UMinho | 2014
Maria Lúcia Ribeiro Fertuzinhos **As tarefas de natureza investigativa na aprendizagem de conteúdos do tema Funções do 10º ano**

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria Lúcia Ribeiro Fertuzinhos

As tarefas de natureza investigativa na aprendizagem de conteúdos do tema Funções do 10º ano

outubro de 2014

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria Lúcia Ribeiro Fertuzinhos

As tarefas de natureza investigativa na aprendizagem de conteúdos do tema Funções do 10º ano

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3°ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho realizado sob orientação do
Doutor José António Fernandes

outubro de 2014

DECLARAÇÃO

Nome: Maria Lúcia Ribeiro Fertuzinhos

Endereço Eletrónico: luciafertuzinhos@gmail.com

Telemóvel: 918232616

Número do Bilhete de Identidade:

Título do Relatório:

As tarefas de natureza investigativa na aprendizagem de conteúdos do tema Funções do 10º ano

Supervisor:

Doutor José António Fernandes

Ano de conclusão: 2014

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Universidade do Minho ____/____/____

Assinatura: ____

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho marca o final de mais uma importante etapa do meu percurso académico e ao refletir sobre todo o caminho percorrido, é inevitável recordar aqueles que o entrecruzaram, os que fizeram parte do trajeto connosco ou os que estiveram sempre presentes. De entre todas estas presenças, um agradecimento:

Ao meu supervisor, professor Doutor José António Fernandes, pela disponibilidade e pelas sugestões dadas ao longo do desenvolvimento deste estudo;

À minha orientadora, professora Ana Paula Mourão, pelos conselhos durante a intervenção pedagógica e pela partilha de experiência;

Ao Doutor Floriano Viseu, pela amizade e pelas palavras reconfortantes em momentos menos bons;

A todos os meus professores que contribuíram para a minha formação;

Aos alunos da turma onde este estudo foi implementado, pelo empenho e colaboração que demonstraram;

À minha colega de estágio e amiga, Andreia, pelo companheirismo e amizade com que me acompanhou ao longo deste percurso;

À minha querida amiga, Fátima Silva, pelo apoio, amizade, por ter estado sempre presente e também pela disponibilidade em rever os textos do presente estudo;

A todos os meus amigos por fazerem parte da minha vida;

À minha família, em especial à minha avó, irmã e tia pelo encorajamento e ajuda prestados ao longo desta etapa da minha formação, por me apoiarem em todas as fases da minha vida e por fazerem de mim a pessoa que hoje sou;

Ao João pelo seu carinho e amor.

AS TAREFAS DE NATUREZA INVESTIGATIVA NA APRENDIZAGEM DE CONTEÚDOS DO TEMA FUNÇÕES DO 10º ANO

Maria Lúcia Ribeiro Fertuzinhos

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário
Universidade do Minho, 2014

RESUMO

As tarefas de investigação permitem aos alunos uma compreensão profunda da matemática e da sua natureza, pelo que a sua implementação na sala de aula reveste-se da maior importância, implicando uma dinâmica de aula que coloca novos desafios tanto aos professores como aos alunos. Assim, com este estudo procura-se compreender o papel que as tarefas investigativas assumem na aprendizagem da matemática, mais especificamente no tema Funções do 10.º ano de escolaridade, operacionalizando-se o mesmo através das três seguintes questões de investigação: (1) Tendo por referência os processos matemáticos e as fases do trabalho investigativo, que aspetos se salientam no processo de resolução de tarefas investigativas no tema Funções do 10º ano?; (2) Que dificuldades sentem os alunos na realização deste tipo de tarefas?; (3) Quais as perceções dos alunos sobre a experiência de exploração das tarefas de investigação? Tendo em vista dar resposta a estas questões, foram recolhidos dados, essencialmente através da análise das produções dos alunos e de dois questionários, um aplicado antes e outro após a experiência de ensino. Além disso, foram analisados outros documentos importantes como, por exemplo, o projeto educativo da escola e gravadas as aulas da intervenção de ensino em que foram exploradas as tarefas de natureza investigativa.

Com os dados obtidos foi possível constatar que os alunos revelaram dificuldades em entender alguns dos processos inerentes à atividade investigativa. Além disso, tendiam a valorizar um modelo de ensino tradicional, onde se limitam a ouvir os ensinamentos que lhes são transmitidos e a aplicá-los na resolução de tarefas rotineiras. Esta visão do ensino e aprendizagem da matemática, aliada à falta de hábitos de trabalho dos alunos em tarefas mais desafiantes, que apelam a níveis cognitivos mais elevados, como é o caso das tarefas investigativas, influenciou significativamente o modo como estes alunos se envolveram nas mesmas. De facto, a atividade matemática desenvolvida pelos alunos evidenciou poucas características específicas daquilo que se entende ser uma verdadeira atividade investigativa.

TASKS OF INVESTIGATIVE NATURE IN THE LEARNING OF CONTENTS OF THE SUBJECT FUNCTIONS IN THE 10TH GRADE.

Maria Lúcia Ribeiro Fertuzinhos
Master in Mathematics Teaching in the 3rd Cycle of Basic Education and Secondary Education
University of Minho, 2014

ABSTRACT

Investigation tasks allow students a deeper understanding of mathematics and its nature, so its implementation in the classroom is the best way to create a dynamic atmosphere that bring new challenges for students and their own teachers. As such, this study aims to analyze the role that investigation tasks assume in math learning, more precisely in the subject of Functions learned in the 10th grade, being operationalized through the following research questions: (1) Tasking as a reference the mathematical processes and the phases of investigative work, which aspects stand out in the resolution process of investigation tasks in the subject of Functions learned in 10th grade? (2) What difficulties the students face when performing such tasks? (3) What is the perception of the students on the exploration experience provided by the investigation tasks? In order to answer to these questions, data has been collected essentially through the analysis of students' resolutions and through the conducting of two questionnaires, one applied before the teaching experiment, and the other applied after. Furthermore, important documents have been analyzed such as the school's educative project and all of the classes where tasks of this nature were given have been recorded.

With the obtained data, it was possible to conclude that the students revealed difficulty in understanding some of the processes inherent to investigation tasks. Moreover, they revealed a tendency to value a traditional educational model where they are limited to listening to the teachings that are transmitted to them and applying them on routine tasks. This vision, along with a lack of working habits in more challenging tasks that call on higher cognitive levels such as investigation tasks, has significantly influenced the involvement of students. In fact, the mathematical activity developed by the students revealed few characteristics in common with what it is considered to be authentic investigative activity.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, que se encontra dividido em três secções, apresenta-se num primeiro momento, o tema em estudo e as questões de investigação. Na segunda secção será discutida a pertinência do estudo à luz das atuais orientações para o ensino da matemática. Por fim, faz-se uma breve descrição da estrutura do presente relatório.

1.1. Tema e questões de investigação do estudo

O tema deste estudo incide sobre a realização de tarefas investigativas na aprendizagem do tema funções do 10° ano, na disciplina de Matemática A. A escolha deste tema deve-se, essencialmente, à importância que as tarefas desta natureza assumem na aprendizagem da matemática, mas também à minha experiência enquanto aluna do ensino básico e secundário. Como aluna recordo-me que o ensino era muito baseado no cálculo, na memorização de regras e processos de resolução. O professor transmitia os conteúdos, os alunos limitavam-se a aplicá-los nos exercícios que eram propostos, sem muitas vezes compreenderem a verdadeira essência dos mesmos. Ainda que o meu gosto pela matemática e a vontade de ir mais além no estudo desta ciência não tenham sido afetados por esta metodologia de ensino, considero que as tarefas investigativas, propostas no momento oportuno, poderiam ter permitido uma compreensão mais rápida e mais aprofundada de determinados conceitos que só tardiamente descobri, assim como, contribuído para que as aulas adquirissem um caráter mais dinâmico e motivador.

Deste modo, um ensino baseado na resolução de tarefas rotineiras e no papel passivo do aluno é desajustado das necessidades colocadas por uma sociedade que se encontra em permanente mudança. Como refere Amaral (2003),

> uma aprendizagem da matemática baseada em exercícios rotineiros, privilegiando cálculos e memorizações isoladas, além de não responder às exigências colocadas hoje ao sistema de ensino, não contribui para uma melhor compreensão do que é a matemática nem constitui um pré-requisito para a sua aprendizagem. (p. 6)

Nesta perspetiva, também Matos e Serrazina (1996) referem que:

> É acentuada a Matemática que se deve ensinar e não na Matemática que se deve aprender. Demasiadas vezes são utilizados métodos expositivos, acreditando-se na eficácia da transmissão do saber, em vez de se compreender que o conhecimento

> matemático não se transmite, mas ele é essencialmente construído pelos alunos. (p. 22)

Neste âmbito, urge ultrapassar o método de ensino tradicional baseado no cálculo, na memorização de regras e processos de resolução que muitos alunos tendem a esquecer rapidamente. De acordo com as Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1991), o tipo de tarefas a propor aos alunos assume, neste contexto, um papel fundamental, devendo-se proporcionar aos alunos experiências matemáticas significativas, promotoras do desenvolvimento do seu "poder matemático", isto é, a capacidade de investigar, explorar, conjeturar e raciocinar logicamente, a capacidade de usar diversos métodos matemáticos para resolver problemas e, ainda, a confiança na sua própria capacidade de fazer Matemática.

Ao nível da aprendizagem da Matemática, tem vindo a ser destacada a ideia de que aprender Matemática deve consistir, essencialmente, em fazer Matemática, através do trabalho com tarefas investigativas e exploratórias proporcionando, por isso, aos alunos, experiências com características semelhantes às dos matemáticos profissionais, naturalmente ajustadas ao seu nível de maturidade. Tal como refere Braumann (2002):

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão "detetivesca" indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem [a] forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles. (p. 5)

Assim, as tarefas de natureza investigativa revestem-se de um elevado valor educacional, pelo que "constituem um elemento fundamental do menu educativo" (Ponte, Costa, Rosendo, Maia, Figueiredo & Dionísio, 2002, p. 4), necessitando de ocupar um lugar importante nas experiências matemáticas dos alunos.

Tendo em conta o exposto, o presente estudo focaliza-se no papel que as tarefas investigativas assumem na aprendizagem da Matemática, mais especificamente no tema Funções do 10° ano. Para tal, pretende-se averiguar o modo como os alunos se envolvem na realização deste tipo de tarefas, as dificuldades que sentem e as aprendizagens que concretizam.

Tendo em vista uma maior operacionalização do estudo, formularam-se as seguintes três questões de investigação:

1. Tendo por referência os processos matemáticos e as fases do trabalho investigativo, que aspetos se salientam no processo de resolução de tarefas investigativas no tema Funções do 10º ano?

2. Que dificuldades sentem os alunos na realização deste tipo de tarefas?

3. Quais as perceções dos alunos sobre a experiência de exploração das tarefas de investigação?

1.2. Pertinência do estudo

Nas últimas décadas tem-se assistido a mudanças significativas ao nível do sistema educativo. Como salienta Brocardo (2001), uma delas tem sido conceber uma escola inclusiva, em paralelo com as discussões que têm surgido em torno das competências matemáticas de que os jovens de hoje necessitam para a sua vida profissional e para exercerem uma cidadania ativa num mundo cada vez mais matematizado. Embora sem serem totalmente conclusivas, tem-se progredido no desenvolvimento de alguns consensos.

É reconhecido por toda a comunidade de educação matemática que é essencial que os alunos tenham uma formação matemática sólida e que o processo de ensino-aprendizagem deve incluir a compreensão das características da Matemática como modo de pensar e como atividade humana. Paralelamente, reconhece-se também que a aprendizagem da matemática não pode, de todo, ser apenas um processo em que os alunos têm contacto com um "produto final" e deve incluir oportunidades de viverem uma atividade matemática genuína (NCTM, 1991).

Além disto, vivemos numa época em que a grande maioria dos alunos tem disponíveis calculadoras e computadores que rapidamente efetuam cálculos. Assim sendo, também não faz qualquer sentido um ensino da Matemática focado nas técnicas de efetuar esses cálculos. Não quer isto dizer que estas técnicas devam ser menosprezadas pois, obviamente que é importante que os alunos as percebam de modo a que tenham espírito crítico para analisar os resultados que lhes são dados. Tal como refere Sebastião e Silva, na entrevista ao Diário de Notícias em 23 de janeiro de 1968:

> Uma vez que a máquina vem substituir o homem progressivamente em trabalhos de rotina, não compete à escola produzir homens-máquinas mas, pelo contrário, formar seres pensantes, dotados de imaginação criadora e de capacidade de adaptação em grau cada vez mais elevado. (n. p.)

Mais ainda, e como já foi referido, a prática de um ensino incidindo na resolução de tarefas rotineiras não acompanha as necessidades colocadas pela sociedade, que cada vez mais exige uma maior flexibilidade e capacidade de adaptação.

Como refere nas Normas (NCTM, 1991), ser "matematicamente literado" tem hoje um sentido completamente diferente do que tinha há algumas décadas atrás. Assim, o ensino da matemática deve propiciar o desenvolvimento do "poder matemático" dos alunos, uma vez que é fundamental que estes tenham uma formação matemática que lhes permita interpretar, analisar e intervir criticamente na sociedade.

Os alunos têm de "ser matematicamente competentes", revelando, além de muitas outras atitudes, "a predisposição e a aptidão para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar as situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjeturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica" (Ministério da Educação, 2001a, p. 3). Partindo do pressuposto que o estudante é o agente da sua aprendizagem, o Programa de Matemática A do Ensino Secundário (Ministério da Educação, 2001b) destaca também a importância das atividades a selecionar, as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o estudante a intuir, experimentar, conjeturar e provar. Nesta perspetiva, as tarefas de investigação apresentam-se como uma metodologia privilegiada de envolver os alunos na atividade matemática, permitindo-lhes o contacto com uma atividade diferente daquela que frequentemente estão habituados (memorização e resolução repetitiva de exercícios).

Com uma lente construtivista, e em relação às atividades de investigação, Vergnaud, citado por Gravina e Santarosa (1998), afirma:

> Um dos maiores problemas na Educação decorre do facto que muitos professores consideram os conceitos matemáticos como objetos prontos, não percebendo que estes conceitos devem ser construídos pelos alunos... De alguma maneira os alunos devem vivenciar as mesmas dificuldades conceituais e superar os mesmos obstáculos epistemológicos encontrados pelos matemáticos... Solucionando problemas, discutindo conjeturas e métodos, tornando-se conscientes das suas conceções e dificuldades, os alunos sofrem importantes mudanças nas suas ideias... (p. 6)

Deste modo, não podemos dissociar as atividades investigativas do contexto escolar, tornando-se perentório que se mudem determinadas mentalidades, isto é, que se deixe de olhar para o conhecimento como sendo um pacote a ser veiculado do professor para o aluno (Matos & Serrazina, 1999), que se abandone a visão na qual os alunos são considerados como meros "recipientes a encher" e que armazenam, passivamente, a informação que lhes é transmitida. Aliás, nem é este o papel que, atualmente, se espera do professor, mas sim o de "dar a cana e ensinar a pescar".

De facto, a aprendizagem é um processo de construção ativa de conhecimento por parte dos alunos, que ao entrar na escola possuem conhecimentos de matemática, que apesar de pouco rigorosos, não podem ser totalmente ignorados, pois a aprendizagem processa-se dando significado às coisas que se conhecem, isto é, a partir de toda a experiência anterior (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999). A aprendizagem é um processo de construção de ideias que ocorre diariamente na vida escolar de um aluno, e é na sala de aula que estes vivem grande parte da sua experiência matemática, desenvolvendo, deste modo, o significado que dão à Matemática. Como tal, "as aulas de Matemática devem espelhar esta imagem da Matemática como uma atividade com sentido" (Schoenfeld, 1992, p. 340).

Contudo, como refere Richards, citado por Gravina e Santarosa (1998) "os alunos não se tornam aprendizes ativos por acaso, mas por desafios projetados e estruturados, que visem a exploração e a investigação" (p. 6). A atividade investigativa assume um papel preponderante, constituindo uma parte essencial da atividade matemática, estando, por um lado, relacionadas com a produção de conhecimento matemático e, por outro, ligadas à própria natureza desta ciência.

Todavia, apesar de existirem diversos documentos curriculares e estudos a salientarem a importância de integrar, nas aulas de matemática, tarefas desta natureza dado as potencialidades desta experiência ao nível da aprendizagem da matemática, a verdade é que a atividade investigativa é, hoje, muitas vezes esquecida na prática letiva. Assim, como futura professora considero importante conhecer o modo como os alunos se envolvem na exploração deste tipo de tarefas, bem como experienciar os constrangimentos, dificuldades, desafios que os professores de matemática enfrentam quando tentam integrar as tarefas investigativas nas atividades que pretendem desenvolver.

1.3. Estrutura do relatório

O presente relatório de estágio encontra-se dividido em cinco capítulos. No primeiro capítulo – *Introdução* – apresenta-se o tema em estudo, o objetivo e respetivas questões de investigação. Além disso, justifica-se a sua pertinência à luz das atuais orientações para o ensino da matemática.

No capítulo II – *Enquadramento Teórico* – que se encontra dividido em quatro subcapítulos, apresenta-se o quadro teórico que serve de pilar a este estudo. No primeiro subcapítulo – *A Natureza das tarefas* – discute-se a importância dos diferentes tipos de tarefas na aprendizagem dos conteúdos matemáticos. No segundo subcapítulo – *A integração das tarefas investigativas no currículo* – faz-se uma descrição sucinta sobre a evolução do ensino da matemática, tendo-se particular atenção para o momento em que as tarefas de investigação foram integradas no processo de ensino e aprendizagem. No terceiro subcapítulo – *Diferentes perspetivas para clarificar o conceito de investigação* – descreve-se as perspetivas de vários autores de modo a elucidar o que se entende por investigação matemática. No quarto subcapítulo – *Dificuldades dos alunos na realização das tarefas investigativas* – analisam-se as principais dificuldades dos alunos quando realizam atividades de natureza investigativa.

No capítulo III – *Enquadramento Contextual* – que se encontra dividido em dois subcapítulos, descreve-se o contexto onde decorreu o estudo e o plano geral da intervenção. No primeiro subcapítulo – *Contexto de Intervenção* – é feita uma breve caracterização da escola e da turma onde decorreu a intervenção pedagógica. No segundo subcapítulo – *Plano geral de Intervenção* – apresentam-se as metodologias de ensino e aprendizagem usadas durante a fase de intervenção, bem como as estratégias de investigação e de avaliação da ação pedagógica.

O capítulo IV – *Intervenção* – organiza-se em três subcapítulos. No primeiro subcapítulo – *Perceções dos alunos antes da intervenção pedagógica* – estudam-se as perceções dos alunos sobre a matemática, as tarefas que habitualmente exploram, o modo como geralmente trabalham e os recursos que utilizam nas aulas de matemática. No segundo subcapítulo – *A intervenção pedagógica* – analisam-se os processos matemáticos utilizados pelos alunos na exploração das tarefas de investigação. No terceiro subcapítulo – *Perceções dos alunos após a intervenção pedagógica* – analisam-se as opiniões dos alunos em relação à estratégia de ensino e aprendizagem.

No capítulo V – *Conclusões, Limitações e Recomendações* – apresentam-se e discutem-se as principais conclusões do estudo com vista a responder às questões de investigação que o orientaram. Apresenta-se ainda uma reflexão sobre as limitações deste estudo, bem como são feitas algumas recomendações para eventuais trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Este capítulo destina-se à fundamentação teórica deste estudo à luz da literatura existente e estrutura-se nos quatro seguintes subcapítulos: A natureza das tarefas; A integração das tarefas investigativas no currículo; Diferentes perspetivas para clarificar o conceito de investigação e, por fim, As dificuldades dos alunos na resolução de tarefas investigativas.

2.1. A natureza das tarefas

A natureza das tarefas propostas pelo professor e das atividades realizadas pelos alunos é um fator decisivo na dinâmica da aula de Matemática e, deste modo, no processo de ensino-aprendizagem (Ponte, 2005). Relativamente à atividade dos alunos na aula de matemática, a APM (1988) aponta tratar-se de:

> uma questão central no ensino desta disciplina. A aprendizagem da Matemática é sempre produto da atividade, e se esta se reduz, por exemplo, à resolução repetitiva de exercícios para aplicação de certas fórmulas, é exatamente isto que se aprende e vai perdurar, enquanto ficar a memória das fórmulas. Além disso, essa é a imagem adquirida da matemática. (p. 13)

Assim, o professor assume um papel preponderante na escolha das tarefas a propor, devendo selecionar tarefas motivadoras e matematicamente desafiantes, que promovam o desenvolvimento da predisposição de todos os alunos para fazer matemática. As tarefas devem espelhar uma matemática sólida, significativa e com sentido aos olhos dos alunos.

Na perspetiva de Ponte (2005), as tarefas podem ser classificadas tendo em conta duas dimensões fundamentais: o grau de desafio, que se relaciona com a dificuldade da questão, e o grau de estrutura que "varia entre os polos "aberto" e "fechado". Uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas" (Ponte, 2005, pp. 7-8). Cruzando estas duas dimensões obtém-se quatro quadrantes, com os exercícios, problemas, explorações e investigações, como podemos observar na Figura 1.

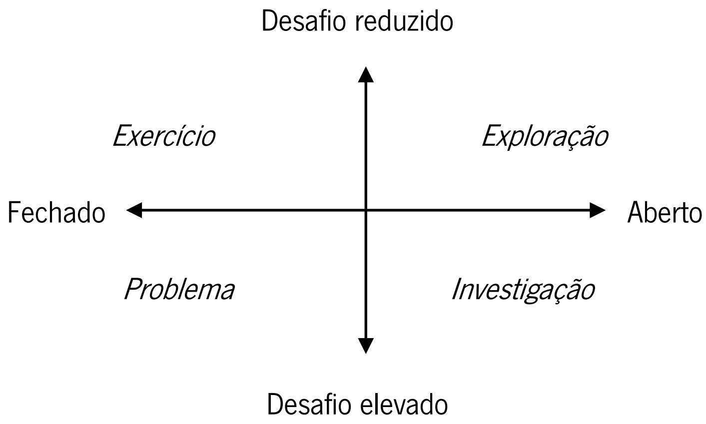


Figura 1. Relação entre os diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, p. 5).

Os exercícios e os problemas aparecem como sendo tarefas fechadas, isto é, todos os dados necessários para a sua resolução estão presentes no respetivo enunciado. Um exercício é meramente a aplicação direta de um conteúdo, exigindo, por isso, um raciocínio matemático de baixo nível. Um estudo desenvolvido pela Associação Portuguesa de Matemática (APM, 1998) inquiriu os professores sobre situações de trabalho que usam com mais frequência nas suas aulas. Nesse estudo, o exercício surge como sendo a tarefa mais usada pelos professores do 2° e 3° ciclos do ensino básico, como também pelos professores do ensino secundário. Embora os exercícios sejam importantes na aprendizagem da matemática, o seu uso excessivo tende a limitar a aquisição e aplicação de conhecimentos matemáticos (Burton, 1984; Lampert, 1990) visto apenas exigirem a reprodução de técnicas e algoritmos básicos.

Do ponto de vista de Christiansen e Walther (1986), este tipo de tarefas "causa uma sobrevalorização dos produtos em detrimento dos processos na aprendizagem da Matemática" (p. 4), pelo que impedem os alunos de desenvolverem capacidades de nível superior. Nesta perspetiva, também Ponte (2005) refere que reduzir a aprendizagem da matemática à mera resolução de exercícios, leva ao empobrecimento do grau de desafio na aula, contribuindo para a desmotivação dos alunos.

Também Sebastião e Silva (1978) refere que "é preciso combater o excesso de exercícios que, como um cancro, acaba por destruir o que pode haver de nobre e vital no ensino" (p. 11). Este autor considera ainda que a "obsessão pelo exercício", dado o seu carácter rotineiro, não contribui para "estimular o bom senso e o bom gosto do aluno", habituando-o "a não pensar e destruindo nele toda a iniciativa e toda a espontaneidade para a resolução de problemas novos como os que são postos a cada passo pela ciência, pela técnica e pela vida corrente" (Silva, 1975, p. 4).

O problema distingue-se do exercício por possuir um grau de desafio mais elevado, o que faz com que o aluno não tenha, à partida, a perceção da solução ou do processo de resolução. Assim, o aluno tem que interpretar o problema e desenvolver uma estratégia de resolução, o que lhe permite pensar por si próprio e desenvolver capacidades de raciocinar logicamente.

As tarefas de exploração e as de natureza investigativa distinguem-se pelo grau de dificuldade exigido na sua resolução. De acordo com Ponte (2005), é suposto que uma tarefa de exploração tenha um grau de dificuldade menor, acrescentando ainda que, muitas vezes, a diferença de uma para a outra está na facilidade/dificuldade de planeamento da tarefa. Apesar disto, ambas são tarefas de carácter aberto, pois caracterizam-se pelo grau de abertura existente quer nas estratégias de resolução, quer nos resultados a que permitem chegar. É dada a possibilidade aos alunos de formularem as suas próprias questões e de serem responsáveis por delinear os objetivos a que pretendem chegar, sendo estes os aspetos mais inovadores e característicos da atividade investigativa e exploratória.

Para Yeo (2007), as tarefas de natureza investigativa aparecem como sendo tarefas matematicamente ricas, como podemos observar na Tabela 1.

Tabela 1 – Classificação das tarefas segundo Yeo (2007)

Tarefas matematicamente ricas	Tarefas analíticas	Investigações Problemas Explorações/Descobertas
	Tarefas de síntese	Propostas pelos alunos
Tarefas matematicamente pobres	Procedimentos e regras	Cálculos e tarefas rotineiras

Ao contrário das tarefas matematicamente pobres, que apenas têm como finalidade proporcionar aos alunos momentos para a prática de conhecimentos, isto é, para aplicação de algoritmos de cálculo, as tarefas investigativas pressupõem um índice cognitivo e de raciocínio mais elevado. Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997) caracterizam uma tarefa investigativa como sendo "uma questão aberta, de cunho problemático (...) O aluno tem de formular conjeturas, testá-las e eventualmente demonstrá-las" (p. 76). Os autores afirmam ainda que este tipo de tarefas "favorece o desenvolvimento do espírito de observação e do sentido crítico, a capacidade de sistematização de resultados parcelares, bem como as capacidades de argumentação e abstração" (p. 76).

Perante uma tarefa investigativa, Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira (1999a), identificam quatro etapas que os alunos têm de percorrer. Em primeiro lugar, têm de formular a questão a investigar, para posteriormente formularem conjeturas relativamente a essa questão. Em seguida, devem testar as conjeturas e, eventualmente, reformulá-las. Por fim, validar e comunicar os resultados a que chegaram. Assim, o enunciado de uma tarefa investigativa deve ser pouco definido, não sendo rígidas as questões que orientam a investigação, cabendo ao aluno definir o caminho que pretende seguir, colocar as suas próprias questões, conjeturando uma ou mais hipóteses, com vista a clarificar a situação inicial (Ponte & Matos, 1996).

Em suma, a natureza das tarefas tem implicações significativas na forma como os alunos se envolvem na construção do seu conhecimento matemático (Viseu & Oliveira, 2012), pelo que cabe ao professor a construção de ambientes de aprendizagem ricos e estimulantes onde os alunos possuam um papel ativo no processo de descoberta e construção do saber. Tal como referem Abrantes, Ponte, Fonseca e Brunheira (1999), "valorizar as atividades matemáticas de natureza exploratória e investigativa corresponde, em grande parte, a propor situações de trabalho abertas e desafiantes em que os alunos encontram condições e estímulo para desempenhar este papel" (p. 3).

2.2. A integração das tarefas investigativas no currículo

As tarefas investigativas nem sempre tiveram a importância que atualmente têm nas experiências matemáticas dos alunos, tendo vindo a ganhar terreno a partir dos anos 80/90.

De facto, no início do século XX, a matemática era vista como uma "disciplina do cérebro e da inteligência" (Abrantes, 1994, p. 15) e o seu ensino pretendia unicamente promover "as capacidades desejáveis naqueles que viessem a ocupar cargos de chefia; a formação matemática para a maioria dos alunos não existia ou limitava-se à aritmética elementar" (Abrantes, 1994, pp. 15-16). Como podemos observar, para além do acentuado caráter elitista do seu ensino, este baseava-se na aritmética e no treino de capacidades rotineiras de cálculo. Deste modo, e até aos anos 50, os estudantes limitavam-se a memorizar factos e procedimentos, não compreendendo os conceitos ou as técnicas inerentes aos mesmos (Schoenfeld, 1991). Contudo, nos finais da década de 50, surgiu uma época de modernização do ensino da matemática. Este movimento pretendia potenciar uma melhoria da compreensão ao nível da aprendizagem da Matemática, bem como implementar mudanças metodológicas em que os alunos assumissem "um papel ativo e pudessem redescobrir, por eles próprios, os conceitos" (Brocardo, 2001, p. 52).

Estas ideias chegaram a Portugal na década de 60, sendo Sebastião e Silva o impulsionador de uma fase experimental no ensino da Matemática. Na perspetiva de Sebastião e Silva, o papel do aluno e do professor deveriam forçosamente de mudar, uma vez que

> A modernização do ensino da matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos alunos é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método ativo, estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta. (Sebastião e Silva, 1975, p. 11)

Assim, a mudança não se centrou apenas nos conteúdos e incidiu também numa reflexão sobre os métodos de ensino. Tal como refere Guimarães (2005), pretendia-se encontrar uma harmonia entre o concreto e o abstrato, um equilíbrio entre a intuição e a lógica, a memorização e a compreensão, o exercício rotineiro e a tarefa mais desafiante, sem se deixar de parte também a importância da relação da Matemática com as outras áreas do saber. Porém, não se caminhou favoravelmente para a valorização dos métodos de ensino, chegando-se à conclusão que os alunos estavam a perder aptidões.

A situação que se viveu no ensino durante a década de oitenta despoletou o surgimento de vários debates acerca dos problemas relacionados com a renovação do currículo. Destes surgiram determinadas orientações, onde se destaca que o ensino da matemática devia valorizar, de forma equilibrada, os domínios cognitivos, afetivo e social, realçando-se os processos e as atividades matemáticas. Deste modo, deviam propor-se atividades que permitissem aos alunos a exploração, a formulação de conjeturas e a prova matemática, promovendo-se a comunicação oral e escrita, o raciocínio indutivo e a reflexão (APM,1988; Brocardo, 2001). Assim, começou a olhar-se para o ensino e aprendizagem da matemática com uma lente construtivista, concluindo-se que os alunos só adquirem ou renovam as suas conceções matemáticas quando confrontados com tarefas investigativas e não com atividades rotineiras. Concluiu-se também que o ensino da Matemática, até à época, regulava-se apenas por um domínio absoluto de tarefas que exigiam níveis cognitivos muito baixos, isto é, que apelavam à memorização de factos e algoritmos, bem como à mera reprodução de técnicas de resolução de exercícios pré-estabelecidos (APM, 1988).

Fazendo referência aos processos inerentes à atividade investigativa, a APM (1988) afirma que:

> explorar, investigar e analisar situações, discutir entre si e com o professor as várias estratégias e processos de trabalhar, formular e resolver problemas, inventar nova terminologia, expor e argumentar em defesa das conclusões a que vão chegando, redigir os resultados e compará-los eventualmente com os de outros alunos ou grupos de alunos é um fator que pode ser realmente decisivo na transformação positiva da Matemática escolar (p. 47).

