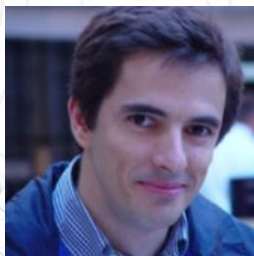


MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Integradora II

Elaborado por Paulo Flores, Filipe Marques, Nuno Dourado e Rui Pereira - 2016



Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: pflores@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt



Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: fmarques@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt



Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: nunodourado@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt



Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 436
Fax: +351 253 510 401
E-mail: rmp@math.uminho.pt
URL: www.math.uminho.pt



T.03 – SOBRE AS FORÇAS

- 1. Introdução**
- 2. Forças em Sistemas Mecânicos**
- 3. Diagramas do Corpo Livre**
- 4. Exemplos de Aplicação**
- 5. Revisão de Conhecimentos**
- 6. Consultas Recomendadas**

1. Introdução

Em dinâmica de sistemas mecânicos é por demais importante saber identificar os **diversos tipos de forças** que atuam nos corpos.

De uma forma geral, pode definir-se **força** como sendo uma grandeza física que representa a **medida quantitativa da interação dos corpos** que constituem as máquinas e mecanismos.

Como é sabido, em dinâmica de sistemas mecânicos, as forças tendem a **modificar o estado de movimento** (ou repouso) dos corpos materiais.



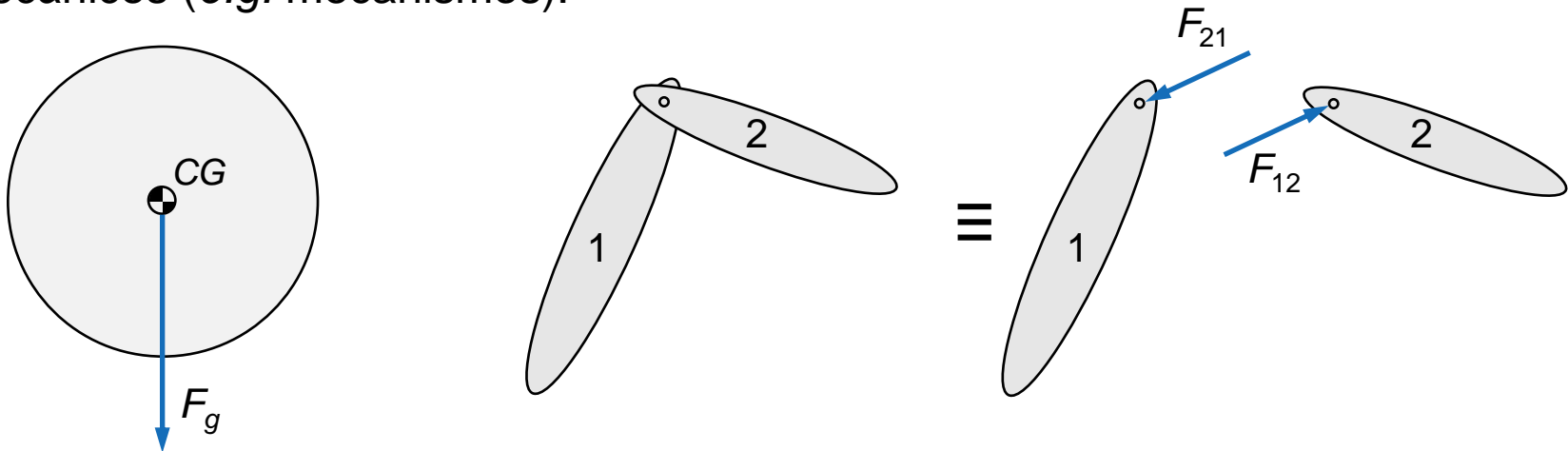
As forças que atuam e se desenvolvem nos sistemas mecânicos afetam, por um lado, o seu **desempenho dinâmico** e possibilitam, por outro, o correto **dimensionamento e seleção dos componentes** mecânicos.

1. Introdução

Em geral, podem distinguir-se **forças aplicadas** de **forças de restrição**.

No primeiro caso trata-se de forças de natureza física que **não dependem da configuração geométrica** do sistema em estudo.

