

# Dependência extremal: risco de contágio de valores extremos

Helena Ferreira

Departamento de Matemática, Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal, *helenaferreira@ubi.pt*

Marta Ferreira

Departamento de Matemática e Aplicações, Centro de Matemática da Universidade do Minho, Braga, Portugal, *msferreira@math.uminho.pt*

**Palavras-chave:** teoria de valores extremos multivariada, coeficientes de dependência na cauda de subvetores, inferência

**Abstract:** O fenómeno da globalização, juntamente com um relaxamento na supervisão dos mercados financeiros, tornou-os mais vulneráveis e mais dependentes entre si. A ocorrência de grandes perdas em mercados fortes acaba por se reflectir ao nível das principais bolsas mundiais, e vice-versa. A necessidade de medir esta interdependência extremal conduziu ao aparecimento de diversos coeficientes no seio da teoria multivariada de valores extremos. Neste trabalho apresentam-se coeficientes para a dependência extremal entre dois vetores aleatórios, estendendo medidas existentes na literatura. A estimação será também abordada e uma ilustração do conceito será feita com dados reais.

## 1 Introdução

Devido à globalização e a uma falta de supervisão, vem-se assistindo a um aumento da dependência nos mercados financeiros. Não admira, portanto, que áreas como a gestão de riscos em finanças esteja altamente interessada na quantificação dessa dependência. Por exemplo, a medida de risco sobejamente conhecida por VaR

(Value-at-Risk), depende fortemente da estrutura de dependência entre eventos extremos, tornando importante a modelação e a análise da dependência extremal. Na verdade, a teoria de valores extremos multivariada oferece-se como a ferramenta natural para abordar esta questão. A medida mais usada neste contexto é o coeficiente de dependência de cauda, usualmente denotado TDC (*tail dependence coefficient*), definido do seguinte modo ([4]):

$$\lambda := \lim_{t \downarrow 0} P(F_2(X_2) > 1 - t | F_1(X_1) > 1 - t), \quad (1)$$

onde  $F_1$  e  $F_2$  são funções de distribuição (f.d.'s) das variáveis aleatórias (v.a.'s)  $X_1$  e  $X_2$ , respetivamente, consideradas contínuas. Diz-se que o par  $(X_1, X_2)$  apresenta dependência de cauda sempre que  $\lambda > 0$  e independência quando  $\lambda = 0$ . Formulações multivariadas de coeficientes de dependência de cauda podem ser usadas para descrever o grau de dependência na cauda de um ortante de uma distribuição multivariada (e.g. [6], [5] e [7]). Muitas destas medidas, recentemente cada vez mais utilizadas em tempos tão exigentes, consideram que os eventos extremos ocorrem em todas as componentes do vetor. Isto implica uma maior complexidade de trabalho e de compreensão das mesmas, quando em comparação com o caso bivariado. Não surpreendentemente, as aplicações raramente vão além da dimensão três. Relaxando um pouco a dimensão no sentido de considerar a ocorrência de pelo menos um evento extremo em sub-vetores (blocos) de um vetor aleatório, pode ser suficiente para avaliar a dependência de cauda. Por exemplo, até que ponto a queda de um mercado na Europa pode influenciar a ocorrência de pelo menos um *crash* de um mercado norte-americano, e vice-versa? Em Ferreira e Ferreira ([2], 2012) foi considerada uma função de dependência de cauda que permite avaliar a probabilidade de ocorrer simultaneamente algum valor extremo em cada um dos blocos.

Neste trabalho apresentamos uma função para a dependência de cauda de um vetor aleatório, baseada na probabilidade de ocorrerem valores extremos para o máximo de um bloco, dado que o máximo de outro bloco assume um valor extremo também. No vetor unitário,

esta função origina o aqui designado BTDC (*block tail dependence coefficient*). O condicionamento nos dois sentidos permite diferenciar o nível de “gravidade”, consoante a propagação parte do primeiro ou do segundo blocos. Relações com outros coeficientes conhecidos da literatura serão também exploradas. O estabelecimento de propriedades conduzirá a um estimador simples fortemente consistente. No final, uma aplicação a dados financeiros ilustrará o conceito.

