



Mecânica Computacional

Engenharia Mecânica

José Carlos F Teixeira

2013



Docente; contacto (parte #2)

- * José Carlos F Teixeira (T)
jt@dem.uminho.pt; 253 510 236



Calendário (parte #2)

CALENÁRIO PARA MECÂNICA COMPUTACIONAL							
Calendário Escolar Ano Lectivo 2012/2013							
Semana		2ª Feira	3ª Feira	4ª Feira	5ª Feira	6ª Feira	Sábado
1	18/02 a 23/02						
2	25/03 a 02/03						
3	04/03 a 09/03						
4	11/03 a 16/03						
5	18/03 a 23/03						
	25/03 a 30/03	PÁSCOA					
6	01/04 a 06/04						
7	08/04 a 13/04						
8	15/04 a 20/04						
9	22/04 a 27/05	T			25 Abril		
10	29/04 a 04/05	T		1 Maio			
11	06/05 a 11/05	T					
12	13/05 a 18/05						
13	20/05 a 25/05	T					
14	27/05 a 01/06	T					
15	03/06 a 08/06	T					
16	10/06 a 15/06	T				Trabalho	
17	17/06 a 22/06	Teste					
18	24/06 a 29/06						
19	01/07 a 06/07						
20	08/07 a 13/07						

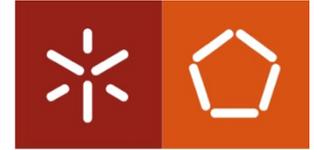
	Férias e feriados
	Exames - Recurso
	Lançamento das classificações
	Semana de Enterro da Gata



Suporte Bibliográfico

* Bibliografia:

- # Ferziger, J. H. e Peric, M. (1996) “Computational Methods for Fluid Dynamics”, Springer
- # Patankar, S. V. (1980), “Numerical heat transfer and fluid flow”, Mc Graw Hill
- # Teixeira, JC; Teixeira, SFC (2003), “Métodos Numéricos em Transferência de Calor”, Universidade do Minho
- # Teixeira, SFC (1994), “Computação em Mecânica dos Fluidos”, Universidade do Minho
- # Teixeira, JC (1996), “Equações de Navier-Stokes”, Universidade do Minho



Avaliação

- * Trabalho computacional (grupos de 4 elementos) (60%)
- * Teste final (40%)
- * Teste com classificação mínima: 7 valores



- * **Motivação**
- * **Programação: linguagem FORTRAN**
- * **Equações fundamentais**
- * **Discretização no espaço**
- * **Discretização no tempo**
- * **Solução de matrizes**



Porquê simular a Transferência de Calor?

- A Transferência de Calor surge nas mais variadas situações:
 - Estações de produção de energia
 - Nas actividades relacionadas com a regulação térmica do corpo
 - No climatização dos edifícios
 - Em inúmeros processos de transformação alimentar (*congelamento, cozedura, ...*)
 - Em inúmeros processos industriais (*fundição, soldadura, ...*)
 - No desempenho de equipamentos eléctricos, por vezes limitados pela capacidade de remoção de calor (*ex., processadores de pc*)

↳ O interesse em simular a TC, surge assim como resposta a uma necessidade de compreensão e previsão, para lidar com este fenómeno de forma mais efectiva.



Porquê simular a Transferência de Calor?

- O domínio do método de previsão da Transferência de Calor, permite:
 - Optimizar o desenho de equipamentos
 - Escolher a melhor opção entre um conjunto de alternativas
 - Antever problemas de segurança na operação
 - ...
- ↪ A capacidade de previsão, em regra, oferece benefícios económicos e vantagens para o bem-estar geral (*conforto, segurança,...*).



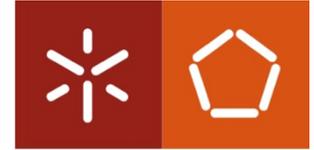
Métodos de Previsão

- Previsão Experimental
- Previsão Teórica

↪ Sempre que possível, é recomendável seguir ambas e comparar os resultados

➤ Previsão Experimental

- Informação mais precisa
- Frequentemente é proibitiva em termos de custos
- Muitas vezes apenas possível em modelos à escala (*além das limitações inerentes, requer extrapolação dos resultados...*)
- Medições nem sempre possíveis
- Todos os dados experimentais têm um erro associado



Métodos de Previsão

➤ Previsão Teórica

Vantagens:

- Baixo custo
- Rapidez na obtenção de resultados
- Dados relevantes em todo o domínio (*numa situação experimental existem locais inacessíveis e interferências inevitáveis dos equipamento de medida com o meio*)
- Capacidade de simular condições realistas (*não há necessidade de recorrer a modelos à escala, nem perigo em simular substâncias tóxicas ou corrosivas*)
- Capacidade de simular situações ideais (*simetria, fronteiras adiabáticas, massa volúmica constante,...*)



Métodos de Previsão

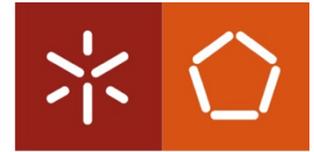
➤ Previsão Teórica (cont.)

Desvantagens:

- Não esquecer que a utilidade dos resultados duma simulação depende da validade do modelo matemático
- Os problemas com a simulação podem ser de dois tipos:

Grupo A - Situações em que é viável obter uma boa representação matemática do fenómeno em análise (*ex., transferência de calor; escoamento laminar...*)

Grupo B - Situações para as quais não existe um modelo matemático adequado (*escoamento turbulento; escoamentos bifásicos; combustão turbulenta...*)



Métodos de Previsão

➤ Previsão Teórica (cont.)

Desvantagens da Previsão Teórica – Grupo A

- Normalmente não apresenta inconvenientes, mas...
 - Por ex., em problemas com: geometrias complexas, propriedades dos fluidos variáveis e com grande sensibilidade, a simulação pode-se revelar complexa e cara.
 - Qdo o modelo matemático admite mais do que uma solução, pode ser complicado determinar qual delas é a correcta.



