INTUIÇÕES DE ALUNOS DE 12º ANO EM COMBINATÓRIA
Um Estudo Exploratório

Dulcinea Nunes Silva,
neiasilva@iol.pt
Escola Secundária Francisco de Holanda

José António Fernandes
jfernandes@iep.uminho.pt
Universidade do Minho

Ana Jacinta Soares
ajsoares@math.uminho.pt
Universidade do Minho

Resumo

O estudo aqui descrito centra-se numa investigação sobre intuições em Combinatória desenvolvidas por alunos dos 12º ano de escolaridade antes de terem passado por qualquer experiência de ensino formal do tema.
No estudo participaram 38 alunos de duas turmas do 12º ano, com a disciplina de Matemática, e foi utilizado um questionário como instrumento de recolha de dados. O questionário contemplava cinco questões, envolvendo as seguintes operações combinatórias: permutações simples e com repetição, arranjos simples e com repetição e combinações simples.
Dos resultados do estudo, pode concluir-se que os alunos que parti-ciparam no estudo têm intuições combinatórias muito limitadas em todas as operações estudadas, destacando-se apenas o caso em que está envolvido um pequeno número de elementos e onde uma estratégia de *enumeração* permitiu aos alunos chegarem à resposta correcta. De entre as operações combinatórias estudadas, em termos globais, os alunos obtiveram resultados ligeiramente melhores nos arranjos com repetição e piores nas combinações simples.

Introdução

Os problemas de Combinatória interessaram ao Homem desde quase o início da sua existência, tendo este domínio do saber vindo a desenvolver-se em diversas culturas através de diferentes tipos de problemas ao longo do tempo.

Actualmente assistimos a um desenvolvimento da Combinatória para o qual tem sido muito importante o papel do computador na sistematização e resolução de problemas por métodos exaustivos.

Segundo Ribnikov (1988, citado em Roa, 2000), a análise combinatória é um dos núcleos centrais da matemática discreta que estuda os conjuntos discretos e as configurações que se podem obter a partir dos seus elementos mediante certas transformações que originam trocas na estrutura ou na composição dos mesmos conjuntos.

A Combinatória é incontestavelmente um domínio privilegiado do ensino da matemática (Glaymann & Varga, 1973), aplicando-se também nas mais variadas áreas científicas.

Em Portugal, tal como em Espanha (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994), o ensino da análise combinatória está um pouco esquecido nos programas da disciplina de Matemática. No caso de Portugal, os alunos têm o seu primeiro contacto com este conteúdo somente no 12º ano, na disciplina de Matemática, e está apenas associado ao cálculo de probabilidades. Mas a Combinatória, para além da matemática, tem também numerosas aplicações teóricas e práticas noutras áreas, como por exemplo na geologia, na química, na informática, etc.

Talvez por este conteúdo não estar presente anteriormente em nenhuma disciplina, a análise combinatória é considerado um tema difícil, quer pelos alunos quer pelos próprios professores. As dificuldades destes últimos na leccionação desta temática explica o facto de o ensino se limitar, na maioria das vezes, à exposição de fórmulas e à sua aplicação na resolução de exercícios, algo que contraria as recomendações do National Council of Teachers of Mathematics (1991).

Para Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997) há duas etapas fundamentais a percorrer para tornar mais fácil a aprendizagem da Combinatória: compreender a natureza dos erros dos alunos quando resolvem problemas combinatórios e identificar variáveis que podem influenciar as suas dificuldades.

Neste contexto, com esta investigação pretendeu-se identificar e caracterizar as dificuldades e os erros de alunos do 12º ano na resolução de uma série de problemas combinatórios simples. Apesar de haver diferentes tipos de problemas combinatórios, nos casos mais simples é possível obter directamente um método de contagem.

Mais especificamente, neste estudo procurou-se responder às três seguintes questões de investigação:

- Que tipo de dificuldades apresentam alunos de 12º ano na resolução de problemas combinatórios?
- A operação combinatória implícita no enunciado dos problemas repercute-se no nível de dificuldade com que os alunos os resolvem?
- O número de elementos (objectos ou pessoas) envolvidos nos problemas combinatórios influencia o nível de dificuldade com que os alunos os resolvem?

Enquadramento teórico

Nesta secção iremos referir-nos a resultados de vários estudos, especialmente relacionados com o presente trabalho, a partir das três tradições de investigação lideradas por Jean Piaget, Efraim Fischbein e Carmen Batanero.

Investigações de Piaget

Piaget e seus colaboradores efectuaram inúmeras investigações sobre a influência do raciocínio combinatório no desenvolvimento do pensamento formal. Segundo Piaget e Inhelder (s/d), a capacidade combinatória é uma componente fundamental do raciocínio formal. Para estes autores, o raciocínio hipotético-dedutivo opera através das operações combinatórias que se aplicam sobre um conjunto de possibilidades que devem ser examinadas e enumeradas até se chegar a uma conclusão. Atingido o período das operações formais, os adolescentes descobrem espontaneamente procedimentos sistemáticos de enumeração e de contagem combinatória.

> "Tudo se passa como se as operações combinatórias constituíssem um esquema operatório muito geral a partir de um certo nível de desenvolvimento (IIIA): um esquema, isto é, uma maneira de proceder ou um método, que é adoptado espontaneamente na ausência de decisão consciente ou explícita, ou empregue intencionalmente em presença de problemas cuja solução exige um quadro sistemático de combinações." (Inhelder & Piaget, 1976, p. 234)

Seguidamente, descrevem-se as principais conclusões que Piaget e Inhelder (s/d) obtiveram através das suas investigações relativamente a cada uma das operações combinatórias seguintes: combinações, permutações e arranjos.

Combinações

Comecemos por recordar que uma combinação de *n* objectos dados, tomados *p* a *p*, é uma sequência não ordenada constituída por *p* elementos escolhidos de entre os *n* objectos disponíveis.

Passemos agora à descrição da tarefa apresentada aos sujeitos: – Colocaram-se em cima de uma mesa diversos montes de fichas – um monte de fichas brancas, um outro de fichas vermelhas, etc., e pedia-se à criança que construísse o máximo de pares de fichas com cores diferentes, não se repetindo do ponto de vista das cores escolhidas (em certos casos admitiam-se pares com as mesmas cores: azul-azul, etc., outras vezes excluíam-se).

