

# **Cinemática de Mecanismos**

## **5. Análise de Acelerações**

**Paulo Flores**  
**J.C. Pimenta Claro**



**Universidade do Minho**  
Escola de Engenharia

Guimarães 2007

## ÍNDICE

<b>5. Análise de Acelerações .....</b>	<b>1</b>
5.1. Definição .....	1
5.2. Movimento Curvilíneo .....	3
5.3. Aceleração de um Ponto Num Sistema Móvel.....	6
5.4. Aceleração de um Corpo Rígido .....	10
5.5. Métodos Analíticos.....	12
5.6. Métodos Gráficos .....	18
5.7. Análise de Aceleração de Mecanismos Elementares .....	23

*Inventing is mixing brains and materials. The more brains you use, the less materials you need.*

Charles Kettering

## 5. ANÁLISE DE ACELERAÇÕES

### 5.1. DEFINIÇÃO

A aceleração mede a rapidez com que um corpo varia a sua velocidade. Como a própria velocidade é uma rapidez, poder-se-á entender a aceleração como sendo a velocidade da velocidade. Acelerar ou desacelerar<sup>1</sup> um corpo é, pois, variar a sua velocidade num intervalo de tempo. A aceleração é uma grandeza vectorial que tem a mesma direcção do vector velocidade. No caso em que o é movimento acelerado, os vectores aceleração e velocidade têm o mesmo sentido. Ao passo que, no movimento desacelerado ou retardado, os sentidos destes vectores são contrários.

A aceleração média pode ser definida como sendo a razão entre a diferença de velocidade e o intervalo de tempo necessário para que essa diferença de velocidade aconteça. Quando este intervalo de tempo tende para zero, a aceleração denomina-se aceleração instantânea.

Um valor de uso corrente para a aceleração é o da aceleração da gravidade, o qual para o nível do mar e 45° de latitude é, aproximadamente, igual a 9,81 m/s<sup>2</sup>.

Na mecânica clássica ou newtoniana, a aceleração está relacionada com a força e a massa pela segunda lei de Newton, ou seja,

$$F = ma \quad (5.1)$$

em que  $F$  representa a força,  $m$  é a massa e  $a$  representa a aceleração.

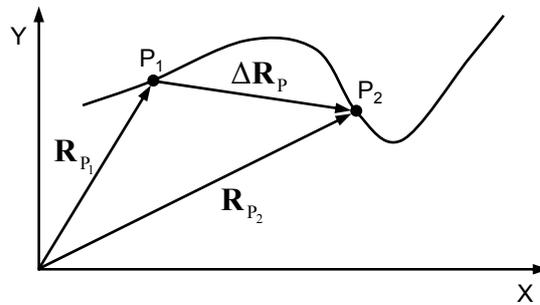


Figura 5.1 – Trajectória de um ponto.

A figura 5.1 ilustra a trajetória de um ponto  $P$ , em que  $P_1$  e  $P_2$  representam duas posições do mesmo. Atendendo a que a velocidade média do ponto  $P$  é dada por,

$$\mathbf{V}_{média} = \frac{\Delta \mathbf{R}_P}{\Delta t} \quad (5.2)$$

então, a correspondente aceleração linear média pode ser escrita como,

$$\mathbf{A}_{média} = \frac{\mathbf{V}_{média}}{\Delta t} \quad (5.3)$$

<sup>1</sup> Desaceleração é a aceleração que provoca a diminuição do valor absoluto da velocidade.

Do mesmo modo, como a velocidade instantânea é dada pelo limite ou derivada da seguinte razão,

$$\mathbf{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_P}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{R}_P}{dt} = \dot{\mathbf{R}}_P \quad (5.4)$$

então, a aceleração linear instantânea, ou simplesmente aceleração linear, é dada por,

$$\mathbf{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \dot{\mathbf{V}} = \ddot{\mathbf{R}}_P \quad (5.5)$$

De forma análoga ao movimento linear, para o movimento angular ou de rotação existe a aceleração angular,  $\alpha$ , a qual é definida como,

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \quad (5.6)$$

em que  $\omega$  é a velocidade angular associada ao movimento de rotação e  $\theta$  é a posição angular.

## 5.2. MOVIMENTO CURVILÍNEO

A figura 5.2 mostra um ponto que descreve uma trajectória curvilínea. Na mesma figura estão representados os vectores unitários associados aos eixos coordenados  $X$  e  $Y$ , bem como os vectores unitários relativos às direcções radial e tangencial da trajectória efectuada pelo ponto  $P$ .

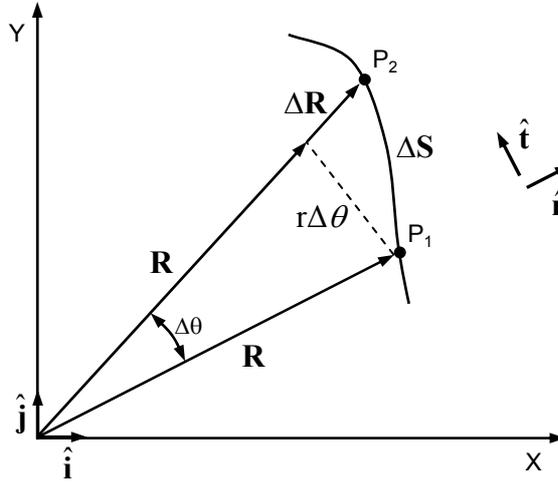


Figura 5.2 – Movimento curvilíneo.

O vector associado ao deslocamento descrito pelo ponto  $P$  ao longo da trajectória  $P_1 \rightarrow P_2$  é representada por  $\Delta S$  e pode ser escrita como,

$$\Delta S = r\hat{\mathbf{r}} + r\Delta\theta\hat{\mathbf{t}} \quad (5.7)$$

sendo  $r$  o módulo de  $\mathbf{R}$  e  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\hat{\mathbf{t}}$  são os versores das direcções radial e tangencial.

A velocidade do ponto  $P$  é dada pela variação instantânea da posição em relação ao tempo, isto é,

$$\mathbf{V} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\omega\hat{\mathbf{t}} \quad (5.8)$$

onde,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} \quad (5.9)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (5.10)$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}}\cos\theta + \hat{\mathbf{j}}\sin\theta \quad (5.11)$$

$$\hat{\mathbf{t}} = -\hat{\mathbf{i}}\sin\theta + \hat{\mathbf{j}}\cos\theta \quad (5.12)$$

Por definição, a aceleração do ponto  $P$  é dada pela derivada da velocidade em ordem ao tempo, ou seja,

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{V}} \quad (5.13)$$

Assim, substituindo as equações (5.8)-(5.12) na equação (5.13), após tratamento matemático, resulta que,

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{V}} = (\ddot{r} - r\omega^2)\hat{\mathbf{r}} + (2\dot{r}\omega + r\dot{\omega})\hat{\mathbf{t}} \quad (5.14)$$

em que,

$$\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} \quad (5.15)$$

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (5.16)$$

sendo os demais parâmetros já definidos anteriormente.

Da análise da equação (5.14) facilmente se observa que a aceleração de um ponto que descreve uma trajectória curvilínea é constituída por duas componentes, uma de magnitude  $(\ddot{r} - r\omega^2)$  na direcção  $\hat{\mathbf{r}}$  e outra de magnitude  $(2\dot{r}\omega + r\dot{\omega})$  na direcção  $\hat{\mathbf{t}}$ .

Utilizando o produto vectorial, a equação (5.14) pode ser reescrita como,

$$\mathbf{A} = \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + 2\dot{r}\boldsymbol{\omega}\hat{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} \quad (5.17)$$

em que  $\boldsymbol{\alpha}$  representa a aceleração angular do ponto  $P$ .

Quando a origem do sistema de coordenadas coincide com o centro de curvatura, então os vectores  $\dot{r}$  e  $\ddot{r}$  são nulos. Com esta premissa, a equação da velocidade do ponto  $P$  é simplificada como,

$$\mathbf{V} = r\boldsymbol{\omega}\hat{\mathbf{t}} \quad (5.18)$$

em que o módulo desta velocidade é dado por,

$$v = \omega r \quad (5.19)$$

Do mesmo modo, a equação da aceleração (5.14) é simplificada e escrita como,

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} \quad (5.20)$$

O termo  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$  designa-se aceleração centrípeta e representa a componente da aceleração na direcção radial ou normal, e cuja sentido aponta para o centro da curvatura. O termo  $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R}$  é denominado aceleração tangencial e, tal como o nome sugere, representa a componente da aceleração que é tangencial à trajectória no ponto  $P$ . Com efeito, a equação (5.20) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^n + \mathbf{A}^t \quad (5.21)$$

em que,

$$\mathbf{A}^n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \quad (5.22)$$

$$\mathbf{A}^t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} \quad (5.23)$$

Os módulos das componentes normal e tangencial da aceleração são dados por,

$$a^n = \omega^2 r = \omega v = \frac{v^2}{r} \quad (5.24)$$

$$a^t = \alpha r \quad (5.25)$$

A figura 5.3 mostra as componentes instantâneas de aceleração do ponto  $P$ , bem como a sua velocidade, quando o centro de rotação coincide com a origem do

sistema de coordenadas. Deve referir-se que a componente normal da aceleração,  $\mathbf{A}^n$ , está dirigida para o centro da curvatura, sendo responsável pela manutenção da trajectória. Ao passo que a componente tangencial,  $\mathbf{A}^t$ , é tangente à trajectória e é responsável pela variação da velocidade. O vector  $\mathbf{A}$  representa a aceleração total do ponto  $P$  no instante considerado e é igual à soma vectorial das componentes normal e tangencial.

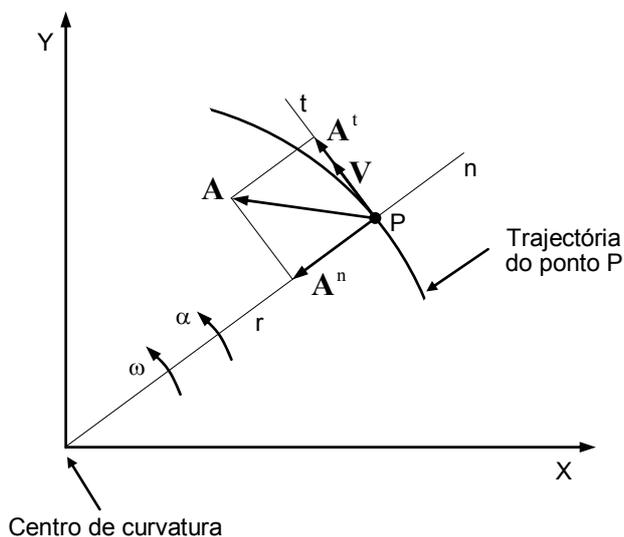


Figura 5.3 – Componentes normal e tangencial da aceleração.

