

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Órgãos de Máquinas II

Elaborado e revisto por Paulo Flores, José Gomes, Nuno Dourado e Filipe Marques - 2017



Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: pflores@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt



Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: jgomes@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt



Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: nunodourado@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt



Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: fmarques@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt



T.04 – ASPETOS GERAIS SOBRE ENGRENAGENS

1. Introdução
2. Breve Resenha Histórica
3. Classificação das Engrenagens
4. Nomenclatura Fundamental
5. Geração de Perfis de Dentes
6. Dentado em Evolvente de Círculo
7. Princípio Fundamental do Engrenamento
8. Revisão de Conhecimentos
9. Referências Bibliográficas

1. Introdução

Rodas de Atrito *versus* Rodas Dentadas

Como se viu anteriormente, [as rodas de atrito](#) são apenas utilizadas em situações particulares que envolvam potências relativamente baixas.

Para obviar as desvantagens associadas às rodas de atrito, [talham-se dentes, de perfis idênticos, nas periferias das rodas](#) de modo a garantir que os dentes da roda motora empurram ou arrastam os dentes da roda movida.

As figuras 1 e 2 ilustram transmissões por rodas de atrito e por rodas dentadas. Trata-se de duas transmissões por contacto direto.

Nas engrenagens o [contacto ocorre sem escorregamento](#) e, por conseguinte, a relação de transmissão é constante.

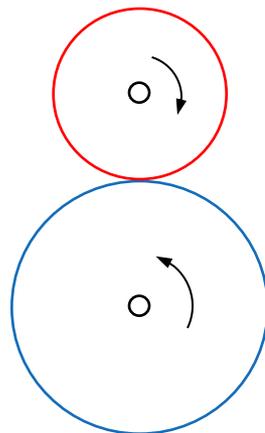


Fig. 1 Rodas de atrito

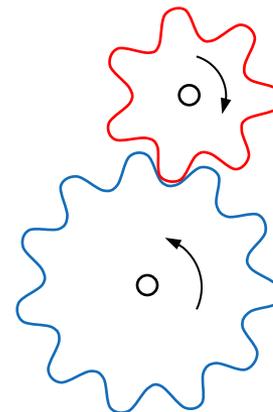


Fig. 2 Engrenagem

Conceitos Fundamentais

A **principal propriedade das engrenagens** é a de transmitir movimento entre os órgãos motor e movido com uma **relação constante**.

As engrenagens são, pois, mecanismos compostos por **rodas dentadas rígidas** que transmitem movimento entre **veios afastados** e/ou quando se pretende **diminuir ou aumentar a velocidade** ou o binário do veio motor.

Nestes órgãos mecânicos, o movimento é transmitido pelos dentes da roda motora que **rolam sem escorregar** sobre os dentes da roda movida, tal como se evidencia nas figuras 3, 4 e 5.



Fig. 3 Pinhão-cremalheira



Fig. 4 Trem de engrenagens

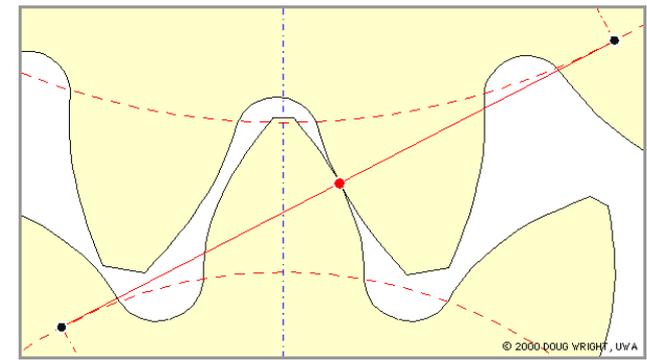


Fig. 5 Engrenamento de perfis conjugados

A **roda de menor dimensão** e, por isso, também de menor número de dentes, denomina-se de **pinhão ou carreto**. A roda de **maior dimensão** é designada simplesmente por **roda ou coroa**.

Estas denominações nada têm a ver com o facto de uma roda ser motora ou movida, mas sim, e apenas, com as dimensões das rodas.

Tipos de Engrenagens

As **engrenagens**, que podem ser consideradas como uma evolução ou aperfeiçoamento das rodas de atrito, são utilizadas para **transformar o movimento** de um veio rotativo num movimento de **rotação** ou de **translação**, tal como mostra a figura 6.



