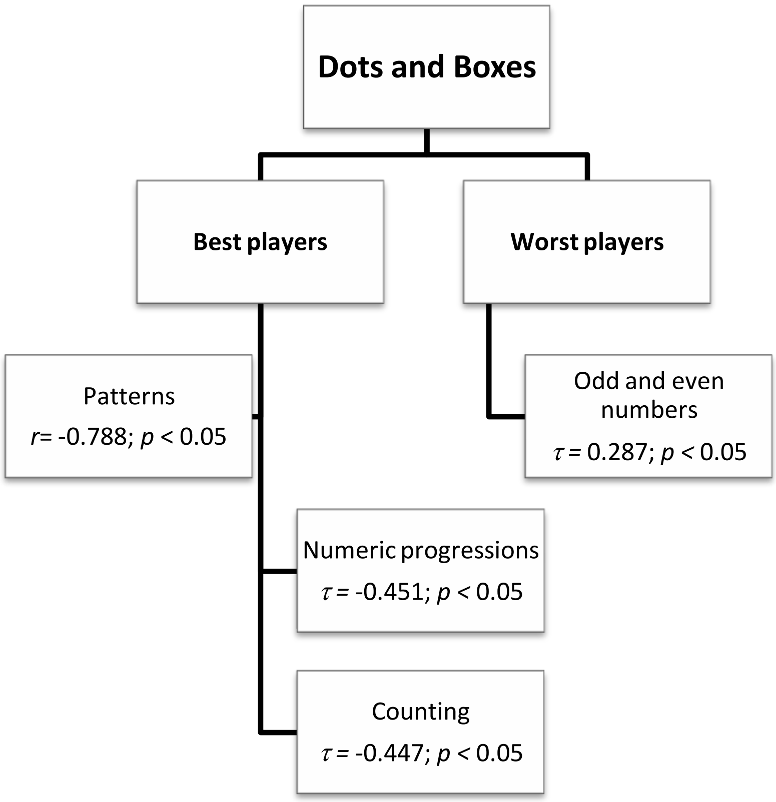


Figure 42. Relationships concerning the game Dots and Boxes.

8.2.4. Cats & Dogs

The rules of Cats & Dogs are very simple and the game was easily learned by students. Nevertheless, knowing the rules is very different from knowing how to play well. Cats & Dogs is a strategic game and it is necessary to have a strategy to win. Throughout the championship we noticed that most students were changing the way of placing their pieces, improving their strategies. However, some students persisted in placing the pieces in a row using in most cases the first line on their side of the board. As would be expected these students had a bad rank. Curiously Cats & Dogs players have not had many doubts in the rules.

In the analysis of endgames it is useful to verify available and barred houses as well as the moves that maximize the number of future houses available (Carvalho & Santos, 2011). Probably these strategies are difficult to carry out by novice players or they do not implement them as a pattern of behavior useful for endgames. So far, the results obtained in this research did not reveal any relationship between patterns and the ability to play Cats & Dogs, not even with the seven patterns nor the national standardized tests in Mathematics. The statistical analysis only revealed for the worst players a moderate relationship between the ability to play and the ability to identify patterns involving more than one rule – Factor 7. The analysis also revealed that 39% of the common variance is explained by the relationship between the two variables. It seems that for these students the abilities used to play Cats & Dogs are possible related to other skills different from those used to identify these types of patterns or solve the questions raised in the standardized tests. However for the group of worst players it is important to identify patterns involving more than one rule to avoid being the worst player. Although Cats & Dogs seems to be a game not related to patterns identification, there is a particular group where identifying some kind of patterns is determinant, even if only to avoid being the worst.

8.2.5. Dominó Belga

In the category of games of imperfect information we decided to use a game of dominoes. Dominoes are strategy games but in most games players do not have total information about all the pieces, since some may not have been distributed and are unknown to the players and players do not reveal their pieces to other players. These games often begin with the shuffling of the stones. That means there is luck involved in the attribution of pieces to players. The game selected was *Dominó Belga* because it is a popular game in Portugal. A previous research found the existence of differences between students in solving problems on dominoes context. Worse students were more likely to use trial and error strategy while logical deduction was mostly used by better students. Moreover the best and older students solved the problems more easily than the other students (Ferreira & Palhares, 2010).

The students involved in *Dominó Belga* were from 3rd and 4th grades. In the first session all the students said they knew how to play dominoes. However when they started to play we noticed that almost all did not know how to match the pieces.

In this research it was notoriously the 3rd year students who had more difficulty in playing according to the rules. Therefore the first sessions were used to teach the rules of the game and to clarify doubts. When all the students knew how to match pieces and how to count points (every multiple of five) the championship began. The ranking was obtained from the total points of the cumulative scores throughout the championship. In this game the statistical analysis revealed significant relationships only concerning the seven factors.

Regarding the results of the game *Dominó Belga* we are able to conclude that for these players the ability to play this game has a moderate relationship with the ability to identify patterns involving both numeric and geometric patterns. The analysis of r-squared showed that 12% of the common variance of the relationship between the ability to play *Dominó Belga* and the ability to find patterns involving both numeric and geometric progressions is explained by the relationship between these two variables. There is a relationship concerning the group of best players that is close enough to be considered strong and allows us to say that for this group of students the better you are at playing *Dominó Belga*, the more successful you become at identifying odd and even numbers. Morover, 39% of the common variance between the ability to play and the ability to find patterns involving parity issues is explained by the relationship between variables. It seems that a very good *Dominó Belga* player is better at identifying odd and even numbers patterns. These results are possibly explained by the rules of this game. Counting points through multiples of five is in fact being involved in parity issues, since consecutive multiples of five are alternately even and odd. To have a good ranking students need to choose well the pieces in order to have a multiple of five or, even better, the highest multiple of five.

The relationship between *Dominó Belga* players ability to play and numeric and geometric progressions could be explained by some inherent characteristics of the game. Dominoes pieces have dots with a pattern configuration that represents numbers. Therefore the pieces have numbers in a visual representation and so they have both numeric and geometric patterns. The counting rule in multiple of five appears to have also an intrinsic relation to odd and even numbers. As state Ryan and Williams (2007) an interesting and notable characteristic of odd and even numbers is that they alternate, for instance in counting consecutive numbers and in counting multiples of five.

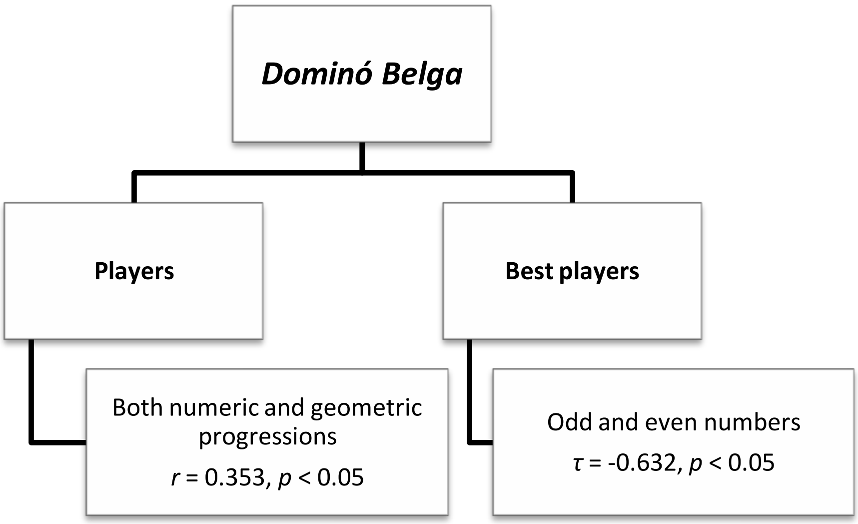


Figure 43. Relationships concerning the game *Dominó Belga*.

8.2.6. Syzygies

One of the games selected for this research was Syzygies, a word puzzle invented by Lewis Carroll in 1879 (Wakeling, 1995). Although Syzygies was classified as a puzzle by Lewis Carroll, players are in competition with each other while having an individual performance. Most of the taxonomy of games include games played by one single player as refers Murray (1952) and the definition of game given by Whitehill (2009, p. 55) define a game as "a form of play, in which players compete, each trying to emerge winner *according to specific set of rules and a predeterminated end"*. In this research, Syzygies was played by elementary students competing to have the best score in their Syzygy-problem according to the rules defined by Lewis Carroll. In this research we use Syzygies as a one-person game category. The student participants in the Syzygies game belonged to two distinct groups. The first one was a class of 18 students from 4th grade (9 years old) and the second one was a class of 26 students from 5th grade (10 years old). The main goal of this game is to link two words following a set of definitions and rules described by Wakeling (1995). These starting words are given in a Syzygy-problem with the characteristic sense of humour of Lewis Carroll. In this research we have invented our own Syzygy-problem trying to reproduce the double sense that Carroll played with the words. To collect data information we use the test that measures the ability to identify patterns and 13 Syzygy-problems that measured the ability to play Syzygies. The Syzygy-problems were implemented once a week. To motivate participants to the game we have added another point to the scoring rules. This point (the point 8) established that a participant has at least 2 points if the chain is correctly done, having an extra point if the solution has only two links.

Although students have understood the rules of the game they have difficulty obtaining a good score. Nevertheless, in both groups all the students scored at least once. Concerning Lewis Carroll original rules, only 28% of 4th grade students scored whereas in the 5th grade 42% were successful.

In addition to difficulties with the rules another difficulty was connected with spelling and vocabulary skills.

The results presented before allow us to say that in the 4th grade Syzygies players ability to play is related with the ability to find patterns where odd and even numbers are intrinsic. For this group of students the ability to play Syzygies accounted for 38% of the variation in finding patterns involving odd and even numbers.

Concerning the group of 5th grade, the ability to play Syzygies revealed a moderate relationship with the ability to find patterns in general and more particularly a strong relationship with the ability to find numeric progressions. Moreover, the ability to play Syzygies accounted for 27% of the variation in pattern identification and 43% of the variation in numeric progressions.

Another conclusion to be drawn is that for the 5th grade Syzygies best players the better you are, the more successful you are at identifying patterns involving numeric progressions or counting. Moreover, these results are consistent with those of the worst players for whom we can say that the worse players they are, the worse at identifying patterns involving numeric progressions or counting they are. We think we can take into account the results of the factor represented by counting because the significant level is not too far from the default values. It is also important to point out that the relationships identified concerning the best and worst players, although gathered from a small group of students is very strong. Concerning the best players the ability to play Syzygies accounted for 81% of the variation in numeric progressions and for 90% of the variation in counting patterns. For the group of worst players, the ability to play Syzygies accounted for 77% of the variation in numeric progressions.

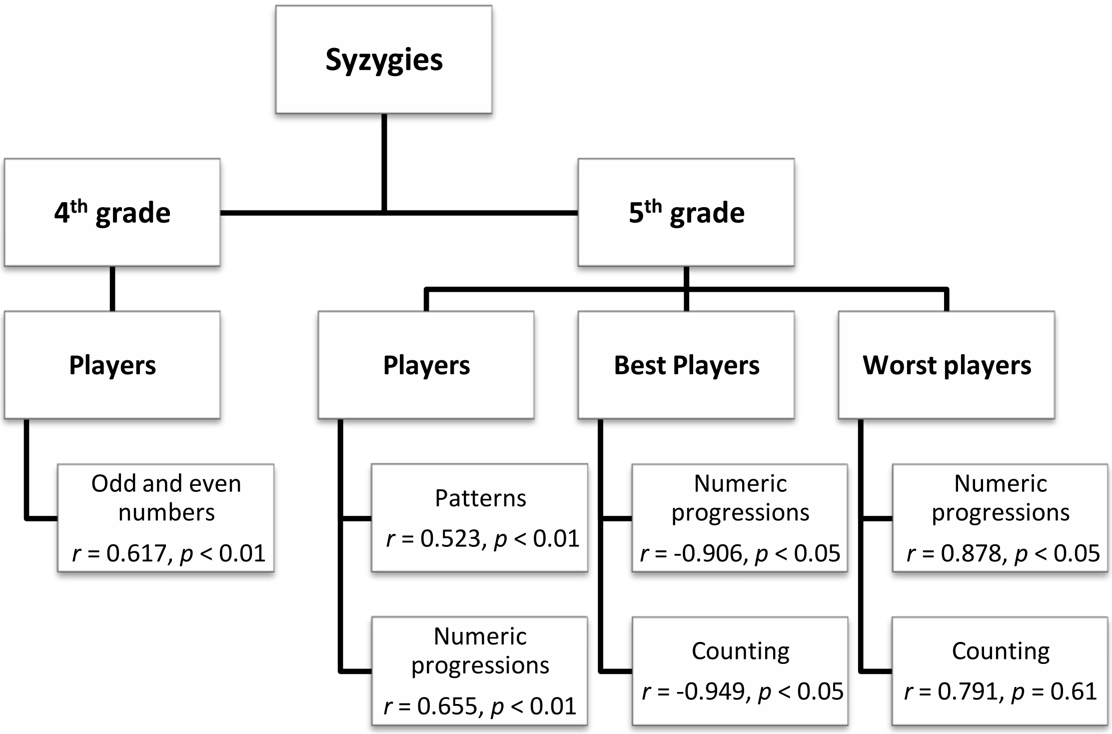


Figure 44. Relationships concerning the game Syzygies.

The results obtained in the analysis of Syzygies were interesting although unexpected. Syzygies is a word game and we were curious about the existence or not of a relationship with mathematical issues. However mainly for the 5th grade students playing Syzygies is related to pattern identifications. These results led us to reflect on the role of games in mathematical ability. Probably the importance is concerned with the game activity itself and with strategies that players used to have success. The difference in patterns between 4th and 5th grades could be explained by differences in the curriculum of these two groups of students. Students from 4th grade belong to the 1st cycle (primary school) where curriculum focuses more on parity issues than with numeric progression. On the other hand the formal study of algebra begins in the 5th

grade and numeric progressions are more involved in the curriculum of these students. Nevertheless the link between the game Syzygies and patterns is not easy to explain. As states Bishop (1988), playing games is one of the activities that promote mathematical knowledge, and we consider the possibility of not being so relevant the nature of the game but rather the practice of a strategic game.

8.3. Games related with patterns

As we have stated in the previous sessions, each one of the games involved in this research is related to patterns in some particular aspect. Concerning the ability to identify patterns in general we found that only four of the six games revealed a relationship. Traffic Lights, *Ouri*, Dots and Boxes and Syzygies are related to pattern identification. The first three games are mathematical games and Syzygies is a one-person word game. Considering all the players involved in any of the championships Syzygies was the game that revealed a stronger relation with patterns. However, Traffic Lights is the one that revealed a relationship for both all players as well as best players, being stronger for the best players even considering the results on the other games. *Dominó Belga* and Cats & Dogs seem not to be related with patterns. *Dominó Belga* is not a mathematical game and some chance is involved in playing this game. This chance could influence the player's game more significantly than strategies of play. Cats & Dogs is a mathematical game and we expected it to be related to pattern identification. The results obtained in this research revealed that it is not a sufficient condition to be a mathematical game to have a relation with patterns, or more precisely with the kind of patterns involved in this research. Probably there are game strategies that are more important in pattern identification and that are used in some particular games such as Traffic Lights or Syzygies.

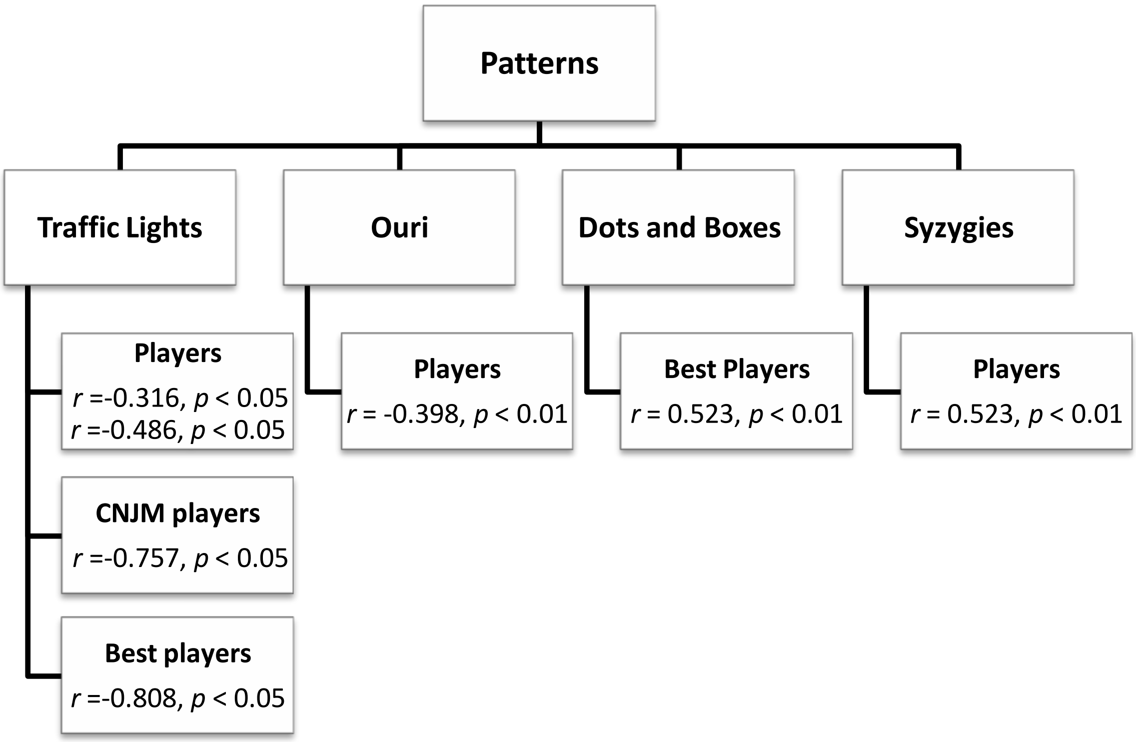


Figure 45. Games related with patterns.

Other considerations may be displayed from the perspective of the relationship between games and the seven factors. Four of the seven factors appear to be related to more than one game and Factor 6, interpreted as rotation, has no significant relationship to any game, in the analysis carried out in this study. Consequently, the remaining factors, namely Factor 2 (three terms repetition - ABC ABC) and Factor 3 (both geometric and numeric progressions) are each one only related to one game. Factor 2 is related with the game Traffic Lights and Factor 3 with the dominoes game. Moreover all games revealed a relationship even if small or if considering a particular group of players such as best or worst players. Syzygies is the only game that revealed a relationship with a specific group of patterns regarding all players and both best and worst players. Patterns involving odd and even numbers (Factor 5) are the ones that are related to more games. This factor is related to Traffic Lights and Dots and Boxes worst players, *Dominó Belga* best players and Syzygies 4th grade players. We believe that these results are consistent with the curriculum of these students of 3rd and 4th grades, where parity issues are a focal point of education.

Table 50. Games related with the seven patterns.

	Factor 1 numeric progressions	**Factor 2** three terms repetition: ABC ABC	**Factor 3** both geometric and numeric progressions	**Factor 4** counting	**Factor 5** odd and even numbers	**Factor 6** rotation	**Factor 7** more than one rule
Traffic Lights		Best			Worst		
Dots & Boxes	Best			Best	Worst		
Ouri							Best
Cats & Dogs							Worst
Dominó Belga			Players		Best		
Syzygies	Players Best Worst			Best Worst*	Players		

*Close to the 5% level

Finally, the analysis concerning the 7 factors reveals that the identification of patterns involving odd and even numbers is related with the ability to play Traffic Lights, Dots and Boxes and *Dominó Belga* in an interesting and opposite way: with the worst players of Traffic Lights and Dots and Boxes, both mathematical games and with the best players of *Dominó Belga*, a non mathematical game. So, these games play an important role in the ability to find this specific kind of patterns. Similarly, factor 7 (more than one rule) is related with the best players of *Ouri* and the worst players of Cats & Dogs. What seems to be important to be a best player or not to be even worse player differs depending on the game. Therefore we presume that different abilities or strategies are intrinsic to different games even if they are all mathematical games or not.

8.4. The quasi-experimental analysis

The aim of this quasi-experimental study was to examine the impact of the use of games in the ability to identify patterns, taking into account two different situations:

- problem solving in a game context;

- systematic practice of game.

For this purpose we used two mathematical games: Traffic Lights and *Ouri*. The choice of these two games was mainly due to two reasons: a) because they are both mathematical games, b) because they revealed the existence of a relationship with pattern identification. Therefore, we intended to ascertain if there were differences in the ability to identify patterns between groups exposed to problem solving in a game context or in a systematic practice of the game. The underlying reason for the use of problem solving in a game context is due to the fact that it is used as a strategy for teaching games and also because it is stated in literature that there is a strong connection between problem solving and patterns. There are many books with game problems such as chess and chess coaches make use of problem solving as a strategy to teach the game. This option is also present in other games. For instance, it is present in the games used for the National Championship of Mathematical Games (Carvalho & Santos, 2007).

In the quasi-experimental research five intact groups were used. Those groups were constituted by classes of 4th grade students of the same school area and administration. Moreover, they were all the 4th grade classes of that group of schools.

Before any intervention, the pre-test was applied to all classes, proceeding then to the data analysis process. Subsequently, the treatment of the experimental groups was started. This treatment took place over 11 sessions, ending with the application of the post-test to all classes. Thirteen sessions were used in all, once a week and for approximately 45 min. In the last session the posttest application was scheduled.