As equações (5.18)-(5.25) são particularmente úteis no cálculo das magnitudes dos vectores velocidade e aceleração de pontos que descrevam trajectórias circulares. Esta situação ocorre com frequência no estudo de mecanismos em que o centro de curvatura é coincidente com a origem do sistema de coordenadas.

### 5.3. ACELERAÇÃO DE UM PONTO NUM SISTEMA MÓVEL

A figura 5.4 ilustra o movimento de um ponto relativamente a um sistema de coordenadas móvel. O sistema de coordenadas  $XYZ$  é fixo, ao passo que o sistema de coordenadas  $xyz$  é móvel.

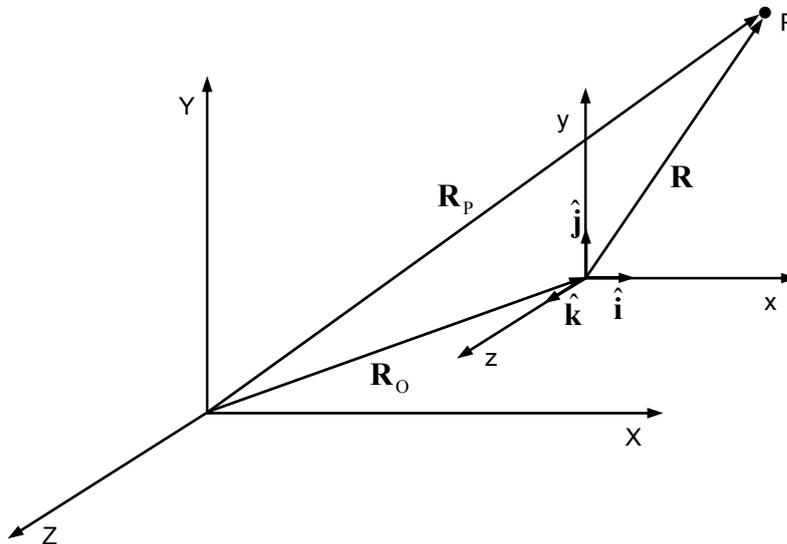


Figura 5.4 – Movimento de um ponto num sistema referencial móvel.

Da análise da figura 5.4, observa-se que a posição do ponto  $P$  em relação ao sistema de coordenadas  $XYZ$  pode ser escrito como,

$$\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_O + \mathbf{R} \quad (5.26)$$

em que  $\mathbf{R}_O$  representa o vector posição da origem do sistema de coordenadas móvel e  $\mathbf{R}$  é o vector posição do ponto  $P$  em relação a este sistema de coordenadas.

Em coordenadas cartesianas o vector  $\mathbf{R}$  é escrito como,

$$\mathbf{R} = r^x \hat{\mathbf{i}} + r^y \hat{\mathbf{j}} + r^z \hat{\mathbf{k}} \quad (5.27)$$

em que  $r^x$ ,  $r^y$  e  $r^z$  são os módulos das componentes do vector  $\mathbf{R}$  nas direcções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, e  $\hat{\mathbf{i}}$ ,  $\hat{\mathbf{j}}$  e  $\hat{\mathbf{k}}$  são os vectores unitários correspondentes às mesmas direcções. Deve referir-se que estes vectores variam durante o movimento associado ao sistema de referência móvel.

A velocidade absoluta do ponto  $P$ , isto é, a velocidade expressa em relação ao sistema de coordenadas fixo  $XYZ$ , pode obter-se derivando em ordem ao tempo a equação (5.26), resultando em,

$$\mathbf{V}_P = \dot{\mathbf{R}}_P = \dot{\mathbf{R}}_O + \dot{\mathbf{R}} \quad (5.28)$$

Por outro lado, derivando a equação (5.27) em ordem ao tempo vem que,

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{r}^x \hat{\mathbf{i}} + \dot{r}^y \hat{\mathbf{j}} + \dot{r}^z \hat{\mathbf{k}} + r^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + r^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + r^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} \quad (5.29)$$

em que os três primeiros termos do segundo membro representam a velocidade do ponto  $P$  em relação ao sistema de coordenadas móvel  $xyz$ , a qual, por conveniência, pode ser escrita como,

$$\mathbf{V} = \dot{r}^x \hat{\mathbf{i}} + \dot{r}^y \hat{\mathbf{j}} + \dot{r}^z \hat{\mathbf{k}} \quad (5.30)$$

Considerem-se, agora, os três últimos termos do lado direito da equação (5.29). Assim, a velocidade do ponto que representa o *terminus* de um vector  $\mathbf{R}$ , que passa por um ponto fixo e roda em torno deste ponto com uma velocidade  $\omega$ , é dada por,

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (5.31)$$

Por outro lado, as derivadas dos vectores unitários podem ser expressas por,

$$\dot{\hat{\mathbf{i}}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{i}} \quad (5.32)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{j}}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{j}} \quad (5.33)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{k}}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{k}} \quad (5.34)$$

em que  $\omega$  representa a velocidade angular do sistema de coordenadas móvel  $xyz$  em relação ao sistema de coordenadas fixo  $XYZ$ .

Utilizando as equações (5.32), (5.33) e (5.34), pode escrever-se que,

$$r^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + r^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + r^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} = r^x (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{i}}) + r^y (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{j}}) + r^z (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{k}}) \quad (5.35)$$

ou seja,

$$r^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + r^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + r^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} = \boldsymbol{\omega} \times (r^x \hat{\mathbf{i}} + r^y \hat{\mathbf{j}} + r^z \hat{\mathbf{k}}) \quad (5.36)$$

ou ainda, usando a relação dada pela equação (5.27),

$$r^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + r^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + r^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (5.37)$$

Deve notar-se que a equação (5.37) representa a velocidade linear de um ponto que roda em torno de eixo fixo. Com efeito, pelo que acaba de ser exposto, a equação (5.29) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (5.38)$$

assim, a velocidade do ponto  $P$  dada pela equação (5.28) é escrita como,

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_O + \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (5.39)$$

em que,

$$\mathbf{V}_O = \dot{\mathbf{R}}_O \quad (5.40)$$

Na equação (5.39)  $\mathbf{V}_P$  representa a velocidade do ponto  $P$  expressa no sistema de coordenadas fixo  $XYZ$ ,  $\mathbf{V}_O$  é a velocidade linear da origem do sistema de coordenadas móvel  $xyz$  em relação ao sistema de coordenadas fixo  $XYZ$ ,  $\mathbf{V}$  é a velocidade do ponto  $P$  em relação ao sistema de coordenadas móvel  $xyz$ ,  $\omega$  representa a velocidade angular do sistema móvel relativamente ao sistema fixo e  $\mathbf{R}$  representa a distância da origem do sistema de coordenadas  $xyz$  ao ponto  $P$ .

A aceleração do ponto  $P$  pode ser obtida por derivação da equação (5.39) em ordem ao tempo, resultando em,

$$\mathbf{A}_P = \dot{\mathbf{V}}_P = \dot{\mathbf{V}}_O + \dot{\mathbf{V}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}} \quad (5.41)$$

O termo  $\dot{\mathbf{V}}$  pode obter-se por derivação da equação (5.30), ou seja,

$$\dot{\mathbf{V}} = \ddot{r}^x \hat{\mathbf{i}} + \ddot{r}^y \hat{\mathbf{j}} + \ddot{r}^z \hat{\mathbf{k}} + \dot{r}^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + \dot{r}^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + \dot{r}^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} \quad (5.42)$$

em que os três primeiros termos do segundo membro representam a aceleração do ponto  $P$  em relação ao sistema de coordenadas móvel  $xyz$ , a qual, por conveniência, pode ser escrita da seguinte forma,

$$\mathbf{A} = \ddot{r}^x \hat{\mathbf{i}} + \ddot{r}^y \hat{\mathbf{j}} + \ddot{r}^z \hat{\mathbf{k}} \quad (5.43)$$

Considerando, agora, os três últimos termos do lado direito da equação (5.42), atendendo às relações dadas pelas equações (5.32)-(5.34), pode escrever-se que,

$$\dot{r}^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + \dot{r}^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + \dot{r}^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} = \dot{r}^x (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{i}}) + \dot{r}^y (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{j}}) + \dot{r}^z (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{k}}) \quad (5.44)$$

ou seja,

$$\dot{r}^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + \dot{r}^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + \dot{r}^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} = \boldsymbol{\omega} \times (\dot{r}^x \hat{\mathbf{i}} + \dot{r}^y \hat{\mathbf{j}} + \dot{r}^z \hat{\mathbf{k}}) \quad (5.45)$$

ou ainda,

$$\dot{r}^x \dot{\hat{\mathbf{i}}} + \dot{r}^y \dot{\hat{\mathbf{j}}} + \dot{r}^z \dot{\hat{\mathbf{k}}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \quad (5.46)$$

Utilizando as equações (5.43) e (5.46), a equação (5.42) pode ser reescrita como,

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{A} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \quad (5.47)$$

O último termo da equação (5.47) obtém-se recorrendo à equação (5.38), ou seja,

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \quad (5.48)$$

Assim, substituindo as equações (5.47) e (5.48) na equação (5.41) resulta que,

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{A}_O + \mathbf{A} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \quad (5.49)$$

em que,

$$\mathbf{A}_O = \dot{\mathbf{V}}_O \quad (5.50)$$

O significado físico dos termos que surgem na equação (5.49) é o seguinte,

$\mathbf{A}_P$  - Aceleração do ponto  $P$  em relação ao sistema de coordenadas  $XYZ$ ;

$\mathbf{A}_O$  - Aceleração da origem do sistema de coordenadas móvel  $xyz$  em relação ao sistema de coordenadas fixo  $XYZ$ ;

$\mathbf{A}$  - Aceleração do ponto  $P$  relativamente ao sistema de coordenadas móvel  $xyz$ ;

$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$  - Aceleração de Coriolis que mede o efeito combinado de  $P$  em relação ao sistema de coordenadas móvel e da rotação deste mesmo sistema;

$\boldsymbol{\omega}$  - Velocidade angular do sistema de coordenadas  $xyz$  em relação ao sistema de coordenadas fixo  $XYZ$ ;

$\mathbf{V}$  - Velocidade do ponto  $P$  no sistema de coordenadas móvel  $xyz$ ;

$\mathbf{R}$  - Vector posição do ponto  $P$  no sistema de coordenadas móvel  $xyz$ ;

$\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R}$  - Efeito da velocidade angular devida à rotação do sistema móvel  $xyz$ ;

$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$  - Efeito da aceleração angular devida à rotação do sistema de coordenadas  $xyz$ . Esta aceleração denomina-se centrípeta.

