



# Cinemática e Dinâmica de Engrenagens

## 6. Análise Dinâmica de Engrenagens

**Paulo Flores**  
**José Gomes**



**Universidade do Minho**  
Escola de Engenharia

Guimarães 2015



## ÍNDICE

<b>6. Análise Dinâmica de Engrenagens .....</b>	<b>1</b>
6.1. Introdução.....	1
6.2. Diagramas do Corpo Livre .....	5
6.3. Nomenclatura .....	10
6.4. Engrenagens Cilíndricas de Dentes Retos.....	12
6.5. Engrenagens Cilíndricas de Dentes Inclinados .....	17
6.6. Engrenagens Cónicas.....	24
6.7. Engrenagens de Parafuso Sem-fim.....	30
6.8. Revisão de Conhecimentos .....	36
6.9. Referências Bibliográficas .....	38



## **6. ANÁLISE DINÂMICA DE ENGRENAGENS**

### **6.1. INTRODUÇÃO**

Como é sabido, as engrenagens são sistemas mecânicos utilizados para transmitir potência e movimento entre os órgãos motor e movido. Tal como acontece em outros sistemas mecânicos de transmissão de movimento, o projeto e dimensionamento dos componentes que constituem as engrenagens assenta no conhecimento das forças que se desenvolvem durante o seu funcionamento (Shigley e Mischke, 1989; Wilson e Sadler, 1993). No caso das engrenagens, a determinação das forças que atuam nos dentes depende das condições de funcionamento e do tipo de dentado. Na verdade, o correto conhecimento da magnitude e do sentido de atuação das diversas componentes da força de engrenamento é de primordial importância, pois permite a determinação dos esforços que atuam nos dentes, nos veios que suportam as rodas dentadas, e nos respetivos apoios dos veios. Com efeito, conhecidas cargas que se desenvolvem nas engrenagens é possível efetuar o cálculo dos dentes, o dimensionamento dos veios e a seleção dos apoios (Branco *et al.*, 2009).

A análise dinâmica de engrenagens diz respeito ao estudo das forças que atuam nas engrenagens. Esta análise é frequentemente denominada de análise de forças e assenta, em geral, num conjunto de premissas simplificativas. Em primeiro lugar, na análise dinâmica de engrenagens é habitual efetuar-se a simplificação que considera que as forças de engrenamento são pontuais e atuam na zona central dos flancos dos dentes. Por outro lado, durante o engrenamento de duas rodas dentadas é provável que um dente seja mais solicitado do que os dentes adjacentes, por isso, é comum considerar-se que a força de engrenamento é totalmente transmitido apenas num dente. Na análise dinâmica de engrenagens é habitual considerar-se que o rendimento é unitário (Shigley e Uicker, 1980). Esta assunção é verdadeira para o caso das engrenagens cilíndricas de dentado reto e inclinado, bem como no caso das engrenagens cónicas de dentes retos. Na verdade, nestes tipos de engrenagens é expectável que haja perdas na ordem de 1 a 2%, as quais podem, todavia, ser desprezadas. Esta simplificação não deve ser efectuada no caso das engrenagens de parafuso sem-fim devido ao elevado escorregamento que acontece entre os flancos dos filetes e dos dentes das rodas (Drago, 1988; Juvinal e Marshek, 2006; Budynas e Nisbett, 2011; Flores e Gomes, 2014a; Norton, 2013).

Os elementos das engrenagens têm inércia, a qual quando associada a aceleração desenvolve forças de inércia. Quando as forças de inércia são relativamente pequenas face às demais forças em jogo, então as primeiras podem ser desprezadas na análise de forças em engrenagens. Este tipo de análise é frequentemente denominada de análise estática, uma vez que se assume que os elementos estão em repouso. Com efeito, a análise dinâmica de engrenagens é, em geral, realizada utilizando as condições de equilíbrio, pelo que o estabelecimento correto dos sentidos das forças que atuam nas engrenagens é de capital importância (Thomas e Hillsman, 1993). Subsequentemente, torna-se necessário conhecer as magnitudes daquelas forças e, deste modo, proceder ao projeto das engrenagens, nomeadamente no cálculo dos dentes, no dimensionamento dos veios e na seleção dos apoios dos veios.

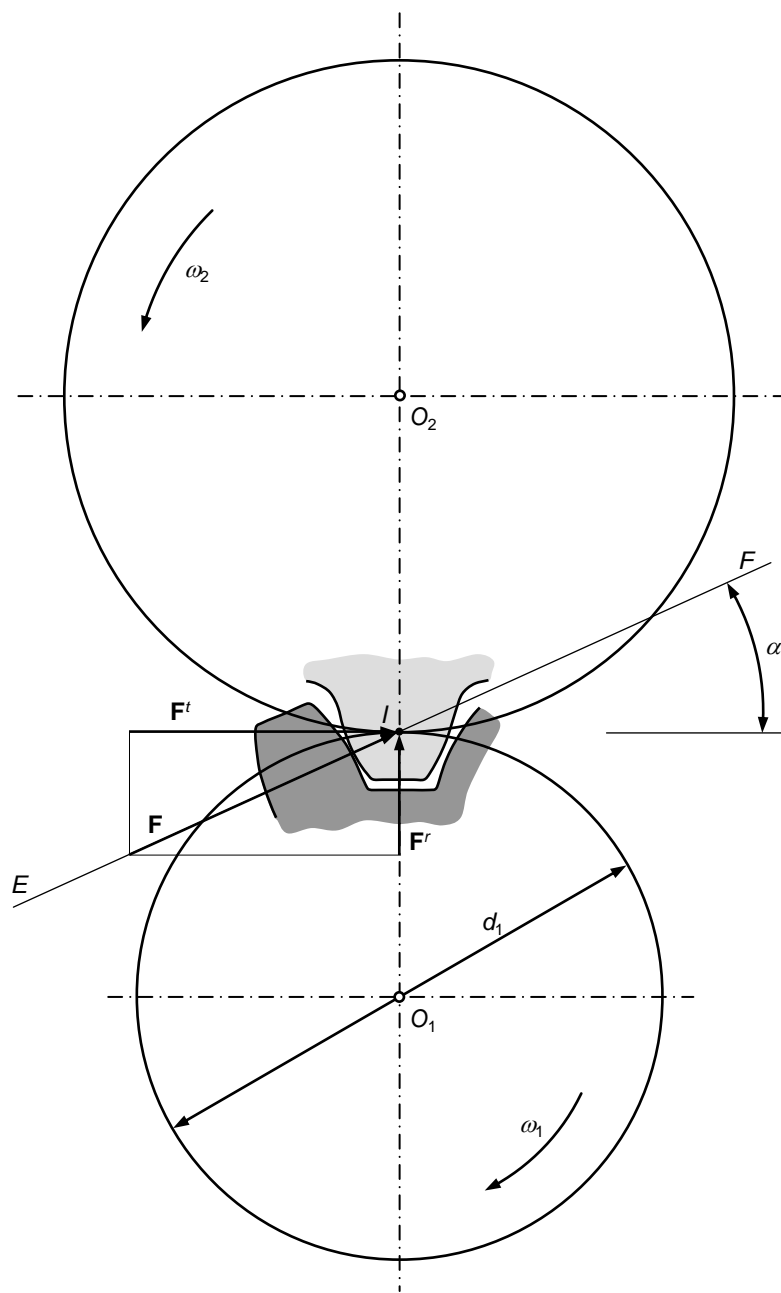


Figura 6.1 – Representação simplificada de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos.

Com o intuito de introduzir os aspectos fundamentais relacionados com a análise dinâmica de engrenagens considere-se a figura 6.1 onde se representa esquematicamente o engrenamento de duas rodas dentadas de dentes retos em que o pinhão é o órgão motor. Por simplicidade, quer o pinhão, quer a roda estão materializados pelas respectivas circunferências primitivas. Sabe-se que durante o engrenamento, o ponto de contacto move-se ao longo da linha de engrenamento  $EF$ . Na representação da figura 6.1, o dente do pinhão contacta o dente da roda no ponto primitivo  $I$ , sendo este o ponto de engrenamento. Nesta fase do engrenamento, os flancos dos dentes em contacto descrevem um movimento de rolamento puro, isto é não existe escorregamento. Em qualquer outra fase do engrenamento, em virtude do escorregamento existente nos flancos dos dentes no pinhão e na roda, a força resultante no engrenamento está ligeiramente incluída de um ângulo denominado ângulo de atrito (Mabie

e Reinholtz, 1987; Flores e Gomes, 2014b). Atendendo a que, em geral, o ângulo de atrito é muito pequeno, a análise dinâmica da engrenagem representada na figura 6.1 pode ser levada a cabo desprezando o efeito de atrito, sendo que o erro daí decorrente é de somenos importância. A força que empurra os dentes da roda movida é representada pelo símbolo  $\mathbf{F}$ . Esta força é perpendicular às superfícies dos dentes e atua sempre na direção definida pela linha de engrenamento. Da consideração da terceira lei de Newton decorre que é exercida nos dentes do pinhão tem o mesmo módulo e mesma direção da força  $\mathbf{F}$ , sendo, contudo, oposto o sentido de atuação daquela força. Atendendo ao princípio da transmissibilidade da força de engrenamento, sabe-se que o momento desenvolvido em cada ponto situado na linha de engrenamento é constante. Por conseguinte, o ponto primitivo pode ser considerado como representativo de todo o engrenamento<sup>1</sup>.

Da análise da figura 6.1, observa-se que a força de engrenamento  $\mathbf{F}$  pode ser dividida nas suas componentes tangencial e radial. A primeira componente diz respeito à força útil, a qual representa a força responsável pela transmissão de potência. Ao invés, a componente radial não transmite potência e atua, tal como o nome sugere, na direção radial das rodas e no sentido dos respetivos centros de rotação. De facto, em engrenagens cilíndricas exteriores de dentes retos, a componente radial da força de engrenamento tende a separar o pinhão da roda, pelo que esta força é, por vezes, denominada de força de separação (Shigley e Uicker, 1980).

Admitindo que o motor que aciona o pinhão da engrenagem representada na figura 6.1 transmite uma potência  $P_1$  a uma velocidade angular  $\omega_1$ , então tem-se que

$$P_1 = M_1 \omega_1 \quad (6.1)$$

em que  $M_1$  denota o momento que atua no pinhão. Atendendo a que o rendimento é unitário, sabe-se que

$$P_2 = P_1 = M_2 \omega_2 \quad (6.2)$$

ou seja, o momento que atua na roda é diferente do momento que atua no pinhão, sendo que as correspondentes velocidades angulares variam de modo inverso, tal que

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{M_2}{M_1} \quad (6.3)$$

O momento que atua no pinhão pode ser expresso do seguinte modo

$$M_1 = F^t \frac{d_1}{2} \quad (6.4)$$

em que  $d_1$  representa o diâmetro primitivo do pinhão.

Combinando agora as equações (6.1) e (6.4) obtém-se a expressão que relaciona a força transmitida com a potência e velocidade angular do motor, ou seja

$$F^t = \frac{2P_1}{d_1 \omega_1} \quad (6.5)$$

ou, alternativamente,

<sup>1</sup> Refira-se que o ponto primitivo é, por definição, o ponto de interseção da linha de engrenamento com a linha de centros. Por seu lado, o ângulo definido pela tangente comum às circunferências primitivas e pela linha de engrenamento é denominado ângulo de pressão (Henriot, 1979).

$$F^t = \frac{60P_1}{\pi d_1 n_1} \quad (6.6)$$

em que  $P_1$  é a potência do motor, expressa em W,  $d_1$  representa o diâmetro primitivo do pinhão, expresso em m e  $n_1$  é a velocidade de rotação do motor, expresso em rpm. Observa-se, portanto, que a força transmitida é função das características do motor e dimensão do pinhão.

Por seu lado, a componente radial da força de engrenamento é expressa da seguinte forma

$$F^r = F^t \operatorname{tg} \alpha \quad (6.7)$$

em que  $\alpha$  é o ângulo de pressão.

Pode ainda determinar-se a força resultante que atua nos dentes, isto é

$$F = \frac{F^t}{\cos \alpha} \quad (6.8)$$

Observa-se, pois, que a força de engrenamento aumenta com o ângulo de pressão. A componente radial da força de engrenamento também aumenta com o ângulo de pressão. Deve ainda referir-se que a força tangencial induz corte e flexão nos dentes, ao passo que a componente radial gera compressão nos dentes. Devido à natureza do contacto que acontece-se entre as superfícies dos dentes, pode verificar-se que a força de engrenamento causa tensões elevadas na vizinhança da zona de contacto nos flancos dos dentes. Finalmente, deve mencionar-se que nas engrenagens cilíndricas de dentes retos não existe componente axial da força de engrenamento, uma vez que as superfícies dos dentes se desenvolvem paralelamente ao eixo da roda. Na verdade, as forças de engrenamento dependem da geometria dos dentes das rodas (Spotts e Shoup, 1998). De modo geral e simples, pode dizer-se que a análise dinâmica de engrenagens confina os seguintes:

- Cálculo das componentes da força de engrenamento,
- Determinação das reações nos apoios dos veios que suportam as rodas,
- Seleção dos apoios para os veios.

### Exercício 6.1

**Enunciado:** Considere uma engrenagem cilíndrica de dentado reto normalizado em que o pinhão é accionado por um motor que roda a 1750 rpm e transmite uma potência de 2,5 kW. Atendendo a que o pinhão tem 20 dentes um módulo de 2,5 mm, determine as forças que atuam nesta engrenagem.

#### **Padrão de resposta esperado:**

Da análise geométrica de engrenagens sabe-se que o diâmetro primitivo do pinhão pode ser calculado do seguinte modo

$$d_1 = m z_1 = 2,5 \times 20 = 50 \text{ mm.}$$

Assim, as componentes tangencial, radial da força de engrenamento, bem como a força total de engrenamento podem ser determinadas utilizando as equações (6.6) a (6.8), resultando

$$F^t = 545,67 \text{ N}$$

$$F^r = 198,61 \text{ N}$$

$$F = 580,69 \text{ N.}$$



## 6.2. DIAGRAMAS DO CORPO LIVRE

Uma das etapas mais importantes na análise de forças em sistemas mecânicos em geral prende-se com a elaboração dos diagramas do corpo livre. Esta circunstância é de particular relevância na análise dinâmica de engrenagens, não só devido à geometria diversa que os dentes das rodas podem apresentar, mas também pelo tipo de apoio que os veios das rodas podem assentar. Um diagrama do corpo livre<sup>2</sup> não é mais do que um desenho, um esquema ou um esboço do corpo, componente ou subsistema em análise, o qual é retirado ou isolado do sistema mecânico a que pertence e onde se representam todas as forças e momentos que sobre ele atuam (Flores e Claro, 2007). Com efeito, a título de exemplo, a figura 6.2 apresenta os diagramas do corpo livre dos componentes que constituem um alicate. Neste caso são desprezados os efeitos dos vários corpos na elaboração dos referidos diagramas (Flores, 2012).