Por seu lado, as forças de natureza geométrica resultam das **restrições ou constrangimentos** ao movimento dos corpos que constituem os sistemas mecânicos (e.g. mecanismos).



As forças originadas pela **aceleração da gravidade** são exemplos de forças aplicadas aos sistemas. As **reações** desenvolvidas numa junta cinemática de rotação são exemplos de forças de restrição.

2. Forças em Sistemas Mecânicos

Tendo em consideração o **vasto leque de forças** que podem existir nos sistemas mecânicos, bem como a sua natureza, é imperioso saber quantificar essas forças e, de algum modo, identificar as **forças dominantes** e as **forças secundárias**.

Um das forças mais simples de identificar e de determinar é a **força gravítica**. Esta força está sempre presente nos sistemas mecânicos de uso corrente e pode ser calculada do seguinte modo

$$F_g = mg \tag{1}$$

em que m é a massa do corpo e g é a aceleração gravítica.

Outra força que relaciona a massa com a aceleração de translação dos corpos é a **força de inércia**, a qual é materializada pela segunda lei de Newton, ou seja

$$F_i = ma \tag{2}$$

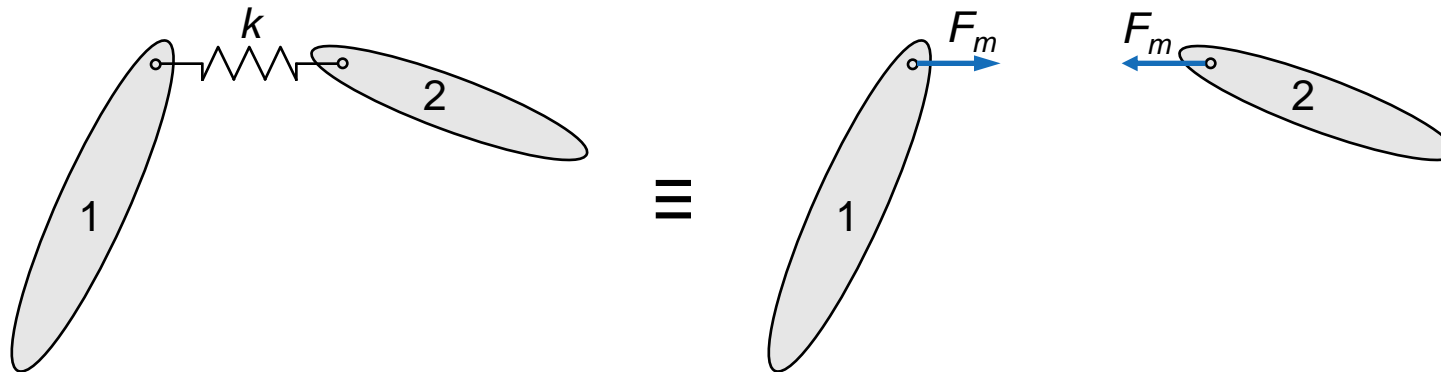
onde m representa a massa e a é aceleração produzida pelo corpo.

2. Forças em Sistemas Mecânicos

Uma expressão idêntica é válida para o **movimento de rotação**

$$M_i = I\alpha \quad (3)$$

em que I é o momento mássico de inércia e α denota a aceleração angular.



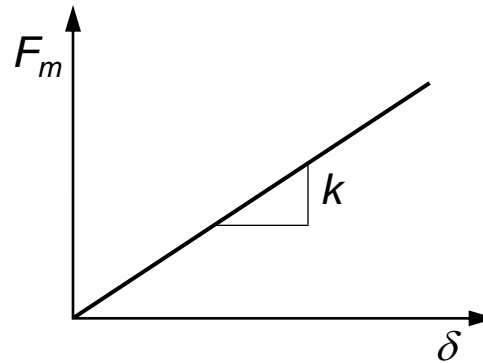
Dois corpos unidos por uma mola translacional (de tração ou de compressão) desenvolvem uma força de igual magnitude que atua em sentidos contrários num e noutro corpo. A magnitude da **força da mola** é dada pela lei de Hooke

$$F_m = k\delta \quad (4)$$

onde k é a rigidez da mola, expressa em [N/m], e δ denota a deformação da mola.