Os dois últimos termos representam a aceleração de transporte do sistema móvel.

Uma aplicação do que acaba de ser exposto pode ser vista ao estudar o movimento do mecanismo ilustrado na figura 5.5, em que a barra 2 roda com uma velocidade angular constante  $\omega_2$ . A velocidade do ponto  $B$  é, por isso, conhecida, a questão que se coloca é a de saber qual a velocidade do ponto  $C$ . O sistema de coordenadas fixo  $XY$  tem a origem em  $A$ , ao passo que o sistema de coordenadas móvel  $xy$  tem origem em  $B$ . Assim, a equação da velocidade do ponto  $C$  pode ser escrita como,

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_B + \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (5.51)$$

em que  $\mathbf{V}_C$  é perpendicular a  $CD$  e cujo módulo é desconhecido,  $\mathbf{V}_B$  é perpendicular a  $AB$  e tem módulo igual a  $\omega_2 AB$ ,  $\mathbf{V}$  é um vector nulo porque o ponto  $C$  é fixo em relação ao sistema de coordenadas móvel e  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$  é perpendicular a  $BC$  e em que  $\boldsymbol{\omega} = \omega_2$  e o módulo de  $\mathbf{R}$  é igual a  $BC$ . A direcção do vector  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$  pode obter-se pela aplicação da regra da mão direita.

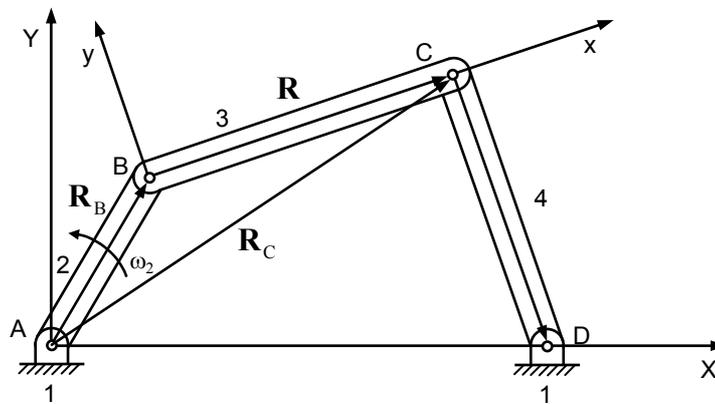


Figura 5.5 – Aplicação do movimento de um ponto num sistema referencial móvel.

Efectuando, agora, o cálculo das acelerações tem-se que,

$$\mathbf{A}_C = \mathbf{A}_B + \mathbf{A} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \quad (5.52)$$

em que, a componente normal da aceleração de  $C$ ,  $\mathbf{A}_C^n$ , tem módulo igual a  $\omega_4^2 CD$ , sendo a sua direcção a mesma que a da barra 4 e o sentido de  $C$  para  $D$ , a componente tangencial da aceleração de  $C$ ,  $\mathbf{A}_C^t$ , é perpendicular à barra  $CD$  sendo desconhecido o seu módulo. A aceleração do ponto  $B$  tem apenas componente normal, uma vez que a manivela 2 roda com velocidade angular constante, sendo o módulo igual a  $\omega_2^2 AB$ , a direcção é a mesma que a da manivela e o sentido é o de  $B$  para  $A$ . O vector  $\mathbf{A}$  é um vector nulo porque o ponto  $C$  é fixo no sistema de coordenadas móvel  $xy$ . Pela mesma razão é nula a parcela  $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$ . O vector  $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R}$  actua perpendicularmente à barra 3, sendo desconhecido o seu módulo. Por seu lado, o vector  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$  tem módulo igual a  $\omega_2^3 BC$ , em que a direcção é a mesma da barra 3 e o sentido é o de  $C$  para  $B$ .

Deve notar-se que a direcção do vector  $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R}$  pode ser determinado sabendo que a direcção do vector  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  é perpendicular ao plano  $xy$ . Assim, ao efectuar o produto vectorial de  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  por  $\mathbf{R}$ , resulta um vector que pertence ao plano  $xy$  e é perpendicular ao vector  $\mathbf{R}$ .

## 5.4. ACELERAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO

A figura 5.6 mostra um corpo rígido animado de um movimento geral, em que a aceleração do ponto  $B$  é conhecida. Assim, a aceleração do ponto  $A$  do mesmo corpo rígido é dada pela seguinte relação matemática,

$$\mathbf{A}_A = \mathbf{A}_B + \mathbf{A}_{A/B} \quad (5.53)$$

em que  $\mathbf{A}_{A/B}$  representa a aceleração do ponto  $A$  em relação ao ponto  $B$ .

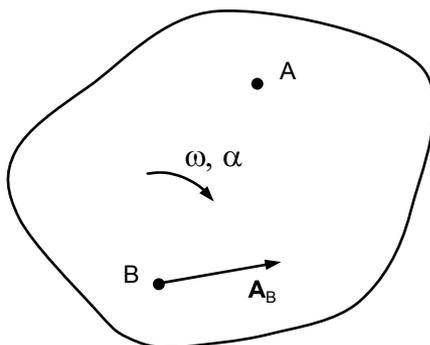


Figura 5.6 – Corpo rígido animado de um movimento geral.

Na figura 5.7a está representado um corpo rígido em que se consideram dois dos seus pontos,  $A$  e  $B$ . Assim, quando o corpo é sujeito a um determinado movimento, a distância  $AB$  mantém-se constante, o que faz com que o movimento do ponto  $A$  seja de rotação em torno de  $B$ , independentemente do tipo de movimento do ponto  $B$ . Por outro lado, como a trajectória do ponto  $A$  relativamente ao ponto  $B$  é circular, então o vector aceleração  $\mathbf{A}_A$  pode ser representado pelas componentes normal e tangencial,  $\mathbf{A}_{A/B}^n$  e  $\mathbf{A}_{A/B}^t$ , as quais são perpendiculares entre si, como se ilustra na figura 5.7a.

Independentemente do movimento do ponto  $B$ , o movimento angular do corpo em relação ao ponto  $B$  é o mesmo que o do corpo relativamente a um corpo fixo, porque o ponto  $B$  não descreve movimento de rotação. Assim, para a trajectória circular de  $A$  relativamente a  $B$ , a velocidade angular associada à curvatura de raio  $AB$  é a mesma que a velocidade angular do corpo. O mesmo sucede com a aceleração angular.

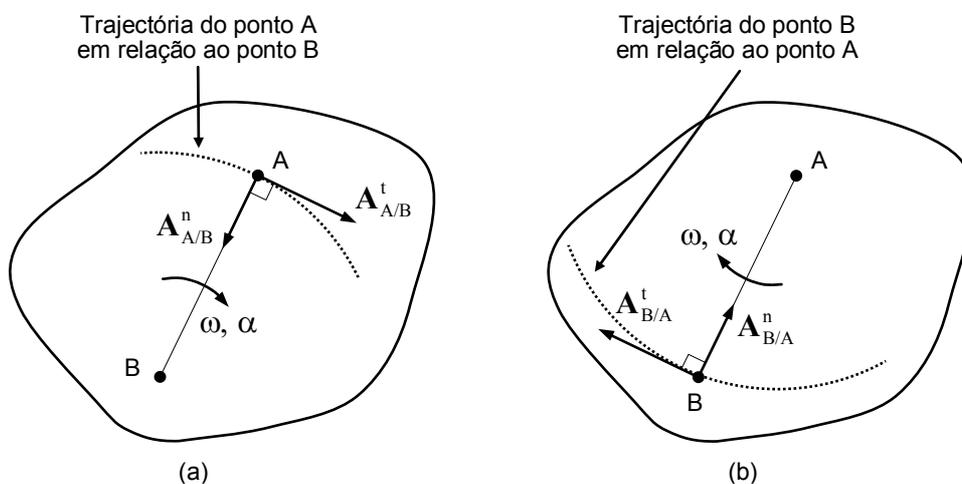


Figura 5.7 – Movimento relativo de dois pontos de um corpo rígido.

Os módulos das acelerações relativas normal e tangencial do ponto  $A$  em relação ao ponto  $B$  podem ser calculadas como,

$$a_{A/B}^n = \omega^2 AB \quad (5.54)$$

$$a_{A/B}^t = \alpha AB \quad (5.55)$$

A figura 5.7b representa as componentes da aceleração do ponto  $B$  em relação ao ponto  $A$ , em que as magnitudes e sentidos de  $\omega$  e  $\alpha$  são os mesmos da figura 5.7a. Ainda na figura 5.7b está ilustrada a trajetória do ponto  $B$  relativamente ao ponto  $A$ . Nestas circunstâncias, deve notar-se que,

$$\mathbf{A}_{B/A}^n = -\mathbf{A}_{A/B}^n \quad (5.56)$$

$$\mathbf{A}_{B/A}^t = -\mathbf{A}_{A/B}^t \quad (5.57)$$

em que o sinal menos significa que os vectores têm sentidos opostos.

No caso em que, por exemplo, o ponto  $A$  tem uma dada aceleração, tal como ilustrado na figura 5.8, considerando o ponto  $A$  como sendo o centro da curvatura do movimento do ponto  $B$ , então,

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{A}_A + \mathbf{A}_{B/A} = \mathbf{A}_A + \mathbf{A}_{B/A}^n + \mathbf{A}_{B/A}^t \quad (5.58)$$

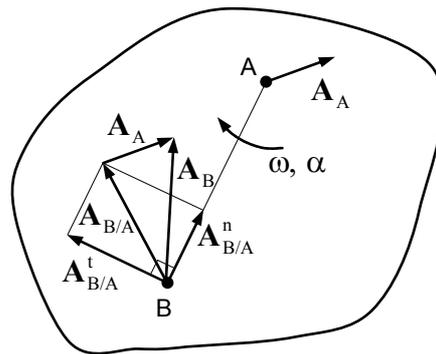


Figura 5.8 – Polígono de acelerações de dois pontos de um mesmo corpo.

Pelo que acaba de ser exposto, dois conceitos importantes devem estar presentes. Em primeiro lugar, verifica-se que a componente normal da aceleração de um ponto, relativamente a outro ponto pertencente ao mesmo corpo rígido, é função da velocidade angular do corpo e da distância entre os dois pontos considerados, sendo a direcção a da linha de união dos dois pontos e o sentido apontando para o ponto de referência. Em segundo lugar, observa-se que a componente tangencial da aceleração de um ponto, em relação a outro ponto pertencente ao mesmo corpo rígido, é função da aceleração angular do corpo e da distância entre os dois pontos, tendo direcção perpendicular à linha de união dos pontos e o mesmo sentido da aceleração angular.