## 2 Dependência extremal em blocos

Seja  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  um vetor aleatório com f.d.  $F$  e f.d.’s marginais  $F_i$  contínuas,  $i = 1, \dots, n$ . Para  $I \subset \{1, \dots, d\}$ , defina-se  $M(I) = \bigvee_{i \in I} F_i(X_i)$  e  $\mathbf{X}_I$  o sub-vetor de  $\mathbf{X}$  cujas v.a.’s estão indexadas em  $I$ . Considere-se  $C_F$  a função cópula de  $F$ , i.e.,

$$F(x_1, \dots, x_d) = C_F(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \quad (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Vamos estudar a dependência entre eventos extremos respeitantes a dois sub-vetores (blocos),  $\mathbf{X}_{I_1}$  e  $\mathbf{X}_{I_2}$ , onde  $I_1$  e  $I_2$  são subconjuntos disjuntos de  $\{1, \dots, d\}$ .

A partir do TDC, a referência [7] introduz o conceito de função de dependência de cauda, definida por:

$$\Lambda(x, y) := \lim_{t \downarrow 0} P(F_2(X_2) > 1 - x/t | F_1(X_1) > 1 - y/t).$$

De notar que  $\Lambda(1, 1) = \lambda$ . Começamos por estender, na Definição 2.1, a função de dependência de cauda para dois blocos de vetores e, a partir desta, introduzimos um novo coeficiente para a dependência na cauda.

**Definição 2.1** *Sejam  $I_1$  e  $I_2$  dois subconjuntos não vazios de  $\{1, \dots, d\}$ . A função de dependência de cauda de  $\mathbf{X}_{I_1}$  dado  $\mathbf{X}_{I_2}$  é definida, para  $(x, y) \in (0, \infty)^2$ ,*

$$\Lambda^{(I_1|I_2)}(x, y) := \lim_{t \rightarrow \infty} P\left(M(I_1) > 1 - \frac{x}{t} \mid M(I_2) > 1 - \frac{y}{t}\right),$$

*desde que o limite exista.*

Denominaremos o coeficiente  $\Lambda^{(I_1|I_2)}(1,1)$  por BTDC (*block tail dependence coefficient*), o qual nos dá informação acerca da probabilidade de ocorrer algum valor extremo no bloco  $\{F_i(X_i), i \in I_1\}$ , dado que algum valor extremo ocorre no bloco  $\{F_i(X_i), i \in I_2\}$ . No caso de  $I_1 = \{1\}$  e  $I_2 = \{2\}$ ,  $\Lambda^{(I_1|I_2)}(1,1)$  corresponde ao TDC dado em (1). As medidas  $\Lambda^{(I_1|I_2)}(1,1)$  e  $\Lambda^{(I_2|I_1)}(1,1)$  permitem avaliar até que ponto a excedência de um valor de risco no bloco  $I_2$  se propaga ao bloco  $I_1$ , no primeiro caso, e vice-versa, no segundo caso. Assim sendo, diferencia simultaneamente o nível de “gravidade”, consoante a propagação parte do primeiro ou do segundo blocos. De notar que o coeficiente  $\Lambda^{(I_1, I_2)}(1,1)$  analisado em Ferreira e Ferreira ([2], 2012), corresponde à probabilidade de ocorrer simultaneamente algum valor extremo em cada um dos blocos, não permitindo a referida diferenciação.

No que segue, fixamos a notação a ser usada no resto do artigo: para  $(x, y) \in (0, \infty)^2$ ,  $\emptyset \neq I_1, I_2 \subseteq \{1, \dots, d\}$  e  $i \in \{1, \dots, d\}$ , seja

$$\alpha_i^{(I_1, I_2)}(u, v) = u \mathbf{1}_{I_1}(i) + v \mathbf{1}_{I_2}(i) + \mathbf{1}_{\overline{I_1 \cup I_2}}(i)$$

onde  $\mathbf{1}(\cdot)$  é a função indicatriz, e para  $G$  uma distribuição multivariada de valor extremo (MEV) e  $C_G$  a função cópula respetiva, seja

$$l^{(I_1, I_2)}(x^{-1}, y^{-1}) = -\log C_G(\alpha_1^{(I_1, I_2)}(e^{-x}, e^{-y}), \dots, \alpha_d^{(I_1, I_2)}(e^{-x}, e^{-y})).$$

Usaremos ainda a notação  $\wedge = \min$  e  $\vee = \max$ .