8.4.1. The game Traffic Lights

In this section of the study, we used three intact groups (classes) of 4th grade students, each one constituting respectively the control group, the treatment group of problem solving in a game context (Traffic Lights Problems) and the treatment group with systematic practice of game (game-Traffic Lights). The ability to identify patterns was measured by the test validated in a previous study (Ferreira & Palhares, 2008).

In the statistical analysis we used the analysis of covariance (ANCOVA) because it is recommended as an appropriate procedure when we want to analyze the differences between the means of two or more groups, controlling the influence of a variable identified as a covariate (Field, 2009). The independent variable group included three levels: control, Traffic Lights Problems and Game-Traffic Lights. The dependent variable was the students achievement in the posttest and the covariate was the pretest results.

The analysis of descriptive statistic reveals that for the treatment group of Traffic Lights Problems (problem solving in a game context) the average score increased from the pretest to the posttest. The average score in the pretest was 53.59 (SD = 15.12) and in the posttest was 66 (SD = 15.80). Similarly, the group Game-Traffic Lights also revealed an increase from pretest (M = 41.75; SD = 15.10) to posttest (M = 47.60; SD = 12.88). This increase in the average from pretest to posttest for both groups is not a surprise since students are always making progress in their skills. Nevertheless, the increase in average of the group Game-Traffic Lights was higher than for the group Traffic Lights Problems.

Preliminary analysis of the necessary assumptions for ANCOVA revealed that:

a) the reliability of the test, measured by Cronbach's alpha test was adequate (0.763);
b) the assumption of normality of the pretest and posttest, measured by the Kolmogorov-Smirnov and Shapiro-Wilk, stated that both distributions did not differ significantly from the normal distribution ($p > 0.05$);

c) Levene's test, used to test the homogeneity of variances between groups in the variable posttest, revealed that variances were not significantly different between groups ($F\ (2.29) = 0.374$ e $p > 0.05$);

d) Pearson's test, used to check the linearity between pretest and posttest, showed that the dependent variable and the covariate were positively related for all groups, namely the control group ($r = 0.614$, $p < 0.01$), Traffic Lights Problems ($r = 0.679$, $p < 0.01$) and Game-Traffic Lights ($r = 0.660$, $p < 0.01$);

e) the assumption of homogeneity of regression slopes was tested and confirmed that there is no significant interaction between the results of pretest and the variable group ($F\ (2.66) = 0.507$, $p > 0.05$).

Since all the assumptions that underlie the use of ANCOVA were met we were able to carry out the ANCOVA. The analysis of covariance (ANCOVA) revealed significant differences between groups ($F\ (2.68) = 6.860$ e $p < 0.01$). This result suggests that there are differences between groups in students' performance to identify patterns but does not specify where such differences lie. The analyses of contrast allow us to find those differences. Planned contrasts revealed the existence of significant differences between control group and Game-Traffic Lights group ($p < 0.05$). As the confidence interval did not include zero we are confident to infer that the differences were genuine.

This result analysis allows us to conclude that the ability to dentify patterns is significantly different when students systematically play the game Traffic Lights. So, the practice of this game may be a good strategy to help students to better identify numerical and geometric patterns as those presented in the test. On the other hand, solving problems in a game context does not seem to influence the ability of students to identify such patterns. Nevertheless this result is unexpected because literature relates patterns to problem solving. Moreover, to identify patterns is considered a powerful problem solving strategy. In a study conducted by Grando (2000), involving games of rules, problem solving in a game context promoted the construction of several strategies for mental calculation, the application of arithmetic properties and algebraic thinking (in the structure of calculations). These results lead us to conclude that the gains of problem solving in a game context can be related to different abilities inherent to mathematics, but it is the play activity itself that can lead to a better ability to identify patterns. This conclusion becomes important to contextualize the role of play in mathematics education and also in society.

8.4.2. The game Ouri

Similarly to the game Traffic Lights, for *Ouri* we used three intact groups (classes) of 4th grade students, each one constituting respectively the control group, the treatment group problem solving in a game context (*Ouri* Problems) and the treatment group with systematic practice of game (game-*Ouri*). The ability to identify patterns was measured by a test validated in a previous study (Ferreira & Palhares, 2008).

In the analysis of covariance the independent variable group included three levels: control, *Ouri* Problems and Game-*Ouri*. The dependent variable was students achievement in the posttest and the covariate was the pretest results.

The analysis of descriptive statistic reveals that for the treatment group of *Ouri* Problems (problem solving in a game context) the average score has increased from the pretest to the posttest. The average score of the pretest was 57.29 (SD = 13.25) and in the posttest was 73.86 (SD = 13.79). Not only the analysis of the distribution of scores in the pretest and posttest of the experimental group of systematic practice of *Ouri* revealed an increase in the average of posttest scores but also a larger range in the posttest scores.

Concerning the group Game-*Ouri* the analysis also revealed an increase of average from pretest, 57.15 (SD = 13.97), to posttest, 65.01 (SD = 14.84). However, in this group the increase in the average between pretest and posttest is much lower than for the group *Ouri* Problems.

There are some assumptions that underline the analysis of ANCOVA, namely 1) normality of distribution; 2) homogeneity of variance; 3) the covariate is measured without error; 4) the covariate and dependent variable are linearly related to each other; 5) homogeneity of regression slops. The analysis concerning each one of the assumptions revealed that the distributions of all groups, both pretest and posttest, were not significantly different from the normal distribution ($p > 0.05$), variances did not differ significantly between groups ($F\ (2.68) = 0.328$ and $p > 0.05$), the reliability of the covariate was confirmed (0.763), an there was a linear relationship statistically significant between pretest and posttest for the Control group ($r = 0.614$, $p < 0.01$), the *Ouri* Problems ($r = 0.677$, $p < 0.01$) and the Game-*Ouri* ($r = 0.511$, $p < 0.05$). So far, four of the five assumptions were met. Unfortunately, the fifth assumption, the homogeneity of regression slops, has been broken. The statistical analysis revealed a significant interaction between the results of pretest and group ($F\ (3.67) = 16.113$, $p < 0.01$). Field (2000) claims that the homogeneity of regression slops is very important in the analysis of Covariance and he does not recommend keeping on the ANCOVA when it is not tenable. Therefore, we decided not to perform the analysis of covariance for the game *Ouri*. However we consider that it is a promising game and more research needs to be done. One of the difficulties of the quantitative research in educational environment is the use of intact groups instead of randomizing participants. Although we have tried to ensure that groups were as similar as possible, using classes of the same school area, with the same number of students and only constituted by 4th grade students, one of the more important assumptions prevented us from proceeding with the analysis. Nevertheless, we are convinced that the option for using classes as intact groups is a useful option in education.

8.5. Summary of discussion

In the research analysis, Traffic Lights and Syzygies came up as being two of the best games to promote its practice among students. Nevertheless, Syzygies has more complex rules while Traffic Lights has simple rules and is quickly played.

Three mathematical games and a one-person word game are related to pattern identification: Traffic Lights, *Ouri*, Dots and Boxes and Syzygies.

The analysis concerning the 7 factors reveals that the identification of patterns involving odd and even numbers is related with four of the six games, namely Traffic

Lights and *Dominó Belga*, Syzygies and Dots and Boxes. Factor 6, identified as rotation has no significant relationship with any of the games involved in the research.

Concerning the quasi-experimental analysis we are able to conclude that the identification of patterns is significantly different when students systematically play the game Traffic Lights. Therefore, the practice of this game may be a good strategy to help students to better identify patterns. However, solving problems in a Traffic Lights context does not seem to influence the ability of students to identify patterns.

With this research we disclose that games have distinct relationships with pattern identification. Moreover, we found that it is not sufficient to be a mathematical game to have a relationship with a mathematical ability such as pattern identification. Some games that *a priori* we did not expect to have any relationship with mathematics are in fact related, which leads us to reflect on the possible reasons for this relationship. Probably, the main factor is the strategy of play and the reasoning involved in playing these games. Another finding was that some games have a stronger relationship with pattern identification than others, and some of them are related with specific patterns. We believe that it is important the knowledge that games belonging to the same category, such as strategy board games for two players or games of perfect information, can be ranked by their relations with pattern identification.

The results found in our research revealed that playing some particular games is probably an important activity to implement in elementary schools. These games are related with the ability to find mathematical patterns in a distinct way. As we stated above, there are games related to the ability to find a specific pattern whereas other games are related with the ability to find another pattern and still others that were hardly related to patterns. These different patterns have inherent different kinds of mathematical concepts. Educators may in the future use the results of this research to choose at any given time, one or another game to help students develop the ability to identify patterns related to a particular aspect of mathematics. For instance, if a teacher needs to develop skills related to numerical progressions with their students or a particular student, he or she may suggest or use the game Dots and Boxes to help develop those skills. This possibility seems to be an advantage in the curriculum, although more information is needed to make it possible to be used in this manner. Certainly this is a field of promising research.

CAPÍTULO 9

CONCLUSÃO

9.1. Introdução

Nesta secção serão apresentadas as conclusões do estudo, nomeadamente as respostas às questões de investigação. Apresentar-se-ão também algumas limitações e recomendações.

9.2. A relação entre padrões, jogos matemáticos e outros jogos

Os jogos têm despertado o interesse de investigadores no sentido de averiguar o benefício da sua prática no desenvolvimento de capacidades. Este interesse emerge, possivelmente, das características motivadoras do jogo em geral e do facto de determinado tipo de jogos envolverem destrezas cognitivas na sua prática. Segundo Zicherman e Cunningham (2011) há quatro razões fundamentais subjacentes ao interesse/motivação pelo jogo, que podem existir separadamente ou conjugadas, nomeadamente o domínio, o relaxamento, o divertimento e a socialização. Estas características, aliadas ao desenvolvimento de competências, levaram-nos a serem considerados agentes facilitadores do processo de ensino e aprendizagem da matemática. A capacidade de identificar padrões é igualmente apontada como essencial a este processo, sendo considerada uma capacidade intrínseca à atividade matemática (Steen, 1990; Devlin, 1997; 1998, Resnik, 1997).

Este estudo tinha como objetivo principal identificar possíveis relações entre a capacidade de jogar e a capacidade de identificar padrões. A metodologia utilizada foi de natureza quantitativa, desenvolvendo-se em duas etapas sequenciais, nomeadamente uma investigação correlacional e uma investigação quase-experimental. A população do estudo era constituída por alunos do 3.º ao 6.º ano de escolaridade do ensino português, que se enquadram no 1.º e 2.º ciclo do Ensino Básico. A capacidade de identificar padrões foi medida através de um teste validado para o efeito (Ferreira & Palhares, 2008) e a capacidade de jogar foi medida através do ranking obtido pelos alunos nos respetivos campeonatos. Para o estudo foram selecionados seis jogos: Ouri, Semáforo, Pontos e Quadrados, Gatos & Cães, Dominó Belga e Syzygies. Os jogos selecionados para o estudo dividem-se em três categorias: jogos de informação perfeita (jogos matemáticos), jogos de informação imperfeita e outro tipo de jogos de estratégia. Na primeira categoria inserem-se os jogos Ouri, Semáforo, Pontos e Quadrados e Gatos & Cães. O jogo Dominó Belga insere-se na segunda categoria e para a terceira categoria selecionou-se o jogo Syzygies, um jogo de palavras para um jogador.

Com a primeira questão de investigação pretendia-se verificar se a capacidade de jogar jogos matemáticos e outro tipo de jogos está relacionada com a capacidade de identificar padrões. Esta questão deu origem às seguintes hipóteses de investigação:

a) Existe relação entre a capacidade de jogar jogos de informação perfeita e a capacidade de identificar padrões.
b) Existe relação entre a capacidade de jogar jogos de informação imperfeita e a capacidade de identificar padrões.
c) Existe relação entre a capacidade de jogar jogos para um jogador e a capacidade de identificar padrões.

a) Existe relação entre a capacidade de jogar jogos de informação perfeita e a capacidade de identificar padrões.

Relativamente à hipótese a) verificou-se que dos quatro jogos de informação perfeita, ou jogos matemáticos como são também conhecidos, apenas dois apresentaram relação significativa com a capacidade de identificar padrões. O jogo

Ouri revelou uma relação moderada com a capacidade de identificar padrões (r = -0,398 p < 0,01[24];), com um nível de significância de 1%, numa amostra de 41 alunos dos 3.º e 4.º anos de escolaridade. Este resultado revela que 16% da variância na capacidade de identificar padrões pode ser explicada pela capacidade de jogar Ouri. Apesar de a relação ser moderada a percentagem da variância comum responsável pela relação entre as variáveis tem um valor que não deve ser desprezado. O jogo Semáforo apresentou relação com a identificação de padrões em diferentes situações. A primeira ocorreu numa amostra de 10 alunos dos 3.º e 4.º anos finalistas do CNJM (r = -0,757, p < 0,05). A forte relação identificada revela que 57% da variância na capacidade de identificar padrões pode ser explicada pela capacidade de jogar Semáforo, o que é considerável. Uma amostra de 40 alunos dos 3.º e 4.º anos revelou uma fraca relação entre as variáveis (r = -0,316; p < 0,05). Para esta amostra de alunos 10% da variância comum à capacidade de identificar padrões e à capacidade de jogar Semáforo é explicada pela relação entre as variáveis. Outra amostra de 24 alunos do 4.º ano revelou uma relação moderada entre as variáveis (r = -0,486; p < 0,05), onde 24% da variância na capacidade de identificar padrões pode ser explicada pela capacidade de jogar Semáforo. Os restantes dois jogos matemáticos, Pontos e Quadrados e Gatos & Cães não revelaram relação significativa, pelo menos ao nível de significância de 5%, com a capacidade de identificar padrões.

b) Existe relação entre a capacidade de jogar jogos de informação imperfeita e a capacidade de identificar padrões.

Para confirmar a possível existência de relação entre a capacidade de jogar jogos de informação imperfeita e a capacidade de identificar padrões utilizou-se uma amostra de 41 alunos do 3.º e 4.º ano de escolaridade e o Jogo Dominó Belga. Para estes alunos não se identificou uma relação significativa entre a capacidade de jogar e a capacidade de identificar os padrões medidos pelo teste, mas verificou-se a existência de relação entre a capacidade de identificar um tipo particular de padrões, referenciados no Fator 3 como progressões numéricas e geométricas (r = 0,353; p <

[24] O coeficiente negativo deve-se ao facto de as variáveis terem direção contrária.

0,05). Assim, 12% da variância na capacidade de identificar padrões envolvendo progressões numéricas e geométricas pode ser explicada pela capacidade de jogar Dominó Belga.

c) Existe relação entre a capacidade de jogar jogos para um jogador e a capacidade de identificar padrões.

No que concerne à existência de relação entre a capacidade de jogar jogos para um jogador e a capacidade de identificar padrões foi utilizado um jogo de palavras denominado Syzygies. Uma amostra de 18 alunos do 4.º ano revelou que o jogo Syzygies tem uma relação moderada (r = 0,617; p < 0,01) com padrões que envolvem números pares e ímpares (Fator 5). O quadrado do coeficiente de correlação revela que 38% da variância na capacidade de identificar padrões que envolvem o conceito de paridade pode ser explicado pela capacidade de jogar Syzygies. Para este grupo de alunos não se identificou relação significativa com a capacidade de identificar outro tipo de padrões ou dos padrões em geral medidos pelo teste. Uma amostra de 26 alunos do 5.º ano revelou resultados distintos do grupo de alunos do 4.º ano anteriormente apresentados. Para a amostra de alunos do 5.º ano verificou-se uma relação moderada com a identificação de padrões (r = 0,523; p < 0,01) e uma relação forte entre a identificação de padrões que envolvem progressões numéricas, identificados como Fator 1 (r = 0,655; p < 0,01) e a capacidade de jogar Syzygies. Estes resultados revelam que para a amostra de alunos do 5.º ano 27% da variância na capacidade de identificar padrões e 43% da variância na capacidade de identificar padrões que envolvem progressões numéricas podem ser explicadas pela capacidade de jogar Syzygies. Verifica-se assim uma maior importância das progressões numéricas no jogo Syzygies e vice-versa, um jogo de palavras que, à partida, poderia parecer não ter qualquer relação com conceitos matemáticos. Verifica-se ainda diferenças substanciais entre os grupos do 4.º ano e do 5.º ano. Essas diferenças podem refletir que este jogo é mais apropriado para alunos com mais maturidade, principalmente devido à relação que apresenta com a identificação de progressões numéricas.

Relativamente à primeira questão de investigação verificou-se que os jogos Semáforo e Ouri, dois jogos matemáticos (jogos de informação perfeita) e o jogo Syzygies, um jogo de palavras para um jogador, revelam uma relação moderada com a capacidade de identificar padrões. Se considerarmos os diferentes tipos de padrões identificados na análise fatorial verificou-se que o Dominó Belga, um jogo de informação imperfeita, revela uma relação com padrões que envolvem progressões numéricas e geométricas e o jogo de palavras Syzygies também revela uma relação com dois tipos de padrões, nomeadamente os que envolvem progressões numéricas e os que envolvem o conceito de paridade.

9.3. A relação entre ser bom ou mau jogador e os padrões

Com a segunda questão de investigação pretendia-se verificar se ser bom ou mau jogador ocasionava relações específicas e diferenciadas com a capacidade de identificar padrões. Esta questão de investigação deu origem à seguinte hipótese:

d) Existem para os grupos dos melhores e dos piores jogadores, relações específicas e diferenciadas entre a capacidade de jogar e a capacidade de identificar padrões.

Na análise dos melhores jogadores verificou-se que a identificação de padrões apresenta uma relação muito forte tanto com a capacidade de jogar Semáforo (r = -0,808; p < 0,05) como com a capacidade de jogar Pontos e Quadrados (r = -0,788; p < 0,05). No entanto, se tivermos em consideração os sete fatores identificados na capacidade de identificar padrões, verificaram-se ainda os seguintes resultados (para os melhores jogadores):

- relação moderada entre a capacidade de jogar Ouri e a identificação de padrões que envolvem mais do que uma lei de formação (τ = -0,542; p < 0,01);

- relação moderada entre a capacidade de jogar Semáforo e a identificação de padrões repetitivos do tipo ABC ABC (τ = -0,549; p < 0,05);
- relação moderada entre a capacidade de jogar Pontos e Quadrados e a identificação de padrões identificados como progressões numéricas (τ = -0,451; p < 0,05) e padrões que envolvem contagens (τ = -0,447; p < 0,05);
- relação moderada entre a capacidade de jogar o jogo de informação imperfeita Dominó Belga e a identificação de padrões que envolvem números pares e ímpares (τ =-0,632; p < 0,05);
- relação muito forte entre a capacidade de jogar o jogo de palavras para um jogador Syzygies e a identificação de padrões envolvendo progressões numéricas (r = -0,906; p < 0.05) e padrões que envolvem contagens (r = -0.949; p < 0.05).

Assim, apenas o jogo matemático Gatos & Cães não revelou qualquer relação com a identificação de padrões em geral, ou dos padrões específicos identificados nos fatores, para o grupo de melhores jogadores. Este facto pode ser explicado pelas características do jogo, que pode revelar-se pouco adequado para os alunos do 4.º ano, ou necessitar de maior tempo de aprendizagem para os jogadores conseguirem estratégias mais eficazes. A complexidade do jogo, por si só, não parece justificar esta falta de relação com a identificação de padrões, uma vez que o xadrez é um jogo com grande complexidade e revelou estar relacionado com a capacidade de identificar padrões para os alunos desta idade praticantes de xadrez (Ferreira & Palhares, 2008). No entanto, o jogo Gatos & Cães utiliza um tabuleiro maior que os restantes jogos analisados neste estudo e um grande número de peças, o que requer maior e mais complexa área de análise. A observação de casas indisponíveis, disponíveis ou garantidas (Carvalho & Santos, 2011), para além do conhecimento dessa estratégia requer prática e tempo, que pode não ter sido o suficiente. Uma das características apontadas como benéficas para a prática de jogos de tabuleiro e para a matemática é a capacidade de visualização, que permite ao jogador prever futuras jogadas ou sequências de jogadas e, desta forma, antecipar situações de jogo (Carvalho & Santos, 2011).

Relativamente ao grupo de piores jogadores não se verificou relação significativa com a identificação de padrões, mas para os jogos Semáforo, Pontos e Quadrados, Gatos & Cães e Syzygies identificaram-se relações com determinado tipo de padrões, nomeadamente:

- uma relação fraca entre a capacidade de jogar Semáforo e a identificação de padrões que envolvem números pares e ímpares (τ = 0,324; $p < 0{,}05$).;
- uma relação fraca entre a capacidade de jogar Pontos e Quadrados e a identificação de padrões que envolvem números pares e ímpares (τ = 0,287; $p < 0{,}05$);
- uma relação moderada entre a capacidade de jogar Gatos & Cães e a identificação de padrões que envolvem mais do que uma lei de formação (τ =-0,632; $p < 0{,}05$);
- uma relação muito forte entre a capacidade de jogar Syzygies e a identificação de padrões que envolvem progressões numéricas (r = 0,878; $p < 0{,}05$), para alunos do 5.º ano.

O jogo Syzygies revelou, ainda, para o grupo de piores jogadores do 5.º ano um resultado a ter em consideração, dado se aproximar do nível de significância de 5%. Para este grupo de alunos verificou-se uma relação moderada com padrões que envolvem contagens (r = 0,791; p = 0.061). Este resultado tem significado na medida em que é consistente com os resultados obtidos para o grupo de melhores jogadores do 5.º ano de Syzygies.