A partir desta tarefa, os autores extraíram as seguintes conclusões: no decorrer do estádio I (pré-operacional, dos 4 aos 7 anos, em média), a criança só chega a uma descoberta empírica das combinações, sem sistema e por simples tentativa; no decorrer do estádio II (operacional concreto, dos 7 aos 11 anos) há uma procura de um sistema, assim como a determinação das probabilidades que marca nesse nível o início de uma quantificação sistemática; e no estádio III (operacional formal, a partir dos 11-12 anos) a criança consegue combinações metódicas e completas, após uma repetição.

Segundo os autores, o motivo para se ter de esperar pelo estádio III para que se consiga construir o sistema de todas as combinações possíveis duas a duas, no caso de *n* elementos, é a necessidade de coordenar entre si duas operações distintas, a seriação e a correspondência, numa única operação, e esta é uma capacidade que só se adquire neste estádio.

Permutações

Como sabemos, uma permutação de *n* objectos é uma sequência ordenada constituída pelos *n* elementos correspondentes aos *n* objectos disponíveis. Nesta situação, não se esperava que as crianças fossem capazes de descobrir a fórmula matemática ou todas as permutações quando se tem um número elevado de elementos. O objectivo das investigações destes autores, acerca da operação de permutação, era que as crianças fossem capazes de achar um sistema que, para pequenas quantidades de objectos, garantisse que não se esqueciam de nenhuma das permutações possíveis. Do ponto de vista das intuições, o que interessava era que descobrissem o mecanismo operatório.

A tarefa apresentada aos sujeitos consistiu na seguinte situação: – Duas pessoas que passeiem uma ao lado da outra podem estar de duas maneiras: AB ou BA. Seguidamente, pedia-se que efectuassem a mesma operação com fichas de 2 cores, 3 cores e 4 cores.

Os resultados obtidos nesta tarefa podem incluir-se nos três estádios habituais: no estádio I verifica-se uma ausência de sistema, no estádio II assiste-se a uma descoberta parcial dos métodos e no estádio III há uma descoberta progressiva da lei de formação. Porém, contrariamente ao mecanismo das combinações, adquirido por volta dos 12 anos, o das permutações não se completa antes dos 15 anos. A descoberta das permutações é mais tardia do que a das combinações. A razão é, sem dúvida, o facto de as combinações consistirem simplesmente em associações efectuadas segundo todas as possibilidades, enquanto as permutações, muito mais numerosas, implicam o estabelecimento de uma relação segundo uma espécie de sistema móvel e reversível (transformação da ordem a partir de elementos iniciais variáveis). Assim, a capacidade de realizar sistematicamente as permutações é próprio das operações formais, já que para além da troca de ordem, que é em si mesma uma operação concreta, a multiplicação de trocas de ordem é uma operação sobre outra operação, ou seja, uma operação de segunda ordem.

Arranjos

Um arranjo de n objectos dados, tomados p a p, é uma sequência ordenada constituída por p elementos escolhidos de entre os n objectos disponíveis. Assim, os arranjos são uma síntese das operações de combinação e permutação. De facto, nos arranjos de dois termos A e B, tomados dois a dois (AA, AB, BA e BB), intervêm simultaneamente combinações (AA, BB e AB) e permutações (AB e BA). O estudo dos arranjos não permite apenas tirar conclusões relativamente ao desenvolvimento das operações combinatórias, mas também relativamente ao progresso da ideia do acaso e sua relação com os arranjos.

A tarefa apresentada aos sujeitos consistiu na seguinte situação: – Apresentou-se um jogo com 78 cartas, sendo 26 cartas com o algarismo 1, 26 cartas com o algarismo 2 e 26 cartas com o algarismo 3. Para as crianças que ainda não tinham conhecimento dos números, o conteúdo das cartas foi substituído por figuras. Neste último caso, foram usadas 26 cartas com locomotivas (substituía o algarismo 1), 26 cartas com carruagens de passageiros (substituía o algarismo 2) e 26 cartas com carruagens de mercadorias (substituía o algarismo 3). Um distribuidor permitia retirar, de uma só vez, duas cartas do conjunto das 78 cartas.

Os resultados obtidos enquadram-se nos mesmos estádios que foram obtidos no caso das permutações e das combinações: por volta dos 7-8 anos (estádio I), não há arranjo sistemático nem compreensão de mistura. Os sujeitos procedem por simples tentativa, sem suspeitar da existência de um sistema. Dos 7-8 anos até aos 11 anos (estádio II) observou-se um começo de sistematização das operações e um princípio da compreensão do acaso, mas sem generalização para os grandes números. Por volta dos 11-12 anos, em média (estádio III), as operações são efectuadas sistematicamente e há uma apreciação da compensação dos arranjos fortuitos no caso de números grandes.

Como conclusão, segundo Piaget e Inhelder, é durante a etapa das operações formais que a criança adquire a capacidade de usar procedimentos sistemáticos que lhe permitem a obtenção de combinações, permutações e arranjos de um determinado número de elementos. Podemos, portanto, afirmar que é também neste momento que tem lugar a compreensão por parte da criança das operações combinatórias citadas (Roa, 2000).

Investigações de Fischbein e seus colaboradores

Segundo Fischbein (1975), as operações combinatórias representam algo muito mais importante do que um ramo da matemática. Representam um esquema tão geral como os esquemas da proporcionalidade ou da correlação, que emergem simultaneamente depois dos 12-13 anos.

Por outro lado, devido à relação intrínseca entre a capacidade combinatória e o pensamento lógico, alguns autores sugeriram a possibilidade de utilizar testes combinatórios para avaliar o desenvolvimento intelectual (Fischbein, 1975).

Após ter feito uma análise aprofundada aos resultados obtidos nas investigações de Piaget e Inhelder, Fischbein (1975) concluiu que nem todos os sujeitos do estádio das operações formais são capazes de descobrir o método de construir as combinações, nem sequer são capazes de tratar satisfatoriamente os arranjos até à idade dos 13 anos e as permutações até à idade dos 14-15 anos. Ou seja, a capacidade requerida para as operações combinatórias desenvolve-se gradualmente, mas não fica completa durante este estádio. Fischbein discorda ainda de Piaget relativamente ao período de tempo que decorre entre a aprendizagem das combinações e permutações por parte da criança.

Foram estes aspectos que levaram Fischbein a interessar-se pelo estudo do efeito da instrução sobre a capacidade combinatória de crianças com idades compreendidas entre os 10 e os 15 anos.