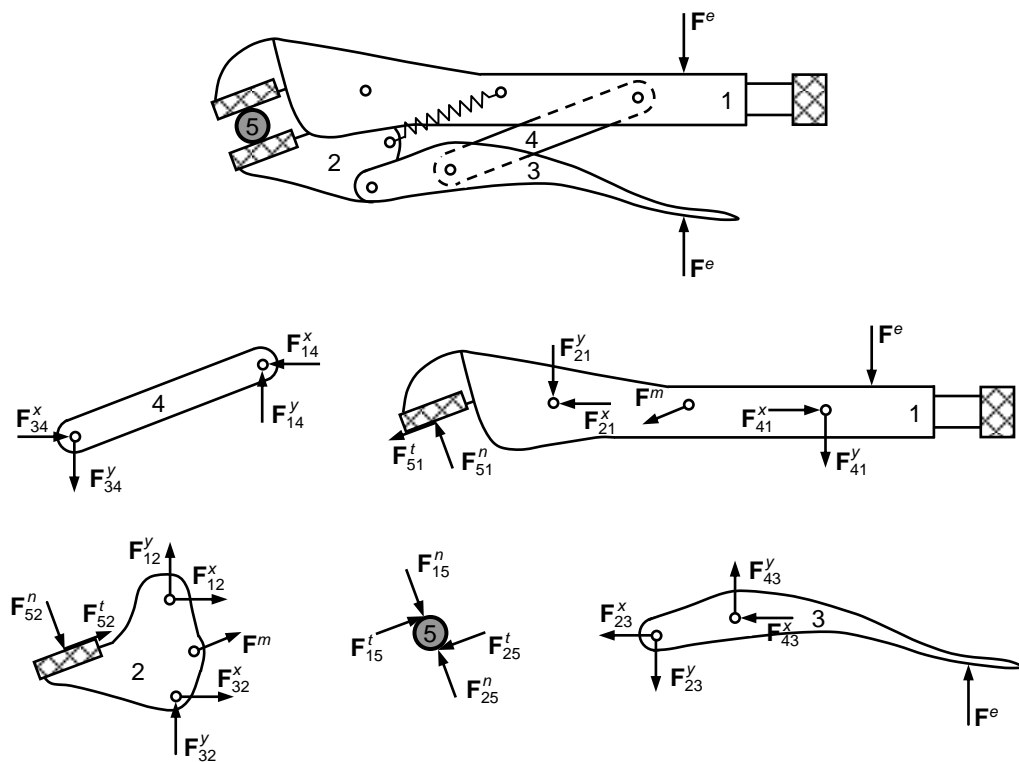


Figura 6.2 – Diagramas do corpo livre dos diversos componentes de um alicate.

A elaboração de diagramas do corpo livre em sistemas mecânicos requer a correta identificação dos seus componentes, bem como das forças e momentos que sobre eles são exercidos. Em máquinas e mecanismos de uso corrente, os componentes são ligados uns aos outros através de pares cinemáticos, pelo que é muito importante identificar os tipos de constrangimentos ou restrições que atuam nos diversos pares cinemáticos. A figura 6.3 inclui os principais tipos de pares cinemáticos inferiores<sup>3</sup> comumente utilizados em sistemas mecânicos. Ainda nesta figura estão representadas as reações que se desenvolvem em cada um dos elementos quando o efeito de

<sup>2</sup> O termo livre significa que o corpo está desligado do sistema mecânico de que faz parte, sendo que os seus efeitos são substituídos pelas forças e momentos que atuam sobre o corpo.

<sup>3</sup> Nos pares cinemáticos inferiores, o contacto entre os seus elementos constituintes é uma superfície.

atrito é desprezável. Deve referir-se que no caso dos pares cinemáticos superiores<sup>4</sup>, as forças de reação são sempre perpendiculares às superfícies de contacto quando é nulo o efeito devido ao atrito.

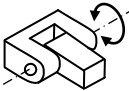
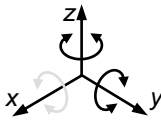
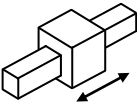
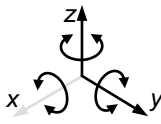
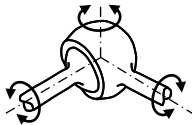
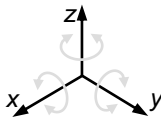
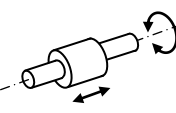

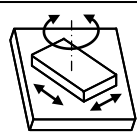
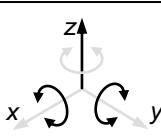
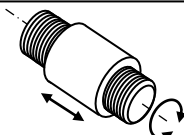
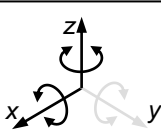
Pares cinemáticos inferiores			
Designação	Geometria	Incógnitas	Reações
Rotação		5	
Translação ou prismática		5	
Esférica ou globular		3	
Cilíndrica		4	
Plana		3	
Helicoidal ou de parafuso		4	

Figura 6.3 – Representação dos pares cinemáticos inferiores e correspondentes reações em termos de forças e/ou momentos.

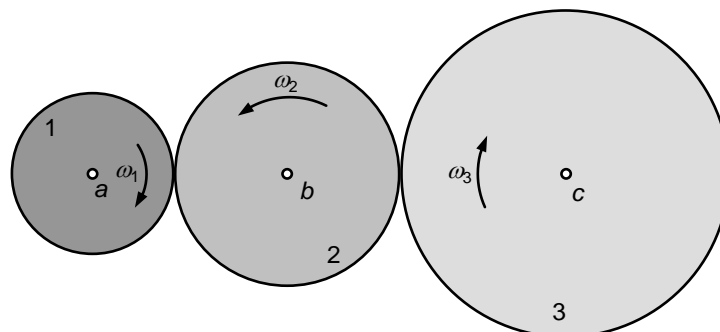


Figura 6.4 – Trem de engrenagens constituído por 3 rodas.

<sup>4</sup> Deve referir-se que no caso dos pares cinemáticos superiores, o contacto entre os seus elementos é do tipo pontual ou linear (Flores e Claro, 2007).

### Exercício 6.2

**Enunciado:** A figura 6.4 mostra um trem de engrenagens de rodas cilíndricas de dentes retos, em que o órgão motor é a roda 1, cuja potência é de 30 kW a 1000 rpm. A roda 1 tem 10 mm de módulo e um ângulo de pressão normalizado. As rodas 1, 2 e 3 têm um número de dentes igual a 35, 45 e 60, respetivamente. Assim, elabore o diagrama do corpo livre de cada uma das rodas.

**Padrão de resposta esperado:**

A figura 6.5 apresenta os diagramas do corpo livre das rodas do trem supramencionado. Deve chamar-se à atenção que não existe momento na roda intermédia, sendo esta denominada de roda parasita, pois não afeta a relação de transmissão total do trem. Na verdade a roda 2 permite que as rodas 1 e 3 rodem no mesmo sentido.

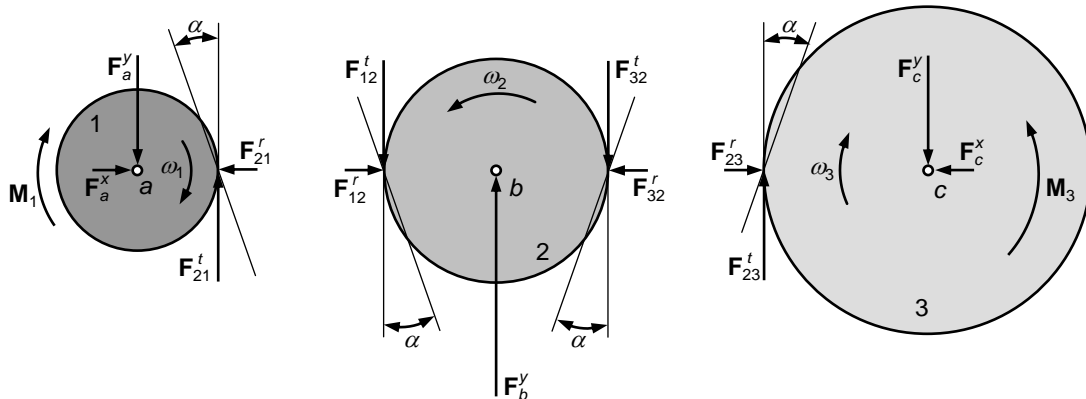


Figura 6.5 – Diagramas do corpo livre das rodas do trem descrito no exercício 6.2.

### Exercício 6.3

**Enunciado:** A figura 6.6a ilustra um trem de engrenagens acionado pelo anel exterior, 1, que, por sua vez transmite o movimento às rodas 2, 3 e 4. A roda central, 5, está estacionária e ligada ao braço 6. Assim, atendendo a que o momento motor que atua na roda 1 é igual a  $M_1$ , determine a relação de transmissão do trem.

**Padrão de resposta esperado:**

Para se proceder à resolução deste exercício, deve começar-se pela elaboração dos diagramas do corpo livre dos vários componentes, tal como se representa na figura 6.6b. Deve notar-se que os diagramas do corpo livre aqui representados são uma versão simplificada dos mesmos. Com efeito, da análise do diagrama do corpo livre do anel tem-se que o momento  $M_1$  é dividido<sup>5</sup> igualmente pelas rodas 2, 3 e 4, ou seja

$$M_1 = 3M_2 \tag{6.9}$$

Por outro lado, o momento  $M_2$  é dado por

$$M_2 = F_1 \frac{d_1}{2} \tag{6.10}$$

Combinando agora as equações (6.9) e (6.10) resulta que

$$F_1 = \frac{2}{3} \frac{M_1}{d_1} \tag{6.11}$$

<sup>5</sup> Esta situação é verdadeira, uma vez que se admite que o rendimento é unitário.

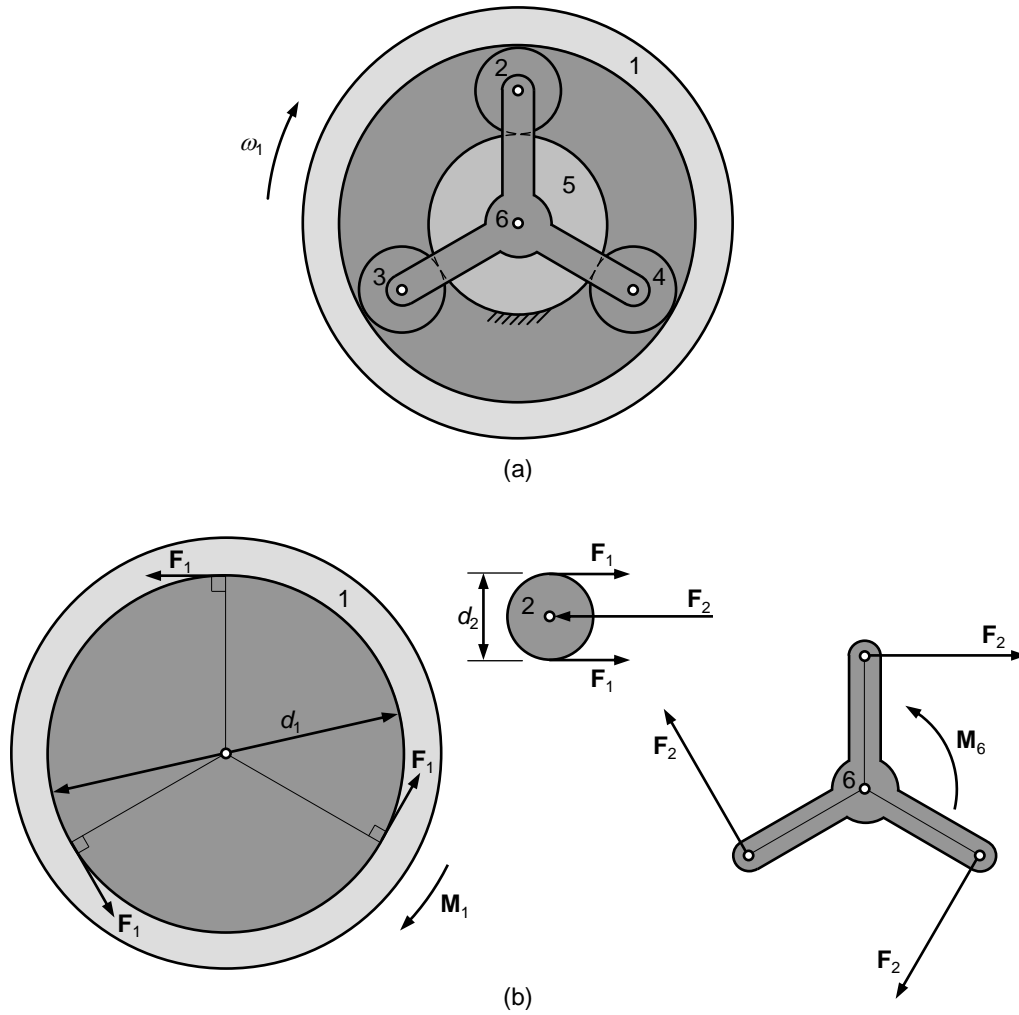


Figura 6.6 – (a) Trem de engrenagens; (b) Diagramas do corpo livre.

Da análise do diagrama de forças relativo à roda 2 tem-se que

$$F_2 = 2F_1 \quad (6.12)$$

Introduzindo agora a equação (6.11) na expressão (6.12) vem que

$$F_2 = \frac{4}{3} \frac{M_1}{d_1} \quad (6.13)$$

De modo análogo, o momento total que atua no centro de rotação do braço 6 pode ser calculado somando os momentos associados a cada uma das rodas 2, 3 e 4, isto é

$$M_6 = 3F_2 r_6 \quad (6.14)$$

em que  $r_6$  denota o raio do braço, o qual é dado por

$$r_6 = \frac{d_5 + d_2}{2} = \frac{d_5 + (d_1/2 - d_5/2)}{2} = \frac{d_5 + d_1}{4} \quad (6.15)$$

Atendendo agora à definição de relação de transmissão tem-se que

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_6} = \frac{M_6}{M_1} \quad (6.16)$$

Introduzindo agora as equações supramencionadas, a equação (6.16) pode ser reescrita do seguinte modo

$$i = 1 + \frac{d_5}{d_1} \quad (6.17)$$

### 6.3. NOMENCLATURA

Antes de apresentar a análise dinâmica de engrenagens dos principais tipos de rodas dentadas é oportuno introduzir a nomenclatura fundamental relativa a este tipo de análise. Para o efeito, considere-se a figura 6.7 respeitante a um engrenamento de dentado reto. Assim, o fixe ou estrutura do sistema mecânico é designado pelo número 0. À roda de entrada ou motora é atribuído o número 1, sendo que as restantes rodas são definidas sucessivamente pelos números 2, 3, 4 etc. até à última roda do sistema de transmissão de movimento. Pela mesma ordem de ideias, os veios das rodas são denominados pelas letras minúsculas do alfabeto, ou seja,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , etc. Por seu lado, às direções tangencial, radial e axial associadas aos engrenamentos são atribuídos os expoentes  $t$ ,  $r$  e  $a$ , respetivamente. De igual modo, as direções associadas aos eixos cartesianos são referidos pelas expoentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  (Shigley e Mischke, 1989; Branco *et al.*, 2009).

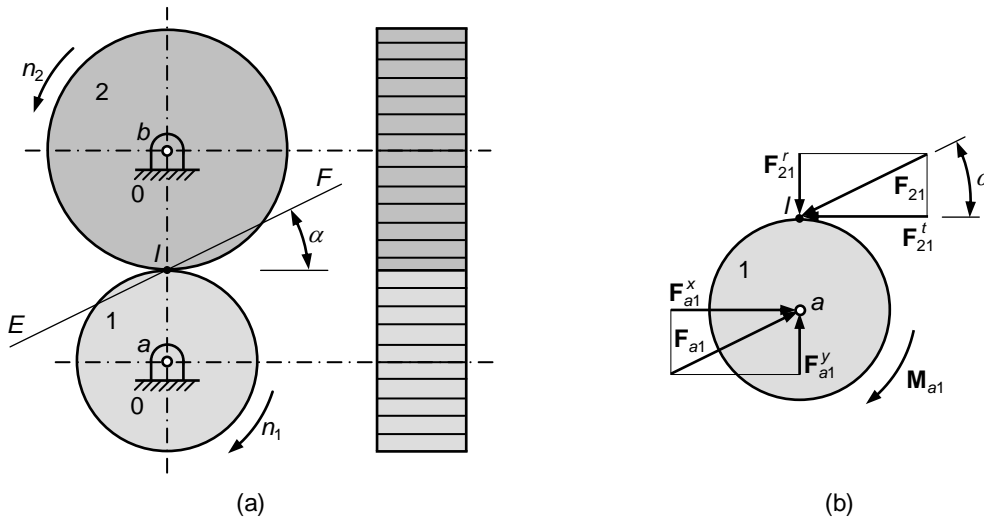


Figura 6.7 – (a) Engrenagem cilíndrica de dentes retos; (b) Diagrama do corpo livre do pinhão quando este é o órgão motor.