Fig. 6 Transmissão de movimento de rotação em rotação e de rotação em translação

De entre os diversos sistemas de transmissão de movimento de rotação, **as engrenagens são bastante versáteis**. As engrenagens podem ser utilizadas para transmitir movimento entre **eixos paralelos**, **concorrentes** ou **não complanares**, tal como se exemplifica na figura 7.



Fig. 7 Engrenagens de eixos paralelos, eixos concorrentes e eixos não complanares

Principais Características

As engrenagens permitem operar sistemas mecânicos de **baixas e altas rotações**. Em geral, as engrenagens apresentam **rendimentos considerados elevados** (até 99%), sendo exceção as engrenagens de **parafuso sem-fim** em que os rendimentos são relativamente baixos (da ordem dos 45-70%) devido ao elevado escorregamento que apresentam.

Outras características que concorrem para a **popularidade e sucesso das engrenagens** prendem-se com

- A elevada capacidade de **resistência a sobrecargas**
- A **boa precisão** na transmissão do movimento
- A **relação de transmissão constante** e independente das cargas em jogo
- A **boa fiabilidade** e durabilidade
- As **dimensões reduzidas** de atravancamento

As engrenagens podem ser fabricadas em diversos materiais, tais como os **metálicos** e os **poliméricos**.

As engrenagens, pelo facto de serem constituídas por corpos rígidos, **não absorvem choques** e necessitam, em geral, de **ser lubrificadas**.

Acresce ainda o facto de serem relativamente **caras e ruidosas**, e podem ser afetadas, no seu desempenho, pelas condições ambientais, tais como **humidade** e **poeiras**.

Processos de Fabrico

Os principais processos de fabrico das **rodas dentadas metálicas** são a **maquinagem**, a **sinterização**, a **fundição** e a **conformação** (ver figura 8).

Em geral, estes processos requerem **acabamentos superficiais posteriores**.



Fig. 8 Processos de fabrico de rodas dentadas metálicas: fundição e maquinagem

Por seu lado, as **rodas dentadas poliméricas** são obtidas por **injeção**. As rodas dentadas poliméricas apresentam como principais vantagens o **baixo peso** e o **custo reduzido**. Este último aspeto é particularmente relevante quando se trata de grandes séries.

As rodas poliméricas têm, todavia, **menor capacidade de carga**. Este tipo de rodas dentadas é utilizado, sobretudo, em sistemas mecânicos de pequena dimensão, tais como os **eletrodomésticos** e os **brinquedos**, tal como se ilustra na página seguinte.

Exemplos de Aplicação

É vasto e bastante diversificado o [campo de aplicações das rodas dentadas](#). A título informativo, nas figuras 9 a 16, apresentam-se alguns exemplos de aplicação de rodas dentadas.

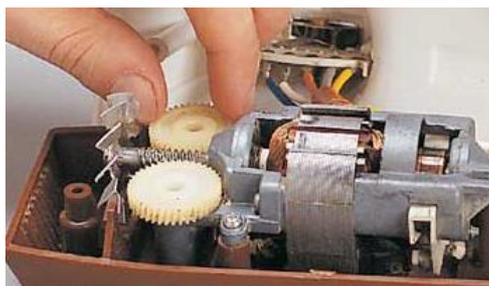


Fig. 9 Batedeira



Fig. 10 Brinquedo



Fig. 11 Pinhão-cremalheira



Fig. 12 Indústria pesada



Fig. 13 Relógio



Fig. 14 Contador



Fig. 15 Diferencial



Fig. 16 Caixa redutora

Exemplos de Aplicação

A figura 17 ilustra alguns exemplos em que se utilizam **rodas dentadas de diversos tipos**.