Fischbein (1975, 1987) atribui grande importância à intuição como componente da inteligência e, segundo este autor, as intuições são cognições que se distinguem, nomeadamente, pela sua auto-evidência, certeza intrínseca, persistência, coercibilidade, condição teórica, extrapolação, globalidade e natureza implícita. São exactamente estas características que revelam a sua relação com a acção, enquanto instrumentos de comportamento adaptativo e antecipatório.

Na investigação levada a cabo por Fischbein, Pampu e Mînzat (1970), estes autores conduziram um estudo com alunos do 4º ano (10-11 anos), do 6º ano (12-13 anos) e do 8º ano (14-15 anos) para avaliarem o impacto da idade e da instrução sobre a capacidade combinatória.

Antes de qualquer instrução, verificou-se que com o aumento da idade as estimativas subjectivas do número de permutações, em média, se aproximaram mais dos valores correctos, obtendo-se maiores diferenças entre as idades quando o número de elementos envolvidos na permutação era maior. Já em relação à natureza dos objectos considerados (números, letras e formas geométricas) não se destacaram diferenças significativas.

Uma análise mais detalhada dos dados permitiu concluir que existe uma tendência geral para sob-estimar o número de permutações possíveis, agravando-se essa sob-estimação quando aumentava o número de objectos considerados.

Em relação ao ensino, os autores concluíram que se pode ensinar com êxito um certo número de procedimentos combinatórios aos adolescentes de idades compreendidas entre os 10-15 anos, usando diagramas de árvore como recurso didáctico. Concluíram, ainda, que crianças de 10 anos também eram capazes de assimilar o uso de diagramas de árvore para resolver problemas de arranjos com repetição e de permutações.

Em síntese, estes autores defendem a possibilidade das crianças obterem sistematicamente, ainda no período das operações concretas, um corpo de conhecimento, capacidade mental e intuição no que concerne à análise combinatória.

Fischbein e Gazit (1988, citado em Roa, 2000) estudaram o papel da instrução no desenvolvimento das capacidades combinatórias em crianças de 11 a 14 anos. As variáveis que tiveram em conta foram o tipo de operação combinatória, a idade das crianças e a natureza, abstracta ou concreta, dos elementos que se consideram no problema. Os erros mais significativos que se observaram ao resolver os problemas propostos nesta investigação foram atribuir indistintamente a fórmula dos arranjos e das combinações a um e a outro conceito. Ao aderirem a este erro, denominado por *erro de ordem*, os sujeitos não são capazes de identificar se a ordem é ou não relevante para a resolução do problema, bem como desenvolvem incorrectamente a fórmula das operações combinatórias.

Concluíram também, relativamente à dificuldade das operações combinatórias, que antes da instrução a maior dificuldade correspondia às permutações e arranjos com repetição, seguindo-se os arranjos sem repetição e as combinações. A este propósito, Hadar e Hadass (1981) salientam que identificar a operação combinatória implícita no problema constitui uma das maiores dificuldades dos alunos. No que diz respeito à idade e à instrução, estas variáveis revelaram ter um efeito positivo na aquisição dos conceitos combinatórios. Além disso, para as crianças torna-se mais fácil trabalhar com dígitos do que com objectos (bandeiras) ou pessoas.

Em Fischbein e Grossman (1997), os autores interessam-se pelo mecanismo que produz as intuições combinatórias e a sua relação com os procedimentos matemáticos correctos. Para tal, são propostos aos sujeitos dos seu estudo (crianças e adultos) problemas de permutações, arranjos com e sem repetição e combinações.

Em termos de resultados, observou-se uma tendência dos sujeitos em sob-estimar o número de permutações e em sobrestimar o número de combinações e arranjos, inferindo-se que as estimações se baseiam em operações binárias relacionadas com o procedimento correcto, mas que comprimem a operação necessária, que de um modo geral consta de mais de dois operandos.

Os autores finalizam recomendando o confronto dos sujeitos com as suas intuições, pedindo-lhes que antes de resolverem um problema produzam uma estimativa da solução, que resolvam o problema com ajuda de um diagrama de árvore e que comparem a solução com as suas estimativas prévias.

Fischbein e seus colaboradores, após realizarem algumas investigações, afirmam que, no que se refere à instrução, esta é necessária, pois a criança não adquire sozinha as técnicas combinatórias, nem sequer no período das operações formais. Já no período das operações concretas pode-se fomentar a aquisição de técnicas combinatórias que, por sua vez, vão ajudar a criança a desenvolver intuições secundárias.

Investigações de Batanero e seus colaboradores

Em 1996, Navarro-Pelayo, Batanero e Godino efectuaram uma investigação para avaliar o raciocínio combinatório de alunos do ensino secundário. Para tal, construíram um questionário e avaliaram os resultados obtidos na sua aplicação a uma amostra de 720 alunos de 14 e 15 anos. Destes alunos, 352 tinham estudado já Combinatória na escola e os restantes 368 não tinham passado por qualquer ensino do tema. O questionário era constituído por 13 itens, cada um deles correspondendo a um problema combinatório simples, no qual era solicitado ao aluno que explicasse detalhadamente o seu raciocínio.

Com esta investigação, os autores pretendiam responder às seguintes questões de investigação: – Qual o papel da combinatória nas Probabilidades e na Matemática Discreta? É a capacidade combinatória somente um instrumento matemático ou é uma componente fundamental do raciocínio lógico? Há variáveis de tarefa que afectam os procedimentos e erros dos alunos ao resolver problemas combinatórios? Como deveríamos considerar estas variáveis no ensino e na avaliação?

Os resultados do estudo revelaram que ambos os grupos de alunos tiveram grande dificuldade na resolução dos problemas, mesmo naqueles que implicavam uma só operação combinatória e que envolviam valores pequenos dos parâmetros. Os alunos demonstraram falta de raciocínio recursivo, o qual lhes permitiria escrever todas as configurações possíveis ou calcular o seu número sem ter que enumerá-las. Os alunos com instrução em Combinatória obtiveram melhores resultados nos problemas de arranjos, permutações simples e permutações com repetição.

Em relação aos três modelos combinatórios estabelecidos por Dubois (1984):

- modelo de *selecção*, que corresponde à selecção de uma amostra de p elementos de um conjunto com n elementos, usualmente distintos,
- modelo de *distribuição*, que corresponde à distribuição dos n elementos de um conjunto por p células e
- modelo de *partição*, que corresponde à partição de um conjunto com n elementos em p subconjuntos,

não se observaram grandes diferenças na dificuldade entre os alunos sem ensino de Combinatória, mas o mesmo não se verificou no caso dos alunos com ensino de Combinatória (Batanero *et al.*, 1997). Neste último caso, observou-se, em geral, uma diminuição da dificuldade nos problemas de selecção e nas operações combinatórias de arranjos simples, permutações simples e permutações com repetição. Nos problemas de distribuição a melhoria não foi geral e nos problemas de partição não se verificou qualquer melhoria.