2. Forças em Sistemas Mecânicos

As molas de uso corrente são, em geral, **lineares**, isto é, a lei constitutiva que relaciona a força da mola com a sua deformação é de natureza linear. Há, todavia, molas com características não-lineares.



Deve referir-se que a rigidez das molas pode ser determinada analítica, numérica ou experimentalmente.

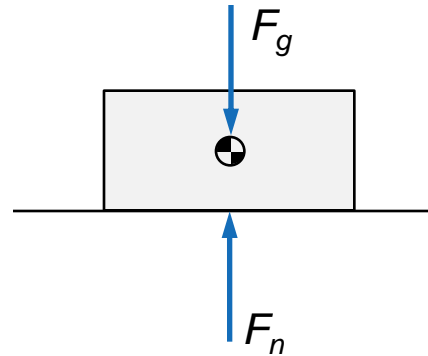
Há ainda **molas de torção** em que é válida a seguinte relação

$$M_m = k_T \theta \quad (5)$$

em que k_T é a **rigidez torsional** da mola, expressa em [Nm/rad], e θ representa a **deformação angular da mola**, expressa em [rad].

2. Forças em Sistemas Mecânicos

Os corpos em contacto desenvolvem, de acordo com a terceira lei de Newton, **forças de reação** perpendiculares às superfícies de contacto.



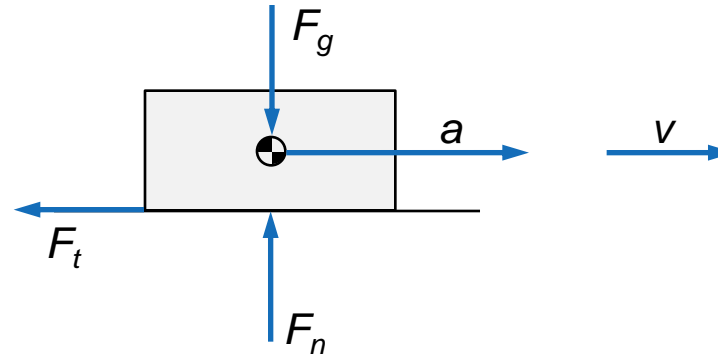
Assim, por exemplo, um **bloco colocado sobre um plano horizontal** sofre uma reação do solo igual ao seu peso, ou seja

$$F_n = F_g = mg \quad (6)$$

em que F_n representa a **força de reação normal** que o solo exerce no bloco, impedindo-o de cair.

2. Forças em Sistemas Mecânicos

Quando os corpos em contacto apresentam movimento relativo desenvolvem-se **forças tangenciais**, ditas **forças de atrito**, que atuam no sentido contrário a esse movimento relativo.



A **força de atrito seco** é, por definição e verificação experimental, dada por

$$F_t = \mu F_n \quad (7)$$

onde μ representa o coeficiente de atrito entre os materiais em contacto, e é adimensional, sendo F_n a reação normal.

A lei de atrito dada pela equação (7) é frequentemente denominada de **lei de atrito de Coulomb** e é independente da área de contacto. O **valor do coeficiente** de atrito é um parâmetro obtido experimentalmente e depende de muitos fatores, tais como, os materiais envolvidos, a qualidade das superfícies, etc.



2. Forças em Sistemas Mecânicos

Em algumas situações, a **resistência do ar** desempenha um papel significativo e deve, por isso, ser considerado o seu efeito.

A **força de arrasto** devido à resistência associada ao movimento do ar é uma força de natureza superficial que pode ser estabelecida do seguinte modo

$$F_a = \frac{1}{2} \rho v^2 A C_D \quad (8)$$

em que ρ é a **massa específica** do ar, expressa em $[\text{kg}/\text{m}^3]$, v representa a **velocidade do ar** em relação ao corpo em estudo, expressa em $[\text{m}/\text{s}]$, A denota a **área frontal efetiva** ou área projetada, expressa em $[\text{m}^2]$, e C_D é o **coeficiente de resistência aerodinâmica**.

O coeficiente de resistência aerodinâmica ou coeficiente de forma é adimensional e pode ser determinado numérica ou experimentalmente.