Pode, portanto, constatar-se a tendência e vontade para alterar o panorama do ensino/aprendizagem da matemática em Portugal, bem como a existência de referências, ainda que implícitas, à atividade investigativa.

Contudo, de acordo com Brocardo (2001), "é sobretudo nos anos 90, que se procura dar ênfase à concretização da linha de ação delineada nas duas décadas anteriores" (p. 59). Deste modo, as tendências de orientação e renovação curricular foram consideradas no processo de ensino e aprendizagem da matemática, sendo os professores "os principais protagonistas na mudança dos processos pelos quais a Matemática é ensinada e aprendida nas escolas" (NCTM, 1994, p. 2).

As atividades investigativas surgem, nos programas de Matemática, como metodologia com inúmeras vantagens curriculares, quer para os alunos, que adquirem as competências pretendidas, quer para os professores, como meio de inovação pedagógica. O Currículo Nacional do Ensino Básico, publicado em 2001, sugere que o ensino deve centrar-se no desenvolvimento de competências e experiências de aprendizagem. Mais do que a aprendizagem dos conteúdos, o ensino da matemática devia proporcionar o desenvolvimento de atitudes, valores e capacidades, que possibilitassem aos alunos a mobilização dos conteúdos adquiridos em situações concretas. Neste documento pode ler-se ainda que o desenvolvimento das competências matemáticas é possível "através de uma experiência matemática rica e diversificada" (p. 67), na qual se inclui as atividades de investigação. As atividades de investigação foram explicitamente referidas da seguinte forma:

> Numa atividade de investigação, os alunos exploram uma situação aberta, procuram regularidades, fazem e testam conjeturas, argumentam e comunicam oralmente ou por escrito as suas conclusões. Qualquer tema da matemática pode proporcionar ocasiões para a realização de atividades de natureza investigativa. Este tipo de atividades também é favorável à ligação da matemática com outras áreas do currículo (Ministério da Educação, 2001a, p. 68).

Também o Programa de Matemática A do Ensino Secundário (2001b) sugere que os alunos devem envolver-se em atividades de cariz investigativo, já que devem "formular generalizações a partir de experiências", "validar conjeturas, fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados" (p. 4). Mais ainda, pode ler-se que, sempre que possível, "os estudantes devem ser envolvidos em atividades de natureza investigativa genérica ou ligada a problemas de interesse histórico" (p. 21), visto que

> estes temas, incluídos em experiências variadas, são facilitadores de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, pelas oportunidades de formular e testar conjeturas e analisar contraexemplos, de avaliar a validade de raciocínios e de construir demonstrações. (p. 21)

Ao nível dos conteúdos programáticos do tema funções, no 10º ano, os estudantes deparam-se com o estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos para a função quadrática e função módulo, concluindo o seu estudo com as funções polinomiais. Como indicação metodológica é sugerido que "no estudo das famílias de funções os estudantes podem realizar pequenas investigações" (Ministério da Educação, 2001b, p. 28), já que estas atividades facilitam a aprendizagem.

Mais ainda se salienta que são diversos os estudos empíricos que vêm comprovar que a realização deste tipo de tarefas pode propiciar o desenvolvimento de capacidades de nível superior, bem como promover aprendizagens significativas. O estudo desenvolvido no Projecto Matemática Para Todos (MPT) mostra que os alunos envolvem-se, significativamente, na realização de tarefas desta natureza, tendendo a assumir um papel cada vez mais ativo e autónomo nas aulas.

Num estudo com alunos do 6.º ano, Segurado (1997) concluiu que as tarefas exploratórias e investigativas proporcionam aos alunos um ambiente rico e estimulante, no qual se sentem motivados e empenhados. Os alunos ao exprimirem as suas ideias e ao ouvirem as dos colegas, ao discutirem estratégias, ao argumentarem e defenderem as suas opiniões desenvolvem processos de raciocínio necessários à construção e compreensão dos conceitos matemáticos. A autora salienta ainda que a investigação permite uma

> Intima relação entre os conteúdos ensinados e os processos de raciocínio. Ao mobilizarem conhecimentos anteriormente adquiridos dão-lhes um outro significado contribuindo desta forma para uma melhor apropriação destes pelos alunos (p. 135)

Além disso, a autora observou que houve um progresso no que toca à capacidade de comunicação matemática, tendo a argumentação assumido um lugar de destaque. No final do estudo, os quatro alunos envolvidos alteraram as conceções que tinham em relação à matemática.

Também Dias, Viseu, Cunha e Martins (2013), num estudo com alunos do 11.º ano de escolaridade, concluíram que as tarefas de estrutura aberta possibilitam o envolvimento de alunos mais desmotivados e com problemas de aprendizagem. Segundo os autores, a resolução de tarefas mais desafiantes proporciona uma maior cooperação entre os alunos, permitindo o desenvolvimento de competências de argumentação matemática. Estes resultados vão ao encontro dos obtidos por Oliveira, Segurado, Ponte e Cunha (1999) que apontam que tarefas de natureza aberta são apropriadas para todos os alunos e não apenas para os com melhor desempenho devido à possibilidade que os alunos têm de formular e discutir as ideias em conjunto.

Ao analisar as interações dos alunos na resolução de problemas e de tarefas investigativas, Fonseca (1999) concluiu que esta metodologia de trabalho cria um ambiente de sala de aula onde se promove o fazer matemática, a comunicação, a cooperação e a autonomia dos alunos. Tanto na resolução de problemas como na realização de investigações, os alunos envolvem-se em atividade matemática. Contudo, na realização de tarefas investigativas "acedem a níveis mais amplos da atividade, quando tomam decisões sobre o que vão fazer ou quando se envolvem em processos de aprofundamento e generalização" (p. 126).

Também Azevedo (2009) desenvolveu um estudo onde procurou compreender os processos de raciocínio usados por três alunos do 10.º ano na resolução de problemas e em tarefas de exploração e investigação, com recurso à utilização da calculadora gráfica, no trabalho sobre funções. A autora concluiu que a exploração e a investigação possibilitam o desenvolvimento de capacidades nos alunos como a identificação de regularidades, formulação, teste e justificação de conjeturas, sendo que simultaneamente desenvolvem a capacidade de comunicar matematicamente.

Num outro estudo, Fonseca (2000) analisou os processos matemáticos utilizados por alunos do 10.º ano na realização de tarefas de investigação nas aulas de Matemática, assim como o discurso promovido nas mesmas, observando que os alunos se foram tornando cada vez mais autónomos, passando a valorizar não só os resultados que obtinham mas também os processos que tinham utilizado.

Por fim, no estudo de Brocardo (2001), com alunos do 8.ºano de escolaridade, a exploração continuada de tarefas investigativas foi uma experiência motivadora que facilitou a compreensão dos conteúdos matemáticos.

Em síntese, como os diversos estudos mostram, as tarefas de investigação constituem uma poderosa ferramenta educacional possuindo várias potencialidades ao nível da aprendizagem da matemática.

2.3. Diferentes perspetivas para clarificar o conceito de investigação

Para alguns autores (Pólya, 1981, Lakatos, 1984), as investigações matemáticas ou tarefas de investigação, constituem parte do que designam por atividade matemática, outros procuram esclarecer este conceito comparando as suas características com as de diferentes atividades, tais como a resolução e formulação de problemas (Ernest, 1996, Frobisher, 1994).

Além disso, outros investigadores em educação matemática (Pirie, 1987, Oliveira, 1998) procuram caracterizar o que é uma investigação a partir dos processos matemáticos que nela estão envolvidos e nas suas relações.

2.3.1. As tarefas investigativas e a atividade matemática

Na aula de matemática, o que os alunos aprendem advém sobretudo da atividade que realizam, assim como da reflexão que executam acerca da mesma. Deste modo, as tarefas são importantes, não pela sua essência mas pela atividade que podem provocar (Christiansen & Walther, 1986). Assim, de acordo com estes autores, a atividade relaciona-se com as ações dos alunos na execução das tarefas que lhes são propostas.

Também, na perspetiva de Ponte *et al.* (1997), existe uma distinção entre tarefa e atividade matemática, considerando que as tarefas propostas são exteriores ao aluno e estes ao interpretá-las realizam determinadas ações, com mais ou menos entusiasmo, estando, assim, a desenvolver a sua atividade matemática.

Ponte e Serrazina (2000) propõem a seguinte distinção:

> As tarefas matemáticas que o professor propõe aos alunos (...) constituem o ponto de partida para o desenvolvimento da sua atividade matemática. A atividade do aluno, tanto física como mental diz respeito ao que ele faz num dado contexto. Qualquer atividade inclui a execução de numerosas ações. O objetivo da atividade é precisamente a tarefa, algo exterior ao aluno. Uma tarefa, embora seja na maior parte dos casos proposta pelo professor, tem de ser interpretada pelo aluno e pode dar origem a atividades muito diversas – ou nenhuma atividade – conforme a

disposição deste e o ambiente de aprendizagem da sala de aula. Assim, a atividade é realizada pelo aluno e constitui a base fundamental da sua aprendizagem (p. 112).

No que respeita à atividade investigativa, Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) defendem que é esta que

> ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjeturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação dos resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor (p. 23).

São vários os matemáticos que consideram que o envolvimento dos alunos em tarefas de investigação é extremamente importante no processo de construção do conhecimento matemático (Bento Jesus de Caraça, Pólya, Lakatos, etc...).

> [Os alunos podem ter] um sabor da Matemática em construção e do trabalho criativo e independente... [Eles podem] generalizar a partir da observação de casos, [usar] argumentos indutivos, argumentos por analogia, reconhecer ou extrair um conceito matemático de uma situação concreta. (Pólya, 1981, pp. 157 e 101)

Brocardo (2001), da análise que faz a Pólya (1965), refere que os alunos só poderão perceber o empreendimento humano que é a Matemática se a sua experiência for consistente com a forma como ela se desenvolve. Aprender Matemática é fazer Matemática. Pólya (1945) chama também a atenção para as duas facetas da Matemática: "A Matemática tem duas faces; é a ciência rigorosa de Euclides, mas também é algo mais... a Matemática em construção aparece como uma ciência experimental, indutiva"(p. vii). Desta forma, a visão da Matemática como um corpo de conhecimentos construídos de forma lógica e dedutiva, caracterizados pelo rigor absoluto, é muito limitadora. Esta perspetiva é defendida por Caraça (1958):

> A Ciência pode ser encarada sob dois aspetos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspeto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi *sendo elaborada*, e o aspeto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições (...) Encarada assim, aparece-nos como um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas. (p. xiii)

É, portanto, necessário olhar para a matemática como uma atividade humana, adotando uma postura falibilista (Lakatos, 1984; Lampert, 1990; Ernest, 1996;). Assim, os processos de criação e descoberta, a tomada de decisões e a negociação de sentido assumem particular importância.

> Nenhum dos períodos 'criativos' e praticamente nenhum dos períodos 'críticos' das teorias matemáticas poderia ser admitido no paraíso formalista, onde as teorias matemáticas são apresentadas como safiras, purificadas das incertezas terrestres (Lakatos, 1984, p. 2).

A Matemática é, portanto, um produto do pensamento humano, é uma construção social, falível em algumas situações. Assim, é imprescindível que a atividade matemática dos alunos consista em experienciar um tipo de trabalho como o dos matemáticos profissionais (Brocardo, 2001). Como refere Ernest (1996), aprender matemática pode ser uma atividade criativa que não é qualitativamente diferente da atividade dos matemáticos. Igualmente, Hirsh (1971) salienta que "se podem e devem proporcionar oportunidades em matemática, em todos os níveis, que conduzam à produção de trabalho que pode ser considerado original e criativo" (p. 27). Na mesma linha de ideias, Hatch (1995) defende ainda "que as crianças, pelo menos durante parte da sua aprendizagem, criem a sua própria matemática" (p. 37).

Recordemos o exemplo de Andrew Wiles que provou um teorema que tinha desafiado os matemáticos durante 350 anos.

> Desde que pela primeira vez encontrei o último teorema de Fermat, em criança, ele tem sido a minha maior paixão ... Tive um professor que realizara investigações em Matemática e que me emprestou um livro sobre Teoria de Números, que me deu algumas pistas sobre como começar a atacá-lo. Para começar, parti da hipótese de que Fermat não conhecia muito mais Matemática do que a que eu aprendera. (Singh, 1998, p. 93)

Este testemunho encerra dois aspetos significativos, por um lado, o professor de matemática que deu atenção ao interesse do aluno. Por outro lado, mostra a influência motivadora que os bons problemas podem ter. Existe uma enorme variedade de tarefas igualmente interessantes e acessíveis a alunos de níveis mais elementares que os podem seduzir e despertar para a matemática.

Também um professor de uma escola americana refere que, numa turma de Geometria do 9º ano, os alunos fazem frequentemente descobertas, em consequência de trabalhos de cunho investigativo com a utilização de *software* dinâmico para o estudo da geometria. Muitas conjeturas foram produzidas, algumas provadas e outras que continuam ainda em aberto, levando os alunos a continuarem as suas investigações nos anos seguintes e a partilhá-las com o professor (Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira e Oliveira, 1999b).

Um outro exemplo foi o matemático indiano Srinivasa Ramanujan (1887-1920) que não tendo recebido formação matemática e dispondo de um número reduzido de livros, foi um dos matemáticos mais criativos da sua época, apresentando resultados notáveis. De acordo com Hardy, que com ele conviveu, Ramanujan para atingir os seus resultados recorreu à demonstração, intuição e indução sem, contudo, saber explicar logicamente estes processos (Ponte *et al.*, 1999b).

> Era impossível pedir a este homem que se submetesse a uma instrução matemática, que começasse a aprender de novo Matemática desde o princípio. Temia, além disso, que se insistisse indevidamente em matérias que Ramanujan considerava fastidiosas podia destroçar a sua confiança e romper o encanto da sua inspiração. (citado em Newman, 1974, p. 87)

Contudo, este paralelismo entre atividade matemática do aluno e a do matemático profissional é questionável para alguns matemáticos. Entre eles, Poincaré (1996) considera que a atividade matemática criadora só pode ser vivida pelos matemáticos e não por outras pessoas, mesmo que estas sejam capazes de compreender e aplicar a matemática.

Marques e Praia (1991) referem que "nem a aula é um espaço onde ocorre produção científica, nem onde, ao nível da investigação aí realizada, exista grande complexidade instrumental e metodológica" (p. 13). Assim, na perspetiva destes autores, não existe equivalência entre o trabalho do cientista e a investigação realizada na sala de aula.

Contudo, é importante salientar que "os conhecimentos que o matemático possui, os processos de que faz uso, o grau de especialização que atinge, o tempo e o interesse que dedica à sua atividade são em dimensão incomparáveis com os do aluno" (Ponte *et al.,* 1999b, p. 14). De acordo com Hadamard (1945) existe apenas "uma diferença de grau, uma diferença de nível" (p. 104) entre o trabalho do aluno e o dos matemáticos. Braumann (2002) refere que os alunos, ao realizarem tarefas investigativas, podem descobrir relações da Matemática, socorrendo-se dos processos comuns utilizados pelos matemáticos. Deste modo, enquanto o conhecimento resultante da investigação dos matemáticos profissionais poderá trazer ao mundo novos resultados, o conhecimento resultante da investigação do aluno é um enriquecimento para ele próprio e para os seus colegas de turma. Assim, apesar de não construírem conhecimento matemático novo, tudo o que descobrem é novo para eles. Na perspetiva do mesmo autor, "não estamos a falar de descobertas novas para o capital científico da Matemática, mas sim de descobertas novas para o capital científico do estudante" (p. 21).

Hilbert e Carpenter (1992) salientam que quando os alunos constroem o seu próprio conhecimento, em vez de o receber pelo professor ou pelo manual, criam as suas próprias redes de representações, estabelecendo conexões entre elas.

2.3.2. As tarefas investigativas e problemas

O conceito de investigação é problemático, uma vez que, por um, lado descreve um processo: a ação de investigar, a procura, e, por outro lado, o termo investigação é um substantivo, o que explica a sua utilização num sentido mais estrito, relacionando-o com a situação matemática inicial, questão que serve de ponto de partida, isto é, com a tarefa propriamente dita (Ernest, 1996).

Contudo, este autor considera que há características que permitem explicitar o que se entende por investigação ou tarefa investigativa, salientando as diferenças que partilham com os problemas. Enquanto que na resolução de problemas as questões estão formuladas à partida, nas tarefas investigativas esse é o primeiro passo a desenvolver. Uma outra diferença entre problemas e tarefas investigativas assenta numa distinção em relação aos objetivos de cada uma das tarefas. Num problema, procura-se atingir um ponto não imediatamente acessível. Numa investigação, o objetivo é a própria exploração realizada pelo aluno. A este propósito, o autor invoca a metáfora geográfica que ajuda a diferenciar os problemas das investigações, uma vez que nestas "a ênfase está em explorar um terreno desconhecido, mais do que a viagem com um objetivo específico" (p. 30). Assim, nesta perspetiva, as investigações são divergentes e a resolução de problemas é uma atividade convergente.

Este mesmo autor salienta ainda que uma abordagem pedagógica à matemática centrada na resolução de problemas ou na resolução de tarefas investigativas exige uma postura diferente quer do professor, quer dos alunos, como podemos observar na Tabela 2.

Tabela 2 – Comparação de métodos baseados na inquirição para o ensino da Matemática (Ernest, 1996, p. 32)

Método	Papel do professor	Papel do aluno
Descoberta guiada	Formula o problema ou escolhe a situação com o objetivo em mente. Conduz o aluno para a solução ou objetivo.	Segue a orientação.
Resolução de problemas	Formula o problema. Deixa o método de solução em aberto.	Encontra o seu próprio caminho para resolver o problema.

Abordagem investigativa	Escolhe uma situação de partida (ou aprova a escolha do aluno)	Define os seus próprios problemas dentro da situação. Tenta resolver pelo seu próprio caminho.

Tanto na descoberta guiada como na resolução de problemas, o professor define o enunciado do problema, podendo ou não orientar o aluno. Numa abordagem pedagógica de investigação, embora o professor possa, por vezes, escolher a situação de partida ou aprovar a escolha do aluno é a este que cabe o papel de definir os seus próprios problemas dentro da situação proposta. O aluno assume, assim, a liderança no processo de ensino e aprendizagem. Para além dos processos matemáticos inerentes à atividade investigativa, esta carateriza-se também por "uma mudança no poder do professor que deixa de ter o controlo sobre as respostas, sobre os métodos aplicados pelos alunos" (Ernest, 1996, p. 31).

Também Frobisher (1994) tenta elucidar o que se entende por investigação ou tarefa investigativa. Para tal, como podemos observar na Figura 2, parte de uma classe vasta que designa por 'problemas', onde posteriormente distingue duas atividades: resolver e investigar. A primeira está associada à resolução de problemas, em que o objetivo é previamente definido e o aluno tem apenas de procurar o método de resolução. Trata-se, assim, de uma atividade convergente (com uma meta clara). A segunda é considerada uma atividade divergente (sem uma meta clara), expressando-se através de dois grandes grupos de problemas: os open-ended problems e os problemas abertos. Nos open-ended problems, ou problemas de finalização em aberto, é explorada a situação e cabe aos alunos delinearem objetivos. Nos problemas abertos, podemos ter aqueles em que são os alunos a explorar a situação, a delinear objetivos e estratégias de resolução, e aqueles em que o objetivo é claro e já conhecido mas o método de resolução é deixado totalmente à responsabilidade do aluno.

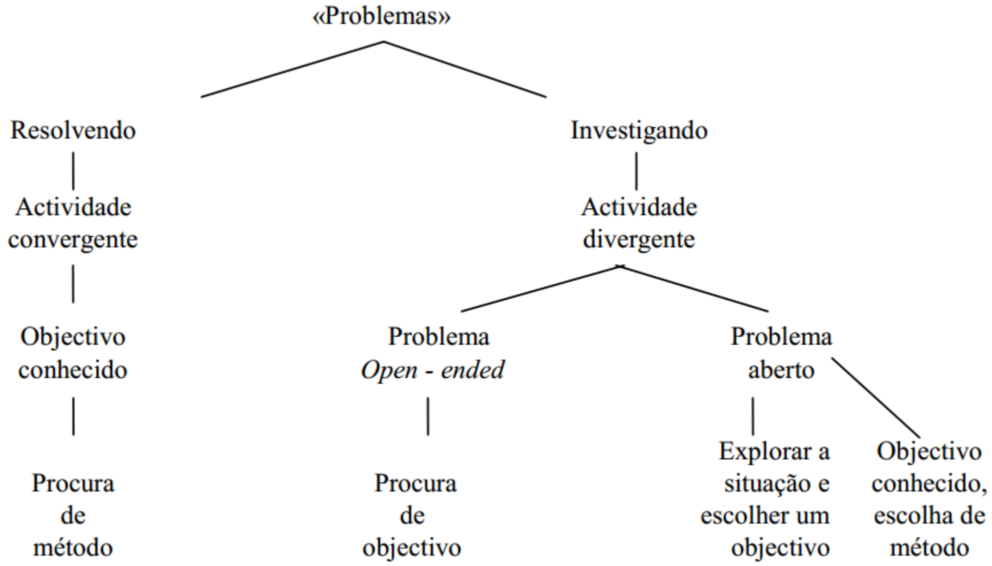


Figura 2. Relação entre problemas e investigações (Frobisher, 1994, p. 155).

Esta definição de investigação está de acordo com a sugerida por Ernest (1996) relativamente a dois aspetos: a atividade investigativa é uma atividade divergente e é o aluno a explorar a situação e decidir sobre o método a utilizar. Contudo, o terceiro tipo de investigação considerado por Frobisher (1994) não é considerado por Ernest como constituindo uma investigação.

Com o objetivo de clarificar o que são problemas open-ended, Pehkonen (1997) agrupa os problemas a partir da análise da situação de partida e do seu objetivo (Tabela 3).

Tabela 3 – Classificação dos problemas de acordo com a situação de partida e o seu objetivo (Pehkonen, 1997, p. 9)

Objetivo da situação / Situação de partida	Fechada	Aberta
Fechada	Problemas fechados	Problemas open-ended Situações da vida real Investigações Sequências de problemas Variantes de problemas
Aberta	Situações da vida real Variações do problema	Situações da vida real Variantes de problemas Projetos Formulação de problemas

A análise desta tabela permite observar a proximidade existente entre os problemas open-ended e as investigações pois, para além de estarem agrupados na mesma categoria, não figuram em mais nenhuma.

A definição que este autor dá para o conceito investigação não tem em conta as características do processo que vai da situação de partida até se atingir o objetivo da situação. Deste modo, torna-se complicado comparar a sua definição com as anteriormente apresentadas por Ernest (1996) e Frobisher (1994).

Pehkonen (1997) analisa as investigações apenas como tarefa e não como atividade. De acordo com Brocardo (2001), também não é claro se estes autores entendem do mesmo modo algumas expressões, como por exemplo: Pehkonen refere-se a "objetivo da situação fechado" e Frobisher a "objetivo [da situação] conhecido", ficando a dúvida se estas duas expressões têm o mesmo significado. Notemos que o objetivo de uma situação pode ser conhecido, não necessitando de ser explicado exatamente.

Todavia, existem algumas diferenças que parecem sobressair das definições dadas por estes autores. Para Ernest (1996), uma investigação envolve a formulação de problemas, o que constitui mesmo uma componente indissociável do contexto investigativo. Por outro lado, Pehkonen (1997) exclui esta dimensão das atividades de investigação, colocando-a numa categoria diferente. Mais ainda, para este autor, uma investigação caracteriza-se por uma situação de partida fechada e tanto Ernest (1997) como Frobisher (1994) não partilham desta opinião.

Em jeito de conclusão, a tentativa de definir o que é uma investigação a partir das diferenças e semelhanças com os problemas, embora elucide em alguns aspetos, não nos conduz a um conceito de investigação claro que seja partilhado por vários autores.

2.3.3. Caracterização da atividade investigativa: processos matemáticos envolvidos numa investigação

Quando se pretende clarificar o sentido do termo investigação, torna-se imprescindível a consideração dos processos matemáticos a ele associados. Pirie (1987) salienta que uma tarefa de natureza investigativa constitui uma situação aberta cuja exploração não tem como objetivo chegar à resposta certa. Pelo contrário, "o objetivo é a viagem, não o destino" (p. 2). Ao explorarem uma tarefa de investigação pretende-se que os alunos "explorem possibilidades, formulem conjeturas, e se convençam a si próprios e aos outros da validade das suas descobertas" (p. 2). Assim, a atividade investigativa envolve três processos: exploração de possibilidades, formulação de conjeturas e a procura de argumentos que validem as descobertas realizadas.

De acordo com Ponte *et al.* (2003), a realização de uma investigação envolve quatro momentos principais: o primeiro diz respeito ao reconhecimento da situação, exploração e formulação de questões; o segundo momento serve para a formulação de conjeturas; o terceiro para a realização de testes e eventual refinamento das conjeturas; e, finalmente, o último para a argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado. Cada um destes momentos estabelecidos por estes autores inclui a realização de diversas atividades como se indica na Tabela 4.

Tabela 4 – Momentos na realização de uma investigação (Ponte *et al.*, 2003, p. 21)

Exploração e formulação de questões	▪ Reconhecer uma situação problemática ▪ Explorar a situação problemática ▪ Formular questões
Conjeturas	▪ Organizar dados ▪ Formular conjeturas (e fazer afirmações sobre uma conjetura)
Testes e reformulação	▪ Realizar testes ▪ Refinar uma conjetura
Justificação e avaliação	▪ Justificar uma conjetura ▪ Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

No esquema da Figura 3, proposto por Oliveira (1998), são indicados os processos matemáticos envolvidos numa atividade de cariz investigativo, muito embora, como refere a autora, seja difícil contemplar num esquema toda a riqueza desta atividade.

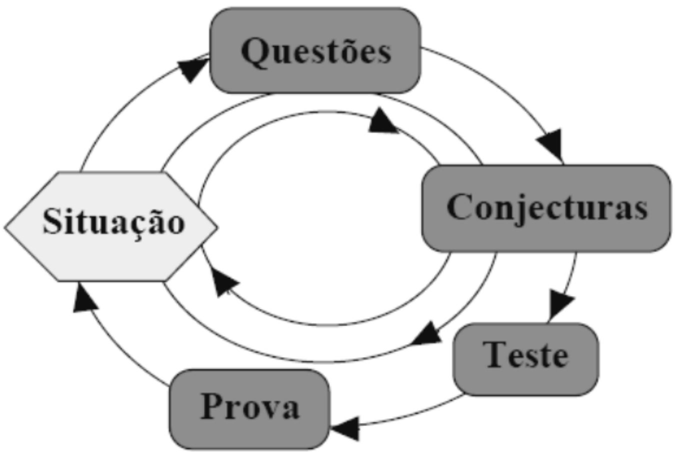


Figura 3. A atividade de investigação (Oliveira, 1998, p. 15).

Ainda na perspetiva de Oliveira (1998), pode ler-se:

> Num primeiro momento há a interrogação a uma situação, portanto há uma questão que é formulada e sobre a qual se vai trabalhar. A observação, na procura de algo que evidencie regularidade, é um elemento fundamental nesta fase. Uma ou mais conjeturas podem surgir, que são sujeitas a um teste. Passando no teste haverá que demonstrar a sua veracidade para deixar de ser 'apenas' uma conjetura, e tornar-se uma propriedade estabelecida pelo método matemático (p. 15).

Segundo Ponte e Matos (1991), este ciclo pode ser interrompido em qualquer fase. Naturalmente que se percebermos que os testes realizados não validam uma determinada conjetura, é necessário recuar e formular nova conjetura, tendo em atenção o que falhou. Assim, "uma atividade de investigação não é caracterizada apenas pelos processos matemáticos envolvidos, mas, também, pela interação entre eles, ou seja, pelas relações que se devem necessariamente estabelecer entre eles" (Brocardo, 2001, p. 99).

Ponte *et al.* (2003) também partilham da mesma forma de pensar, salientando o modo desordenado como ocorrem os vários momentos numa investigação matemática, como, por exemplo, o teste da conjetura poderá levantar novas questões que até então não tinham sido pensadas.

Assim, de acordo com estes autores, a atividade investigativa não assume um roteiro linear, uma vez que os processos matemáticos nela envolvidos não ocorrem linearmente e ordenadamente.

2.4. Dificuldades dos alunos na resolução de tarefas de investigação

A realização de tarefas de investigação é uma atividade com inúmeras potencialidades educativas devendo, por isso, constituir uma experiência fundamental nas aprendizagens dos alunos. São vários os autores que consideram que a atividade investigativa potencia o desenvolvimento de múltiplas capacidades nos alunos, contribui para um conhecimento mais amplo de conceitos, facilita a compreensão de ideias matemáticas e é importante para a realização de aprendizagens significativas (e.g., Azevedo, 2009; Brocardo, 2001; Diezmann, Watters, & English, 2001). Contudo, diversos estudos empíricos realizados mostram que os alunos apresentam muitas dificuldades na exploração deste tipo de tarefas

Brocardo (2001), no estudo que realizou, acompanhou a evolução de três alunos do 8° ano relativamente ao modo como exploravam tarefas de investigação. A autora concluiu que os alunos manifestaram muitas dificuldades em perceber a investigação como um todo, tendendo a dar respostas isoladas, não as relacionando entre si. Além disso, "depois de realizarem várias explorações iniciais, os alunos não usaram o modo interrogativo, mas sim, o modo afirmativo avançando várias conjeturas" (p. 538). Assim, durante o seu estudo, os alunos não deram muita importância à formulação de questões.

Também Ponte *et al.* (1999a), com base na análise de dados recolhidos em aulas do projeto MPT em que eram propostas tarefas de investigação, concluíram que os alunos manifestavam algumas dificuldades na exploração de tarefas desta natureza. Em primeiro lugar, não formulavam explicitamente questões, nem as discutiam com detalhe. Em segundo lugar, segundo Ponte e Matos (1996), mesmo quando são fornecidos aos alunos pontos de partida mais ou menos explícitos, estes têm dificuldade em perceber as questões mais gerais que daí podem emergir.

A dificuldade de formular questões é também salientada por Diezmann *et al.* (2001) na sequência de um estudo que envolvia alunos do 1° ciclo na realização de tarefas de investigação. Os autores referem que foram propostas aos alunos situações a investigar, bem como fornecidos alguns exemplos de questões que poderiam ser formuladas. Contudo, perante uma das situações foi pedido aos alunos para formularem as suas próprias questões e estes, ao invés disso, selecionaram os exemplos de questões que lhes tinham sido dadas.

Rocha (1996) refere que a primeira dificuldade, e talvez a maior, com que os alunos de uma turma do 11° ano se depararam ao realizarem investigações matemáticas com o auxílio da calculadora gráfica foi a desorientação. Segundo a autora, os alunos quando perante uma proposta de investigação sentem-se desorientados, perdidos, sem saberem muito bem o que fazer e por onde começar. A desorientação dos alunos ao realizarem investigações matemáticas é igualmente apontada por Ferreira (2007) ao estudar as atitudes dos alunos de uma turma do 8° ano perante a atividade de investigação.