## 5.5. MÉTODOS ANALÍTICOS

### 5.5.1. Método Algébrico

A figura 5.9 mostra o mecanismo biela-manivela, em relação ao qual se pretende deduzir uma equação matemática que permita calcular em cada instante a aceleração da corrediça, isto é, a aceleração do ponto C. Na presente situação, considera-se que o mecanismo é accionado pela manivela, a qual roda com uma velocidade angular constante igual a  $\omega_2$ . Admite-se, ainda, que os comprimentos da manivela e da biela são conhecidos à partida, sendo representados por  $r_2$  e  $r_3$ , respectivamente.

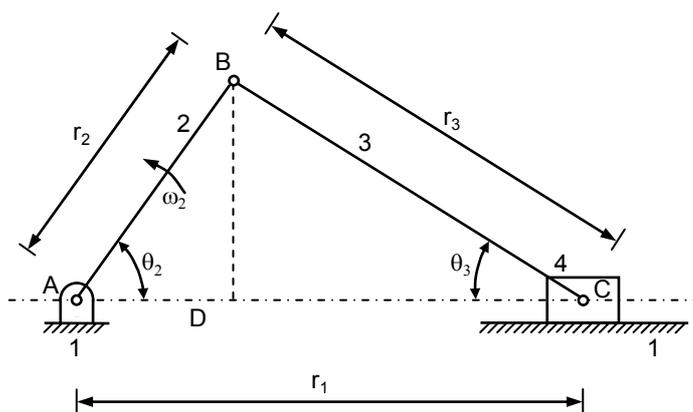


Figura 5.9 – Representação esquemática do mecanismo biela-manivela.

Assim, da análise de posição do mecanismo biela-manivela da figura 5.9 sabe-se a expressão que traduz, em cada instante, a posição da corrediça é dada por,

$$r_1 = r_2 \cos \omega_2 t + \sqrt{r_3^2 - r_2^2 \sin^2 \omega_2 t} \quad (5.59)$$

ou, de forma simplificada, isto é, quando  $r_2/r_3 < 1/4$ ,

$$r_1 = r_2 \cos \omega_2 t + r_3 - \frac{r_2^2 \sin^2 \omega_2 t}{2r_3} \quad (5.60)$$

Analisando as equações (5.59) e (5.60), observa-se que a posição da corrediça depende directamente da variável tempo, bem como das propriedades geométricas do mecanismo. Por isso, derivando uma e outra vez, em ordem ao tempo, estas duas equações obtêm-se as expressões que permitem calcular a aceleração da corrediça, isto é,

$$a_1 = -\omega_2^2 r_2 \cos \omega_2 t - \frac{\omega_2^2 r_2^2 (\cos^2 \omega_2 t - \sin^2 \omega_2 t)}{\sqrt{r_3^2 - r_2^2 \sin^2 \omega_2 t}} - \frac{\omega_2^2 r_2^4 \sin^2 \omega_2 t \cos^2 \omega_2 t}{(r_3^2 - r_2^2 \sin^2 \omega_2 t)^{3/2}} \quad (5.61)$$

$$a_1 = -\omega_2^2 r_2 \left( \cos \omega_2 t + \frac{r_2}{r_3} \cos 2\omega_2 t \right) \quad (5.62)$$

A título de curiosidade deve referir-se que o termo  $\omega_2^2 r_2$  representa a aceleração centrípeta.

### 5.5.2. Método da Notação Complexa

Na figura 5.10 está representado esquematicamente o mecanismo biela-manivela, em que as barras foram substituídas por vectores posição equivalentes. Estes vectores constituem uma cadeia cinemática fechada. Assim, utilizando a notação complexa em coordenadas polares, a equação que traduz a cadeia cinemática constituída pelos vectores  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  e  $\mathbf{R}_3$  pode ser escrita como,

$$r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} - r_1 e^{i\theta_1} = 0 \quad (5.63)$$

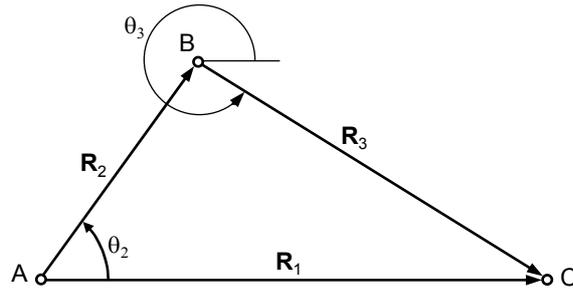


Figura 5.10 – Representação vectorial do mecanismo biela-manivela.

Tal como anteriormente, neste mecanismo o órgão motor é a manivela que roda com velocidade angular constante, ou seja,  $\theta_2 = \omega_2 t$ . Com efeito, pretende-se também calcular a aceleração da corrediça pelo que a equação (5.63) deve ser derivada duas vezes. Atendendo a que  $r_2$ ,  $r_3$  e  $\theta_1$  são constantes, as respectivas derivadas são nulas, pelo que derivando a equação (5.63) em ordem ao tempo resulta que,

$$i r_2 \omega_2 e^{i\theta_2} + i r_3 \omega_3 e^{i\theta_3} - v_1 e^{i\theta_1} = 0 \quad (5.64)$$

Derivando agora a equação (5.64) obtém-se,

$$i r_2 \left( \frac{d\omega_2}{dt} e^{i\theta_2} + \omega_2 i \frac{d\theta_2}{dt} e^{i\theta_2} \right) + i r_3 \left( \frac{d\omega_3}{dt} e^{i\theta_3} + \omega_3 i \frac{d\theta_3}{dt} e^{i\theta_3} \right) - \frac{dv_1}{dt} e^{i\theta_1} = 0 \quad (5.65)$$

em que,

$$\frac{d\omega_2}{dt} = 0 \quad (5.66)$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \alpha_3 \quad (5.67)$$

$$\frac{dv_1}{dt} = a_1 \quad (5.68)$$

Então, a equação (5.65) pode ser simplificada e reescrita como,

$$i^2 r_2 \omega_2^2 e^{i\theta_2} + i r_3 \alpha_3 e^{i\theta_3} + i^2 r_3 \omega_3^2 e^{i\theta_3} - a_1 e^{i\theta_1} = 0 \quad (5.69)$$

As incógnitas de equação (5.69) são  $\alpha_3$  e  $a_1$ , pelo que, utilizando a fórmula de Euler, separando as partes real e imaginária e resolvendo o sistema daí resultante vem que,

$$\alpha_3 = \frac{r_2 \omega_2^2 \text{sen} \theta_2 + r_3 \omega_3^2 \text{sen} \theta_3}{r_3 \cos \theta_3} \quad (5.70)$$

$$a_1 = -\omega_2^2 r_2 (\cos \theta_2 + \text{sen} \theta_2 \text{tg} \theta_3) - \omega_3^2 r_3 (\cos \theta_3 + \text{sen} \theta_3 \text{tg} \theta_3) \quad (5.71)$$

onde  $\alpha_3$  e  $a_1$  são, respectivamente, a aceleração angular da biela e a aceleração linear da corrediça. Os valores de  $\theta_3$  e de  $\omega_3$  necessários para o cálculo destas acelerações obtêm-se da análise de posição e velocidade, respectivamente, ou seja,

$$\theta_3 = \arcsen\left(-\frac{r_2 \text{sen} \theta_2}{r_3}\right) \quad (5.72)$$

$$\omega_3 = -\frac{r_2 \omega_2 \cos \theta_2}{r_3 \cos \theta_3} \quad (5.73)$$

### 5.5.3. Método da Notação Matricial

O mecanismo biela-manivela representado na figura 5.11 é utilizado para demonstrar a aplicação do método da notação matricial no cálculo da aceleração. Na figura 5.11, tal como anteriormente, as barras que constituem o mecanismo foram substituídas por vectores posição, os quais formam uma cadeia cinemática fechada.

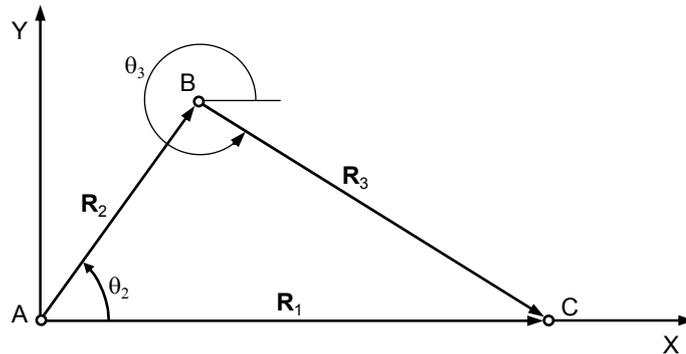


Figura 5.11 – Representação vectorial do mecanismo biela-manivela.

Da análise da configuração geométrica da figura 5.11, projectando os vectores  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  e  $\mathbf{R}_3$  nas direcções  $X$  e  $Y$  vem, respectivamente, que,

$$r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 - r_1 = 0 \quad (5.74)$$

$$r_2 \text{sen} \theta_2 - r_3 \text{sen} \theta_3 = 0 \quad (5.75)$$

Derivando estas duas expressões em ordem ao tempo obtém-se,

$$-r_2 \omega_2 \text{sen} \theta_2 - r_3 \omega_3 \text{sen} \theta_3 - v_1 = 0 \quad (5.76)$$

$$r_2 \omega_2 \cos \theta_2 - r_3 \omega_3 \cos \theta_3 = 0 \quad (5.77)$$

As equações (5.76) e (5.77) pode ser reescritas na forma matricial como,

$$\begin{bmatrix} -r_3 \text{sen} \theta_3 & -1 \\ r_3 \cos \theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_3 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2 \omega_2 \text{sen} \theta_2 \\ r_2 \omega_2 \cos \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.78)$$

Derivando, agora, as equações (5.76) e (5.77) obtém-se, respectivamente,

$$-r_2\omega_2^2\cos\theta_2 - r_3\alpha_3\sin\theta_3 - r_3\omega_3^2\cos\theta_3 - v_1 = 0 \quad (5.79)$$

$$-r_2\omega_2^2\sin\theta_2 - r_3\alpha_3\cos\theta_3 - r_3\omega_3^2\sin\theta_3 = 0 \quad (5.80)$$

Estas duas equações formam um sistema de duas equações a duas incógnitas,  $\alpha_3$  e  $a_1$ , o qual em notação matricial pode ser escrita como,

$$\begin{bmatrix} -r_3\sin\theta_3 & -1 \\ r_3\cos\theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2\omega_2^2\cos\theta_2 + r_3\omega_3^2\cos\theta_3 \\ r_2\omega_2^2\sin\theta_2 + r_3\omega_3^2\sin\theta_3 \end{Bmatrix} \quad (5.81)$$

Aplicando, por exemplo, a regra de Cramer a este sistema resulta que,

$$\alpha_3 = \frac{r_2\omega_2^2\sin\theta_2 + r_3\omega_3^2\sin\theta_3}{r_3\cos\theta_3} \quad (5.82)$$

$$a_1 = -\frac{r_3\sin\theta_3(r_2\omega_2^2\sin\theta_2 + r_3\omega_3^2\sin\theta_3) + r_3\cos\theta_3(r_2\omega_2^2\cos\theta_2 + r_3\omega_3^2\cos\theta_3)}{r_3\cos\theta_3} \quad (5.83)$$

em que  $\alpha_3$  e  $a_1$  são, respectivamente, a aceleração angular da biela e a aceleração linear da corrediça. Os valores de  $\theta_3$  e  $\omega_3$  necessários para o cálculo destas duas acelerações obtêm-se, respectivamente, da análise de posição e de velocidade,

$$\theta_3 = \arcsen\left(-\frac{r_2\sin\theta_2}{r_3}\right) \quad (5.84)$$

$$\omega_3 = -\frac{r_2\omega_2\cos\theta_2}{r_3\cos\theta_3} \quad (5.85)$$

Deve notar-se que, quando se utiliza o método da notação matricial no cálculo das velocidades e das acelerações, a matriz dos coeficientes é igual em ambos os casos. Esta particularidade é bastante útil e interessante quando se pretende escrever um programa computacional para o efeito, uma vez que se pode aumentar a eficiência computacional na medida em que, para cada instante, é necessário apenas calcular uma única vez a matriz dos coeficientes.