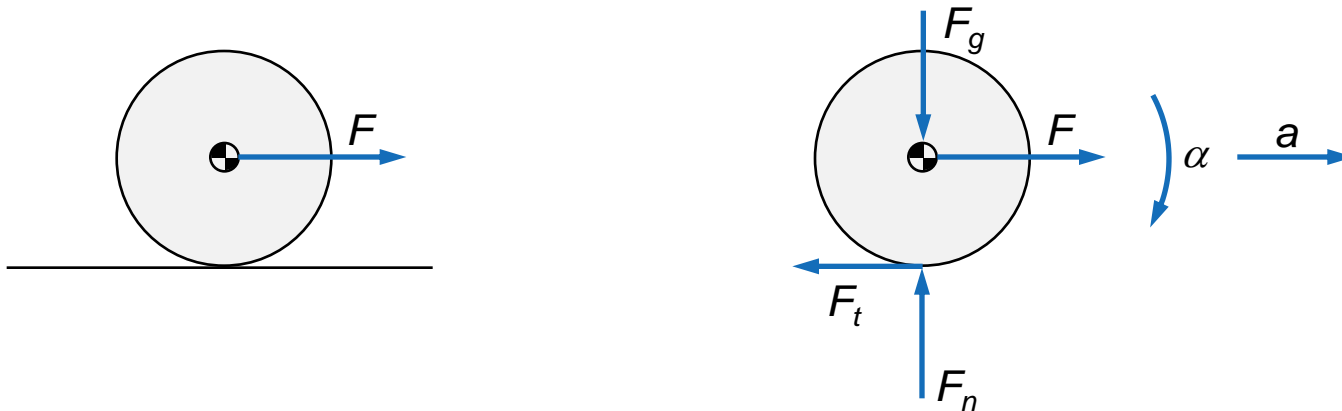
3. Diagramas do Corpo Livre

Os diagramas do corpo livre são um dos elementos centrais e de capital importância no estudo dinâmico de sistemas mecânicos, pelo que se deve ter especial cuidado e atenção na sua elaboração.

Um **diagrama do corpo livre** é um desenho ou esquema de um corpo isolado do sistema a que pertence, e onde se representam todas as forças e momentos que sobre ele atuam.

A título de exemplo considerem-se os diagramas do corpo livre para as seguintes situações:

1. Diagrama do corpo livre de um **disco puxado por uma força exterior F** .



3. Diagramas do Corpo Livre

2. Diagrama do corpo livre do **conjunto aro-barra** acionado pela ação da gravidade.



3. Diagrama do corpo livre de um **carro travando com as 4 rodas em simultâneo**.



4. Exemplos de Aplicação

Considere um bloco de $0,2 \text{ kg}$ de massa situado num plano inclinado, cujo ângulo de inclinação é de 30° . Admitindo que o bloco desliza sobre o plano inclinado, calcule o valor da aceleração do bloco no seu movimento descendente. Considere que o coeficiente de atrito entre o bloco e o plano é igual a $0,1$.

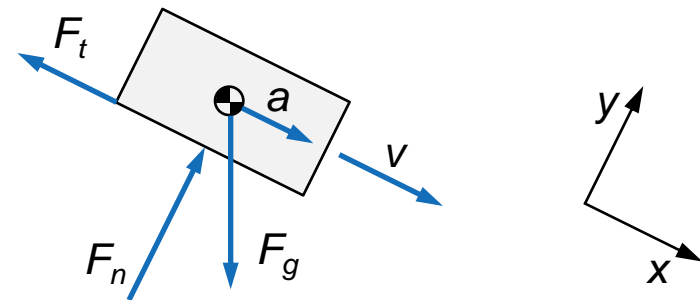
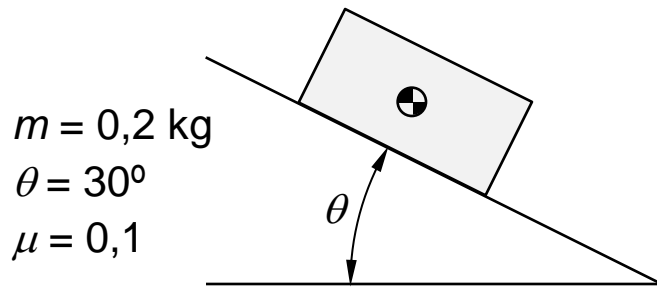