Derivada substantiva

ex: variação da temperatura durante uma viagem

$$C = f(x, y, z, t)$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial C}{\partial y} \times \frac{dy}{dt} + \frac{\partial C}{\partial z} \times \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + u_x \frac{\partial C}{\partial x} + u_y \frac{\partial C}{\partial y} + u_z \frac{\partial C}{\partial z}$$

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)C$$



Conservação da massa

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de} \\ \text{acumulação} \\ \text{de massa} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de} \\ \text{entrada} \\ \text{de massa} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de} \\ \text{saída} \\ \text{de massa} \end{array} \right\}$$

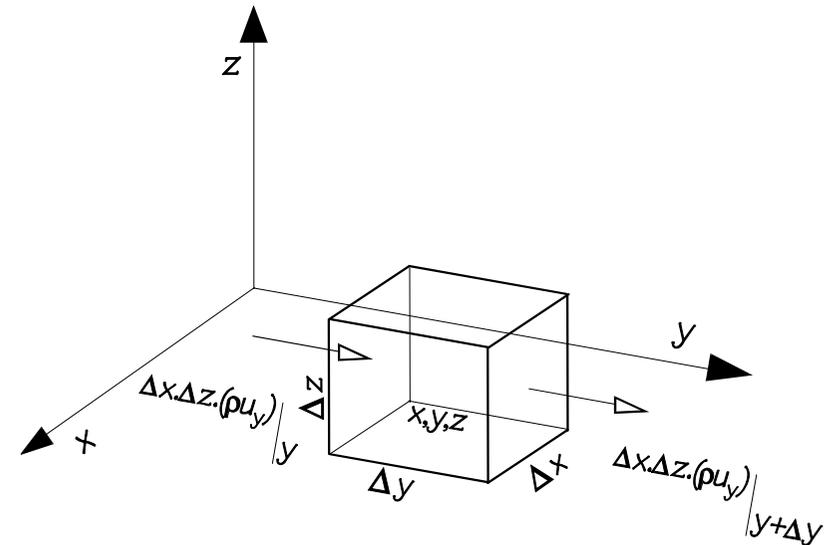


Conservação da massa

Volume de controlo

acumulação

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$



fluxo

$$(\rho u_y)|_{y+\Delta y} \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

$$(\rho u_y)|_y \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

$$\left[(\rho u_y)|_y - (\rho u_y)|_{y+\Delta y} \right] \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$



Conservação da massa

Volume de controlo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) \right]$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \vec{u})$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot \vec{u})$$

em regime estacionário

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \text{ ou:}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$



Conservação do 'momentum'

Lei de Newton (dinâmica)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d}{dt}(m\vec{u})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de} \\ \text{acumulação} \\ \text{de momentum} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de} \\ \text{entrada} \\ \text{de momentum} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de} \\ \text{saída} \\ \text{de momentum} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{soma das} \\ \text{forças} \\ \text{no sistema} \end{array} \right\}$$

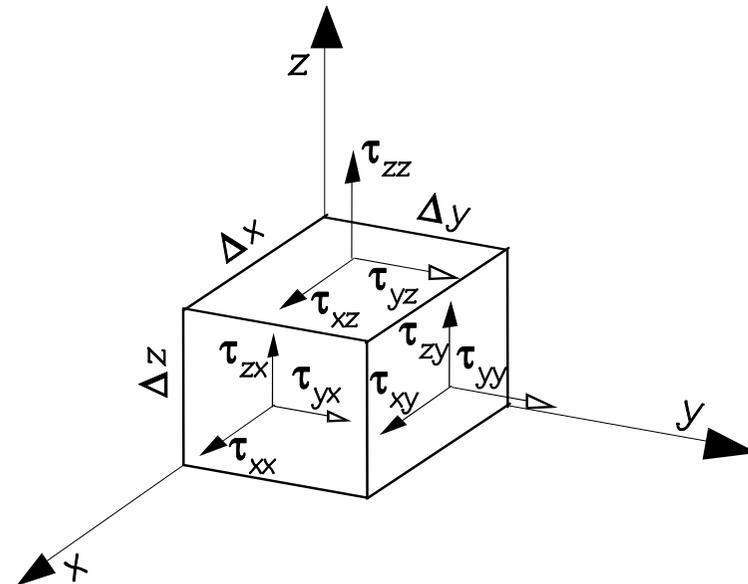
acumulação

$$A_c = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \vec{u} \rho dV$$

$$A_c = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_x) \hat{i} + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_y) \hat{j} + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_z) \hat{k}$$

Conservação do 'momentum'

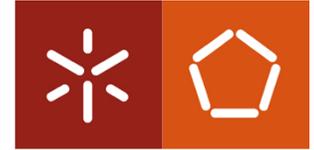
tensor de tensões



alterações de 'momentum'

próprio movimento do fluido através das faces do volume de controlo (convecção);

atrito viscoso entre o elemento e o fluido circundante (transporte molecular)



Conservação do 'momentum' (convecção)

taxa de entrada/saída de momentum xx nas faces xx

$$\rho u_x u_x \Big|_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \qquad \rho u_x u_x \Big|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

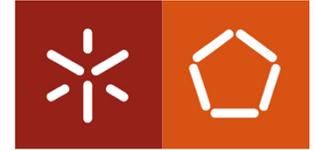
taxa de entrada/saída de momentum xx nas faces yy

$$\rho u_y u_x \Big|_y \cdot \Delta x \cdot \Delta z \qquad \rho u_y u_x \Big|_{y+\Delta y} \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

taxa de entrada/saída de momentum xx nas faces zz

$$\rho u_z u_x \Big|_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \qquad \rho u_z u_x \Big|_{z+\Delta z} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

$$\begin{aligned} & \Delta y \cdot \Delta z \cdot \left(\rho u_x u_x \Big|_x - \rho u_x u_x \Big|_{x+\Delta x} \right) + \Delta x \cdot \Delta z \cdot \left(\rho u_y u_x \Big|_y - \rho u_y u_x \Big|_{y+\Delta y} \right) + \\ & + \Delta x \cdot \Delta y \cdot \left(\rho u_z u_x \Big|_z - \rho u_z u_x \Big|_{z+\Delta z} \right) \end{aligned}$$