Roa, Batanero, Godino e Cañizares (1996) efectuaram uma investigação acerca dos processos de resolução de problemas combinatórios simples e compostos em quatro estudantes de uma licenciatura de Matemática. Estes estudantes foram seleccionados de uma amostra de 29 estudantes através de um questionário constituído por 13 problemas combinatórios, dos quais se seleccionaram os dois com melhores resultados e os dois com piores resultados.

Em termos de resultados, os autores salientam as dificuldades sentidas e o escasso uso que os estudantes fizeram dos diagramas de árvore. Em relação às estratégias gerais de resolução, destacaram-se a fixação de variáveis, a simplificação do problema através da redução dos valores dos parâmetros ou de um problema semelhante mais simples, a decomposição do problema em partes e a generalização das soluções, as quais diferenciaram os bons dos maus resolvedores. Estas estratégias, quando bem aplicadas, mostraram-se fundamentais na resolução adequada dos problemas, especialmente quando combinadas com a enumeração sistemática.

Por outro lado, as estratégias gerais, porque aplicáveis não apenas à Combinatória, relevam o papel que a Combinatória pode desempenhar na aprendizagem de técnicas gerais de resolução de problemas.

Finalmente, o modelo combinatório implícito teve um grande impacto na dificuldade do problema e nos tipos de erro, pois os estudantes nem sempre foram capazes de traduzir o problema de um modelo de partição ou de colocação num modelo de selecção, o que dificultou a identificação da operação combinatória.

Em síntese, nos seus vários estudos, Batanero e seus colaboradores destacam as variáveis modelo combinatório (selecção, distribuição e partição), operação combinatória envolvida no problema (permutação, arranjo e combinação), a dimensão dos parâmetros n e p e o tipo de elementos a serem combinados (letras, números, pessoas, objectos). Estas variáveis de tarefa, na medida em que influenciam as respostas dos alunos, devem ser "reconhecidas quando organizamos o ensino, as quais devem também enfatizar o processo de modelização, o raciocínio recursivo e procedimentos sistemáticos de enumeração, em vez de nos concentrarmos apenas nos aspectos algorítmicos e nas definições das operações combinatórias" (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1997, p.251).

Em relação às dificuldades dos alunos na resolução de problemas combinatórios, Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997) referem as seguintes: (1) enumeração não sistemática, que consiste numa estratégia de tentativa e erro, sem qualquer procedimento recursivo que leve à formação de todas as possibilidades; (2) uso incorrecto do diagrama de árvore; (3) erro de ordem, em que é considerada a ordem em situações em que é irrelevante ou não é considerada em situações em que é pertinente; (4) erro de repetição, em que não é considerada a repetição dos elementos quando tal é possível ou é considerada em situações de impossibilidade; (5) confundir o tipo de objecto, isto é, os objectos idênticos são considerados distinguíveis ou os objectos distintos são considerados indistinguíveis; e (6) confundir o tipo de célula (o tipo de subconjuntos) em modelos de partição ou de distribuição, que consiste em distinguir células (subconjuntos) idênticas ou em não diferenciar células (subconjuntos) distinguíveis.

Opções metodológicas

Do ponto de vista metodológico, o presente estudo integra-se numa investigação de carácter exploratório e enfoque quantitativo, e, dentro deste paradigma de investigação, ele reveste um carácter essencialmente descritivo (Gall, Borg & Gall, 1996).

Participaram no estudo 38 alunos pertencentes a duas turmas do 12º ano de uma escola secundária, que tinham a disciplina de Matemática no seu plano de estudos. Embora a Combinatória constitua um tema a ser abordado neste ano de escolaridade, na altura em que os dados foram recolhidos os alunos ainda não tinham estudado este tema na escola.

Como instrumento de recolha de dados foi usado um questionário, constituído por cinco problemas de selecção envolvendo permutações simples e com repetição, arranjos simples e com repetição e combinações simples. Para além do tipo de operação combinatória, incluiu-se ainda a variável número de elementos (objectos ou pessoas) implicadas na operação combinatória. Concretamente, em cada problema incluía-se duas ou três alíneas de dificuldade crescente: a) a primeira envolvia um pequeno número de elementos, podendo ser resolvida rapidamente por enumeração de todos os casos possíveis; b) a segunda envolvia um número significativamente maior de elementos, traduzindo-se numa maior dificuldade de resolução através da enumeração de todos os casos possíveis; e c) a última, quando incluída, referia-se ao caso geral de permutar n elementos ou de seleccionar r elementos de entre n elementos com certas características. Assim, nesta última alínea pretendia-se que os alunos estabelecessem uma fórmula adequada à situação.

Os dados foram recolhidos numa aula, em que estiveram presentes a professora da turma e um dos autores do texto, através da aplicação do questionário ao grupo turma. Em termos de tempo, verificou-se que os alunos necessitaram de aproximadamente 50 minutos para responder ao questionário.

Em relação à análise de dados, estudaram-se as respostas dadas pelos alunos, codificando-as em correctas, erradas e não respostas, e categorizaram-se as estratégias de resolução subjacentes às respostas. Em termos operacionais, tratou-se cada questionário individualmente e compararam-se as respostas e estratégias de resolução a cada questão em todos eles. O último procedimento teve em vista garantir sobretudo a fiabilidade da categorização das estratégias de resolução.

Quer no caso das respostas quer no caso das estratégias de resolução, recorreu-se fundamentalmente a percentagens, organizadas em tabelas, para referir os alunos que deram uma dada resposta ou adoptaram uma dada estratégia de resolução.

Apresentação de resultados

Nesta secção apresentam-se as respostas (correctas, erradas e não respostas) e as estratégias de resolução adoptadas pelos alunos em cada uma das cinco operações combinatórias estudadas: permutações simples, permutações com repetição, arranjos com repetição, arranjos simples e combinações simples.

Em relação às estratégias usadas pelos alunos pode já ser dito que elas se repetem ao longo das várias questões, distinguindo-se claramente estratégias de *enumeração*, estratégias baseadas em *cálculos/fórmulas* e estratégias que são meras *estimativas subjectivas*.

