Dificuldades de Euler com o cálculo de funções de duas variáveis

João Caramalho Domingues
Centro de Matemática da Universidade do Minho
e-mail: `jcd@math.uminho.pt`

Uma das obras clássicas de Leonhard Euler é um tratado de cálculo diferencial [Euler *1755*] que constituiu um marco na sistematização desta área da matemática e na sua autonomização relativamente à geometria.

Na versão tradicional lebniziana o objecto de estudo do cálculo diferencial era a *curva* — à qual se associavam diversas *quantidades variáveis*, como a abcissa, a ordenada, o comprimento de arco, a subtangente, etc. Fazendo cada uma destas quantidades variar com diferenças *infinitamente pequenas* (*diferenciais*), tentava-se determinar a relação entre essas diferenciais.

Um aspecto desse cálculo leibiniziano que é pouco familiar aos leitores modernos é a indeterminação das diferenciais de segunda ordem [Bos *1974*]. Se, por exemplo, a relação entre a abcissa x e a ordenada y for dada por $y = x^2$, é fácil ver que a relação entre as suas diferenciais é $dy = 2x\,dx$; ora, estas diferenciais são também quantidades variáveis que podem ser diferenciadas e, aplicando a regra da diferenciação do produto, resulta

$$d^2y = 2dx^2 + 2x\,d^2x.$$

Mas é possível assumir que uma das variáveis originais varia com diferenças iguais, isto é, que a sua diferencial é constante — e, portanto, a sua segunda diferencial é nula. Se for dx constante, a expressão acima simplifica-se como

$$d^2y = 2dx^2;$$

mas, escolhendo dy constante, será

$$x\,d^2x = -dx^2.$$

[Euler *1755*] é o primeiro livro de cálculo diferencial cujo principal objecto de estudo são *funções* e não curvas. Radicalmente, não inclui aplicações geométricas e não tem qualquer diagrama ou gráfico. Neste novo paradigma, a escolha de uma diferencial constante tem uma interpretação aparentemente simples: a variável independente terá diferencial constante; as outras variáveis serão funções da primeira e terão, em geral, diferenciais não constantes.

Suplemento do Boletim da SPM 69, Outubro 2013, pp. 59-60

[Euler *1755*] é também o primeiro livro de cálculo diferencial a tratar de funções de mais do que uma variável. E é nesse contexto que aparecem duas passagens surpreendentes para o leitor moderno.

A primeira destas passagens surpreendentes surge na primeira parte do tratado, dedicada aos fundamentos e às regras de diferenciação. Se tivermos uma função de duas variáveis independentes x e y, podemos, segundo [Euler *1755*, parte I, § 246], assumir que dx é constante ou que dy é constante — mas não que são ambas constantes, pois isso implicaria uma relação entre as variáveis, da forma $y = ax + b$. (De facto, se $dx = c_1$ e $dy = c_2$, $\frac{dy}{dx} = \frac{c_2}{c_1}$ é constante.) Assim, se F for uma função de x e y, $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$ e

$$d^2F = \frac{\partial F}{\partial x}d^2x + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial F}{\partial y}d^2y + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2.$$

Se dx for constante,

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial F}{\partial y}d^2y + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2;$$

se dy for constante,

$$d^2F = \frac{\partial F}{\partial x}d^2x + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2;$$

mas não podemos assumir como válida a forma quadrática

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2.$$

No entanto, nas décadas seguintes esta forma quadrática generalizou-se. Aparece logo em [Lagrange *1759*], no seguimento da suposição de que as diferenciais de primeira ordem das variáveis independentes são todas constantes, "ce qui est permis" ("o que é permitido") — sem mais explicação.

Aparece também, por exemplo, em [Lacroix *1797*, 124] em parte associada à série de Taylor

$$F(x+h, y+k) = F(x,y) + \tfrac{\partial F}{\partial x}h + \tfrac{\partial F}{\partial y}k + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}k^2\right) + \cdots$$

A segunda passagem constitui um erro: segundo [Euler *1755*, parte II, § 290], se (a, b) for um ponto crítico de F, F tem um máximo nesse ponto se

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a,b) < 0 \text{ e } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a,b) < 0;$$

e tem um mínimo se

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a,b) > 0 \text{ e } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a,b) > 0.$$

Este erro foi corrigido em [Lagrange *1759*] (precisamente onde faz dx e dy ambas constantes). Curiosamente, Lagrange apresenta um contra-exemplo adaptado dum argumento de geometria analítica de Euler (apresentado no apêndice sobre superfícies da *Introductio in Analysin Infinitorum* de 1748).

Para entender a origem destas dificuldades, é necessário ter em conta que o cálculo diferencial de funções de duas variáveis não surgiu do estudo de superfícies, e sim de estudos (entre 1692 e 1740) de famílias de curvas, e em particular de problemas de trajectórias (por exemplo, trajectórias ortogonais a famílias de curvas) [Engelsman *1984*]. Nesse contexto, ao contrário das utilizações mais típicas do cálculo diferencial, em que se estuda o comportamento local de uma função, as duas variáveis não têm comportamentos simétricos (uma das variáveis é o parâmetro da família de curvas) e não faz sentido tomar ambas com diferenciais constantes. Além disso, não faria muito sentido pensar em famílias de curvas como representadas por gráficos-superfícies, o que mais tarde terá limitado a intuição geométrica de Euler quando iniciou a sistematização do cálculo de funções de duas variáves.

Referências

[Bos *1974*] Henk J. M. Bos, "Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus", *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 14 (1974), págs. 1–90.

[Engelsman *1984*] Steven B. Engelsman, *Families of Curves and the Origins of Partial Differentiation*, Amsterdam: Elsevier, 1984.

[Euler *1755*] Leonhard Euler, *Institutiones Calculi Differentialis*, S. Petersburgo: Academia Imperialis Scientiarum, 1755.

[Lacroix *1797*] Silvestre François Lacroix, *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, vol. 1, Paris: Duprat, 1797.

[Lagrange *1759*] Joseph-Louis Lagrange, "Recherches sur la Méthode de Maximis et Minimis", *Miscellania Taurinensia*, vol. 1 (1759), 2.ª paginação, págs. 18–32.