Conservação do 'momentum' (atrito)

taxa de entrada/saída de momentum xx nas faces xx

$$\tau_{xx}|_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

$$\tau_{xx}|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

taxa de entrada/saída de momentum xx nas faces yy

$$\tau_{xy}|_y \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

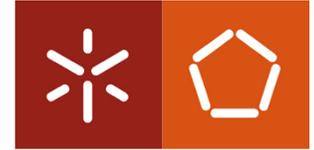
$$\tau_{xy}|_{y+\Delta y} \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

taxa de entrada/saída de momentum xx nas faces zz

$$\tau_{xz}|_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

$$\tau_{xz}|_{z+\Delta z} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

$$\Delta y \Delta z \left(\tau_{xx}|_x - \tau_{xx}|_{x+\Delta x} \right) + \Delta x \Delta z \left(\tau_{xy}|_y - \tau_{xy}|_{y+\Delta y} \right) + \Delta x \Delta y \left(\tau_{xz}|_z - \tau_{xz}|_{z+\Delta z} \right)$$



Conservação do 'momentum' (outras forças)

Forças de pressão e gravíticas

$$\Delta y \Delta z (p|_x - p|_{x+\Delta x}) + \rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z$$

finalmente

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_x) = - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y u_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z u_x) \right] - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\rho \frac{Du_x}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \rho g_x$$



Conservação do 'momentum'

Equações constitutivas

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \vec{U})$$

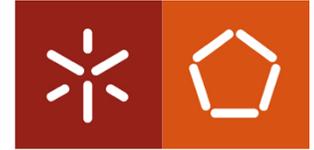
$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \vec{U})$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \vec{U})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = -\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)$$



Conservação do 'momentum'

$$\rho \frac{Du_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{u}) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] + \rho g_x$$

$$\rho \frac{Du_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

$$\rho \frac{Du_y}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$

$$\rho \frac{Du_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

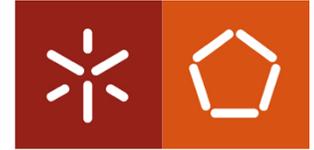


a 2 dimensões:

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u_x u_x - \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho u_x u_y - \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u_x u_y - \mu \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho u_y u_y - \mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y}$$



Equação da energia

$$\rho \frac{Di}{Dt} = -p \nabla \vec{u} + \nabla(k \text{ grad} T) + \tau_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial x} +$$

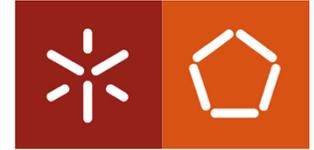
$$+ \tau_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial u_z}{\partial z} + S_i$$

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \nabla(k \text{ grad} T) + \tau_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial x} +$$

$$+ \tau_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial u_z}{\partial z} + S_i$$

$$\rho \frac{Di}{Dt} = -p \nabla \vec{u} + \nabla(k \text{ grad} T) + \Phi + S_i$$

$$\Phi = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right\} + \lambda (\nabla \vec{u})^2$$



Equações de conservação (eq Navier-Stokes)

Massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0$$

Momentum x

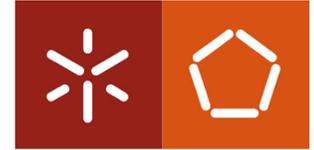
$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \nabla(\rho u_x \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla(\mu \text{ grad } u_x) + S_x$$

Momentum y

$$\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial t} + \nabla(\rho u_y \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla(\mu \text{ grad } u_y) + S_y$$

Energia

$$\frac{\partial(\rho i)}{\partial t} + \nabla(\rho i \vec{u}) = -p \nabla(\vec{u}) + \nabla(k \text{ grad } T) + \Phi + S_i$$



Equações de conservação (Simplificações)

Escoamento incompressível ($\rho = \text{cte}$)

$$\nabla(\vec{u}) = 0$$

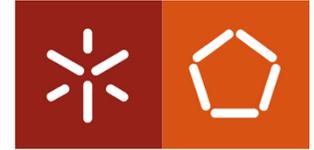
$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}) = 0$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Momentum xx

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \nabla(\rho u_x \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla(\mu \text{ grad } u_x) + S_x$$

$$\frac{\partial(u_x)}{\partial t} + \nabla(u_x \vec{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nabla(\nu \text{ grad } u_x) + S_x$$



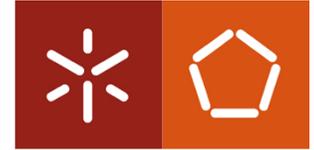
Equações de conservação (Simplificações)

Escoamento invíscido (**Euler**)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0$$

Momentum xx

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \nabla(\rho u_x \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + S_x$$



Equações de conservação (Simplificações)

creeping flow (Stokes)

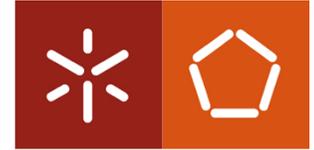
($Re \ll 1$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0$$

Momentum xx

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla(\mu \text{grad } u_x) + S_x = 0$$

ex: meios porosos, micro fluidos



Equações de conservação (Simplificações)

Aproximação de Boussinesq

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \nabla(\rho u_i \bar{u}) = -\frac{\partial p}{\partial i} + \nabla(\mu \text{ grad } u_i) + S_i$$

ρ, g cte

$$S_i = \rho g_i = \text{grad}(\rho \bar{g} \cdot \vec{r})$$

gravidade em zz

$$S_z = \frac{\partial}{\partial z}(-\rho g_z z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(p - \rho g_z z) = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}$$

$$S_i = 0$$



Equações de conservação (Simplificações)

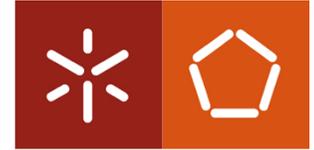
Aproximação de Boussinesq (cont)

se ρ não constante (g cte)

$$\rho g_i = \rho_0 g_i + (\rho - \rho_0) g_i$$

Tratar a parte variável *apenas* no termo de fonte (massa)

$$(\rho - \rho_0) g_i = -\rho_0 g_i \beta (T - T_0)$$



Equações de conservação (Simplificações)

Camada limite

- * Termo difusivo na direcção principal desprezável
- * $u_x \gg u_y$
- * $dp/dy \ll dp/dx$

a 2D:

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2(u_x)}{\partial y^2}$$



Equações de conservação

Formulação diferencial

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla(\rho\phi\vec{u}) = \nabla(\Gamma \text{ grad } \phi) + S_\phi$$

Formulação integral

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{CV} \nabla(\rho\phi\vec{u}) dV = \int_{CV} \nabla(\Gamma \text{ grad } \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV$$