#### 5.5.4. Método da Decomposição do Movimento

O método da decomposição do movimento, tal como o nome sugere, baseia-se na propriedade que qualquer movimento geral pode ser considerado como a soma de um movimento de translação e um movimento de rotação. Esta propriedade é conhecida como lei de Chasles. Este método de análise do movimento é particularmente útil e interessante no estudo dos movimentos dos mecanismos de uso corrente. O método da decomposição do movimento é aplicado ao mecanismo biela-manivela como exemplo de demonstração no cálculo de acelerações.

A figura 5.12 representa um mecanismo biela-manivela em relação ao qual se pretende determinar a aceleração da corrediça. Neste mecanismo, a manivela, sendo o órgão motor, roda com um velocidade angular constante igual a  $\omega_2$ , a corrediça realiza um movimento de translação rectilínea e a biela descreve um movimento geral ou misto.

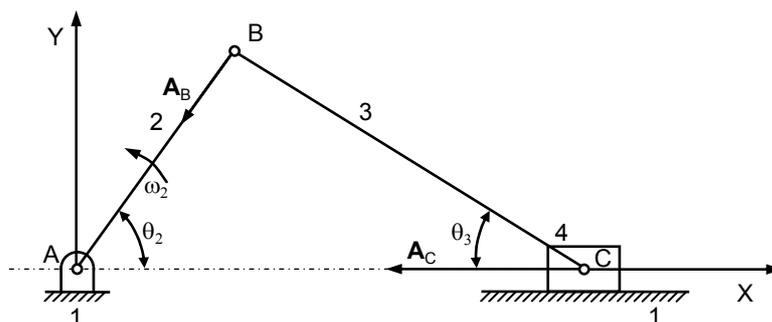


Figura 5.12 – Mecanismo biela-manivela em que estão representadas as acelerações dos pontos B e C.

Assim, para o mecanismo representado na figura 5.12 sabe-se que é nula a componente tangencial da aceleração do ponto B, em virtude de se ter considerado que a manivela roda com velocidade angular constante. A componente normal da aceleração do ponto B está representada na figura 5.13 e pode ser calculada como,

$$a_B^n = \omega_2^2 r_2 \quad (5.86)$$

em que  $\omega_2$  e  $r_2$  representam a velocidade angular e o comprimento da manivela.

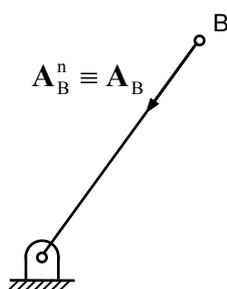


Figura 5.13 – Componente normal da aceleração do ponto B que pertence à manivela.

Dado que a biela descreve um movimento geral, este pode ser decomposto numa translação com o ponto B e numa rotação em torno do eixo que passa no mesmo ponto B, como se ilustra na figura 5.14. Atendendo a que o ponto B é um ponto comum à manivela e à biela, a sua aceleração é a mesma quando se considera como pertencente a um ou outro corpo. O mesmo sucede com o ponto C, mas agora em relação à biela e à corredeira.

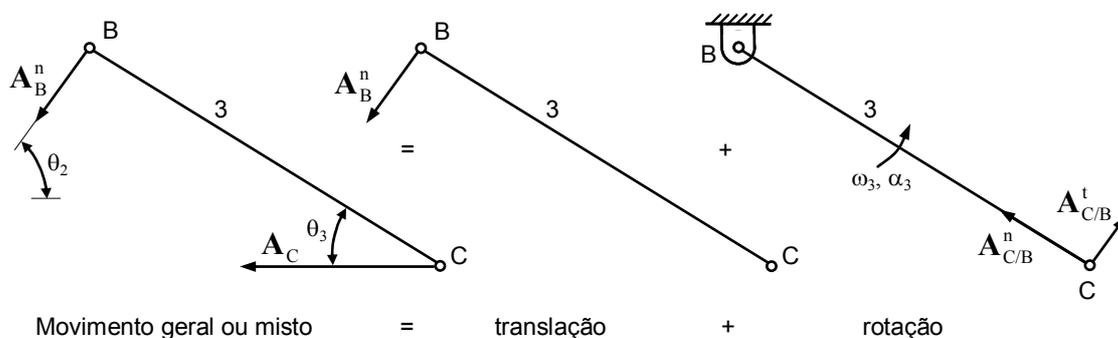


Figura 5.14 – Decomposição do movimento da biela como sendo a soma de uma translação e de uma rotação.

Assim, a equação gráfica da figura 5.14 pode, vectorialmente, ser escrita como,

$$\mathbf{A}_C = \mathbf{A}_B + \mathbf{A}_{C/B} \quad (5.87)$$

Projectando esta equação segundo as direcções  $X$  e  $Y$  obtém-se o seguinte sistema de equações,

$$-a_C = -a_B^n \cos \theta_2 - a_{C/B}^n \cos \theta_3 + a_{C/B}^t \sin \theta_3 \quad (5.88)$$

$$0 = -a_B^n \sin \theta_2 + a_{C/B}^n \sin \theta_3 + a_{C/B}^t \cos \theta_3 \quad (5.89)$$

em que,

$$a_B^n = \omega_2^2 r_2 \quad (5.90)$$

$$a_{C/B}^n = \omega_3^2 r_3 \quad (5.91)$$

$$a_{C/B}^t = \alpha_3 r_3 \quad (5.92)$$

O valor do ângulo  $\theta_2$  é conhecido à partida, uma vez que  $\theta_2 = \omega_2 t$ , sendo o ângulo  $\theta_3$  calculado pela análise geométrica do mecanismo, pelo que aplicando a lei dos senos ao triângulo  $ABC$  obtém-se a seguinte relação,

$$\theta_3 = \arcsen\left(\frac{AB \sin \theta_2}{BC}\right) \quad (5.93)$$

Com efeito, observa-se que as equações (5.88) e (5.89) constituem um sistema de duas equações a duas incógnitas,  $\alpha_3$  e  $a_C$ , pelo que da sua resolução vem que,

$$\alpha_3 = \frac{\omega_2^2 r_2 \sin \theta_2 - \omega_3^2 r_3 \sin \theta_3}{r_3 \cos \theta_3} \quad (5.94)$$

$$a_C = \omega_2^2 r_2 \left( \cos \theta_2 - \frac{\sin \theta_2}{r_3 \cos \theta_3} \right) + \omega_3^2 r_2 (\cos \theta_3 + \sin \theta_3 \operatorname{tg} \theta_3) \quad (5.95)$$

## 5.6. MÉTODOS GRÁFICOS

### 5.6.1. Método do Polígono de Acelerações

O método do polígono de acelerações, tal como o método do polígono de velocidades, baseia-se na construção e resolução gráfica de equações vectoriais. Este método é aplicado ao mecanismo biela-manivela a título de demonstração. Assim, considere-se o mecanismo biela-manivela ilustrado na figura 5.15, em que o órgão motor é a manivela, a qual roda com velocidade angular constante  $\omega_2$ . À semelhança dos casos anteriores, pretende-se determinar a aceleração linear da corrediça, ou seja a aceleração linear do ponto  $C$ .

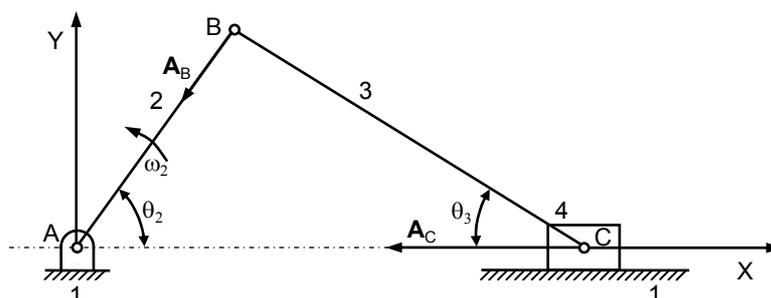


Figura 5.15 – Mecanismo biela-manivela em que estão representadas as acelerações dos pontos  $B$  e  $C$ .

Por definição de aceleração relativa entre dois pontos que pertencem a um mesmo corpo rígido, sabe-se que para os pontos  $B$  e  $C$  é válida a seguinte relação,

$$\mathbf{A}_C = \mathbf{A}_B + \mathbf{A}_{C/B} \quad (5.96)$$

Substituindo nesta equação as componentes normais e tangenciais vem que,

$$\mathbf{A}_C^n + \mathbf{A}_C^t = \mathbf{A}_B^n + \mathbf{A}_B^t + \mathbf{A}_{C/B}^n + \mathbf{A}_{C/B}^t \quad (5.97)$$

onde  $a_C^n = 0$  porque a trajetória da corrediça é de translação rectilínea e  $a_B^t = 0$  uma vez que a manivela roda com velocidade angular constante. Sabe-se ainda que,

$$a_B^n = \omega_2^2 r_2 \quad (5.98)$$

$$a_{C/B}^n = \omega_3^2 r_3 \quad (5.99)$$

$$a_{C/B}^t = \alpha_3 r_3 \quad (5.100)$$

Assim, é possível traçar, a uma escala conveniente, o polígono de acelerações dado pela equação (5.97). Tomando, então, uma escala adequada, e a partir da definição do ponto  $O_A$  como sendo a origem das acelerações, representa-se o vector  $\mathbf{A}_B^n$ , cuja direcção é a mesma da manivela e o sentido é o da apontar de  $B$  para  $A$ . Respeitando, na sua colocação em relação a  $\mathbf{A}_B^n$ , as regras da adição e subtracção de vectores, e seguindo a equação (5.97), é possível construir o polígono de acelerações ilustrado na figura 5.16. Medindo directamente sobre o polígono de acelerações, afectando a medida pelo factor de escala, é possível determinar a aceleração linear da corrediça, bem como as componentes da aceleração do ponto  $C$  em relação a  $B$ .