Rocha (1996) salienta ainda a dificuldade dos alunos em estabelecerem uma estratégia de abordagem:

> Pareciam sentir que tinham de dar resposta a certas perguntas que não tinham sido formuladas e a sua maior preocupação era descobrir quais seriam essas perguntas. Não lhes parecia possível que as perguntas pudessem ser as que eles quisessem formular e, muito menos, que estas pudessem não ser as mesmas para todos os grupos. (p. 184)

Henriques e Ponte (2008) num estudo cujo objetivo era a realização de uma proposta pedagógica, de natureza investigativa, para promover nos alunos de duas turmas do ensino superior a aprendizagem de conceitos e métodos da disciplina de Análise numérica concluíram que, no início, os alunos solicitavam muito frequentemente o apoio da professora. Esperavam que fosse ela a dizer o que era para fazer, sem se preocuparem muito em entender a tarefa. Os autores referem também que a atividade realizada pelos alunos não contemplou a formulação de questões, uma vez que após a exploração inicial começaram, de imediato, a surgir as primeiras conjeturas. Ponte e Matos (1996) justificam a ausência de formulação de questões por parte dos alunos pelo carácter formal e organizado do ensino a que estes estão habituados, salientando que "ensinam-se respostas sem dar a mínima atenção às questões que as originaram ou à forma como foram alcançadas" (p. 123).

A formulação de conjeturas desempenha um papel importante no trabalho investigativo. De acordo com Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid e Yevdokinov (2007) estas podem surgir a partir da observação de um número finito de casos, nos quais é observado um padrão constante, por manipulação de dados, por analogia com factos conhecidos ou a partir da representação visual de um problema. Contudo, todo o raciocínio indutivo fica apenas no pensamento do aluno, não sendo explícita a formulação de conjeturas como é salientado por Ponte *et al.* (2003) com base na análise dos dados resultantes de uma investigação realizada por alunos do 7° ano de escolaridade. A ausência de formulação de conjeturas é também salientada por Brocardo (2001), referindo que

> É muito forte nos alunos a ideia de que uma tarefa matemática implica a procura de respostas/conclusões e que a evolução para uma postura realmente investigativa em que formulam conjeturas e desenvolvem vários ciclos de confirmação ou refutação destas, é um processo demorado e que tem de ser objeto de um trabalho explícito por parte do professor (p. 540)

As conclusões de Henriques e Ponte (2008) e Ponte *et al.* (1999a) apontam no mesmo sentido, referindo que foi só com um trabalho continuado é que os alunos conseguiram compreender o estatuto de uma conjetura.

Ponte *et al.* (1999a) observaram que os alunos tendiam a valorizar o número de conjeturas que faziam sem se preocuparem com a sua trivialidade ou relevância. Este aspeto também é salientado por Rocha (2003) que refere que um dos alunos que participou no seu estudo, com o objetivo de chegar a alguma conclusão, formulou conjeturas irrelevantes para a investigação.

O teste de conjeturas não coloca grandes dificuldades aos alunos. Contudo, Ponte *et al.* (2003) observaram que os alunos tendem a aceitar as conjeturas com base num número reduzido de testes. Esta tendência, segundo Brocardo (2001), não está relacionada com as dificuldades dos alunos na realização de testes, mas prende-se com o facto de estes não compreenderem as características do trabalho investigativo e assumirem como conclusão uma conjetura resultante do estudo de um ou dois exemplos. A autora observou que os alunos inicialmente encaravam uma investigação como uma atividade linear que envolvia três fases: (1) recolha de um conjunto de dados; (2) organização desses dados e (3) análise dos dados de modo a tirar conclusões. À medida que foram adquirindo maior experiência na exploração de investigações, os alunos foram compreendendo a não linearidade do processo investigativo.

No estudo de Ponte *et al.* (1999a), os alunos apresentaram muita dificuldade em retirar dos testes as devidas conclusões, embora compreendessem o seu papel. Para além disto, Henriques e Ponte (2008) e Ponte *et al.* (1999a) salientam ainda que os alunos não sentiam necessidade de testar e refinar as conjeturas que formulavam, a não ser quando solicitados pelo professor.

As conjeturas que resistem a sucessivos testes para serem consideradas matematicamente válidas precisam de ser justificadas com base em argumentos lógicos ou, pelo menos, plausíveis (Ponte *et al.*, 1999a). Assim, a justificação e prova das conjeturas é um processo extremamente relevante na atividade investigativa. Todavia, diversos estudos mostram que os alunos tendem a não lhe dar muita importância. Ponte *et al.* (1999a) indicam que os alunos, de um modo geral, não sentem a necessidade, nem parecem ter a noção do tipo de argumentos que podem utilizar para justificar uma determinada conjetura. De acordo com estes autores, quando os alunos formulavam uma conjetura, a sua preocupação era comunicá-la logo à professora para verificarem se estava certa ou errada. Verificava-se também, em alguns alunos, uma grande dependência da professora e reduzida confiança em si próprios. A pouca autonomia e autoconfiança dos alunos na validação das suas conjeturas é um aspeto também salientado por Varandas e Nunes (1999) no seu estudo com alunos do 10º ano e por Rocha (1996) que refere que os alunos até defendiam os seus pontos de vista e as suas conjeturas perante os colegas, mas quando notavam alguma discordância por parte da professora, abandonavam-nas de imediato.

Rocha (2003) refere que a prova foi o processo matemático da atividade investigativa que os alunos mais evitaram e aquele em que menos evoluíram. No seu estudo, alguns alunos omitiam esta fase do trabalho investigativo, optando por avançar, com o intuito de formularem novas conjeturas, que, na maioria dos casos, não foram validadas. Este aspeto é também salientado por Ponte *et al.* (2003) ao referirem que os alunos transformavam as conjeturas em conclusões sem passarem por um processo de justificação ou prova. De acordo com estes autores, "a justificação ou prova das conjeturas é uma vertente do trabalho investigativo que tende, com alguma frequência, a ser relegada para segundo plano ou até mesmo a ser esquecida, em especial nos níveis de escolaridade mais elementares" (p. 37).

No estudo de Henriques e Ponte (2008), a prova não foi um processo contemplado num dos grupos de trabalho. Também Fonseca (2000), ao analisar os processos matemáticos utilizados pelos alunos ao realizarem tarefas de investigação, concluiu que a justificação e a prova tiveram uma fraca presença no trabalho dos dois alunos estudados com maior detalhe.

Já no estudo de Brocardo (2001), os alunos inicialmente "encararam a prova das suas conjeturas como uma complicação desnecessária introduzida pela professora" (p. 544). Na ótica destes alunos, uma conjetura que tinha resistido a sucessivos testes era automaticamente verdadeira, não sentindo por isso a necessidade de a provar. A autora refere que "perceber a importância e o significado de estabelecer uma prova para as conjeturas que resistem a sucessivos testes se reveste de particulares dificuldades para os alunos" (pp. 545-546). Contudo, com o decorrer da experiência, os alunos começaram a entender o significado de provar uma conjetura considerando este processo como parte integrante da atividade investigativa.

Num estudo realizado por Balacheff (1991), cujo propósito era analisar o comportamento dos alunos quando confrontados com um contraexemplo de uma conjetura por eles formulada, este autor concluiu que, muitas vezes, os alunos consideravam que a existência do contraexemplo não afetava a veracidade da conjetura. Deste modo, a robustez das conceções dos alunos e a existência de um grande domínio de validade da sua conjetura leva-os a optar por manter de lado o contraexemplo (Balacheff, 1991. Assim, como podemos observar, para alguns alunos é possível coexistir um contraexemplo e uma prova para uma dada afirmação, tendo dificuldades em compreender que a prova é suficiente para garantir a não existência de contraexemplos (Chazan, 1993).

No último momento do trabalho investigativo, na discussão final, os alunos têm a oportunidade de comunicar as ideias e resultados a que chegaram. Esta fase do trabalho investigativo é essencial, apesar de trazer algumas dificuldades para os alunos. No estudo realizado por Diezmann *et al.* (2001), os alunos embora tenham conseguido realizar as investigações que lhes tinham sido propostas, manifestaram muitas dificuldades em comunicar as suas ideias, quer por escrito, quer oralmente. Os autores salientam que os alunos, muitas vezes, precisavam que lhes fossem dadas orientações para começarem a registar as conclusões nos relatórios que lhes tinham sido pedidos.

As dificuldades associadas ao registo escrito e elaboração de relatórios são também salientadas por Ferreira (2007) e Henriques e Ponte (2008). Ferreira (2007) refere que "escrever raciocínios e escrever os caminhos percorridos não é ainda muito bem visto pelos alunos na disciplina de Matemática" (pp. 60-61). Segundo a autora, os alunos não expunham os raciocínios que estavam por detrás dos resultados a que chegaram, limitando-se a registar os algoritmos e as conclusões.

Já no estudo realizado por Henriques e Ponte (2008) concluiu-se que os alunos valorizavam os produtos, desconsiderando os processos. Assim, os relatórios que produziam reduziam-se à mera enumeração das descobertas, sem a apresentação de procedimentos nem justificações. A desvalorização dos processos resultava do facto dos alunos não entenderem a dinâmica do trabalho investigativo, menosprezando os processos que lhe são inerentes. Contudo, no decorrer do estudo, os autores notaram uma evolução positiva na qualidade dos relatórios, mas os alunos evidenciaram sempre dificuldades em escrever o que pensavam.

De acordo com Ponte *et al.* (1999a), os alunos têm ideias criativas e interessantes, revelando dificuldades em as comunicar de forma clara e correta. Estes autores referem que na comunicação das suas conclusões, os alunos utilizam termos matemáticos inadequados, embora esse uso não impeça, muitas vezes, os alunos de fazerem muitos raciocínios corretos. Em relação a este aspeto, Rocha (1996) salienta ainda que os alunos são muito sintéticos fazendo apenas referência às conclusões obtidas, que muitas vezes são pouco claras devido a lacunas quer ao nível do Português, quer em termos de linguagem Matemática.

Num estudo realizado por Ferreira (2005) os alunos sentiram dificuldade em explicar os resultados das explorações com o Geometer's Sketchpad ao longo da experiência. Segundo a autora, a necessidade de apresentarem justificações válidas para as suas conjeturas e de registarem as conclusões, fez com que se mostrassem mais reticentes em relação a este tipo de atividade.

Nesta perspetiva, Mason (1996) refere que conseguir que os alunos escrevam sobre o seu trabalho é uma tarefa difícil, uma vez que estes não se manifestam muito dispostos a perder tempo, voltando atrás e explicitar o seu trabalho.

Ponte e Matos (1996), com base num estudo efetuado com três alunos do 8.º ano na realização de tarefas de investigação num micromundo construído em LOGO, consideram que as dificuldades dos alunos podem revelar-se em relação aos seus conhecimentos, processos de raciocínio ou, ainda, à sua atitude perante a situação. Os alunos poderão não dispor de conhecimentos importantes para a realização da tarefa, ou não conseguir encontrar a melhor maneira de iniciar a exploração e de avaliar os resultados.

Também num estudo desenvolvido por Segurado (1997), cujo propósito era analisar as conceções de quatro alunos do 6º ano na realização de tarefas de exploração e investigação, foi concluído que as dificuldades que os alunos apresentaram na realização das mesmas eram reveladores das suas conceções. Para os alunos uma questão tinha apenas uma resposta e depois de encontrada, a tarefa estava concluída. Consideravam que uma resposta ou estava certa ou errada, e que competia à professora a sua validação. Ponte *et al.* (1999a) salientam também que as dificuldades dos alunos em trabalhar com investigações matemáticas estão relacionadas com as suas conceções, conhecimentos, capacidades e valores.

Em suma, como podemos observar, são vários os estudos que indicam que os alunos manifestam dificuldades quando estão perante tarefas de natureza investigativa, umas relacionadas com aspetos específicos deste tipo de atividade e outras de natureza mais geral. Tal como foi referido, os alunos, por vezes, não interpretam nem compreendem a situação a investigar. A formulação de questões é um aspeto a que muitos dão pouca relevância, passando logo para a formulação de conjeturas que, a maior parte das vezes, são encaradas como conclusões sem passarem pelo processo de teste e justificação. A necessidade de provar as conjeturas a que chegam não é considerada por muitos alunos como importante, pois estes tendem a considerar que se um determinado número de testes confirmarem as suas conjeturas, estas adquirem validade matemática. A compreensão das características inerentes ao processo investigativo é outra dificuldade pois os alunos encaram-no como um processo linear. Contudo, com base nos estudos elaborados podemos concluir também que a experiência prolongada na realização de tarefas de investigação contribui para que os alunos vão superando estas dificuldades.

CAPÍTULO 3

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL

Neste capítulo, que está dividido em duas secções, descreve-se o contexto de intervenção, nomeadamente a instituição de ensino e a turma onde se desenvolveu este estudo, bem como o plano geral de intervenção, onde constam as estratégias de ensino-aprendizagem e de investigação/avaliação usadas durante a intervenção pedagógica.

3.1. Contexto de intervenção

Este subcapítulo destina-se à caracterização da escola e da turma onde decorreu a intervenção de ensino centrada na realização de tarefas investigativas na aprendizagem da matemática.

3.1.1. Caracterização da escola

A Escola onde decorreu o presente estudo é uma escola secundária com 3° ciclo do ensino básico, pertencente ao distrito de Braga.

Tomando como referência o seu Projeto Educativo, pode constatar-se que, após as obras de requalificação, a escola é frequentada por mais de 1800 alunos, repartidos por 68 turmas do ensino diurno, das quais 6 turmas pertencem ao 3° ciclo, e 22 turmas do ensino noturno. A escola oferece ainda um leque variado de cursos, desde científico-humanísticos, cursos profissionais e cursos tecnológicos.

As turmas do ensino secundário diurno distribuem-se pelos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências Socioeconómicas, Artes Visuais, Línguas e Humanidades, Curso Tecnológico de Desporto e Cursos profissionais. De entre as várias turmas, 19 turmas são do 10° ano de escolaridade, sendo que a grande maioria (12) das turmas são do Curso Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias, 2 turmas do Curso Científico-Humanísticos de Ciências Socioeconómicas, 2 de Artes visuais e as restantes 3 de Línguas e Humanidades.

É considerada uma escola de referência para alunos com Necessidades Educativas Especiais, ao nível da surdez e da cegueira, sendo que estes alunos quer do ensino diurno, quer noturno, são acompanhados por intérpretes e formadores de língua gestual, professores de orientação e mobilidade, de Braile, entre outros.

A escola possui também um corpo docente estável, com cerca de 225 professores, sendo que a grande maioria pertence ao quadro da escola (cerca de 70%). Entre os 20 docentes de Matemática é de notar um grande espírito de entreajuda e de partilha de materiais, o que enriquece a prática letiva.

Além disto, a escola possui infraestruturas modernas, com salas equipadas com computador com acesso à internet, videoprojector, quadro interativo e quadro branco.

A escola, no seu Projeto Educativo (PE), apresenta um conjunto de princípios e valores pelos quais se rege, tendo como principal objetivo o sucesso dos alunos. É caracterizada pela exigência, rigor e empenho com que orienta o processo educativo, almejando "desenvolver, segundo padrões de exigência e qualidade, a aptidão dos alunos para a aquisição e valorização de saberes e competências que lhes permitem enfrentar o mundo moderno (p. 10) ". Neste documento, pode ainda ler-se:

> [A escola] propõe-se valorizar também um ensino orientado para as competências, estas traduzidas na capacidade de um indivíduo utilizar os seus recursos cognitivos múltiplos para, face a situações novas mais ou menos complexas, poder agir da melhor forma. O desenvolvimento de competências é o moderno desafio da escola que durante muito tempo limitou o seu papel à instrução, à transmissão de conhecimentos, descurando a mobilização e transferência de conhecimentos fora do contexto escolar. (PE, 2010-2013, p.18)

Verifica-se ainda que a escola promove algumas atividades relacionadas com a matemática, tais como o Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, as Olimpíadas de Matemática, o campeonato Supertmatik (cálculo mental), torneios de xadrez, Canguru Matemático Sem Fronteiras, Mat12 e participou também numa Competição Nacional de Ciências 2014, promovida pela Universidade de Aveiro.

Na última avaliação externa, a escola foi classificada com Muito Bom em quase todos os domínios de avaliação: Prestação de Serviços Educativos, Organização e Gestão Escolar e Liderança, e com classificação de Bom na Capacidade de Autorregulação e Melhoria da Escola.

Além disso, por ser uma das 4 escolas com resultados excecionais a nível nacional à disciplina de Matemática, o grupo de matemática da escola integrou, no presente ano letivo, o Projeto Aula Aberta, promovido pela fundação Calouste Gulbenkian e pela Sociedade Portuguesa de Matemática. Este projeto visa o reconhecimento da excelência e a divulgação das boas práticas no ensino secundário, sendo que para tal, as escolas selecionadas foram convidadas a "abrir as suas aulas e a divulgar o seu exemplo" (SPM & Fundação Calouste Gulbenkian). Neste sentido, teriam que disponibilizar informação detalhada sobre o seu ensino e funcionamento, incluindo testes, trabalhos de casa e fichas de trabalho dadas aos alunos ao longo do ano letivo, bem como gravações de aulas de um professor.

3.1.2. Caracterização da turma

A intervenção pedagógica foi realizada numa turma do 10º ano de escolaridade, do curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias. Inicialmente, a turma era constituída por 27 alunos. Contudo, durante o primeiro período, uma aluna mudou de escola, deixando a turma reduzida para 26 alunos, dos quais 9 raparigas e 17 rapazes, com distribuição de idades apresentadas na Tabela 5.

Tabela 5 — Distribuição das idades dos alunos

Idades	Número de alunos	Percentagem de alunos
15	3	11,5%
16	23	88,5%

A idade média dos alunos é de 16 anos, sendo a idade normal de frequência deste ano de escolaridade. Consequentemente estamos, portanto, perante uma turma na qual a grande maioria dos alunos tem um percurso escolar sem retenções.

Pela caracterização socioeconómica da turma, pode constatar-se que todos os alunos possuem computador em casa com acesso à internet. Relativamente à ocupação dos tempos livres, grande parte opta pela televisão, computador e passeios com os amigos. Além disso, pode observar-se que um número significativo de alunos referem ter muitas dificuldades na aprendizagem da disciplina de Matemática, sendo em número reduzido os que a referem como sendo a sua disciplina preferida.

Ao longo de todo o ano letivo, os alunos mostraram-se interessados, empenhados e bem comportados, no entanto, só alguns se destacaram em termos de participação nas aulas. É de notar também que, ao nível da aprendizagem da matemática, existe uma certa heterogeneidade, uma vez que muitos alunos apresentam sérias dificuldades e graves lacunas a nível das competências básicas, manifestando fragilidades em alguns aspetos que deveriam estar já previamente consolidados.

Relativamente ao desempenho dos alunos na disciplina de Matemática, pode observar-se na Tabela 6 que este foi sempre positivo, notando-se uma ligeira melhoria da média das classificações obtidas durante o ano letivo, ainda que o desvio das mesmas em relação à média também tenha aumentado.

Tabela 6 – Desempenho dos alunos ao longo do ano letivo

1.º Período		2.º Período		3.º Período	
$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s
10,0	3,2	10,4	3,7	10,9	4,0

No final do ano letivo, 6 alunos ficaram retidos, 3 deles com falta de aproveitamento a 3 disciplinas e os restantes a 4 disciplinas, sendo que a matemática foi sempre uma dessas disciplinas.

3.2. Plano geral de intervenção

Neste subcapítulo apresentam-se as metodologias de ensino e de aprendizagem usadas durante a fase de intervenção, bem como as estratégias de investigação e de avaliação da ação pedagógica.

3.2.1. Metodologias de ensino e aprendizagem

Nesta secção são apresentadas as metodologias de ensino e aprendizagem que foram utilizadas durante a intervenção pedagógica, todas elas sustentadas na concretização em sala de aula de uma pedagogia que valoriza a atividade do aluno.

Tarefas

Tal como foi referido anteriormente, as tarefas que o professor propõe aos alunos são de diferente natureza e apelam a diferentes níveis cognitivos. Embora todas sejam consideradas essenciais, visto que se devem proporcionar aos alunos experiências diversificadas, importa assegurar que as tarefas mais desafiantes tenham um espaço significativo no trabalho dos alunos nas aulas de matemática pois são estas que elevam o pensamento dos alunos para níveis de maior complexidade.

Assim, na intervenção pedagógica foram propostas tarefas de natureza investigativa cuja exploração foi orientada de modo a permitir aos alunos construírem o seu próprio conhecimento, isto é, em que a construção de conceitos assim como a aquisição de conhecimentos e técnicas decorreu da atividade desenvolvida pelos alunos. Assim, a prática pedagógica teve por base a ideia de que o aluno é o protagonista da sua aprendizagem, tendo um papel importante no trabalho de descoberta e de construção do conhecimento matemático.

Na resolução das tarefas, os alunos foram organizados em pequenos grupos, criando-se um ambiente de aprendizagem rico e estimulante, no qual se podiam discutir ideias, formular e justificar conjeturas. Nesta fase, o professor apenas tinha o papel de orientar e apoiar o aluno, deixando-lhe, ainda, a responsabilidade de ultrapassar as dificuldades. Por último, como sugerem Santos, Brocardo, Pires e Rosendo (2002), foi realizado um momento de discussão final que foi essencial, uma vez que realizar uma investigação e não discutir e refletir sobre ela é perder uma das suas grandes potencialidades. O confronto de resultados e processos contribuiu para um enriquecimento da própria atividade.

Trabalho de grupo

A escola é essencialmente uma agência social e nela se estabelecem interações entre os diferentes sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem (alunos/professor e aluno/aluno). Assim, a escola deve fomentar a formação de indivíduos críticos, participantes na sociedade, que interajam com as demais pessoas, trabalhem em grupo e respeitem as regras da comunidade onde se inserem. Neste sentido, o trabalho de grupo surge como uma metodologia privilegiada de organizar as atividades de ensino e aprendizagem, sendo apontada por vários autores como uma forma de aprender. De facto, e de acordo com a perspetiva vygotskiana, a cognição humana é uma construção sociocultural e as interações sociais têm um papel fundamental no desenvolvimento cognitivo dos indivíduos.

Vygotsky (1986) argumenta que as tarefas realizadas em grupo, cooperativamente, oferecem enormes vantagens que não estão disponíveis em ambientes de aprendizagem individualizada. Ao trabalharem em grupo, os alunos lidam com problemas que podem estar para além das possibilidades de cada um trabalhando individualmente. Assim, com esta forma de trabalho, os alunos realizam aprendizagens significativas, ao mesmo tempo que são estimulados a desenvolverem comportamentos e competências atitudinais.

Estas ideias começaram a ter uma certa correspondência com os programas de matemática onde se pode ler que se deve "desenvolver o espírito de tolerância e cooperação" (ME,2001b, p. 5), colaborando em trabalhos de grupo, partilhando saberes e responsabilidades, já que "o trabalho de grupo e em pares favorece a comunicação matemática pois os estudantes ganham em partilhar com os colegas e com o professor os seus métodos de resolução ou as justificações dos seus raciocínios" (ME, 2001b, p. 12). A aprendizagem da matemática começa assim a ser vista como um processo construtivo e interativo.

Tal como Ponte *et al.* (1997) referem "trabalhar em pequeno grupo permite aos alunos expor as suas ideias, ouvir os seus colegas, colocar questões, discutir estratégias e soluções, argumentar e criticar argumentos. Em pequeno grupo, torna-se mais fácil arriscar os seus pontos de vista, avançar com as suas descobertas e exprimir o seu pensamento" (p. 19).

Na perspetiva de Johnson e Johnson (1990), ao trabalhar em grupo, os conceitos matemáticos são melhor apreendidos como parte de um processo dinâmico em que os alunos interagem. Por outro lado, a própria natureza das tarefas matemáticas implicam falar, explicar, discutir e os alunos sentem-se mais à vontade para fazê-lo em pequenos grupos do que perante toda a turma. Outra razão apontada por estes autores, para a integração desta metodologia de trabalho na sala de aula, é o facto de com este tipo de trabalho os alunos estarem intrinsecamente motivados para estudar matemática, pois adquirem mais confiança nas suas capacidades individuais.

Num estudo realizado por Roa, Correia e Fernandes (2009), sobre uma intervenção de ensino de Combinatória, foram analisadas as perceções dos alunos acerca do seu trabalho em pequenos grupos. Os resultados obtidos mostraram o notório reconhecimento dado pelos alunos a esta metodologia na sua aprendizagem, considerando o trabalho de grupo importante para que surgissem ideias diferentes, bem como aumentou a sua participação nas tarefas propostas. Além disto, a grande maioria considerou o trabalho de grupo importante para aprender melhor, já que tinham a oportunidade de superar as dúvidas e dificuldades mais rapidamente.

Dada a importância reconhecida a esta metodologia de ensino e aprendizagem e a certeza de que pode dar um contributo relevante para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, torna-se fundamental a sua implementação nas aulas de matemática. Assim, durante a intervenção pedagógica, foi proporcionado aos alunos diferentes modos de trabalho, uns em que trabalharam individualmente, em pares, em pequenos grupos (de 3 a 4 elementos) e no grupo-turma. Na formação dos grupos de trabalho, teve-se a preocupação de não formar grupos com alunos apenas muito bons ou apenas com alunos menos bons, optando-se por incluir sempre alguma heterogeneidade dentro dos grupos de trabalho.

Discussões no grupo-turma

De acordo com o NCTM (2007), os alunos estão bem preparados para o futuro, quando são capazes de trocar, eficazmente, ideias matemáticas com outros.

> Quando os alunos são desafiados a pensar e a raciocinar sobre a matemática, e a comunicar as ideias daí resultantes oralmente ou por escrito, aprendem a ser claros e convincentes. Ouvir as explicações de outros permite que os alunos desenvolvam a sua própria compreensão matemática. (NCTM, 2007, p. 66)

Assim, “através da comunicação, as ideias tornam-se objeto de reflexão, aperfeiçoamento, discussão e correção” (NCTM, 2007, p. 66). Por esta razão, a comunicação constitui um elemento fundamental da aprendizagem, sendo encarada, no currículo, como uma capacidade transversal a desenvolver nos alunos.

A discussão é um aspeto da comunicação que ocorre na sala de aula e que pressupõe a interação de diversos intervenientes que expõe ideias e fazem perguntas uns aos outros, sendo considerada como “o modo mais importante que pode assumir a interação entre os alunos ou entre alunos e o professor” (Ponte & Serrazina, 2000, p. 4). Naturalmente que estas interações ao provocarem discussão estimulam a exploração das ideias matemáticas a partir de múltiplas perspetivas, permitindo a descoberta e consolidação do conhecimento.

É, portanto, necessário que os alunos trabalhem em tarefas matemáticas que constituam assuntos relevantes de discussão, pois as que visam a prática de procedimentos, nas quais se espera abordagens algorítmicas eficazes, não constituem bons tópicos de debate. Neste sentido, as tarefas de carácter investigativo poderão propiciar momentos de discussão, nos quais os alunos apresentam as suas ideias, relatam as conjeturas e conclusões, tentando convencer os outros da validade das suas descobertas. Os momentos de discussão constituem, assim, oportunidades fundamentais para a negociação de significados matemáticos e a construção de novo conhecimento.

Ao contrário da exposição ou do questionamento, em que o professor assume um papel de protagonista central, a discussão exige um maior equilíbrio de participação entre ele e os alunos. O professor deverá criar um ambiente em que todos se sintam confortáveis e seguros para exprimirem as suas ideias, e onde todos compreendam que serão as suas ideias que poderão ser questionáveis pelos colegas e não propriamente as capacidades de fazer matemática. Deve procurar também que se clarifiquem os conceitos e se mantenha um nível adequado de argumentação matemática, assegurando, desta forma, a qualidade e a profundidade das discussões.

> O professor deve conduzir a comunicação na aula de Matemática de modo a que os alunos oiçam, respondam, comentem e façam perguntas uns aos outros. Deve procurar que os alunos formulem questões, proponham conjeturas e apresentem soluções, explorem exemplos e contraexemplos e utilizem argumentos matemáticos para determinar a validade de afirmações, tentando convencer-se a si próprios e aos outros. Os alunos devem aprender a aceitar ou rejeitar afirmações com base em raciocínios matemáticos. É através da comunicação que tomam consciência dos processos de construção e validação do conhecimento matemático, que

> aprendem a determinar se uma afirmação é ou não uma verdade matemática (Ponte & Serrazina, 2000, p. 6)

A importância dos momentos de discussão no ensino-aprendizagem da matemática é sublinhada por numerosos autores (Cockcroft, 1982; Ponte & Serrazina, 2000) e, por isso, é uma metodologia de ensino e aprendizagem que foi considerada na intervenção pedagógica. Os alunos, organizados em grupo, após terminarem cada tarefa, eram solicitados a apresentarem as conclusões a que chegaram à turma, criando-se um ambiente no qual os alunos discutiam as suas ideias, apresentavam e justificavam as suas conjeturas, promovendo-se a argumentação matemática.

Tecnologia

Numa sociedade mergulhada em permanente mudança como a que vivemos, com o acelerado desenvolvimento científico e tecnológico que se tem verificado, é exigida uma nova postura da escola na formação dos seus alunos. É fundamental que se mudem determinadas práticas e mentalidades, bem como se implementem, na sala de aula, estratégias de inovação pedagógica que permitam melhorias significativas no processo de ensino e aprendizagem, onde se inclui, por exemplo, a integração das novas tecnologias. De acordo com o NCTM (2007), a tecnologia assume um papel preponderante no ensino e aprendizagem da matemática, uma vez que, influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos.

Mais ainda, no programa de matemática do ensino secundário pode ler-se:

> Não é possível atingir os objetivos e as competências gerais deste programa sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os estudantes trabalham com uma grande variedade de gráficos com o apoio da tecnologia adequada. (ME, 2001b, p. 16)

Contudo, é importante salientar que “não se trata aqui de substituir o cálculo de papel e lápis pelo cálculo com apoio da tecnologia, mas sim combinar adequadamente os diferentes processos de cálculo” (ME, 2001b, p. 15), sendo que os alunos devem saber tirar partido da tecnologia para os cálculos mais laboriosos. É, portanto, possível explorar determinados conceitos matemáticos que impliquem níveis cognitivos mais complexos, em detrimento de conceitos mais rotineiros e/ou repetitivos (Fernandes & Vaz, 1998). Assim, tal como salienta Guzmán (1993), “os alunos devem ser preparados para um diálogo inteligente com as ferramentas que já existem” (p. 14).

A utilização, em contexto de sala de aula, de ferramentas tecnológicas, como por exemplo a calculadora gráfica, reveste-se de extrema importância na aquisição das competências requeridas na formação dos alunos. Mais ainda é de realçar que as suas capacidades gráficas viabilizam uma mudança efetiva na abordagem de alguns conteúdos, perspetivando-se um processo de ensino e aprendizagem inovador (Silva & Seixas, 2010).

O trabalho com a calculadora gráfica na resolução de tarefas que desafiem e estimulem os alunos a formular conjeturas promove a capacidade de investigar e de desenvolver raciocínios e argumentos, uma vez que desta forma podem analisar exemplos e contraexemplos, explorar e testar conjeturas mais rapidamente (Fernandes, 1998).

Nesta perspetiva, também Demana e Waits (1992) defendem que a calculadora gráfica é um instrumento que pode ajudar os alunos numa melhor compreensão de alguns conceitos devido à possibilidade de visualização enquanto fazem matemática.