O coeficiente extremal é uma medida introduzida em [9] e mais tarde abordada em [8]. O coeficiente extremal de  $\mathbf{X}_{I_1 \cup I_2}$ , denotado  $\epsilon_{I_1 \cup I_2}$ , define-se por

$$C_G(\alpha_1^{(I_1, I_2)}(e^{-x}, e^{-x}), \dots, \alpha_d^{(I_1, I_2)}(e^{-x}, e^{-x})) = \exp(-x)^{\epsilon_{I_1 \cup I_2}},$$

pelo que, se tem

$$l^{(I_1, I_2)}(x^{-1}, x^{-1}) = x \epsilon_{I_1 \cup I_2}.$$

Se  $F$  pertencer ao domínio de atração de uma distribuição MEV  $G$ , então é possível deduzir

$$\Lambda^{(I_1|I_2)}(x,y) = 1 + \frac{-\log(\exp(-x))^{\epsilon_{I_1}}}{-\log(\exp(-y))^{\epsilon_{I_2}}} - \frac{l^{(I_1,I_2)}(x^{-1},y^{-1})}{-\log(\exp(-y))^{\epsilon_{I_2}}}.$$

Este resultado pode ser visto em [2] (Proposição 2.2).

**Exemplo 2.2** *Considerando o modelo simétrico logístico, tem-se*

$$l^{(I_1,I_2)}(x^{-1},y^{-1}) = \left( \sum_{j=1}^d (-\log \alpha_j^{(I_1,I_2)}(\exp(-x), \exp(-y)))^{1/\theta} \right)^\theta,$$

com  $\theta \in (0,1]$ ,  $x,y > 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} \Lambda^{(I_1|I_2)}(x,y) &= 1 + \frac{\left( \sum_{j \in I_1} x^{1/\theta} \right)^\theta}{\left( \sum_{j \in I_2} y^{1/\theta} \right)^\theta} - \frac{\left( \sum_{j \in I_1} x^{1/\theta} + \sum_{j \in I_2} y^{1/\theta} \right)^\theta}{\left( \sum_{j \in I_2} y^{1/\theta} \right)^\theta} \\ &= 1 + \frac{|I_1|^\theta x}{|I_2|^\theta y} - \frac{\left( |I_1| x^{1/\theta} + |I_2| y^{1/\theta} \right)^\theta}{|I_2|^\theta y}. \end{aligned}$$

**Proposição 2.3** *Se  $F$  pertence ao domínio de atração de uma distribuição MEV, então*

$$0 \leq \Lambda^{(I_1|I_2)}(x,y) \leq 1 \wedge \frac{x \in I_1}{y \in I_2}$$

*Dem.:* A desigualdade da esquerda é imediata pela definição de  $\Lambda^{(I_1|I_2)}(x,y)$ . Para a desigualdade da direita, veja-se que

$$\begin{aligned} &F(a_1^{(I_1,I_2)}(x^{-1},y^{-1}), \dots, a_d^{(I_1,I_2)}(x^{-1},y^{-1})) \\ &\leq F(a_1^{(I_1,\emptyset)}(x^{-1},x^{-1}), \dots, a_d^{(I_1,\emptyset)}(x^{-1},x^{-1})) \\ &\wedge F(a_1^{(\emptyset,I_2)}(y^{-1},y^{-1}), \dots, a_d^{(\emptyset,I_2)}(y^{-1},y^{-1})), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
& l^{(I_1, \emptyset)}(x^{-1}, x^{-1}) + l^{(\emptyset, I_2)}(y^{-1}, y^{-1}) - l^{(I_1, I_2)}(x^{-1}, y^{-1}) \\
\leq & l^{(I_1, \emptyset)}(x^{-1}, x^{-1}) + l^{(\emptyset, I_2)}(y^{-1}, y^{-1}) \\
& - (l^{(I_1, \emptyset)}(x^{-1}, x^{-1}) \vee l^{(\emptyset, I_2)}(y^{-1}, y^{-1})) \\
= & x \epsilon_{I_1} \wedge y \epsilon_{I_2}.
\end{aligned}$$

■

A proposição seguinte encontra-se em [2] (Proposição 3.1) e vai-nos permitir deduzir estimadores para as funções e coeficientes de dependência de cauda aqui apresentados, no caso de estarmos perante modelos MEV.

**Proposição 2.4** *Se  $F$  é uma distribuição MEV com função cópula  $C_F$ , então, para  $l(x_1, \dots, x_d) = -\log C_F(\exp(-x_1^{-1}), \dots, \exp(-x_d^{-1}))$ , tem-se*

$$l(x_1, \dots, x_d) = \frac{E(F_1(X_1)^{x_1} \vee \dots \vee F_d(X_d)^{x_d})}{1 - E(F_1(X_1)^{x_1} \vee \dots \vee F_d(X_d)^{x_d})}.$$