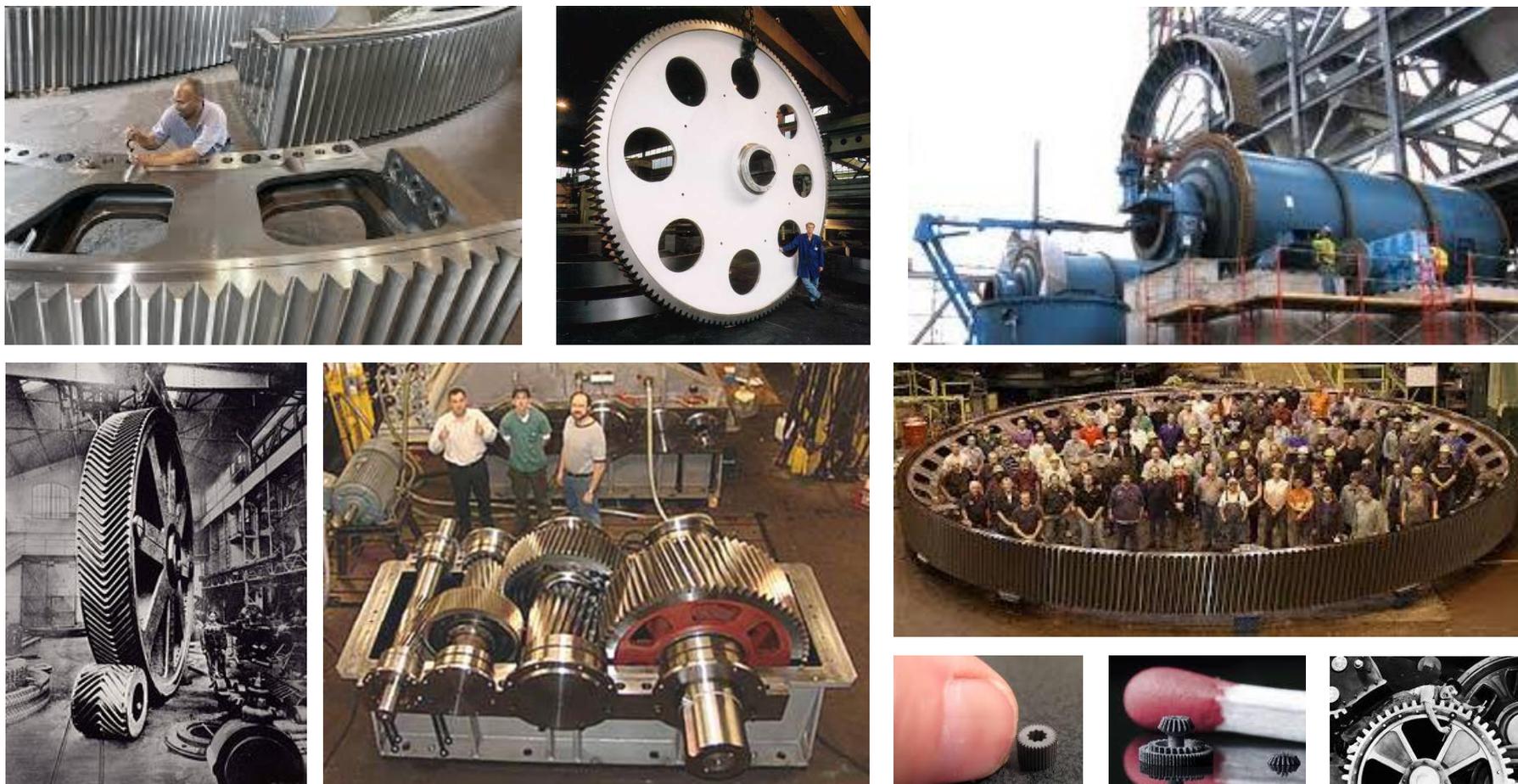


Fig. 17 Exemplos de aplicação em que se utilizam rodas dentadas de diferentes tipos e dimensões

Embriogénese das Engrenagens

É longa e rica a história associada à [génese e evolução das engrenagens](#). Já por volta do ano [1700 a.C.](#) surgem, em poemas da [literatura Hindu](#), referências a carros e a rodas. Há menções a engrenagens nos trabalhos de [Aristóteles](#) (384-322) e de [Arquimedes](#) (287-212).

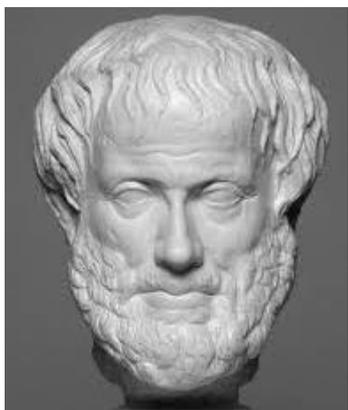


Fig. 18 Aristóteles

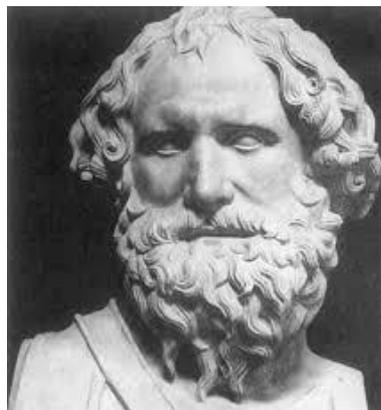


Fig. 19 Arquimedes



Fig. 20 Engrenagens primitivas (China no Séc. III a.C.)