Matos (1991) ao estudar as conceções e atitudes dos alunos do 8º ano em relação à Matemática, no contexto de atividades de projeto e investigação com a utilização da linguagem Logo, concluiu que a utilização de ferramentas tecnológicas, em particular do computador, "encoraja os alunos a realizar um grande número de experiências e proporciona que tomem decisões cada vez mais refletidas em relação às experiências a realizar" (p. 568). Assim, a utilização de tecnologia facilita também a exploração de investigações dado que os alunos obtêm rapidamente informação que ajuda a decidir sobre o modo de prosseguir o trabalho, obtendo um feedback rápido das conjeturas que formulam.

Na intervenção pedagógica, os alunos recorreram ao uso da tecnologia, nomeadamente à calculadora gráfica, para realizarem as tarefas que lhes foram propostas. O GeoGebra teve também um papel importante na exploração das tarefas, ainda que a sua utilização tenha sido centrada no professor porque a gestão curricular e a falta de disponibilidade de material não permitirem que fosse de outra forma.

É indiscutível que a tecnologia, quando utilizada de forma apropriada, enriquece a extensão e a qualidade das investigações, ao fornecer um meio de visualizar noções matemáticas sob múltiplas representações (Fernandes & Vaz, 1998; NCTM, 2007).

3.2.2. Estratégias de investigação e avaliação da ação pedagógica

Tendo em vista dar resposta às questões de investigação que orientam este estudo, enquanto métodos de recolha de dados, analisaram-se diversos documentos, entre eles, as resoluções dos alunos das tarefas de investigação e os dois questionários que foram preenchidos pelos alunos. Foram ainda gravadas as aulas da intervenção de ensino onde foram exploradas as tarefas investigativas. Deste modo, pretendeu-se analisar e cruzar toda a informação obtida, tendo em vista descrever o mais detalhadamente possível a natureza da atividade matemática desenvolvida na sala de aula.

Análise documental

Para a realização deste estudo começou-se por analisar o capítulo das funções do manual escolar adotado pela escola, o programa de Matemática A do 10º ano e as planificações de aulas. Além disto, nas aulas da intervenção de ensino foram propostas três tarefas de natureza investigativa, cujo principal propósito era averiguar os processos matemáticos que os alunos utilizam na concretização das mesmas, bem como as dificuldades por eles sentidas. Para tal, recolheram-se as resoluções dos alunos para realizar esse estudo. Estas constituíram uma das mais importantes fontes de recolha de informação.

Por outro lado, durante o acompanhamento dos diferentes grupos de trabalho, a professora registou alguns comentários, diálogos e discussões tidas pelos alunos.

Questionários

O questionário é um instrumento versátil, bastante utilizado na investigação educacional, que quando bem construído, permite a recolha de dados fiáveis, isto é, razoavelmente válidos. De acordo com Quivy e Campenhoudt (1992), "o questionário é um instrumento de observação não participante, baseado numa sequência de questões escritas, que são dirigidas a um conjunto de indivíduos, envolvendo as suas opiniões, representações, crenças e informações factuais, sobre eles próprios e o seu meio" (p. 189).

Na perspetiva de Tuckman (2002), esta técnica de recolha de dados impede a influência do investigador no momento da recolha, sendo ainda uma forma eficaz e rápida de levantamento de informação. Através do questionário pode se obter informação empírica importante para o enriquecimento do trabalho que se pretende desenvolver.

Neste estudo foram aplicados dois questionários (Anexo 1 e Anexo 2), um proposto aos alunos antes de se iniciar a intervenção pedagógica e outro no final da mesma. Estes foram desenhados tendo em conta os seus destinatários, tendo-se o cuidado de formular perguntas claras e precisas, passíveis de serem interpretadas de modo similar por todos os alunos (Quivy & Campenhoudt, 1992).

Com o primeiro questionário pretendia-se conhecer as perceções dos alunos acerca de vários aspetos da matemática, especificamente, averiguar as suas conceções sobre a matemática, as tarefas que habitualmente exploravam nas aulas, o modo como trabalhavam (individualmente ou em grupo) e os recursos que utilizavam. Era, portanto, pedido aos alunos que refletissem um pouco sobre a sua experiência matemática e contassem como esta decorreu ao longo de todo o seu percurso escolar.

O segundo questionário foi elaborado com o propósito de avaliar o impacto da estratégia de intervenção delineada, isto é, pretendia-se conhecer as opiniões dos alunos acerca da estratégia de intervenção baseada na exploração de tarefas investigativas nas aulas de matemática.

Os dois questionários tinham exatamente a mesma estrutura, pois eram formados por três grupos de questões. O primeiro grupo destinado aos dados pessoais dos alunos, o segundo grupo era formado por questões de resposta aberta e o terceiro grupo por questões de resposta fechada. Nestas últimas questões, os alunos apenas teriam que manifestar o seu grau de concordância com cada uma das afirmações, escolhendo uma das cinco opções estabelecidas numa escala de tipo Likert: Discordo Totalmente (DT); Discordo (D); Indiferente (I); Concordo (C); e Concordo Totalmente (CT). Para a análise das respostas, estas opções foram codificadas através dos seguintes valores: DT — 1; D — 2; I — 3; C — 4; e CT — 5.

Observação

A observação realizada foi de tipo participante, uma vez que o próprio investigador, neste caso também professor, integra o meio a investigar, 'vestindo' o papel de ator social, e podendo assim ter acesso às perspetivas de outros indivíduos, viver os mesmos problemas e as mesmas situações. A observação participante é, portanto, uma técnica que permite ao investigador compreender, num meio social, um fenómeno que lhe é exterior, integrando-se nas atividades e vivências das pessoas que nele vivem. A este propósito, Bogdan e Biklen (1994) salientam que:

> Os investigadores qualitativos tentam interagir com os seus sujeitos de forma natural, não intrusiva e não ameaçadora. (...) Como os investigadores qualitativos estão interessados no modo como as pessoas normalmente se comportam e pensam nos seus ambientes naturais, tentam agir de modo que as atividades que ocorrem na sua presença não difiram significativamente daquilo que se passa na sua ausência. (p. 68)

Assim, antes de se iniciar a intervenção pedagógica foram observadas algumas aulas, onde foi possível perceber o modo como os alunos se envolvem nas atividades, a forma como trabalham (individualmente ou em grupo) e como reagem aos diferentes tipos de tarefas que lhes são propostos. Nesta fase, a professora-estagiária teve a oportunidade de conhecer os alunos e estes também se foram adaptando à sua presença. Com o conhecimento das características da turma e refletindo sobre a informação que tinha da observação realizada, foram delineadas as estratégias de ensino e aprendizagem nas quais se ia basear a intervenção pedagógica.

Num segundo momento, durante a prática pedagógica, foram gravadas todas as aulas da intervenção de ensino em que foram exploradas as tarefas de investigação. Para tal, foi entregue um pedido de autorização à diretora da escola e outro aos encarregados de educação de todos os alunos (Anexo 3 e Anexo 4), sendo esta por todos concedida.

Notemos que as gravações audiovisuais constituem uma importante fonte de recolha de informação, uma vez que, assim, é possível ter acesso a comentários, formas de pensamento e dificuldades sentidas pelos alunos. Nesta perspetiva, o NCTM (2007) acentua que a gravação de aulas é um elemento de avaliação da prática imprescindível, que deve ser utilizada pelos professores, pois permite-lhes reviver alguns momentos da interação aluno-aluno e professor-aluno, bem como refletir sobre as decisões que foram tomadas no decorrer da aula. Este método de recolha de dados torna ainda possível a transcrição dos diálogos mais relevantes que aconteceram nas aulas.

CAPÍTULO 4

INTERVENÇÃO

A análise da intervenção pedagógica compreende três momentos diferenciados, correspondentes às três secções em que este capítulo se encontra dividido. Num primeiro momento, analisam-se as conceções dos alunos em relação à matemática e à sua aprendizagem. De seguida, apresentam-se as tarefas investigativas exploradas pelos alunos, bem como se descreve a natureza da atividade matemática desenvolvida. Por fim, analisam-se as perceções dos alunos acerca da estratégia de ensino e aprendizagem delineada.

4.1. Perceções dos alunos antes da intervenção pedagógica

Antes de se iniciar a intervenção pedagógica foi elaborado um questionário para os alunos da turma com o objetivo de conhecer as suas perceções acerca da matemática, incluindo questões relacionadas com: (i) conceções dos alunos sobre a matemática; (ii) tarefas que habitualmente exploram nas aulas de matemática; (iii) o modo como geralmente trabalham (individualmente ou em grupo); e (iv) recursos utilizados nas aulas de matemática.

Conceções dos alunos sobre a matemática

Quando questionados sobre aspetos relativos ao modo como veem a matemática, o que é a matemática para eles e se consideram importante estudar matemática, os alunos salientam várias ideias.

A matemática é vista pela maioria dos alunos como sendo uma disciplina interessante, surpreendente, que constitui um verdadeiro desafio. Apenas três alunos consideram esta ciência como sendo a sua disciplina preferida e um deles refere ainda que foi uma das razões que o motivou a escolher o curso. Somente um aluno a considera como sendo uma disciplina como as outras. Contrariamente a esta opinião, o aluno A2 salienta que é a única disciplina que dá vontade de estudar.

De acordo com o aluno A18, "a matemática é o conjunto de todos os conhecimentos envolvendo aritmética, geometria e álgebra. É uma língua universal que todos os países com as mais diferentes línguas percebem." Esta opinião é partilhada por mais dois alunos, sendo que outros três associam a matemática apenas a números, referindo que "é uma disciplina que contém números" (A10), "é a ciência que estuda todo o tipo de números e operações matemáticas" (A19), com a qual se adquire um "conjunto de conhecimentos através de cálculos" (A3).

Sete alunos partilham a ideia de que é uma disciplina essencial ao desenvolvimento cognitivo de qualquer individuo, na medida em que permite a aquisição de destrezas que possibilitam a resolução de problemas. Um dos alunos refere explicitamente que, na sua ótica, a matemática é uma disciplina que possibilita o entendimento do mundo, já que é o pilar onde se apoiam muitas teorias, inclusive de outras áreas do saber.

De uma forma geral, os alunos não limitam a matemática a um conjunto de conteúdos estático, isto é, como um produto acabado pois, tal como refere um deles, esta ciência é "uma arte que não tem fim" (A11). Além disso, integram também, na sua visão, outros aspetos relacionados com o raciocínio e a resolução de problemas.

Além de ser considerada por todos como uma disciplina essencial para a vida, seis alunos consideram-na como uma disciplina difícil, que requer muito estudo. Para o aluno A17 esta disciplina é uma "grande dor de cabeça". Um deles vai ainda mais além e, talvez fortemente influenciado por uma visão cultural, refere que é uma disciplina apenas para alguns pois são poucos os que conseguem atingir bons resultados.

A esmagadora maioria dos alunos considera importante estudar matemática fundamentando essa posição com argumentos relacionados, por um lado, com a utilidade desta disciplina no dia-a-dia: "acho que é importante estudar matemática porque está presente em todos os aspetos da sociedade e da nossa vida. Todos os objetos fabricados têm o seu pedaço de matemática" (A18); " [A matemática] permite perceber fenómenos do dia-a-dia e [proporciona uma] melhor [capacidade de] adaptação ao mundo desenvolvido em que vivemos." (A9). Dois deles referem ainda que a matemática permite o avanço da tecnologia, que está intimamente relacionada com o aumento da qualidade de vida.

Outros alunos consideram que a matemática é importante para a vida profissional futura: "[A matemática] desenvolve a nossa capacidade de raciocínio e pode ser importante para o futuro, para ter um bom emprego" (19); "A matemática, para mim, é uma disciplina essencial ao desenvolvimento cognitivo de qualquer aluno que pretenda seguir profissões baseadas na ciência, no futuro" (A22). Esta perspetiva, relacionada com a visão instrumental desta disciplina, é salientada por dezasseis alunos.

Contudo, na opinião de doze alunos, é essencial estudar matemática porque esta permite exercitar a mente e estimula o raciocínio, refletindo, assim, uma visão cultural da matemática. Tal como refere o aluno A7: "aprendem a saber pensar".

As opiniões dos alunos relativamente à importância da matemática está em consonância com o que é preconizado por vários estudos (NCTM, 1991; NCTM, 2007) que enfatizam a relevância desta disciplina para o dia-a-dia e para a vida futura de cada individuo. De facto, "cada vez mais os alunos deverão seguir uma via educativa que os prepare para a vida, enquanto matemáticos, estatísticos, engenheiros e cientistas" (NCTM, 2007, p. 5). Além disso, permite o desenvolvimento do raciocínio o que é fundamental para que os alunos se tornem matematicamente competentes.

Ao refletirem sobre o que mais gostam nas aulas de matemática, a grande maioria (17 alunos) salienta que gostam de resolver exercícios. Um dos alunos refere explicitamente que o que mais gosta é de "fazer exercícios e fazer contas" (A19). Dois deles gostam de atividades variadas pois quanto mais o forem, mais vontade têm de aprender e outros dois referem gostar das aulas práticas. Por outro lado, também dois alunos salientam que gostam de ver os conceitos abordados na sala de aula aplicados ao mundo real. Um dos alunos refere gostar da interação que se estabelece entre professor e aluno quando se inicia a lecionação de um conteúdo novo. Três alunos admitem gostar apenas de determinados conteúdos relacionados com a geometria, a álgebra e a estatística.

Em relação aos itens de resposta fechada, como podemos observar na Tabela 7, em média os alunos concordam com as afirmações formuladas, reforçando o que foi afirmado nas questões abertas. Apenas na afirmação "Compreendo melhor a matemática quando sou eu a descobri-la" existe maior variabilidade de opiniões, uma vez que é a afirmação que possui um desvio padrão mais elevado. Mesmo assim, 52% dos alunos referem que compreendem melhor a matemática quando a descobrem, 32% mostram-se indiferentes e os restantes 16% discordam.

Tabela 7 – Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente às conceções que possuem sobre a matemática

Conceções sobre a matemática	Percentagem			$\overline{x}$	s
	DT/D	I	C/CT		
Acho a matemática uma disciplina interessante.	4	–	96	4,4	0,71
A matemática é uma disciplina útil para a minha vida.	–	4	96	4,6	0,58
Acho importante estudar matemática porque aprendo a saber pensar	–	8	92	4,6	0,65
Gosto de descobrir na aula de matemática.	4	20	76	4,1	0,88
Compreendo melhor a matemática quando sou eu a descobri-la.	16	32	52	3,5	1,05
Gosto de ter liberdade quando resolvo tarefas matemáticas.	–	24	76	4,2	0,76
Sinto-me confiante nos meus métodos de resolução das tarefas matemáticas.	8	28	64	3,8	0,88
Prefiro que seja o professor a apresentar os conteúdos matemáticos.	–	40	60	3,8	0,72

Nota: DT/D – Discordo Totalmente ou Discordo; I – Indiferente; C/CT – Concordo ou Concordo Totalmente.

Em relação ao que menos gostam nas aulas de matemática, mesmo considerando-a importante, nove alunos apontam a parte teórica e cinco alunos consideram que não gostam quando não conseguem resolver os exercícios. Nesta perspetiva, um deles afirma que "a professora explica a matéria em termos gerais, sem referir exemplos logo, os alunos não entendem os exercícios porque nunca viram a verificação do que acabaram de aprender" (A9). Apenas um aluno refere não gostar quando se fazem demasiados exercícios que, por vezes, nada acrescentam de novo. Três afirmam não gostar do barulho que impede que estejam complemente atentos e concentrados e oito referem gostar de tudo, não tendo nada a apontar.

Quanto ao modo como gostariam que decorressem as aulas, onze alunos consideraram que as aulas deveriam ser mais divertidas e mais interessantes, mais dinâmicas, cativantes e com mais atividade. Referem explicitamente que as aulas deveriam ser "dinâmicas com recurso a experiências" (A23) ou "talvez com mais atividades de grupos e jogos" (A24). Os alunos salientam o carácter lúdico e cooperativo da aprendizagem, apesar de existir algum consenso no que se refere à preferência para que seja o professor a apresentar os conteúdos matemáticos (60%). Dois alunos referem que com o auxílio da tecnologia se torna mais fácil aprender, observando que "gostariam de trabalhar mais, por exemplo, com o GeoGebra" (A25). Oito alunos referem que para eles é indiferente, não tendo nada a apontar pois consideravam que gostavam "das aulas como são" (A1), devendo continuar tal e qual como decorriam até à altura. Seis alunos referem que, apesar de gostarem das aulas como funcionavam, a sua melhoria ocorreria "com o aumento do carácter prático das aulas" (A13). Um dos alunos chega mesmo a referir que gostaria de "resolver exercícios a aula toda" (A12) e outro salienta que "gostaria que fizéssemos exames e testes intermédios que têm exercícios mais complicados, o que nos ajuda a preparar melhor para os testes" (A16).

Em suma, parece existir um carácter dual na visão que os alunos têm da matemática pois, por um lado, a matemática desenvolve o raciocínio e, por outro lado, é uma ciência baseada em algoritmos para efetuar cálculos.

Além disso, à semelhança das conclusões obtidas por Frank (1988) no seu estudo, grande parte destes alunos considera que têm apenas o papel de receber os conhecimentos que lhes são transmitidos, já que 60% prefere que seja o professor a expor os conteúdos matemáticos. Desta forma, para estes alunos aprender resume-se a receber os conhecimentos que o professor transmite e a aplicá-los na resolução das tarefas. É deveras uma visão muito restritiva do que é a matemática e a sua aprendizagem.

Tarefas que habitualmente exploram nas aulas de matemática

Como podemos constatar pelo que foi anteriormente exposto, ao nível da aprendizagem da matemática, os alunos mostram-se claramente influenciados por uma vivência anterior essencialmente marcada pela exposição dos conteúdos feita pelo professor, seguida da resolução de exercícios rotineiros. Ao longo de todo o seu percurso escolar, quinze alunos afirmam que não realizaram nenhuma tarefa investigativa; um aluno referiu ter feito tarefas desta natureza sempre que se introduzia um novo conteúdo e os restantes nove alunos executaram-nas com muito pouca frequência.

Existe unanimidade no que toca ao tipo de tarefa mais aplicada nas aulas de matemática pois vinte e um alunos destacam os exercícios e problemas como os mais praticados na sala de aula.

De acordo com dezasseis alunos, os exercícios são o tipo de tarefa que contribuem para uma aprendizagem matemática significativa pois como referem: "quanto mais exercícios fizermos, melhor aprendemos" (A17), "Os exercícios são bons para praticar e aplicar o nosso conhecimento" (A20). Um dos alunos chega mesmo a referir que é a realização de exercícios típicos de testes e exames que contribui para uma aprendizagem profunda.

Na ótica destes alunos, a resolução de exercícios contribui significativamente para o desenvolvimento da capacidade de raciocínio por, segundo eles, permitir a interiorização dos conteúdos lecionados. Assim, como podemos observar na Tabela 8, em média, quase todos os alunos concordam totalmente que resolver exercícios é muito importante para aprendizagem.

Dez alunos salientam a resolução de problemas como atividade propiciadora de aprendizagens significativas pois, tal como refere o aluno A16, num problema "organizamos a resolução por etapas desde a interpretação que não é tão direta até ao resultado final". Por outro lado, outro aluno afirma que estes "representam a parte mais útil da matemática" (A21) e onde têm a possibilidade de aplicar mais do que um só conhecimento.

Apenas um dos alunos refere que se torna cansativa a realização repetitiva de exercícios, sugerindo que se pode "tirar muito mais partido de um jogo ou de um projeto com a interação da turma" (A11), partilhando da perspetiva de Sebastião e Silva (citado em Ponte, 2005) quando refere que "mais importante do que fazer muitos exercícios será fazer exercícios cuidadosamente escolhidos, que testem a compreensão dos conceitos fundamentais por parte dos alunos" (p. 5). Além disso, em média concordam que gostariam de resolver tarefas investigativas.

Tabela 8 – Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente às tarefas que habitualmente exploram nas aulas de matemática

Tarefas que habitualmente exploram	Percentagem			$\bar{x}$	s
	DT/D	I	C/CT		
Resolver exercícios é muito importante para a minha aprendizagem.	–	–	100	4,8	0,37
Gostaria de realizar tarefas investigativas nas aulas de matemática.	–	36	64	3,9	0,81

Nota: DT/D – Discordo Totalmente ou Discordo; I – Indiferente; C/CT – Concordo ou Concordo Totalmente.

O modo como geralmente trabalham nas aulas de matemática

Em relação ao modo como os alunos costumam trabalhar nas aulas de matemática, estes referem que já trabalharam de todas as formas, isto é, individualmente, em pares e em pequenos grupos. Contudo, como salientam 20 alunos, a forma mais usual de trabalho é individualmente, sendo esta referida explicitamente, por dois deles, como a melhor forma de trabalhar. Um dos alunos diz que "raramente trabalho em pares ou em grupo, trabalho mais individualmente e acho que é o que rende mais" (A19) e outro salienta que "costuma trabalhar individualmente. A melhor forma de trabalho, a meu ver, é individualmente porque permite-nos pensar com clareza e ordem" (A13).

No entanto, apesar de trabalharem individualmente, nove alunos referem que, algumas vezes, quando surge alguma dúvida recorrem a um colega antes de questionar imediatamente o professor, considerando que os colegas, por vezes, ajudam a esclarecer as dúvidas e a ultrapassar dificuldades.

Os alunos reconhecem e apontam várias vantagens do trabalho de grupo, incluindo a partilha de ideias/pontos de vista diferentes entre os colegas e consequente surgimento de novas perspetivas acerca dos conteúdos (23 alunos), a cooperação (ajuda mútua) valorizada por dezasseis alunos, o facto de considerarem que é uma forma divertida de aprender (dois alunos) e, por fim, um deles destaca também que é importante aprender a trabalhar em grupo porque é uma mais-valia para o futuro.

Contudo, existe uma grande divergência de opiniões no que toca ao modo como preferem trabalhar e no qual aprendem mais, visto que as afirmações possuem um desvio padrão bastante elevado. Como podemos observar na Tabela 9, 32% concordam que preferem trabalhar sozinhos, outros 32% preferem trabalhar em grupo, sendo que os restantes 36% manifestam-se indiferentes. Em média, os alunos não têm uma preferência clara sobre o modo como trabalham.

Mais ainda, podemos observar que 48% dos alunos concorda que aprende melhor quando trabalha em grupo, o que significa que 52% (mais de metade dos alunos da turma) não partilham da mesma opinião, sentindo-se indiferentes ou até mesmo discordando da afirmação.

Tabela 9 – Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente ao modo como geralmente trabalham nas aulas de matemática

O modo como trabalham	Percentagem			$\bar{x}$	s
	DT/D	I	C/CT		
Prefiro trabalhar sozinho do que em grupo.	32	36	32	3,0	1,24
Aprendo mais quando trabalho em grupo do que sozinho.	12	40	48	3,5	1,16
Não gosto de trabalhar em grupo porque não me sinto à vontade para intervir.	72	24	4	2,0	0,89
Gosto de partilhar as minhas ideias com os meus colegas.	4	36	60	3,7	0,75
Quando trabalho em grupo, os meus colegas ajudam-me a esclarecer as minhas dúvidas.	4	8	88	4,0	0,61

Nota: DT/D – Discordo Totalmente ou Discordo; I – Indiferente; C/CT – Concordo ou Concordo Totalmente.

Mencionam que o trabalho de grupo perturba o ambiente na sala de aula (15 alunos) devido ao barulho que surge durante a discussão de ideias/diferentes formas de resolução da tarefa que lhes é proposta.

Por outro lado, três alunos estão de acordo com o colega A15 quando este refere que o trabalho de grupo gera "muita conversa entre os colegas sem ser em relação ao trabalho proposto". Nestas situações, salientam que, por vezes, se torna impossível concentrarem-se e pensarem com clareza naquilo que lhes é pedido, acabando por sucumbir à conversa e dispersar totalmente.

Além disto, sete alunos partilham a mesma opinião do aluno A16 que considera que "nem sempre todos os elementos do grupo trabalham, prejudicando o resultado final", acrescentando que os colegas, muitas das vezes, apoiam-se nos conhecimentos dos outros, não desenvolvendo os seus próprios saberes.

Desta forma, apesar de constatarem alguns benefícios, mostram-se um pouco céticos em relação a esta forma de trabalhar, alguns deles referindo até que o trabalho de grupo não é, de todo, uma forma eficiente de aprendizagem.

Recursos utilizados nas aulas de matemática

Em relação aos recursos/materiais didáticos que utilizaram nas aulas de matemática durante o seu percurso escolar, os alunos mencionaram o manual escolar, o caderno diário, a calculadora, o computador, designadamente o *software* GeoGebra, as fichas e os materiais manipuláveis. Dos recursos indicados, vinte e um alunos destacaram o manual escolar, o caderno diário, a calculadora e as fichas como os materiais utilizados com maior frequência, sendo que os restantes referem apenas não ter utilizado o computador ou utilizaram-no com muito pouca frequência. Apenas um aluno faz referência ao uso do quadro interativo dizendo que foi também um recurso utilizado com bastante frequência nas suas aulas de matemática. Além disso, doze referem os materiais manipuláveis como sendo os menos usados.

Em relação aos recursos que contribuem para aprendizagens significativas, dezassete alunos destacam as fichas de trabalho mencionando que estas lhes permitem ""praticar e ganhar ritmo a fazer exercícios" (A16). Destes alunos, dois referem ainda que, por vezes, as fichas possuem exercícios de dificuldade mais elevada que os ajudam a "interiorizar melhor a matéria" (A19).

Depois das fichas, que assumem um lugar preponderante nas escolhas dos alunos, surge o manual escolar que é considerado por onze alunos como um recurso importante que promove a apreensão dos conteúdos matemáticos por parte dos alunos, proporcionando-lhes aprendizagens significativas. Contudo, na opinião de um aluno, “os manuais não são tão bons para aprender porque tentam ensinar matemática (ciência prática) com longos textos, em vez de exemplos, que são muito melhor dados pela professora no quadro” (A13).

Seguidamente surge o caderno diário visto por oito alunos como sendo um precioso instrumento de trabalho onde são registados os conteúdos matemáticos importantes para serem aplicados pois, como refere A16, este é importante por causa “dos registos e da parte teórica que é importante para depois fazer os exercícios”. Além disso, como refere o aluno A11, é lá que “está tudo passado com a nossa letra e, por isso, aprende-se mais”.

Para dez alunos, a utilização da calculadora e do computador contribui para uma melhor aprendizagem. Além disso, de acordo com a informação da Tabela 10, em média, os alunos concordam que quando utilizam este tipo de recursos ficam mais motivados, exploram tarefas diferentes e pensam mais no significado e interpretação dos conceitos matemáticos. No entanto, em relação à afirmação “no futuro gostaria de aprender usando calculadoras e computadores” parece existir uma grande diversidade de opiniões, não chegando a metade os alunos que concordam com ela.

Tabela 10 – Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente aos recursos utilizados nas aulas de matemática

Recursos	Percentagem			$\bar{x}$	s
	DT/D	I	C/CT		
Fico mais motivado para aprender matemática quando uso calculadoras e computadores.	8	28	64	3,7	0,80
Quando uso calculadoras e computadores exploro tarefas diferentes do que quando uso papel e lápis.	4	32	64	3,8	0,78
Quando uso calculadoras e computadores penso mais no significado e interpretação dos conceitos matemáticos.	4	52	44	3,5	0,71
No futuro gostaria de aprender usando calculadoras e computadores.	12	40	48	3,4	1,04

Nota: DT/D – Discordo Totalmente ou Discordo; I – Indiferente; C/CT – Concordo ou Concordo Totalmente.

Por fim, dois alunos referem os materiais manipuláveis como propiciadores de aprendizagens profundas, na medida em que a sua exploração/manipulação permite que a matemática se torne viva aos olhos dos alunos e que as ideias abstratas adquiram significado.

4.2. A intervenção pedagógica

A intervenção pedagógica decorreu na lecionação do tema Funções do 10º ano de escolaridade e prolongou-se durante 8 aulas. Os tópicos tratados e correspondentes objetivos, de cada uma das aulas, encontram-se sintetizados na Tabela 11.

Tabela 11 – Síntese da intervenção pedagógica

Aula	Tempo	Tópico	Objetivos
1	90'	Estudo da função quadrática	Identificar funções quadráticas; Determinar os zeros de uma função quadrática; Analisar o efeito da variação dos valores dos parâmetros nos gráficos das famílias de funções quadráticas do tipo $y = ax^2$ e $y = ax^2 + k$, com $a \neq 0$ e $k \in IR$.
2	90'	Transformações gráficas de funções quadráticas	Analisar o efeito da variação dos valores dos parâmetros nos gráficos das famílias de funções quadráticas do tipo $y = a(x - h)^2$ e $y = a(x - h)^2 + k$, com $a \neq 0$ e $k \in IR$.
3	90'	Vértice de uma parábola	Determinar as coordenadas do vértice de uma parábola.
4	90'	Vértice de uma parábola	Identificar o lugar geométrico definido pelos vértices das parábolas de famílias de funções quadráticas.
5	90'	Resolução de tarefas	Aplicar os conhecimentos adquiridos sobre funções quadráticas na resolução de problemas.
6	90'	Resolução de equações e inequações de grau superior ao 2	Resolver equações e inequações de grau superior ao 2; Verificar geometricamente a solução de uma inequação, com recurso à calculadora gráfica.
7	90'	Ramos infinitos de uma função polinomial	Estudar o comportamento de uma função polinomial nos ramos infinitos.
8	90'	Resolução de tarefas	Consolidar os conhecimentos adquiridos.

4.2.1. A exploração das tarefas de investigação

Nesta secção analisam-se as tarefas investigativas propostas durante a intervenção pedagógica. Inicia-se a análise com a descrição da tarefa e os seus objetivos até ao momento em que foi colocada aos alunos. Numa segunda etapa, averiguam-se os processos matemáticos utilizados pelos alunos durante a realização das tarefas investigativas, bem como descreve-se o momento em que foi feita a discussão das conclusões. Por fim, apresentam-se as dificuldades sentidas pelos alunos durante a concretização das mesmas.

Tarefa investigativa 1: Estudo do efeito da variação dos valores dos parâmetros nos gráficos das famílias de funções quadráticas

> Investiga a influência dos parâmetros existentes em cada uma das famílias de funções seguintes:
>
> $y = a(x - h)^2$ e $y = a(x - h)^2 + k$, com os parâmetros a, h e k , onde $a \neq 0$.

A tarefa investigativa "Estudo do efeito da variação dos valores dos parâmetros nos gráficos das famílias de funções quadráticas" foi proposta aos alunos na segunda aula da intervenção pedagógica, após estes terem estudado, com detalhe, as primeiras duas famílias de funções quadráticas, designadamente $y = a x^2$ e $y = a x^2 + k$, com $a \neq 0$ e $k \in IR$. Pretendia-se, agora, que os alunos explicitassem o efeito dos valores dos parâmetros nos gráficos das famílias de funções quadráticas: $y = a(x - h)^2$ e $y = a(x - h)^2 + k$, com $a \neq 0$ e $h, k \in IR$. Além disso, os alunos deviam reconhecer que, por exemplo, podiam facilmente obter o gráfico da função $y = 2(x - 4)^2 + 1$ a partir do gráfico de $y = 2x^2$ efetuando uma translação associada ao vetor de coordenadas $(4,1)$.

Para a realização da tarefa, os alunos organizaram-se em grupos de 3 elementos dispondo de cerca de 45 minutos, tempo após o qual foi feita a discussão das conclusões obtidas.