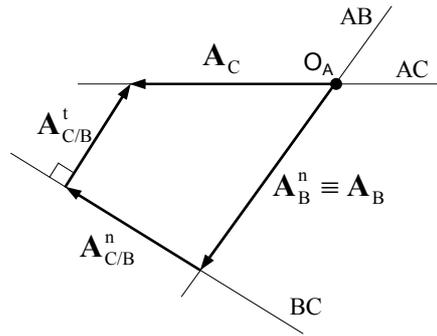


Figura 5.16 – Construção gráfica do polígono de acelerações.

### 5.6.2. Método da Imagem de Acelerações

O método da imagem de acelerações utiliza os mesmos princípios que o método da imagem de velocidades, isto é, é possível obter uma imagem da aceleração de um corpo quando este tem uma configuração geométrica complexa, como por exemplo, forma triangular.

Antes de aplicar o método da imagem de acelerações convém lembrar que, do módulo da adição de vectores tem-se que,

$$a_{B/A} = \sqrt{(a_{B/A}^n)^2 + (a_{B/A}^t)^2} \quad (5.101)$$

e como,

$$a_{B/A}^n = \omega_{AB}^2 AB \quad (5.102)$$

$$a_{B/A}^t = \alpha_{AB} AB \quad (5.103)$$

então, da equação (5.101) vem que,

$$a_{B/A} = AB \sqrt{\omega_{AB}^4 + \alpha_{AB}^2} \quad (5.104)$$

Da análise da equação (5.104) pode concluir-se que, como  $\omega_{AB}$  e  $\alpha_{AB}$  são constantes, então a aceleração de cada ponto relativamente a outro, num corpo rígido, é proporcional à distância entre eles. É também possível demonstrar que a orientação da imagem de acelerações, de cada corpo, depende da aceleração angular desse mesmo corpo.

Deve notar-se que se a aceleração angular for nula, a imagem de acelerações encontrar-se-á rodada de  $180^\circ$  em relação à posição do respectivo corpo, no sentido da velocidade de rotação. Por outro lado, existindo uma componente de aceleração angular, a imagem encontrar-se-á rodada de um valor de  $[180 - \text{tg}(\alpha/\omega^2)]$  em relação à posição desse corpo, no sentido da aceleração angular.

A título de demonstração, o método da imagem de acelerações é aplicado ao mecanismo biela-manivela ilustrado na figura 5.17a, em que os corpos 2 e 3 têm formas triangulares. Considerando a inexistência de aceleração angular do corpo 2 ( $\alpha_2=0$ ), a correspondente imagem de acelerações encontra-se representada na figura 5.17b. Deve notar-se que a imagem de acelerações do corpo 2, que não tem aceleração angular, apresenta uma rotação de  $180^\circ$ . Por seu turno, o corpo 3, animado de uma aceleração angular no sentido directo, a sua imagem aparece com uma rotação menor que  $180^\circ$ .

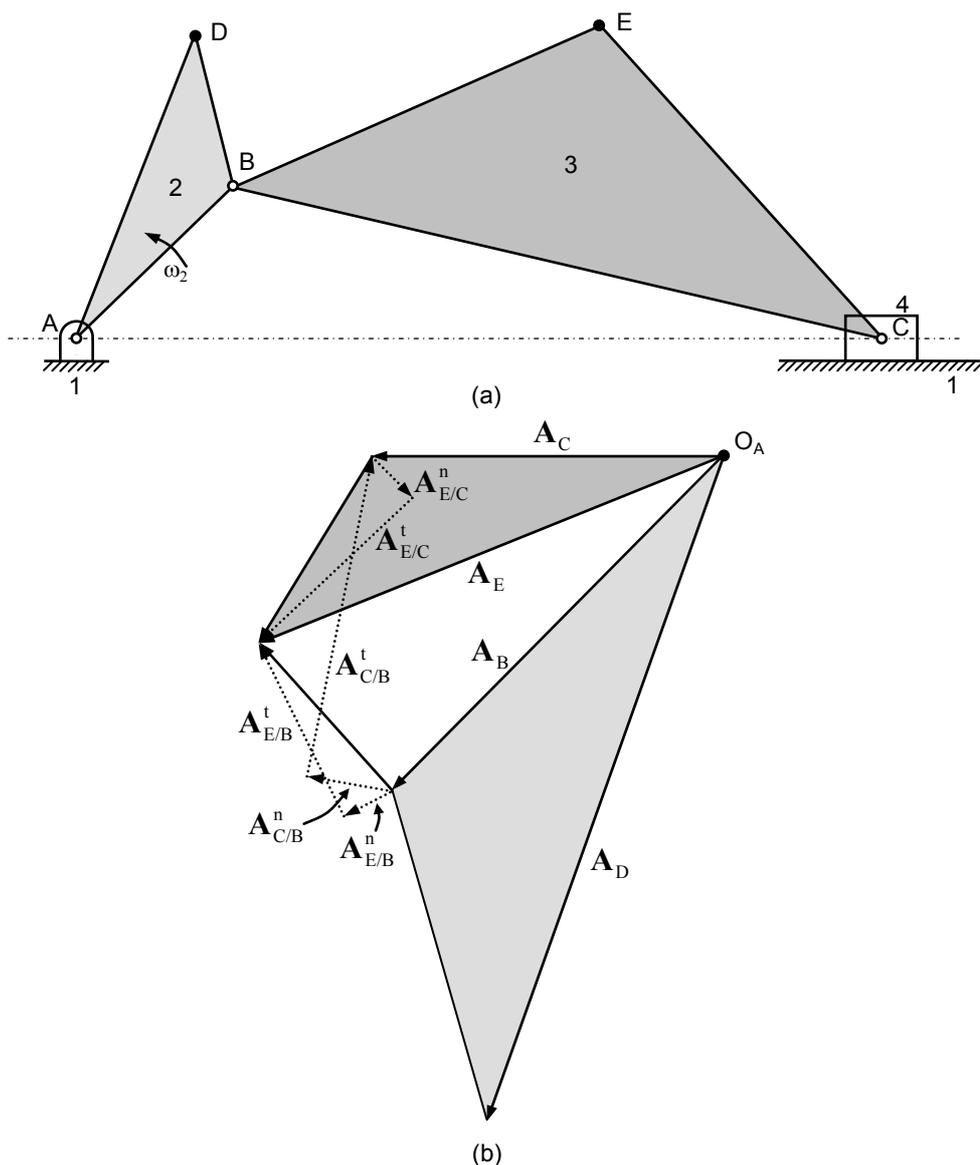


Figura 5.17 – (a) Mecanismo biela-manivela; (b) Imagem de acelerações.

### 5.6.3. Método dos Centros Instantâneos de Aceleração

Da mesma forma que num mecanismo podem ser localizados centros instantâneos de rotação ou de velocidade, isto é, os pontos para os quais a velocidade relativa é nula, é também possível localizar os centros instantâneos de aceleração (CIA) ou centros de aceleração. Embora a sua utilização prática na análise de mecanismos seja bastante reduzida, é importante abordar, ainda que de forma simples, este conceito.

Com efeito, centro instantâneo de aceleração pode definir-se como sendo o local instantâneo de dois pontos coincidentes e pertencentes a corpos rígidos diferentes, para os quais a aceleração absoluta é igual. Quando um dos corpos está fixo e outro descreve um movimento plano, o centro instantâneo de rotação é o ponto do corpo que se move, para o qual a aceleração absoluta, para o instante considerado, é nula.

Na figura 5.18 está representado um corpo rígido, em que o ponto  $B$  é o centro instantâneo de aceleração, para o qual a aceleração absoluta é nula e cuja localização é desconhecida. Considerando que o ponto  $A$  tem aceleração absoluta  $\mathbf{A}_A$  e que  $\omega$  e  $\alpha$

representam, respectivamente, a velocidade e a aceleração angulares do corpo, então, a diferença de acelerações entre os pontos  $A$  e  $B$  é dada por,

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{A}_A - \omega^2 \mathbf{R}_{BA} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R}_{BA} = \mathbf{0} \quad (5.105)$$

Resolvendo a equação (5.105) em ordem a  $\mathbf{A}_A$ , vem que,

$$\mathbf{A}_A = \omega^2 r_{BA} \hat{\mathbf{r}}_{BA} - \alpha r_{BA} (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_{BA}) \quad (5.106)$$

Atendendo a que os vectores  $\hat{\mathbf{r}}_{BA}$  e  $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_{BA}$  são perpendiculares, os dois termos do segundo membro da equação (5.106) representam as componentes rectangulares do vector  $\mathbf{A}_A$ , como se ilustra na figura 5.18.

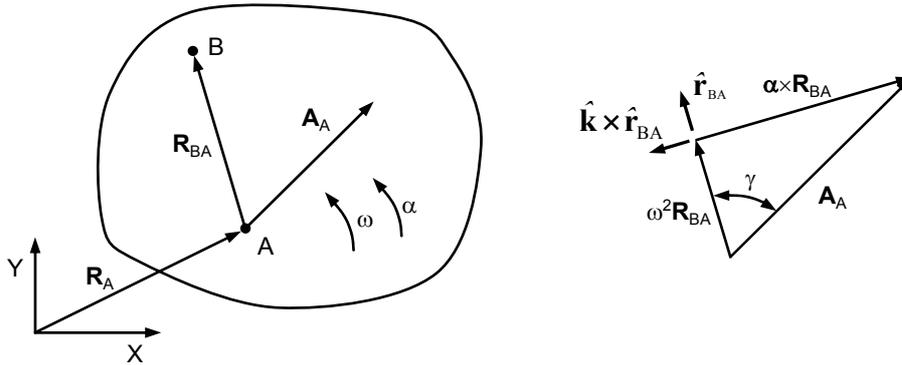


Figura 5.18 – Centro instantâneo de aceleração.

Da observação da figura 5.18, a direcção e a magnitude do vector  $\mathbf{R}_{BA}$  podem ser calculadas de acordo com as seguintes expressões,

$$\gamma = \text{arctg} \frac{\alpha}{\omega^2} \quad (5.107)$$

$$r_{BA} = \frac{a_A}{\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}} = \frac{a_A \cos \gamma}{\omega^2} \quad (5.108)$$

em que  $a_A$  é o módulo da aceleração  $\mathbf{A}_A$ .