Qualquer das estratégias usadas conduziu a respostas correctas e erradas. No caso da enumeração, quando esta era incompleta ou incluía repetições, naturalmente que conduziu a uma resposta errada, e o mesmo aconteceu quando eram usados cálculos e fórmulas não adequados à situação.

No caso das estimativas subjectivas, os alunos limitavam-se a indicar um valor para o número de possibilidades da operação combinatória em questão, não revelando, deste modo, qualquer racionalidade na determinação desse valor.

Finalmente, compara-se a média das estimativas dos alunos, nas questões em que elas surgiram, com o número exacto de possibilidades correspondentes à respectiva operação combinatória.

Seguidamente, passam-se a relatar os resultados obtidos em cada uma das perguntas do questionário.

Dispor alunos em fila (Permutações simples)

a) De quantas maneiras diferentes se podem dispor em fila três alunos, a Ana, a Berta e o Carlos?
Exemplo: Ana, Berta e Carlos.

b) Juntaram-se aos alunos anteriores mais dois alunos, o Daniel e a Elsa. De quantas maneiras diferentes se podem dispor em fila os cinco alunos, a Ana, a Berta, o Carlos, o Daniel e a Elsa?
Exemplo: Berta, Ana, Elsa, Daniel e Carlos.

c) E se tivermos *n* alunos, de quantas maneiras diferentes os podemos dispor em fila?

Observando os resultados, que constam da tabela 1, verificamos que os alunos, na sua grande maioria, foram capazes de indicar o número de permutações de 3 elementos (questão 1a). Contudo, muito poucos indicaram o número correcto de permutações de 5 elementos (questão 1b) e nenhum conseguiu definir uma fórmula para calcular o número de permutações de *n* elementos (questão 1c). Além disso, verifica-se que à medida que as dificuldades dos alunos aumentam o número de não respostas também aumenta.

Tabela 1. Respostas dos alunos nas questões de permutações simples.

Questões	Percentagem de respostas		
	Correctas	Erradas	Não respostas
1a)	86,9	13,1	–
1b)	10,5	86,9	2,6
1c)	–	63,2	36,8

Podemos observar na tabela 2 as estratégias de resolução usadas pelos alunos, no caso das respostas correctas e no caso das respostas erradas.

Tabela 2. Estratégias usadas pelos alunos nas questões de permutações simples por respostas correctas e erradas.

Estratégias de resolução	Respostas correctas			Respostas erradas		
	1a)	1b)	1c)	1a)	1b)	1c)
Enumeração	71,1	–	–	10,5	31,6	–
Cálculos/Fórmulas	10,5	10,5	–	–	39,5	63,2
Estimativa subjectiva	5,3	–	–	2,6	15,8	–

A estratégia de *enumeração* foi a mais usada para determinar o número de permutações de 3 elementos. No caso do número de permutações de 5 elementos, os alunos recorreram mais frequentemente a *cálculos/fórmulas*, e foi a única estratégia usada para obter a fórmula do número de permutações de n elementos.

A estratégia de *enumeração* revelou-se muito eficaz na obtenção da resposta correcta na questão 1a), sendo a razão entre o número de respostas correctas e erradas de 6,8 (71,1/10,5 ≈ 6,8). No caso da questão 1b), ela nunca conduziu à resposta correcta, tendo os alunos indicado sempre enumerações incompletas e/ou com repetições (e.g., em 1a): ABC, BAC, CAB; ABC, ACB, BCA, BAC, CAB, CBA, BAC).

A estratégia assente em *cálculos/fórmulas* conduziu sempre a respostas correctas na questão 1a), revelou-se pouco eficaz na questão 1b) (10,5 / 39,5 = 0,3) e conduziu sempre a respostas erradas na questão 1c) (e.g., em 1c): n maneiras, $n \times (n-1), n \times 2, n^2$).

Finalmente, a estratégia *estimativa subjectiva* foi pouco adoptada na questão 1a) e conduziu sempre a uma resposta errada na questão 1b).

Arrumar livros numa estante (Permutações com repetição)

a) De quantas maneiras diferentes se podem arrumar numa estante três livros azuis e um vermelho, sabendo que os livros da mesma cor são iguais?
Exemplo: azul, azul, azul e vermelho.

b) Juntaram-se aos livros anteriores um livro azul e um vermelho, tendo-se agora quatro livros azuis e dois vermelhos. De quantas maneiras diferentes os podemos arrumar na estante, sabendo que os livros da mesma cor continuam a ser iguais?
Exemplo: azul, azul, azul, vermelho, azul e vermelho

Observando os resultados obtidos (ver tabela 3), conclui-se que a maioria dos alunos foi capaz de indicar o número de arranjos com repetição de 4 elementos, sendo 3 deles repetidos (questão 2a), mas muito poucos conseguiram indicar o número de arranjos com repetição de 6 elementos, dos quais 2 e 4 eram repetidos (questão 2b).

Tabela 3. Respostas dos alunos nas questões de permutações com repetição.

	Percentagem de respostas		
Questões	Correctas	Erradas	Não respostas
2a)	65,8	31,6	2,6
2b)	7,9	76,4	15,8

De entre as estratégias de resolução adoptadas (ver tabela 4), verifica-se, tal como na questão anterior, que a estratégia de *enumeração* foi a mais usada no caso das permutações com repetição de 4 elementos. Neste caso, esta estratégia revelou-se eficaz (60,5/7,9 ≈ 7,7). Todavia, quando se passa para permutações com repetição de 6 elementos, a estratégia torna-se pouco eficaz (2,5/15,8 ≈ 0,2).

Tabela 4. Estratégias usadas pelos alunos nas questões de permutações com repetição por respostas correctas e erradas.

	Respostas correctas		Respostas erradas	
Estratégias de resolução	2a)	2b)	2a)	2b)
Enumeração	60,5	2,6	7,9	15,8
Cálculos/Fórmulas	–	–	2,6	13,2
Estimativa subjectiva	5,3	5,3	21,1	47,4

A obtenção da resposta a partir de *cálculos/fórmulas*, mais adoptada quando se tratava de permutações com um maior número de elementos, conduziu sempre à obtenção de uma resposta errada (e.g., em 2a): $4^2 = 16$, $4 \times 3 \times 2 = 24$; em 2b): $6^2 = 36$, $2^2 + 6^2 = 40$).