Introdução da tarefa

O enunciado da tarefa foi entregue aos alunos e lido em voz alta pela professora. Como os alunos já tinham previamente elaborado um estudo semelhante para as primeiras duas famílias de funções, rapidamente perceberam o que se pretendia.

> Alunos: Professora é para fazer um estudo como fizemos na aula passada para as outras famílias não é?

Professora: Sim. Tal como fizemos, devem observar qual é o efeito da mudança desses parâmetros nos gráficos das respetivas famílias de funções quadráticas.

Desenvolvimento da tarefa

Os alunos mostraram-se entusiasmados e começaram, de imediato, a trabalhar na tarefa. Um dos grupos, para organizar ideias, a primeira coisa que fez foi escrever os parâmetros que tinham de estudar, como podemos observar na Figura 4.

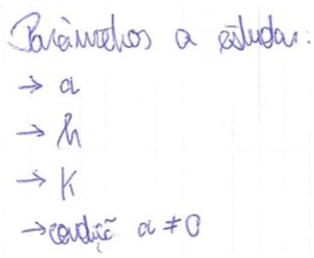


Figura 4. Conclusões do Grupo 1.

Posteriormente, com o auxílio da calculadora gráfica, observaram o que acontecia aos gráficos das respetivas funções quando faziam variar o valor de cada um dos parâmetros. Rapidamente concluíram que o parâmetro a está relacionado com a abertura e o sentido da concavidade da parábola, registando o que podemos observar na Figura 5.

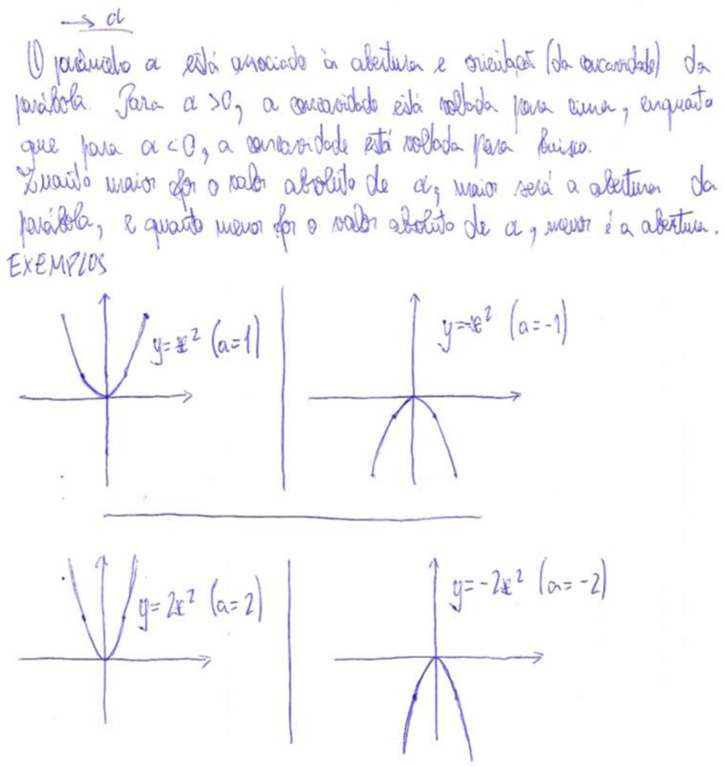


Figura 5. Conclusões do Grupo 1.

Apesar das representações gráficas indicarem que os alunos estavam a pensar corretamente, as conclusões que retiraram em relação ao grau de abertura da parábola estão erradas. Deveriam observar que quanto maior for o valor absoluto do parâmetro a, menor é a abertura da mesma. Para além deste lapso, os alunos do grupo tiveram a preocupação de salientar o porquê do parâmetro a não poder tomar o valor nulo, referindo o que se encontra na Figura 6.

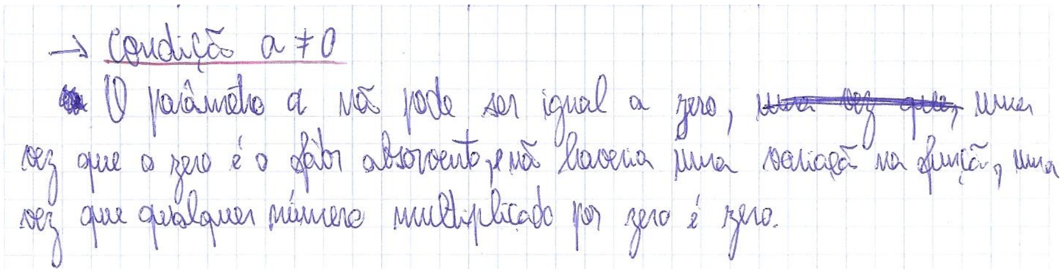


Figura 6. Conclusões do Grupo 1.

Em relação aos parâmetros h e k, os alunos iam representando os gráficos que visualizavam na calculadora, chegando às primeiras conjeturas (Figura 7).

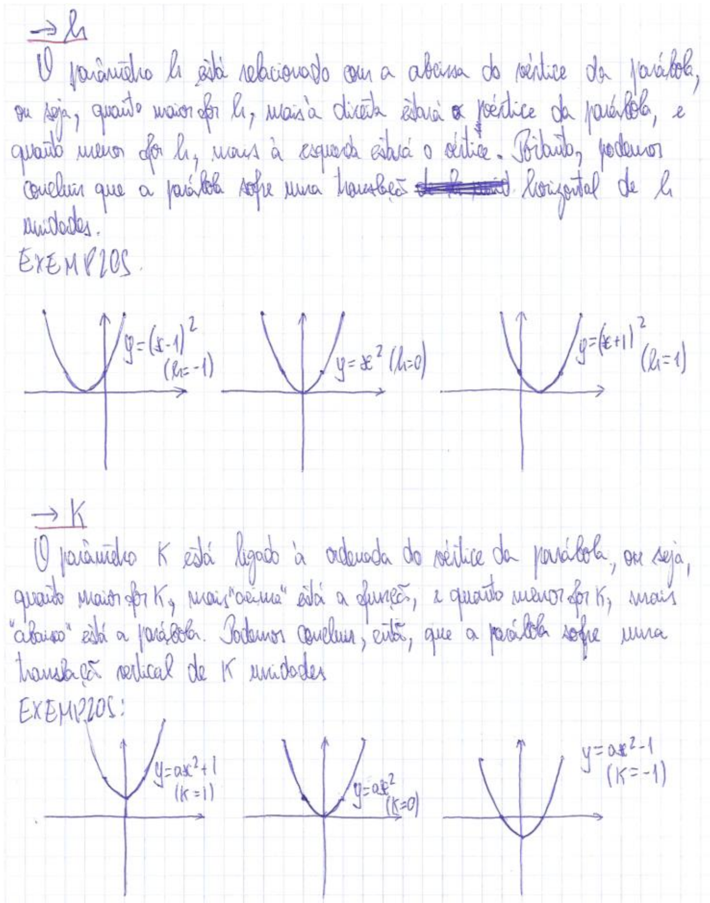


Figura 7. Conclusões do Grupo 1 em relação à influência dos parâmetros h e k nos gráficos das famílias de funções quadráticas do tipo $y = a(x-h)^2$ e $y = a(x-h)^2 + k$, com $a \neq 0$ e $h, k \in IR$.

Os alunos do Grupo 3, como podemos observar na Figura 8, foram mais além nas suas conclusões, referindo que o gráfico da função do tipo $y = a(x - h)^2$ se obtém a partir do gráfico da função $y = a\,x^2$, com $a \neq 0$, a partir de uma translação horizontal associada ao vetor de coordenadas $(h,0)$ salientando também que o zero da função é $x = h$, o que corresponde, como outros grupos referiram, à abcissa do vértice da parábola e, por conseguinte, é a equação do eixo de simetria da parábola.

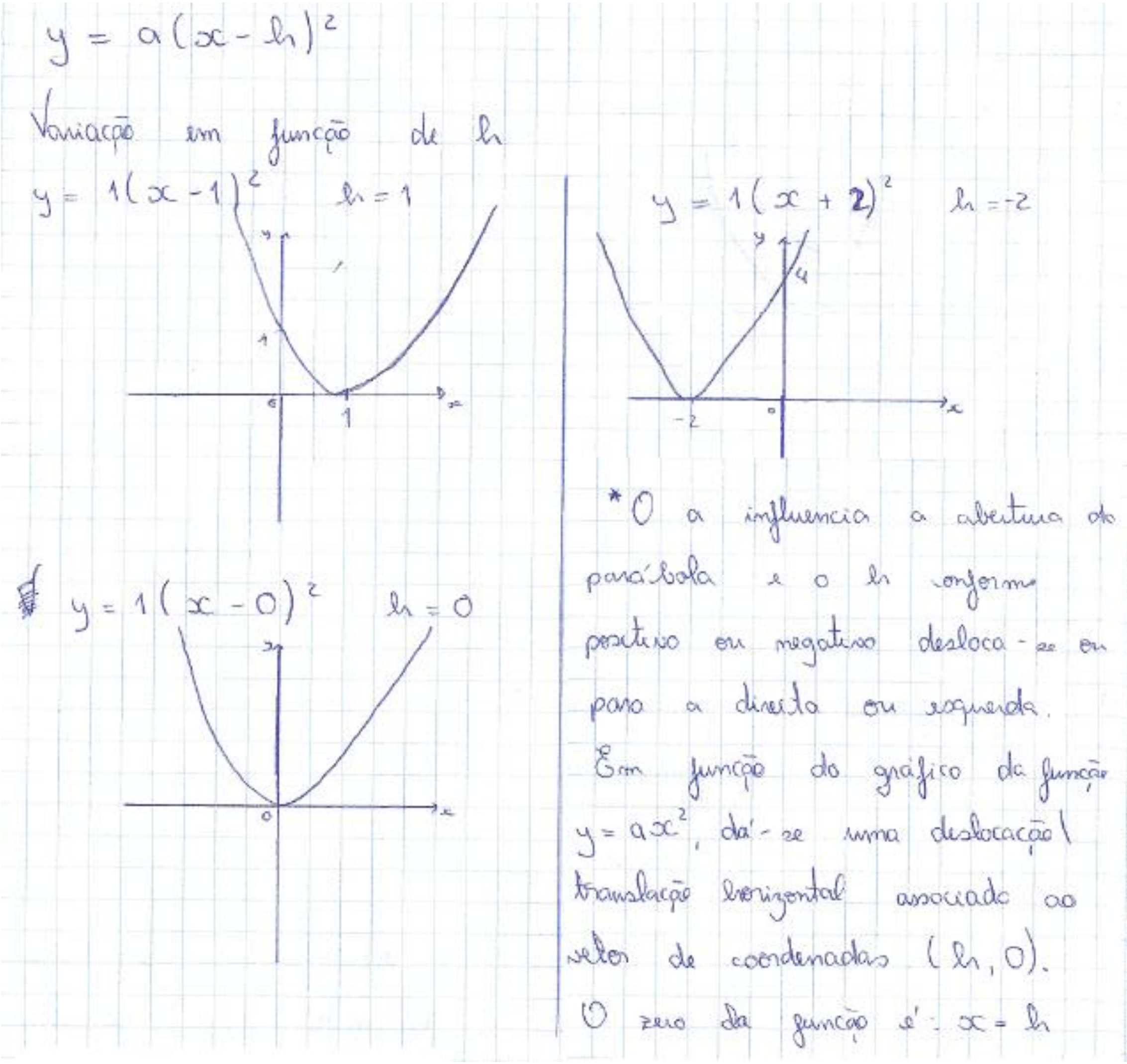


Figura 8. Conclusões do Grupo 3 em relação à influência do parâmetro h nos gráficos das famílias de funções $y = a(x - h)^2$, com $a \neq 0$ e $h \in IR$.

Por outro lado, estes alunos referem que é possível obter o gráfico de $y = a(x - h)^2 + k$ a partir do gráfico de $y = a(x - h)^2$ através de uma translação vertical associada ao vetor de coordenadas $(0,k)$ como podemos observar na Figura 9.

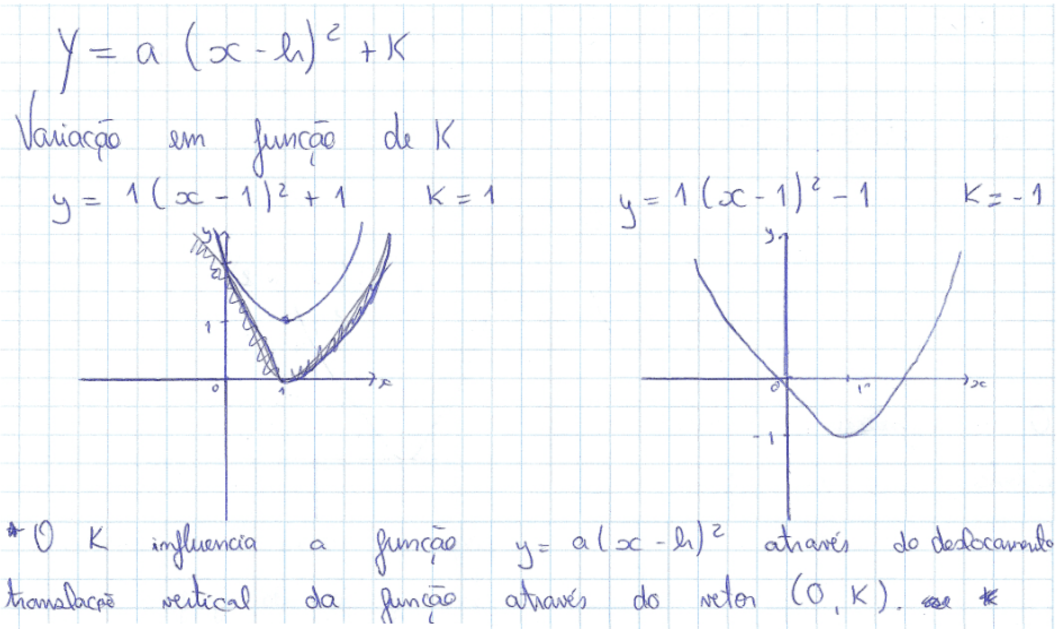


Figura 9. Conclusões do Grupo 3 em relação à influência do parâmetro k nos gráficos das famílias de funções $y = a(x - h)^2 + k$, com $a \neq 0$ e $h, k \in IR$.

Apenas um grupo conseguiu concluir que é possível obter o gráfico de $y = a(x - h)^2 + k$ a partir do gráfico de $y = a\,x^2$, por meio de uma translação associada ao vetor de coordenadas (h, k) como se mostra na Figura 10.

2. Na função do tipo $y = a(x-h)^2 + K$, a influencia a abertura da parabola, h influencia a posição da parabola em relação ao eixo dos xx através de uma translação horizontal associada ao vetor $\vec{u}(h,0)$ e K influencia a posição da parabola em relação ao eixo dos yy através de uma translação vertical associada ao vetor $\vec{u}(0,K)$, em suma, ocorre uma translação da função $y = ax^2$ para a função $y = a(x-h)^2 + K$ associada ao vetor $\vec{T}(h,K)$.

Figura 10. Conclusões do Grupo 4 em relação à influência dos parâmetros h e k nos gráficos das famílias de funções $y = a(x - h)^2 + k$ com $a \neq 0$ e $h, k \in IR$.

Discussão final

A professora questionou os alunos sobre as conclusões a que tinham chegado. Em relação ao parâmetro a, referiram, sem grandes hesitações, que estava relacionado com a concavidade e a abertura da parábola, tal como também já tinham estudado.

Professora: Então o que concluíram acerca da influência dos parâmetros nos gráficos destas duas famílias de funções?
A12: O parâmetro a influencia a abertura e a orientação da parábola.
Professora: Todos concordam?
A2: Sim, se o a for positivo, tem concavidade voltada para cima e se for negativo, concavidade voltada para baixo.
A12: E também influencia a abertura da parábola. Quanto maior o a em valor absoluto, menor é a abertura.
Professora: Alguém tem alguma dúvida em relação à influência deste parâmetro?

Nenhum aluno manifestou dificuldades em perceber a influência deste parâmetro. Contudo, no estudo dos restantes parâmetros surgiu bastante discussão na turma após a professora ter solicitado a um dos grupos para partilhar as conclusões que tinham obtido.

Professora: E agora, o Grupo 2 vai responder ao que acontece se mudarmos o parâmetro h?
Alunos: Não sabemos se temos bem.
Professora: Mas digam lá a que conclusões chegaram?

Além de se mostrarem um pouco reticentes, partilharam com os colegas os resultados a que tinham chegado (Figura 11).

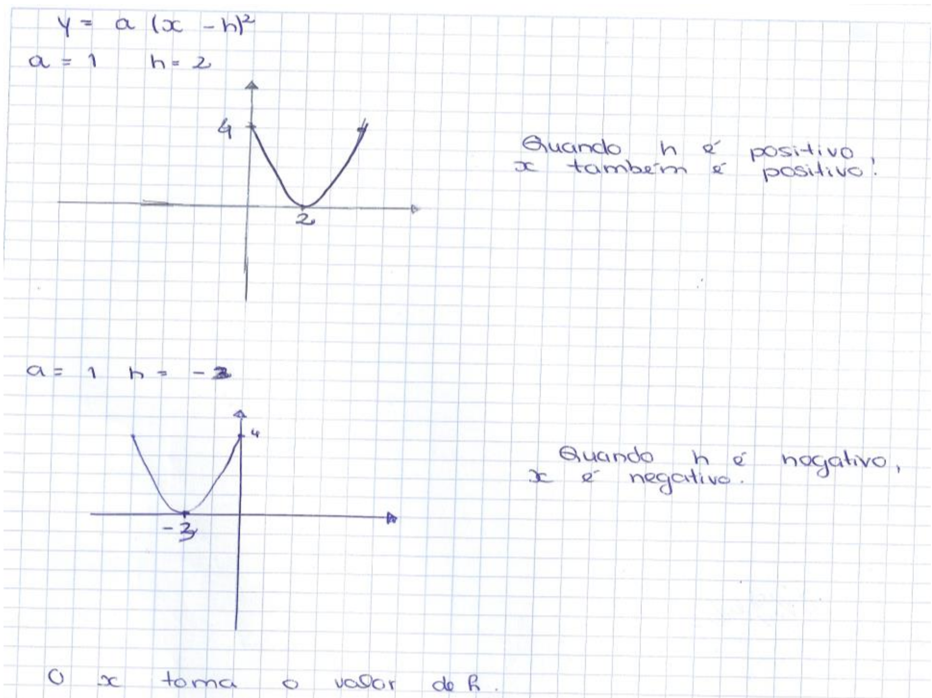


Figura 11. Conclusões do Grupo 2.

Alguns alunos acharam aquilo um pouco esquisito envolvendo-se, de imediato, na discussão, uns mostrando completo desacordo e outros referindo o que tinham concluído.

A1: O quê? Se continuarmos o ramo da primeira parábola para o lado esquerdo vamos ter x negativos!

A2: Oh! Não é nada disso. Ali o $h = 2$ ou $h = -3$ faz com que a parábola que fica ao meio se desloque 2 ou 3 unidades. Portanto, o h faz com que as parábolas se desloquem h unidades.
A3: E oh stora, com o k acontece a mesma coisa, só que a parábola em vez de se deslocar na horizontal, desloca-se na para cima e para baixo k unidades.

A professora, prolongando os ramos da parábola, tentou esclarecer o grupo que foi apresentar os resultados e fez com que se continuasse a discussão.

Professora: Meninos, a função quadrática é uma função real de variável real e, caso não hajam restrições de domínio, ele é sempre IR, portanto o x percorre todo o intervalo de $-\infty$ até $+\infty$.
Professora: Muito bem, o parâmetro h faz com que a parábola se desloque horizontalmente. Mas o que é isso da parábola que fica ao meio?
A2: Há um deslocamento de 2 ou 3 unidades, o que for mas em relação à $y = x^2$, acho eu.
Professora: Então estás a dizer-me que obtemos $y = (x-2)^2$ a partir de $y = x^2$? Todos concordam?
A3: Sim, stora ele tem razão. É a parábola que tem $h = 0$.
A4: Com uma translação da função $y = x^2$ associada ao vetor $(2,0)$ conseguimos obter $y = (x-2)^2$.
Professora: Muito bem, é isso mesmo. Alguém se lembra dos termos que já usamos para este tipo de transformações! Então como é que eu agora obtenho os gráficos da família de funções $y = a(x-h)^2$? Quem ajuda?
A5: Em função do gráfico $y = x^2$ ocorre uma translação horizontal associada ao vetor $(h,0)$ e assim obtemos $y = a(x-h)^2$.
Professora: Concordam?
A4: Não. É em função de $y = ax^2$.

A professora chamou atenção para o facto de conseguirmos obter o gráfico da função $y = a(x-h)^2$ a partir do gráfico da função $y = ax^2$ e não do gráfico de $y = x^2$. No exemplo concreto que tinham $a = 1$ e, por esse motivo, obtinha-se $y = x^2$.

Professora: Ainda existe outra particularidade em relação ao parâmetro h. Qual é?
A6: É que o h sendo 2 vai para um lado e sendo -3 vai para o outro.
Alunos: Ya, é isso! Ou fica mais à direita ou mais à esquerda.
Professora: Ok. Quando o h é positivo, a parábola desloca-se para a direita e quando h é negativo, a parábola desloca-se para a esquerda.
A7: Oh stora é o contrário!
Professora: Repara que o sinal de subtração, neste caso, faz parte da expressão. Na primeira expressão o h é positivo e na segunda é negativo.
A7: Ah pois. Ok.
Professora: Mas além disso, o h representa o quê?
A8: Vai ser a abcissa do zero.

A9: É. É a abcissa do vértice e também a equação do eixo de simetria.

Em relação à influência do parâmetro k, os alunos do Grupo 3 referiram que o parâmetro "k influencia a função $y = a(x - h)^2$ atraves do deslocamento, translação vertical da função através do vetor $(0, k)$". Contudo, rapidamente perceberam que poderiam obter o gráfico da função $y = a(x - h)^2 + k$ a partir do gráfico da função $y = a x^2$ através de uma translação associada ao vetor de coordenadas (h, k), tal como indica a Figura 12.

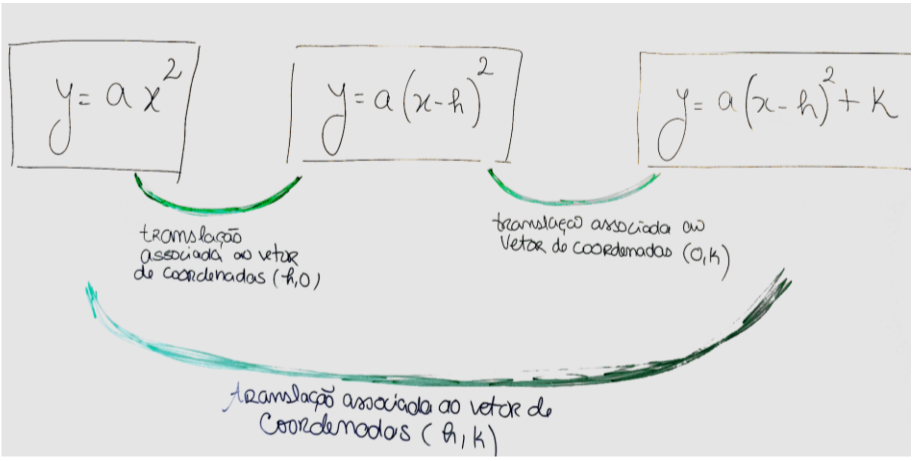


Figura 12. Síntese das transformações das famílias de funções, elaborada pela professora.

Para finalizar a discussão, a professora mostrou aos alunos uma animação, construída no GeoGebra, em que estes podiam visualizar o que acontecia aos gráficos das funções quando se faziam variar os vários parâmetros, tal como ilustra a Figura 13.

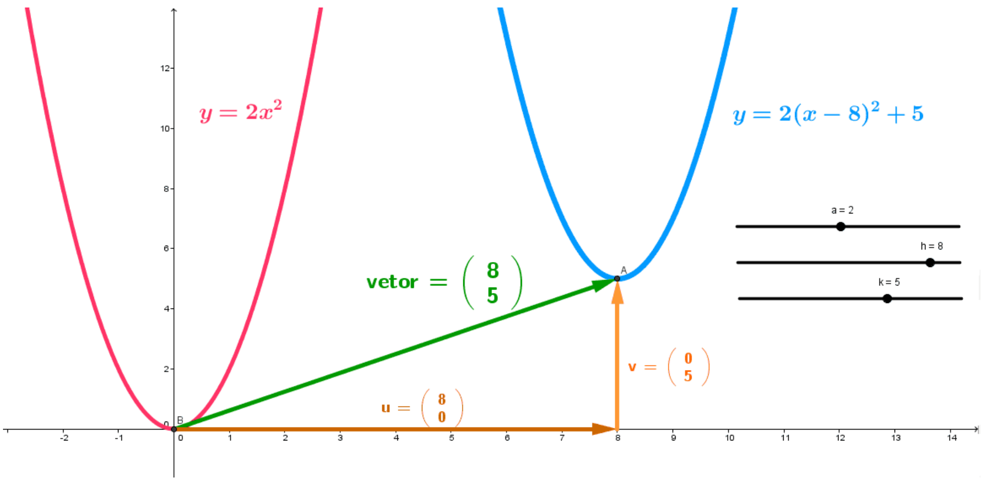
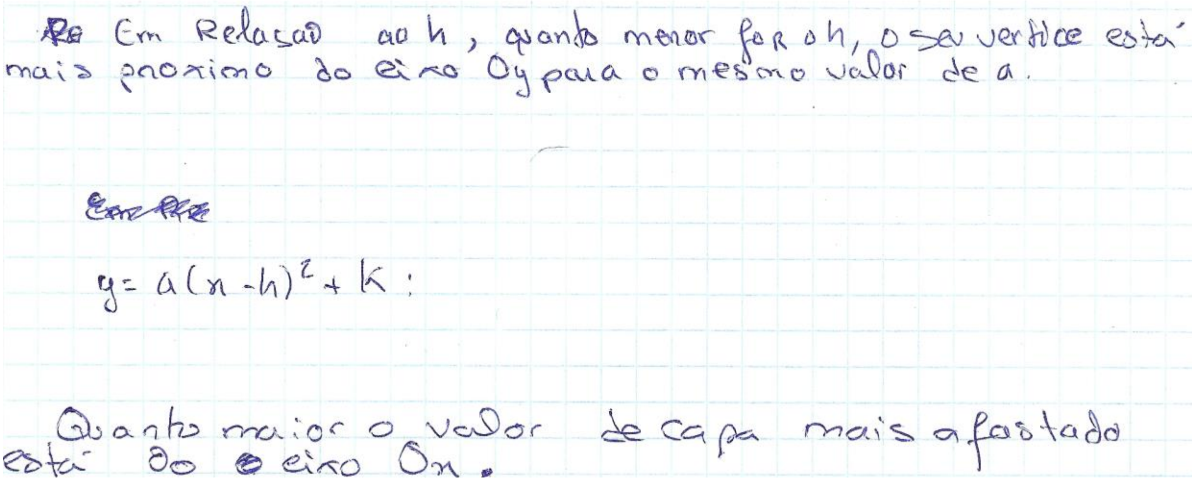


Figura 13. Influência dos parâmetros a, h e k nos gráficos da família de funções $y = a(x - h)^2 + k$, com $a \neq 0$ e $h, k \in IR$.

Dificuldades sentidas pelos alunos

Em relação ao efeito do parâmetro a nos gráficos destas famílias de funções, os alunos não manifestaram grandes dúvidas, até porque eles já tinham estudado anteriormente que este parâmetro estava relacionado com a abertura e a concavidade da parábola.

Contudo, em relação à variação dos valores dos parâmetros h e k não se pode dizer o mesmo. Por exemplo, as conclusões do Grupo 2 revelam que alguns alunos tiveram muitas dificuldades em analisar os efeitos decorrentes da variação dos valores do parâmetro h nos gráficos das famílias de funções. De facto, as conclusões deste grupo, além de serem totalmente incorretas, mostram claramente as graves lacunas existentes no conhecimento matemático destes alunos. Por outro lado, como podemos observar na Figura 14, os alunos do Grupo 6 não se preocupam com o rigor das afirmações que produzem, salientando apenas que a mudança no valor do parâmetro h faz com que o vértice da parábola fique mais próximo ou mais afastado do eixo Oy ou que a mudança no valor do parâmetro k faz com que fique mais afastado do eixo Ox.


~~Re~~ Em Relação ao h, quanto menor for o h, o seu vértice está mais proximo do eixo Oy para o mesmo valor de a.

~~Em Re~~

$y = a(x-h)^2 + k$:

Quanto maior o valor de capa mais afastado está do eixo Ox.

Figura 14. Conclusões do Grupo 6.

Também alguns dos poucos alunos que observaram a existência de translações nos gráficos das funções tiveram dificuldade em efetuar a composição das mesmas, não vendo de imediato que podiam obter $y = a(x-h)^2 + k$ a partir de $y = ax^2$ através de uma translação associada ao vetor de coordenadas (h,k), resultante da soma dos vetores de coordenadas $(h,0)$ e $(0,k)$.

Tarefa investigativa 2: O lugar geométrico dos vértices de famílias de funções quadráticas

> Como sabes, a família de funções quadráticas é definida pela expressão $y = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são parâmetros reais com $a \neq 0$. Investiga o lugar geométrico formado pelos vértices das parábolas.
>
> Para realizares a investigação proposta segue as seguintes etapas:
>
> 1. Considera as famílias de funções quadráticas em que fixamos dois dos parâmetros e variamos o outro parâmetro;
>
> 2. Recorrendo às representações gráficas obtidas na calculadora gráfica, descobrir o que se mantém e o que se altera quando varia cada um dos parâmetros;
>
> 3. A partir do foi observado na etapa 2, definir o lugar geométrico dos vértices das parábolas de cada família de funções quadráticas;
>
> 4. Justificar analiticamente as conjeturas estabelecidas na etapa anterior.

Esta tarefa investigativa foi proposta aos alunos na quarta aula da intervenção pedagógica, após estes terem aprendido os procedimentos analíticos para a determinação das coordenadas do vértice de uma parábola. Como indica o enunciado da referida tarefa, pretendia-se que os alunos, fixando dois dos parâmetros e fazendo variar o outro, definissem o lugar geométrico formado pelos vértices das parábolas de cada família de funções quadráticas, justificando analiticamente as conjeturas estabelecidas.

Introdução da tarefa

Como habitualmente, o enunciado foi entregue aos diferentes grupos de trabalho, seguindo-se a sua leitura com toda a turma. Ao contrário da tarefa anterior, os alunos mostraram-se algo confusos sem terem compreendido bem o que se pretendia que investigassem.

> Professora: Todos perceberam o que se pretende que investiguem?
> A10: Stora, o que é um lugar geométrico?
> Professora: Neste ano letivo estudámos vários lugares geométricos. Ninguém se lembra de nenhum?
> A5: A circunferência.
> Professora: Por exemplo. Portanto, um lugar geométrico é um conjunto de pontos que gozam de uma determinada propriedade. Agora, pretende-se que vocês estudem o lugar geométrico formado pelos vértices das parábolas. Reparem que a primeira sugestão diz para fixarem dois parâmetros, fazendo variar o outro. Então para cada família de funções quadráticas que vão obter, observem o lugar geométrico formado pelas várias posições que os vértices vão ocupar.