Teorema de Gauss

$$\int_{CV} \nabla \mathbf{a} dV = \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} dA$$



Equações de conservação

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} \rho \phi dV \right) + \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \vec{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{ grad } \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV$$

(significado)

Em estado estacionário:

$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \vec{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{ grad } \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV$$



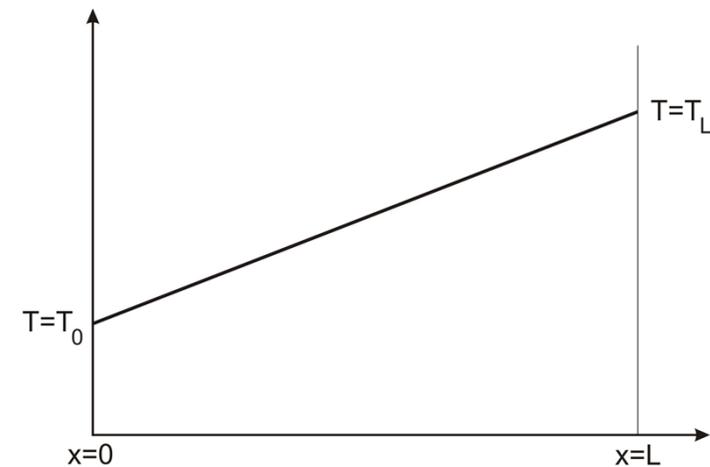
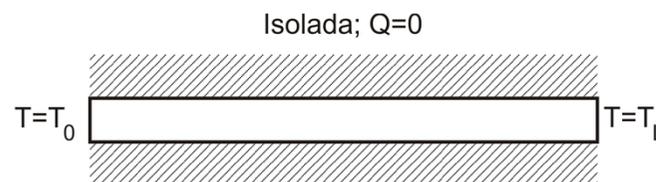
Classificação dos problemas

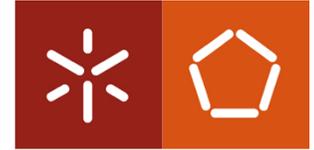
- * Em **equilíbrio**
- * Evolutivos (no tempo)

EQUILÍBRIO

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\phi = T$$



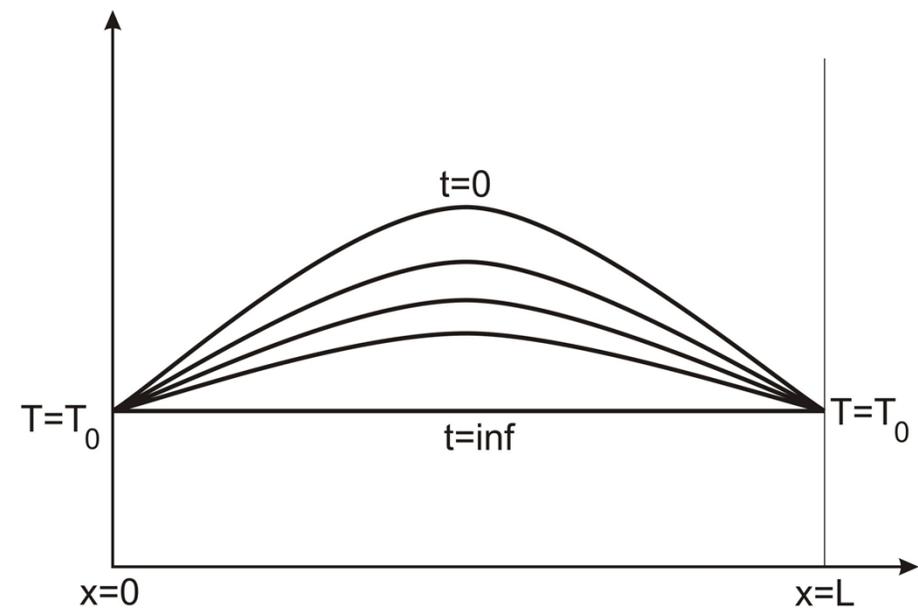
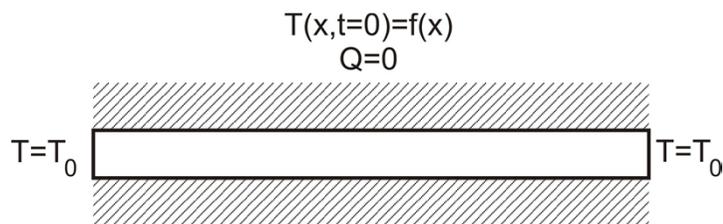


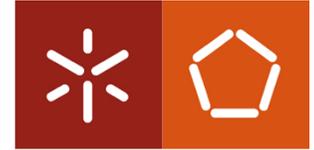
Classificação dos problemas

EVOLUTIVOS

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\phi = T$$





Classificação dos problemas (resumo)

Tipo problema	Equação	Exemplo	Condições
Equilíbrio	Elíptica	$\nabla(\text{grad}\phi) = 0$	Fronteira
Evolutivos com dissipação	Parabólica	$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \alpha \cdot \nabla(\text{grad}\phi)$	Fronteira e iniciais
Evolutivos sem dissipação	Hiperbólica	$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2 \cdot \nabla(\text{grad}\phi)$	Fronteira e iniciais