Com efeito,  $\mathbf{F}_{21}$  representa a força que a roda 2 exerce sobre a roda 1. Atendendo à terceira lei de Newton sabe-se que  $\mathbf{F}_{21}$  e  $\mathbf{F}_{12}$  têm a mesma direção, a mesma magnitude, mas atuam em sentidos opostos. A força que o veio  $a$  exerce na roda 1 é designada por  $\mathbf{F}_{a1}$ , a qual tem duas componentes cartesianas, tal como se pode identificar na representação da figura 6.7. O efeito do motor na roda 1 é indicado por  $\mathbf{M}_{a1}$ , que representa o momento motor. É frequente omitir os índices associados aos veios, assim tem-se que  $\mathbf{M}_{a1} = \mathbf{M}_1$ . Com efeito, doravante, utilizar-se-á esta nomenclatura no âmbito da análise dinâmica de engrenagens.

Uma vez elaborados os diagramas do corpo livre dos componentes das engrenagens, pode proceder-se à análise dinâmica, também denominada análise de forças. Assim, quando o sistema<sup>6</sup> em estudo está em repouso ou tem uma velocidade cons-

<sup>6</sup> O vocábulo sistema denota qualquer componente, conjunto de componentes ou parte de uma máquina ou mecanismo que se pretende estudar. Com efeito, a análise de sistemas mecânicos complexos pode ser simplificada sobremaneira pela sucessiva elaboração do diagrama do corpo livre dos seus elementos.

tante, então é nula a sua aceleração. Por conseguinte, o sistema está em equilíbrio. A expressão equilíbrio estático é utilizada quando o sistema está em repouso. Para condições de equilíbrio, as forças e momentos que atuam no sistema equilibram-se de tal modo que (Beer e Johnston, 1991)

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (6.18)$$

$$\sum \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (6.19)$$

o que significa que é nulo o somatório de todas as forças e todos os momentos que atuam no sistema em equilíbrio.

## 6.4. ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES RETOS

A figura 6.8a diz respeito à representação simplificada de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos. O pinhão, que é o órgão motor, roda com uma velocidade de rotação  $n_1$  no sentido indicado na figura e aciona a roda que gira com uma velocidade de rotação igual a  $n_2$ . Tal como foi descrito anteriormente, a força normal ou total de engrenamento atua na direção perpendicular às superfícies dos dentes, ou seja, atua na direção definida pela linha de engrenamento  $EF$ . Na figura 6.8b estão representados os diagramas do corpo livre do pinhão e da roda desta engrenagem (Wilson e Sadler, 1993; Branco *et al.*, 2009).

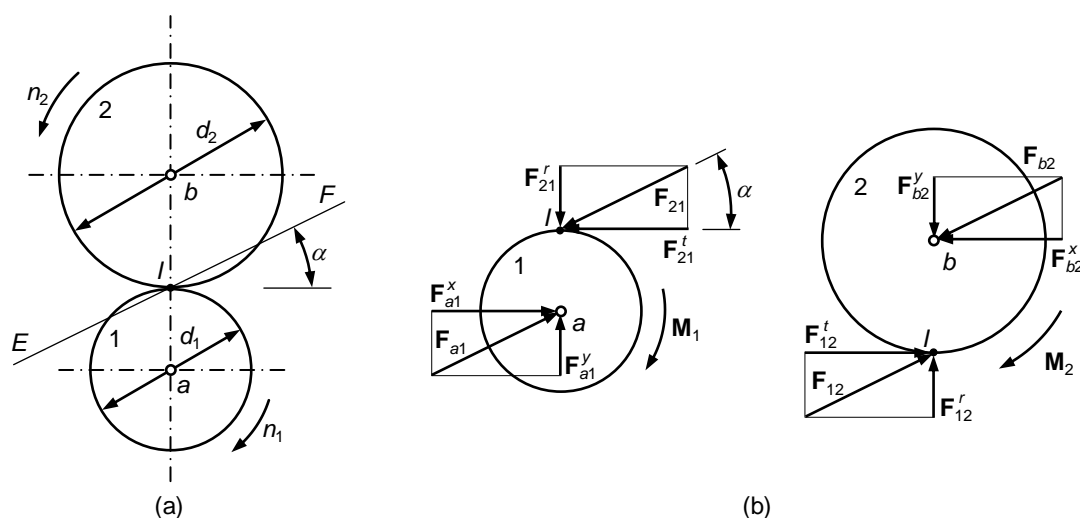


Figura 6.8 – (a) Engrenagem cilíndrica de dentes retos em que o pinhão é o órgão motor; (b) Diagramas do corpo livre do pinhão e da roda.

Em consonância com a nomenclatura apresentada anteriormente, a força  $\mathbf{F}_{21}$  denota a ação que a roda exerce sobre o pinhão, a qual atua no ponto primitivo, na direção da linha de engrenamento e no sentido contrário ao sentido de rotação do pinhão. Trata-se, portanto, de uma força resistente ao movimento descrito pelo motor. Atendendo a que o pinhão é suportado pelo veio  $a$ , então pode afirmar-se que no centro de rotação do pinhão atua uma força que equilibra a força de engrenamento, pois o sistema está em equilíbrio. Do mesmo modo, o momento  $\mathbf{M}_1$  é equilibrado pelo momento<sup>7</sup> produzido pela força útil, ou seja

$$M_1 = F_{21}^t \frac{d_1}{2} \quad (6.20)$$

onde  $d_1$  representa o diâmetro primitivo do pinhão.

Refira-se que a componente radial da força de engrenamento não produz qualquer momento, uma vez que aquela força está alinhada com o eixo de rotação do pinhão. Na verdade, esta componente da força de engrenamento aponta para o centro do pinhão e, por isso, tende a afastar o pinhão da roda. Por esta razão, a força radial é, frequentemente, denominada de força de separação.

<sup>7</sup> Este momento é frequentemente denominado de momento de torção (Shigley e Uicker, 1980; Shigley e Mischke, 1989).



No caso mais geral das transmissões por engrenagens, é conhecida a potência e a velocidade de rotação do motor que aciona o pinhão, pelo que a força útil ou transmitida pode ser determinada do seguinte modo

$$F_{21}^t = \frac{60P_1}{\pi d_1 n_1} \quad (6.21)$$

tal como havida sido demonstrado anteriormente e em que  $P_1$  é a potência do motor,  $d_1$  é o diâmetro primitivo do pinhão e  $n_1$  é a velocidade de rotação do pinhão, *i.e.*,

$$P_1 = M_1 \omega_1 \quad (6.22)$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} \quad (6.23)$$

Procedendo de igual modo para a análise da roda, verificam-se as mesmas observações acima descritas para o pinhão. Por outro lado, da figura 6.8 podem ainda ser estabelecidas as seguintes relações fundamentais em dinâmica de engrenagens

$$F_{21}^r = F_{21}^t \operatorname{tg} \alpha \quad (6.24)$$

$$F_{21} = \frac{F_{21}^t}{\cos \alpha} \quad (6.25)$$

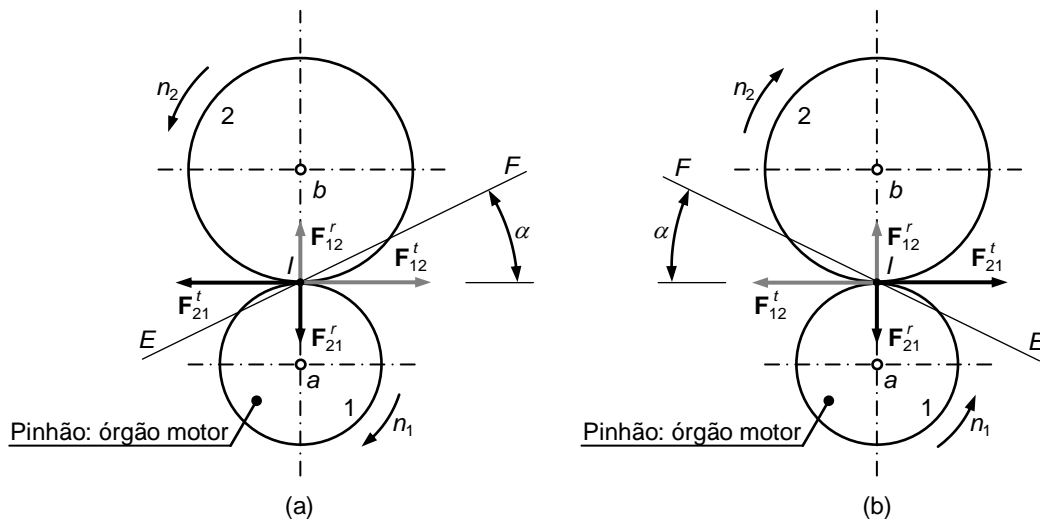


Figura 6.9 – Representação das forças que se desenvolvem no engrenamento em engrenagens cilíndricas de dentes retos: (a) O pinhão é o órgão motor e roda no sentido indireto; (b) O pinhão é o órgão motor e roda no sentido direto.

Observa-se, portanto, que a componente radial da força de engrenamento e força total podem ser expressas em função da força útil, ou seja, em função das características do acionamento. Deve referir-se novamente que nas engrenagens cilíndricas de dentes retos não existe componente axial da força de engrenamento. Finalmente, regista-se que as componentes tangenciais que se desenvolvem no pinhão e na roda são iguais em módulo, mas os sentidos de atuação são opostos. Do mesmo modo, pode afirmar-se que as componentes radiais no pinhão e na roda são iguais em módulo, mas atuam em sentidos contrários. A figura 6.9 representa as forças tangenciais e radiais que atuam durante o engrenamento em engrenagens cilíndricas de dentes retos em que o pinhão é órgão motor e em função do sentido de rotação. Na representação

da figura 6.9a o pinhão roda no sentido indireto, ao passo que na representação da figura 6.9b o pinhão roda no sentido direto. Deve referir-se que a definição do sentido de rotação do órgão motor é importante no correto estabelecimento do sentido de atuação das forças de engrenamento, nomeadamente no caso das engrenagens de dentes inclinados e engrenagens de parafuso sem-fim.

#### Exercício 6.4

**Enunciado:** A figura 6.4 ilustra um trem de engrenagens simples constituído por 3 rodas de dentes retos normalizados. O pinhão é acionado por um motor de 30 kW a 1000 rpm. O módulo dos dentes é igual a 10 mm, sendo que as rodas 1, 2 e 3 têm 35, 45 e 60 dentes, respetivamente. Assim, determine: (i) a distância entre os eixos das rodas 1 e 3; (ii) a relação de transmissão entre as rodas 1 e 3; (iii) o momento que atua na roda 3; (iv) as reações no apoio da roda 3.

#### *Padrão de resposta esperado:*

Da análise geométrica de engrenagens sabe-se que o diâmetro primitivo de uma roda cilíndrica de dentado reto é dado pelo produto do módulo pelo número de dentes, pelo que no presente exercício resulta que

$$d_1 = 10 \times 35 = 350 \text{ mm}$$

$$d_2 = 10 \times 45 = 450 \text{ mm}$$

$$d_3 = 10 \times 60 = 600 \text{ mm.}$$

Assim, atendendo à configuração geométrica da figura 6.4 pode escrever-se a seguinte relação geométrica

$$a_{13} = a_{12} + a_{23} = (350 + 450)/2 + (450 + 600)/2 = 925 \text{ mm.}$$

A relação de transmissão do trem pode ser obtida pelo produto das relações de transmissão parciais, ou seja

$$i_{13} = i_{12} \times i_{23} = z_2/z_1 \times z_3/z_2 = z_3/z_1 = 60/35 = 1,71.$$

Observa-se que a roda intermédia não tem influência na relação de transmissão total do trem. Este tipo de roda é frequentemente denominada de roda parasita. Embora não interfira no valor da relação de transmissão, a utilização de rodas parasitas tem, fundamentalmente, dois objetivos. Em primeiro lugar as rodas parasitas permitem inverter o sentido de rotação da roda movida. Em segundo lugar, as rodas parasitas evitam a utilização de rodas dentadas de grandes dimensões, quando se pretende transmitir movimento de um veio para outro e estes se encontram muito afastados.

Da análise dos diagramas do corpo livre representados na figura 6.5 verificam-se as seguintes relações

$$F_{23}^t = F_{21}^t = \frac{60 \times 30 \times 1000}{\pi \times 350 \times 10^{-3} \times 1000} = 1637,02 \text{ N}$$

$$F_{23}^r = F_{21}^r = F_{21}^t \operatorname{tg} \alpha = 1637,02 \times \operatorname{tg} 20 = 595,83 \text{ N.}$$

Com efeito, o momento que atua na roda 3 pode ser calculado do seguinte modo

$$M_3 = F_{23}^t \frac{d_3}{2} = 1637,02 \frac{600 \times 10^{-3}}{2} = 491,11 \text{ Nm.}$$

Finalmente, da análise das condições de equilíbrio da roda 3 obtém-se os seguintes valores para as reações nos apoios desta roda

$$F_c^x = 595,83 \text{ N}$$

$$F_c^y = 1637,02 \text{ N.}$$

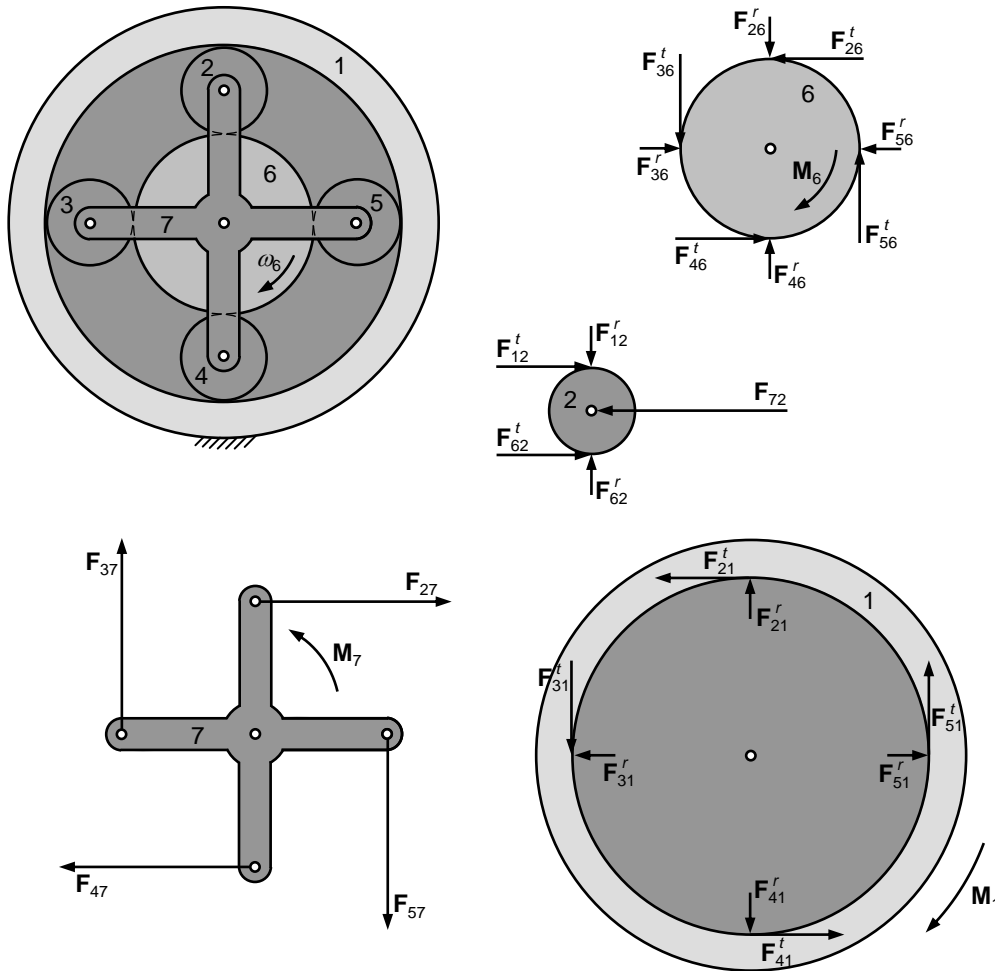


Figura 6.10 – Representação de um trem epicicloidal com roda fixa e respetivos diagramas do corpo livre. O trem é acionado pelo planetário, roda 6.