Desenvolvimento da tarefa

Um dos grupos de trabalho, com base no estudo intuitivo realizado com o apoio da calculadora gráfica, concluiu o que se observa na Figura 15.

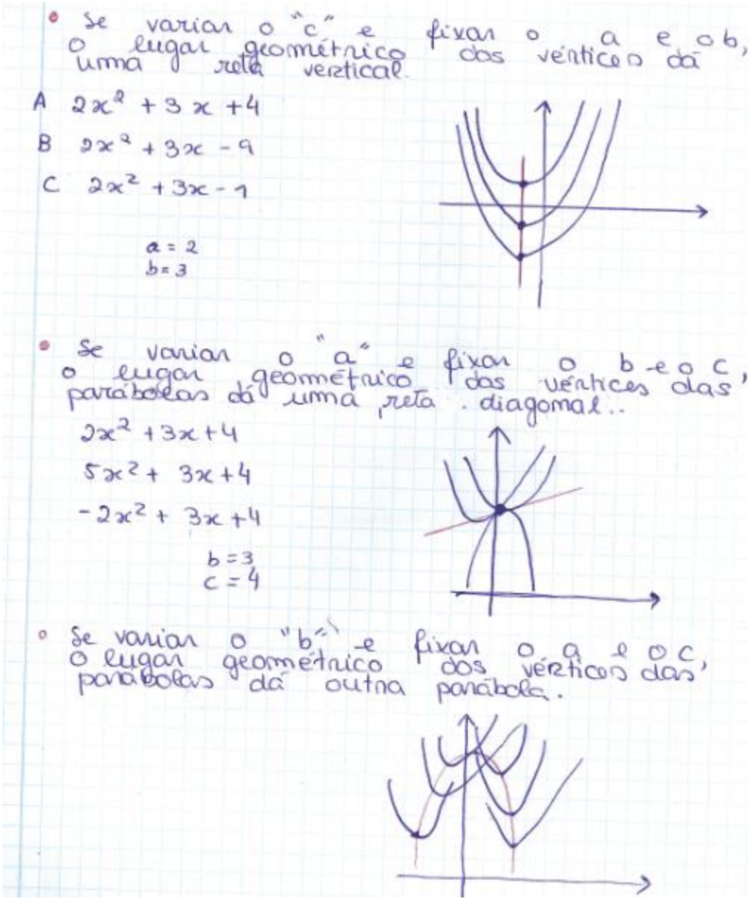


Figura 15. Conclusões do Grupo 5.

Contudo, como podemos observar na resolução deste grupo, as conjeturas estabelecidas passaram, de imediato, ao estatuto de conclusões. O mesmo aconteceu com um número considerável de grupos de trabalho, nos quais os alunos não conseguiram nem se aperceberam da necessidade de justificar analiticamente as conjeturas a que chegaram.

Foi no estudo das famílias de funções em que se fixava o parâmetro a que se verificou a existência de alguma confusão no que diz respeito à determinação do lugar geométrico formado pelos vértices das respetivas parábolas.

Dois grupos foram da opinião que ao variar o parâmetro a, o lugar geométrico formado pelos vértices das parábolas era um ponto, como pretende ilustrar a Figura 16.

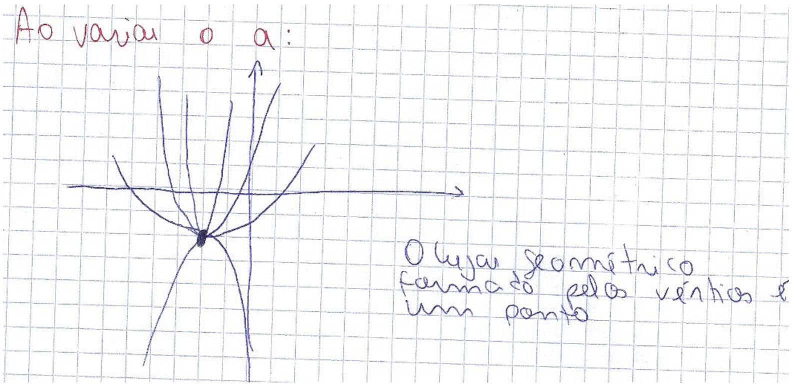


Figura 16. Conclusões do Grupo 2.

Por outro lado, como se pode ver na Figura 17, outro grupo de alunos considerou que o lugar geométrico formado pelos vértices das parábolas era uma reta vertical.

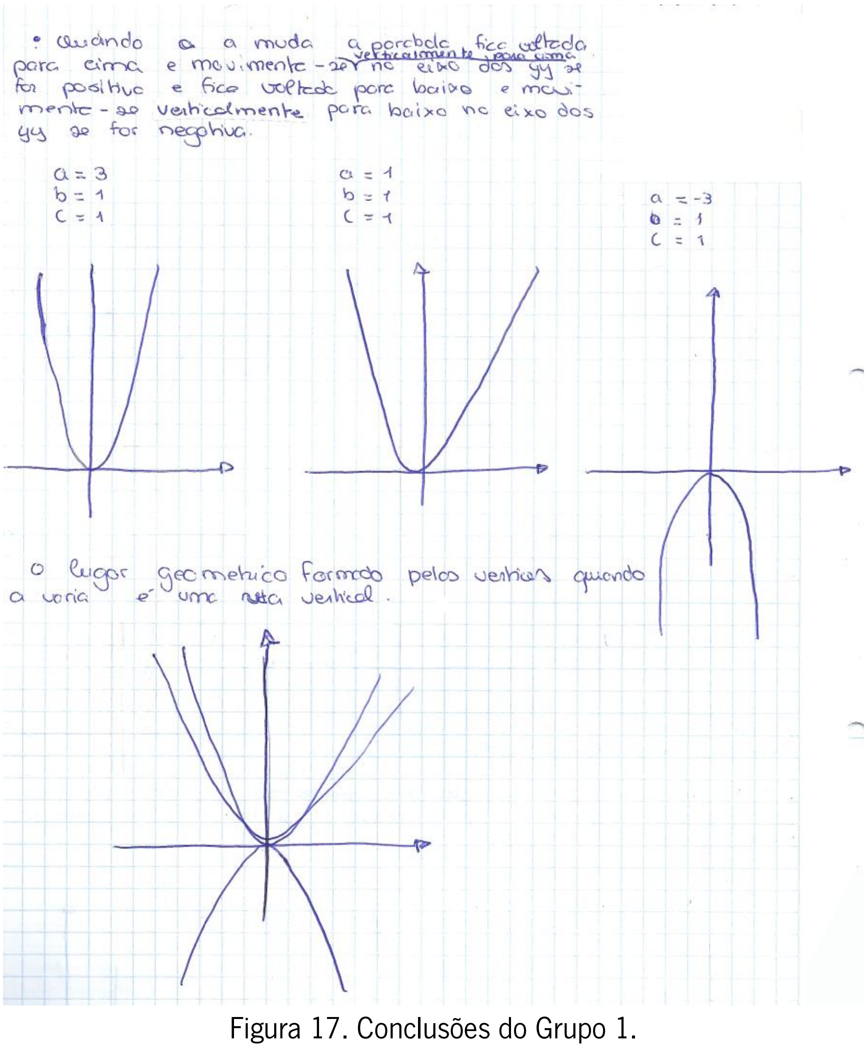
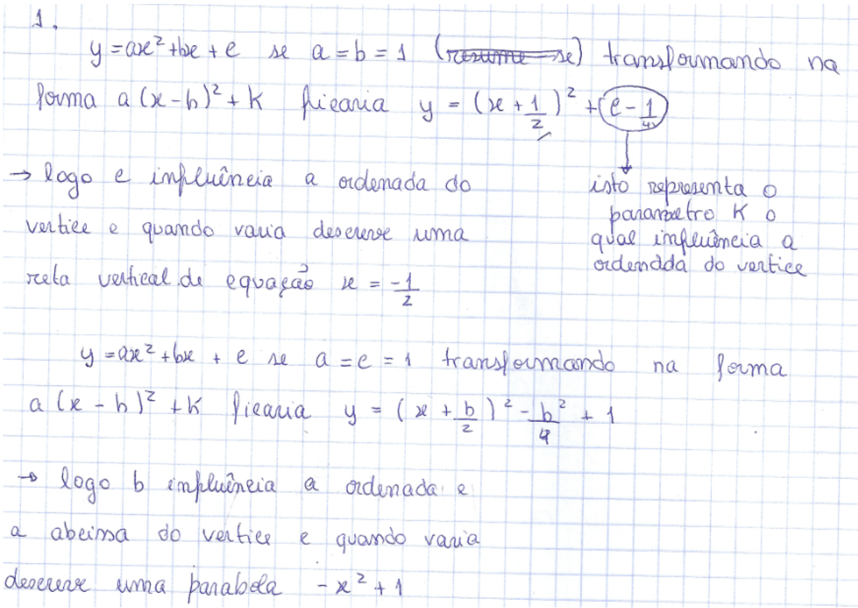


Figura 17. Conclusões do Grupo 1.

Apenas num grupo, os alunos tentaram demonstrar os seus raciocínios como se pode ver nas Figuras 18. É importante salientar que este grupo era formado por alunos com um bom desempenho na disciplina de matemática.



1.

$y = ax^2 + bx + c$ se $a = b = 1$ (~~resume~~ se) transformando na forma $a(x-h)^2 + k$ ficaria $y = (x + \frac{1}{2})^2 + (c - \frac{1}{4})$

→ logo c influência a ordenada do vertice e quando varia descreve uma reta vertical de equação $x = -\frac{1}{2}$

isto representa o parametro K o qual influência a ordenada do vertice

$y = ax^2 + bx + c$ se $a = c = 1$ transformando na forma $a(x-h)^2 + k$ ficaria $y = (x + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + 1$

→ logo b influência a ordenada e a abcissa do vertice e quando varia descreve uma parabola $-x^2 + 1$

Figura 18. Conclusões do Grupo 5.

Estes alunos começaram por tentar colocar cada uma das famílias de funções obtidas, após a fixação dos parâmetros, na forma $y = a(x - h)^2 + k$ pois sabiam rapidamente que o vértice teria coordenadas (h, k). Posteriormente, tentaram observar se existia alguma relação entre a ordenada e a abcissa dos vértices das parábolas de cada uma das famílias de funções consideradas.

Discussão final

No momento de discussão, os alunos mostraram-se pouco ativos, tendo sido em número reduzido os que participaram de forma espontânea. Além disso, como, em vários grupos, as conclusões não passaram de meras conjeturas, os alunos manifestaram sérias dificuldades no que diz respeito à prova dessas conjeturas.

> Professora: Então a que conclusões chegaram? Em primeiro lugar, quantas famílias de funções obtiveram tendo em conta a etapa 1?
>
> A15: São três famílias, uma variando o a, outra variando o b e outra variando o c.
>
> Professora: Muito bem, temos três famílias e, sendo assim, vamos ter três lugares geométricos diferentes.

O aluno, solicitado pela professora, dirigiu-se ao quadro e apresentou as famílias de funções que o seu grupo tinha considerado (Figura 19).

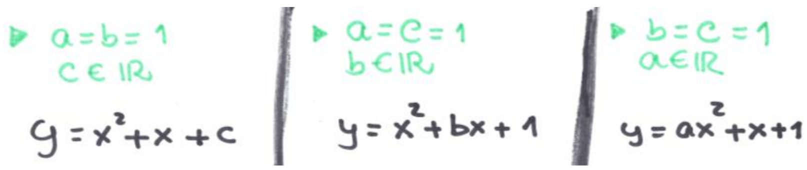


Figura 19. Resolução apresentada pelo aluno A15.

Apontando para a primeira família de funções, a professora perguntou aos alunos qual era o lugar geométrico formado pelos vértices das parábolas daquela família. Os alunos, com base no estudo intuitivo que realizaram, rapidamente referiram que seria uma reta vertical.

Seguidamente, recorrendo ao GeoGebra, os alunos tiveram a oportunidade de ver, de forma dinâmica, o que acontecia aos vértices da família de funções bem como o lugar geométrico que descreviam, tal como exemplifica a Figura 20.

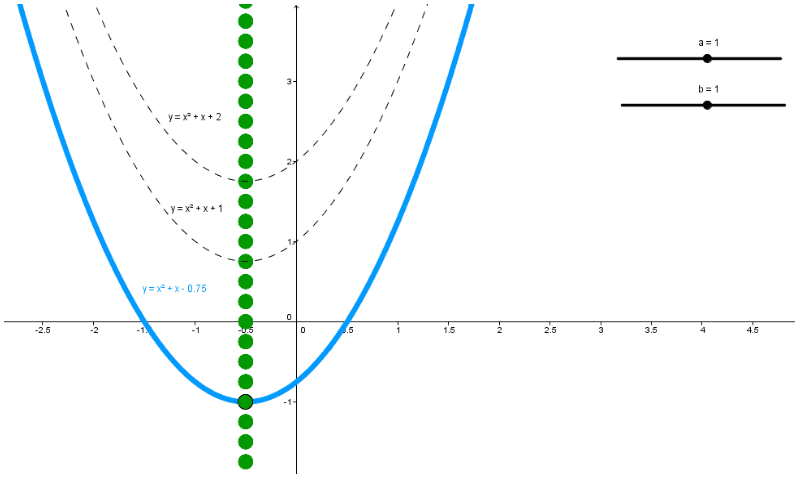


Figura 20. Lugar geométrico descrito pelos vértices da família de funções $y = x^2 + x + c$.

Neste momento, a professora tentou chamar a atenção dos alunos para a necessidade de provar a conjetura estabelecida, pois esta é apenas uma hipótese, uma possibilidade. Deste modo, para passar a ser considerada uma verdade matemática teria forçosamente de passar pelo processo de demonstração. Para tal, a professora solicitou a um aluno que viesse ao quadro tentar fazê-lo. Esse aluno revelou bastantes dificuldades, tendo sido apoiado pelos colegas e acompanhado pela professora.

> Professora: Quem quer ajudar o colega? Temos a família de funções $y = x^2 + x + c$, onde $c \in IR$. Se pretendemos estudar o lugar geométrico dos vértices, qual é o primeiro passo a fazer?
> A8: Será transformar a expressão numa da forma $y = a(x - h)^2 + k$ porque sabemos logo os vértices.
> Professora: E como vamos fazê-lo? O que sabemos acerca do desenvolvimento do caso notável $(x + a)^2$?
> Alunos: $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.

A professora, com base na igualdade de polinómios, explicou aos alunos que $2a = 1$, donde resulta $a = \frac{1}{2}$. Assim, teriam de considerar o caso notável $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ e ter em atenção a equivalência das expressões, como se mostra na Figura 21.

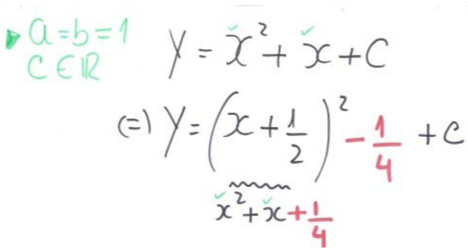


Figura 21. Resolução apresentada pela professora.

Apesar de já terem feito este tipo de cálculo bastantes vezes, os alunos não estavam a compreender o que se estava a fazer, mostrando-se apáticos e surpreendidos.

Professora: Perceberam?

Alunos: Donde vem o $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$?

Professora: Vem da igualdade de polinómios. Dois polinómios são iguais se tiverem os mesmos coeficientes. Reparem que o coeficiente do x^2 é igual, o que tem de acontecer também com o coefiente do x. Depois temos de ter cuidado com a equivalência das expressões porque considerando $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ sabemos que é igual a $x^2 + x + \frac{1}{4}$ e, portanto, como estamos a adicionar mais um termo, temos também de o subtrair pois, caso contrário, as expressões não são equivalentes.

Como puderam observar, os vértices das parábolas daquela família tinham coordenadas $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} + c)$, isto é, tinham todos a mesma abscissa, sendo que apenas a ordenada é que mudava consoante a variação do valor do parâmetro c. Logo, o lugar geométrico formado pelos vértices daquela família de funções quadráticas era, de facto, uma reta vertical, de equação $x = -\frac{1}{2}$.

Um estudo análogo foi realizado para as restantes duas famílas de funções e obtidas as expressões analiticas dos respetivos lugares geométricos resultantes. Este estudo analítico foi acompanhado com representações dinâmicas obtidas com o software GeoGebra.

Dificuldades sentidas pelos alunos

Durante a realização da tarefa investigativa, a professora apercebeu-se que os alunos estavam com bastantes dificuldades em começar o trabalho, pois mostravam-se perdidos sem saberem muito bem como começar a investigação. No entanto, durante o acompanhamento dos diferentes grupos de trabalho, a professora apelou para lerem o que estava na etapa 1 e organizarem ideias. Assim, com o auxílio da calculadora, foram construindo as primeiras conjeturas, mas a prova analítica não foi considerada necessária para muitos deles e levantou muitas questões no momento da discussão das conclusões como foi notório na secção anterior. Por um lado, apresentaram bastantes dificuldades na manipulação algébrica da expressão. Para grande parte destes alunos, a transformação da expressão $y = ax^2 + bx + c$ numa da forma $y = a(x - h)^2 + k$ foi um trabalho moroso.

Por outro lado, tiveram também dificuldades em relacionar a abcissa e a ordenada dos vértices. Quando as coordenadas dos vértices eram da forma $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} + c)$, rapidamente observaram que a abcissa de todos os vértices era fixa e igual a $-\frac{1}{2}$, apenas a ordenada mudava. Assim, perceberam facilmente que todos os vértices estavam sobre a reta de equação $x = -\frac{1}{2}$. E, portanto, o lugar geométrico formado pelos vértices das parábolas da família de funções era uma reta vertical. Contudo, tiveram dificuldade em observar a existência de alguma relação quando esta não era tão imediata.

Tarefa investigativa 3: O comportamento de uma função polinomial nos ramos infinitos

Como sabes, uma função polinomial de grau n é uma função do tipo $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n\ 1} + \ldots + a_{n\ 1}x + a_n$, onde $a_0 \neq 0$. Variando os valores de a_0 e n da função polinomial, estudar o valor para que tende cada um dos seus ramos infinitos. Organiza as conclusões a que chegaste numa tabela.

Esta tarefa investigativa foi proposta aos alunos na sétima aula da intervenção pedagógica, tendo como propósito o estudo do comportamento de uma função polinomial nos ramos infinitos. Pretendia-se, portanto, que relacionassem o coeficiente do termo de maior grau e o grau do polinómio e observassem para que valor tende cada um dos ramos infinitos da função.

Introdução da tarefa

Antes de distribuir o enunciado da tarefa, foi entregue aos alunos uma ficha informativa, que se encontra no Anexo 5, de modo a elucidá-los sobre o que é que se entende por estudar o comportamento de uma função nos ramos infinitos, bem como toda a terminologia matemática associada.

> Professora: O que entenderam da ficha? O que é isto de estudar o comportamento de uma função nos ramos infinitos?
> A20: É ver os valores da função quando x vai para infinito.
> Professora: Ok. Por exemplo, para a função f que está aí representada temos então que quando $x \to +\infty$, a sucessão das imagens também tende para mais infinito, isto é, $f(x) \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$, as imagens tomam valores cada vez mais pequenos, ou seja, $f(x) \to -\infty$.
> Temos também funções cujos ramos infinitos tendem para o mesmo valor, ou seja, funções que quando x toma valores infinitamente grandes ou infinitamente pequenos, a sucessão das imagens tende para, por exemplo, valores infinitamente grandes. Alguém me sabe dar um exemplo de uma função nestas condições?
> A15: Sim, a parábola com concavidade voltada para cima.
> Professora: Exatamente.

Como todos pareciam ter entendido, a professora organizou os grupos de trabalho e distribuiu o respetivo enunciado da tarefa, bem como fez uma leitura em grande grupo, salientando que agora apenas tinham de observar qual é a relação existente entre o coeficiente do termo de maior grau do polinómio, o seu grau e o comportamento da função nos ramos infinitos.

Desenvolvimento da tarefa

Num grupo de trabalho, os alunos foram estudando funções polinomiais de diferentes graus, mas em que o coeficiente do termo de maior grau era sempre positivo (Figura 22).

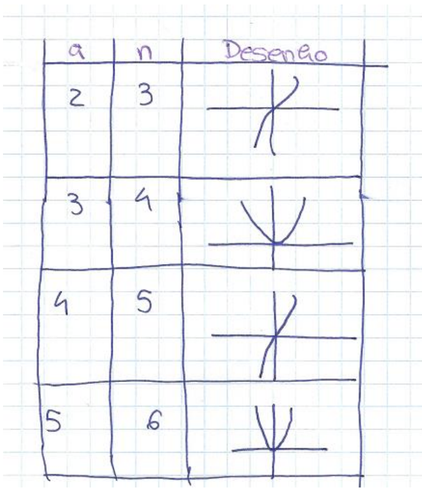


Figura 22. Trabalho realizado pelo Grupo 6.

Os alunos deste grupo nada conseguiram observar, pois nem sequer estudaram os casos em que o coeficiente do termo de maior grau era negativo.

Os restantes grupos aperceberam-se da necessidade de estudar diferentes casos, uns em que o grau do polinómio é par, outros em que é ímpar. Além disso, estudar também funções polinomiais cujo coeficiente do termo de maior grau é positivo e outras em que é negativo. Assim, com esta informação, os alunos foram representando algumas funções mas nada concluíram acerca da relação existente entre o coeficiente do termo de maior grau, o grau do polinómio e o comportamento da função polinomial nos ramos infinitos, tal como podemos observar na resolução da Figura 23.

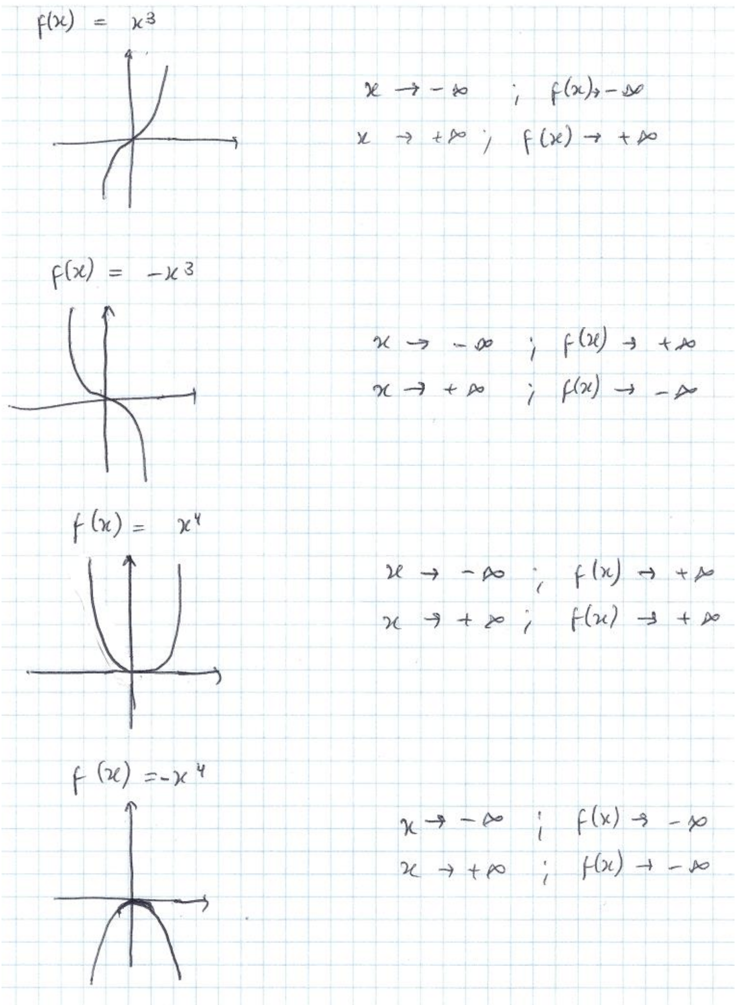


Figura 23. Exploração realizada pelo Grupo 2.

Além disso, à semelhança dos resultados obtidos noutros estudos, foi notório também que os alunos tendem a aceitar as conjeturas com base num número reduzido de testes. Por exemplo, na Figura 24, pode observar-se que apoiados no estudo de apenas quatro funções, os alunos generalizaram as suas conclusões, sem terem testado se as conjeturas que tinham eram válidas.

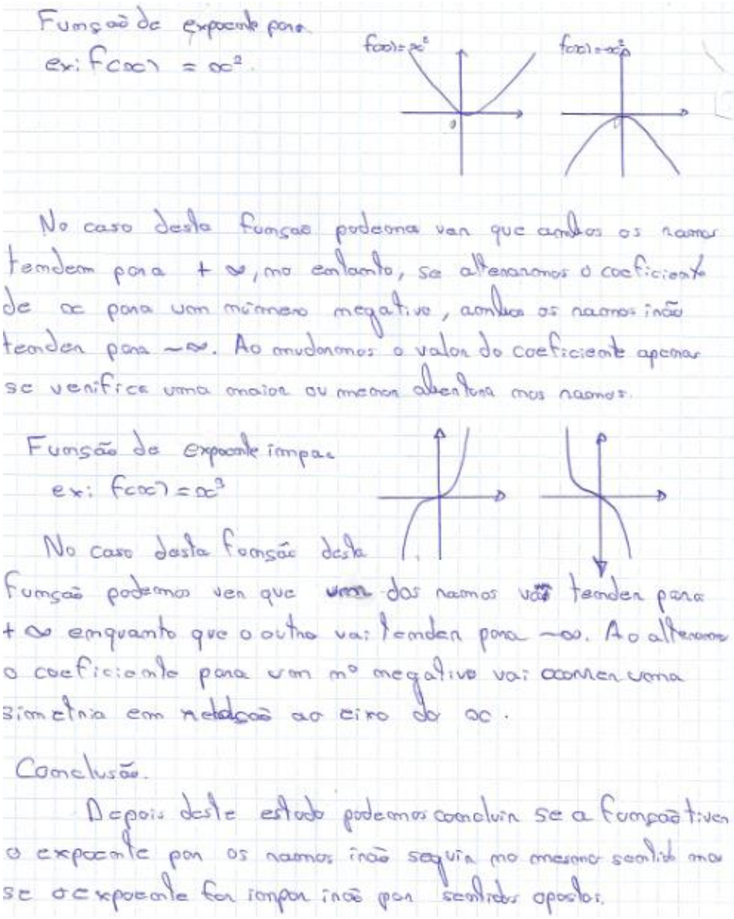


Figura 24. Exploração realizada pelo Grupo 4.

Apenas os alunos de dois grupos, após testarem as suas conjeturas, organizaram-nas numa tabela como podemos observar na Figura 25.

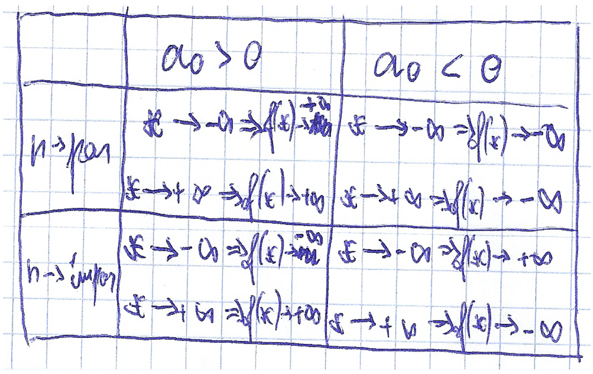


Figura 25. Conclusões obtidas pelo Grupo 3.

Na justificação das conclusões obtidas, os alunos manifestaram muitas dificuldades em exprimir, por escrito, os seus raciocínios, sendo que, muitas das vezes, apesar de pensarem corretamente, não os transmitem de forma correta e também não se preocupam com o rigor das suas afirmações (Figura 26).

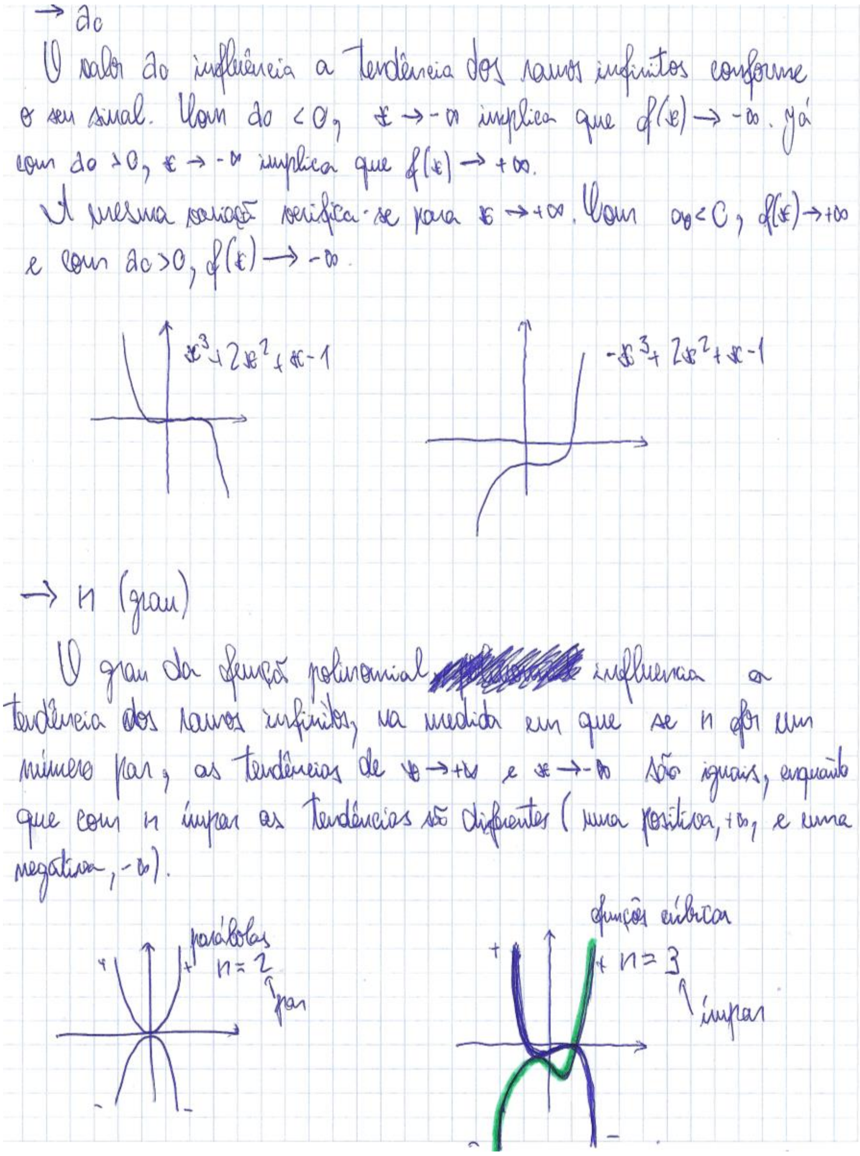


Figura 26. Conclusões obtidas pelo Grupo 1.

Como os alunos não possuíam conhecimentos suficientes para a realização da prova, este processo matemático não foi considerado quer durante a realização da tarefa por parte dos alunos, quer no momento da discussão dos resultados.

Discussão final

A professora observou que, num dos grupos, os alunos referiram que estudar o comportamento da função polinomial $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ nos ramos infinitos era equivalente a analisar o comportamento da função $f(x) = a_0x^n$. Contudo, como podemos observar na Figura 27, não chegaram a nenhuma conclusão acerca da relação existente entre o coeficiente a_0, o grau do polinómio e o comportamento da função nos ramos infinitos.