As engrenagens primitivas eram [muito rudimentares](#), sendo constituídas por [pedaços de madeira](#) que se inseriam num disco ou numa roda.

As engrenagens primitivas são ainda utilizadas nos nossos dias em [sistemas de elevação de água](#), sendo vulgarmente denominadas de [noras](#). Este tipo de roda é também utilizado em moinhos, tal como o que se ilustra na figura 21.



Fig. 21 Engrenagem de uma nora

Carro que Segue o Sul

Um dos primeiros dispositivos que incluía um conjunto de engrenagens existia já no ano **2634 a.C.** na China, cuja denominação era o “**carro que segue o sul**”.

Tratava-se, na realidade, de um **engenhoso sistema de engrenagens** montado sobre um carro (ou carroça) que, mercê do funcionamento de um **trem epicicloidal**, mantinha o braço de uma figura humana sempre apontado para o sul, independentemente da direção em que o carro se deslocava.

A figura 22 ilustra dois modelos do carro que segue o sul. Este dispositivo era, na época, utilizado como uma espécie de bússola para orientar os viajantes que atravessavam o **deserto de Gobi**.

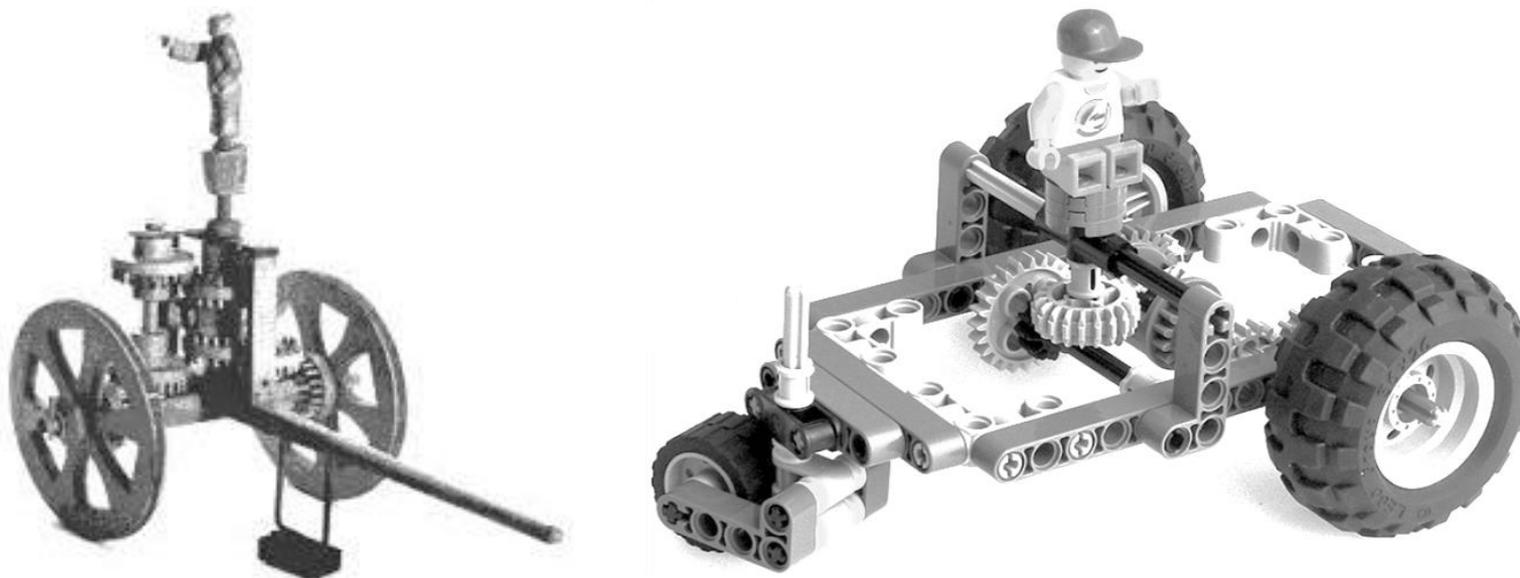


Fig. 22 Modelos do carro que segue o sul inventado na China no ano 2634 a.C.