Diagrama do corpo livre do bloco

Da aplicação da segunda lei de Newton vem que:

$$\sum F_x = ma \Rightarrow mg \sin \theta - F_t = ma \quad (9)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_n - mg \cos \theta = 0 \quad (10)$$

4. Exemplos de Aplicação

De (10) tem-se que

$$F_n = mg \cos \theta \quad (11)$$

Da lei de atrito de Coulomb sabe-se que

$$F_t = \mu F_n \quad (12)$$

ou seja

$$F_t = \mu mg \cos \theta \quad (13)$$

Combinando agora as equações (9) e (13) resulta que

$$mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta = ma \quad (14)$$

ou seja

$$a = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) \quad (15)$$



4. Exemplos de Aplicação

Considerando os dados supra apresentados resulta que

$$\begin{aligned} a &= 9,81(\sin 30 - 0,1 \cos 30) \\ &= 4,055 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Repita o exercício **umentando a massa do bloco para o dobro**.
Comente o resultado obtido.

Repita o exercício anterior **considerando a resistência do ar**.

Considere **4 objetos distintos**, feitos do mesmo material, colocados sobre uma **rampa**, cuja inclinação é igual a 10° . A posição inicial dos objetos corresponde a uma altura de 200 mm. Os objetos em estudo são **uma esfera maciça, um cilindro maciço, uma esfera oca e um anel**.

4. Exemplos de Aplicação

Os 4 objetos em estudo têm as seguintes características:

Esfera maciça: $m = 32 \text{ g}$, $R = 11,0 \text{ mm}$, $I = 1,549 \times 10^{-6} \text{ kgm}^2$

Cilindro maciço: $m = 250 \text{ g}$, $R = 12,6 \text{ mm}$, $I = 1,985 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$

Esfera oca: $m = 3 \text{ g}$, $R = 12,6 \text{ mm}$, $I = 3,175 \times 10^{-7} \text{ kgm}^2$

Anel: $m = 2 \text{ g}$, $R = 12,6 \text{ mm}$, $I = 3,175 \times 10^{-7} \text{ kgm}^2$

Deve lembrar-se que:

$$I_{\text{esfera maciça}} = \frac{2}{5}mR^2 \quad I_{\text{cilindro maciço}} = \frac{1}{2}mR^2 \quad I_{\text{esfera oca}} = \frac{2}{3}mR^2 \quad I_{\text{anel}} = mR^2$$

Assim, atendendo a que os objetos têm características idênticas no contacto com a rampa, **determine a ordem de chegada dos objetos** quando estes são largados, simultaneamente, da mesma posição inicial e com velocidade inicial nula.

4. Exemplos de Aplicação

Comece-se por elaborar o **diagrama do corpo livre genérico**, o qual é idêntico para os 4 objetos.

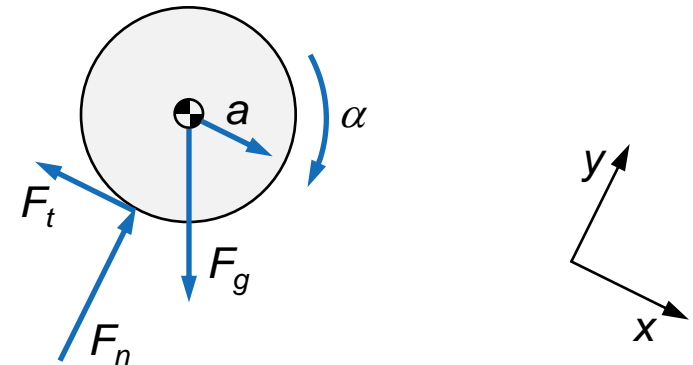
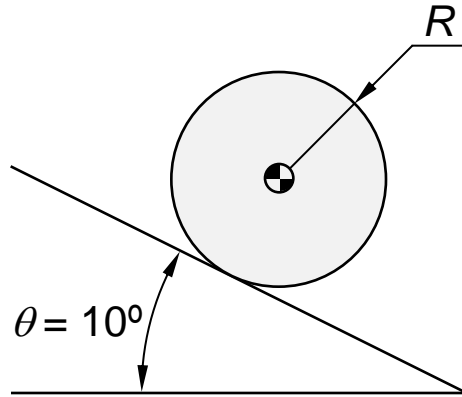


Diagrama do corpo livre

Deve chamar-se a atenção para o facto de que o movimento de descida dos objetos ao longo da rampa faz-se **sem escorregamento** ou deslizamento, ou seja, trata-se de um movimento de **rolamento puro**.