### Exercício 6.5

**Enunciado:** Na figura 6.10 representa-se um trem epicicloidal<sup>8</sup> com roda fixa, no qual todas as rodas são cilíndricas de dentes retos normalizados e cujo módulo é de 2 mm. O trem é acionado pelo planetário, roda 6, sendo a potência e a velocidade angular iguais a 14,4 kW e 400 rad/s, respetivamente. A saída do trem é pelo braço, elemento 7 na representação da figura, e o anel exterior, roda 1, está fixo. O planetário tem 36 dentes e cada um dos satélites tem 32 dentes. Assim, determine a velocidade de saída deste trem (Wilson e Sadler, 1993).

#### Padrão de resposta esperado:

Da análise da configuração geométrica do trem epicicloidal da figura 6.10 verifica-se a seguinte relação para o diâmetro do anel exterior

$$d_1 = d_2 + d_6 + d_4 = m(z_2 + z_6 + z_4) = 200 \text{ mm.}$$

Assim, o número de dentes do anel pode ser calculado do seguinte modo

$$d_1 = mz_1, \text{ ou seja, } z_1 = 100.$$

<sup>8</sup> Um trem epicicloidal é um conjunto de 3 ou mais rodas dentadas em que pelo menos uma roda tem eixo não fixo e roda em torno de um outro eixo fixo do mesmo trem. Quando assim não acontece, o trem é denominado de trem normal (Mabie e Reinholtz, 1987).

De igual modo tem-se que

$$d_6 = 2 \times 36 = 72 \text{ mm}$$

$$d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 2 \times 32 = 64 \text{ mm}$$

$$d_7 = d_6 + d_2 = 136 \text{ mm.}$$

Atendendo à representação dos digramas do corpo livre dos elementos que constituem o trem epicicloidial da figura 6.10, pode calcular-se o momento que atua na planetário do seguinte modo,

$$M_6 = P_6 / \omega_6 = 14400 / 400 = 36 \text{ Nm.}$$

Pode facilmente verificar-se que este momento é dividido de igual modo pelos 4 satélites, ou seja

$$M_6 = (F_{26}^t + F_{36}^t + F_{46}^t + F_{56}^t) \frac{d_6}{2} = 2F^t d_6$$

em que

$$F^t = F_{26}^t + F_{36}^t + F_{46}^t + F_{56}^t.$$

Assim, a força tangencial que atua nos satélites é obtida do seguinte modo

$$F^t = M_6 / (2d_6) = 36 / (2 \times 72 \times 10^{-3}) = 250 \text{ N.}$$

Consequentemente, a componente radial das forças de engrenamento desenvolvida entre os satélites e o planetário é dada por

$$F_{26}^r + F_{36}^r + F_{46}^r + F_{56}^r = F^t \operatorname{tg} \alpha = 90,99 \text{ N.}$$

Atendendo a que no presente trem epicicloidial os satélites são rodas intermédias, isto é rodas parasitas, então é nulo o momento que sobre elas é exercido. Assim, atendendo à terceira lei de Newton, podem obter-se as forças que atuam no anel exterior. Por conseguinte, o momento resistente que atua no anel é dado por

$$M_1 = 4F^t d_1 / 2 = 4 \times 250 \times (200 \times 10^{-3} / 2) = 100 \text{ Nm.}$$

Este momento resistente pode ser materializado aparafusando o anel exterior, caso o trem seja projetado para funcionar com uma relação de transmissão constante.

Deve observar-se que há um equilíbrio de forças no planetário e nos satélites, pelo que os veios que suportam estes elementos não estão sujeitos a momento de flexão. O mesmo não sucedendo ao braço, como se verá posteriormente. No caso dos satélites, as forças tangenciais, ver figura 6.10, são equilibradas pela reacção exercida pelo braço. Com efeito, de acordo com o diagrama do corpo livre da figura 6.10, o momento que se desenvolve no braço pode ser expresso do seguinte modo

$$M_7 = 4 \times 2F^t d_7 / 2 = 4 \times 2 \times 250 \times (136 \times 10^{-3} / 2) = 136 \text{ Nm.}$$

em que este momento atua no sentido direto. Com efeito, do balanço global dos momentos que se desenvolvem no trem epicicloidial verifica-se que

$$M_7 + M_1 + M_6 = 136 - 100 - 36 = 0 \text{ Nm.}$$

Finalmente, atendendo a que nesta análise não se consideraram perdas nas transmissões, nem o efeito inercial dos satélites, a velocidade de saída do trem pode ser determinada do seguinte modo

$$\omega_7 = P_7 / M_7 = 14400 / 136 = 105,88 \text{ rad/s.}$$

## 6.5. ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES INCLINADOS

Tal como acontece nas engrenagens cilíndricas de dentado reto, nas engrenagens cilíndricas de dentes inclinados ou helicoidais, a força total ou resultante que se desenvolve entre os dentes das rodas é perpendicular às superfícies de contacto quando os efeitos de atrito são desprezáveis (Juvinal e Marshek, 2006). A força normal de contacto nas engrenagens cilíndricas de dentes inclinados pode ser dividida nas componentes tangencial, radial e axial. A existência de uma componente axial que atua na direção dos eixos das rodas deve-se à própria inclinação dos dentes. A figura 6.11 mostra parcialmente uma roda de dentes inclinados onde se podem identificar as diversas forças que atuam durante o engrenamento.

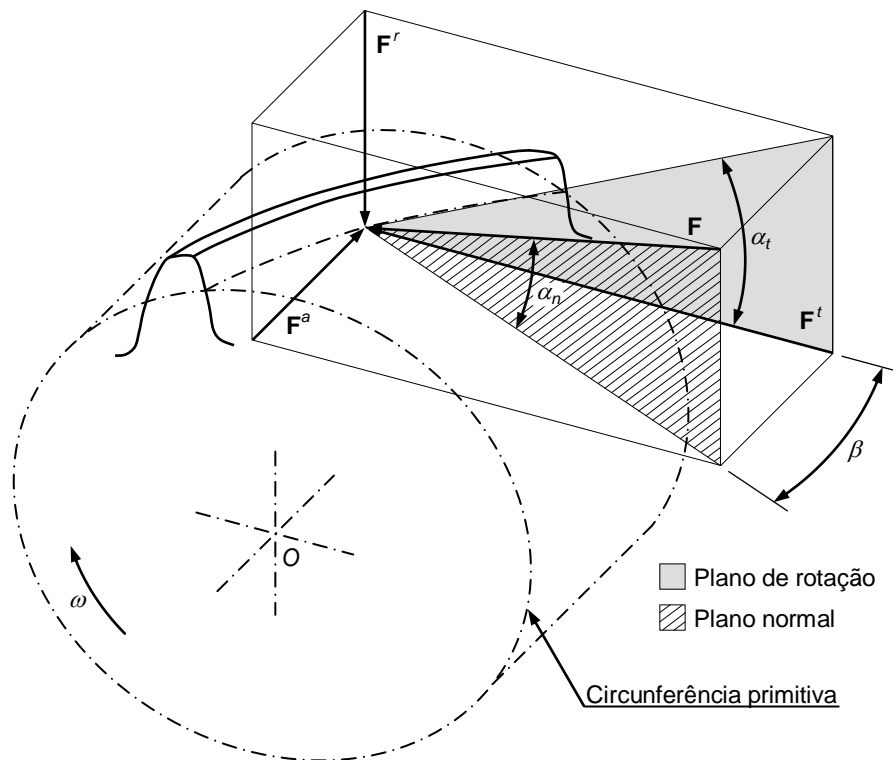


Figura 6.11 – Forças que atuam nas engrenagens cilíndricas de dentes inclinados.

Da análise da figura 6.11 e atendendo a que o ponto de contacto pertence à hélice primitiva, pode escrever-se que

$$F^r = F \sin \alpha_n \quad (6.26)$$

$$F^t = F \cos \alpha_n \cos \beta \quad (6.27)$$

$$F^a = F \cos \alpha_n \sin \beta \quad (6.28)$$

em que  $F$  representa a força total que se desenvolve no contacto,  $F^r$ ,  $F^t$  e  $F^a$  dizem respeito às componentes radial, tangencial e axial, respetivamente.

A componente tangencial da força de engrenamento é a força responsável pela transmissão de potência e movimento nas engrenagens. Assim, é conveniente expressar as diversas forças de engrenamento em função da força tangencial. Com referência à figura 6.11 verifica-se que

$$F^r = F^t \operatorname{tg} \alpha_t = F^t \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\cos \beta} \quad (6.29)$$

$$F^a = F^t \operatorname{tg} \beta \quad (6.30)$$

$$F = \frac{F^t}{\cos \alpha_n \cos \beta} \quad (6.31)$$

onde  $\alpha_n$  representa o ângulo de pressão real ou normal,  $\alpha_t$  é o ângulo de pressão aparente ou transverso e  $\beta$  denota o ângulo de inclinação primitiva (Flores e Gomes, 2014c; Branco *et al.*, 2009).

Por seu lado, a força tangencial pode ser calculada do seguinte modo

$$F^t = \frac{60P}{\pi d n} \quad (6.32)$$

sendo  $P$  a potência a transmitir,  $n$  a velocidade de rotação do órgão motor e em que

$$d = m_t z \quad (6.33)$$

onde  $m_t$  é o módulo transversal ou aparente do dente e  $z$  é o número de dentes.

De um modo simples pode dizer-se que a componente tangencial da força de engrenamento, também denominada força útil ou transmitida, permite o dimensionamento dos dentes. Por seu lado, as componentes radial e axial possibilitam o dimensionamento dos veios e a seleção dos respetivos apoios.

A determinação do sentido de atuação das componentes tangencial e radial é idêntica ao caso das engrenagens cilíndricas de dentes retos. O sentido da força axial depende do sentido de rotação da roda e do facto de se tratar de uma roda com hélice esquerda ou direita. De qualquer modo deve referir-se que o sentido de força axial é sempre o que promove a compressão das superfícies dos dentes.

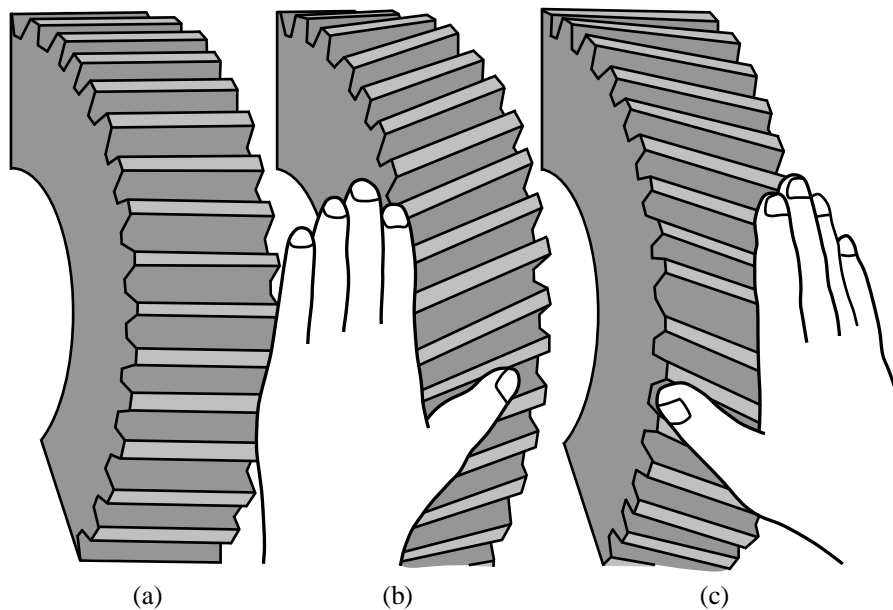


Figura 6.12 – (a) Roda cilíndrica exterior de dentes retos; (b) Roda cilíndrica exterior helicoidal com hélice esquerda; (c) Roda cilíndrica exterior helicoidal com hélice direita.

No atinente à definição do sentido de atuação da força axial é oportuno recordar os conceitos de hélice esquerda e direita. De facto, as rodas dentadas helicoidais podem ser esquerdas ou direitas, conforme a inclinação dos dentes ou hélices. A direção das hélices das rodas de dentes helicoidais é definida pela regra da mão direita. A figura 6.12 mostra, a título exemplificativo, rodas com hélice esquerda e com hélice direita, como como uma roda de dentes retos. Com efeito, a figura 6.13 evidencia os sentidos das forças que se desenvolvem em engrenagens cilíndricas de dentes inclinados em função do sentido de rotação do órgão motor e do tipo de hélice.

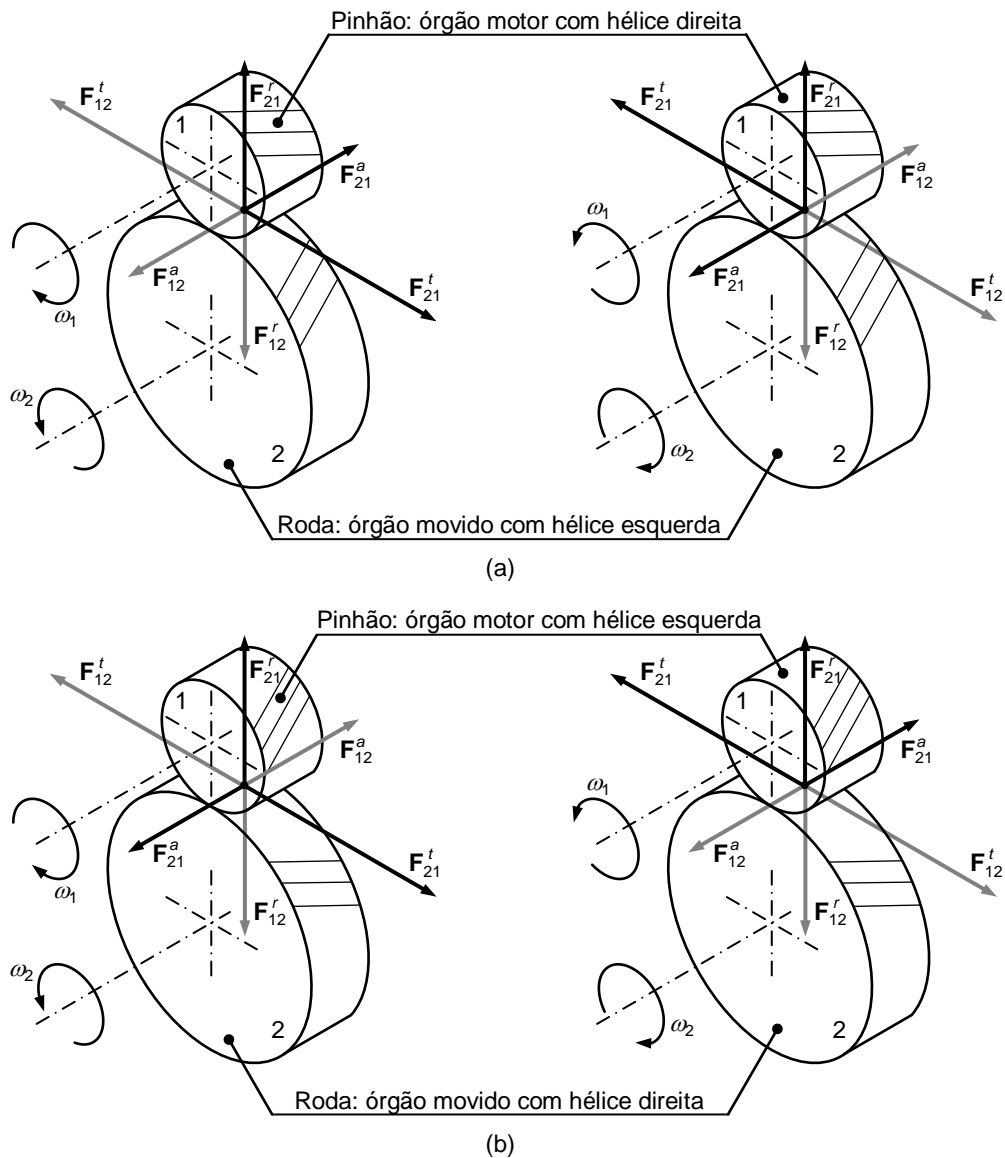


Figura 6.13 – Força que se desenvolvem no pinhão e na roda em engrenagens cilíndricas de dentes inclinados: (a) O pinhão é o órgão motor com hélice direita e a roda com hélice esquerda; (b) O pinhão é o órgão motor com hélice esquerda e a roda com hélice direita.