Revolução Industrial

Em pleno Quatrocentos, o italiano [Leonardo da Vinci](#) (1452-1519) apresenta inúmeras [ilustrações](#) onde se podem identificar [arranjos de engrenagens](#), tal como o que se ilustra na figura 23.

O [primeiro relógio mecânico](#), em relação ao qual existem [esquemas básicos de projeto](#), deve-se ao italiano Giovanni Dondi (1348-1364). A figura 24 ilustra o relógio mecânico de Giovanni Dondi.

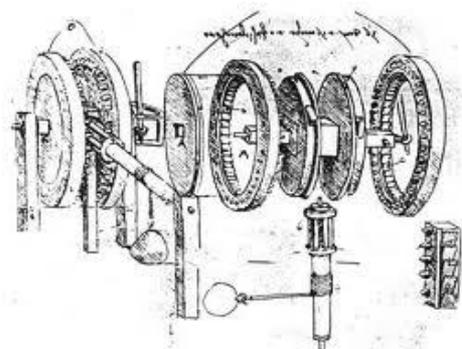


Fig. 23 Engrenagens segundo Leonardo da Vinci

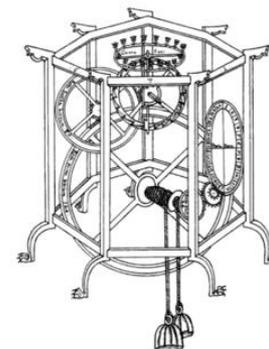


Fig. 24 Relógio mecânico de Giovanni Dondi

A [primeira máquina capaz de fabricar](#) rodas dentadas foi desenvolvida pelo espanhol Juanelo Turriano (1501-1585), a qual foi especialmente concebida para facilitar a [construção de um relógio mecânico](#) para o Rei Carlos V de Espanha. O relógio incluía cerca de [2000 rodas dentadas](#).

Com o advento da [revolução industrial](#), no século XVIII, as engrenagens passaram a ser fabricadas em [materiais metálicos](#), apresentando, por isso, [maior durabilidade e capacidade de carga](#). No início do século XIX, a indústria da produção de rodas dentadas assumia já a forma tal como hoje é conhecida, em que os perfis dos dentes obedeciam a curvas previamente definidas, tal como a [curva em evolvente](#).

Autores Relevantes

De entre os principais nomes que contribuíram decisivamente para o [estudo e desenvolvimento das engrenagens](#) podem ser destacados os que se listam de seguida. Outros autores poderiam ser incluídos, porém, os que aqui se apresentam, resumem, de algum modo, as contribuições mais relevantes.

- Nicolau de Cusa (1451) – Efetuou estudos sobre a [curva cicloidal](#)
- Girolamo Cardano (1525) – Desenvolveu os primeiros [modelos matemáticos de engrenagens](#)
- Leonhard Euler (1754) – Conhecido como o [pai do perfil em evolvente](#)
- Robert Willis (1832) – Desenvolveu inúmeros [estudos sobre engrenagens](#) e trens de engrenagens
- Wilfred Lewis (1892) – Propôs um modelo simplificado para avaliar as [tensões nos dentes](#)



Fig. 25 Nicolau Cusa



Fig. 26 Girolamo Cardano



Fig. 27 Leonhard Euler



Fig. 28 Robert Willis

Na atualidade, os [novos desenvolvimentos](#) na área científico-técnica das engrenagens prendem-se com os [novos materiais](#), as novas [técnicas de fabrico](#) e as [metodologias avançadas de modelação](#), [simulação](#), [análise](#) e [otimização](#) de rodas dentadas, bem como ainda o [uso extensivo da eletrónica](#).

Disposição Relativa dos Eixos das Rodas

Vários são os critérios que permitem classificar as engrenagens mais comumente utilizadas em máquinas e mecanismos. Um dos principais critérios de classificação das engrenagens tem a ver com a **disposição relativa dos eixos das rodas**. Assim, três grupos podem ser distinguidos

- Engrenagens **cilíndricas**, quando os eixos de rotação são paralelos
- Engrenagens **cônicas**, quando os eixos de rotação são concorrentes
- Engrenagens **torsas**, quando os eixos de rotação não são complanares

Nas figuras 29, 30 e 31 estão representadas engrenagens cilíndricas, cônicas e torsas, conforme descrição anteriormente exposta.