Assim, pelo facto de não haver deslizamento, o ponto de contacto entre os objetos e o solo está instantaneamente em repouso. Este ponto é, na verdade, um **centro instantâneo de rotação**.

4. Exemplos de Aplicação

Com efeito, para o movimento de rolamento puro, a força de atrito que atua no ponto de contacto é do tipo estático, ou seja, $F_a = \mu N$, pelo que **não há perda de potência** ($P = F_a v$), pois, lembre-se, é nula a velocidade no ponto de contacto.

Em suma, há **conservação da energia mecânica**, pois não admite-se que não há perdas por atrito de rolamento.

Aplicando as **leis de Newton ao diagrama do corpo livre genérico** vem que

$$\sum F_x = ma \Rightarrow mg \sin \theta - F_t = ma \quad (16)$$

$$\sum M_{CG} = -I\alpha \Rightarrow -F_t R = -I\alpha \quad (17)$$

Da equação (17) resulta que

$$F_t = I \frac{\alpha}{R} \quad (18)$$

que representa a força de atrito estática, uma vez que se trata de rolamento puro. Note-se que **quanto maior for a inércia, maior será a força de atrito**.

4. Exemplos de Aplicação

Atendendo a que os **objetos rodam sem escorregar** é válida a seguinte relação

$$a = \alpha R \quad (19)$$

donde resulta que

$$F_t = I \frac{a}{R^2} \quad (20)$$

Introduzindo a equação (20) na equação (16) vem que

$$mg \sen \theta - I \frac{a}{R^2} = ma \quad (21)$$

ou seja

$$a \left(m + \frac{I}{R^2} \right) = mg \sen \theta \quad (22)$$

$$a = \frac{mg \sen \theta}{m + \frac{I}{R^2}} \quad (23)$$

4. Exemplos de Aplicação

Da análise da equação (23) observa-se que **quanto maior for o momento mássico de inércia (I), menor será a aceleração** e, por conseguinte, maior é a dificuldade em rodar, e os corpos só descem se rodarem!

Atente-se a que a **aceleração** dos objetos dada pela equação (23) é **constante**, pelo que é válida a análise para o movimento uniformemente acelerado, ou seja

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (24)$$

donde resulta que

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} \quad (25)$$

Assim, considerando os dados dos 4 objetos em estudo, obtêm-se os seguintes resultados para os **tempos de descida**:

Esfera maciça:	1,38 s
Cilindro maciço:	1,43 s
Esfera oca:	1,51 s
Anel:	1,65 s



5. Revisão de Conhecimentos

Apresente o conceito de força.

Distinga forças aplicadas de forças de restrição.

Dê um exemplo de forças aplicadas.

Caraterize as principais forças existentes nos sistemas mecânicos.

Descreva a origem das forças de reação normal.

Apresente as principais características da lei de atrito de Coulomb.

Defina diagrama do corpo livre.

Caraterize a força de arrasto devido à resistência do ar.

Identifique as forças dominantes e secundárias no movimento do carro.

Quais as implicações das forças supramencionadas no desempenho do carro?

6. Consultas Recomendadas

Beer, F.P., Johnston, E.R. (1991) *Mecânica Vetorial para Engenheiros. Cinemática e Dinâmica*. 5ª Edição, McGraw-Hill, São Paulo.

Flores, P. (2012) *Análise Cinemática e Dinâmica de Mecanismos - Exercícios resolvidos e propostos*. Publindústria, Porto.

Flores, P., Claro, J.C.P. (2007) *Cinemática de Mecanismos*. Edições Almedina, Coimbra.

<https://pt.wikipedia.org/wiki/Força>

https://pt.wikipedia.org/wiki/Engenharia_mecânica

<https://www.youtube.com/watch?v=MkMEF5ccGD0>

<https://www.youtube.com/watch?v=-QlehjwGi20>

<https://www.youtube.com/watch?v=b8oSYQG4NiY>