### Exercício 6.6

**Enunciado:** Uma engrenagem cilíndrica de dentes inclinados é acionada por um motor elétrico de 20 kW de potência e que roda a 1440 rpm. O pinhão, que é o órgão motor, tem 18 dentes, 4 mm de módulo real e um ângulo de inclinação dos dentes de 30°. Atendendo a que o dentado é normalizado, calcule as forças de engrenamento.





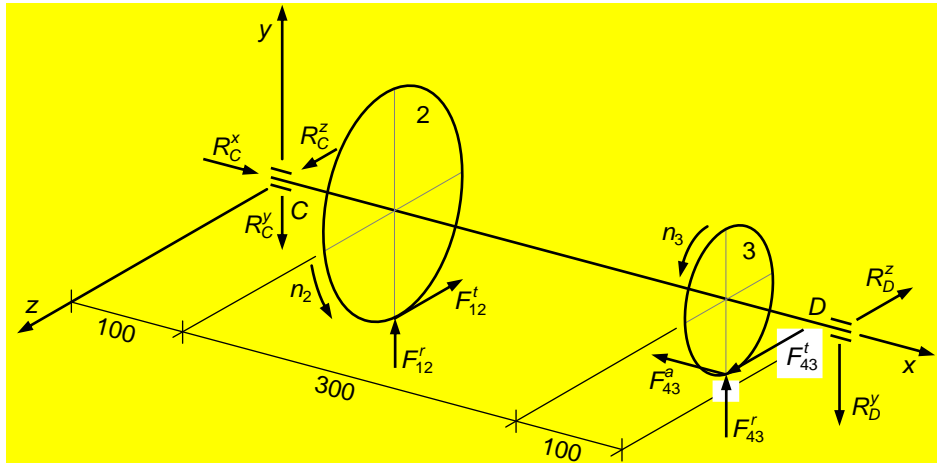


Figura 6.15 – Diagrama do corpo livre do veio b do exercício 6.7.

As forças que atuam na roda 2 resultantes do engrenamento com o pinhão 1 podem ser calculadas do seguinte modo

$$F_{12}^t = \frac{60P_1}{\pi d_1 n_1} = 204,63 \text{ N}$$

$$F_{12}^r = F_{12}^t \operatorname{tg} \alpha = 74,48 \text{ N.}$$

Por seu lado, da análise do segundo andar tem-se que

$$n_3 = n_2 = 500 \text{ rpm}$$

$$i_{34} = 4 = d_4/d_3$$

$$a = 180 = (d_4 + d_3)/2$$

donde resulta que

$$d_3 = 72 \text{ mm}$$

$$d_4 = 288 \text{ mm.}$$

Pode ainda determinar-se o valor do ângulo de pressão aparente do seguinte modo

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \alpha_t \cos \beta \Rightarrow \alpha_t = 22,40^\circ.$$

Com efeito, as forças de engrenamento que se desenvolvem na roda 3 são calculadas do seguinte modo

$$F_{43}^t = \frac{60P_3}{\pi d_3 n_3} = 795,76 \text{ N}$$

$$F_{43}^r = F_{43}^t \operatorname{tg} \alpha_t = 327,99 \text{ N}$$

$$F_{43}^a = F_{43}^t \operatorname{tg} \beta = 423,12 \text{ N.}$$

Aplicando agora as condições de equilíbrio ao diagrama do corpo livre representado na figura 6.15 resulta que

$$\sum F^x = 0 \Rightarrow R_C^x - F_{43}^a = 0$$

$$\sum F^y = 0 \Rightarrow -R_C^y - R_D^y + F_{12}^r + F_{43}^r = 0$$

$$\sum F^z = 0 \Rightarrow R_C^z - R_D^z - F_{12}^t + F_{43}^t = 0$$

$$\sum M_C^y = 0 \Rightarrow F_{12}^t \times 100 - F_{43}^t \times 400 + R_D^z \times 500 = 0$$

$$\sum M_C^z = 0 \Rightarrow F_{12}^r \times 100 + F_{43}^r \times 400 - R_D^y \times 500 - F_{43}^a \times \frac{72}{2} = 0.$$

Assim, da resolução do sistema de equações acima apresentado obtêm-se os seguintes valores para as reacções nos apoios

$$R_C^x = 423,12 \text{ N}$$

$$R_C^y = 155,65 \text{ N}$$

$$R_C^z = 4,55 \text{ N}$$

$$R_D^y = 246,82 \text{ N}$$

$$R_D^z = 595,68 \text{ N.}$$

Finalmente, o momento torsor que atua no veio  $a$  é dado por

$$M_1 = F_{12}^t \frac{d_1}{2} = 7,16 \text{ Nm.}$$

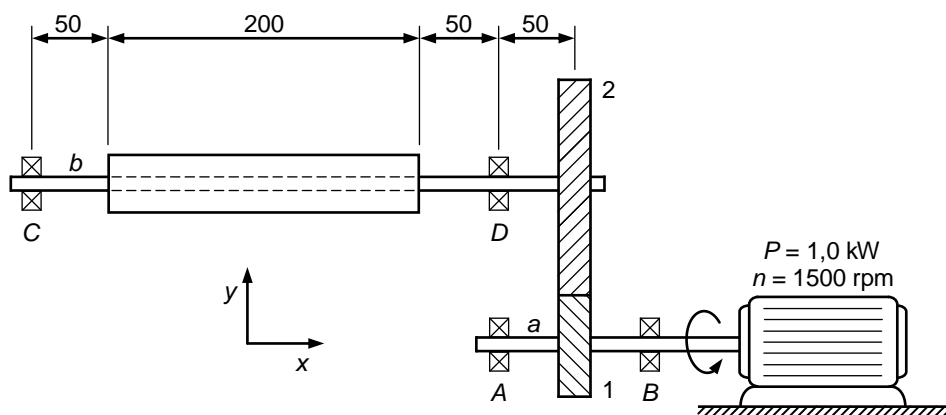


Figura 6.16 – Sistema de transmissão por rodas cilíndricas helicoidais.

### Exercício 6.8

**Enunciado:** Na figura 6.16 representa-se uma engrenagem exterior de rodas cilíndricas de dentes helicoidais que transmite potência e movimento de um motor elétrico de 1 kW para um rolo que aciona uma correia transportadora. O motor gira a 1500 rpm, no sentido indicado na figura, e o material transportado pelo rolo origina uma carga uniformemente distribuída, na direção positiva do eixo  $z$ , de 3,5 N/mm. Os diâmetros primitivos do pinhão e da roda são, respetivamente, 64 mm e 320 mm, tendo o pinhão 20 dentes. Considere que o dentado em ambas as rodas é normalizado. Assim, (i) faça, utilizando uma perspetiva adequada, o diagrama do corpo livre do veio  $b$ ; (ii) determine as forças que atuam nos dentes da roda 2; (iii) calcule as reacções nos apoios  $C$  e  $D$ .

#### Padrão de resposta esperado:

A figura 6.17 ilustra o diagrama do corpo livre do veio  $b$ , em que se desprezam as massas do veio e da roda 2. Admite-se ainda que as cargas axiais são absorvidas pelo apoio  $C$ .

A determinação da força tangencial que atua nos dentes da roda 2 pode ser feita do seguinte modo

$$F_{12}^t = \frac{60P_1}{\pi d_1 n_1} = \frac{60 \times 1000}{\pi \times 64 \times 10^{-3} \times 1500} = 198,94 \text{ N.}$$

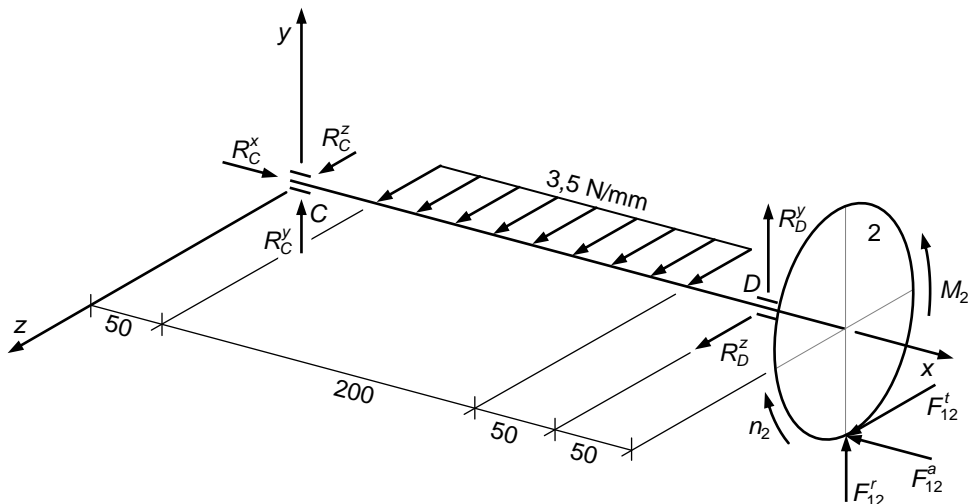


Figura 6.17 – Diagrama do corpo livre do veio b do exercício 6.8.

Atendendo ao conceito de módulo aparente vem que

$$d_1 = m_t z_1, \text{ donde resulta que } m_t = 3,2 \text{ mm.}$$

Por outro lado, sabe-se que o ângulo de inclinação dos dentes deve estar entre 10 e 30°, pelo que admitindo um módulo real normalizado de 3 mm resulta que

$$m_n = m_t \cos \beta, \text{ donde resulta que } \beta = 20,36^\circ.$$

Assim, o valor do ângulo de pressão aparente pode ser calculado utilizando a seguinte expressão

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \alpha_t \cos \beta, \text{ donde resulta que } \alpha_t = 21,22^\circ.$$

Por conseguinte, a força radial que atua nos dentes da roda 2 é dada por

$$F_{12}^r = F_{12}^t \operatorname{tg} \alpha_t = 77,24 \text{ N.}$$

Por sua vez, a componente axial da força que atua nos dentes da roda 2 é dada por

$$F_{12}^a = F_{12}^t \operatorname{tg} \beta = 73,83 \text{ N.}$$

Para a determinação das reações nos apoios C e D do veio b é necessário, em primeiro lugar, escrever as equações de equilíbrio do sistema, ou seja

$$\sum F^x = 0 \Rightarrow R_C^x - F_{12}^a = 0$$

$$\sum F^y = 0 \Rightarrow R_C^y + R_D^y + F_{12}^r = 0$$

$$\sum F^z = 0 \Rightarrow R_C^z + R_D^z + 3,5 \times 200 + F_{12}^t = 0$$

$$\sum M_C^y = 0 \Rightarrow -R_D^z \times 300 - 3,5 \times 200 \times 150 - F_{12}^t \times 350 = 0$$

$$\sum M_C^z = 0 \Rightarrow R_D^y \times 300 + F_{12}^r \times 350 - F_{12}^a \times \frac{320}{2} = 0$$

donde resulta que

$$R_C^x = 73,83 \text{ N}$$

$$R_C^y = -26,47 \text{ N}$$

$$R_C^z = -316,84 \text{ N}$$

$$R_D^y = -50,77 \text{ N}$$

$$R_D^z = -582,10 \text{ N.}$$

## 6.6. ENGRENAGENS CÔNICAS

A figura 6.18 mostra a força de engrenamento que se desenvolve em engrenagens exteriores cónicas de dentes retos, bem como as suas componentes tangencial, radial e axial. Da análise desta figura observa-se que

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^t + \mathbf{F}^r + \mathbf{F}^a \quad (6.34)$$

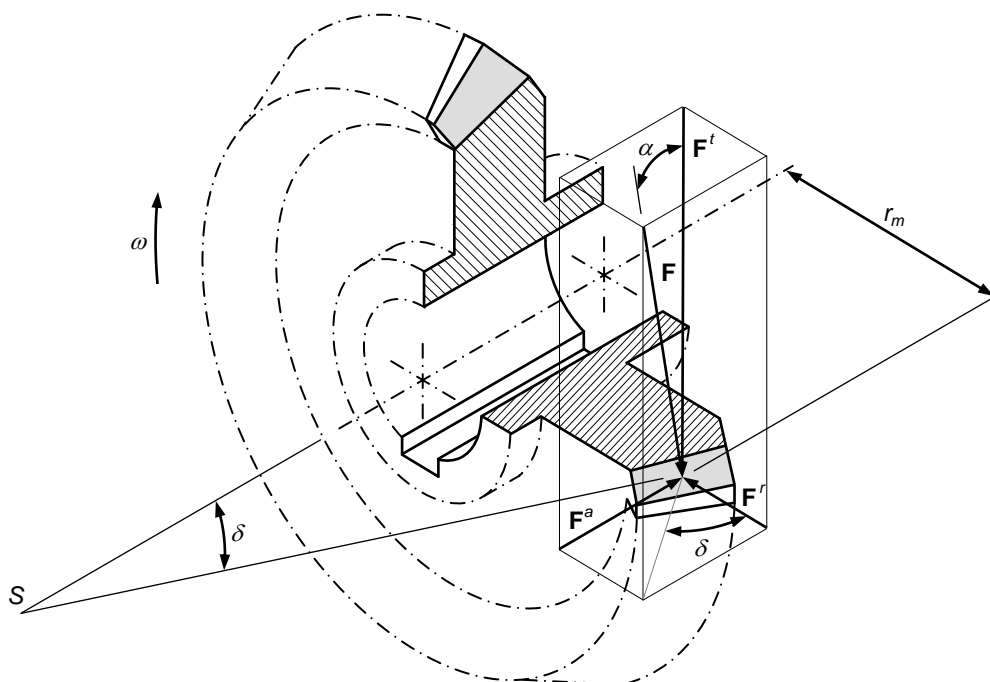


Figura 6.18 – Representação das forças de engrenamento em rodas cónicas de dentes retos.

O estabelecimento das direções e sentidos de atuação das componentes tangencial e radial no caso das engrenagens cónicas de dentes retos é em tudo semelhante ao procedimento apresentado para as engrenagens cilíndricas de dentes retos. Por seu lado, a componente axial da força de engrenamento atua sempre no sentido de promover a compressão das superfícies dos dentes (Juvinal e Marshek, 2006).

Na análise dinâmica de engrenagens cónicas de dentes retos é frequente considerar-se que a força resultante atua perpendicularmente à superfície do dente no ponto médio situado no cone primitivo, tal como se pode observar na figura 6.18. Na verdade, a força real deverá atuar algures entre o ponto médio e a extremidade exterior do dente, ou seja, a parte mais larga do dente. Deve referir-se, todavia, que é pequeno o erro associado a esta simplificação (Shigley e Uicker, 1980).