Assim, verificou-se que quanto pior é o aluno a identificar padrões que envolvem o conceito de paridade, pior é a jogar Semáforo e/ou Pontos e Quadrados; quanto pior é o aluno a identificar padrões que envolvem mais do que uma lei de formação, pior é a jogar Gatos & Cães; quanto pior é o aluno a identificar padrões que envolvem progressões numéricas (e padrões que envolvem contagens), pior é a jogar Syzygies. É de salientar o resultado obtido com o jogo Syzygies que apresenta uma relação muito forte com a identificação de progressões numéricas, ainda que a um nível de significância de 5%.

9.4. A relação entre padrões e a avaliação escolar a matemática

Com a terceira questão de investigação pretendíamos aferir se a capacidade de jogar estaria relacionada com a avaliação escolar a matemática, pelo que se delineou a seguinte hipótese de investigação:

d) Existe relação entre a capacidade de jogar e a avaliação escolar a matemática.

Para verificar a hipótese acima formulada recorreu-se aos resultados obtidos nas provas de aferição de matemática pelos alunos do 4.º ano do Ensino Básico. Estas provas apresentam uma avaliação global e uma avaliação relativa a cada um dos seguintes quatro domínios: Números e Operações, Geometria e medida, Álgebra e Funções e Estatística e Probabilidades. Para esta análise não foi possível a recolha de dados dos alunos envolvidos no jogo Pontos e Quadrados.

Os resultados da análise evidenciaram que apenas o jogo Semáforo revelou a existência de uma relação moderada com os resultados globais nas provas de aferição (τ = -0,486; p < 0,01). Considerando cada um dos domínios em particular verificou-se haver relação entre alguns desses domínios e os jogos Ouri e Semáforo.

Assim relativamente ao Ouri verificou-se uma relação moderada entre a força de jogo e o domínio Geometria e Medida (τ = -0,366; p < 0,05). O jogo Semáforo para além da relação acima identificada com os resultados globais das provas de aferição, revelou, ainda, estar relacionado moderadamente com os domínios Números e Operações (τ = -0,448; p < 0,01), Geometria e Medida (τ = -0,428; p < 0,05) e Álgebra e Funções (τ = -0,431, p < 0,05). Os restantes jogos (Gatos & Cães, Dominó Belga e

Syzygies) não revelaram nenhuma relação estatisticamente significativa com os resultados globais ou parciais das provas de aferição.

9.5. O jogo e a resolução de problemas em contexto de jogo

Através da quarta questão de investigação pretendíamos averiguar a possível existência de diferenças na capacidade de identificação de padrões entre a prática sistemática de jogos matemáticos e a resolução de problemas em contexto de jogo. A partir desta questão surgiu a seguinte hipótese de investigação:

e) Existem diferenças significativas na capacidade de identificar padrões entre a prática sistemática de jogos matemáticos e a resolução de problemas em contexto de jogo.

Para a verificação desta hipótese procedeu-se a uma investigação quase-experimental. Nesta investigação, os jogos matemáticos foram selecionados de acordo com a relação demonstrada na investigação correlacional. Como pretendíamos analisar os jogos que revelassem maior relação com a capacidade de identificar padrões, foram selecionados os jogos Ouri e Semáforo. A amostra foi constituída por alunos do 4.º ano do Ensino Básico, pertencentes ao mesmo agrupamento de escolas. Foram utilizados quatro grupos de tratamento e um grupo de controlo aos quais foi aplicado o pré-teste e o pós-teste. Todos os grupos eram grupos intactos, constituindo a totalidade de turmas de alunos do 4.º ano do agrupamento de escolas. A seleção do jogo e do tipo de tratamento foi aleatória, bem como a seleção do grupo que iria servir de controlo. O tratamento decorreu ao longo de três meses, com periodicidade semanal, em sessões de 45 minutos.

Para verificar se existiam diferenças entre o ensino de Ouri ou Semáforo através da resolução de problemas em contexto de jogo e a prática sistemática de Ouri ou Semáforo na identificação de padrões utilizaram-se duas turmas de tratamento para cada jogo e a turma de controlo. Às turmas de tratamento foi aleatoriamente atribuído o tipo de tratamento, nomeadamente a prática sistemática de Ouri ou Semáforo, a duas turmas e a resolução de problemas em contexto do jogo Ouri ou Semáforo, a outras duas.

Relativamente ao jogo Ouri foi conduzida uma análise da covariância (ANCOVA) para verificar se a capacidade de identificar padrões para o grupo de controlo e para os grupos experimentais (problemas-Ouri e jogo-Ouri) diferiam após o ajuste das diferenças no pré-teste. Uma análise preliminar aos pressupostos necessários à ANCOVA revelou que: a) a fiabilidade do teste, medida através do Alpha de Cronbach, era adequada (0,763); b) em todos os grupos, a normalidade da distribuição do pré-teste e pós-teste, medida através dos testes de Kolmogorov-Smirnov e Shapiro-Wilk, não diferem significativamente da distribuição normal (p > 0,05); c) o teste de Levene, utilizado para testar a homogeneidade das variâncias entre os grupos na variável pós-teste, revelou que as variâncias não são significativamente diferentes entre os grupos (F (2,68) = 0,328 e p > 0,05); d) o teste de Pearson, utilizado para verificar a linearidade ente o pré-teste e o pós-teste mostrou a variável dependente e a covariável nos grupos de controlo (r = 0,614, p < 0,01), problemas-*Ouri* (r = 0,677, p < 0,01) e jogo-*Ouri* (r = 0,511, p < 0,05) estavam positivamente relacionadas; e) testou-se o pressuposto da homogeneidade das retas de regressão que revelou existir uma interação significativa entre os resultados do pré-teste e o grupo (F (3,67) = 16.113, p < 0,01), o que viola o pressuposto.

Dado o pressuposto da homogeneidade das retas de regressão ser essencial para a análise da covariância (Field, 2009), a sua não confirmação inviabilizou a análise.

De forma similar ao efetuado para o jogo Ouri, para o jogo Semáforo foi conduzida uma análise da covariância (ANCOVA) para verificar se a capacidade de identificar padrões para o grupo de controlo e para os grupos experimentais (problemas-Semáforo e jogo-Semáforo) diferiam após o ajuste das diferenças no pré-teste. Uma análise preliminar aos pressupostos necessários à ANCOVA revelou que a) a fiabilidade do teste, medida através do Alpha de Cronbach, era adequada (0,763); b) em todos os grupos, a normalidade da distribuição do pré-teste e pós-teste, medida através dos testes de Kolmogorov-Smirnov e Shapiro-Wilk, não diferem significativamente da distribuição normal (p > 0,05); c) o teste de Levene, utilizado para testar a homogeneidade das variâncias entre os grupos na variável pós-teste, revelou que as variâncias não são significativamente diferentes entre os grupos (F (2,29) = 0,374 e p > 0,05); d) o teste de Pearson, utilizado para verificar a linearidade ente o pré-teste e o pós-teste mostrou que a variável dependente e a covariável nos grupos de controlo (r = 0,614, p < 0,01), problemas-Semáforo (r = 0,679, p < 0,01) e jogo-Semáforo (r = 0,660, p < 0,01) estavam positivamente relacionadas; e) testou-se o pressuposto da homogeneidade das retas de regressão que confirmou não existir uma interação significativa entre os resultados do pré-teste e o grupo (F (2,66) = 0,507, p > 0,05).

Para o jogo Semáforo, a análise da covariância (ANCOVA) revelou a existência de diferenças significativas entre os grupos (F (2,68) = 6,860 e p < 0,01). Este resultado já nos sugere que há diferenças entre as turmas na prestação dos alunos a identificar padrões. No entanto, na análise dos contrastes foi possível identificar que entre o grupo jogo-Semáforo e o grupo de controlo as diferenças são significativas (p < 0,05) e a análise do intervalo de confiança aponta no sentido de que essas diferenças sejam genuínas. O resultado obtido sugere-nos que a identificação de padrões é significativamente diferente quando os alunos praticam sistematicamente o jogo Semáforo.

A investigação quase-experimental pode ser considerada como situando-se num ponto intermédio entre a investigação correlacional e a investigação experimental, uma vez que permite retirar conclusões ligeiramente mais consistentes do que a investigação correlacional (Jackson, 2012). Com esta investigação pretendíamos verificar o impacto do jogo Ouri e do jogo Semáforo na capacidade de identificar padrões, quer na prática sistemática do jogo, quer através da resolução de problemas em contexto do jogo. Como resultado, para o jogo Semáforo foram identificadas diferenças significativas entre as três turmas, verificando-se que a turma sujeita à prática sistemática do jogo difere significativamente da turma de controlo. Estes resultados vieram confirmar os resultados obtidos na investigação correlacional e sugerem que há benefícios na capacidade de identificar padrões com a prática do Semáforo. Para além de serem agentes motivadores os jogos podem contribuir mais ainda para o desenvolvimento de capacidades úteis na aprendizagem da matemática.

9.6. Limitações e recomendações

Ao iniciarmos uma investigação temos tendência para ter expectativas muito elevadas e para pensar que o nosso contributo poderá, de alguma forma, ajudar a mudar o “mundo”. No entanto, o processo de investigação revela-nos que há sempre opções a fazer, na medida em que há sempre limitações de alguma natureza. O tempo é sem dúvida uma limitação de peso, bem como a disponibilidade, quer a nossa, quer a dos outros para connosco. Traçam-se objetivos, calendarizam-se atividades, organiza-se o tempo e, mesmo assim, nem sempre tudo se concretiza como desejado. Neste caso, uma das limitações prendeu-se com a falta de recolha de dados junto de alunos do 2.º ciclo do Ensino Básico para todos os jogos envolvidos no estudo. Este estudo também não abarcou os alunos do 2.º ciclo na investigação quase-experimental. Assim, fica em aberto uma linha de investigação com alunos do 2.º ciclo do Ensino Básico, procurando a identificação de relações entre estes jogos e os padrões, sendo interessante verificar se os resultados seriam consistentes com os obtidos neste estudo.

Outra das limitações do estudo consiste no número de jogos analisados. Enquanto para o grupo de jogos matemáticos se analisaram quatro gogos, para as restantes categorias apenas se analisou um jogo em cada. Parece-nos que seria desejável mais investigação nesse campo, já que os jogos de informação imperfeita podem também ter o seu papel a desempenhar na educação matemática, como alguns resultados com o Dominó Belga revelaram.

Apesar dos resultados do estudo terem as debilidades inerentes ao processamento estatístico, muitas vezes relacionadas com o tipo e tamanho da amostra, procurou-se agir com rigor e parece-nos que aqueles podem contribuir para uma melhor compreensão do papel de determinados jogos na capacidade matemática inerente à identificação de padrões. Também esperamos que estes resultados possam alimentar a curiosidade para o alargamento do estudo envolvendo os jogos e a matemática. Por exemplo, o estudo e análise das estratégias utilizadas durante o jogo podem ajudar a melhor interpretar as relações aqui identificadas. Assim, possivelmente com muitos pequenos contributos talvez seja realmente possível ir fazendo algumas mudanças (no sentido positivo) no "mundo".

Tanto os resultados obtidos no estudo como as conclusões não deixam de ser importantes para os alunos do Ensino Básico, em particular para os alunos do 3.º ao 5.º ano de escolaridade. Saber que determinada capacidade matemática está relacionada com a capacidade de jogar alguns jogos pode ser útil não só para os professores como para os encarregados de educação ou outros elementos ligados à componente educativa das crianças. Os resultados deste estudo podem servir de referência ou como ajuda para a escolha do jogo mais apropriado para atingir determinados objetivos, desde que esses objetivos estejam relacionados com a identificação do tipo de padrões envolvidos no estudo. Uma vez que os alunos gostam de jogar e jogar determinado tipo de jogos os ajuda a identificar melhor determinado tipo de padrões, resta providenciar o momento e local mais apropriado para que possam jogar, aliando, como é usual dizer-se, o útil ao agradável.

Neste estudo foram identificadas diferenças entre os jogos analisados na sua ligação com a identificação de padrões. Dado o tipo de estudo, não foi possível identificar as razões dessas diferenças, embora possamos aferir que possam estar inerentes nessas razões as características dos próprios jogos ou as estratégias utilizadas pelos jogadores. A análise cuidada dessas estratégias poderá ser o caminho para compreendermos melhor as relações identificadas neste estudo, bem como as diferenças entre os jogos.

Os resultados obtidos com o jogo de palavras, um jogo individual, levantam novas questões. Estarão outros jogos de palavras relacionados com a matemática? Que outos jogos individuais terão relação com a identificação de padrões ou com outra capacidade matemática?

É do conhecimento geral que as crianças pequenas, nomeadamente em idade da educação pré-escolar, gostam muito de jogar. As orientações curriculares apontam para atividades lúdicas na área de matemática. Assim, a educação pré-escolar é propícia à utilização de jogos, nomeadamente jogos de estratégia, desde que com um nível de dificuldade adequados. Atendendo ao já enunciado deixamos uma última questão, de muitas que poderão ficar por colocar: De que forma os jogos matemáticos poderão contribuir para o desenvolvimento de capacidades matemáticas nas crianças em idade pré-escolar?

Na verdade, cremos que com este estudo se abre um novo campo de pesquisa que se pode revelar muito fértil e útil e que procuraremos no futuro ajudar a desbravar.

REFERÊNCIAS

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: DEB.

Abt, C. C. (1987). *Serious Games*. Boston: University Press of America.

Aharoni, R. (2008). *Aritmética para pais*. Lisboa: Gradiva.

Alves, E. M. S. (2001). *A ludicidade e o ensino de matemática*. São Paulo: Papirus Editora.

Ary, D., Jacobs, L. C., Sorensen, C. & Razavieh, A. (2010). *Introduction to Research in Education*. Belmont: Wadsworth.

Avedon, E. M. & Sutton-Smith, B. (1971). *The Study of Games*. New York: John Wiley & Sons, Inc..

Avedon, E. M. (1971). The structural elements of games. In Elliott M. Avedon & Brian Sutton-Smith. *The Study of Games* (pp. 419-426). New York: John Wiley & Sons, Inc..

Averbach, B. & Chein, O. (2000). Problem Solving Through Recreational Mathematics. New York: Dover Publication, Inc..

Backhouse, R. (2011). *Algorithmic Problem Solving*. U.K.: John Wiley & Sons Ltd.

Baroody, A. J. & Coslick, R. T. (1998). *Fostering Children's Mathematical Power: An Investigative Approach to K-8 Mathematics Instruction.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Barros, M. G. & Palhares, P. (1997). *Emergência da Matemática no Jardim-de-Infância*. Porto: Porto Editora.

Beasley, J. D. (1990). *The mathematics of games*. Oxford: Oxford University Press.

Bell, R. & Cornelius, M. (1991). *Board games round the world: A resource book for mathematical investigations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Berlekamp, E. R. (2000). *The Dots-and-boxes: Sophisticated Child's Play.* Massachusetts: A. K. Peters.

Binmore, K. (2007). *Playing for Real: A Text on Game Theory*. New York: Oxford University Press.

Bishop, A. (1988). Mathematics Education in Its Cultural Context. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 179-191.

Bishop, A. (2000). Enseñanza de las matemáticas:¿cómo beneficiar a todos los alunos? In N. Gorgorió, J. Deulofeu, A. Bishop (Coords.). *Matemáticas y educación – Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp.35-56). Barcelona: ICE, Editorial GRAÓ.

Bisquerra, R. (1989). *Metodos de investigacion educativa – Guia practica*. Barcelona: Ediciones Ceac.

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2004). *Elementary grades students' capacity for Functional thinking*. Proceedings of the 28th Conference of the International, Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 2, pp 135–142.

Bottino, R. M.; Ferlino, L.; Ott, M. & Tavella, M. (2007). Developing strategic and reasoning abilities with computer games at primary school level. *Computers & Education*, 49, 4, 1272-1286, Elsevier, Amsterdam.

Botturi, L. & Loh, C. S. (2008). Once Upon a game: Rediscovering the Roots of Games in Education. In Christopher Thomas Miller (Ed.), *Games: Purpose and potential in education* (pp. 1-22). New York: Springer.

Boutin, M. (1999). *Le livre des jeux de pions*. Paris : Éditions Bornemann.

Bouton, C. L. (1901). Nim, a Game with Complete Mathematical Theory. *The Annals of Matematics,* 3 (1/4), 35–39.

Boyer, C. B. (2002). *História da Matemática* (2.ª Ed.). São Paulo: Editora Edgard Blücher, Ltda.

Bragg, L. A. (2006). *The impact of mathematical games on learning, attitudes, and behaviours*. Doctoral thesis. Victoria: Faculty of Education of La Trobe University.

Bragg, L. A. (2012). The effect of mathematical games on one-task behaviours in the primary classroom. *Mathematics Education Research Journal*, 24 (4), 385-401. doi: 10.1007/s13394-012-0045-4.

Branden, V. J. (1982). Les jeux d'enfants de Pierre Bruegel. In Philippe Ariès & Jean Claude Margolin (Eds). *Les jeux à la Renaissance* (pp. 499-524). Paris: Vrin.

Brewser, P. G. 1971). Games and sports in Shakespeare. In Elliott M. Avedon & Brian Sutton-Smith. *The Study of Games* (pp. 27-47). New York: John Wiley & Sons, Inc..

Brock, A., Dodds, S., Jarvis, P. & Olusoga, Y. (2009). *Perspectives on play: Learning for life.* Essex, England: Pearson Education.

Caillois, R. (1990). *Os jogos e os homens*. Lisboa: Edições Cotovia.

Campbell, D. & Stanley, J. C. (1963). *Experimental and Quasi-experimental Designs for Research*. Boston: Houghton Mifflin Company.

Carlson, E. (1971). Games in the Classroom. In Elliott M. Avedon & Brian Sutton-Smith. *The Study of Games* (pp. 330-339). New York: John Wiley & Sons, Inc..

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Education* (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Carse, J. P. (1986). *Finite and infinite games*. New York: Macmillan.

Carvalho, A. & Santos, C. (2007). *Colectânea de* artigos*: Estratégias utilizadas nos jogos do 4ºcnjm (36 exercícios)* [Disponível em http://ludicum.org/cnjm/4/ludus-cnjm4-brochura.pdf,consultado 3 de novembro de 2007].

Carvalho, A. & Santos, C. (2011). *Colectânea de* artigos*: Estratégias utilizadas nos jogos do 7ºcnjm (36 exercícios)* [Disponível em http://ludicum.org/cnjm/7/ludus-cnjm7-brochura.pdf, consultado em 3 de julho de 2011].

Castro, J. P. & Rodrigues, M. (2008). *Sentido de número e organização de dados: textos de apoio para Educadores de Infância.* Lisboa: DGIDC, ME.

Catarino, I. (2007). O Metromachia, Um jogo geométrico. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, número especial (pp. 53-58). SPM.

Charles, R., Lester, F. & O'Daffer, P. (1992). *How to evaluate progress in problem solving.* E.U.A.: NCTM.

Charness, N., Reingold, E. M., Pomplun, M. & Stampe, D. M. (2001). The perceptual aspect of skilled performance in chess: Evidence from eye movements. *Memory & Cognition*, 29 (8), 1146-1152.

Chateau, J. (1975). *A criança e o Jogo.* Coimbra: Atlântida Editora.

Chemillier M. (2007). *Les mathématiques naturelles*. Paris: Odile Jacob.

Chen, P. Y. & Popovich, P. M. (2002). *Correlation: Parametric and Nonparametric Measures.* Sage University Papers Series on Quantitative Applications in the social sciences. Thousand Oaks, CA: Sage.

Christmann, E. P. & Badgett, J. L. (2009). *Interpreting assessment data: Statistical techniques you can use*. Arlington: NSTA Press.

Clements, D. (1999). Subitizing: What Is It? Why Teach It? *Teaching Children Mathematics*, 15, 6, 337-345.

Clidère, M. (1968). *Le guide marabout des jeux de société*. Verviers: Editions Gérard & Cº.

Coelho, P. M. F. (2011). Um mapeamento do conceito de jogo. *GEMImIS - Mobilidade: tendências e desafios na era digital* - jan./jun. 2011, N. 1 (2) (pp. 293-311).

Cohen, L. & Manion, L. (1989). *Research* Methods *in Education* (3rd Ed.). London: Routledge.

Courtney, R. (1989). *Play, drama & thought: The intellectual background to dramatic education*. Toronto: Simon & Pierre Publishing Co. Ld..

Coutinho, C. (2006). Aspectos metodológicos da investigação em tecnologia educativa em Portugal (1985-2000). COLÓQUIO DA SECÇÃO PORTUGUESA DA ASSOCIATION FRANCOPHONE INTERNATIONALE DE RECHERCHE SCIENTIFIQUE EN EDUCATION, 14, Lisboa, Portugal, 2006 – "Para um balanço da investigação em educação de 1960 a 2005 : teorias e práticas : atas do Colóquio da AFIRSE". [Lisboa : Universidade de Lisboa, 2006].

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for a mathematics curriculum. *Journal of Mathematical Behavior*, 15 (4), 375-402.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (2010). Contemporary curriculum issues: Organizing a curriculum around mathematical habits of mind. *Mathematics Teacher*, 103(9), 682-688.

Danesi, M. (2002). *The puzzle instinct: The meaning of puzzles in human life*. Indiana: Indiana University Press.