Por último, a *estimativa subjectiva* foi a estratégia mais usada na questão 2b) e conduziu mais frequentemente a uma resposta errada, revelando-se em ambos os casos uma estratégia pouco eficaz na obtenção da resposta correcta (na questão 2a): $5{,}3/21.1 \approx 0{,}3$; na questão 2b): $5{,}3/47{,}4 \approx 0{,}1$).

Definir números (Arranjos com repetição)

a) Com os algarismos 1, 2 e 3 quantos números diferentes de dois algarismos podemos escrever?
Exemplo: 11

b) Com os algarismos 1, 2, 3 e 4 quantos números diferentes de três algarismos podemos escrever?
Exemplo: 122

c) Com *n* algarismos diferentes quantos números diferentes de algarismos podemos escrever?

Atendendo às respostas obtidas (ver tabela 5), verifica-se que a grande maioria dos alunos indicou a resposta correcta no caso dos arranjos com repetição de 2 elementos (questão 3a), e o número de alunos que indicaram a resposta correcta vai diminuindo quando passamos para o número de arranjos com repetição de 3 elementos (questão 3b) e para o número de arranjos com repetição de *r* elementos (questão 3c).

Comparativamente com as duas situações anteriores, neste caso, destaca-se uma maior percentagem de respostas correctas nas questões 3b) e 3c).

Tabela 5. Respostas dos alunos nas questões de arranjos com repetição.

	Percentagem de respostas		
Questões	Correctas	Erradas	Não respostas
3a)	81,6	18,4	–
3b)	39,5	55,2	5,3
3c)	15,8	42,1	42,1

Em termos de estratégias de resolução, salienta-se a *enumeração* na questão 3a) e o recurso a *cálculos/fórmulas* nas outras duas questões (ver tabela 6).

A *enumeração* revelou-se uma estratégia eficaz na obtenção da resposta correcta quando se tratava de arranjos com repetição de 2 elementos $(73{,}7/15{,}8 \approx 4{,}7)$, mas o mesmo não aconteceu no caso de arranjos com repetição de 3 elementos $(7{,}9/36{,}8 \approx 0{,}2)$.

Tabela 6. Estratégias usadas pelos alunos nas questões de arranjos com repetição por respostas correctas e erradas.

	Respostas correctas			Respostas erradas		
Estratégias de resolução	3a)	3b)	3c)	3a)	3b)	3c)
Enumeração	73,7	7,9	–	15,8	36,8	–
Cálculos/Fórmulas	7,9	31,6	15,8	–	18,4	42,1
Estimativa subjectiva	–	–	–	2,6	–	–

A estratégia de resolução a partir de *cálculos/fórmulas* foi adoptada em todas as questões, tendo levado sempre à resposta correcta no caso dos arranjos com repetição de 2 elementos e a sua eficácia foi diminuindo quando passamos, sucessivamente, aos arranjos com repetição de 3 elementos $((31{,}6/18{,}4 \approx 1{,}7)$ e aos arranjos com repetição de *r* elementos $15{,}8/42{,}1 \approx 0{,}4)$. Na questão 3b), são exemplos de *cálculos/fórmulas* correctas $16 \times 4 = 64$ e $4 \times 4 \times 4 = 64$; e, na questão 3c), são exemplos de *cálculos/fórmulas* erradas n^2 e $n \times r$.

Por fim, a *estimativa subjectiva* foi uma estratégia que quase não foi usada em qualquer das questões consideradas.

Formar palavras (Arranjos simples)

a) Utilizando apenas letras da palavra FARO, e sem repetir nenhuma delas, quantas palavras diferentes, de duas letras, se podem formar sem atender ao seu significado?
Exemplo: FA.

b) Utilizando apenas letras da palavra COIMBRA, e sem repetir nenhuma delas, quantas palavras diferentes, de três letras, se podem formar sem atender ao seu significado?
Exemplo: IBA.

c) Utilizando *n* letras todas diferentes, e sem repetir nenhuma delas, quantas palavras diferentes, de *r* letras, se podem formar sem atender ao seu significado?

A operação de arranjos simples revelou-se claramente mais difícil do que a operação de arranjos com repetição. Relativamente à resposta correcta (ver tabela 7), observa-se que quase metade dos alunos a indicou, quando se tratava de arranjos simples de 2 elementos (questão 4a); muito poucos a indicaram, quando se tratava de arranjos simples de 3 elementos (questão 4b); e nenhum foi capaz de indicar a fórmula para determinar o número de arranjos simples de *r* elementos tomados de um conjunto de *n* elementos (questão 4c).

Tabela 7. Respostas dos alunos nas questões de arranjos simples.

Questões	Percentagem de respostas: Correctas	Erradas	Não respostas
4a)	47,4	39,4	13,2
4b)	13,2	71,0	15,8
4c)	–	39,5	60,5

Em relação às estratégias de resolução, tal como na situação anterior, salienta-se a *enumeração* na questão 4a) e o recurso a *cálculos/fórmulas* nas outras duas questões (ver tabela 8). Todavia, em geral, as estratégias mostraram-se menos eficazes na selecção da resposta correcta.

Na questão 4a), o recurso à *enumeração* conduziu sensivelmente o mesmo número de vezes à resposta correcta e a uma resposta errada ($36{,}8/34{,}2 \approx 1{,}1$) e, na questão 4b), conduziu sempre a uma resposta errada.

Tabela 8. Estratégias usadas pelos alunos nas questões de arranjos simples por respostas correctas e erradas.

Estratégias de resolução	Respostas correctas 4a)	4b)	4c)	Respostas erradas 4a)	4b)	4c)
Enumeração	36,8	–	–	34,2	23,7	–
Cálculos/Fórmulas	10,5	7,9	–	2,6	34,2	39,5
Estimativa subjectiva	–	5,3	–	2,6	13,2	–

O recurso a *cálculos/fórmulas* verificou-se em todas as questões, tendo esta estratégia diminuído a sua eficácia com o aumento de elementos implicados nos arranjos simples. Na questão 4a) conduziu a maior parte das vezes à resposta correcta ($10{,}5/2{,}6 \approx 4{,}0$), na questão 4b) conduziu a maior parte das vezes a uma resposta errada ($7{,}9/34{,}2 \approx 0{,}2$) e na questão 4c) conduziu sempre a uma resposta errada. Na questão 4a), são exemplos de *cálculos/fórmulas* correctas $4^2-4=12$ e $4\times 3=12$ e, são exemplos de *cálculos/fórmulas* erradas $7^3=343$ e $7^3-7=336$, na questão 4b), e n^2-n e $n\times r$, na questão 4c).