Condições de fronteira

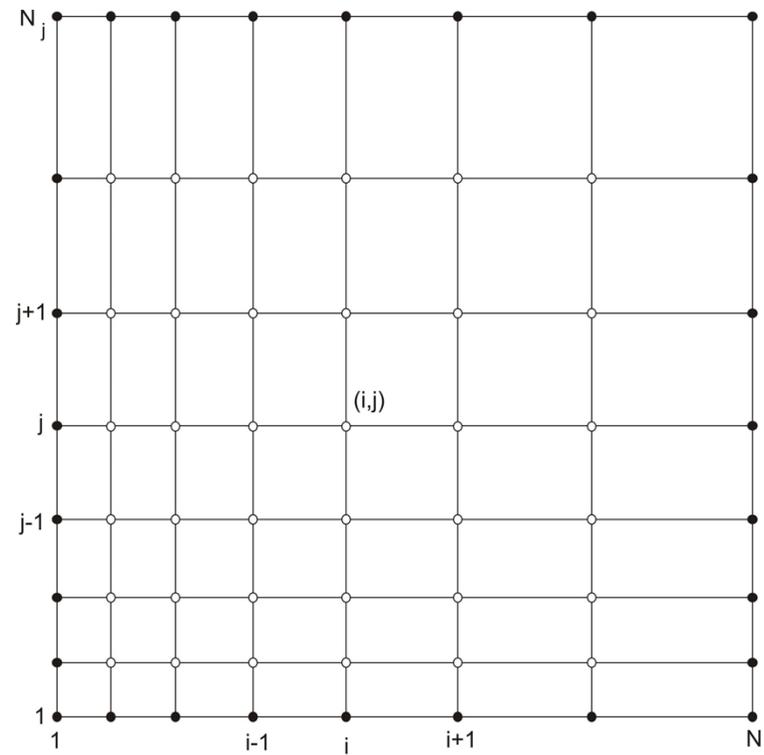


Diferenças Finitas

1D



2D

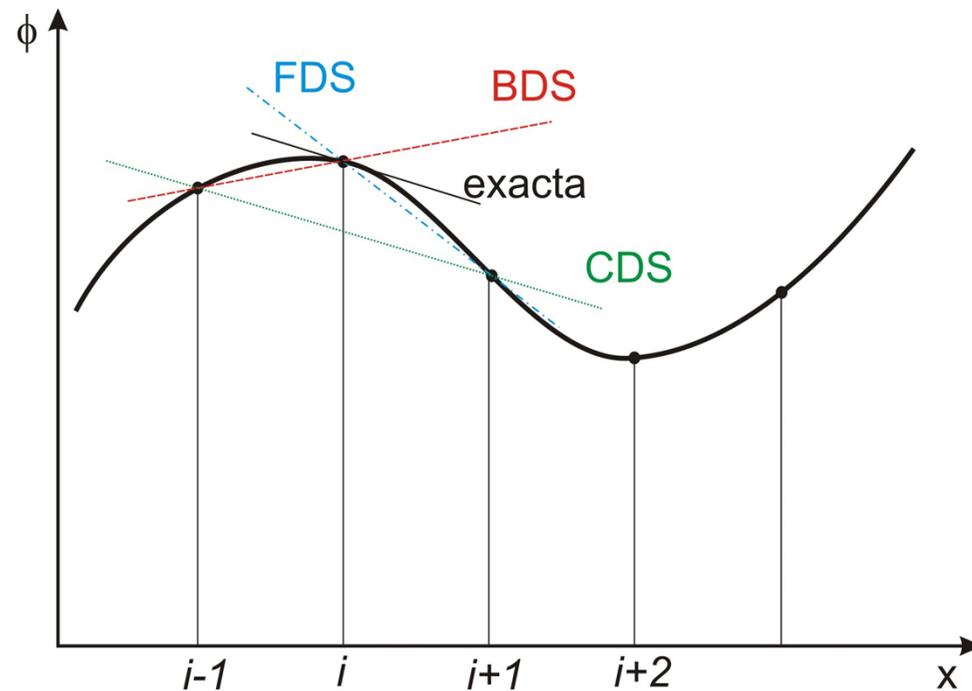


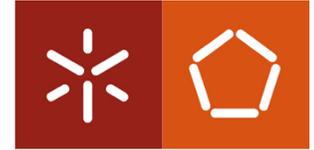


Diferenças Finitas

derivada

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x_i + \Delta x) - \phi(x_i)}{\Delta x}$$





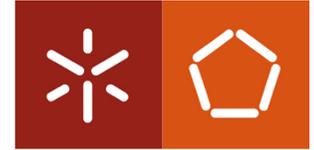
Diferenças Finitas

Séries de Taylor

$$\phi(x) = \phi(x_i) + (x - x_i) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i + \frac{(x - x_i)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_i + \dots + \frac{(x - x_i)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n} \right)_i + H$$

FDS:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i = \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{6} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_i + H$$



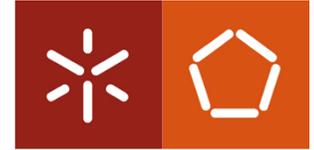
Diferenças Finitas

BDS:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} + \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{6} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + H$$

CDS:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2 - (x_i - x_{i-1})^2}{2(x_{i+1} - x_{i-1})} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^3 - (x_i - x_{i-1})^3}{6(x_{i+1} - x_{i-1})} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + H$$



Diferenças Finitas

FDS:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

BDS:

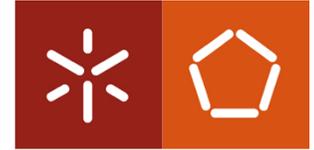
$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

CDS:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

erro:

$$\varepsilon \approx (\Delta x)^2$$



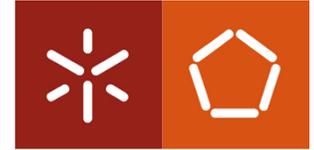
Diferenças Finitas

Aproximação polinomial:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi(x_{i+1})(\Delta x_i)^2 - \phi(x_{i-1})(\Delta x_{i+1})^2 + \phi(x_i)[(\Delta x_{i+1})^2 - (\Delta x_i)^2]}{\Delta x_{i+1}\Delta x_i(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}$$

outros:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{2\phi(x_i) + 3\phi(x_{i-1}) - 6\phi(x_{i-2}) + \phi(x_{i-3})}{6\Delta x}$$



Diferenças Finitas

Erro por não uniformidade da malha:

$$\varepsilon_T = \frac{(\Delta x_{i+1})^2 - (\Delta x_i)^2}{2(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i - \frac{(\Delta x_{i+1})^3 - (\Delta x_i)^3}{6(\Delta x_{i+1} - \Delta x_i)} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_i + H$$

se:

$$\Delta x_{i+1} = r_e \Delta x_i$$

$$\varepsilon_T \approx \frac{(1 - r_e) \Delta x_i}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i$$

$$\varepsilon_T \approx \frac{\Delta x_i}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i \quad \text{FDS; BDS}$$



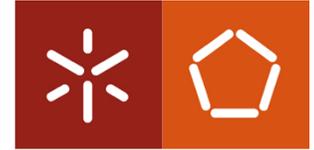
Diferenças Finitas

Segunda derivada

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i \approx \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i+1} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{FDS}$$