Da análise da equação (5.108) pode concluir-se que a distância de um qualquer ponto de um corpo rígido ao centro instantâneo de aceleração pode ser calculada se a magnitude da aceleração desse ponto for conhecida.

A localização dos centros instantâneos de aceleração é uma tarefa bastante trabalhosa, especialmente em mecanismos que apresentem topologias complexas. Há, no entanto, métodos gráficos que permitem, de forma simples e expedita, determinar a localização dos centros instantâneos de aceleração, entre os quais se destaca o método das quatro<sup>2</sup> circunferências. Este método, é particularmente útil quando se conhecem duas acelerações absolutas de dois pontos do mesmo corpo, como é caso dos pontos  $A$  e  $B$  da figura 5.19 que pertencem à mesma barra. Assim, o procedimento gráfico conducente à localização do centro instantâneo de aceleração pode ser resumido nos seguintes passos,

<sup>2</sup> Refira-se, a título de curiosidade que, apesar do nome adoptado, neste método apenas são usadas duas circunferências.

- Prolongar os vectores das acelerações  $\mathbf{A}_A$  e  $\mathbf{A}_B$ , até que estes se intersectem no ponto  $I$ ;
- Desenhar a circunferência que passa pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $I$ ;
- Desenhar a circunferência que passa pelos pontos definidos pelos *terminus* dos vectores  $\mathbf{A}_A$  e  $\mathbf{A}_B$  e pelo ponto  $I$ ;
- Intersectar as duas circunferências anteriormente desenhadas, resultando daí o centro instantâneo de aceleração ( $CIA$ ).

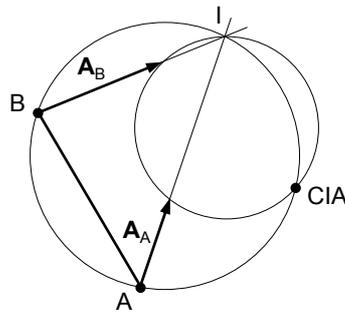


Figura 5.19 – Localização do centro instantâneo de aceleração utilizando o método das quatro circunferências.

#### 5.6.4. Método da Diferenciação Gráfica

Os princípios aplicados no método da diferenciação gráfica com o propósito de efectuar o cálculo de acelerações são os mesmos já enunciados aquando da análise de velocidades, pelo que nesta secção apenas se apresentam os resultados gráficos das acelerações da corrediça do mecanismo biela-manivela, em que o diagrama de deslocamento da corrediça é conhecido. Assim, por sucessivas diferenciações gráficas obtêm-se as curvas de velocidade e de aceleração, como ilustra a figura 5.20.

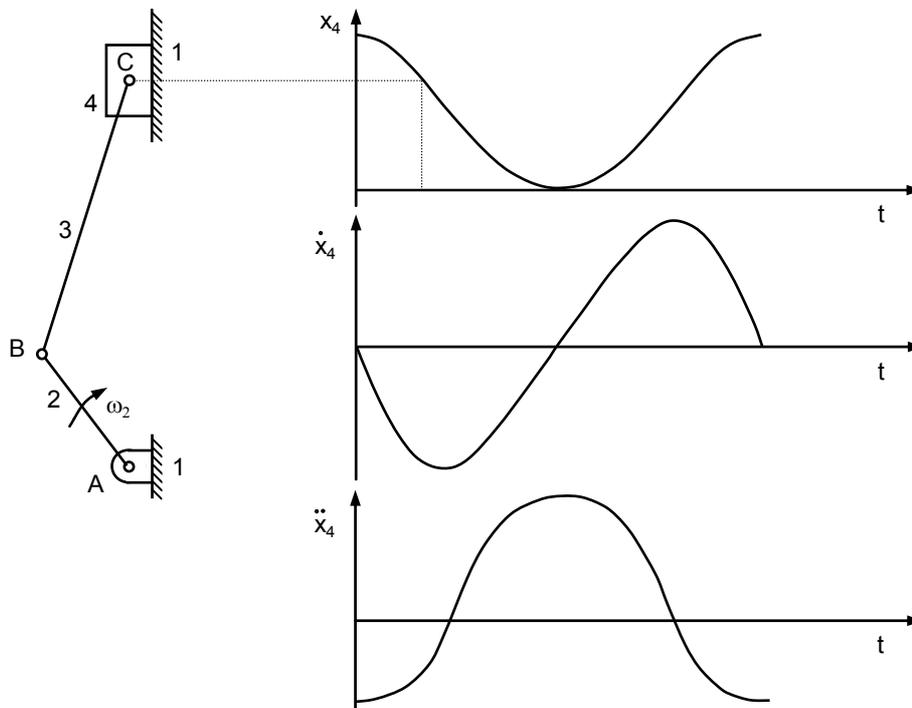


Figura 5.20 – Aplicação do método da diferenciação gráfica ao mecanismo biela-manivela.

## 5.7. ANÁLISE DE ACELERAÇÃO DE MECANISMOS ELEMENTARES

### 5.7.1. Mecanismo de Quatro Barras

A figura 5.21 mostra o mecanismo de quatro barras em que o órgão motor é a manivela, a qual roda com velocidade angular constante igual a  $\omega_2$ . Ainda na figura 5.21 estão ilustrados os vectores posição correspondentes a cada um das barras que constituem o mecanismo.

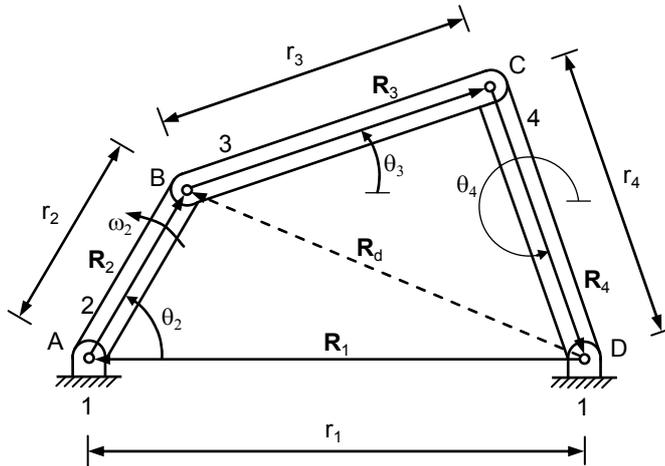


Figura 5.21 – Mecanismo de quatro barras.

Com base na notação complexa polar, a equação que traduz a cadeia cinemática formada pelos vectores  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$ ,  $\mathbf{R}_3$  e  $\mathbf{R}_4$  é escrita como,

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} + r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (5.109)$$

Derivando duas vezes esta equação em ordem ao tempo obtêm-se as expressões que permitem calcular as acelerações das barras deste quadrilátero articulado. Assim, da primeira derivada da equação (5.109) vem que,

$$r_2 i \omega_2 e^{i\theta_2} + r_3 i \omega_3 e^{i\theta_3} + r_4 i \omega_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (5.110)$$

Deve referir-se que  $r_1, r_2, r_3, r_4$  e  $\theta_1$  são parâmetros que não variam com o tempo.

Utilizando a fórmula de Euler na equação (5.110), separando as partes real e imaginária e resolvendo o sistema resultante, em ordem a  $\omega_3$  e  $\omega_4$ , obtêm-se,

$$\omega_3 = \frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \quad (5.111)$$

$$\omega_4 = \frac{r_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \quad (5.112)$$

Derivando, agora, a equação (5.110) em ordem ao tempo vem que,

$$r_2 i^2 \omega_2^2 e^{i\theta_2} + r_3 i \alpha_3 e^{i\theta_3} + r_3 i^2 \omega_3^2 e^{i\theta_3} + r_4 i \alpha_4 e^{i\theta_4} + r_4 i^2 \omega_4^2 e^{i\theta_4} = 0 \quad (5.113)$$

As incógnitas desta equação são  $\alpha_3$  e  $\alpha_4$ , pelo que aplicando a fórmula de Euler, separando as partes real e imaginária e resolvendo o sistema daí resultante resulta,

$$\alpha_3 = \frac{r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + r_3 \omega_3^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) + r_4 \omega_4^2}{r_3 \text{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \quad (5.114)$$

$$\alpha_4 = \frac{r_2 \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) + r_4 \omega_4^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) + r_3 \omega_3^2}{r_4 \text{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \quad (5.115)$$

Atendendo a que a manivela 2 roda com velocidade angular constante, então o valor do ângulo  $\theta_2$  é dado por,

$$\theta_2 = \omega_2 t \quad (5.116)$$

Por seu lado, os valores dos ângulos  $\theta_3$  e  $\theta_4$  podem ser obtidos da análise de posição do mecanismo de quatro barras, donde resulta que,

$$\theta_3 = \theta_d \mp \arccos \frac{r_d^2 + r_3^2 - r_4^2}{2r_d r_3} \quad (5.117)$$

$$\theta_4 = \theta_d \pm \arccos \frac{r_d^2 + r_4^2 - r_3^2}{2r_d r_4} \quad (5.118)$$

em que  $\theta_d$  e  $r_d$  são dados por,

$$\theta_d = \arcsen \left( \frac{r_2}{r_d} \text{sen} \theta_2 \right) \quad (5.119)$$

$$r_d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta_2 \quad (5.120)$$

### 5.7.2. Mecanismo de Corrediça

Na figura 5.22a está representado pelas suas barras o mecanismo de corrediça, enquanto na figura 5.22b estão apresentados os correspondentes vectores posição, os quais constituem uma cadeia cinemática fechada. Neste mecanismo considera-se que o órgão motor é a manivela 2, a qual roda com velocidade angular constante  $\omega_2$ . Nesta secção, usando o método da notação complexa, é apresentada a análise de acelerações linear e angular da manivela 4.