Por último, a *estimativa subjectiva* ocorreu quase exclusivamente na questão 4b) e na maior parte dos casos deu origem a uma resposta errada $(5{,}3/13{,}2 \approx 0{,}4)$.

Escolher disciplinas (Combinações simples)

a) De entre as disciplinas de Biologia, Física, Inglês, Matemática e Português, um estudante tem de escolher três. De quantas maneiras diferentes pode o estudante escolher as três disciplinas?
Exemplo: Biologia, Física e Inglês.

b) De entre as disciplinas de Biologia, Economia, Física, Inglês, Matemática, Português e Química, um estudante tem de escolher quatro. De quantas maneiras diferentes pode o estudante escolher as quatro disciplinas?
Exemplo: Biologia, Física, Inglês e Economia.

De entre as operações combinatórias estudadas, a de combinações simples revelou-se a mais difícil para os alunos (ver tabela 9). Neste caso, muito poucos alunos seleccionaram a resposta correcta quando estavam em jogo o número de combinações de 3 elementos num total de 5 elementos (questão 5a) e nenhum indicou o número correcto de combinações de 4 elementos num total de 7 elementos (questão 5b).

Tabela 9. Respostas dos alunos nas questões de combinações simples.

Questões	Percentagem de respostas		
	Correctas	Erradas	Não respostas
5a)	10,5	63,2	26,3
5b)	–	68,4	31,6

Em termos de estratégias de resolução (ver tabela 10), apenas a *enumeração* e o recurso a um *diagrama de árvore* conduziram à resposta correcta no caso das combinações de 5 elementos tomados 3 a 3. A estratégia de *enumeração* revelou-se pouco fiável na obtenção da resposta correcta $(5{,}3/13{,}2 \approx 0{,}4)$, pois a maioria destes alunos apresentou enumerações incompletas.

Já o *diagrama de árvore* conduziu sempre à resposta correcta na questão que envolvia combinações com um menor número de elementos. No caso da questão que envolvia combinações com um maior número de elementos todas as estratégias conduziram a uma resposta errada, o que correspondeu recorrerem à *enumeração*, a *cálculos/fórmulas*, a uma mera *estimativa subjectiva* ou a um *diagrama de árvore.*

Tabela 10. Estratégias usadas pelos alunos nas questões de combinações simples por respostas correctas e erradas.

Estratégias de resolução	Respostas correctas 5a)	Respostas correctas 5b)	Respostas erradas 5a)	Respostas erradas 5b)
Enumeração	5,3	–	13,2	10,5
Cálculos/Fórmulas	–	–	36,8	34,2
Estimativa subjectiva	–	–	13,2	21,1
Diagrama de árvore	5,3	–	–	2,6

Nesta situação, diferentemente das outras, o recurso a *cálculos/fórmulas* foi a estratégia mais usada para obter uma resposta em qualquer das duas questões, embora sempre errada. Por exemplo, são exemplo de *cálculos//fórmulas* erradas 3×5 e $5^2=25$, no caso da questão 5a), e 4×7 e $7^3=343$, no caso da questão 5b).

A estratégia *estimativa subjectiva*

Embora não tenha sido usada por muitos alunos, a mera *estimativa subjectiva* constituiu uma estratégia usada ao longo da maior parte das questões estudadas. Na hipótese destes palpites não terem sido feitos completamente ao acaso, envolvendo alguma racionalidade não explicitada, é importante saber em que medida se afastam dos valores correctos. Para tal, determinámos, em cada questão, a média dos valores dos palpites e comparámo-lo com o número correcto de possibilidades dado pela respectiva fórmula combinatória (ver figura 1).

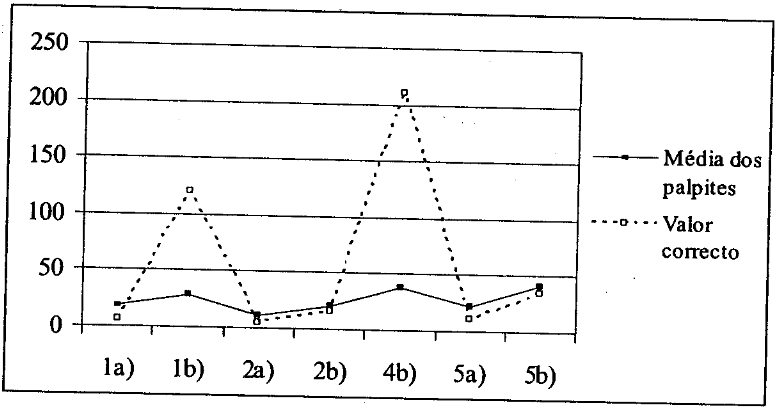

Figura 1. Comparação das médias dos palpites com os valores correctos nas várias questões em que esta estratégia foi utilizada.

Observando a figura 1, verifica-se que a média dos palpites foi muito inferior ao valor exacto nas questões 1b) e 4b), as quais se referem a permutações de 5 elementos e a arranjos simples de 6 elementos tomados 3 a 3, respectivamente.

Nas outras questões, as médias dos palpites foram superiores aos correspondentes valores exactos. Especificamente, na questão 1a), de permutações de 3 elementos; nas questões 2a) e 2b), de permutações com repetição; e nas questões 5a) e 5b), de combinações.

Conclusão

Com base na percentagem de respostas correctas dos alunos nas várias questões estudadas, podemos tirar as seguintes conclusões:

- A maioria dos alunos foi capaz de indicar a resposta correcta na questão que envolvia um pequeno número de elementos nas operações combinatórias de permutações simples (3 elementos), permutações com repetição (4 elementos, sendo 3 iguais) e arranjos com repetição (3 elementos tomados 2 a 2), variando as respectivas percentagens entre um máximo de 86,9% (para as permutações simples) e um mínimo de 65,8% (para as permutações com repetição). Já nas correspondentes questões sobre arranjos simples (4 elementos tomados 2 a 2) e sobre combinações (5 elementos tomados 3 a 3) menos de metade dos alunos responderam correctamente, sendo as percentagens de 47,4% e 36,8%, respectivamente.
- Quando o número de elementos implicados nas várias operações combinatórias aumentou, muito poucos alunos foram capazes de indicar a resposta correcta, tendo-se observado uma percentagem máxima de 39,5% no caso dos arranjos com repetição, à volta de 10% no caso das permutações simples, permutações com repetição e arranjos simples e nenhuma resposta correcta no caso das combinações simples.
- Finalmente, na generalização através de uma fórmula, verificaram-se ainda maiores dificuldades. Relativamente às três questões consideradas, apenas 15,8% indicaram a resposta correcta na questão sobre arranjos com repetição, e nas outras duas, relativas a permutações simples e a arranjos simples, nenhum aluno respondeu correctamente.