Tal como no caso das engrenagens cilíndricas, nas engrenagens cónicas, as componentes radial e axial da força de engrenamento são expressas em função da força tangencial ou transmitida e da geometria das rodas. Assim, considerando que uma dada roda cônica de dentes retos é acionada por um motor elétrico que debita uma potência  $P$  e gira com uma velocidade de rotação  $n$ , então a componente tangencial ou útil que se desenvolve no engrenamento pode ser calculada da seguinte forma

$$F^t = \frac{60P}{\pi d_m n} \quad (6.35)$$

em que  $d_m$  representa o diâmetro médio da roda no cone primitivo definido do seguinte modo (Branco *et al.*, 2009)

$$d_m = d - b \operatorname{sen} \delta \quad (6.36)$$

onde  $d$  é o diâmetro primitivo da roda,  $b$  denota a largura do dentado e  $\delta$  representa o ângulo do cone primitivo. O diâmetro médio pode também ser obtido pela média entre os diâmetros primitivos interior e exterior (Wilson e Sadler, 1993).

As componentes radial e axial da força de engrenamento podem ser expressas em função da força transmitida se se atender à geometria da figura 6.18, ou seja

$$F^r = F^t \operatorname{tg} \alpha \cos \delta \quad (6.37)$$

$$F^a = F^t \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \delta \quad (6.38)$$

em que  $\alpha$  representa o ângulo de pressão. Por outro lado, a força resultante pode ser determinada do seguinte modo

$$F = \frac{F^t}{\cos \alpha} \quad (6.39)$$

A figura 6.19 mostra as diferentes componentes da força que se desenvolve no engrenamento em engrenagens exteriores cónicas de dentes retos, bem como as principais variáveis geométricas em jogo. Deve referir-se a necessidade de utilização de uma vista auxiliar que permite evidenciar a verdadeira grandeza da força resultante  $F$ , a qual é perpendicular às superfícies do dente (Juvinal e Marshek, 2006). Deve referir-se que no caso mais frequente de utilização de engrenagens cónicas, os eixos do pinhão e da roda são perpendiculares entre si. Quando assim acontece verifica-se que a força radial que atua no pinhão é igual à força axial que atua na roda. Do mesmo modo, a força axial que atua no pinhão é igual à força radial que atua na roda.

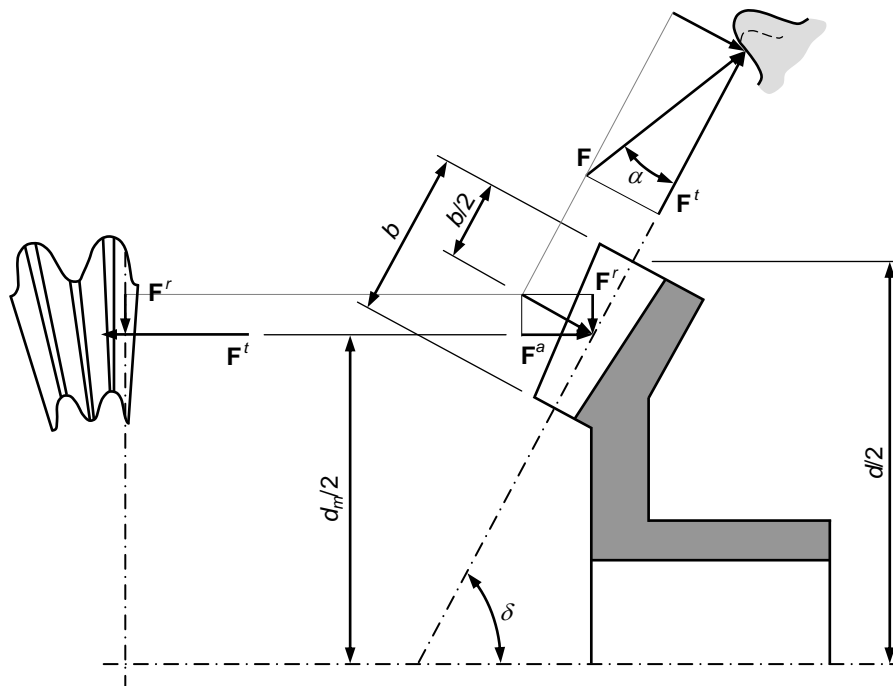


Figura 6.19 – Forças de engrenamento em engrenagens exteriores cónicas de dentes retos.

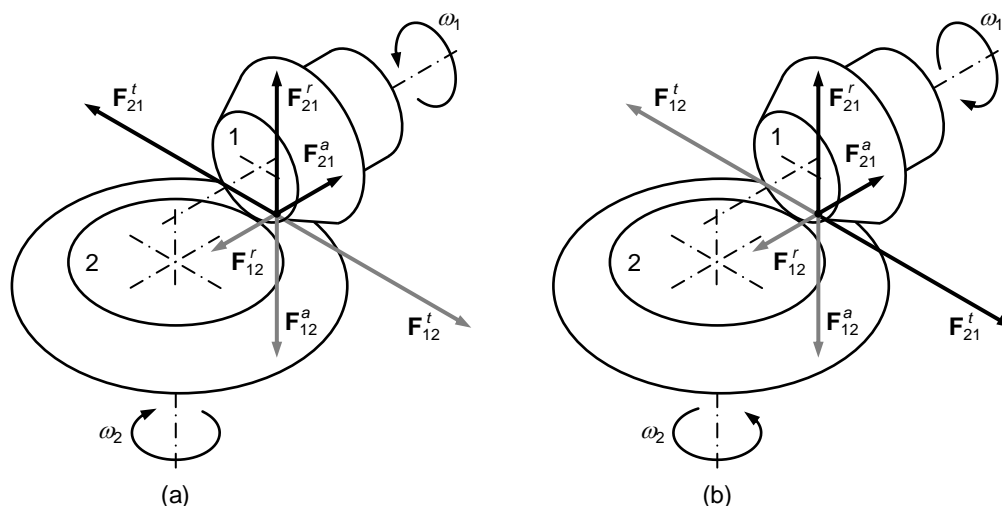


Figura 6.20 – Representação das forças que se desenvolvem no engrenamento em engrenagens cônicas de dentes retos: (a) O pinhão é o órgão motor e roda no sentido direto; (b) O pinhão é o órgão motor e roda no sentido indireto.

A figura 6.20 representa os sentidos das forças que se desenvolvem no engrenamento de rodas cônicas de dentes retos em que o ângulo de conicidade é igual a  $90^\circ$ . Esta representação é dependente do órgão motor e seu sentido de rotação. Assim, na figura 6.20a o pinhão é o órgão motor que roda no sentido direto. Por seu lado, na representação da figura 6.20b o pinhão é o órgão motor da engrenagem, o qual roda no sentido indireto. O correto estabelecimento do sentido de atuação das forças de engrenamento é por demais importante na análise dinâmica de engrenagens cônicas e posterior dimensionamento e seleção dos diversos elementos que constituem os sistemas de transmissão deste tipo. Da análise da figura 6.20 observa-se que

$$F_{12}^t = F_{21}^t \quad (6.40)$$

$$F_{12}^r = F_{21}^a \quad (6.41)$$

$$F_{12}^a = F_{21}^r \quad (6.42)$$

### Exercício 6.9

**Enunciado:** Uma engrenagem exterior cônica de dentes retos normalizados é acionada pelo pinhão através de um motor elétrico de 10 kW de potência e que roda com uma velocidade igual a 600 rpm. O pinhão tem um diâmetro primitivo igual a 200 mm e dentado com uma largura de 40 mm. A roda gira a 200 rpm. O ângulo de conicidade da engrenagem é de  $60^\circ$ . Assim, determine as forças de engrenamento que atuam nesta engrenagem, bem como o momento que atua no veio da roda.

**Padrão de resposta esperado:**

Atendendo aos dados do exercício verifica-se que a relação da transmissão pode ser calculada do seguinte modo

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{600}{200} = 3.$$

Para engrenagens exteriores cónicas em que o  $\Sigma < 90^\circ$  verifica-se

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\operatorname{sen} \Sigma}{1/i + \operatorname{cos} \Sigma} = \frac{\operatorname{sen} 60}{1/3 + \operatorname{cos} 60} \Rightarrow \delta_2 = 46,10^\circ$$

e, por conseguinte tem-se que

$$\delta_1 = \Sigma - \delta_2 = 60 - 46,10 \Rightarrow \delta_1 = 13,90^\circ$$

Considerando agora a equação (6.36) podem determinar-se os diâmetros médios do pinhão e da roda, ou seja

$$d_{m1} = d_1 - b \operatorname{sen} \delta_1 = 200 - 40 \operatorname{sen} 13,90 \Rightarrow d_{m1} = 190,39 \text{ mm}$$

$$d_{m2} = d_2 - b \operatorname{sen} \delta_2 = 3 \times 200 - 40 \operatorname{sen} 46,10 \Rightarrow d_{m2} = 571,18 \text{ mm.}$$

Assim, a componente tangencial da força que atua nos dentes do pinhão é determinada do seguinte modo

$$F_{21}^t = \frac{60 P_1}{\pi d_{m1} n_1} = \frac{60 \times 10000}{\pi \times 190,39 \times 10^{-3} \times 600} = 1671,88 \text{ N.}$$

As componentes radial e axial que se desenvolvem no pinhão face ao seu engrenamento com a roda são determinados da seguinte forma

$$F_{21}^r = F_{21}^t \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cos} \delta_1 = 1671,88 \times \operatorname{tg} 20 \times \operatorname{cos} 13,90 = 590,70 \text{ N}$$

$$F_{21}^a = F_{21}^t \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \delta_1 = 1671,88 \times \operatorname{tg} 20 \times \operatorname{sen} 13,90 = 146,18 \text{ N.}$$

A força resultante é dada por

$$F = \frac{F_{21}^t}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{1671,88}{\operatorname{cos} 20} = 1779,18 \text{ N.}$$

Por seu lado, as componentes radial e axial da força que atua na roda são calculadas do seguinte modo

$$F_{12}^r = F_{12}^t \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cos} \delta_2 = 1671,88 \times \operatorname{tg} 20 \times \operatorname{cos} 46,10 = 421,95 \text{ N}$$

$$F_{12}^a = F_{12}^t \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \delta_2 = 1671,88 \times \operatorname{tg} 20 \times \operatorname{sen} 46,10 = 438,47 \text{ N.}$$

Atente-se a que na presente engrenagem cónica, as relações dadas pelas equações (6.41) e (6.42) não se verificam, pois o ângulo de conicidade é diferente de  $90^\circ$ .

Finalmente, o momento que atua no veio da roda é determinado do seguinte modo

$$M_2 = F_{12}^t \frac{d_{m2}}{2} = 1671,88 \times \frac{571,18 \times 10^{-3}}{2} = 477,47 \text{ Nm.}$$

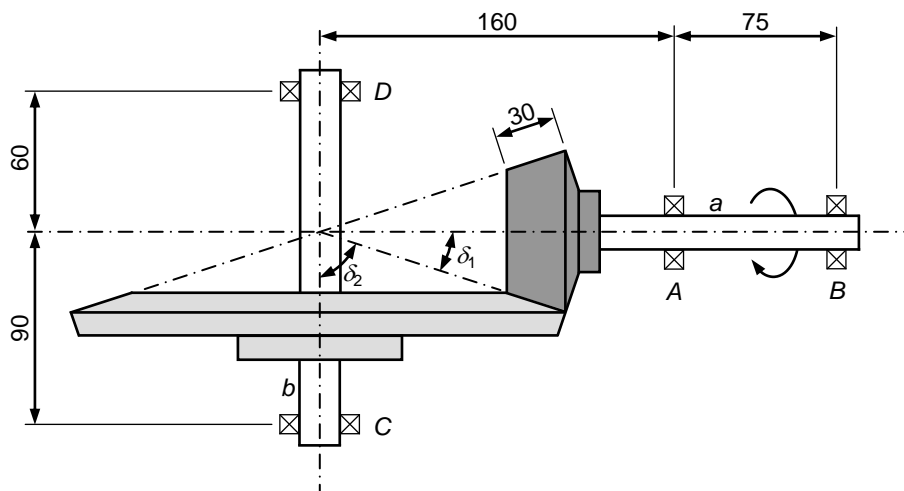


Figura 6.21 – Representação simplificada de uma engrenagem cónica de dentes retos.

### Exercício 6.10

**Enunciado:** A figura 6.21 representa esquematicamente uma engrenagem exterior cônica de dentes retos. Nesta representação simplificada, os dentes estão substituídos pelos cones primitivos, sendo o ângulo de conicidade igual a  $90^\circ$ . O pinhão roda no sentido indicado na figura com uma velocidade igual a 960 rpm e transmite uma potência de 5 kW. O pinhão e a roda têm 15 e 45 dentes, respectivamente. O dentado é normalizado, o módulo dos dentes é igual a 5 mm, sendo que a largura do dentado é igual a 30 mm. Os apoios A e C absorvem as cargas axiais dos respectivos veios. Assim, (i) elabore o diagrama do corpo livre do veio *b*; (ii) calcule as forças de engrenamento que atuam na roda; (iii) determine as reações nos apoios C e D; (iv) calcule o momento torsor que é exercido no veio da roda.

#### Padrão de resposta esperado:

Na figura 6.22 está representado o diagrama do corpo livre do veio *b* em que são desprezadas as massas do veio e da roda.

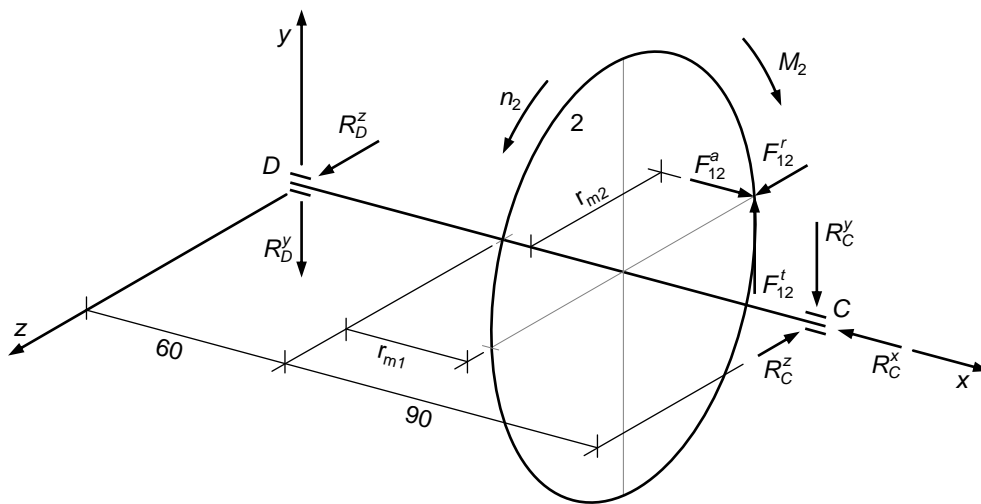


Figura 6.22 – Diagrama do corpo livre do veio *b*.