Danesi, M. (2004). *The Liar Paradox and the Towers of Hanoi: The ten greatest Math puzzles of all time*. New Jersey: John Wiley & Sons Inc..

DEB (1998). *Organização Curricular e Programas: Ensino Básico – 1.º Ciclo.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Delahaye, J. (1998). *Jeux Mathématiques et Mathématiques des Jeux*. Paris : Editions Belin.

Devlin, K. (1997). *Mathematics: the science of patterns*. New York: Scientific American Library.

Devlin, K. (1998). *Life by the numbers.* New York: John Wiley & Sons, Inc..

DGIDC (2007). *Programa de Matemática para o Ensino Básico.* Lisboa: ME, [Disponível em http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf, consultado em 4 de Julho de 2007].

Dias, C. (2013). *Jogos Matemáticos Adaptados à Baixa Visão ou Cegueira* (tese de doutoramento). Braga: Universidade do Minho.

Dias, C. B., Palhares, P. & Silva, J. N. (2009). Jogos matemáticos adaptados à baixa visão ou cegueira. In Alexandra Gomes (Ed) *Elementary Mathematics Education proceedings of the 3rd Meeting* (pp. 145-150). Braga: AEME.

Dimand, R. W. & Dimand, M. A. (1992). The Early History of the Theory of Strategic Games from Waldegrave to Borel. In E. Roy Weintraub (Ed.), Toward a History of Game Theory (pp. 15-28). Durham: Duke University Press.

Dudeney, H. E. (2008). *Os enigmas de Canterbury*. Barcelona: RBA.

Dunn-Vaturi, A. (2007). Course-poursuite dans L'antiquité. In Ulrich Schläder (Ed) *Jeux de L´humanité* (pp. 21-31). Genéve: Éditions Slatkine.

Ericsson, K. A. (2003). The Acquisition of Expert Performance as Problem Solving: Construction and modification of mediating Mechanisms through Deliberate Practice. In Janet E. Davidson & Robert J. Sternberg (Eds.), *The Psychology of Problem Solving* (pp. 31-86). Cambridge: Cambridge University Press.

Estrada, M. F., Sá, C. C., Queiró, J. F., Silva, M. C. & Costa, M. J. (2000). *História da Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

Farmer, D. W. & Stanford, T. B. (2003). *Nós e Superfícies*. Lisboa: Gradiva.

Fernandes, L. & Alberto, E. (2009). Sobre os jogos gravados em pedra do distrito de castelo branco. *AÇAFA On Line*, nº 2. Retirado em 30 de maio de 2012, de http://www.altotejo.org/acafa/docsN2/Jogos_gravados_em_pedra_do_distrito_de_Castelo_Branco.pdf.

Fernandes, L. (2013). Tabuleiros de Jogo Inscritos na Pedra: Um roteiro Lúdico Português. Lisboa: Apenas.

Ferreira, D. & Palhares, P. (2008). Chess and problem solving involving patterns. The *Montana Mathematics Enthusiast*. Vol. 5 n. 2 & 3. pp. 249-256.

Ferreira, D. & Palhares, P. (2009). *The ability to identify patterns*. Proceedings of the Elementary Mathematics Education – 3rd (pp. 209-216). Braga: AEME; University of Minho.

Ferreira, D. & Palhares, P. (2010). Resolução de problemas utilizando jogos de dominó. In Alexandra Gomes (Coord.) *Problemas e Investigações: exemplos e experiências no pré-escolar e 1.º ciclo.* Braga: AEME.

Ferreira, D. (2006). *O jogo de xadrez e a resolução de problemas envolvendo padrões* (dissertação de mestrado). Braga: Universidade do Minho.

Field, A. (2000). *Discovering Statistics using SPSS for Windows.* London: Sage publications.

Field, A. (2009). *Discovering Statistics using SPSS.* London: Sage publications.

Fisher, R. (1990). *Teaching children to think*. Oxford: Blackwell.

Fox, J. (2006) A justification for Mathematical Modelling Experiences in the Preparatory Classroom. In Grootenboer, Peter and Zevenbergen, Robyn and Chinnappan, Mohan, (Eds.) *Proceedings 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* 1, pages pp. 221-228, Canberra, Australia.

Fraenkel, J. & Wallen, N. (1990). *How to Design and Evaluate Research in Education*. New York: Mc Graw-Hill.

Frazão, F. (2013). *Fontes para a História dos Jogos em Portugal*. Lisboa: Apenas.

García, A. & Llull, J. (2009). *El juego infantil y su metodologia*. Madrid: Editex.

Gardner, M. (1961). *Entertaining mathematical puzzles*. New York: Dover Publications.

Gardner, M. (1990). *Ah, Descobri!* Lisboa: Gradiva.

Gardner, M. (1994). *My Best Mathematical and Logic Puzzles*. New York: Dover Publication, Inc..

Gerdes, P. (2013). *Viver a Matemática: Desenhos de Angola*. V. N. Famalicão: Edições Húmus.

Gibbs, W. (1999). Pattern in the classroom. In Anthony Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 207-220). London: Cassell.

Ginsburg, H. P., & Seo, K. H. (1999). Mathematics in children's thinking. *Mathematical thinking and learning*, 1(2), 113-129.

Glenn, J. & Denton, C. (2003). *Jogos de Família*. Lisboa: Editorial Estampa.

Gobet, F., de Voogt, A. & Retschitzki, J. (2004). Moves in Mind: *The Psychology of Board Games*. Hove: Psychology Press.

Gorsuch, R. L. (1983). *Factor analysis.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Grando, R. C. (2000). *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula* (tese de doutoramento). São Paulo: Universidade Estadual de Campinas.

Guzmán, M. (1990). Games and mathematics. In Albert Geoffrey Howson & Jean-Pierre Kahane (Eds.), *The Popularization of Mathematics* (79-88). Cambridge: Cambridge University Press.

Hargreaves, M., Threlfall, J., Frobisher, L. & Shorrocks-Taylor, D. (1999). Children's Strategies with Linear and Quadratic Sequences. In Anthony Orton (Ed.). *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 67-83). London: Cassell.

Hartas, D. (2010a). The epistemological Context of Quantitative and Qualitative Research. In Dimitra Hartas (Ed.), Educational Research and Inquiry: Qualitative and quantitative approaches (33-53). New York: Continuum International Publishing Group.

Hartas, D. (2010b). Experimental and Quasi-experimental Designs in Educational Research. In Dimitra Hartas (Ed.), Educational Research and Inquiry: Qualitative and quantitative approaches (239-256). New York: Continuum International Publishing Group.

Hershkowitz, R., Parzysz, B. & Van Dormolen, J. (1996). Space and Shape. In Alan J. Bishop, Ken Clements, Christine Keitel, Jeremy Kilpatrick & Colette Labourde

(Eds.). *International Handbook of Mathematics Education* (part 1), (pp. 161-204). London: Kluwer Academic Publishers.

Hinebaugh, J. P. (2009). *A board game education*. New York: Rowman & Littlefield Education.

Hoy, W. K. (2010). *Quantitative research in education: A prime*. Thousand Oaks: Sage Publication.

Huizinga, J. (2003). *Homo Ludens*. Lisboa: Edições 70.

Jackson, S. L. (2012). *Research Methods and Statistics: A critical thinking approach*. Belmont, CA: Wadsword Gengage Learning.

Johnson, B. & Christensen, L. (2000). *Educational research: quantitative and qualitative approaches*. Boston: Allyn & Bacon.

Kasner, E. & Newman, J. (2001). *Mathematics and the imagination*. New York: Dover Publications.

Kasner, E. & Newman, J. R. (1988). Pastimes of Past and present Times. In James R. Newman (Ed.), *The world of Mathematics*, Vol. 4 (pp. 2393-2414). New York: Tempus Books of Microsoft Press.

Kelley, J. A. (1999). *Great Book of Domino Games*. New York: Sterling Publishing Co., Inc.

Krulik, S. & Rudnick, J. A. (1993). *Reasoning and Problem Solving: a handbook for elementary school teachers.* Boston: Allyn and Bacon.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago: Chicago University Press.

Lee, K. P. (1996). The use of mathematical games in teaching primary mathematics. *The mathematics Educator*, 1 (2), 172-180.

Leech, N. L., Barrett, K. C. & Morgan, G. A. (2012). *Spss for Intermediate Statistics: Use and interpretation.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc..

Lester, F. (1993). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In D. Fernandes, A. Borralho, & G. Amaro (Eds.), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 13-34). Lisboa: IIE.

Lhôte, J. (1994). *Histoire des jeux de société*. Paris: Flammarion.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern on number pattern: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 26 (3), 24-42.

Lopes, A. V., Bernardes, A., Loureiro, C., Varandas, J. M., Oliveira, M. J. C., Delgado, M. J., Bastos, R. & Graça, T. (1990). *Actividades matemáticas na sala de aula.* Lisboa: Texto Editores.

López, A., Montes, I., Murillo, J. & Negro, I. (2010). Patrimonio Histórico Español del Juego y del Deporte: Libro de los Juegos de Alfonso X el Sabio: Acedrex, Dados e Tablas. Las Rozas: Museo del Juego S. L. Retirado em 1 de março de 2012 de http://www.museodeljuego.org/_xmedia/contenidos/0000000567/docu1.pdf.

Macias, E. R. (1976). *Didáctica de las Matemáticas*. Salamanca: Ediciones Anaya, S. A.

Mamede, E. (2008). *Matemática ao encontro das práticas*. Braga: IEC – Universidade do Minho.

Maroco, J. (2003). Análise estatística com utilização do SPSS. Lisboa: Edições Sílabo.

Mason, J. (2011). Trabalhando com padrões. In Pedro Palhares, Alexandra Gomes & Elza Amaral (Coord), *Complementos de Matemática para Professores do Ensino Básico* (pp. 303-334). Lisboa: Lidel.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1985). *Thinking mathematically*. Wokingham: Addison-Wesley.

Matos, J. & Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

McGregor, S. J. & Howes, A. (2002). The role of attack and defense semantics in skilled players' memory for chess positions. *Memory & Cognition,* 30 (5), 707-717.

McLean, D. D. & Hurd, A. R. (2012). *Kraus' recreation and leisure in modern society* (9th ed.). Sudbury, MA: Jones and Bartlett.

Mello, A. M. (1989). *Psicomotricidade, educação física e jogos infantis.* São Paulo: IBRASA.

Mertens, D. M. (2009). *Research and Evaluation in Education and Psychology: Integrating Diversity with Quantitative, Qualitative, and Mixed Methods*. Thousand Oaks: Sage Publications, Inc..

Moreira, D. & Oliveira, I. (2004). *O jogo e a matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

Moreira, D. (2004). O Jogo na Matemática e na Educação. In Darlinda Moreira & Isolina Oliveira *O jogo e a matemática* (pp. 56-87). Lisboa: Universidade Aberta.

Moss, J. & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. In Jinfa Cai e Eric J. Knut (Eds.) Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives (pp. 277-298). New York: Springer.

Moulidars, T. (1888). Grande encyclopédie méthodique, universelle, illustrée, des jeux et des divertissements de l'esprit et du corps. Paris: A La Librairie Illustrée.

Muijs, D. (2004). *Doing quantitative research in education with SPSS*. London: Sage Publications Ltd..

Mulligan, J. T., English, L. D., Mitchelmore, M. C., Welsby, S: M., & Crevensten, N. (2011). An evaluation of the pattern and structure mathematics awareness program in the early school years. In Clark, Julie, Kissane, Barry, Mousley, Judith, Spencer, Toby, & Thornton, Steve (Eds.), *Proceedings of the AAMT-MERGA Conference 2011, The Australian Association of Mathematics Teachers Inc. & Mathematics Education Research Group of Australasia*, Alice Springs, pp. 548-556.

Mulligan, J.T. & Mitchelmore, M.C. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49.

Muniz, C. A. (2010). Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica.

Murray, H. J. R. (1913). *A History of Chess.* Oxford: Clarendon Press.

Murray, H. J. R. (1952). *A History of Board-Games other than Chess*. Oxford: Clarendon Press.

Mycielski, J. (1992). Games with perfect information. In: R.J. Aumann & S. Hart (Ed.), *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, volume 1 (pp. 41-70). Amesterdam: Elsevier.

Myerson, R. B. (1991). Game Theory: Analysis of Conflict. Cambridge: Harvard University Press.

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: A.P.M e I.I.E.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: A.P.M e I.I.E.

Neto, J. P. & Silva, J. N. (2004). *Jogos Matemáticos, Jogos Abstractos*. Lisboa: Gradiva.

Neto, J. P. & Silva, J. N. (2006). *Jogos Histórias de Família*. Lisboa: Gradiva.

Neto, J. P. & Silva, J. N. (2010). *Jogos Velhos, Regras Novas*. Lisboa: Clássica Editora.

Neto, J. P. (2002a). SNORT. [Disponível em http://www.di.fc.ul.pt/~jpn/gv/catdogs.htm, consultado em 16 de novembro de 2012].

Neto, J. P. (2002b). CAN THE SARDINES. [Disponível em http://www.di.fc.ul.pt/~jpn/gv/can_sardines.htm, consultado em 16 de novembro de 2012].

Neto, J. P. (2002c). *The LUDÆ project*. [Disponível em http://www.di.fc.ul.pt/~jpn/ludae/index.htm, consultado em 16 de novembro de 2012].

Neto, J. P. (2003*). The Deck of Boards*. [Disponível em http://www.di.fc.ul.pt/~jpn/gv/dob.htm, consultado em 16 de novembro de 2012].

Neumann, J. & Morgenstern, O. (1972). Theory of games and economic behaviour. Princeton: University Press.

Newman, I & Benz, C. R. (1998). Qualitative-Quantitative Research Methodology: Exploring the Interactive Continuum. Carbondale: Southern Illinois University Press.

Nickson, M. (2000). *Teaching and Learning Mathematics: A Teacher's Guide to Recent Research.* London: Cassell.

Nogueira, J. E. (2010). *Puzzles com História*. Lisboa: Prefácio.

Nowakowski, R. J. (1998). *Games of no chance*. Cambridge University Press.

Nowakowsky, R. J. (1991). …, Welter's game, Sylver coinage, Dots-and-Boxes, … In Richard K. Guy (Ed.) *Combinatorial Games*, *proceedings of symposia in applied mathematics,* v. 43, pp. 155-182. USA: American Mathematical Society.

Orton, A. & Orton, J. (1999). Pattern and the Approach to Algebra. In Anthony Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104-120). London: Cassell.

Orton, A. (2004). *Learning Mathematics: Issues, theory and classroom practice*. London: Continuum.

Orton, J. (1999). Children's Perception of Pattern in Relation to Shape. In Anthony Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 149-167). London: Cassell.

Orton, J., Orton, A. & Roper, T. (1999). Pictorial and Practical Contexts and the Perception of Pattern. In Anthony Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 121-136). London: Cassell.

Osborn, M. J. & Rubinstein, A. (1994). A course in game theory. Cambridge: The MIT Press.

Pacheco, J. (2000). A flexibilização das políticas curriculares. Actas do Seminário *O papel dos diversos actores educativos na construção de uma escola democrática*. Guimarães: Centro de Formação Francisco de Holanda, pp. 71-78.

Paenza, A. (2008). *Matemática… estás aí?* Lisboa: Dom Quixote.

Palhares, P. (1997). Histórias com problemas construídos por futuros professores de Matemática. In D. Fernandes, F. Lester, A Borralho, I. Vale (Coord.), *Resolução de problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática.* Aveiro: GIRP.

Palhares, P. (2000). *Transição do Pré-Escolar para o 1.º Ano de Escolaridade: Análise do ensino e das aprendizagens em matemática* (tese de doutoramento). Braga: Universidade do Minho.

Palhares, P. (2004). O Jogo e o Ensino/Aprendizagem da Matemática. *Revista da ESEVC*, 5, 129-146.

Palhares, P. (2011). Problemas matemáticos a partir do tabuleiro. In Pedro Palhares, Alexandra Gomes & Elza Amaral (Coord). *Complementos de Matemática para Professores do Ensino Básico* (pp. 335-348). Lisboa: Lidel.

Palhares, P. (2012). Mathematics Education and Ethnomathematics. A Connection in Need of Reinforcement. *REDIMAT* -Journal of Research in Mathematics Education, 1 (1), 79-92. doi: 10.4471/redimat.2012.04.

Palhares, P. e Mamede, E. (2002). Os padrões na matemática do pré-escolar, *Educare Educere*, 10, 107-123.

Palhares, P., Ferreira, D & Vieira, L. (2010). *Das letras à matemática*. Braga: AEME.

Palhares, P., Gomes A. & Mamede, E. (2002). A formação para o ensino da matemática no pré-escolar e no 1.º ciclo – análise teórica e estudo de caso. In Lurdes Serrazina (Org.). *A formação para o ensino da matemática na educação pré-escolar e no 1.º ciclo do ensino básico* (pp. 21-36). Porto: Porto Editora.

Papic, M. M., Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education,* 42 (3), 237-268.

Papic, M., & Mulligan, J. T. (2005). Pre-schoolers' mathematical patterning. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Building connections: Theory, research and practice* (Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Melbourne, pp. 609-616). Sydney: MERGA.

Parlett, D. (1999). *The Oxford History of Board Games*. New York: Oxford University Press.

Paulos, J. A. (1988). *Inumerismo: o analfabetismo matemático e as suas consequências.* Mem Martins: Publicações Europa-América.

Pedrazzani, J. (1984). *Jogos e Passatempos para todos*. Litexa Portugal.

Pestana, M. H. & Gageiro, J. N. (2000). *Análise de dados para ciências sociais – A complementaridade do SPSS.* Lisboa: Edições Sílabo.

Petković, M. (1997). *Mathematics and Chess: 110 Entertaining Problems and Solutions.* New York: Dover Publications, Inc..

Petković, M. S. (2009). *Famous puzzles of great mathematicians.* Providence: American Mathematical Society.

Pett, M. A.; Lackey, N. R. & Sullivan, J. J. (2003). *Making sense of factor analysis: the use of factor analysis for instruments development in health care research*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Piaget, J. (1999). *Play, dreams and imitation in childhood*. London: Routledg.

Pólya, G. (1973). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Pólya, G. (1981). *Mathematical Discovery*. New York: John Wiley & Sons.

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (2003). O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? In *O ensino da Matemática: Situação e perspectivas* (pp. 21-56). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Posamentier, A. S. & Krulik, S. (1998). *Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions: A resource for the mathematics teacher.* Thousand Oaks: Corwin Press, Inc..

Pretz, J. E., Naples, A. J. & Sternberg, R. J. (2003). Recognizing, Defining, and Representing Problems. In Janet E. Davidson & Robert J. Sternberg (Eds.), *The Psychology of Problem Solving* (pp. 3-30). Cambridge: Cambridge University Press.

Providência, N. B. (2001). *Matemática ou mesas, cadeiras e canecas de cerveja.* Lisboa: Gradiva.

Resnik, M. D. (1997). *Mathematics as a science of patterns*. New York: Oxford University Press.

Retschitzki, J. & Wicht, C. (2008). Plaidoyer pour l'exploitation didactique des jeux de semailles, *Carrefours de l'éducation* 2/2008 (n° 26), 153-168. doi : 10.3917/cdle.026.0153.

Ritterfeld, U., Cody, M. & Vorderer, P. (2009). *Serious games: mechanism and effects*. New York: Routledge.

Rivera, F. D. (2011). *Toward a Visually-oriented School Mathematics Curriculum: Research, Theory, Practice and Issues* (Vol. 49). New York: Springer.

Ryan, J. & Williams, J. (2007). *Children's Mathematics 4-15: Learning from Errors and Misconceptions*. Maidenhead, UK: Open University Press.

Sá, A., Almiro, J., Cavaleiro, J., Reis, L., Abreu, M. & Zenhas, M. G. (2009). *Jogos do Mundo*. Lisboa: APM.

Salen, K. & Zimmerman, E. (2003). *Rules of play: Game design fundamentals*. Cambridge: The MIT Press.

Santayana, G. (2004). *The Sense of Beauty*. Ney York: Cosimo, Inc.

Santos, C. P., Neto, J. P. & Silva, J. N. (2007a). *As Somas Nim + Jogo 'Ouri'*. Lisboa: Edimprensa.

Santos, C. P., Neto, J. P. & Silva, J. N. (2007b). *A Geometria + Puzzle Stomachion*. Lisboa: Edimprensa.

Santos, C. P., Neto, J. P. & Silva, J. N. (2007c). *Os Quadrados Latinos + Jogo Hexágono Mágico*. Lisboa: Edimprensa.

Santos, C. P., Neto, J. P. & Silva, J. N. (2007d). *O Pentagrama + Puzzle 'Pentalfa'*. Lisboa: Edimprensa.

Santos, C. P., Neto, J. P. & Silva, J. N. (2007e). *Os Fractais + Puzzle 'Torres de Hanói'*. Lisboa: Edimprensa.

Santos, C. P., Neto, J. P. & Silva, J. N. (2007f). *Matemática Recreativa + Puzzle Anéis Chineses*. Lisboa: Edimprensa.

Santos, J. R. A. (1999). Cronbach's Alpha: A tool for Assessing the Reliability of Scales. *Journal of Extension,* 37 (2).

Sanz, J. L. G. (2000). *El arte del dominó: teoría y práctica.* Barcelona: Editorial Paidotribo.

Saracho, O. N. & Spodek, B. (2003). Understanding play and its theories. In Olivia N. Saracho & Bernard Spodek (Eds). *Contemporary perspectives on play in early childhood education* (1-20). Greenwich, C.: Information Age Publishing.