BDS

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1}(x_i - x_{i-1}) + \phi_{i-1}(x_{i+1} - x_i) - \phi_i(x_{i+1} - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_i)^2(x_i - x_{i-1})}$$



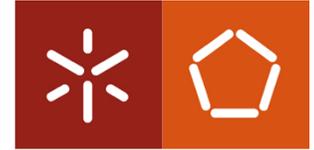
Diferenças Finitas

Segunda derivada

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i \approx \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1})} \quad \text{CDS}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1}(x_i - x_{i-1}) + \phi_{i-1}(x_{i+1} - x_i) - \phi_i(x_{i+1} - x_{i-1})}{\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1})}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i}{(\Delta x)^2}$$



Diferenças Finitas

Série de Taylor (erro malha não uniforme)

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i = \frac{\phi_{i+1}(x_i - x_{i-1}) + \phi_{i-1}(x_{i+1} - x_i) - \phi_i(x_{i+1} - x_{i-1})}{\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1})} - \frac{(x_{i+1} - x_i) - (x_i - x_{i-1})}{3} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + H$$

derivadas cruzadas

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$



Volumes finitos; difusão

Formulação diferencial

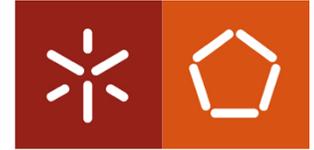
$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla(\rho\phi\bar{u}) = \nabla(\Gamma \text{ grad } \phi) + S_\phi$$

Formulação integral

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{CV} \nabla(\rho\phi\bar{u}) dV = \int_{CV} \nabla(\Gamma \text{ grad } \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV$$

Aplicando o Teorema de Gauss:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} \rho\phi dV \right) + \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho\phi\bar{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{ grad } \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV$$



Volumes finitos; difusão

Só difusão:

$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad } \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV = 0$$

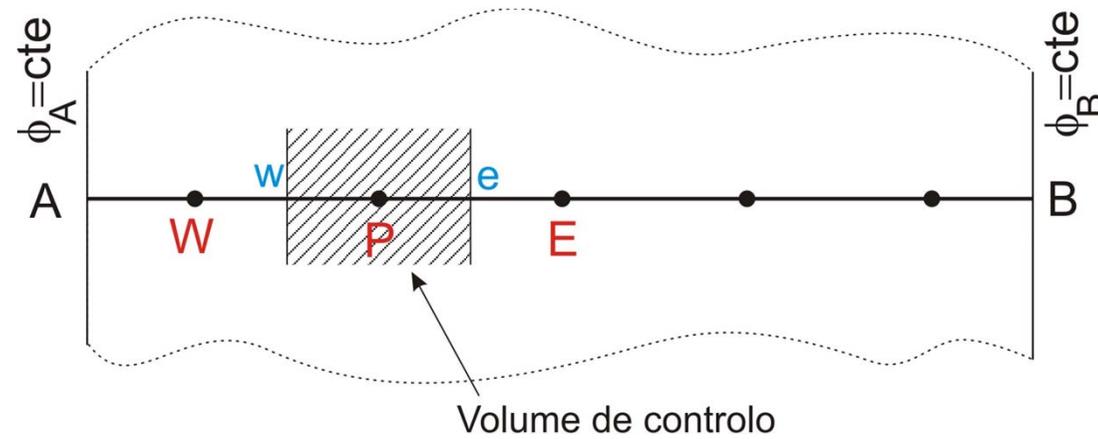
a 1D:

$$\int_A (\hat{i}) \cdot \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} \right) dA + \bar{S}_\phi dV = 0$$

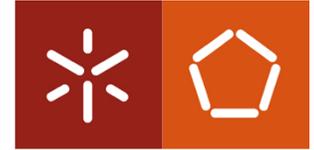
$$\sum_k \int_{A_k} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dA + \bar{S}_\phi dV = 0$$

$$\left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w + \bar{S}_\phi dV = 0$$

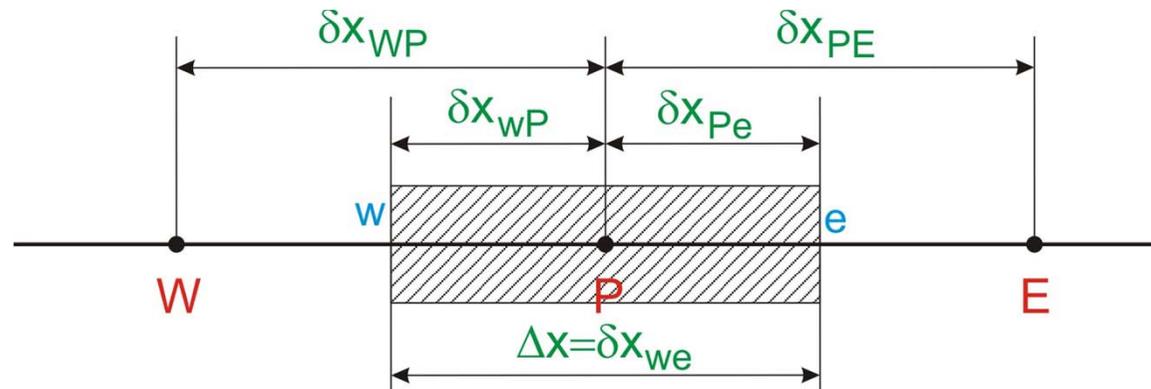
Volumes finitos; difusão



$$\left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w + \bar{S}_\phi dV = 0$$



Volumes finitos; difusão



$$\left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right)$$

$$\left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right)$$



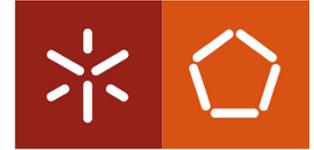
Volumes finitos; difusão

$$\bar{S}_\phi dV = S_u + S_P \phi_P$$

$$\Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) + (S_u + S_P \phi_P) = 0$$

Agrupando:

$$\left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - S_P \right) \phi_P - \left(\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w \right) \phi_W - \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e \right) \phi_E = S_u$$