Também, consoante o número de elementos implicados nas operações combinatórias, observaram-se diferentes tendências nas estratégias de resolução adoptadas pelos alunos nas várias questões:

- Nas questões que envolviam o menor número de elementos, em geral, os alunos adoptaram a maior parte das vezes uma estratégia de *enumeração*. A única excepção verificou-se na questão sobre combinações simples, onde os alunos recorreram em maior percentagem a *cálculos/fórmulas*.
- Nas questões em que era maior o número de elementos envolvidos nas operações combinatórias, mais alunos recorreram à estratégia de *cálculos/fórmulas* em todas essas questões, exceptuando-se o caso das permutações com repetição, em que foi mais usada a simples *estimativa subjectiva*. Nestas questões destaca-se, ainda, uma percentagem considerável de alunos que adoptaram a estratégia de *enumeração*.
- Por último, nas questões em que era necessário definir uma lei geral através de uma fórmula, os alunos que responderam (nestas questões houve uma elevada percentagem de não respondentes) recorreram mais frequentemente a *cálculos/fórmulas*.

A eficácia dos vários raciocínios, enquanto razão entre as percentagens de respostas correctas e erradas, também foi diferente nos três tipos de questões estabelecidas com base no número de elementos envolvidos. No caso das questões com menor número de elementos, verificou-se que a estratégia de *enumeração* e o recurso a *cálculos/fórmulas* foram os mais eficazes, tendo-se apresentado o primeiro como o mais regular.

Relativamente às questões envolvendo um maior número de elementos, de todas as estratégias a que os alunos recorreram, o *cálculo/fórmulas* destaca-se ligeiramente na sua eficácia em relação às demais.

Por último, nas questões que exigiam leis gerais, nenhuma das estratégias se destacou particularmente na sua eficácia, até porque, nestas questões, foram muito poucas as respostas correctas dos alunos. A única excepção verificou-se na operação de arranjos com repetição, onde apenas a estratégia *cálculo/fórmulas* conduziu a respostas correctas.

As estratégias adoptadas pelos alunos conduziram muito frequentemente a respostas erradas, particularmente quando era maior o número de elementos envolvidos na operação combinatória e, ainda mais, quando se tratou de estabelecer uma generalização. No caso da estratégia de *enumeração*, os alunos falharam em usar esta estratégia de forma sistemática, produzindo, consequentemente, enumerações incompletas e/ou com repetições.

Por outro lado, a utilização da estratégia de *enumeração* de forma não sistemática pode, naturalmente, ter favorecido o recurso a *cálculos/fórmulas* quando o número de elementos implicados na operação combinatória aumentou. No caso da generalização, a estratégia de enumeração, tratando-se de uma estratégia que não conduz ao sucesso, ela nunca foi utilizada pelos alunos.

No caso da estratégia *cálculo/fórmulas*, os erros, tal como observaram Fischbein e Grossman (1997), centraram-se no recurso a operações de multiplicação e de potenciação, que nuns casos sobrestimam e noutros sob-estimam o número de possibilidades correspondentes às operações combinatórias.

Em relação às *estimativas subjectivas*, os alunos sob-estimaram o número de permutações simples e o número de arranjos simples, quando o número de elementos envolvidos era maior, e sobrestimaram o número de permutações com repetição e de combinações simples, em qualquer caso. Muito embora os palpites tenham sido resultado da iniciativa dos alunos, uma vez que não lhes foi pedida qualquer estimativa, verifica-se que os resultados confirmam resultados semelhantes obtidos por Fischbein e Grossman (1997) no caso das permutações simples e das combinações simples. Relativamente aos arranjos simples, observou-se uma tendência contrária e as permutações com repetição não foram estudadas por estes autores.

O maior número de elementos envolvidos nos arranjos simples neste estudo (7 elementos tomados 2 a 2), comparativamente com o que acontecia no estudo de Fischbein e Grossman (5 elementos tomados 2 a 2), pode estar na origem das discrepâncias obtidas.

Em síntese, podemos concluir que os alunos que participaram no estudo têm intuições combinatórias muito limitadas em todas as operações combinatórias estudadas, destacando-se apenas o caso em que está envolvido um pequeno número de elementos. De entre todas as operações combinatórias, salientou-se ligeiramente os arranjos com repetição. Estes resultados apoiam a necessidade de alguma intervenção de ensino no sentido de promover intuições adequadas, como é defendido por Fischbein (1975), e afastam-se de um desenvolvimento espontâneo da capacidade combinatória preconizado Piaget e Inhelder (s/d).

Referências bibliográficas

Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio.* Madrid: Editorial Síntesis.

Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: ISO Press.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics, 32,* 181-199.

Dubois, J. G. (1984). Une Systematique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics, 15*(1), 37-57.

Fischbein, E. & Grossman,(1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 34,* 27-47.

Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. Pampu, I. & Mînzat, I. (1970). Effects of age and instruction on combinatory ability in children. In E. Fischein (1975), *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Appendix IV, pp. 189-201). Dordrecht: Reidel.

Gall, M. D., Borg, W. R. & Gall, J. P. (1996). *Educational research: An introduction.* New York: Longman Publishers USA.

Glaymann, M. & Varga, T. (1975). *Les Probabilités à l'école.* Paris: Cedic.

Godino, J. D., Batanero, M. C. & Cañizares, M. J. (1996). *Azar y probabilidad: Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.

Hadar, N. & Hadass, R. (1981). The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics, 12*(4), 435-443.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1976). *Da lógica da criança à lógica do adolescente: Ensaio sobre a construção das estruturas operatórias formais.* São Paulo: Livraria Pioneira Editora.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: IIE e APM. (Tradução portuguesa do original de 1989.)

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. & Godino, J. D. (1996). Razionamiento combinatório em alumnos de secundário. *Educacion Matemática*, *8*(1), 26-39.

Piaget, J. & Inhelder, B. (s/d). *A origem da ideia do acaso na criança*. Rio de Janeiro: Editora Record. (Tradução portuguesa do original de 1951.)

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada.* Tese de Doutoramento não publicada, Universidad de Granada, Granada.

Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D. & Cañizares, M. J. (1996). Estrategias en la resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon*, *36*, 433-446.