Fig. 29 Engrenagem cilíndrica



Fig. 30 Engrenagem cônica



Fig. 31 Engrenagem torsa

Forma dos Dentes

Um **segundo critério**, utilizado na classificação das engrenagens, é o que considera a **forma dos dentes**. Assim, costumam distinguir-se os seguintes tipos de dentes

- Dentes retos
- Dentes helicoidais
- Dentes espirais

As figuras 32, 33 e 34 apresentam duas engrenagens cilíndricas, de **dentes retos** e de **dentes helicoidais** (inclinados), e uma engrenagem cônica de **dentes espirais** (curvos).



Fig. 32 Dentes retos



Fig. 33 Dentes helicoidais



Fig. 34 Dentes espirais

Posição Relativa dos Centros Instantâneos de Rotação

Finalmente, um **terceiro critério** de classificação das engrenagens é o que considera a **posição relativa dos centros instantâneos de rotação**. Assim, as engrenagens podem ser **exteriores ou interiores**, conforme o centro instantâneo de rotação se situe, ou não, entre os eixos de rotação das rodas.

Nas figuras 35 e 36 estão representadas **engrenagens cilíndricas de dentes retos exteriores e interiores**. Em geral, as engrenagens interiores permitem distâncias menores entre os eixos das rodas.

As **rodas com dentado interior** são normalmente utilizadas em **sistemas de engrenagens planetárias**, quando há limitação de espaço ou quando se pretende proteger os dentes.



Fig. 35 Engrenagem cilíndrica exterior



Fig. 36 Engrenagem cilíndrica interior

Engrenagens Cilíndricas de Dentes Retos

Os [critérios de classificação das engrenagens supramencionados podem ser combinados](#), especialmente os dois primeiros. Com efeito, as [engrenagens cilíndricas](#) podem ter dentes [retos](#), dentes [helicoidais](#) ou dentes em [espinha](#), também denominados dentes de [dupla hélice](#).

A figura 37 mostra uma engrenagem cilíndrica de dentes retos, que é das mais comuns em mecânica quando se pretende transmitir movimento entre eixos paralelos.



Fig. 37 Engrenagem cilíndrica exterior de dentes retos

O projeto, fabrico, montagem e manutenção deste tipo de engrenagem é [relativamente simples](#), já que transmite apenas cargas radiais e admite [grandes relações de transmissão](#) (8:1).

As engrenagens cilíndricas de dentes retos apresentam [rendimentos elevados](#) (até 99%). Contudo, quando operam a elevadas velocidades de rotação são [algo ruidosas](#).

Estas engrenagens podem funcionar em [um ou mais andares](#), podendo transmitir potências da ordem dos 20000 Cv, com velocidades tangenciais até 150-200 m/s.

Engrenagens Cilíndricas de Dentes Helicoidais

As engrenagens **cilíndricas de dentes helicoidais ou inclinados** apresentam um funcionamento **mais suave e menos ruidoso** do que as de dentes retos, uma vez que o engrenamento se dá de forma mais progressiva.

A figura 38 mostra uma engrenagem cilíndrica de dentes helicoidais. Os **parâmetros de funcionamento e de desempenho são idênticos** aos do dentado reto. Todavia, nas engrenagens de dentado helicoidal **desenvolvem-se cargas axiais**, o que não acontece com o dentado reto.



Fig. 38 Engrenagem cilíndrica de dentes helicoidais



Fig. 39 Dentado em espinha

Aquela limitação pode ser ultrapassada recorrendo ao **dentado em espinha**, ilustrado na figura 39. De facto, o **dentado em espinha ou de dupla hélice** apresenta as mesmas vantagens do dentado helicoidal, às quais acresce ainda o facto de **não serem desenvolvidos esforços axiais**.

As engrenagens com **dentes em espinha** são utilizadas quando se pretende **transmitir potências elevadas**. As engrenagens cilíndricas de dentes em espinha ou de dupla hélice requerem **máquinas-ferramenta especiais** para o seu fabrico.

Engrenagens Cilíndricas de Pinhão-Cremalheira

Quando numa engrenagem cilíndrica, de dentado reto ou helicoidal, **uma das rodas tem raio infinito**, então aquela é vulgarmente denominada de **pinhão-cremalheira**.

Este tipo particular de engrenagem cilíndrica **transforma o movimento de rotação** da roda em **movimento de translação da cremalheira**, ou vice-versa.