Volumes finitos; difusão

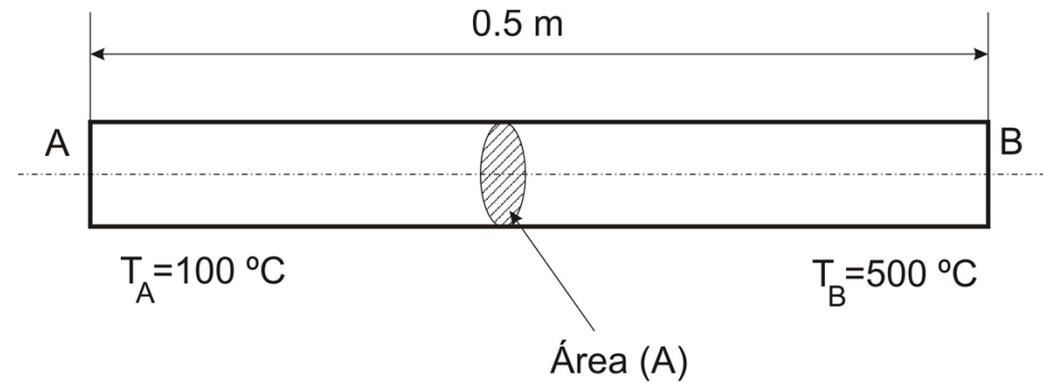
$$a_P \phi_P - a_W \phi_W - a_E \phi_E = S_u$$

onde:

a_W	a_E	a_P
$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$	$a_W + a_P - S_P$

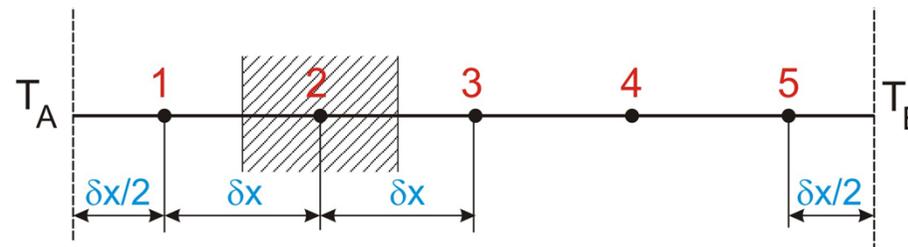
Volumes finitos; difusão

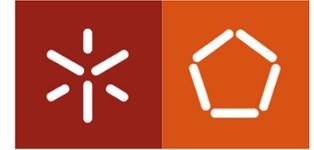
Exemplo:



$$A = 0.01\text{ m}^2$$

$$k = 1000\text{ W/m}^2\text{K}$$





Interpolação

$$\left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right)$$

Linear

$$\phi_e = \lambda_e \phi_E + \phi_P (1 - \lambda_e)$$

$$\lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P}$$

Expandindo em séries de Taylor

$$\phi_e = \lambda_e \phi_E + \phi_P (1 - \lambda_e) - \frac{(x_e - x_P)(x_E - x_e)}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \dots$$



Interpolação

Up-wind

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P, & \text{se } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_e > 0 \\ \phi_E, & \text{se } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_e < 0 \end{cases}$$

Expandindo em séries de Taylor

$$\phi_e = \phi_P + (x_e - x_P) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{(x_e - x_P)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \dots$$



Interpolação

QUICK (quadratic upwind interpolation)

$$\phi_e = \phi_U + g_1(\phi_D - \phi_U) + g_2(\phi_U - \phi_{UU})$$

$$g_1 = \frac{(x_e - x_U)(x_e - x_{UU})}{(x_D - x_U)(x_D - x_{UU})}$$

$$g_2 = \frac{(x_e - x_U)(x_D - x_e)}{(x_U - x_{UU})(x_D - x_{UU})}$$

Erro de 3ª ordem!!



TDM (Thomas)

1. Desde $i=1$ até $n-1$ faça

$$m = -\frac{l_{i+1}}{d_i}$$

$$d_{i+1} = d_{i+1} + m \cdot u_i$$

$$b_{i+1} = b_{i+1} + m \cdot b_i$$

2. $x_n = \frac{b_n}{d_n}$

3. Desde $i=n-1$ até 1 faça

$$x_i = \frac{b_i - u_i \cdot x_{i+1}}{d_i}$$



Integração no tempo

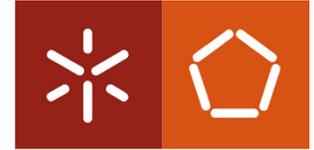
$$\rho c_p \frac{\partial(T)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} \rho c_p \frac{\partial(T)}{\partial t} dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} S dV dt$$

$$\int_w^e \left[\int_t^{t+\Delta t} \rho c_p \frac{\partial(T)}{\partial t} dt \right] dV = \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(kA \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(kA \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta V dt$$

Derivada temporal

$$\int_w^e \left[\int_t^{t+\Delta t} \rho c_p \frac{\partial(T)}{\partial t} dt \right] dV = \rho c_p (T_P - T_P^0) \Delta V$$

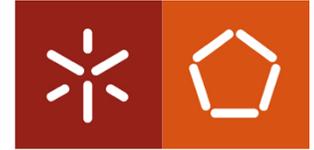


Integração no tempo

$$\rho c_p (T_P - T_P^0) \Delta V = \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(k_e A \frac{T_E - T_P}{\delta x_{PE}} \right) - \left(k_w A \frac{T_P - T_W}{\delta x_{WP}} \right) \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta V dt$$

Onde calcular temperatura?

$$\int_t^{t+\Delta t} T_P dt = [\theta T_P + (1 - \theta) T_P^0] \Delta t$$



Integração no tempo

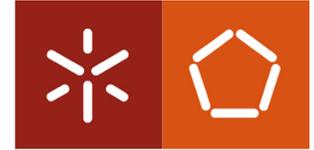
$$\rho c_p \left(\frac{T_P - T_P^0}{\Delta t} \right) \Delta x = \theta \left[\left(k_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_{PE}} \right) - \left(k_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_{WP}} \right) \right] \\ + (1 - \theta) \left[\left(k_e \frac{T_E^0 - T_P^0}{\delta x_{PE}} \right) - \left(k_w \frac{T_P^0 - T_W^0}{\delta x_{WP}} \right) \right] + \bar{S} \Delta x$$

explícito

$$\theta = 0$$

$$\rho c_p \left(\frac{T_P - T_P^0}{\Delta t} \right) \Delta x = (1 - \theta) \left[\left(k_e \frac{T_E^0 - T_P^0}{\delta x_{PE}} \right) - \left(k_w \frac{T_P^0 - T_W^0}{\delta x_{WP}} \right) \right] + \bar{S} \Delta x$$

$$\rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} > \frac{2k}{\Delta x}$$