**Corolário 2.5** *Sob as condições da Proposição 2.4, tem-se*

$$l^{(I_1, I_2)}(x^{-1}, y^{-1}) = \frac{E(M(I_1)^{1/x} \vee M(I_2)^{1/y})}{1 - E(M(I_1)^{1/x} \vee M(I_2)^{1/y})},$$

e

$$\Lambda^{(I_1|I_2)}(x, y) = 1 + \frac{\frac{E(M(I_1)^{1/x})}{1 - E(M(I_1)^{1/x})}}{\frac{E(M(I_2)^{1/y})}{1 - E(M(I_2)^{1/y})}} - \frac{\frac{E(M(I_1)^{1/x} \vee M(I_2)^{1/y})}{1 - E(M(I_1)^{1/x} \vee M(I_2)^{1/y})}}{\frac{E(M(I_2)^{1/y})}{1 - E(M(I_2)^{1/y})}}.$$

Propõe-se assim o estimador

$$\tilde{\Lambda}^{(I_1|I_2)}(x, y) = 1 + \frac{x \tilde{\epsilon}_{I_1}}{y \tilde{\epsilon}_{I_2}} - \frac{\tilde{l}^{(I_1, I_2)}(x^{-1}, y^{-1})}{y \tilde{\epsilon}_{I_2}}, \quad (2)$$

onde

$$x\tilde{\epsilon}_{I_1} = \frac{\overline{M(I_1)^{1/x}}}{1 - \overline{M(I_1)^{1/x}}}, \quad y\tilde{\epsilon}_{I_2} = \frac{\overline{M(I_2)^{1/y}}}{1 - \overline{M(I_2)^{1/y}}}$$

$$\text{e } \tilde{l}^{(I_1, I_2)}(x^{-1}, y^{-1}) = \frac{\overline{M(I_1)^{1/x} \vee M(I_2)^{1/y}}}{1 - \overline{M(I_1)^{1/x} \vee M(I_2)^{1/y}}},$$

tendo-se

$$\overline{M(I_l)^{1/z}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bigvee_{j \in I_l} F_j(X_j^{(i)})^{1/z}, \quad l = 1, 2, z \in \mathbb{R}$$

e

$$\overline{M(I_1)^{1/x} \vee M(I_2)^{1/y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \bigvee_{j \in I_1} F_j(X_j^{(i)})^{1/x} \vee \bigvee_{j \in I_2} F_j(X_j^{(i)})^{1/y} \right).$$

com  $\tilde{l}^{(I_1, I_2)}(1, 1) = \tilde{\epsilon}_{I_1 \cup I_2}$ .

Se as margens forem desconhecidas, podemos substituir  $F_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ , por um estimador  $\tilde{F}_j$ . Por questões de maior precisão nas estimativas, é usual considerar variantes da f.d. empírica, como

$$\hat{F}_j(u) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_j^{(k)} \leq u\}}. \quad (3)$$

Outras sugestões e mais detalhes sobre este tópico podem ser vistos em [1].

No caso de margens conhecidas, a normalidade assintótica de  $x\tilde{\epsilon}_{I_1}$ ,  $y\tilde{\epsilon}_{I_2}$  e  $\tilde{l}^{(I_1, I_2)}(x^{-1}, y^{-1})$ , facilmente se deduz do Teorema Limite Central, pois todos se baseiam numa média amostral (ver [2]; Proposição 3.4 e Corolário 3.5). De notar, contudo, que o estimador (2), pelo fato de consistir em quocientes de estimadores assintoticamente normais, não podemos concluir deste modo que também o seja. Este

tópico será objeto de trabalho futuro com base em outra(s) abordagem(ns). Por outro lado, a consistência forte é facilmente deduzida da Lei Forte dos Grandes Números (veja-se Ferreira e Ferreira [2], 2012; Proposição 3.6), resultado este que se estende para o caso de margens desconhecidas (Ferreira e Ferreira [2], 2012; Proposição 3.8). Também é possível estabelecer a normalidade assintótica de  $x\tilde{\epsilon}_{I_1}$ ,  $y\tilde{\epsilon}_{I_2}$  e  $\tilde{l}^{(I_1, I_2)}(x^{-1}, y^{-1})$  para margens desconhecidas, embora o mesmo problema acima descrito subsista para o referido estimador.