Sawyer, W. W. (1982). *Prelude to Mathematics*. New York: Dover Publications.

Schädler, U. (2007). *Jeux de L'humanité.* Genéve: Éditions Slatkine.

Schädler, U. (2012). Organizing the Greed for Gain: Alfonso X of Spain's Law on Gambling Houses. In Philippe Bornet & Maya Burger (Eds.), *Religions in Play: games, Rituals, and Virtual worlds* (pp. 23-48). Zürich: Pano Verlag.

Schiller, F. (1994). *Sobre a educação estética do ser humano numa série de cartas e outros textos*. Lisboa: Imprensa Nacional - Casa da Moeda.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Silva, E. S. (1994). *O "Ouri": Um jogo Caboverdiano e a sua prática em Portugal*. Lisboa: APM.

Silva, I. P. (2007). A volta ao mundo de Hamilton. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, número especial (pp. 39-51). SPM.

Silva, J. N. & Santos, C. P. (2011). Jogos e matemática. In Pedro Palhares, Alexandra Gomes & Elza Amaral (Coord). *Complementos de Matemática para Professores do Ensino Básico* (pp. 303-334). Lisboa: Lidel.

Silva, J. N. (2007). *O Livro de Afonso X, o Sábio*. Lisboa: Apenas.

Silva, J. N. (2007). Ritmomachia. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, número especial (pp. 105-121). SPM.

Simon, H. A. (1992). The Game of Chess. In Robert J. Aumann & Sergiu Hart (Eds), *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Volume I (pp.1-17). Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V.

Smith, J. M. (1982). *Evolution and the theory of games*. New York: Cambridge University Press.

Smole, K. S., Diniz, M. I. & Cândido, P. (2007). *Jogos de matemática de 1.º ao 5.º ano.* Porto Alegre: Artmed.

Snyder, R. M. (2007). *Winning chess tournaments: Methods and materials training guide*. Lincoln, NE: iUniverse.

Stadler, J. (2009). Further explorations with Towers of Hanói. In Brian Hopkins (Ed.) *Resource for Teaching Discrete Mathematics: Classroom projects, history modules, and articles* (pp. 125-130). USA: Mathematical Association of America.

Steen, L. A. (1990). *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy*. Washington: National Academy Press.

Stewart, I. (2008). *Jogos, Conjuntos e Matemática*. Barcelona: RBA.

Stigter, J. (2008). Ritmomachia, the Philosopher's Game: An introduction to its history and rules. In Irving L. Finkel (Ed.), *Ancient Board games in perspective* (pp. 263-269). London: The British Museum Press.

Suits, B. (2005). *The Grasshopper: Games, Life and Utopia*. Ontario: Broadview Press.

Thomas, L. C. (2003). *Games, Theory and Applications*. New York: Dover Publications Inc..

Thompson, J. M. (2000). Defining the Abstract. *The Games Journal*. Retirado de http://www.thegamesjournal.com/articles/DefiningtheAbstract.shtml.

Threlfall, J. (1999). Repeating Patterns in the Early Years. In Anthony Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 18-30). London: Cassell.

Tuckman, B. W. (2002). *Manual de Investigação em Educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Vakil, R. (1996). *A Mathematical Mosaic: Patterns & problem solving*. Ontario: Brendan Kelly Publishing Inc..

Vale, I. & Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas. In P. Palhares (Coord.) *Elementos de matemática para professores do ensino básico* (pp. 7-52). Lisboa: Lidel.

Vale, I. & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da Matemática: Propostas curriculares para o ensino básico*. Viana do Castelo: ESE de Viana do Castelo.

Vale, I. & Pimentel, T. (2010). Padrões e conexões matemáticas no ensino básico. *Educação e Matemática*, 110, 33-38.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I., Borralho, A. (2006). Os padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. In Isabel Vale, Teresa Pimentel, Ana Barbosa, Lina Fonseca, Leonor Santos e Paula Canavarro (Org.). *Números e Álgebra – na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (193-211). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Verbo (1967). *Enciclopédia Luso-Brasileira de Cultura* (V. 4). Lisboa: Editorial Verbo.

Verbo (1995). *Enciclopédia Luso-Brasileira de Cultura* (V. 11). Lisboa: Editorial Verbo.

Verbo (2001). *Dicionário da Língua Portuguesa Contemporânea - Academia das Ciências de Lisboa*. Lisboa: Editorial Verbo.

Vickery, R. (2003). Player Experiences. *The Games Journal*. Retirado de http://www.thegamesjournal.com/articles/PlayerExperiences.shtml.

Voogt, A. J. (1999). Distribution of mancala board games: a methodological inquiry. *Board Games Studies*, 2, 104-114.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society: The development of higher p*sychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wakeling, E. (1992). *Lewis Carroll Games and Puzzles.* New York: Dover Publication.

Wakeling, E. (1995). *Rediscovered Lewis Carroll Puzzles.* New York: Dover Publication.

Walker, R. A. (2008). Mancala Game Boards as African Emblems of Status. In Irving L. Finkel (Ed.), *Ancient Board games in perspective* (pp. 263-269). London: The British Museum Press.

Wallen, N. E. & Fraenkel, J. R. (2001). *Educational Research: A guide to the process*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. In Chick, H.L. & Vincent, J.L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4. pp.305-312). Melbourne: PME.

West, J. (1998). Championship-Level Play of Dots-and-Boxes. In Richard J. Nowakowsk (Ed.), Games of no Chance (pp. 85-92). New York: Cambridge University Press.

Whitehill, B. (2009). Toward a classification of non-electronic table games. In Jorge Nuno Silva (Ed.) *Board Games Studies Colloquium XI proceedings* (pp. 53-65). Lisboa: Associação Ludus.

Wickelgren, W. A. (1974). *How to Solve Problems*. San Francisco: W. H. Freeman and Company.

Williams, E. & Shuard, H. (1994). *Primary Mathematics Today* (4^{th} Ed.). Singapore: Longman.

Williams, J. D. (1986). *The Compleat Strategist: Being a Primer on the Theory of Games of Strategy.* New York: Dover Publications Inc..

Wittgenstein, L. & Anscombe, G. E. M (2001). *Philosophical Investigations: The German Text, with a Revised English Translation*. Malden: Blackwell.

Wood, B. H. (1972). *History of Chess*. London: Murray's Sales and Service Co..

Yeo, J. B. W. (2010). Are You Game Enough? *SingTeach*, 24, May/Jun, 2-4.

Zagare, F. C. (1984). Game Theory: Concepts and Applications. Newbury Park: Sage Publications.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2011). On the path to number theory: Repeating patterns as a gateway. In Rina Zazkis & Stephen R. Campbell (Eds.), *Number Theory in Mathematics Education: Perspectives and Prospects* (pp. 99-114). New York: Routledge.

Zicherman, G. & Cunningham, C. (2011). *Gamification by Design: Implementing Game Mechanics in Web and Mobile Apps*. CA: O'Reilly Media Inc..

ANEXO A

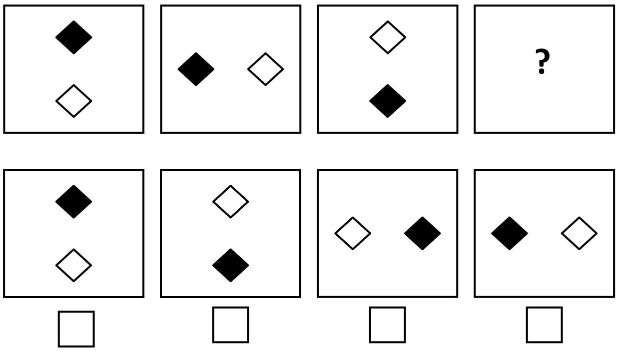
Teste

Lê atentamente as questões e coloca um X na resposta adequada ou resolve a tarefa de acordo com o que é pedido.

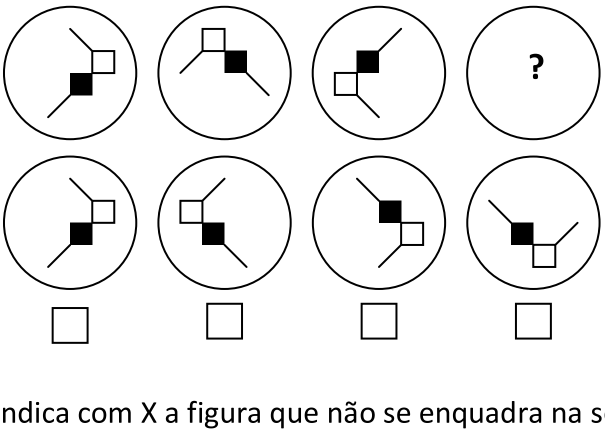
Primeira parte

1) Indica com X a figura que completa a sequência.

a)

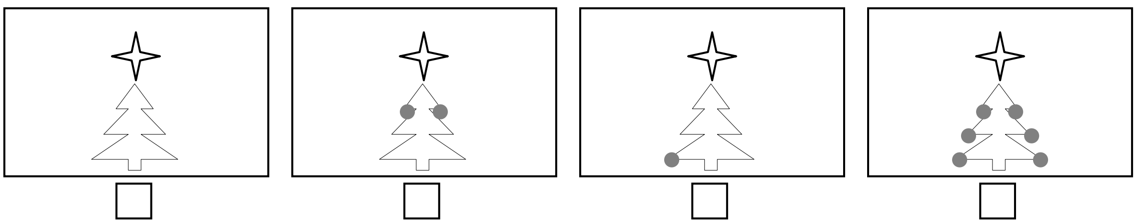


b)

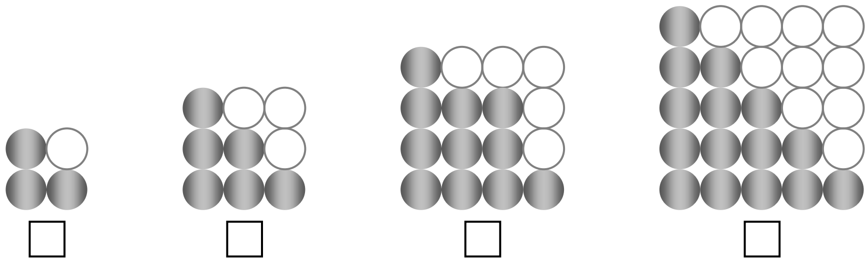


2) Indica com X a figura que não se enquadra na sequência.

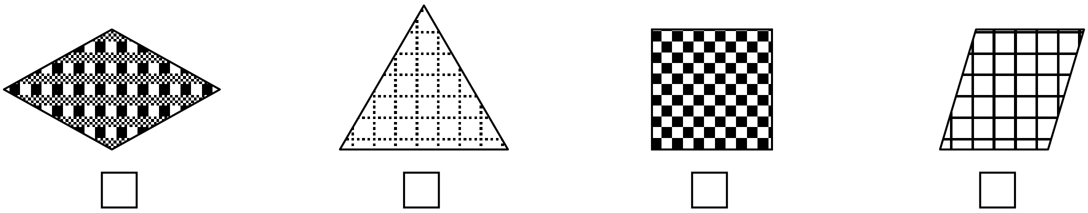
a)



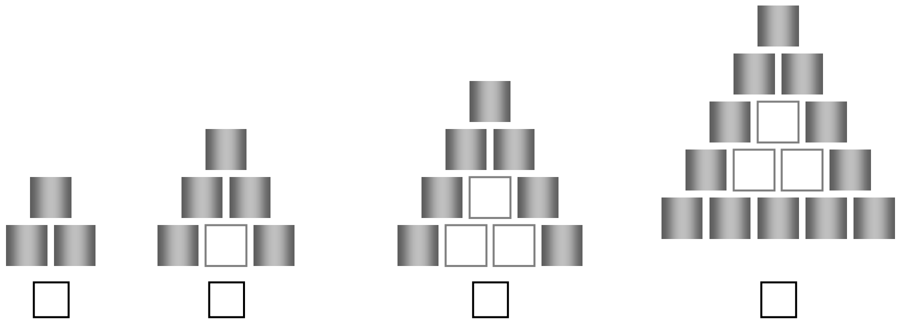
b)



c)

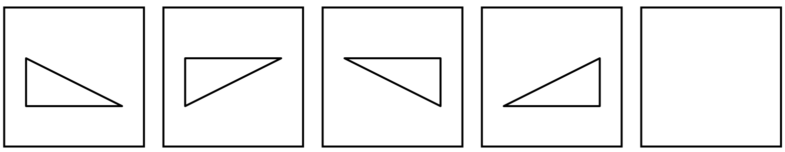


d)

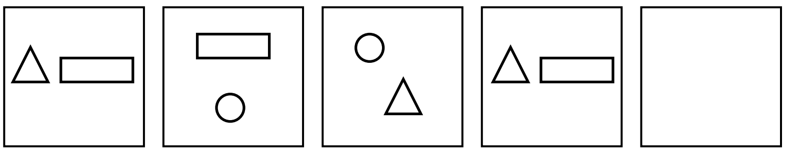


3) Completa a sequência de forma lógica, desenhando no último quadrado a figura adequada.

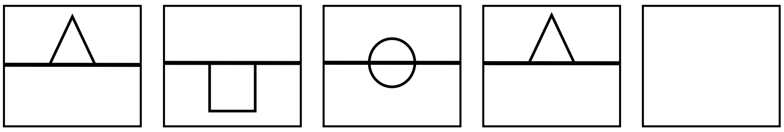
a)



b)

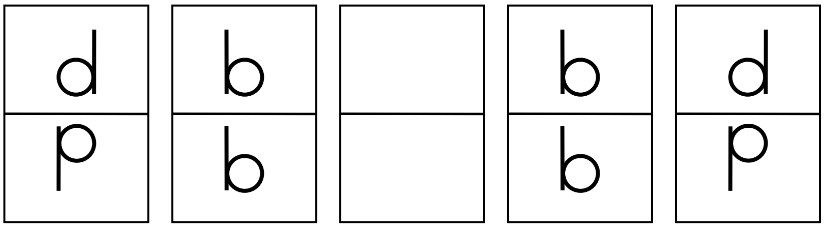


c)

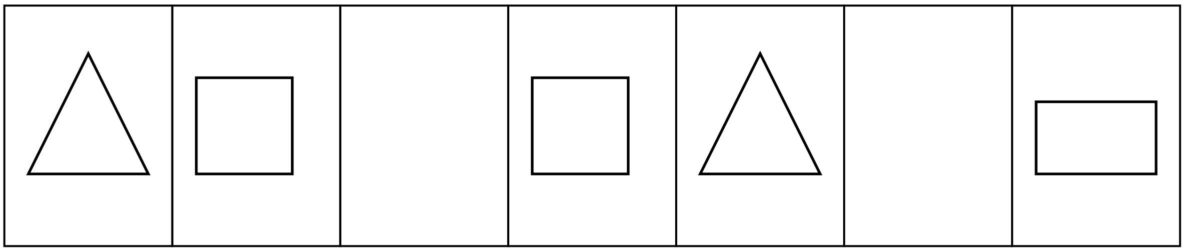


4) Desenha as figuras que faltam.

a)



b)



5) Escreve os números que faltam.

1	**5**	**3**
	3	**1**
3		**5**

Segunda parte

1) Indica com X o número que completa a sequência.

a)

1	**3**	**5**	**7**	**9**	**?**

10	**11**	**12**	**13**
☐	☐	☐	☐

b)

2	3	5	8	12	?

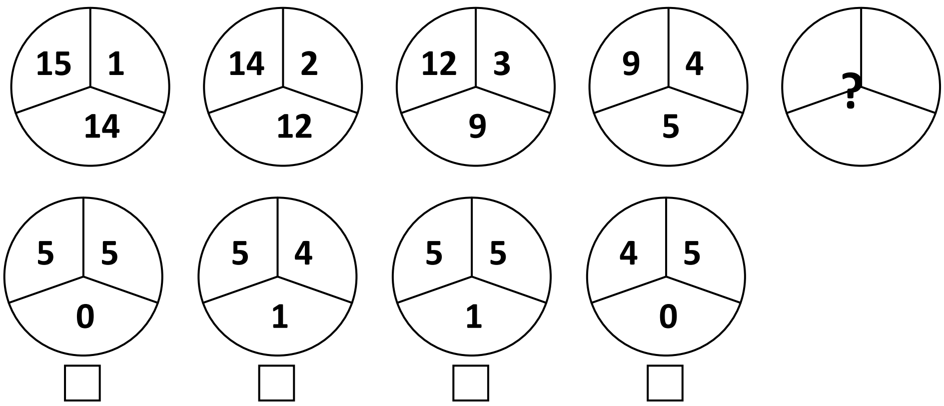
16	17	18	20
☐	☐	☐	☐

c)

2	2	4	6	10	?

15	16	17	18
☐	☐	☐	☐

d)

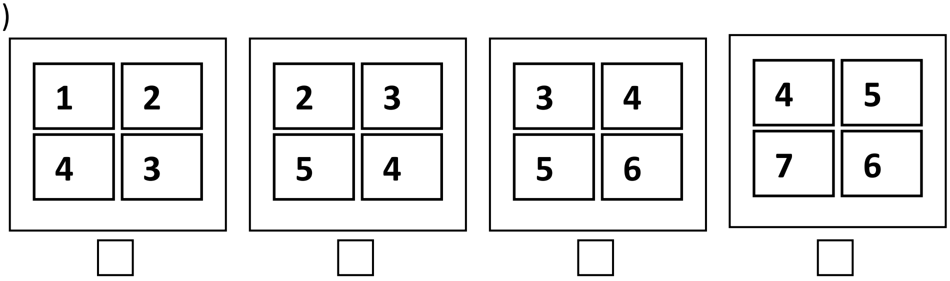


2) Indique com X o número que não se enquadra na sequência.

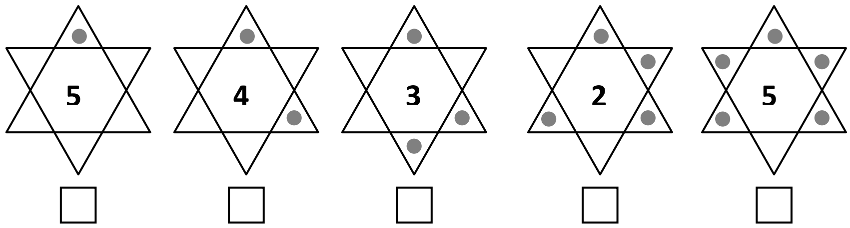
2	3	6	8	10	12
☐	☐	☐	☐	☐	☐

3) Indique com um X a figura que não se enquadra na sequência.

a)

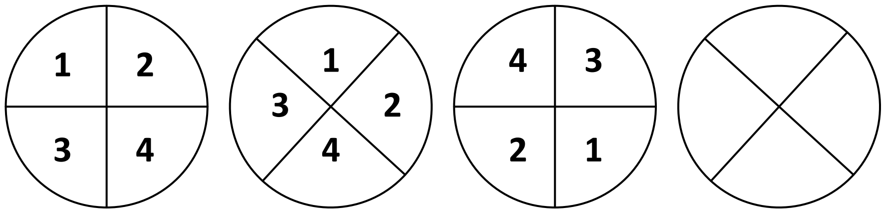


b)

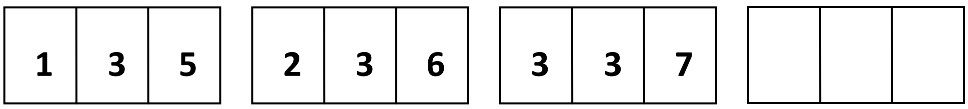


4) Completa a sequência de forma lógica.

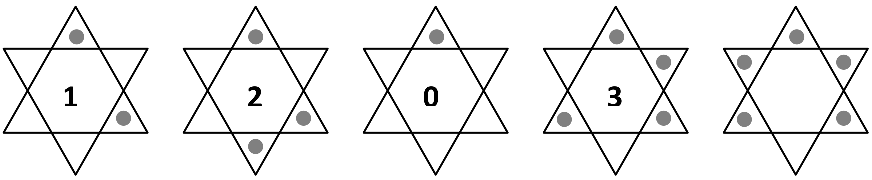
a)



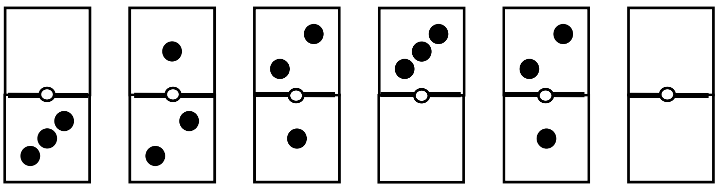
b)



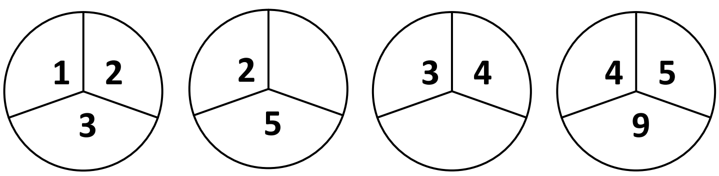
5) Coloca o número que falta no centro da estrela.



6) Completa as pintas do último dominó.



7) Escreve os números que faltam.



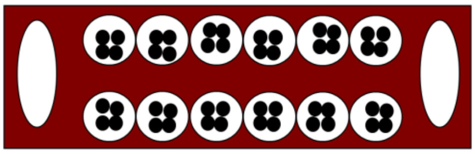
Obrigada pela colaboração!