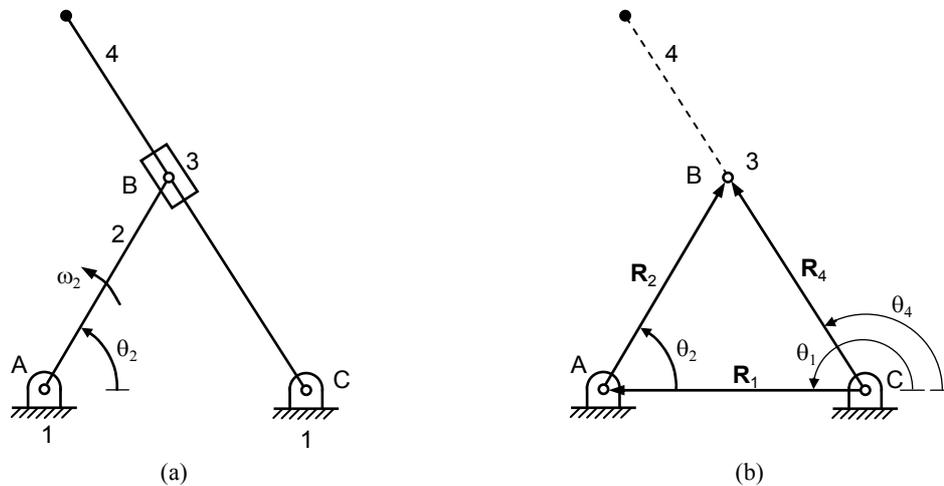


Figura 5.22 – (a) Mecanismo de corrediça; (b) Representação vectorial equivalente.

Assim, com base na notação complexa, a cadeia cinemática fechada formada pelos vectores  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  e  $\mathbf{R}_4$  pode ser escrita como,

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} - r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (5.121)$$

Derivando em ordem ao tempo esta equação vem que,

$$r_2 i \omega_2 e^{i\theta_2} - \dot{r}_4 e^{i\theta_4} - r_4 i \omega_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (5.122)$$

Aplicando, agora, a fórmula de Euler à equação (5.122), separando as partes real e imaginária e resolvendo em ordem a  $\dot{r}_4$  e  $\omega_4$  vem que,

$$\dot{r}_4 = r_2 \omega_2 \text{sen}(\theta_4 - \theta_2) \quad (5.123)$$

$$\omega_4 = \frac{r_2 \omega_2}{r_4} \text{cos}(\theta_4 - \theta_2) \quad (5.124)$$

Derivando, agora, a equação (5.122) em ordem ao tempo obtém-se,

$$r_2 i^2 \omega_2^2 e^{i\theta_2} - \ddot{r}_4 e^{i\theta_4} - \dot{r}_4 i \omega_4 e^{i\theta_4} - \dot{r}_4 i \omega_4 e^{i\theta_4} - r_4 i \alpha_4 e^{i\theta_4} - r_4 i^2 \omega_4^2 e^{i\theta_4} = 0 \quad (5.125)$$

As incógnitas desta equação são  $\ddot{r}_4$  e  $\alpha_4$ , pelo que ao aplicar a fórmula de Euler, separando as partes real e imaginária, vem que,

$$-r_2 \omega_2^2 \text{cos} \theta_2 - \ddot{r}_4 \text{cos} \theta_4 + 2 \dot{r}_4 \omega_4 \text{sen} \theta_4 + r_4 \alpha_4 \text{sen} \theta_4 + r_4 \omega_4^2 \text{cos} \theta_4 = 0 \quad (5.126)$$

$$-r_2 \omega_2^2 \text{sen} \theta_2 - \ddot{r}_4 \text{sen} \theta_4 - 2 \dot{r}_4 \omega_4 \text{cos} \theta_4 - r_4 \alpha_4 \text{cos} \theta_4 + r_4 \omega_4^2 \text{sen} \theta_4 = 0 \quad (5.127)$$

As equações (5.126) e (5.127) constituem um sistema de duas equações a duas incógnitas, cujas soluções são,

$$\ddot{r}_4 = r_4 \omega_4^2 - r_2 \omega_2^2 \text{cos}(\theta_2 - \theta_4) \quad (5.128)$$

$$\alpha_4 = \frac{r_2 \omega_2^2 \text{sen}(\theta_4 - \theta_2) - 2 \dot{r}_4 \omega_4}{r_4} \quad (5.129)$$

em que  $\theta_2$  é conhecido à partida, uma vez que a barra 2 é o órgão motor, sendo  $\theta_4$  dado pela seguinte equação obtida da análise de posição,

$$\theta_4 = \text{arctg} \frac{r_2 \text{sen} \theta_2}{r_2 \text{cos} \theta_2 - r_1} \quad (5.130)$$

Por seu lado os valores relativos às velocidades  $\dot{r}_4$  e  $\omega_4$  podem ser calculados utilizando as equações (5.123) e (5.124), respectivamente.

### 5.7.3. Mecanismo Biela-Manivela com Excentricidade

A figura 5.23 mostra o mecanismo biela-manivela com excentricidade entre o eixo de rotação da manivela e a linha recta que define a direcção de translação da corrediça. A manivela é o órgão motor, a qual roda com velocidade angular constante igual a  $\omega_2$ . Aplicando o método algébrico ao mecanismo ilustrado na figura 5.23, obtém-se a seguinte expressão para a posição da corrediça,

$$x_4 = r_2 \text{cos} \omega_2 t + \sqrt{r_3^2 - (r_2 \text{sen} \omega_2 t + e)^2} \quad (5.131)$$

em que  $r_2$ ,  $r_3$  e  $e$  são características geométricas do mecanismo,  $\omega_2$  é a velocidade angular da manivela e  $t$  é a variável tempo.

Assim, derivando duas vezes a equação (5.131) em ordem ao tempo, e após tratamento matemático, obtém-se uma expressão que permite calcular a aceleração linear da corrediça em cada instante, a qual é expressa como,

$$a_4 = -\omega_2^2 r_2 \sin \omega_2 t - \frac{\omega_2^2 r_2^2 (\cos^2 \omega_2 t - \sin^2 \omega_2 t)}{\sqrt{r_3^2 - (r_2 \sin \omega_2 t + e)^2}} - \frac{\omega_2^2 r_2^4 \sin^2 \omega_2 t \cos^2 \omega_2 t}{[r_3^2 - (r_2 \sin \omega_2 t + e)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (5.132)$$

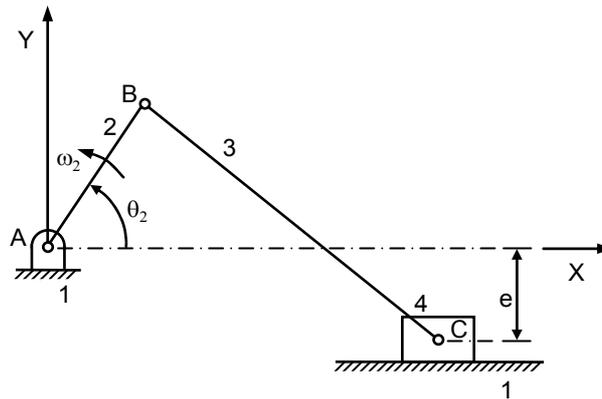


Figura 5.23 – Mecanismo biela-manivela com excentricidade.

#### 5.7.4. Mecanismo Biela-Manivela Invertido

A figura 5.24 ilustra um mecanismo biela-manivela invertido, em que as barras foram substituídas por vectores posição equivalentes, os quais constituem uma cadeia cinemática fechada. Admite-se que, na presente situação a manivela é o órgão motor e roda com uma velocidade angular constante igual a  $\omega_2$ .

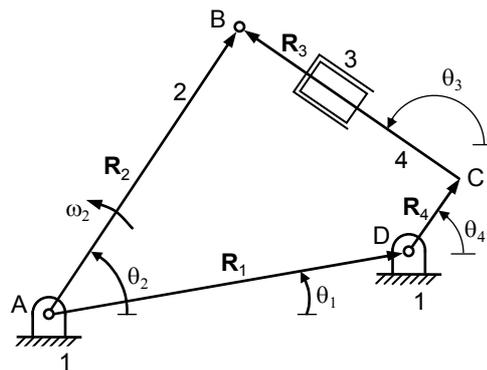


Figura 5.24 – Mecanismo biela-manivela invertido.

Da análise geométrica do mecanismo ilustrado na figura 5.24, e utilizando a notação complexa polar, pode escrever-se que,

$$r_2 e^{i\theta_2} - r_1 e^{i\theta_1} - r_3 e^{i\theta_3} - r_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (5.133)$$

Por outro lado, da análise de posição são válidas as seguintes relações,

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - r_4^2 - 2r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)} \quad (5.134)$$

$$a = r_2 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1 \quad (5.135)$$

$$\theta_4 = \theta_3 - 90 \quad (5.136)$$

$$\theta_3 = \arctg \left( \frac{r_4 + \beta \sqrt{r_4^2 - a^2 + r_3^2}}{a + r_3} \right) \quad (5.137)$$

onde  $\beta = \pm 1$ .

Atendendo a que  $r_1$ ,  $r_4$  e  $\theta_1$  são constantes, derivando em ordem ao tempo a equação (5.133), vem que,

$$r_2 i \omega_2 e^{i\theta_2} - \dot{r}_3 e^{i\theta_3} - r_3 i \omega_3 e^{i\theta_3} - r_4 i \omega_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad (5.138)$$

Aplicando a fórmula de Euler na equação (5.138), separando as partes real e imaginária e rearranjando as equações daí resultantes obtém-se o seguinte sistema de equações,

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -r_3 \sin \theta_3 - r_4 \sin \theta_4 \\ \sin \theta_3 & r_3 \cos \theta_3 + r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_3 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_2 \omega_2 \sin \theta_2 \\ r_2 \omega_2 \cos \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.139)$$

Este sistema pode ser resolvido, utilizando, por exemplo, a regra de Cramer anteriormente apresentada, em ordem às velocidades  $\dot{r}_3$  e  $\omega_3$ . Os restantes parâmetros da equação (5.139) são previamente conhecidos ou calculados usando as equações (5.134)-(5.137).

Procedendo de módulo análogo para o cálculo das acelerações, isto é, derivando em ordem ao tempo a equação (5.138), a após tratamento matemático obtém-se que,

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -r_3 \sin \theta_3 - r_4 \sin \theta_4 \\ \sin \theta_3 & r_3 \cos \theta_3 + r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_3 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 + r_3 \omega_3^2 \cos \theta_3 + 2\dot{r}_3 \omega_3 \sin \theta_3 + r_4 \omega_3^2 \cos \theta_4 \\ -r_2 \omega_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \omega_3^2 \sin \theta_3 - 2\dot{r}_3 \omega_3 \cos \theta_3 + r_4 \omega_3^2 \sin \theta_4 \end{Bmatrix} \quad (5.140)$$

O sistema dado pela equação (5.140) deve ser resolvido em ordem às incógnitas  $\ddot{r}_3$  e  $\alpha_3$ , em que os restantes parâmetros envolvidos são conhecidos pela análise de posição e velocidade anteriormente apresentada.

Deve salientar-se que as matrizes dos coeficientes das equações (5.139) e (5.140) são iguais. Este facto é bastante útil e interessante quando se pretende escrever um programa computacional para o efeito, uma vez que se pode aumentar a eficiência computacional na medida em que, para cada instante, é necessário apenas calcular uma única vez a matriz dos coeficientes.