Atendendo à geometria da engrenagem podem ser determinadas as seguintes parâmetros auxiliares

$$d_1 = mz_1 = 5 \times 15 = 75 \text{ mm}$$

$$d_2 = mz_2 = 5 \times 45 = 225 \text{ mm}$$

$$\delta_1 = \text{tg}^{-1}(z_1 / z_2) = \text{tg}^{-1}(15 / 45) = 18,43^\circ$$

$$\delta_2 = 90 - \delta_1 = 90 - 18,43 = 71,57^\circ$$

$$d_{m1} = d_1 - b \text{sen} \delta_1 = 75 - 30 \text{sen} 18,43 = 65,52 \text{ mm}$$

$$d_{m2} = d_2 - b \text{sen} \delta_2 = 225 - 30 \text{sen} 71,57 = 196,54 \text{ mm.}$$

Assim, a força tangencial que atua no pinhão é dada por

$$F_{21}^t = \frac{60P_1}{\pi d_{m1} n_1} = \frac{60 \times 5000}{\pi \times 65,52 \times 10^{-3} \times 960} = 1518,19 \text{ N.}$$

Por seu lado, as componentes radial e axial são calculadas do seguinte modo

$$F_{21}^r = F_{21}^t \text{tg} \alpha \cos \delta_1 = 1518,19 \times \text{tg} 20^\circ \times \cos 18,43 = 524,23 \text{ N}$$

$$F_{21}^a = F_{21}^t \text{tg} \alpha \text{sen} \delta_1 = 1518,19 \times \text{tg} 20^\circ \times \text{sen} 18,43 = 174,69 \text{ N.}$$



Com efeito, atendendo a que o ângulo de conicidade é igual a  $90^\circ$ , as forças de engrenamento que atuam na roda podem ser estabelecidas do seguinte modo

$$F_{12}^t = F_{21}^t = 1518,19 \text{ N}$$

$$F_{12}^r = F_{21}^a = 174,69 \text{ N}$$

$$F_{12}^a = F_{21}^r = 524,23 \text{ N.}$$

Aplicando agora as condições de equilíbrio ao diagrama do corpo livre da figura 6.22 obtém-se o seguinte conjunto de equações

$$\sum F^x = 0 \Rightarrow -R_C^x + F_{12}^a = 0$$

$$\sum F^y = 0 \Rightarrow -R_D^y - R_C^y + F_{12}^t = 0$$

$$\sum F^z = 0 \Rightarrow R_D^z - R_C^z + F_{12}^r = 0$$

$$\sum M_C^y = 0 \Rightarrow R_D^z \times (60 + 90) - F_{12}^a \times \frac{196,54}{2} + F_{12}^r \times \left(90 - \frac{65,52}{2}\right) = 0$$

$$\sum M_C^z = 0 \Rightarrow R_D^y \times (60 + 90) - F_{12}^t \times \left(90 - \frac{65,52}{2}\right) = 0$$

donde resulta que

$$R_C^x = 524,23 \text{ N}$$

$$R_C^y = 938,85 \text{ N}$$

$$R_C^z = 451,47 \text{ N}$$

$$R_D^y = 579,34 \text{ N}$$

$$R_D^z = 276,74 \text{ N.}$$

Finalmente, o momento que tem atua no veio da roda pode ser calculado do seguinte modo

$$\sum M_C^x = 0 \Rightarrow M_2 - F_{12}^t \times \frac{196,54}{2} \Rightarrow M_2 = 149,27 \text{ Nm.}$$

## 6.7. ENGRENAGENS DE PARAFUSO SEM-FIM

Em geral, no funcionamento das engrenagens verifica-se um misto de rolamento<sup>9</sup> e de deslizamento entre os flancos dos dentes do pinhão e da roda. O deslizamento ou escorregamento está associado à diferença de velocidades periféricas do ponto de contacto. Assim, durante o engrenamento entre os perfis conjugados dos dentes de uma engrenagem desenvolvem-se forças de atrito que atuam perpendicularmente à linha de engrenamento, tal como se representa na figura 6.23. Pode demonstrar-se que a força de atrito varia, quer em módulo, quer em direção, durante o engrenamento. Por outro lado, como a velocidade de escorregamento varia ao longo do engrenamento, é expectável que o regime de lubrificação se altere e, conseqüentemente, o coeficiente de atrito varia também durante o engrenamento. Com efeito, uma das conseqüências da existência de atrito no engrenamento prende-se com o desvio da direcção da força resultante, que deixa de ser perpendicular às superfícies dos dentes. Esta situação está bem evidenciada na figura 6.23 em que  $N$  representa a força normal às superfícies dos dentes,  $\mu N$  denota a força de atrito e  $F$  representa a força resultante (Flores e Gomes, 2014b).

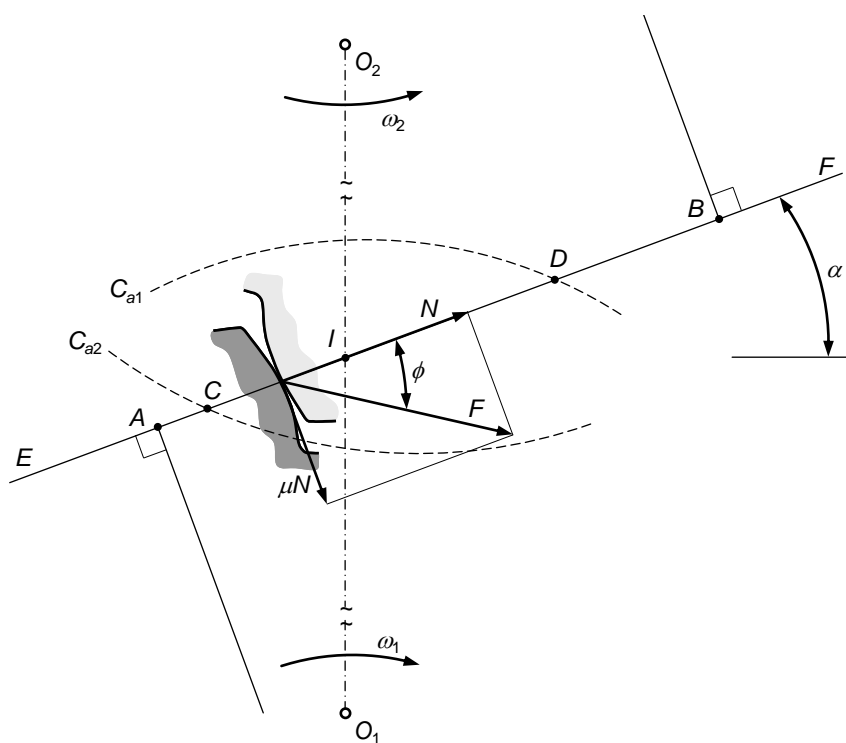


Figura 6.23 – Representação das forças que atuam nos perfis conjugados quando se considera a existência de atrito entre as superfícies dos dentes.

Nas engrenagens cilíndricas e cónicas, em geral, a presença do atrito nos dentes penaliza pouco o rendimento, sendo provável uma redução até 2%. Por esta razão, na análise dinâmica destes tipos de engrenagens é frequente negligenciar-se o efeito de atrito, tal como se apresentou nas secções anteriores. Todavia, no caso das engrena-

<sup>9</sup> Deve lembrar-se que o movimento de rolamento puro apenas acontece quando o engrenamento ocorre no ponto primitivo. Contudo, pode dizer-se que o movimento entre os flancos em contacto é fundamentalmente de rolamento (Flores e Gomes, 2014b).

gens de parafuso sem-fim, o efeito do atrito desempenha um papel fundamental no seu comportamento, em particular no rendimento. Esta situação tem a ver com o facto de que o movimento relativo entre os filetes do parafuso e os dentes da roda ser do tipo escorregamento puro. Por esta razão, as engrenagens de parafuso sem-fim apresentam rendimentos relativamente baixos (Budynas e Nisbett, 2011; Norton, 2013).

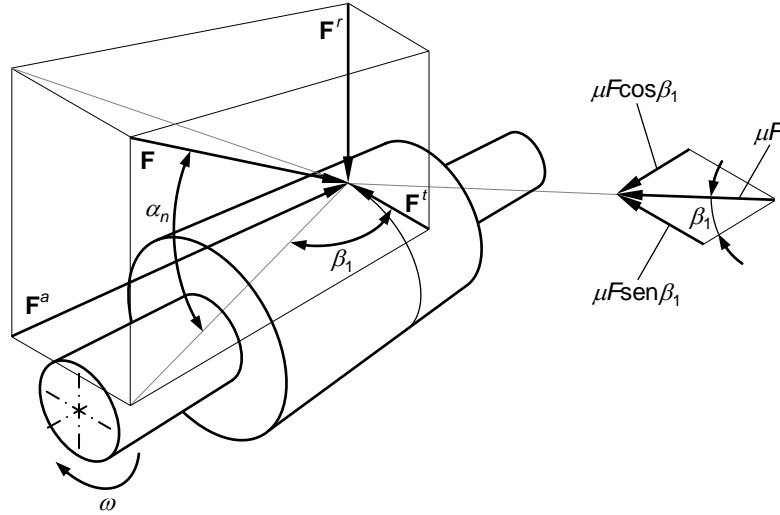


Figura 6.24 – Forças que se desenvolvem no engrenamento de um parafuso sem-fim.

Na perspetiva cónica da figura 6.24 estão representadas as diversas componentes das forças que se desenvolvem no engrenamento de uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal, e em que o parafuso é órgão motor. Atente-se ao facto de que a força de engrenamento  $F$ , que atua perpendicularmente à superfície dos filetes, origina uma força de atrito  $\mu F$ . esta força de atrito pode ser dividida em duas componentes ortogonais entre si, tal como se observa na figura 6.24, ou seja

$$\mu F \sin \beta_1 \quad (6.43)$$

$$\mu F \cos \beta_1 \quad (6.44)$$

em que  $\beta_1$  é o ângulo de inclinação primitiva do parafuso sem-fim. Com efeito, da análise da figura 6.24 verifica-se que

$$F^t = F(\cos \alpha_n \cos \beta_1 + \mu \sin \beta_1) \quad (6.45)$$

$$F^r = F \sin \alpha_n \quad (6.46)$$

$$F^a = F(\cos \alpha_n \sin \beta_1 - \mu \cos \beta_1) \quad (6.47)$$

onde  $\alpha_n$  representa o ângulo de pressão real.

Tal como acontece nas demais engrenagens, nos parafusos sem-fim a força tangencial ou útil pode ser determinada do seguinte modo

$$F^t = \frac{60P}{\pi d n} \quad (6.48)$$

sendo que as restantes componentes podem ser calculadas em função da força útil e da geometria da engrenagem, recorrendo, para o efeito às equações (6.45)-(6.47).

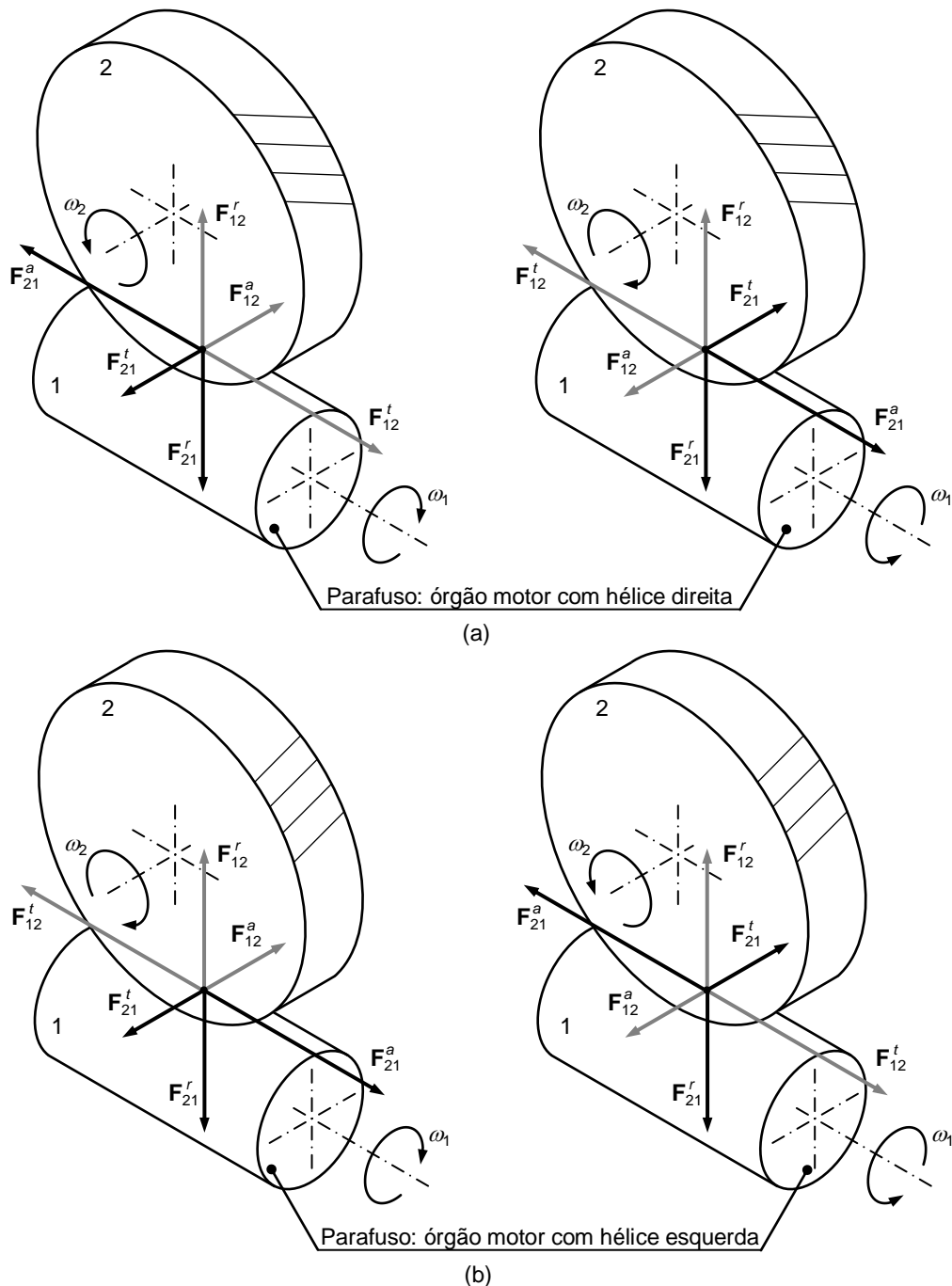


Figura 6.25 – Forças atuam no parafuso sem-fim e na roda helicoidal: (a) O parafuso é o órgão motor com hélice direita; (b) O parafuso é o órgão motor com hélice esquerda.

O procedimento para definir o sentido de atuação das diversas forças de engrenamento nos parafusos sem-fim é o mesmo modo que foi descrito para as engrenagens cilíndricas. Assim, a componente radial atua no sentido do eixo do parafuso sem-fim. A componente tangencial atua de tal modo que se opõe ao sentido de rotação do órgão motor. Finalmente, a componente axial é exercida no sentido que promove a compressão das superfícies dos dentes. A figura 6.25 mostra os sentidos de atuação das forças que se desenvolvem no parafuso sem-fim e na roda helicoidal em função do sentido de rotação do órgão motor, que é o parafuso sem-fim, e da inclinação dos dentes do parafuso e da roda. Pode dizer-se que a análise das forças que se desenvol-

vem nas engrenagens de parafuso sem-fim é idêntica à que se apresentou para as engrenagens cilíndricas de dentes inclinados (Shigley e Mischke, 1989). Deve salientar-se que no caso em que os eixos do parafuso sem-fim e da roda helicoidal fazem um ângulo de  $90^\circ$  entre si, são válidas as seguintes relações

$$F_{12}^t = F_{21}^a \quad (6.49)$$

$$F_{12}^r = F_{21}^r \quad (6.50)$$

$$F_{12}^a = F_{21}^t \quad (6.51)$$

### Exercício 6.11

**Enunciado:** Considere uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal redutora em que o órgão motor é o parafuso que gira a 1200 rpm e transmite uma potência de 0,75 kW. O parafuso tem hélice direita, duas entradas e um diâmetro primitivo de 50 mm. A roda tem 30 dentes e um passo aparente de 13 mm. O dentado é normalizado e o coeficiente de atrito médio entre os filetes do parafuso e os dentes da roda é igual a 0,03. Assim, determine as forças de engrenamento no parafuso e na roda.