A figura 40 ilustra um exemplo de uma engrenagem do tipo pinhão-cremalheira. Este tipo de engrenagem é **fácil de fabricar** e, por vezes, é usada como **ferramenta de corte** para gerar rodas dentadas.



Fig. 40 Engrenagem cilíndrica do tipo pinhão-cremalheira

Engrenagens Cónicas

As **engrenagens cónicas** podem ter dentes **retos**, dentes **helicoidais**, dentes **espirais** e podem ainda ser **descentradas (hipoide)**, tal como se apresenta na figura 41.

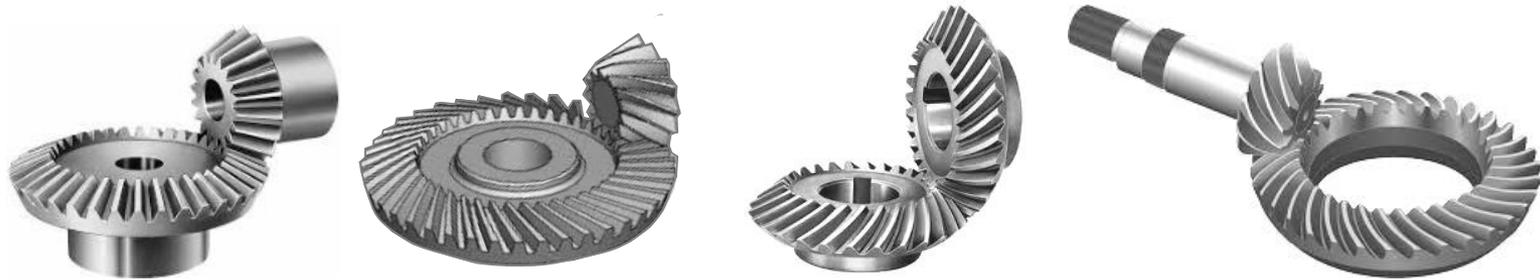


Fig. 41 Engrenagens cónicas de dentes retos, helicoidais, espirais e hipoide

As engrenagens cónicas são utilizadas quando há **necessidade de cruzar os eixos** dos órgãos motor e movido. Em geral, este tipo de engrenagem admite **relações de transmissão até 6:1**, tendo um desempenho comparável ao das engrenagens cilíndricas. As velocidades tangenciais podem atingir os 50-75 m/s.

É frequente encontrar situações práticas em que se **associam engrenagens cónicas com engrenagens cilíndricas**, como é exemplo o caso dos **diferenciais dos automóveis** (ver figura 15).

As engrenagens cónicas com dentes espirais e a hipoide apresentam maior capacidade de carga, maior relação de transmissão (10:1) e menor ruído do que as engrenagens cónicas de dentado reto e helicoidal. Contudo, apresentam, **rendimentos inferiores** (60-95%), bem como **maior geração de calor**.

As engrenagens cónicas **exigem maior rigor**, quer no fabrico, quer na montagem, sendo mais caras. As hipoides permitem **soluções compactas** e requerem um **lubrificante de elevada viscosidade**.

Engrenagens Torsas

As **engrenagens torsas** (figura 42) podem apresentar dentes **helicoidais** ou dentes **espirais**. No caso das engrenagens torsas de dentes helicoidais em que o carreto toma a forma de um parafuso, aquelas denominam-se de **engrenagens de parafuso sem-fim**, ou simplesmente sem-fim.



Fig. 42 Engrenagens torsas de dentes helicoidais, espirais e de parafuso sem-fim

As engrenagens **torsas de dentes helicoidais** apresentam rendimentos elevados (95%), velocidades até 25-50 m/s e relações de transmissão até 5:1.

No caso do **parafuso sem-fim** as relações de transmissão são mais elevadas podendo atingir 100:1 e velocidades da ordem dos 70 m/s.

Devido ao **elevado escorregamento** que apresentam podem surgir problemas de **aquecimento e perda de rendimento** (45-70%). Este tipo de engrenagem pode ter uma, duas ou três entradas, sendo o avanço igual à distância axial percorrida pelo sem-fim quando a roda efetua uma volta completa .

Com o intuito de **controlar o desgaste e a geração de calor**, devem selecionar-se diferentes materiais para o sem-fim (aço) e para roda (ferro fundido ou bronze), devendo funcionar com lubrificação em banho de óleo.