ANEXO B

Regras do Ouri

Joga-se com 48 sementes ou outros objetos pequenos num tabuleiro com 12 concavidades (casas) e dois depósitos (opcional).

O jogo inicia com 4 sementes em cada concavidade, ficando os depósitos, caso existam, vazios. O grupo de seis concavidades constitui o campo ou lado do jogador.



O objectivo do jogo é recolher mais sementes que o adversário. Vence o jogador que capturar 25 (ou mais) sementes.

No jogo participam dois jogadores que jogam alternadamente. O 1.º jogador retira todas as sementes de uma das concavidades do seu lado e distribui-as, uma a uma, pelas concavidades seguintes, no sentido anti-horário. Quando a casa de partida contiver 12 ou mais sementes dá-se a volta completa ao tabuleiro saltando-se a casa de onde se partiu. Ou seja, a casa de partida fica vazia. Não se podem iniciar jogadas de casas que contenham apenas uma semente, enquanto houver casas com duas ou mais. O jogador recolhe as sementes sempre que, ao colocar a última semente numa casa do adversário, esta fique com duas ou três sementes. Retira, ainda, as sementes das casas anteriores, consecutivas, que também tenham ficado com duas ou três sementes, sendo a captura interrompida na primeira casa que não tenha esse número de sementes.

Regras suplementares

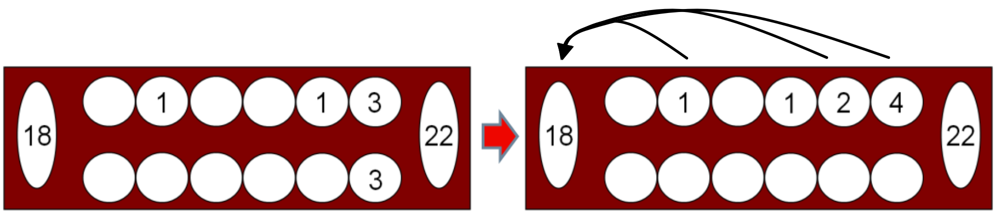
Quando um jogador realiza um movimento e fica sem sementes, o adversário é obrigado a efetuar uma jogada em que introduza uma ou várias sementes nas casas desse jogador.

Se ao realizar uma captura o jogador deixa o adversário sem sementes, é obrigado a jogar novamente, de forma a introduzir uma ou várias sementes nas casas dele.

Fim da partida

A partida termina numa das seguintes situações:

1. Quando um jogador capturar a maioria das sementes (25 ou mais) a partida termina e esse jogador ganha.
2. Quando um jogador fica sem sementes e o adversário não pode jogar de forma a introduzir algumas sementes nas casas desse jogador, a partida termina e o adversário recolhe as sementes que estão nas suas casas. Ganha o jodador que tiver capturado mais sementes.



Quando existem poucas sementes no tabuleiro e se cria uma situação que se repete ciclicamente, sem que os jogadores possam ou queiram evitá-lo, o jogo termina. As sementes que se encontram no tabuleiro não são recolhidas e ganha o jogador que tiver capturado mais sementes.

ANEXO C

Regras do Dominó Belga

Joga-se com 2, 3 ou 4 jogadores, embora seja mais corrente o jogo a quatro. Se forem dois jogadores iniciam o jogo com nove pedras cada. Caso joguem 3 ou 4 jogadores iniciam com sete pedras cada.

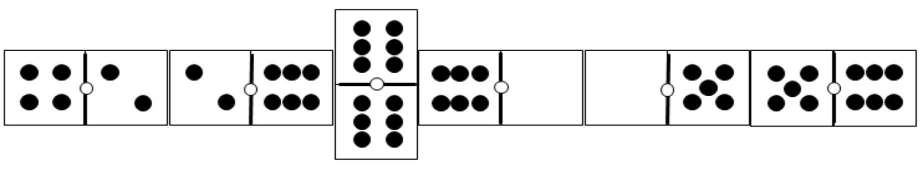
O jogo começa com o doble de senas ou, no caso de este não ter sido distribuído, com o doble mais alto. Nos jogos seguintes inicia o jogo o jogador que havia ganho, utilizando um doble ou qualquer pedra à sua escolha. O primeiro doble a ser jogado é aquele que poderá ter saídas (jogar nos 2 sentidos de cada direcção). Os dobles colocam-se verticalmente, em relação às restantes pedras.

A pedra jogada coloca-se na mesa com o marfim virado para cima e junta-se a outra que tenha um quadrado com o mesmo número de pontos de um dos quadrados da jogada. Após cada jogada contam-se os pontos dos quadrados que ficam nas extremidades do jogo e pontuam caso formem múltiplos de cinco.

O jogador que não tenha pedra que sirva à jogada vai ao baralho (*bisca*) e no caso deste não existir ou se ter esgotado, *passa*. O jogador que primeiro termina as suas pedras faz Dominó e ganha. Caso nenhum dos jogadores possa efectuar jogada o jogo encontra-se fechado. No caso de o jogo ser fechado, o jogador que tiver menos pontos em mão ganha a soma de todos os pontos das pedras dos seus adversários, arredondando o total para o múltiplo de cinco mais próximo.

Uma partida é geralmente constituída por 500 pontos. A pontuação marca-se através de "X". Ao "X" correspondem 10 pontos e a metade "/" correspondem 5 pontos.

A imagem ilustra uma situação de jogo em que o jogador obteve 10 pontos.



ANEXO D

Regras do Syzygies

Definição 1

Quando duas palavras contêm o mesmo conjunto de uma ou mais letras consecutivas, uma cópia desse conjunto, colocada entre parêntesis entre duas palavras, é chamado um 'Syzygy'. Diz-se também que ele emparelha um conjunto ao outro, e também que emparelha cada letra de um conjunto à letra correspondente do outro conjunto.

Exemplos da definição 1:

(1)	(2)	(3)	(4)
carta	carta	carta	papagaio
(a)	(t)	(art)	(pa)
tarte	tarte	tarte	partida

No exemplo (1) o Syzygy pode ser visto como emparelhando um qualquer 'a' de carta com o 'a' de tarte. No exemplo (2) o Syzygy pode ser visto como emparelhando o 't' de carta com um qualquer 't' de tarte. Já no exemplo (4) o Syzygy 'pa' está a emparelhar o 'pa' de partida com o segundo dos 'pa' de papagaio, já que não podem ser emparelhados dois conjuntos que estejam no início de duas palavras (ver regra 3).

Definição 2

Um conjunto de quatro ou mais palavras, com Syzygy entre cada duas, é chamado uma 'Cadeia', na qual todas menos as palavras extremas são chamadas 'elos'.

Definição 3

Num problema-Syzygy, dão-se duas palavras, que deverão formar os extremos de uma cadeia.

Se as palavras dadas são barbatana e homem, o problema poderia ser formulado como 'coloque uma Barbatana no Homem', a cadeia seguinte seria uma solução do problema:

BARBATANA
(ba)
barco
(co)
sacola
(ol)
olho
(ho)
HOMEM

Definição 4

Cada letra numa cadeia, que não esteja emparelhada a alguma outra, diz-se um desperdício. No entanto, se qualquer das palavras extremas contém mais de 7 letras, as letras extra não contam como desperdício.

Assim, na Cadeia de cima, as letras 'bartana' em 'barbatana', o 'r de 'barco', 'saa' em 'sacola' e 'mem' em 'homem' são desperdício; esta cadeia tem assim 14 letras de desperdício; mas como duas das letras de barbatana não contam como desperdício, a Cadeia tem apenas 12 letras de desperdício.

REGRAS PARA FORMAR CADEIAS

Regra 1

Uma cadeia deve ser escrita como descreve a definição 3. Não interessa qual das palavras extremas é colocada primeiro.

Regra 2

Qualquer palavra, colocada como elo, deve satisfazer os seguintes requisitos:

- Não pode ser estrangeira, a não ser que seja de uso corrente;
- Tem de ser de uso corrente em conversas, cartas, livros e na sociedade; assim, calão e jargão não são admissíveis;
- Não pode ser um nome que seja usualmente escrito com maiúscula; mas china, referindo-se a tinta da china, já é admissível;

- Não pode ser uma abreviação ou palavra composta.

Regra 3

Quando duas palavras começam com o mesmo conjunto de uma ou mais letras consecutivas, ou começariam se certos prefixos fossem retirados, cada letra de um conjunto fica 'proibida' com respeito à letra correspondente no outro conjunto.

Regra 4

Quando duas palavras terminam com o mesmo conjunto de uma ou mais letras consecutivas, ou terminariam se certos sufixos fossem retirados, cada letra de um conjunto fica 'proibida' com respeito à letra correspondente no outro conjunto.

Regra 5

Os substantivos e os verbos não devem ser considerados prefixos ou sufixos.

Regra 6

A pontuação de uma cadeia deve ser calculada escrevendo sete números, como se segue:

(1) O maior número de letras num syzygy extremo, mais o dobro do menor;
(2) O menor número de letras num syzygy;
(3) A soma de (1) com o produto dos dois números consecutivos acima de (2);
(4) O número de elos;
(5) O número de letras desperdiçadas;
(6) A soma do dobro de (4) com (5);
(7) O que resta quando tiramos (6) a (3). Se (6) for maior do que (3), então o que resta deve ser 0.
(8) [25]Ao dobro de (7) adicionam-se pontos de acordo com as seguintes condições:

3 pontos - cadeia com 2 elos;

2 pontos – cadeia com 3 ou mais elos.

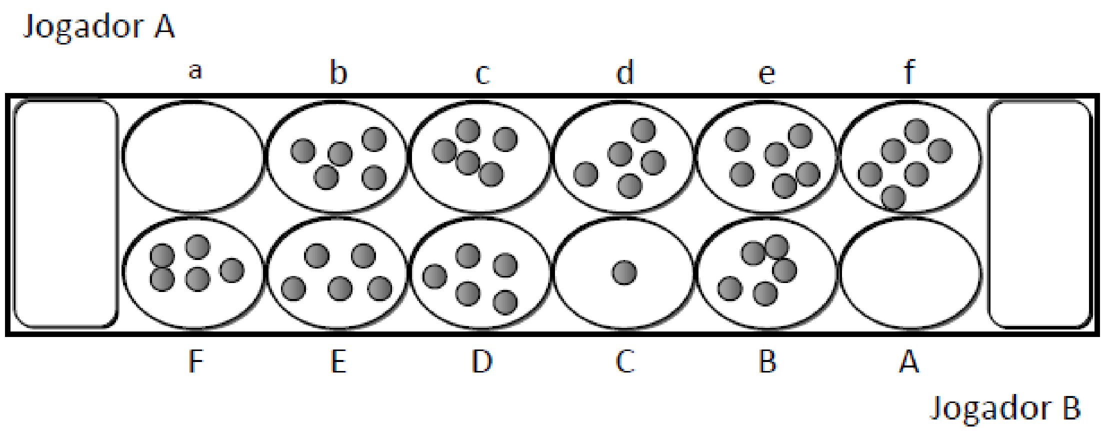
O que for obtido em (8) é a pontuação da cadeia.

[25] Este ponto não existe na pontuação original. Foi acrescentado para incentivar a correta elaboração das cadeias.

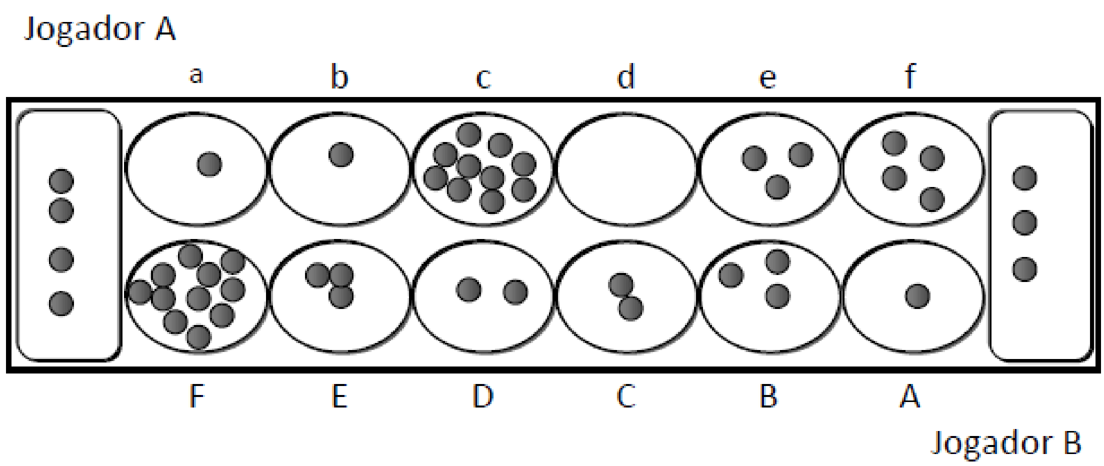
ANEXO E

Problemas com o jogo Ouri

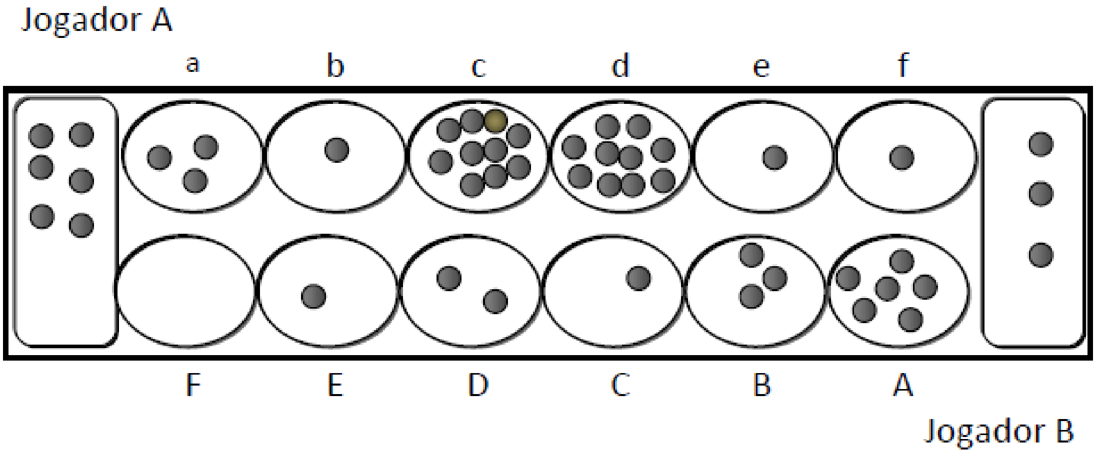
1. A Ana (jogador A) e o Bruno (jogador B) estão a jogar Ouri.
   Agora é a Ana a jogar.
   Como deverá jogar a Ana para capturar sementes nesta jogada?
   Quantas sementes irá capturar?
   Explica como pensaste.



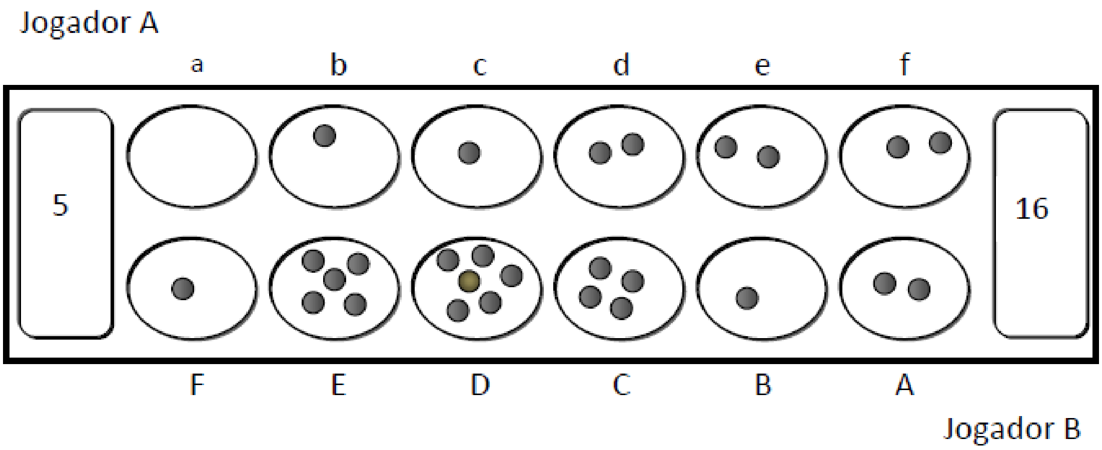
2. A Ana (jogador A) e o Bruno (jogador B) estão a jogar Ouri.
   O Bruno já capturou 3 sementes e é a sua vez de jogar.
   O Bruno vai jogar a casa C para capturar 2 sementes na casa A.
   a) Qual é a tua opinião acerca dessa jogada? Justifica a tua resposta.
   b) Como deveria jogar O Bruno para capturar sementes nesta jogada? Explica como pensaste.



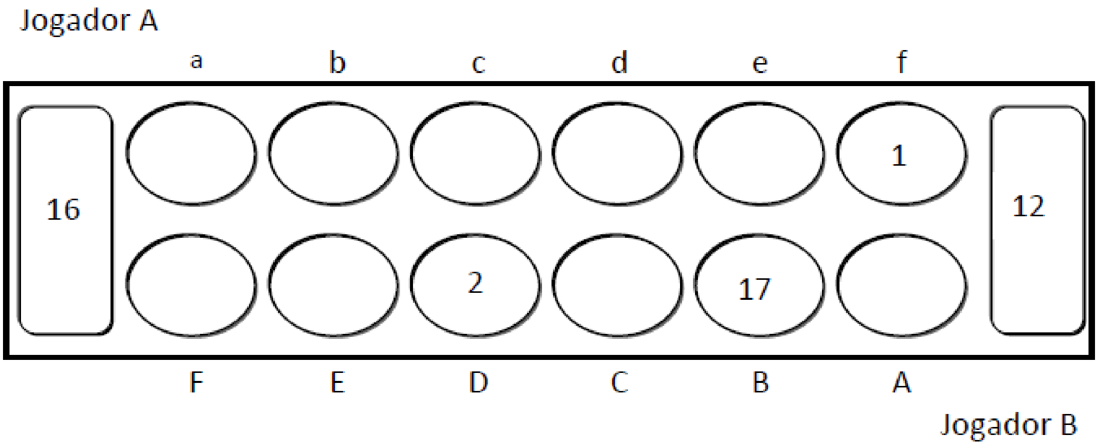
3. A Ana (jogador A) e o Bruno (jogador B) estão a jogar Ouri.
   A Ana vai jogar a casa **f** mas o Bruno diz que não é permitido.
   a) Concordas com O Bruno? Justifica a tua resposta.
   b) Como poderá jogar a Ana para capturar sementes? Explica como pensaste.



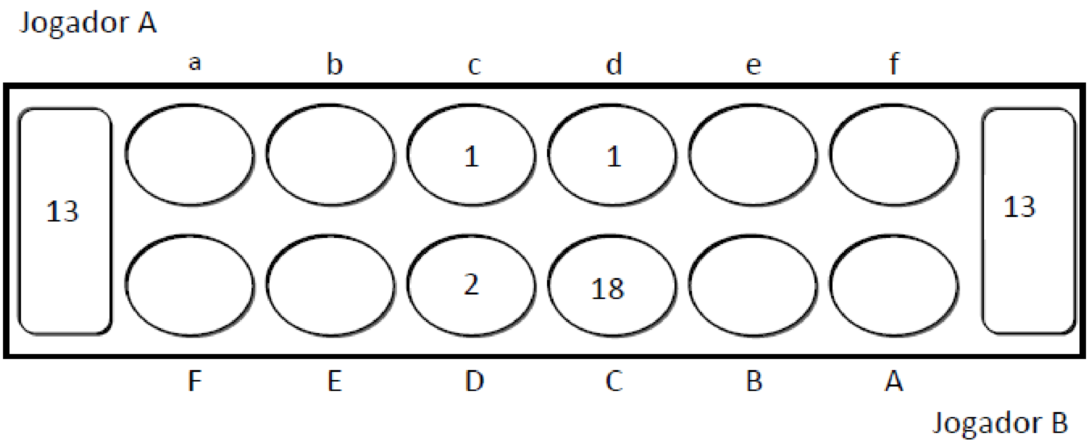
4. A Ana (jogador A) e o Bruno (jogador B) estão a jogar Ouri.
   Joga o Bruno e ganha.
   Como terá de jogar o Bruno? Justifica a tua resposta.



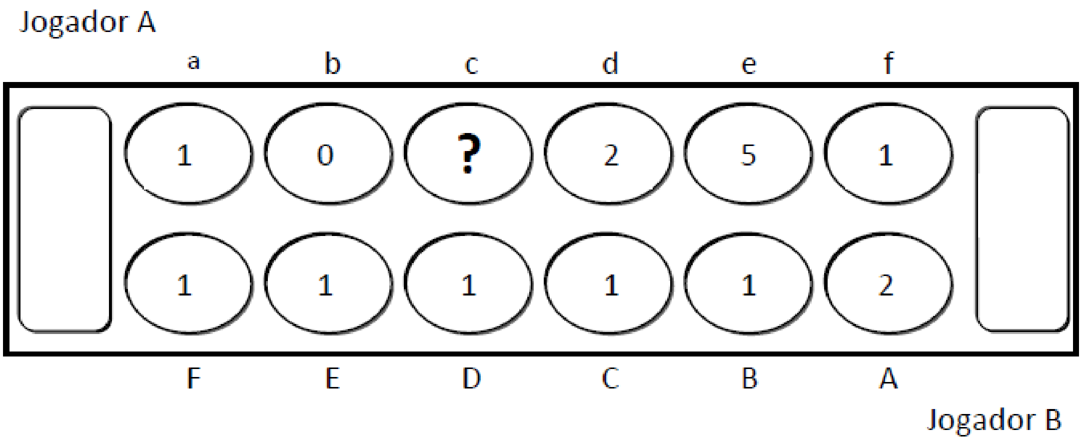
5. A Ana (jogador A) e o Bruno (jogador B) estão a jogar Ouri.
   O Bruno vai jogar agora mas está indeciso entre jogar D ou B.
   Ajuda o Bruno a escolher a melhor jogada.
   Quem ganha o jogo?
   Descreve as jogadas e explica como pensaste.