#### *Padrão de resposta esperado:*

Da análise geométrica da engrenagem sabe-se que

$$p_{x1} = p_{t2} = 13 \text{ mm}$$

$$p_{z1} = p_{x1}z_1 = 13 \times 2 = 26 \text{ mm}$$

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{\pi d_1}{p_{z1}} = \frac{\pi \times 50}{26} \Rightarrow \beta_1 = 80,60^\circ.$$

Assim, a força tangencial que atua no parafuso é dada por

$$F_{21}^t = \frac{60P_1}{\pi d_1 n_1} = \frac{60 \times 0,75 \times 10^3}{\pi \times 50 \times 10^{-3} \times 1200} = 238,73 \text{ N}.$$

A força resultante que atua no parafuso é dada pela equação (6.45), ou seja

$$F_{21} = \frac{F_{21}^t}{\cos\alpha_n \cos\beta_1 + \mu \operatorname{sen}\beta_1} = \frac{238,73}{\cos 20 \cos 80,60 + 0,03 \operatorname{sen} 80,60} = 1304,01 \text{ N}.$$

Por seu lado, as componentes radial e axial são dados pelas equações (6.46) e (6.47), respetivamente

$$F_{21}^r = F_{21} \operatorname{sen}\alpha_n = 1304,01 \operatorname{sen} 20 = 446,00 \text{ N}$$

$$F_{21}^a = F_{21} (\cos\alpha_n \operatorname{sen}\beta_1 - \mu \cos\beta_1) = 1304,01 (\cos 20 \operatorname{sen} 80,60 - 0,03 \cos 80,60) = 1202,53 \text{ N}.$$

Por conseguinte, as diferentes forças que atuam nos dentes da roda podem ser determinadas do seguinte modo

$$F_{12} = F_{21} = 1304,01 \text{ N}$$

$$F_{12}^t = F_{21}^a = 1202,53 \text{ N}$$

$$F_{12}^r = F_{21}^r = 446,00 \text{ N}$$

$$F_{12}^a = F_{21}^t = 238,73 \text{ N}.$$

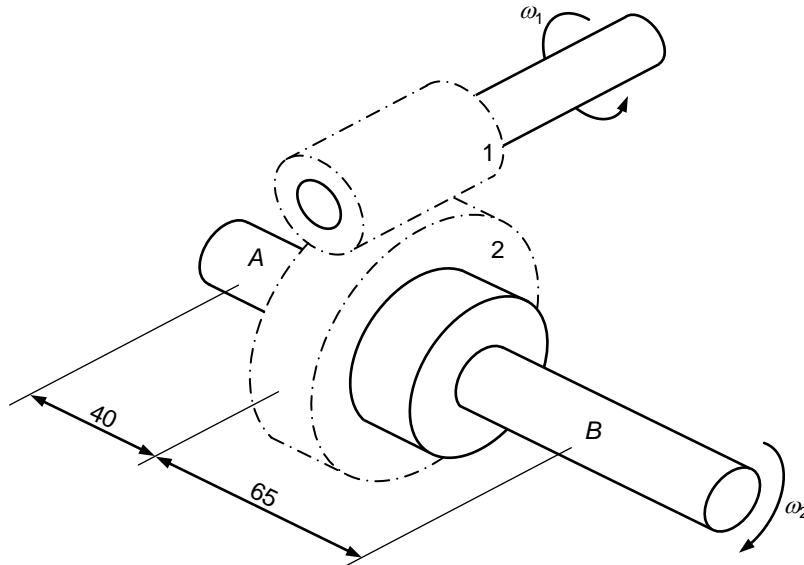


Figura 6.26 – Engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal.

### Exercício 6.12

**Enunciado:** Um parafuso de hélice direita com duas entradas transmite 2 kW de potência a 2950 rpm a uma roda helicoidal com 32 dentes. A roda tem um módulo aparente de 4 mm, uma largura igual a 30 mm e um ângulo de pressão real de  $20^\circ$ . O parafuso tem 50 mm de diâmetro primitivo. Admite-se que o coeficiente de atrito médio entre o parafuso e a roda é igual 0,024. A figura 6.26 ilustra os elementos primitivos desta engrenagem. Assim, (i) calcule as forças de engrenamento; (ii) determine as reações nos apoios do veio da roda; (iii) calcule o momento de saída.

#### Padrão de resposta esperado:

Da análise geométrica desta engrenagem pode verificar-se que

$$d_2 = m_{t2}z_2 = 4 \times 32 = 128 \text{ mm}$$

$$m_{x1} = m_{t2} = 4 \text{ mm}$$

$$p_{x1} = \pi m_{x1} = \pi \times 4 = 12,57 \text{ mm}$$

$$p_{z1} = p_{x1}z_1 = 12,57 \times 2 = 25,13 \text{ mm}$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\pi d_1}{p_{z1}} = \frac{\pi \times 50}{25,13} \Rightarrow \beta_1 = 80,91^\circ.$$

Assim, a força tangencial que atua no parafuso pode ser calculada do seguinte modo

$$F_{21}^t = \frac{60P_1}{\pi d_1 n_1} = \frac{60 \times 2000}{\pi \times 50 \times 10^{-3} \times 2950} = 258,96 \text{ N.}$$

A força resultante no engrenamento do parafuso é dada pela equação (6.45), isto é

$$F_{21} = \frac{F_{21}^t}{\cos \alpha_n \cos \beta_1 + \mu \operatorname{sen} \beta_1} = \frac{258,96}{\cos 20 \cos 80,91 + 0,024 \operatorname{sen} 80,91} = 1504,21 \text{ N.}$$

donde resulta que

$$F_{21}^r = F_{21} \operatorname{sen} \alpha_n = 1504,21 \operatorname{sen} 20 = 514,47 \text{ N}$$

$$F_{21}^a = F_{21} (\cos \alpha_n \operatorname{sen} \beta_1 - \mu \cos \beta_1) = \\ 1504,21 (\cos 20 \operatorname{sen} 80,91 - 0,024 \cos 80,91) = 1390,04 \text{ N.}$$

Com efeito, as forças que atuam na roda face ao seu engrenamento com o parafuso são as seguintes

$$F_{12} = F_{21} = 1504,21 \text{ N}$$

$$F_{12}^t = F_{21}^a = 1390,04 \text{ N}$$

$$F_{12}^r = F_{21}^r = 514,47 \text{ N}$$

$$F_{12}^a = F_{21}^t = 258,96 \text{ N.}$$

Para a determinação das reacções nos apoios do veio da roda considere-se o diagrama do corpo livre representado na figura 6.27, em que se admite que o apoio *B* absorve as cargas axiais.

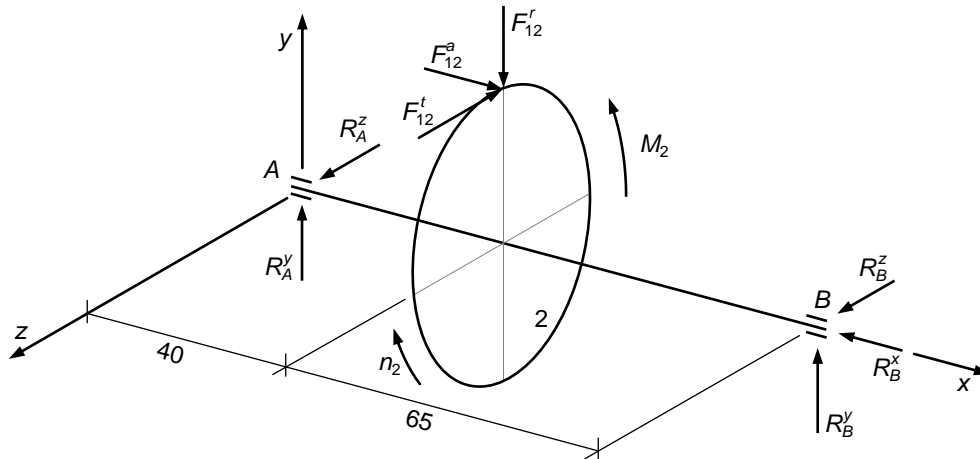


Figura 6.27 – Diagrama do corpo livre do veio da roda.

Aplicando as condições de equilíbrio ao diagrama representado na figura 6.27 resultam as seguintes equações

$$\sum F^x = 0 \Rightarrow F_{12}^a - R_B^x = 0$$

$$\sum F^y = 0 \Rightarrow R_A^y + R_B^y - F_{12}^r = 0$$

$$\sum F^z = 0 \Rightarrow R_A^z + R_B^z - F_{12}^t = 0$$

$$\sum M_B^y = 0 \Rightarrow R_A^z \times (40 + 65) - F_{12}^t \times 65 = 0$$

$$\sum M_B^z = 0 \Rightarrow R_A^y \times (40 + 65) + F_{12}^a \times \frac{d_2}{2} - F_{12}^r \times 65 = 0$$

donde se obtêm as seguintes reacções

$$R_A^y = 160,64 \text{ N}$$

$$R_A^z = 860,50 \text{ N}$$

$$R_B^x = 258,96 \text{ N}$$

$$R_B^y = 353,83 \text{ N}$$

$$R_B^z = 529,54 \text{ N.}$$

Finalmente, o momento que atua no veio da roda é dado por

$$\sum M_B^x = 0 \Rightarrow M_2 - F_{12}^t \frac{d_2}{2} = 0 \Rightarrow M_2 = 88,96 \text{ Nm.}$$

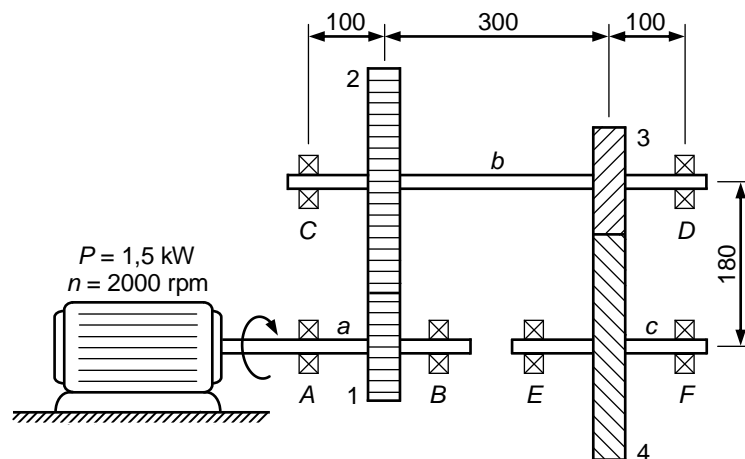
## 6.8. REVISÃO DE CONHECIMENTOS

Com o propósito de proporcionar uma revisão de conhecimentos sobre a temática da dinâmica de engrenagens, apresenta-se, nesta secção, um conjunto diversificado de questões e exercícios de aplicação.

1. Discuta a importância da análise dinâmica de engrenagens.
2. Deduza uma expressão que permita relacionar a força transmitida numa engrenagem com as características do elemento motor de uma engrenagem.
3. No contexto da análise de forças em engrenagens, discuta a importância da elaboração dos diagramas do corpo livre.
4. Explique o efeito da existência de atrito na análise dinâmica de engrenagens, em particular no caso dos parafusos sem-fim.
5. Identifique e caracterize as principais forças que se desenvolvem no engrenamento de uma engrenagem exterior cilíndrica de dentes retos.
6. Identifique e caracterize as principais forças que se desenvolvem no engrenamento de uma engrenagem exterior cilíndrica de dentes helicoidais.
7. Identifique e caracterize as principais forças que se desenvolvem no engrenamento de uma engrenagem exterior cónica.
8. Identifique e caracterize as principais forças que se desenvolvem no engrenamento de uma engrenagem de parafuso sem-fim.
9. Diga o que entende por diagrama do corpo livre.
10. Discuta a importância dos diagramas do corpo livre na análise dinâmica de engrenagens.
11. Faça o diagrama do corpo livre de uma engrenagem exterior cilíndrica de dentes retos.
12. Faça o diagrama do corpo livre de uma engrenagem exterior cilíndrica de dentes inclinados.
13. Faça o diagrama do corpo livre de uma engrenagem exterior cilíndrica cónica.
14. Faça o diagrama do corpo livre de uma engrenagem de parafuso sem-fim.
15. Qual o princípio fundamental na análise dinâmica de engrenagens?
16. Relativamente ao exercício 6.4, determine as reacções nos apoios da roda 2.



17. Apresente as relações matemáticas que permitem calcular as forças de engrenamento numa engrenagem exterior cilíndrica de dentes retos.
18. Apresente as relações matemáticas que permitem calcular as forças de engrenamento numa engrenagem exterior cilíndrica de dentes helicoidais.
19. Apresente as relações matemáticas que permitem calcular as forças de engrenamento numa engrenagem exterior cônica.
20. Apresente as relações matemáticas que permitem calcular as forças de engrenamento numa engrenagem de parafuso sem-fim.
21. O trem de engrenagens da figura de baixo é acionado por um motor elétrico de 1,5 kW de potência através de uma engrenagem exterior de rodas cilíndricas de dentes retos. O motor roda a 2000 rpm no sentido indicado na figura. O pinhão 1 e a roda 2 têm 14 e 56 dentes, respetivamente. O dentado é normalizado sendo o módulo igual a 5 mm. O trem inclui ainda uma engrenagem exterior de rodas cilíndricas de dentes helicoidais cujo ângulo de inclinação dos dentes é de  $26^\circ$  e o módulo real é de 3 mm. A relação de transmissão neste último andar é igual a 4 e a distância entre os eixos é de 180 mm. Assim, (i) elabore o diagrama do corpo livre do veio  $b$  sabendo que as cargas axiais são suportadas pelo apoio  $C$ ; (ii) determine as forças que atuam nos dentes das rodas 2 e 3; (iii) calcule as reações nos apoios  $C$  e  $D$ ; (iv) determine o momento torçor que atua no veio  $a$ .



22. Em relação ao exercício 6.7, determine as reações nos apoios  $E$  e  $F$ .
23. Em relação ao exercício 6.10, determine as reações nos apoios  $A$  e  $B$ .
24. Em relação ao exercício 6.11, determine o momento de saída.
25. Em relação ao exercício 6.11, calcule a potência da saída.

## 6.9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Beer, F.P., Johnston, E.R. (1991) *Mecânica Vetorial para Engenheiros. Cinemática e Dinâmica*. 5ª Edição, McGraw-Hill, São Paulo.
- Branco, C.M., Ferreira, J.M., da Costa, J.D., Ribeiro, A.S. (2009) *Projecto de Órgãos de Máquinas*. 2ª Edição, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Budynas, R.G., Nisbett, J.K. (2011) *Elementos de Máquinas de Shigley*. 8ª edição McGraw-Hill, Brasil.
- Drago, R.J. (1988) *Fundamentals of Gear Design*. London, Butterworths.
- Flores, P. (2012) *Análise Cinemática e Dinâmica de Mecanismos - Exercícios resolvidos e propostos*. Publindústria, Porto.
- Flores, P., Claro, J.C.P. (2007) *Cinemática de Mecanismos*. Edições Almedina, Coimbra.
- Flores, P., Gomes, J. (2014a) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens. 1. Aspectos gerais sobre engrenagens*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 41p.
- Flores, P., Gomes, J. (2014b) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens. 2. Engrenagens cilíndricas de dentes retos*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 44p.
- Flores, P., Gomes, J. (2014c) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens. 3. Engrenagens cilíndricas de dentes inclinados*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 32p.
- Henriot, G. (1979) *Traité Théorique et Pratique des Engrenages*. Editora Dunod.
- Juvinall, R.C., Marshek, K.M. (2006) *Fundamentals of Machine Component Design*. John Wiley and Sons, New York.
- Mabie, H.H., Reinholtz, C.F. (1987) *Mechanisms and Dynamics of Machinery*. Fourth Edition, John Wiley and Sons, New York.
- Norton, R.L. (2013) *Machine Design*. Pearson Education, New York.
- Shigley, J.E., Mischke, C.R. (1989) *Mechanical Engineering Design*. 5th Edition, McGraw-Hill, New York.
- Shigley, J.E., Uicker, J.J. (1980) *Theory of Machines and Mechanisms*. McGraw-Hill, New York.
- Spotts, M.F., Shoup, T.E. (1998) *Design of Machine Elements*. 7th Edition Prentice-Hall, New Jersey.
- Thomas, C.R., Hillsman, V.S. (1993) *Simple word rules for the determination of gear force directions*. Proceedings of 1993 Frontiers in Education Conference, pp. 862-865.
- Wilson, C.E., Sadler, J.P. (1993) *Kinematics and Dynamics of Machinery*. 2nd Edition, Harper Collins College Publishers, New York.