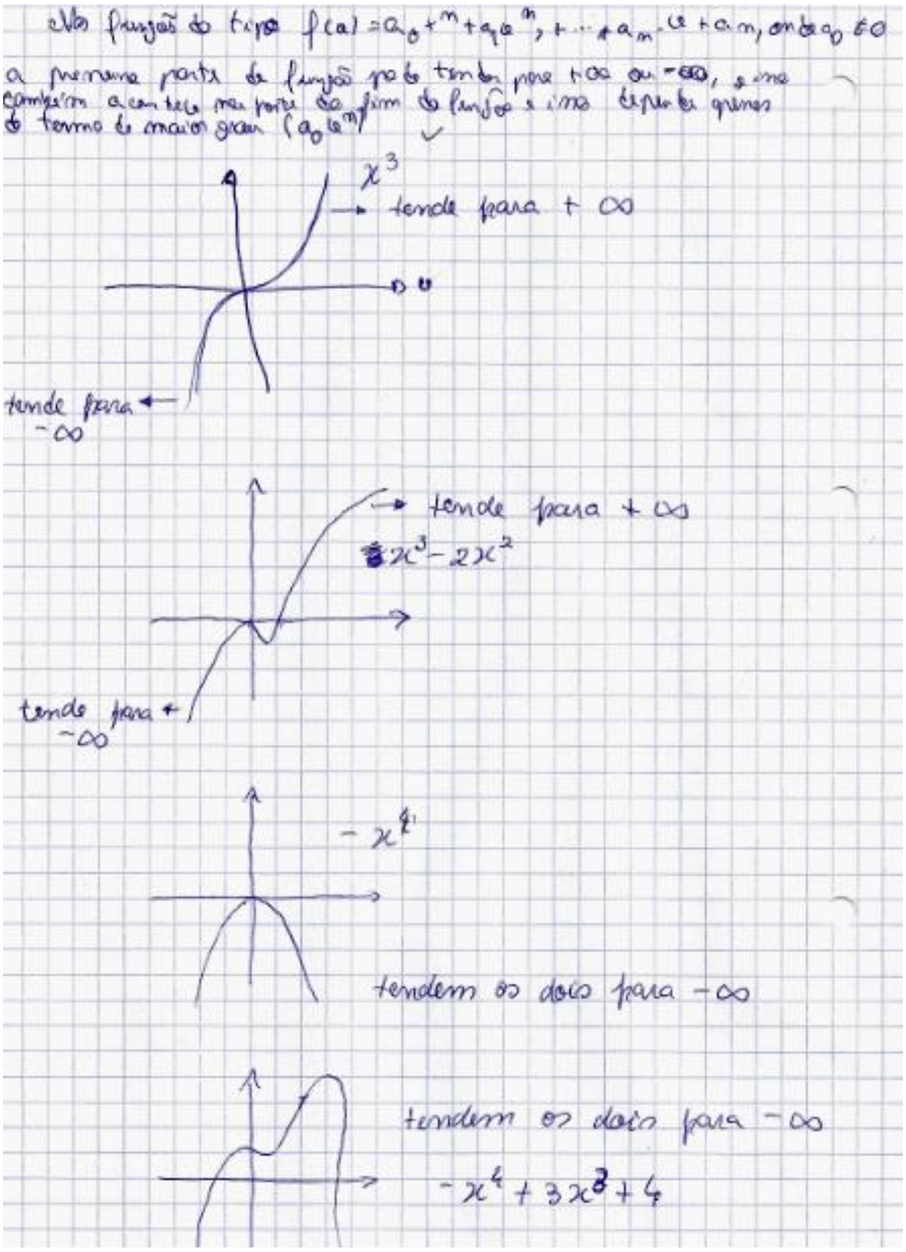


Figura 27. Conclusão obtida pelo Grupo 5.

Questionados sobre o porquê desta afirmação, os alunos apenas se limitaram a referir que observaram na calculadora gráfica. Por exemplo, o comportamento das funções $f(x) = x^3 - 2x^2$ e $g(x) = x^3$ nos ramos infinitos é exatamente o mesmo, o que se verifica para qualquer função. Como os alunos não tinham os conhecimentos necessários para provar esta afirmação, a professora optou por, intuitivamente, mostrar aos restantes alunos que, de facto, o que os colegas diziam estava correto. Para tal, a professora exibiu três representações gráficas das funções f e g, com diferentes janelas de visualização, onde se nota claramente que as duas funções tendem a aproximar-se cada vez mais, sendo que nos ramos infinitos se comportam da mesma forma (Figura 28).

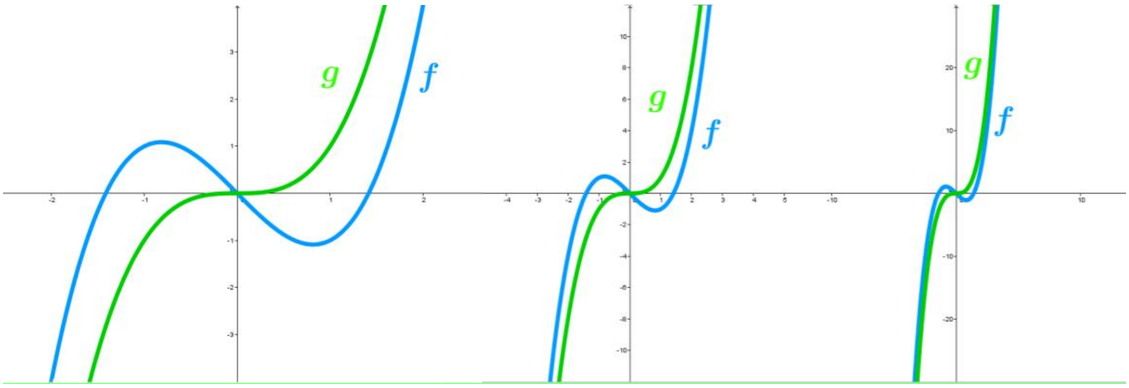


Figura 28. Representação gráfica das funções f e g com diferentes janelas de visualização.

Após esta discussão, a professora perguntou aos alunos que conclusões tinham obtido e como desenvolveram a sua investigação.

> Professora: A que conclusões chegaram? Qual é, portanto, a relação existente entre o coeficiente a_0, o grau do polinómio e o comportamento da função nos ramos infinitos?
> A15: Temos de estudar alguns casos.
> A18: o n par ou ímpar e quando a_0 é positivo ou negativo.

Posteriormente, com a representação gráfica de algumas funções ilustrativas dos diferentes casos referidos pelos alunos, foi construída a tabela da Figura 29 para sistematizar as conclusões obtidas.

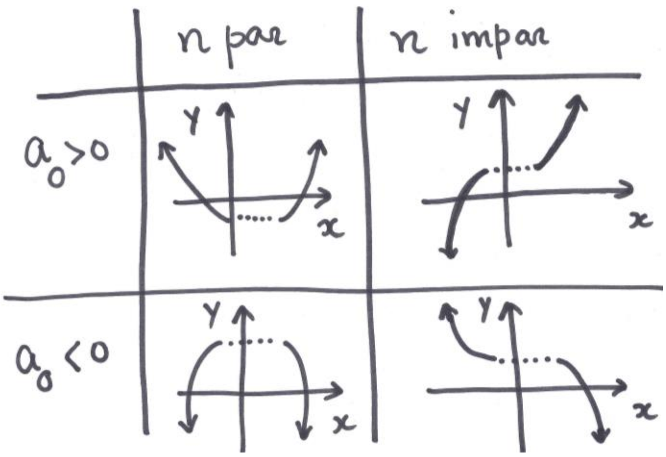


Figura 29. Tabela síntese das conclusões obtidas, elaborada pela professora.

Dificuldades sentidas pelos alunos

Após analisarem o conteúdo da ficha informativa que lhes foi fornecida, os alunos rapidamente perceberam em que consistia o estudo do comportamento de uma função nos ramos infinitos. Contudo, concluir a relação existente entre o coeficiente a_0, o grau do polinómio e o comportamento da função trouxe algumas dificuldades aos alunos. Sobretudo, muitos deles não pensaram que tinham de dividir a sua análise em diferentes casos, considerando o grau do polinomio par ou ímpar e o coeficiente do termo de maior grau positivo ou negativo. Assim, envolveram-se num estudo um tanto ao acaso, dando valores a a_0 e a n e sem saberem muito bem onde tinham de chegar. Alguns dos grupos de trabalho que separaram a sua análise por estes casos, não souberam retirar as devidas conclusões.

4.3. Perceções dos alunos após a intervenção pedagógica.

Após a intervenção pedagógica, os alunos responderam a um questionário que tinha como objetivo conhecer as suas perceções acerca da estratégia de ensino e aprendizagem delineada. Assim, este possuía questões relacionadas com as perceções dos alunos acerca da exploração de tarefas investigativas nas aulas de matemática, o modo como trabalharam durante a realização das mesmas e os recursos que utilizaram.

Perceções dos alunos acerca da exploração de tarefas investigativas nas aulas de matemática

A grande maioria dos alunos encara as tarefas investigativas como sendo algo em que são eles próprios a descobrir a matemática e a retirar as suas conclusões autonomamente: "é uma tarefa em que temos de descobrir a matemática por nós mesmos" (A19); "é uma tarefa onde temos de pôr em prática várias possibilidades até que a determinado momento chegámos a uma conclusão" (A15); "é uma tarefa onde os alunos, partindo de uma questão fornecida pelo professor, atingem resultados autonomamente" (A9). Salientam ainda que este tipo de tarefas permitem "colocar as questões e responder às mesmas, dentro de um tema" (A22). O aluno A15 refere ainda que as tarefas investigativas constituem um "desafio interessante, permitem desenvolver o raciocínio, sendo também muito úteis para descobrir nova matéria".

Na realização deste tipo de tarefa, os alunos salientaram ter muitas dificuldades. Em primeiro lugar, dez alunos referem sentir-se perdidos sem saberem bem por onde ou como começar o trabalho, visto que, como um deles salienta, "a própria pergunta das tarefas não é bem explícita" (A7). Além disto, como afirma o aluno A14, "passar para a folha o que penso e as minhas conclusões é uma dificuldade", sendo esta partilhada por mais oito alunos. De facto, ao longo da exploração das tarefas investigativas foi notório que estes apresentavam muitos problemas em exprimir verbalmente os raciocínios e as conclusões a que chegavam.

Sete alunos referem ainda a falta de conhecimentos, pois como observam estas “tarefas são introdutórias” (A22) e têm “de se demonstrar e resolver de uma forma geral com incógnitas e isso é mais difícil” (A2). Cinco alunos apontam ainda que tiveram pouco tempo disponível para a realização das tarefas e três referem que o trabalhar em grupo foi também uma dificuldade. Por um lado, os elementos do grupo não estavam em sintonia pelo que havia dispersão e perda de tempo e, por outro lado, é um facto que os alunos estão mais habituados a trabalhar sozinhos. Como A1 refere: “eu geralmente estou habituado a trabalhar sozinho, logo, apesar de não haver discussões ‘não saudáveis’ no grupo, foi uma dificuldade escrever não o que eu penso mas sim o que o grupo pensa”.

Em relação à tarefa investigativa de que mais gostaram, dez salientam a tarefa do comportamento de uma função polinomial nos ramos infinitos, justificando que foi a mais interessante, fácil e sobre a qual tinham mais conhecimentos. De seguida, nove alunos apontam que a que mais gostaram foi a do lugar geométrico formado pelos vértices das parábolas, apesar de a terem achado “muito teórica” (A23), foi a mais desafiante e a que contribuiu para que compreendessem melhor os conteúdos. Por fim, surge a tarefa do estudo dos parâmetros nos gráficos das famílias de funções com dois alunos a afirmarem ter sido a sua tarefa preferida.

À semelhança das conclusões obtidas no questionário anterior, existe ainda, como podemos observar na Tabela 12, uma percentagem elevada de alunos que prefere que seja o professor a expor os conteúdos, pois como referem, “percebe-se melhor a matéria e poupa-se tempo” (A13). De acordo com os alunos, o professor é mais objetivo e “a matéria exposta é mais clara e concisa” (A22). Apenas três alunos são da opinião que aprendem melhor matemática quando resolvem tarefas investigativas, referindo dois deles: “quando resolvo tarefas investigativas sou eu a descobrir” (A14) e “sou obrigado a pensar por mim próprio” (A17). Sete alunos afirmam que deve existir um equilíbrio na aprendizagem dos conteúdos matemáticos a partir da resolução de tarefas investigativas e a partir da exposição por parte do professor, referindo um deles: “deve haver um equilíbrio entre os dois. Se o professor explica é muito mais fácil e há tendência para perder a iniciativa e relaxar. Se só se resolverem tarefas investigativas, os alunos com mais dificuldades podem não entender a matéria” (A9).

Grande parte dos alunos não concorda que as tarefas investigativas devam integrar o trabalho a desenvolver, habitualmente, nas aulas de matemática. Sete alunos consideram que se confundem e outros quatro preferem que seja o professor a transmitir os conteúdos matemáticos. Além disso, na opinião de um aluno, a realização deste tipo de trabalho não os prepara para os testes.

Apenas oito alunos afirmam que sim, que as tarefas investigativas deviam integrar o trabalho a desenvolver na sala de aula, considerando que é uma metodologia de ensino e aprendizagem "inovadora" (A9). Por outro lado, como refere o mesmo aluno, as tarefas investigativas "requerem autonomia, força de vontade e iniciativa por parte dos alunos, estimulando o interesse.". Contudo, para além de desenvolver capacidades de raciocínio, a realização deste tipo de tarefa é uma "mais-valia" (A10) pois permite também desenvolver competências de trabalho em grupo.

Um dos alunos refere ainda que este tipo de tarefas "devem manter a frequência com que se efetuam este ano porque ajudam à compreensão de alguns temas, mas não são essenciais" (A13).

Tabela 12 – Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente às tarefas que habitualmente exploram nas aulas de matemática

Conceções sobre a matemática	Percentagem			$\bar{x}$	s
	DT/D	I	C/CT		
Acho importante estudar matemática porque aprendo a saber pensar	–	4	96	4,7	0,55
Gostei de descobrir na aula de matemática.	–	8	92	4,2	0,55
Compreendi melhor a matemática quando fui eu a descobri-la.	4	29	67	3,9	0,83
Gostei de ter liberdade quando resolvi tarefas matemáticas.	–	17	83	4,1	0,64
Senti-me confiante nos meus métodos de resolução das tarefas matemáticas.	4	21	75	4,0	0,82
Preferia que fosse o professor a apresentar os conteúdos matemáticos.	4	46	50	3,7	0,99
Gostei de realizar as tarefas investigativas nas aulas de matemática.	13	33	54	3,6	1,07
No futuro gostaria de aprender matemática resolvendo tarefas investigativas.	37	21	42	3,0	1,08

Nota: DT/D – Discordo Totalmente ou Discordo; I – Indiferente; C/CT – Concordo ou Concordo Totalmente.

O modo de trabalhar as tarefas investigativas nas aulas de matemática

Quando questionados sobre a importância de trabalhar em grupo na resolução deste tipo de tarefas, a esmagadora maioria dos alunos (21) afirma que sim, uma vez que esta metodologia permite a partilha de conhecimentos, pois "os diferentes pontos de vista são necessários à melhor realização destas tarefas" (A22). Além disso, possibilita o desenvolvimento de um ambiente onde todos cooperam, o que faz com que o trabalho se torne mais fácil.

Apenas três alunos consideram que não, fundamentando as suas opiniões com o facto de nem todos os elementos do grupo trabalharem e, portanto, "beneficia-se o que não faz nada" (A11). Por outro lado, referem que alguns colegas "não têm grande capacidade de cooperação" (A20), o que compromete o trabalho do grupo.

De facto, como podemos constatar, na Tabela 13, apenas na afirmação "Gostei de partilhar as minhas ideias com os meus colegas", os alunos parecem estar mais de acordo uns com os outros, uma vez que nas restantes afirmações, o desvio-padrão é um pouco elevado, existindo por isso uma grande variabilidade de opiniões.

Tabela 13 – Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente às tarefas que habitualmente exploram nas aulas de matemática

O modo como trabalham	Percentagem			$\bar{x}$	s
	DT/D	I	C/CT		
Preferia trabalhar sozinho do que em grupo.	58	13	29	2,5	1,28
Aprendi mais quando trabalhei em grupo do que sozinho.	29	21	50	3,5	1,26
Não gostei de trabalhar em grupo porque não me senti à vontade.	58	17	25	2,4	1,14
Gostei de partilhar as minhas ideias com os meus colegas.	4	21	75	4,0	0,82
Quando trabalhei em grupo, os meus colegas ajudaram-me a esclarecer as minhas dúvidas.	17	16	67	3,7	1,21

Nota: DT/D – Discordo Totalmente ou Discordo; I – Indiferente; C/CT – Concordo ou Concordo Totalmente.

Recursos utilizados nas aulas de matemática

Os alunos são da opinião que a utilização de recursos nas aulas de matemática é muito importante, uma vez que estes são instrumentos úteis na realização das tarefas da sala de aula. De acordo com o aluno A3, "a calculadora resolve praticamente tudo por nós, o que nos facilita o trabalho". Além disso, podemos "obter mais fácil e rápido os resultados e avaliá-los" (A9).

Doze alunos, direcionando o seu uso para a realização das investigações, destacam a sua utilidade, referindo dois deles: "a calculadora é um meio útil pois ajuda a realizar estas investigações, representando os gráficos das funções conseguimos ver mais rapidamente o que muda e o que permanece igual e não perdemos muito tempo" (A2); e "a calculadora permite observar gráficos e realizar algumas experiências" (A21). Assim, consideram que com a utilização de recursos compreendem "melhor a matéria" (A1, A4, A9 e outros).

Além disso, como podemos observar na Tabela 14, 71% dos alunos consideram que ficam mais motivados para aprender matemática quando têm a possibilidade de usar as calculadoras e os computadores, referindo também que se mantêm "mais atentos" (A4). Em média, consideram também que exploram tarefas diferentes do que quando usam papel e lápis, bem como pensam mais no significado e interpretação dos conceitos matemáticos.

Tabela 14 – Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativamente às tarefas que habitualmente exploram nas aulas de matemática

Recursos	Percentagem			$\bar{x}$	s
	DT/D	I	C/CT		
Fiquei mais motivado para aprender matemática quando usei calculadoras e computadores.	_	29	71	3,9	0,70
Quando usei calculadoras e computadores explorei tarefas diferentes do que quando usei papel e lápis.	_	8	92	4,3	0,61
Quando usei calculadoras e computadores pensei mais no significado e interpretação dos conceitos matemáticos.	4	17	79	4,0	0,73
No futuro gostaria de aprender matemática usando calculadoras e computadores.	_	21	79	3,9	0,57

Nota: DT/D – Discordo Totalmente ou Discordo; I – Indiferente; C/CT – Concordo ou Concordo Totalmente.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo apresentam-se as conclusões deste trabalho organizadas de acordo com as questões de investigação enunciadas. Referem-se ainda algumas das suas limitações, bem como recomendações para trabalhos futuros.

5.1. Conclusões

5.1.1. Tendo por referência os processos matemáticos e as fases do trabalho investigativo, que aspetos se salientam no processo de resolução de tarefas investigativas no tema Funções do 10º ano?

Tal como Ponte e Matos (1996) salientam, a atividade investigativa envolve "processos de raciocínio complexos que requerem um elevado grau de empenhamento e criatividade por parte dos alunos" (p. 1). Destes, destacam-se, a exploração inicial e a formulação de questões, a formulação e o teste de conjeturas e a procura de argumentos que validem as conjeturas que resistiram a sucessivos testes.

De facto, como as tarefas investigativas têm um ponto de partida pouco definido, vários autores salientam a importância de começar por uma exploração inicial que permita aos alunos explicitar a questão ou situação proposta e clarificar o foco da investigação (Brocardo, 2001; Ponte *et al.* 1999). Contudo, os dados empíricos analisados neste trabalho sugerem que os alunos não dão muita importância a esta fase da atividade investigativa. Os alunos começaram logo por definir estratégias de exploração, registo e organização dos dados, sem se preocuparem com o que era realmente o foco, o objetivo da sua investigação.

Após o trabalho de explicitação da situação proposta, a literatura aponta para a importância de colocar questões produtivas e interessantes que orientem a investigação. O que se observa nos resultados empíricos deste estudo é que esta etapa, designada por formulação de questões, não foi contemplada na atividade dos alunos.

À semelhança das conclusões obtidas por Brocardo (2001), os alunos após compreenderem o enunciado da tarefa não usaram o modo interrogativo, mas sim, o afirmativo avançando logo para as primeiras conjeturas. Para os alunos, o facto de formularem ou não questões não era, de todo, relevante pois o que lhes interessava era dar respostas. Deste modo, parecia-lhes mais natural formular afirmações que viessem a ser confirmadas ou refutadas pelo trabalho que realizassem. Brocardo da análise que faz a Frank (1988) e a Schoenfeld (1992) refere que esta característica poderá estar intimamente relacionada com a visão do seu papel enquanto alunos em que uma das facetas mais marcantes é a de obter respostas às questões do professor. Mesmo percebendo que são os responsáveis por decidir o rumo que o seu trabalho vai tomar, foi mais natural propor afirmações do que questões. Estes dados são consistentes com os resultados de vários estudos que apontam a formulação de questões como um aspeto que se reveste de particular dificuldade para os alunos (Brocardo, 2001; Diezmann *et al.*, 2001; Ponte & Matos, 1996).

A formulação e teste de conjeturas teve lugar em qualquer uma das tarefas investigativas que foi proposta aos alunos e foi o processo que surgiu mais naturalmente. Os alunos formulavam as suas conjeturas com base na observação e manipulação de representações gráficas fornecidas pela calculadora. Além disso, e à semelhança do observado noutros estudos (Brocaro,2001; Henriques & Ponte, 2008; Ponte *et al.*, 1999), os alunos formulavam conjeturas com base na análise de um número reduzido de casos, tendendo a identificá-las, imediatamente, como conclusões. Os estudos de Ponte *et al.* (2003), Brocardo (2001) e Fonseca (2000) sugerem que, por vezes, os alunos consideram as suas conjeturas verdadeiras após um número reduzido de testes devido ao esforço e envolvimento que têm na sua formulação.

Apesar dos momentos de discussão terem contribuído para que os alunos começassem a compreender o estatuto de uma conjetura e a aperceberem-se da necessidade de a comprovar matematicamente, o que se observou é que esta nem sempre esteve presente na sua atividade e foi o processo que mais dificuldades levantou. Poucos foram os alunos da turma que, por iniciativa própria, procuraram argumentos que pudessem validar as suas conclusões. De facto, os estudos existentes apontam que os alunos não sentem necessidade de justificar nem provar as suas conjeturas (Henriques & Ponte, 2008; Rocha, 2003). Os dados empíricos recolhidos neste estudo, mais uma vez, apontam também no mesmo sentido, pois para os alunos uma conjetura que se verificava para todos os exemplos que consideravam era automaticamente válida, não existindo qualquer necessidade de procurar argumentos que a justificassem. Por exemplo, na primeira tarefa, nenhum dos alunos comprovou, usando argumentos matematicamente válidos, as conjeturas a que tinham chegado. Contudo, na segunda tarefa, dois grupos de alunos já o tentarem fazer.

Tal como no estudo de Fonseca (2000), a prova teve uma fraca presença no trabalho desenvolvido pelos alunos. Os alunos não olhavam para a prova como um aspeto intrínseco da atividade investigativa, tal como sugere também o estudo de Brocardo (2001). A falta de hábito em procurar justificar os seus raciocínios aliada a uma certa falta de conhecimentos são motivos que poderão explicar o porquê dos alunos, mesmo no final da intervenção, continuarem a não ver a prova como um processo de extrema relevância.

Em suma, a atividade dos alunos consistiu em recolher dados, organizá-los e a analisá-los de modo a retirar conclusões (Brocardo, 2001). Assim, poderá afirmar-se que, infelizmente, a atividade matemática desenvolvida pelos alunos evidenciou poucas características da atividade investigativa, o que poderá também ter sido devido a alguma inexperiência da professora.

5.1.2. Que dificuldades sentem os alunos na realização deste tipo de tarefas?

Perante tarefas de natureza investigativa que, como já referimos anteriormente, são questões com uma estrutura mais aberta, os alunos sentiram-se perdidos sem saber como começar e o que fazer, o que foi muito visível nas duas últimas tarefas. Os alunos, para além de desorientados, pareciam estar um pouco à espera que fosse a professora a dizer o que era para fazer, sem se preocuparem primeiro em ler e interpretar o enunciado da tarefa. Na tarefa investigativa em que tinham de estudar o lugar geométrico dos vértices das parábolas, os alunos pareciam apáticos e a professora teve de referir explicitamente que podiam começar o seu trabalho investigativo lendo o que estava na etapa 1 e pondo mãos à obra. De facto, os resultados empíricos deste estudo vão ao encontro dos resultados obtidos por Rocha (1996), Ferreira (2007) e Henriques e Ponte (2008), pois a realidade é que os alunos estão habituados a que seja o professor a transmitir os conteúdos matemáticos, eles apenas ouvem os conhecimentos que lhes são transmitidos e limitam-se a reproduzi-los em tarefas rotineiras. Por outro lado, apesar do programa de matemática do ensino secundário recomendar a realização deste tipo de tarefas, o que se nota é que também os manuais escolares, mais concretamente o analisado durante a intervenção, não contemplam ou possuem um número reduzido de tarefas desta natureza. Deste modo, quando estão perante tarefas investigativas, que são propostas muito menos guiadas, em que têm de pensar por si próprios, naturalmente que os alunos se sentem desorientados. Contudo, foi-se observando que os alunos da turma foram adquirindo alguma sensibilidade e aos poucos alguns foram percebendo que tinham de definir objetivos e caminhos a seguir.

A maioria dos grupos não realizou qualquer prova, mesmo depois de a professora os chamar atenção para a sua relevância. Analogamente às conclusões obtidas no estudo de Brocardo (2001), para os alunos da turma, a prova era uma complicação desnecessária introduzida pela professora. Uma conjetura que resistia a sucessivos testes era claramente verdadeira, não necessitando de ser provada. Assim, nas suas resoluções apenas se observavam as conclusões a que chegaram, suportadas pelas representações gráficas que tinham considerado, o que na sua ótica já era suficiente.

Por este motivo, no momento da discussão final, a demonstração de alguns aspetos foi um "bicho-de-sete-cabeças", na medida em que poucos alunos estavam a compreender, sentindo-se completamente perdidos e manifestando muitas dificuldades. A justificação e a prova de conjeturas são processos que se revestem de particular dificuldade para os alunos. Os próprios constatam que, em tarefas desta natureza, terem de demonstrar para o caso geral é mais complicado e traz muitas dificuldades.

A comunicação, quer oral quer escrita, é também um aspeto importante da atividade investigativa onde podem surgir muitas dificuldades. Os dados empíricos obtidos neste estudo vêm corroborar o resultado de diversas investigações que sugerem que a comunicação escrita é um problema para os alunos, pois estes manifestam sérias dificuldades em exprimir no papel os seus pensamentos e raciocínios. Como afirma Mason (1996), os alunos não estão dispostos a perder tempo, voltando atrás no seu trabalho escrevendo-o. Por exemplo, na última tarefa foram analisadas algumas resoluções que apenas possuíam a tabela pedida para os alunos organizarem as conclusões a que tinham chegado, sem a inclusão de registos de representações gráficas que os ajudassem a formular conjeturas, nem qualquer outra justificação. Por outro lado, os registos que alguns efetuavam eram pouco explícitos, notando-se também a falta de preocupação com o rigor matemático de algumas afirmações.

5.1.3. Quais as perceções dos alunos sobre a experiência de exploração das tarefas de investigação?

As conceções que os alunos têm da matemática e da sua aprendizagem condicionam o modo como se envolvem nas tarefas matemáticas (Matos, 1991). Assim, neste estudo tentou-se perceber que visões tinham os alunos sobre a matemática, bem como compreender em que medida influenciava o modo como exploravam as tarefas investigativas. Cruzando esta informação com a obtida, no final da intervenção, relativa às perceções dos alunos sobre a estratégia de ensino e aprendizagem baseada na exploração de tarefas investigativas, tentámos compreender se esta experiência foi ou não profícua para estes alunos e se contribuiu para alguma mudança significativa das suas conceções em relação à matemática e à sua aprendizagem.

De facto, de acordo com Ponte (1992)

> A Matemática é um assunto acerca do qual é difícil não ter conceções. É uma ciência muito antiga, que faz parte do conjunto das matérias escolares desde há séculos, é ensinada com carácter obrigatório durante largos anos de escolaridade e tem sido chamada a um importante papel de seleção social. Possui, por tudo isso, uma imagem forte, suscitando medos e admirações (p. 1)

Neste estudo foi possível observar que a matemática é tida para alguns alunos da turma como uma disciplina difícil, onde poucos conseguem ter sucesso, referindo explicitamente que é uma disciplina apenas para alguns. Apesar de na sua visão, alguns alunos, não a reduzirem ao cálculo, muitos deles consideram que em matemática o objetivo é obter respostas certas, o papel do aluno é receber conhecimentos e demonstrar os que adquiriu e o papel do professor é transmitir conhecimentos e verificar os que os alunos adquiriram. Algumas destas conceções acerca da matemática e da sua aprendizagem estão de acordo com as obtidas por Frank (1988) no seu estudo. A esmagadora maioria dos alunos da turma estava, indubitavelmente, marcada por uma experiência de ensino e aprendizagem da matemática baseada na exposição dos conteúdos por parte do professor, na resolução de exercícios e, por fim, na correção dos mesmos no quadro.

No final da intervenção, a visão dos alunos não se alterou muito, visto que ainda um número considerável de alunos concordou que as tarefas investigativas não devem integrar o tipo de trabalho a desenvolver, habitualmente, nas aulas de matemática por considerarem que estas confundem, que aprendem melhor quando é o professor a transmitir os conteúdos pois é mais objetivo e porque, na sua ótica, as tarefas investigativas não os preparam para os testes.

Apenas um número reduzido de alunos (com melhor desempenho na disciplina de matemática) manifestaram a sua preferência por descobrir por eles próprios os conteúdos e por desempenharem um papel ativo na construção do conhecimento matemático.

Tal como referem vários autores (Ponte, 1992; Schoenfeld, 1992), as fortes conceções dos alunos e as experiências vividas na sala de aula têm efeitos que se refletem de forma intensa e, por vezes, muito negativa no processo de ensino e aprendizagem, condicionando, em grande medida, o modo como se envolvem naquilo que lhes é proposto.

5.2. Limitações e Recomendações

Este estudo teve sujeito a alguns fatores, uns internos outros externos, que condicionaram o seu desenvolvimento. Em primeiro lugar, os alunos estão mais habituados a receber o conhecimento do que a envolverem-se e a desempenharem um papel ativo na sua construção. De facto, as fortes conceções que os alunos possuíam em relação à matemática e à sua aprendizagem condicionou o modo como eles se envolveram na realização das tarefas que lhes foram propostas, não lhes reconhecendo até grande valor. Assim, tem-se consciência que se o estudo se prolongasse por mais tempo, os alunos eventualmente poderiam mudar as suas opiniões, à semelhança do que ocorreu noutros estudos (Brocardo, 2001), e as conclusões obtidas seriam melhores e mais consistentes. O fator tempo foi muito limitador, pois não permitiu que os alunos pudessem aprofundar o seu trabalho, bem como impediu que as discussões das conclusões fossem mais abrangentes. Mas, a realidade é que a gestão curricular assim o obriga, existe um programa extenso que efetivamente tem de se cumprir. Em segundo lugar, foi algo difícil lidar com a desmotivação de alguns alunos, uns que visivelmente apresentam muitas dificuldades e outros que não querem mesmo saber da disciplina de matemática. Todos estes fatores aliados a alguma inexperiência por parte da professora influenciaram os resultados deste estudo.