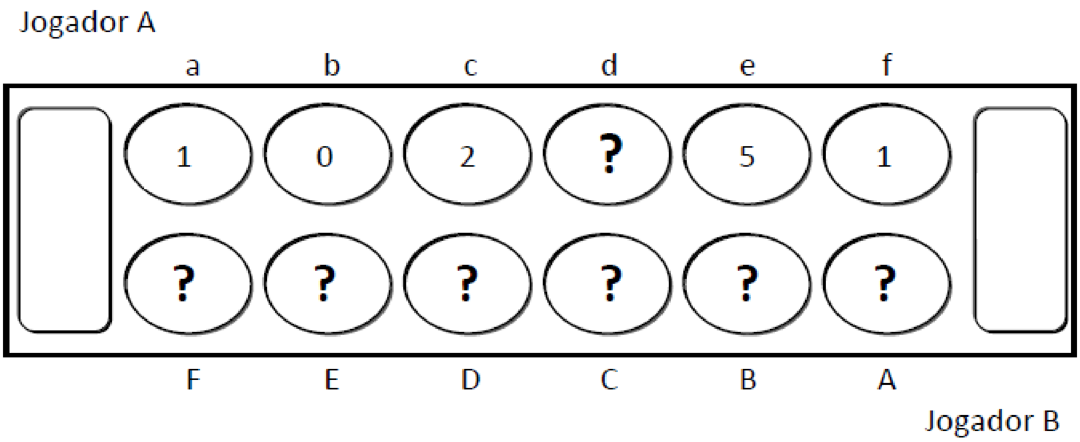
6. Neste jogo de Ouri é a vez da Ana (jogador A) jogar.
   Como deverá jogar a Ana para evitar que o Bruno ganhe na jogada seguinte?
   Se fosse a vez do Bruno jogar, como deveria fazê-lo?
   Descreve as jogadas e explica como pensaste.



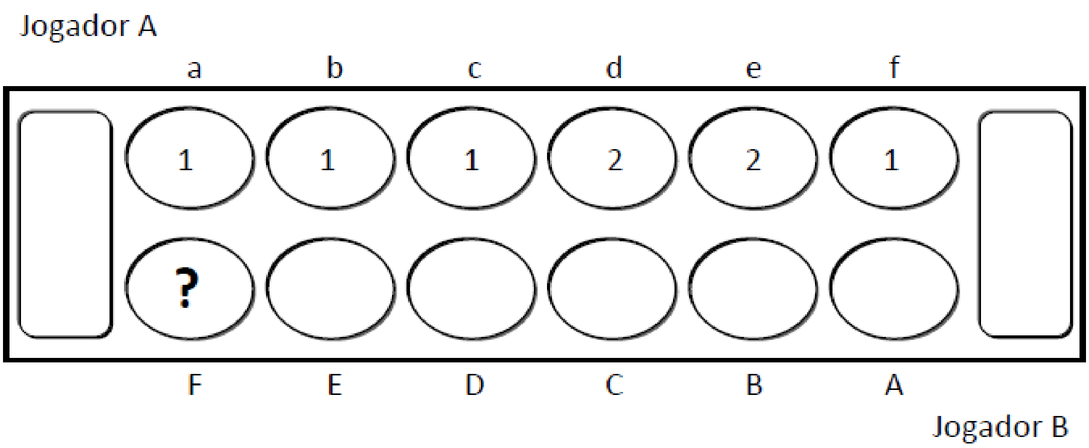
7. Quantas sementes estarão na casa **c** para que a Ana (jogador A) possa recolher o maior número de sementes?
   Descreve as jogadas e explica como pensaste.



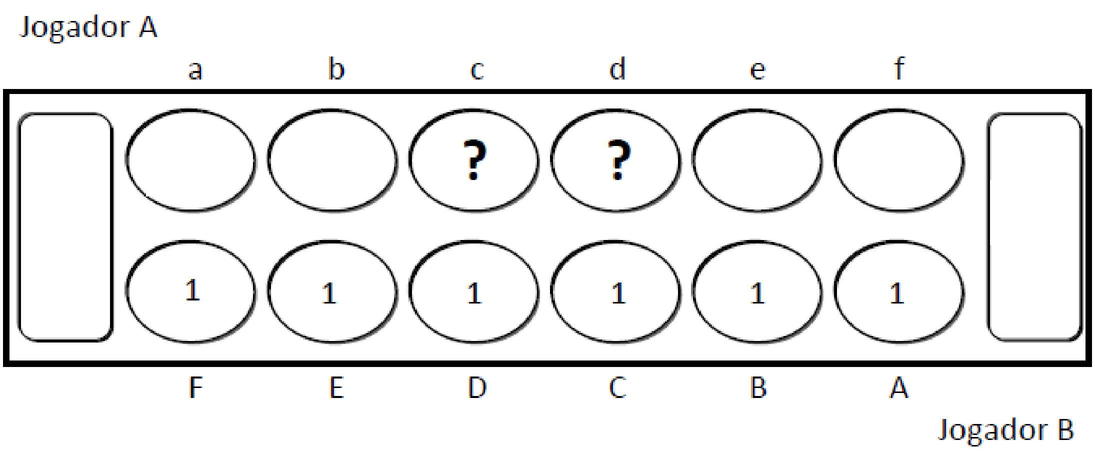
8. A Ana (jogador A) vai jogar as sementes da casa **d** e vai recolher 17 sementes.
   Substitui os pontos de interrogação pelo número de sementes necessário para que a Ana capture as sementes pretendidas.
   Haverá mais do que uma possibilidade?
   Regista as jogadas e explica como pensaste.



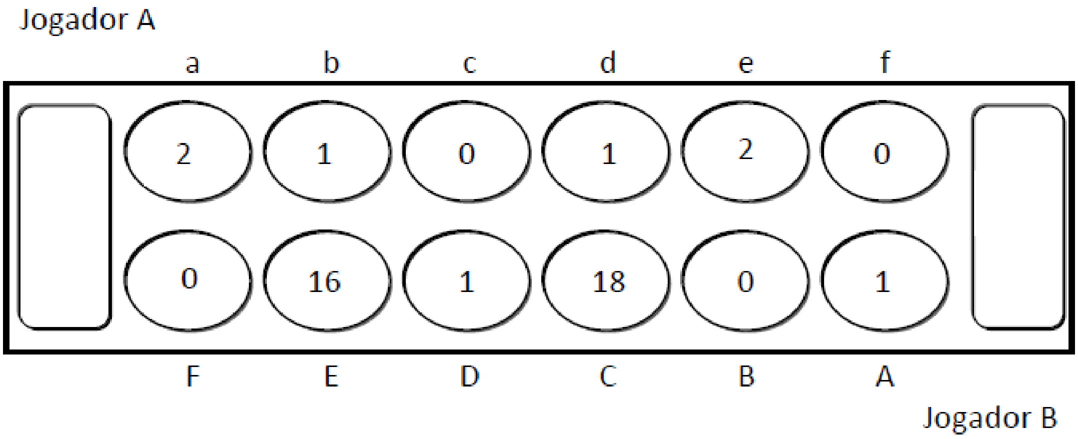
9. Qual o menor número de sementes que terá de ter a casa **F** para que o Bruno (jogador B) capture sementes em **f**?
   Experimenta com cada uma das outras casas do Bruno de forma a que ele capture sementes na casa que tem a mesma letra da casa de partida. O que concluis?



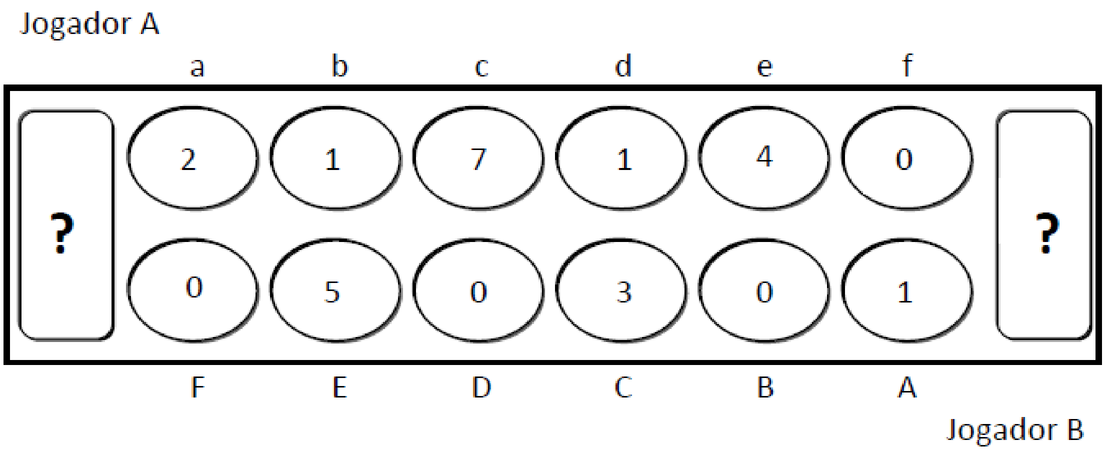
10. A Ana (jogador A) vai jogar as sementes da casa **d.** Quantas sementes terá de ter nessa casa para terminar na casa **C** e recolher sementes?
    Se a Ana quisesse partir da casa **c** e terminar na **D**, qual o número de sementes teria de ter a casa **c**?
    Experimenta com as outras casas da Ana de forma a que a jogada termine na casa imediatamente por baixo da casa de partida. O que concluis?
    Regista as jogadas e explica como pensaste.



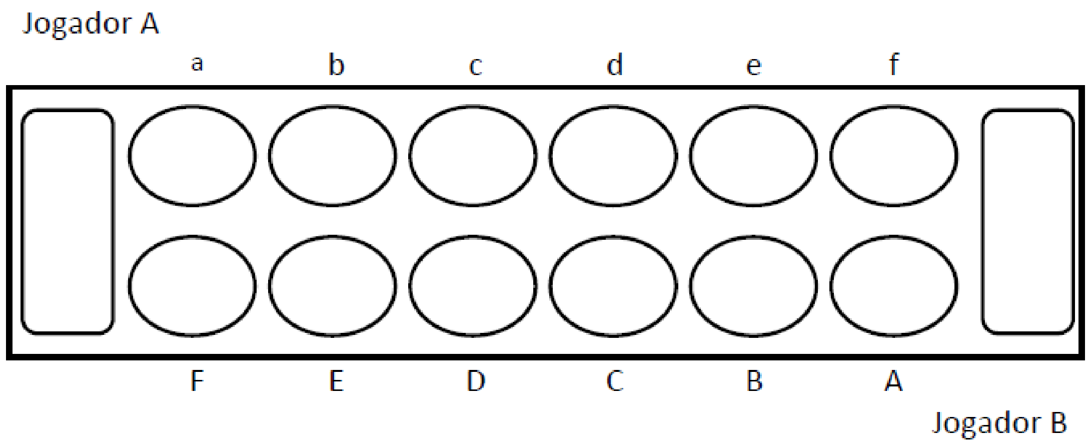
11. O Bruno (jogador B) vai jogar mas está a ponderar a sua jogada. Olhou para as sementes da casa **E**, rapidamente, contou 5 casas e soube que iria terminar na casa **f**. Depois olhou para a casa **C**, contou 7 casas e verificou que terminaria na casa **b.**
    Qual será a regra que o Bruno terá descoberto?
    Explica como pensaste.



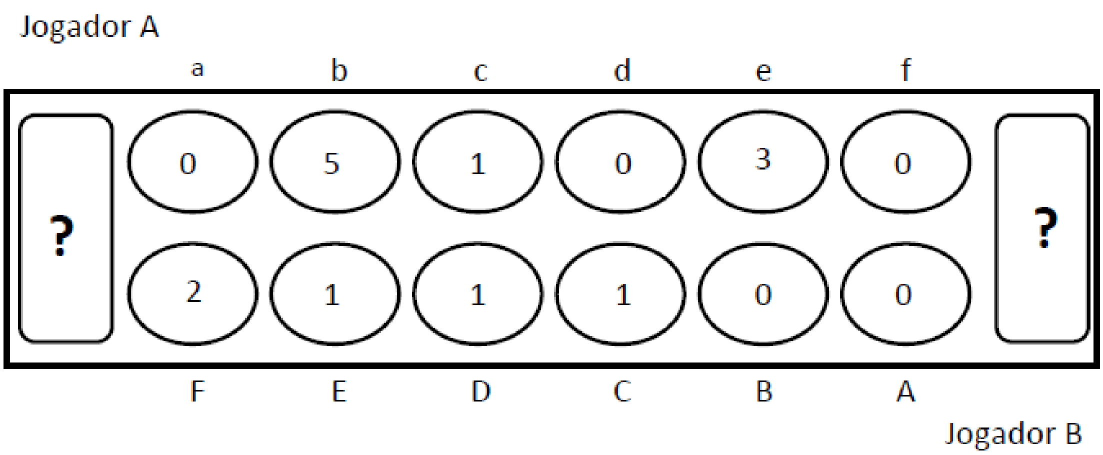
12. Observa com atenção o tabuleiro de jogo.
    Quantas sementes poderá ter capturado cada jogador, sabendo que o Bruno já capturou o triplo das sementes da Ana?
    Explica como pensaste.



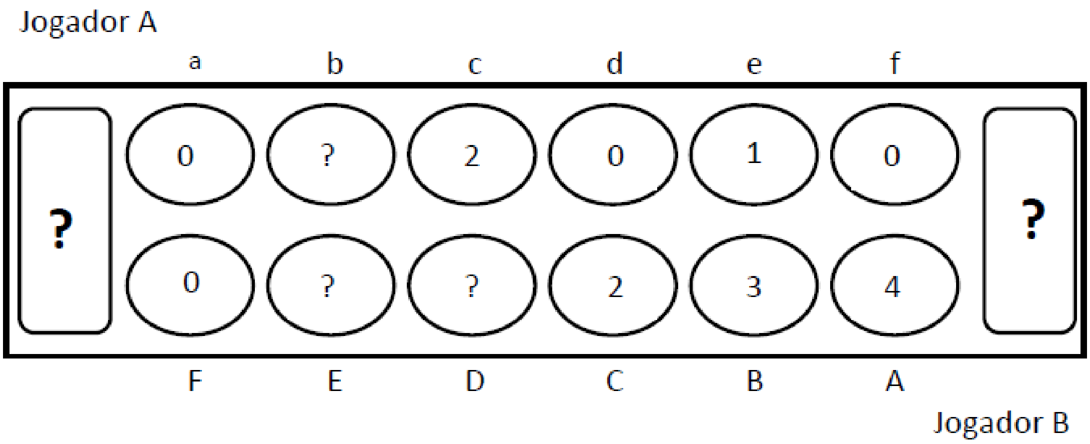
13. O Bruno estava a jogar com a Ana e, observando o jogo exclamou:
    - As sementes em jogo no tabuleiro são um múltiplo de oito; a soma do número de sementes dos nossos depósitos é metade das sementes em jogo mas também é um múltiplo de oito e eu já capturei nove sementes.
    Quantas sementes terá a Ana no seu depósito?
    Explica como pensaste.



14. O Bruno já recolheu mais sementes do que a Ana. No entanto, a Ana verifica que quando acrescentar ao seu depósito metade das sementes capturadas pelo Bruno, ganha.
    Quantas sementes terá capturado cada jogador?
    Explica como pensaste.



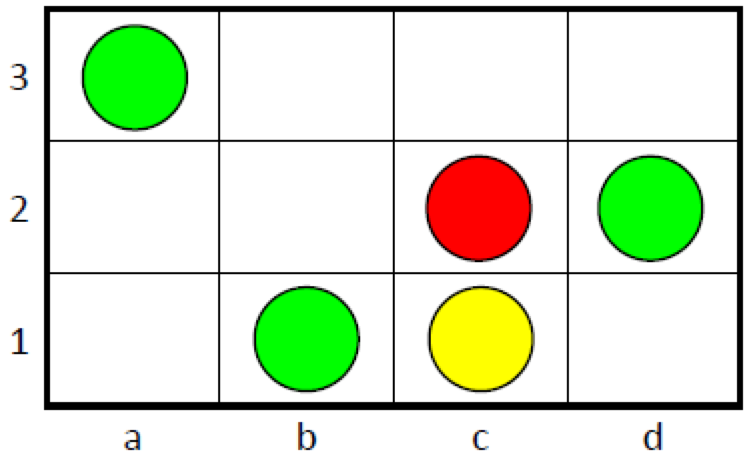
15. O Bruno já recolheu algumas sementes, mas para ganhar precisará de recolher ainda o triplo das sementes que a Ana já capturou.
    Quantas sementes poderá ter capturado cada um dos jogadores?
    Explica como pensaste.



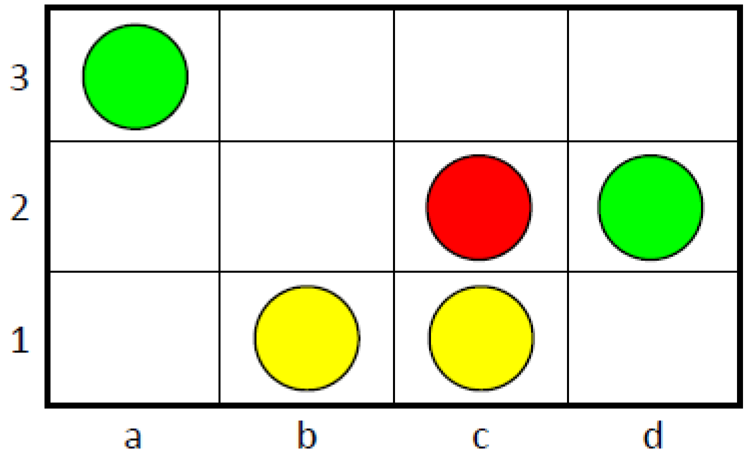
ANEXO F

Problemas com o jogo Semáforo

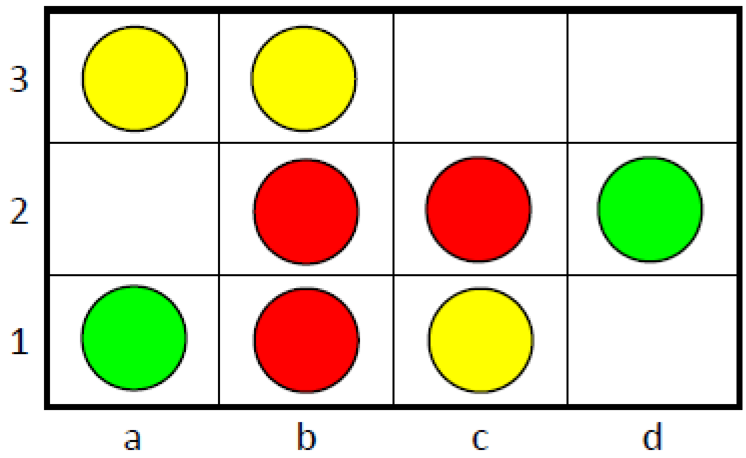
1. O António e a Berta estão a jogar o jogo de Semáforo identificado na imagem. Neste jogo estão colocadas peças verdes em **a3**, **b1** e **d2**, uma peça amarela em **c1** e uma peça vermelha em **c2**.
   É a vez do António jogar e está a pensar colocar uma peça verde.
   a) O que pensas acerca da opção do António? Justifica a tua resposta.
   b) Se fosses o António como jogarias? Explica como pensaste.



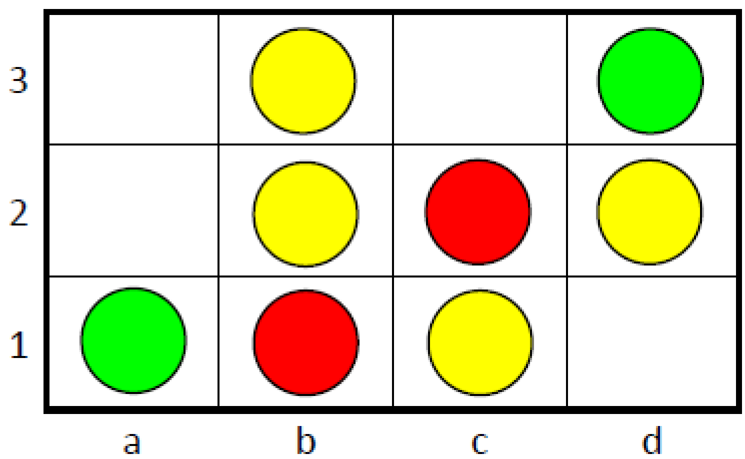
2. O António e a Berta estão a jogar o jogo de Semáforo identificado na imagem. Agora é a vez da Berta jogar e vai colocar uma peça amarela em **a1.**
   a) O que pensas acerca dessa jogada? Justifica a tua resposta.
   b) Que jogada pode fazer a Berta para não perder na jogada seguinte? Explica como pensaste.