## 2.1 Uma aplicação a dados financeiros

Nesta secção abordaremos a questão levantada aquando da Introdução: até que ponto a queda de um mercado na Europa pode influenciar a ocorrência de pelo menos um *crash* de um mercado norte-americano, e vice-versa? A nossa análise baseia-se na aplicação dos coeficientes,  $\Lambda^{(I_1|I_2)}(1,1)$  e  $\Lambda^{(I_2|I_1)}(1,1)$ , aos log-retornos negativos dos valores de fecho dos índices CAC 40, FTSE100, SMI e XDAX ao nível da Europa, e dos índices Dow Jones, Nasdaq e SP500 nos EUA, de janeiro de 1993 a Março de 2004. De maneira a construirmos uma amostra de máximos e, assim, assemelhá-los a um modelo MEV, vamos considerar os máximos mensais, obtendo-se uma amostra de dimensão 84. A nuvem de pontos na Figura 1 parece evidenciar a presença de alguma dependência. De modo a quantificar essa dependência, usaremos os estimadores  $\tilde{\Lambda}^{(I_1|I_2)}(1,1)$  e  $\tilde{\Lambda}^{(I_2|I_1)}(1,1)$ , facilmente deduzidos de (2), considerando que as margens são desconhecidas, ou seja, estimando as distribuições marginais com base em (3). Na Tabela 1 encontram-se os resultados obtidos, considerando os blocos Europa e EUA, denotados, respetivamente,  $I_1$  e  $I_2$ . A dependência extremal entre os mercados dos blocos considerados é dada por cada um dos coeficientes  $\tilde{\epsilon}_{I_1}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{I_2}$  e  $\tilde{\epsilon}_{I_1 \cup I_2}$ . Veja-se que  $\tilde{\Lambda}^{(I_1|I_2)}(1,1) > \tilde{\Lambda}^{(I_2|I_1)}(1,1)$  o que indica que, para os mercados considerados, o efeito de propagação do fenómeno de queda de mercados bolsistas tende a ser mais grave quando tem início nos EUA.



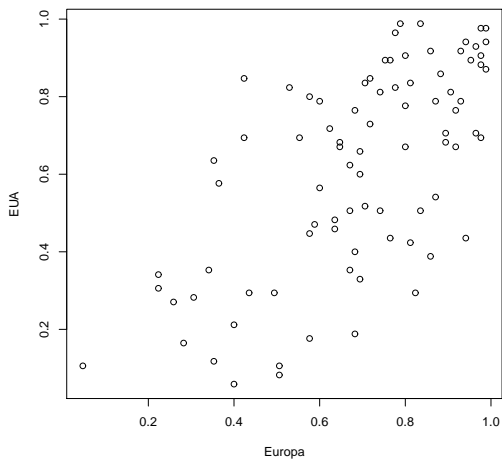


Figura 1: Nuvem de pontos relativa aos máximos mensais na Europa versus EUA.

## Agradecimentos

Marta Ferreira é financiada por Fundos FEDER através do Programa Operacional Factores de Competitividade - COMPETE e por

$\tilde{\epsilon}_{I_1}$	2.24398
$\tilde{\epsilon}_{I_2}$	1.59071
$\tilde{\epsilon}_{I_1 \cup I_2}$	2.82637
$\tilde{\Lambda}^{(I_1 I_2)}(1,1)$	0.63388
$\tilde{\Lambda}^{(I_2 I_1)}(1,1)$	0.44935

Tabela 1: Estimativas obtidas para os blocos,  $I_1$  (Europa) e  $I_2$  (EUA).

Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projecto PEst-OE/MAT/UI0013/2014.

## Referências

- [1] Beirlant, J., Goegebeur, Y., Segers, J., Teugels, J. (2004). *Statistics of Extremes: Theory and Application*. Wiley, New York.
- [2] Ferreira, H., Ferreira, M. (2012). On extremal dependence of block vectors. *Kybernetika* 48(5), 988–1006.
- [3] Frahm, G., Junker, M., Schmidt R. (2005). Estimating the tail-dependence coefficient: properties and pitfalls. *Insurance: Mathematics & Economics* 37(1), 80–100.
- [4] Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman and Hall, London.
- [5] H. Li: Orthant tail dependence of multivariate extreme value distributions. *J. Multivariate Anal.* 100(1) (2009), 243–256.
- [6] H. Li and Y. Sun: Tail dependence for heavy-tailed scale mixtures of multivariate distributions. *J. Appl. Probab.* 46(4) (2009), 925–937.
- [7] Schmidt, R., Stadtmüller, U. (2006). Nonparametric estimation of tail dependence. *Scandinavian Journal of Statistics* 33, 307–335.
- [8] Smith, R.L. (1990). Max-stable processes and spatial extremes. Preprint, Univ. North Carolina, USA.
- [9] Tiago de Oliveira, J. (1962/63). Structure theory of bivariate extremes: extensions. *Est. Mat. Estat. e Econ.* 7, 165–195.