Integração no tempo

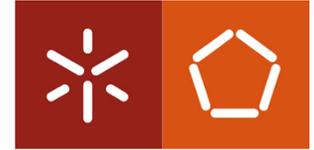
Crank-Nicholson

$$\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Delta t < \rho c_p \frac{\Delta x^2}{k}$$

Implícito

$$\theta = 1$$



Convecção

Convecção-difusão (estacionário)

$$\nabla(\rho\phi\vec{u}) = \nabla(\Gamma \text{ grad } \phi) + S_\phi$$

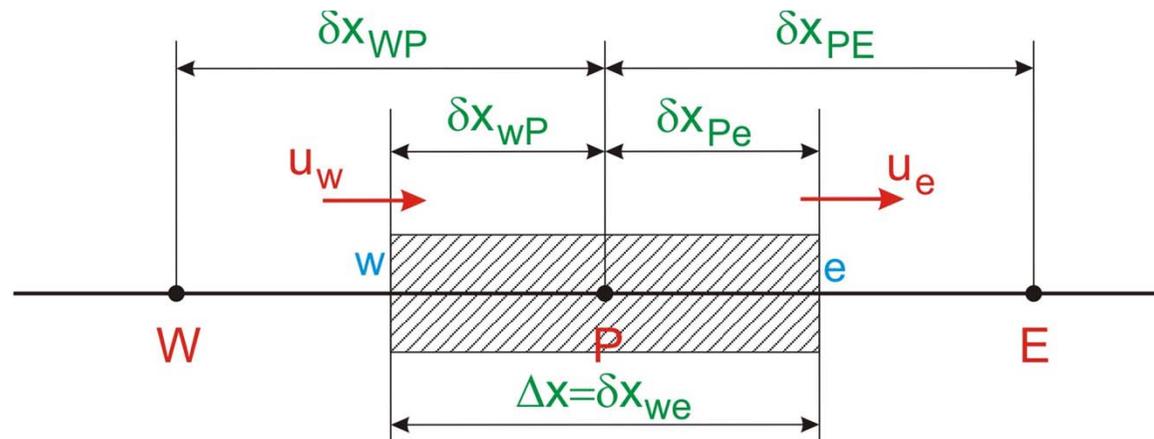
$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\rho\phi\vec{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{ grad } \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV$$

Exemplo (1D; s/ termo fonte)

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)$$

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0$$

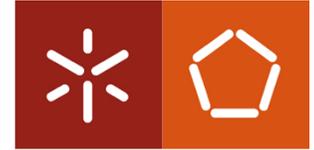
Convecção



integrando

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w$$

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0$$



Convecção

Fluxos nas faces

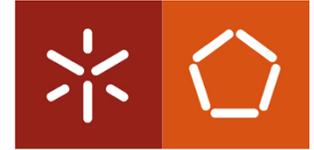
$$F = \rho u \quad \text{e} \quad D = \frac{\Gamma}{dx}$$

$$F_e = (\rho u)_e \quad F_w = (\rho u)_w$$

$$D_e = \left(\frac{\Gamma}{dx} \right)_e \quad D_w = \left(\frac{\Gamma}{dx} \right)_w$$

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)$$

$$F_e - F_w = 0$$



Convecção

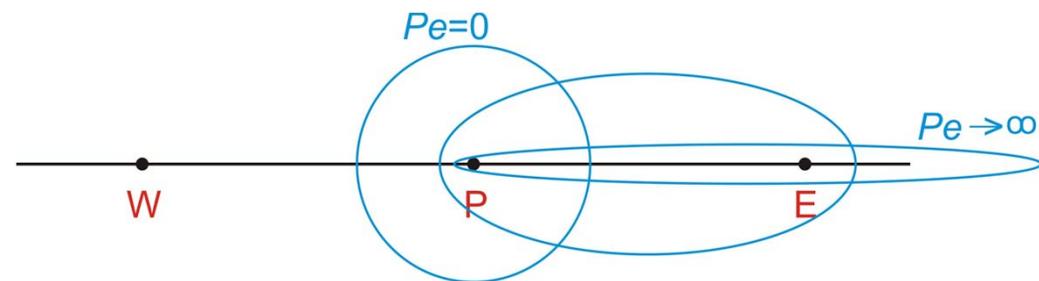
Interpolação nas faces (**diferenças centrais**)

$$\phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2}$$

$$\phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2}$$

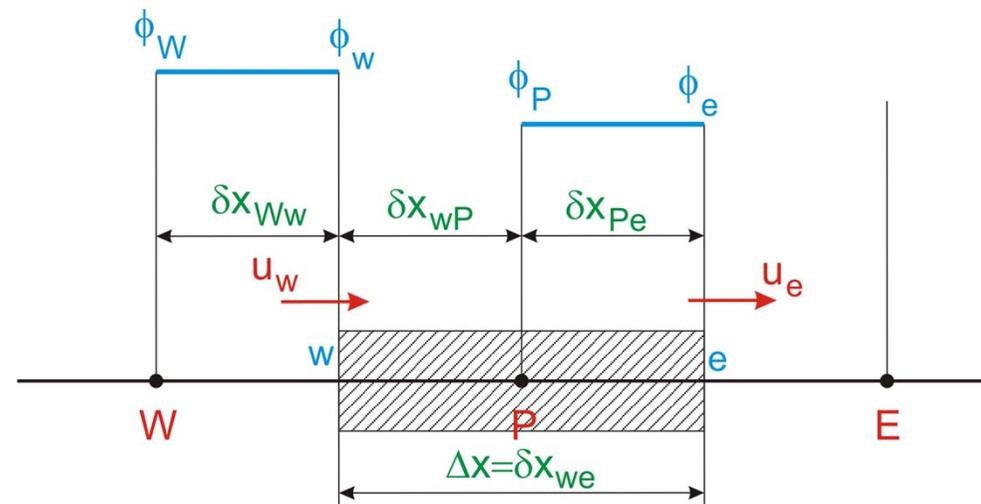
transporte

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma} dx$$



Convecção

Interpolação nas faces (*upwind*)



Fluxos faces

$$\phi_e = \phi_P; \quad \phi_w = \phi_W$$