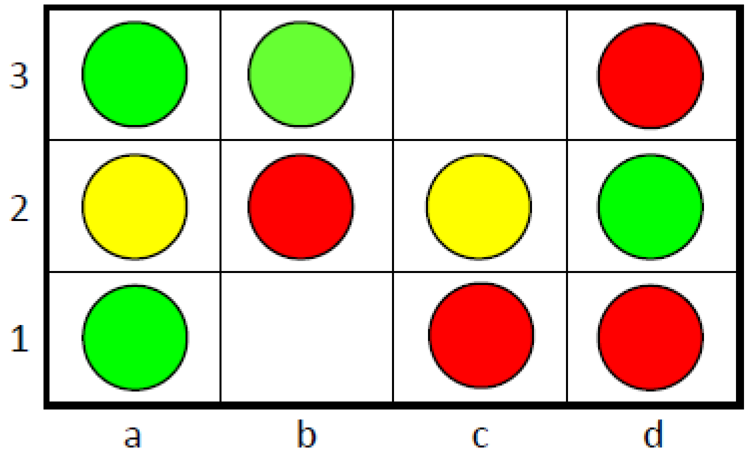
3. O António e a Berta estão a jogar o jogo identificado na imagem.
   O António quer trocar a peça colocada em **b2** por uma peça amarela.
   a) Pode fazer essa jogada? Justifica a tua resposta.
   b) Como deverá jogar o António para ganhar? Explica como pensaste.



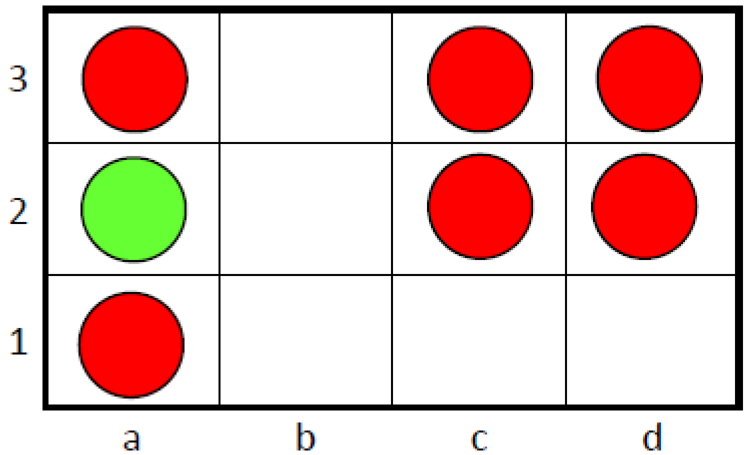
4. O António e a Berta estão a jogar o jogo identificado na imagem.
   Joga o António.
   a) Identifica as casas onde o António não deve jogar.
   b) Como deverá jogar o António?
   Justifica a tua resposta explicando como pensaste.



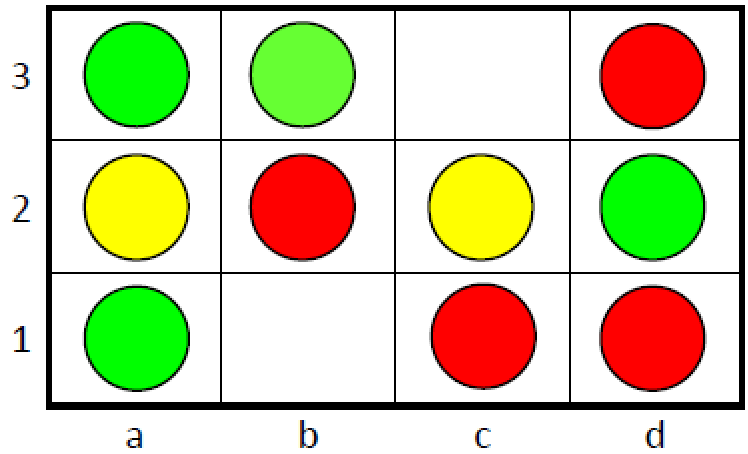
5. O António e a Berta tiveram que fazer uma pausa durante um jogo. Quando regressaram para continuar o jogo, nenhum deles se lembrava de quem tinha sido o último a jogar. No entanto, o António tinha a certeza de que tinha sido ele o primeiro a jogar.
   Observando o tabuleiro consegues ajudá-los a saber de quem é a vez de jogar? Justifica a tua resposta.

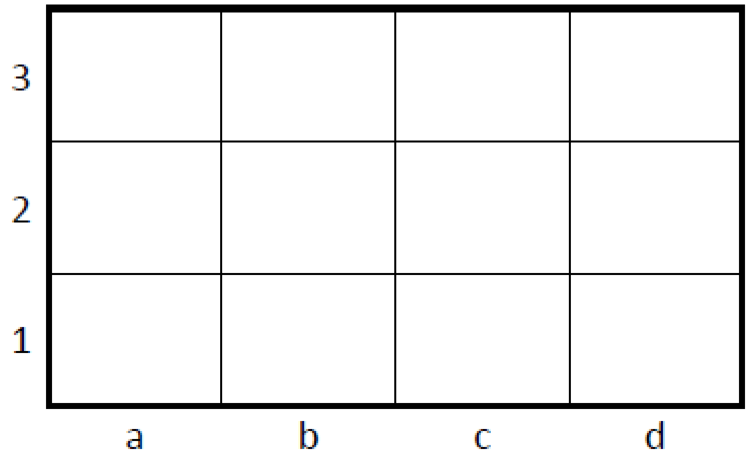


6. Imagina que estavas a jogar com um teu amigo a partir da situação abaixo representada.
   Qual preferias, ser o primeiro ou o segundo a retomar o jogo?
   Explica como pensaste.

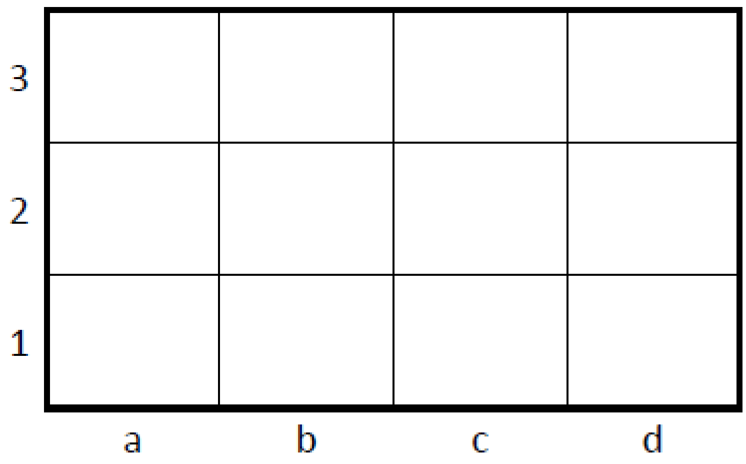


7. O António está a jogar Semáforo com a Berta. Durante o jogo duas peças saíram do lugar. A Berta diz que as peças centrais do tabuleiro estavam desocupadas e que se preparava para ganhar.
   No tabuleiro vazio, coloca as peças no lugar que estavam antes de se terem descolado.
   Que jogada estava a Berta a pensar fazer?

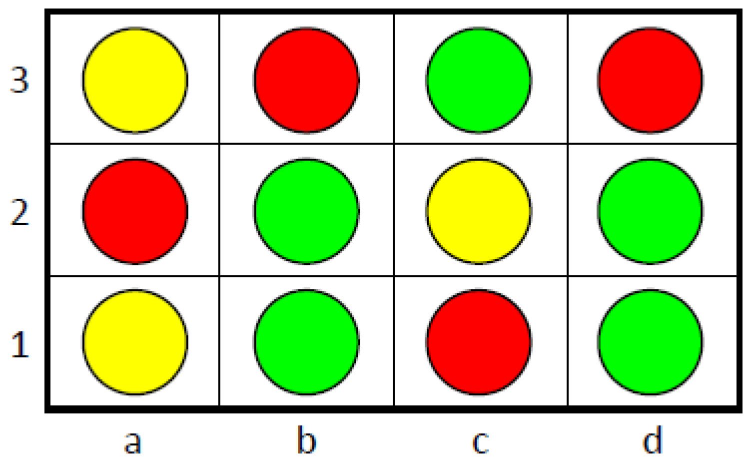




8. Durante um jogo de Semáforo as peças foram acidentalmente retiradas do tabuleiro.
   A Berta afirma que estavam 8 peças amarelas em jogo e que iria ganhar na jogada seguinte. O António não concorda e argumenta que não poderiam estar colocadas 8 peças amarelas porque o jogo ainda não tinha terminado.
   Quem terá razão? Explica como pensaste.
   Desenha 7 peças amarelas no tabuleiro de forma a que não haja nenhum vencedor.



9. No jogo identificado na imagem, o António acabou de fazer a sua jogada.
   A Berta já identificou as casas onde pode jogar sem perder de imediato, mas verificou que apenas uma jogada lhe permite a vitória.
   a) Que casas identificou a Berta?
   b) Qual é a jogada que lhe permite a vitória?
   Explica como pensaste.



10. O Vasco estava a observar um jogo de Semáforo que ainda não tinha terminado. No jogo estavam colocadas peças verdes, peças amarelas e peças vermelhas. Sabendo que todas as casas do tabuleiro estavam ocupadas e que as peças amarelas estavam em maior número e eram o dobro das peças verdes, quantas peças de cada cor estavam no tabuleiro?
    Explica como pensaste.
    Regista no tabuleiro como estaria o jogo que o Vasco observava.

3				
2				
1				
	a	b	c	d

11. O António e a Berta estão a jogar Semáforo.
    A Joana estava a observar o jogo e verificou que no tabuleiro estavam colocadas 7 peças vermelhas, 4 verdes e uma amarela. Verificou, ainda, que o António ia jogar e poderia ganhar o jogo. No entanto, apenas uma jogada lhe permitiria ganhar.
    Como estariam as peças colocadas? Regista todas as possibilidades que encontrares e explica como pensaste.

3				
2				
1				
	a	b	c	d

3				
2				
1				
	a	b	c	d

3				
2				
1				
	a	b	c	d

3				
2				
1				
	a	b	c	d

3				
2				
1				
	a	b	c	d

3				
2				
1				
	a	b	c	d

3				
2				
1				
	a	b	c	d

3				
2				
1				
	a	b	c	d

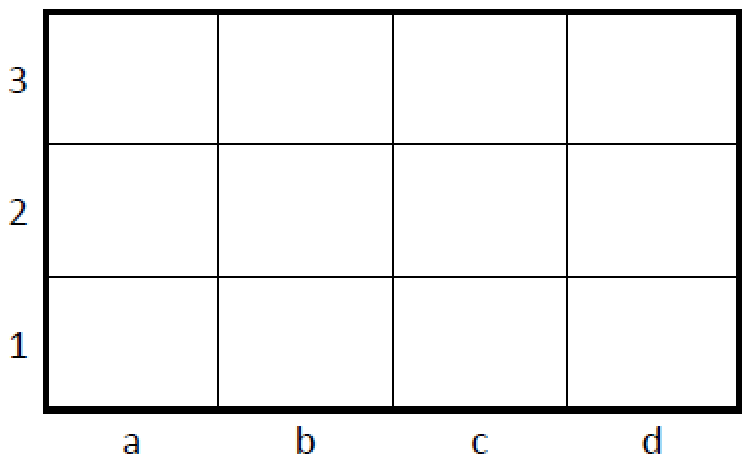
3				
2				
1				
	a	b	c	d

3				
2				
1				
	a	b	c	d

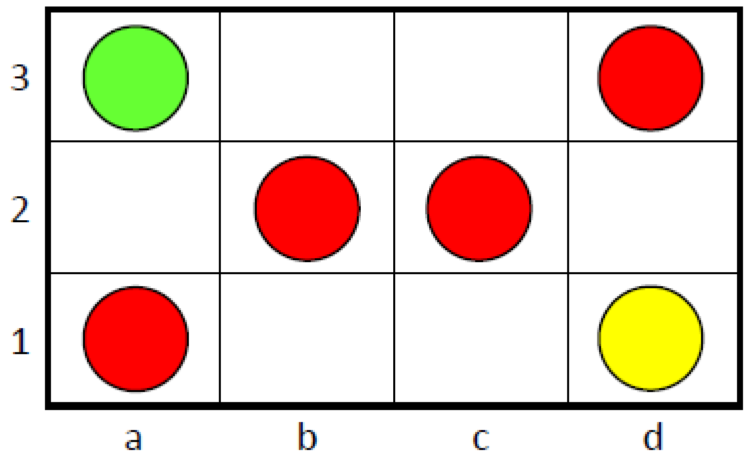
12. Num jogo de Semáforo as peças encontram-se colocadas no tabuleiro de acordo com as seguintes condições:
    - as peças de cada cor encontram-se em igual número;
    - as linhas têm peças das três cores;
    - em cada linha e em cada coluna estão colocadas duas peças seguidas da mesma cor;
    - ainda ninguém venceu (não há três peças em linha da mesma cor).

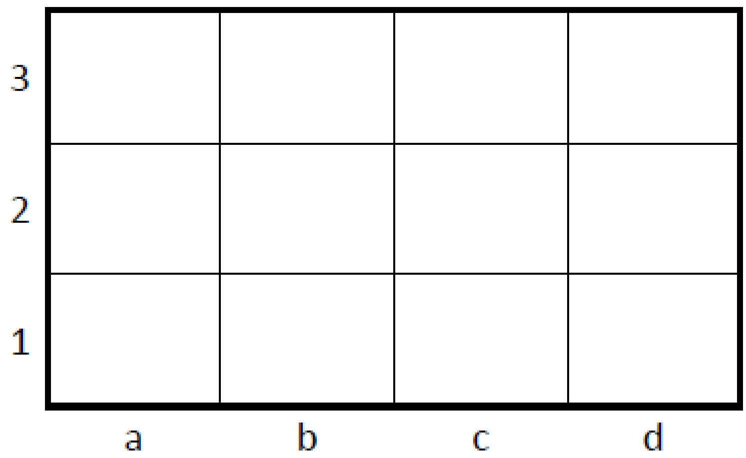
    Como estarão colocadas as peças no tabuleiro?

13. Num jogo de Semáforo, o António iniciou o jogo colocando uma peça em b3. Quando ia fazer a sua terceira jogada, verificou que apenas poderia jogar uma peça amarela para não perder de imediato.
    Como estariam colocadas as peças no tabuleiro?
    Explica como pensaste.



14. A Berta gosta muito das figuras que apresentam simetria. No jogo abaixo identificado, a Berta vai jogar de forma a que no final de cada uma das suas jogadas o tabuleiro apresente sempre simetria. Já fez sete jogadas e quando joga pela décima primeira vez verifica que vai ganhar o jogo.
Como estaria o tabuleiro no final da décima primeira jogada da Berta?
Utiliza o tabuleiro vazio para representares o jogo e explica como pensaste.





15. A Joana esteve a ver o António e a Berta a jogar Semáforo. Entretanto encontrou o Vasco que lhe perguntou como estava o jogo. A Joana gosta muito de desafios e disse:

    - O jogo ainda vai no princípio mas o tabuleiro já tem peças de todas as cores. As peças vermelhas são o dobro das amarelas e as verdes estão em menor número.

    O Vasco ouviu com atenção e retorquiu:

    - Assim ainda não consigo saber sequer o número de peças de cada cor!

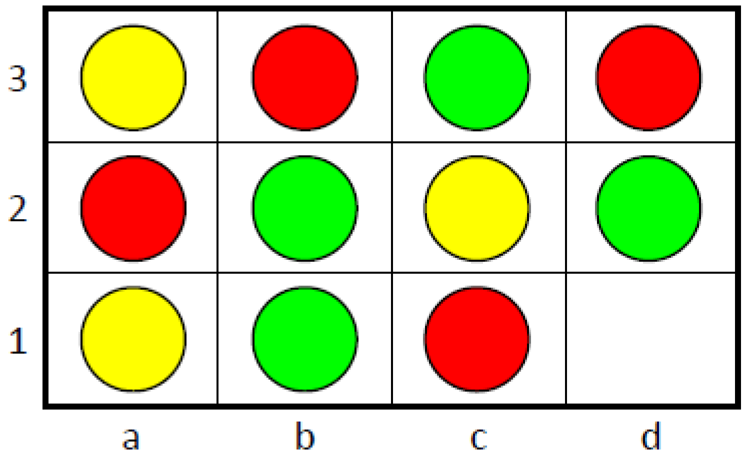
    - Há mais casas vazias do que ocupadas pelas peças vermelhas – acrescentou a Joana.

    a) Quantas peças de cada cor havia no jogo do António e da Berta?

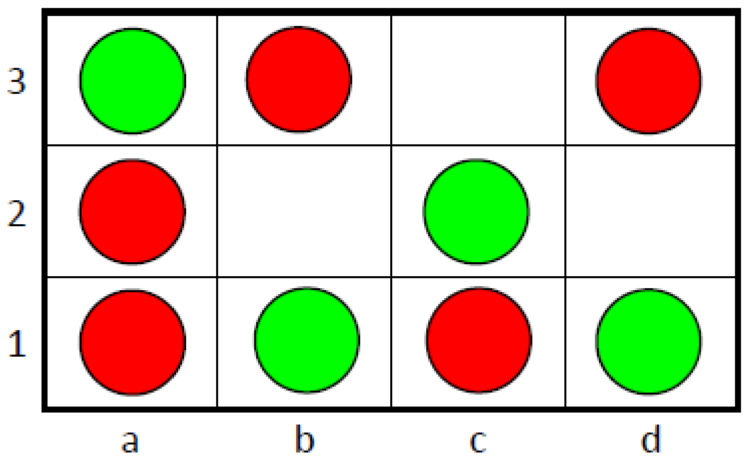
    b) Porque é que o Vasco não conseguia saber o número de peças de cada cor antes da última informação da Joana?

    Explica como pensaste.

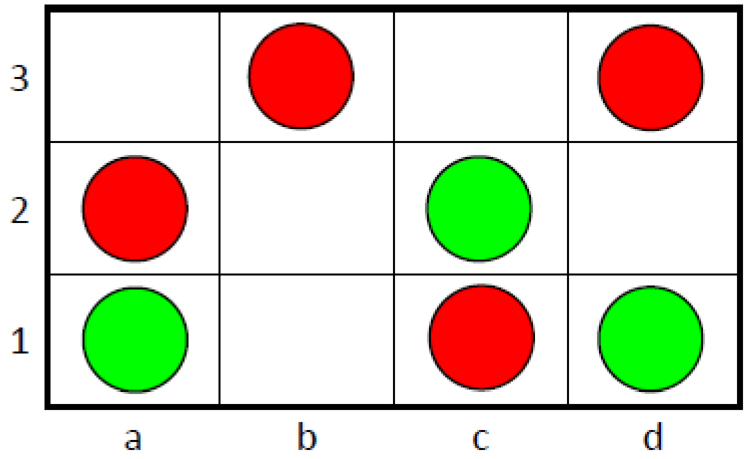
16. O António e a Berta estão a jogar o jogo identificado na imagem.
    Agora é a vez do António jogar.
    a) Onde é que o António não deve jogar para não perder de imediato?
    b) Que jogadas terão de efectuar o António e a Berta para o António ganhar o jogo?
    Explica como pensaste.



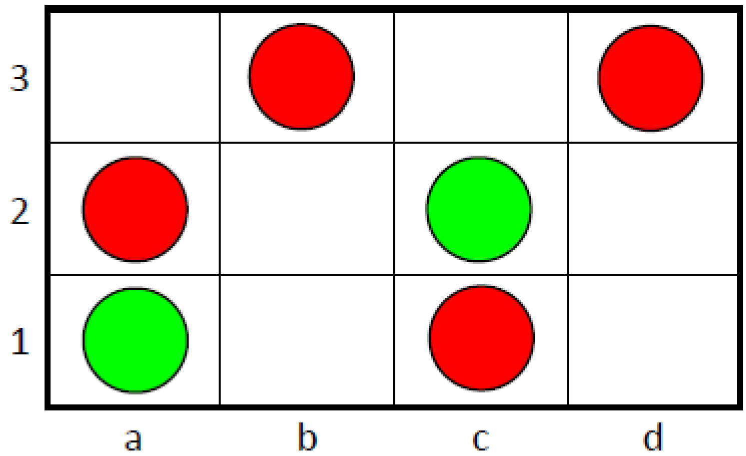
17. O António e a Berta estão a jogar o jogo identificado na imagem.
    Joga a Berta e sai vitoriosa deste jogo.
    Que jogadas terão de ser efectuadas?
    Explica como pensaste.



18. O António e a Berta estão a jogar o jogo identificado na imagem.
    Joga a Berta e ganha o jogo.
    Que jogadas terão de ser efectuadas?
    Explica como pensaste.



19. O António e a Berta estão a jogar o jogo identificado na imagem.
    O António vai jogar uma peça verde em **b1**.
    Quem poderá ganhar o jogo?
    Explica como pensaste identificando as jogadas de cada jogador.



20. Num tabuleiro de Semáforo de quantas maneiras diferentes consegues colocar 3 peças diferentes (uma amarela, uma verde e uma vermelha) na primeira linha?
    Regista as tuas conclusões.