O método de ensino tradicional, centrado na exposição dos conteúdos pelo professor, seguida da realização de exercícios com vista à repetição de procedimentos básicos, apesar de ser uma prática dominante nas nossas escolas, não é, de todo, a mais adequada para lidar com as atuais exigências curriculares (Canavarro, Oliveira & Meneses, 2008). Hoje em dia, mais do que saber executar algoritmos e procedimentos repetitivos, exige-se aos alunos flexibilidade intelectual e capacidades para lidar com múltiplas situações. De facto, uma aprendizagem eficaz requer que os alunos se envolvam ativamente em tarefas diversificadas que lhes permitam o desenvolvimento de capacidades de ordem superior. É necessário formar cidadãos críticos, participativos e autónomos e, por isso, é impreterível que se abandone o método tradicional de ensino, substituindo-o por outro que valorize o diálogo e a descoberta, isto é, a atividade do aluno.

Nesta perspetiva, as tarefas de investigação assumem um lugar privilegiado, já que possibilitam aos alunos adotarem um papel ativo na construção do seu próprio conhecimento matemático. Dadas as potencialidades que as tarefas investigativas podem ter na aprendizagem, reconhecidas por inúmeros autores (Segurado, 1997; Fonseca, 2000; Brocardo, 2001), indicam-se de seguida algumas recomendações para futuros professores que tencionem proporcionar aos seus alunos o contacto com a atividade investigativa, bem como algumas questões para trabalhos futuros.

Uma aula com investigações coloca desafios significativos aos alunos mas também às práticas dos professores, uma vez que envolver os alunos em atividade investigativa requer uma dinâmica diferente, desde logo uma planificação cuidada. Como já foi referido anteriormente, o trabalho investigativo envolve três momentos fundamentais: a introdução da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e a discussão final das conclusões, sendo que o professor tem um papel importante em cada uma destas fases. Com base na reflexão desenvolvida no seio do projeto MPT, Tudella, Ferreira, Bernardo, Pires, Fonseca, Segurado *et al.* (1999) concluem que estes três momentos devem ser planificados tendo em conta a experiência dos alunos na realização deste tipo de atividades, a forma como a tarefa está estruturada e a organização da sala de aula.

É natural que os alunos não estando familiarizados com a atividade investigativa se sintam desorientados, pelo que é importante que inicialmente a tarefa forneça alguma orientação. Tal como Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) referem: "o aumento da experiência neste tipo de trabalho leva a que os alunos criem progressivamente uma maior independência em relação ao professor e percebam mais facilmente o que lhes é pedido" (p. 6). Na fase do desenvolvimento da tarefa, o professor deve garantir que esta se centra na atividade do aluno e, por fim, o momento da discussão das conclusões deve ser uma oportunidade para os alunos refletirem sobre essa mesma atividade (Brocardo, 2001), criticando e questionando as ideias dos colegas, argumentando os seus raciocínios utilizando linguagem matemática adequada.

O modo como os alunos vão trabalhar é também importante ter em conta pois, tal como os resultados de vários estudos indicam, uma metodologia de trabalho em pequeno grupo influencia positivamente a realização deste tipo de tarefas, devido à possibilidade dos alunos comunicarem e debaterem ideias entre si.

Além disto, tendo como pano de fundo os resultados e a experiência que este estudo possibilitou, fazem-se algumas sugestões para futuras investigações. Em primeiro lugar, seria interessante analisar o envolvimento dos alunos em tarefas investigativas noutros temas matemáticos. Por outro lado, visto que no decorrer deste estudo os alunos com melhor desempenho na disciplina de matemática foram os que mais se evidenciaram e envolveram na realização deste tipo de tarefa, seria interessante desenvolver um estudo, com maior profundidade, onde se observasse a adesão dos alunos com diferentes níveis de desempenho na exploração de tarefas investigativas.

Finalmente, em termos formativos, teria impacto nas práticas dos professores que eles, por exemplo, nos processos de formação contínua, planificassem aulas com este tipo de tarefas, posteriormente, as implementassem na sala de aula e, por fim, discutissem e refletissem sobre elas, partilhando as suas experiências.

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projeto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do projeto Mat789* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A matemática na Educação Básica. Reflexão participada sobre os currículos do ensino básico.* Lisboa: ME – DEB.

Abrantes, P., Ponte, J.P., Fonseca, H. & Brunheira, L. (Orgs.) (1999). *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM e Projecto MPT.

Amaral H. (2003). *Actividades investigativas na aprendizagem da Matemática no 1º ciclo*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.

Azevedo, A. (2009). *O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem de funções. Uma experiência com alunos do ensino secundário*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. In E. von Glasersfeld (ed.), *Radical construtivism in Mathematics Education* (pp. 89-110). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). Investigação Qualitativa em Educação. Uma Introdução à Teoria e aos Métodos. Porto: Porto Editora.

Braumann, C. (2002). Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Atividades de investigação na aprendizagem de matemática e na formação de professores* (pp. 5-24). Lisboa: SEM-SPCE.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de Matemática: Um projeto curricular no 8ºano*. (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for research in mathematics education*, 15(1), 35-49.

Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. & Yevdokimov, A. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning*, 5 (1), 55-72.

Canavarro, A. P., Oliveira, H. & Meneses, L. (2008). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso da Célia. Consultado em http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/textos/GD1-13%5B1%5D_COM.pdf

Caraça, B. *Conceitos fundamentais da matemática* (3ª edição das partes I, II, III). Lisboa: Sá da Costa, 1958.

Chazan, D. (1993). High school geometry students justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (4), 359-387.

Christiansen, B. & Walter, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. Howson, & M. Otte (Orgs.), *Perspective on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: Reidel.

Cockcroft, W. (1982). *Mathematics counts*. London: Her Majesty Stationery Office.

Demana, F. & Waits, B. K. (1992). A computer for all students. *The Mathematics Teacher*, 85, 94-95.

Diezmann, C. M., Watters, J. J. & English, L. D. (2001). Implementing mathematical investigations with young children. In *Proceedings 24th annual conference of the Mathematics Education research group of Australasia* (pp. 170-177). Sydney.

Dias, E., Viseu, F., Cunha, M. & Martins, P. (2013). A natureza das tarefas e o envolvimento dos alunos nas atividades da aula de matemática. In *Atas do XII Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia*. Braga: Universidade do Minho (pp. 4624-4639).

Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. Cunha Leal e J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados* (pp. 25-47). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Fernandes, J. A. & Vaz, O. (1998). Porquê usar tecnologia nas aulas de matemática? *Boletim da SPM*, n.º 39, 43-55.

Fernandes, J. A. (1998). Tecnologia gráfica no estudo de classes de funções. *Educação e Matemática*, n.º 46, 33-36.

Ferreira, C. M. (2007). *Alunos do 8. º ano perante actividades de investigação matemática: Perspectivas, atitudes e implicações*. Dissertação de Mestrado, Universidade Portucalense, Porto.

Ferreira, E. (2005). *Ensino e aprendizagem de Geometria em Ambientes Geométricos Dinâmicos: O tema de Geometria do Plano no 9. º ano de escolaridade.* Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga.

Fonseca, C. N. (1999). *Interacções em pequenos grupos em resolução de problemas e actividades investigativas na aula de Matemática: Uma experiência no 8.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto. Lisboa: APM.

Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula.* Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Fonseca, H., Brunheira, L., & Ponte, J. P. (1999) *As actividades de investigação, o professor e a aula de matemática.* Lisboa: APM.

Frank, M. (1988). *Problem Solving and mathematics beliefs*. *Arithmetic teacher*, 35, 32-34.

Frobisher, L. (1994). Problems, investigations and an investigative approach. In A. Orton e G. Wain (Eds.), *Issues in teaching mathematics* (pp: 150-173). London: Cassel.

Gravina M. A. e Santarosa L. M. (1998). *A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados*. Brasília: IV Congresso RIBIE.

Guimarães, H. M. (2005). A resolução de problemas no ensino da Matemática. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Orgs.), *Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas. Actas do encontro internacional em homenagem a Paulo Abrantes* (pp. 145-166). Lisboa: APM.

Guzmán, M. (1993). *Tendencias innovadoras en la educación matemática*. Boletim da S.P.M., 25, pp. 9-34.

Hadamard, J. (1945). The psychology of invention in the mathematical field. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Hatch, G. (1995). If not investigations- What?. *Mathematics Teaching*, 151, 36-39.

Henriques, A. & Ponte, J. P. (2008). Actividades de investigação na aprendizagem de Análise Numérica*. Revista da Educação*, 16 (2), 5-32.

Hilbert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 67-97). New York: Macmillan.

Hish, K. (1971). Creativity in classroom: A discussion of the place of original work in a mathematical education. *International Journal for Mathematics Education, Science and Tecnology*, vol.2, 21-29.

Johnson, D., & Johnson, R. (1990). Using cooperative learning in math. In N. Davidson (Ed.), *Cooperative learning in mathematics* (pp.103-125). S. Francisco: Addison-Wesley.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations: Essai sur la logique de la découverte mathématique*. Paris: Hernann. (Trabalho original em inglês, publicado em 1968)

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), 29-63.

Marques, L. & Praia, J. (1991). *Ensino-aprendizagem das Ciências: Possíveis contributos para reflexão*. *Aprender*, 14, 11-18.

Mason, J. (1996). Resolução de problemas matemáticos, no Reino Unido: Problemas abertos, fechados e exploratórios. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para a prender Matemática* (pp. 89-105). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Matos, J. F. (1991*). Logo na Educação Matemática: Um estudo sobre as concepções e atitudes dos alunos* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Matos, J. & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ministério da Educação (2001a). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação (2001b). *Programa de Matemática A* (10.º ano). Lisboa: Autor.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM. (Trabalho original em Inglês, publicado em 1989)

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original em Inglês, publicado em 1991)

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Trabalho original em Inglês, publicado em 2000)

Newman, J. R. (1974). Srinivasa Ramanujan. In M. Kline (Org.), *Matemáticas en el mundo moderno* (pp. 84-88). Madrid: Blume.

Oliveira. H. (1998). *Actividades de investigação na aula de Matemática: aspectos da prática do professor* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Oliveira, H., Segurado, I., Ponte, J., & Cunha, M. (1999). Investigações na sala de aula: Um projeto colaborativo. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 121-132). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Pehkonen, E. (1997). Introduction to the concept "open-ended problems". In E. Pehkonen (Ed.), *Use of open-ended problems in mathematics classroom* (pp. 7-11). Helsinki: Department of Teacher Education, University of Helsinki.

Pirie, S. (1987). *Mathematical investigations in your classroom*. London: The Open University.

Poincaré, H. (1996). A invenção matemática. In P. Abrantes, L. Cunha Leal e J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados* (pp. 7-13). Lisboa: Projecto MPT e APM. (Trabalho original em Francês, publicado em 1908).

Pólya, G. (1945). How to solve *it: A new aspect of the mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery* (edição original de 1962/1965). New York: Wiley.

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. In *Educação matemática: Temas de investigação* (pp. 185-239). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de trabalho de investigação (Ed*.), O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interacções sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 119-138). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da matemática*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H. & Varandas, J. (1999a). Investigando as aulas de investigações matemáticas. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 133- 151). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Varandas, J. M., Brunheira, L. & Oliveira, H. (1999b). *A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas*. Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática para o 1º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Costa, C., Rosendo, A. I., Maia, E., Figueiredo, N. & Dionísio, A. F. (2002). Introdução. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp.1-4). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Quivy, R.; Campenhoudt, L.V. (1992) *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Gradiva-.

Ramos, J. S. (1997). Matemática experimental. *Educação e Matemática, 45*, 7-10.

Roa, R., Correia, P. F. & Fernandes, J. A. (2009). Percepciones de los estudiantes de una clase de bachillerato sobre una intervención de enseñanza en Combinatoria. In María Guzmán P. (Coord.), *Arte, Humanidades y Educación: Aportaciones a sus ámbitos científicos* (pp. 323-347). Granada, Espanha: Editorial Atrio.

Rocha, C. (2003). *Uma experiência com actividades de investigação na aula de Matemática. Competências matemáticas, atitudes e concepções de dois alunos do 7.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto, Porto.

Rocha, H. (1996). Investigando com a calculadora gráfica. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para a prender Matemática* (pp. 183-191). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Santos, L., Brocardo, J., Pires, M., Rosendo, A. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2° ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Atividades de investigação na aprendizagem de matemática e na formação de professores* (pp. 83-106). Lisboa: SEM-SPCE.

Schoenfeld, A. (1991). What's all the fuss about problema solving? *ZDM*, 23(1), 4-8.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouwes (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Segurado, I. (1997). *A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2.º ciclo.* Dissertação de mestrado (Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Silva, J. S. (1975*). Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (1° volume). Lisboa: Gabinete de Estudos e Planeamento.

Silva, J. S. (1978). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (vol. 2 e 3). Lisboa: Ministério da Educação Nacional.

Silva, D. & Seixas, S. (2010). As competências que a calculadora gráfica promove no ensino/aprendizagem da matemática: Um estudo de caso numa turma do 11.º ano. In: *Revista Interacções*, v. 6, nº 15, p. 141-172.

Singh, S. (1998*). A solução do último teorema de Fermat*. Lisboa: Relógio d'Água.

Tudella, A., Ferreira, C., Bernardo, C., Pires, F., Fonseca, H., Segurado, I. e Varandas, J. (1999). Dinâmica de uma aula com investigações. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca e L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 87-96). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Tuckman, B. W. (2002). *Manual de Investigação em Educação*. Fundação Calouste Gulbenkian.

Varandas, J. M. & Nunes, P. (1999). Actividades de investigação: Uma experiência no 10.º ano. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 169- 173). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Vygotsky, L.S. (1986) *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores* (6ª ed.). São Paulo: Martins Fontes.

Viseu, F. & Oliveira, I A. V. (2012). Open-ended tasks in the promotion of classroom communication in mathematics, *International Electronic Journal of Elementary Education*, 4 (2), 287-300.

Yeo, J. (2007). *Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment*. Singapore: National Institute of Education, Nanyang Technological University.

ANEXO 1

1º Questionário

Este questionário, que venho pedir-te que respondas, tem por objetivo conhecer as tuas perceções acerca da matemática.

A informação que vais partilhar é da maior importância para o estudo que se pretende realizar. Por esta razão, é necessário que o leias com atenção e respondas a todas as questões com sinceridade e empenho.

Pela minha parte, comprometo-me a não usar os dados obtidos a não ser para o uso exclusivo deste estudo, garantindo sempre o anonimato das respostas.

Muito obrigada pela colaboração

Maria Lúcia Ribeiro Fertuzinhos

Dados pessoais

Nome:____

Idade: ________ Sexo: ☐ Masculino ☐ Feminino

Classificação que obtiveste na disciplina de matemática no 9º ano: ________

Classificação que obtiveste na disciplina de matemática no 1º período do 10º ano: ________

Número de repetências de ano durante o teu percurso escolar: ________

---

1. O que é a Matemática para ti?

2. Achas importante estudar Matemática? Porquê?

3. O que <u>mais</u> gostas na aula de Matemática?

4. O que <u>menos</u> gostas na aula de Matemática?

5. Como gostarias que fossem as tuas aulas de Matemática?

6. Na aula de matemática são realizados diferentes tipos de tarefas, tais como *exercícios*, *problemas*, *investigações*, *projetos*, *jogos*, etc. Ao longo do teu percurso escolar, que tipos de tarefas realizaste nas aulas de matemática? Com que frequência as realizaste?

7. Dos tipos de tarefas que realizaste, qual ou quais consideras que contribui para uma aprendizagem matemática mais profunda? Porquê?

8. Costumas trabalhar nas aulas de matemática individualmente, em pares ou em pequenos grupos? Qual a forma mais usal de trabalhar?

____

____

____

9. Na tua opinião, quais as <u>vantagens</u> do trabalho de grupo na aula de Matemática?

____

____

____

10. Na tua opinião, quais as <u>desvantagens</u> do trabalho de grupo na aula de Matemática?

____

____

____

11. Nas aulas de matemática são usados diferentes recursos/materiais didáticos, tais como *manual escolar*, *caderno diário*, *quadro e giz*, *fichas*, *calculadora*, *computador*, *materiais manipuláveis*, etc. Ao longo do teu percurso escolar, que recursos usaste nas aulas de matemática? Com que frequência os utilizaste?

____

____

____

12. Dos recursos que usaste, qual ou quais consideras que contribui para uma aprendizagem matemática mais profunda? Porquê?

____

____

____

13. Em cada uma das afirmações seguintes assinala a opção de resposta que melhor traduz a tua opinião, atendendo à seguinte escala: **DT**: Discordo Totalmente; **D**: Discordo; **I**: Indiferente; **C**: Concordo; **CT**: Concordo Totalmente.

Afirmações	DT	D	I	C	CT
Acho a matemática uma disciplina interessante.					
A matemática é uma disciplina útil para a minha vida.					
Acho importante estudar matemática porque aprendo a saber pensar.					
Gosto de descobrir na aula de matemática.					
Compreendo melhor a matemática quando sou eu a descobri-la.					
Gosto de ter liberdade quando resolvo tarefas matemáticas.					
Sinto-me confiante nos meus métodos de resolução das tarefas matemáticas.					
Prefiro que seja o professor a apresentar os conteúdos matemáticos.					
Resolver exercícios é muito importante para a minha aprendizagem.					
Gostaria de realizar tarefas investigativas nas aulas de matemática.					
Prefiro trabalhar sozinho do que em grupo.					
Aprendo mais quando trabalho em grupo do que sozinho.					
Não gosto de trabalhar em grupo porque não me sinto à vontade para intervir.					
Gosto de partilhar as minhas ideias com os meus colegas.					
Quando trabalho em grupo, os meus colegas ajudam-me a esclarecer as minhas dúvidas.					
Fico mais motivado para aprender matemática quando uso calculadoras e computadores.					
Quando uso calculadoras e computadores exploro tarefas diferentes do que quando uso papel e lápis.					
Quando uso calculadoras e computadores penso mais no significado e interpretação dos conceitos matemáticos.					
No futuro gostaria de aprender matemática usando calculadoras e computadores.					

Obrigada pela colaboração!

ANEXO 2

2º Questionário

Estimado(a) aluno(a),

Este questionário, a que venho pedir-te que respondas, tem por objetivo conhecer as tuas perceções acerca da estratégia de intervenção baseada na exploração de tarefas investigativas.

A informação que vais partilhar é da maior importância para o estudo que se pretende realizar. Por esta razão, é necessário que leias o questionário com atenção e respondas a todas as questões com sinceridade e empenho.

Pela minha parte, enquanto única pessoa com acesso aos dados, comprometo-me a não usar esses dados a não ser para uso exclusivo neste trabalho, garantindo sempre o anonimato dos respondentes.

Muito obrigada pela colaboração

Maria Lúcia Ribeiro Fertuzinhos

Dados pessoais

Nome:____

Idade: ________ Sexo: ☐ Masculino ☐ Feminino

Classificação que tiveste no 2º Período do presente ano letivo: __________________________

---

1. O que é para ti uma tarefa de investigação?

____

____

____

2. Quais as dificuldades que sentiste na resolução de tarefas de investigação?

____

____

____

3. Qual foi a tarefa investigativa de que mais gostaste? Porquê?

____

____

____

4. Qual foi a tarefa investigativa de que menos gostaste? Porquê?

____

____

____

5. Achas que aprendes melhor matemática quando resolves tarefas investigativas ou quando é o professor a expôr os conteúdos? Porquê?

____

____

____

6. Pensas que as tarefas de investigação deveriam integrar o tipo de trabalho a desenvolver habitualmente nas aulas de matemática? Porquê?

____

____

____

7. Consideras que foi importante trabalhar em grupo na resolução de tarefas investigativas? Porquê?

____

____

____

8. O uso de calculadoras e computadores ajudou-te na resolução das tarefas de investigação? De que forma?

____

____

____

9. Em cada uma das afirmações seguintes assinala a opção de resposta que melhor traduz a tua opinião, atendendo à seguinte escala: **DT**: Discordo Totalmente; **D**: Discordo; **I**: Indiferente; **C**: Concordo; **CT**: Concordo Totalmente.

Afirmações	DT	D	I	C	CT
Acho importante estudar matemática porque aprendo a saber pensar.					
Gostei de descobrir na aula de matemática.					
Compreendi melhor a matemática quando fui eu a descobri-la.					
Gostei de ter liberdade quando resolvi tarefas matemáticas.					
Senti-me confiante nos meus métodos de resolução das tarefas matemáticas.					
Preferia que fosse o professor a apresentar os conteúdos matemáticos.					
Gostei de realizar as tarefas investigativas nas aulas de matemática.					
Preferia trabalhar sozinho do que em grupo.					
Aprendi mais quando trabalhei em grupo do que sozinho.					
Não gostei de trabalhar em grupo porque não me senti à vontade para intervir.					
Gostei de partilhar as minhas ideias com os meus colegas.					
Quando trabalhei em grupo, os meus colegas ajudaram-me a esclarecer as minhas dúvidas.					
Fiquei mais motivado para aprender matemática quando usei calculadoras e computadores.					
Quando usei calculadoras e computadores explorei tarefas diferentes do que quando usei papel e lápis.					
Quando usei calculadoras e computadores pensei mais no significado e interpretação dos conceitos matemáticos.					
No futuro gostaria de aprender matemática usando calculadoras e computadores.					
No futuro, gostaria de aprender matemática resolvendo tarefas investigativas.					

Obrigada pela colaboração!

ANEXO 3

Pedido de autorização à diretora da escola para a gravação de aulas

Exma. Senhora Diretora da Escola Secundária_______________________

Andreia Miranda e Lúcia Fertuzinhos, alunas do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade do Minho, e professoras estagiárias de Matemática da Escola, encontramo-nos na fase de implementação dos projetos de intervenção pedagógica supervisionada, intitulados "A exploração do questionamento como meio de os alunos ultrapassarem dificuldades na aula de matemática do 10º ano" e "As tarefas de natureza investigativa na aprendizagem de conteúdos do tema Funções do 10º ano", respetivamente.

Ora, para a implementação do projeto de intervenção pedagógica supervisionada, é necessário proceder à recolha de dados, incluindo efetuar gravações audiovisuais de algumas aulas da disciplina de Matemática do 10º ano, nas turmas J (Andreia Miranda) e I (Lúcia Fertuzinhos), relativas aos projetos de intervenção pedagógica supervisionada referidos. Para tal, vimos solicitar a autorização de V. Ex.ª para gravarmos em vídeo e áudio essas aulas. Pela nossa parte, comprometemo-nos a usar os dados apenas para fins académicos e a garantir o anonimato da identidade dos alunos e da Escola.

Caso V. Ex.ª. autorize a gravação das aulas, comprometemo-nos ainda a solicitar aos encarregados de educação a devida autorização para a recolha de registos audiovisuais durante a intervenção de ensino, assumindo igualmente o compromisso de garantir o anonimato da identidade dos alunos.

Braga, 14 de fevereiro de 2014.

As professoras estagiárias

____

(Andreia Miranda)

____

(Lúcia Fertuzinhos)

Autorização

______de ____________________ de 2014

____

(Assinatura da Diretora)

ANEXO 4

Pedido de autorização aos encarregados de educação para a gravação de aulas

Exmo (a). Senhor(a)

Encarregado(a) de Educação

Eu, Lúcia Fertuzinhos, aluna do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade do Minho, e professora estagiária de Matemática da Escola, encontro-me na fase de implementação do projeto de intervenção pedagógica supervisionada, intitulado "As tarefas de natureza investigativa na aprendizagem de conteúdos do tema Funções do 10º ano". Ora, para a implementação do projeto de intervenção pedagógica supervisionada, é necessário proceder à recolha de dados, incluindo efetuar gravações audiovisuais de algumas aulas da disciplina de Matemática do 10º ano, na turma I, relativas ao projeto de intervenção pedagógica supervisionada referido. Para tal, e uma vez obtida a autorização do Diretor da escola, venho solicitar também a autorização de V. Ex.ª. Pela minha parte, comprometo-me a usar os dados apenas para fins académicos e a garantir o anonimato da identidade dos alunos. Agradecendo desde já a atenção de V. Ex.ª, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

Braga, ______________ de Fevereiro de 2014

____

(Maria Lúcia Ribeiro Fertuzinhos)

✂...

AUTORIZAÇÃO

Eu, Encarregado de Educação do aluno ____, Nº__________, da turma I, do Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias, da Escola Secundária, autorizo ☐ não autorizo ☐ a realização de gravações áudio e vídeo das aulas de Matemática acima referidas.

Braga, _______ de _______________________ de 2014.

____

(Assinatura do(a) Encarregado(a) de Educação)

ANEXO 5

Ficha informativa

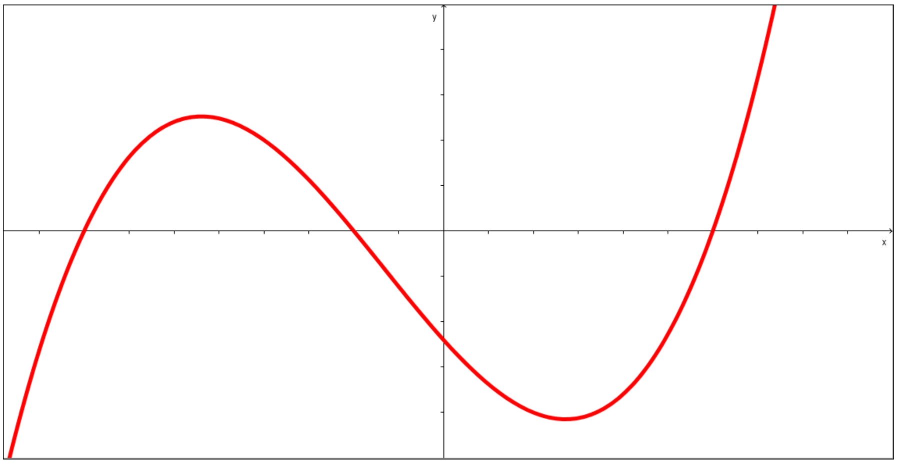
Comportamento de uma função nos ramos infinitos

Uma característica importante de uma função consiste no conhecimento do seu comportamento quando a variável independente toma valores muito grandes ou muito pequenos, ou seja, nos seus ramos infinitos.

Assim, nos ramos infinitos estuda-se o valor para que tende a função quando x toma valores infinitamente grandes, positivos ou negativos.

Quando x tende para valores infinitamente grandes positivos dizemos que $x \to +\infty$, que se lê "x tende para mais infinito"; De igual modo, quando x toma valores infinitamente grandes negativos dizemos que $x \to -\infty$, que se lê "x tende para menos infinito". Vejamos os seguintes exemplos:

Exemplo 1: Considera a função $f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$ representada graficamente:

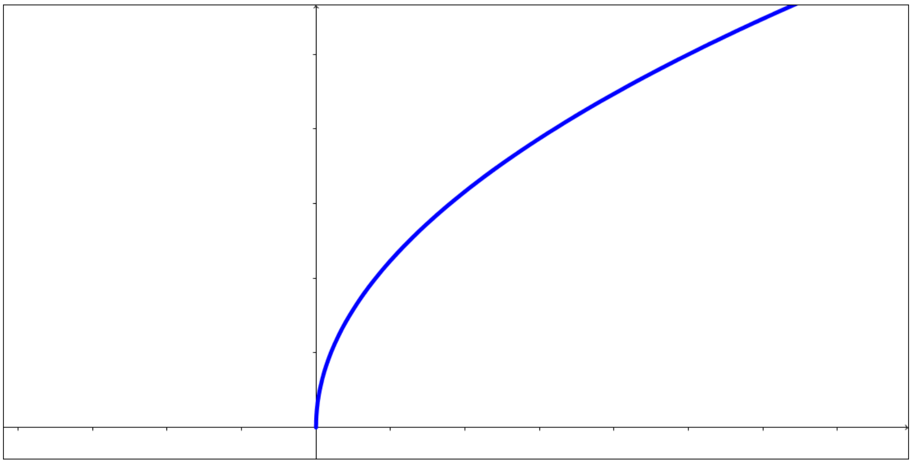


Observando a representação gráfica da função f e admitindo que ela é completa, no sentido de que contempla todas as características da função, conclui-se que:

— Quando x tende para valores infinitamente grandes positivos, a função f também tende para valores infinitamente grandes positivos. Ou abreviadamente, quando $x \to +\infty$, a função $f(x) \to +\infty$.

— Quando x tende para valores infinitamente grandes negativos, a função f também tende para valores infinitamente grandes negativos. Ou abreviadamente, quando $x \to -\infty$, a função $f(x) \to -\infty$.

Exemplo 2: Considera a função $g(x)=\sqrt{x}$ representada graficamente:

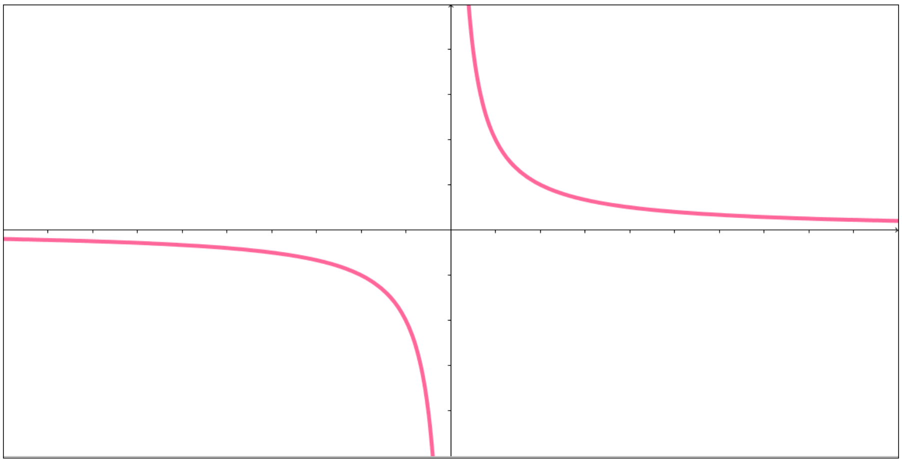


Observando a representação gráfica da função g, conclui-se que:

— Quando x tende para valores infinitamente grandes positivos, a função g também tende para valores infinitamente grandes positivos. Ou abreviadamente, quando $x \to +\infty$, a função $g(x) \to +\infty$.

— A função g apenas possui um ramo infinito.

Exemplo 3: Considere a função $h(x)=\dfrac{1}{x}$ representada graficamente:



Observando a representação gráfica da função h pode então concluir-se que:

— Quando x tende para valores infinitamente grandes positivos, a função h tende para zero. Ou abreviadamente, quando $x \to +\infty$, a função $h(x) \to 0$.

— O mesmo acontece quando x tende para valores infinitamente grandes negativos. Abreviadamente, quando $x \to -\infty$, a função $h(x) \to 0$.