Engrenagens mais Comummente Utilizadas

Na figura 43 resumem-se os principais tipos de engrenagens anteriormente descritos e primeiramente agrupados quanto à disposição relativa dos eixos. Como segundo critério de classificação desta sinopse considera-se a forma dos dentes.

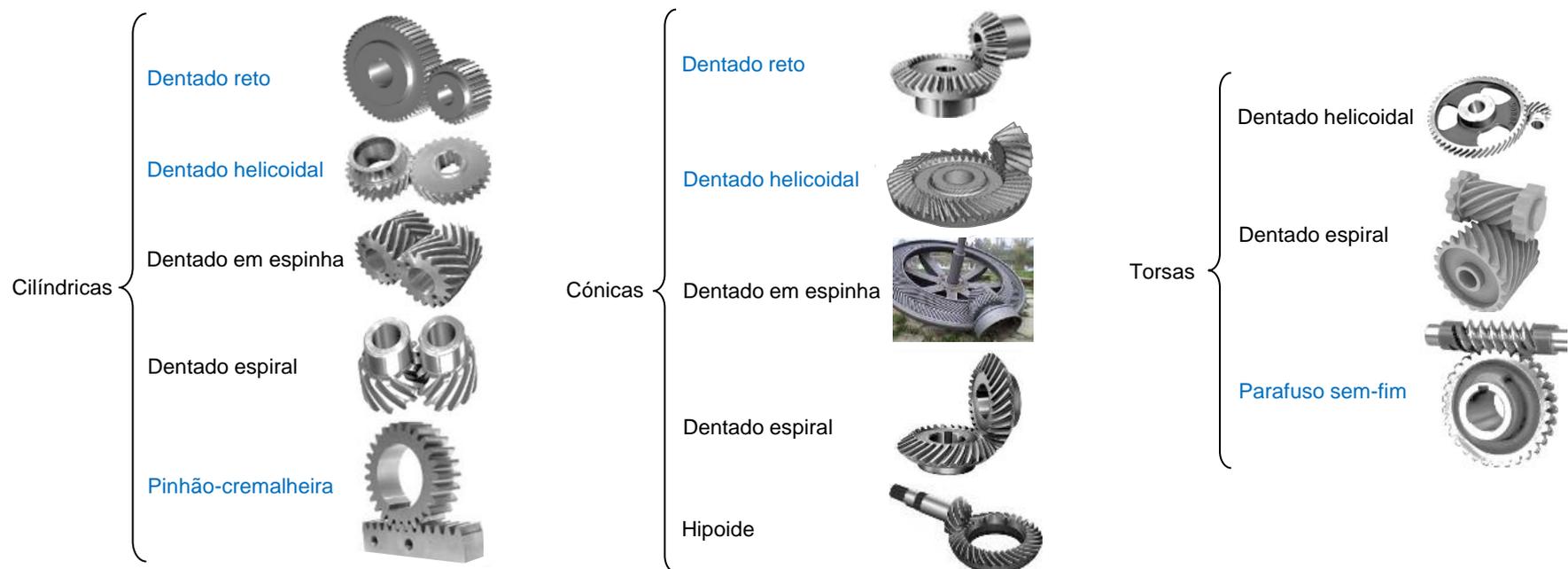


Fig. 43 Classificações das engrenagens mais comuns em máquinas e mecanismos

Engrenagens Especiais

As figuras 44 a 47 apresentam alguns casos especiais de rodas dentadas, as quais têm características muito particulares, tais como

- **Roda coroa**, que é um caso particular de uma roda cônica em que os dentes se desenvolvem paralelamente ao eixo da roda
- **Engrenagens não-circulares**, em que as relações de transmissão são variáveis e permitem oscilações no deslocamento dos eixos das rodas
- **Harmonic drive**, tipo de engrenagem bastante utilizado em robótica e sistemas de controlo, devido à sua compactidade, elevadas relações de transmissão (100:1) e inexistência de folgas
- **Engrenagem gaiola ou lanterna**, em que os dentes do pinhão são elementos cilíndricos paralelos ao eixo de rotação e estão dispostos circularmente em torno daquele eixo



Fig. 44 Roda coroa



Fig. 45 Engrenagem não-circular



Fig. 46 *Harmonic drive*



Fig. 47 Engrenagem gaiola

Terminologia Básica

A figura 48 ilustra um **setor de uma roda cilíndrica exterior de dentado reto**, na qual se inclui alguma terminologia básica relativa ao referido dentado.

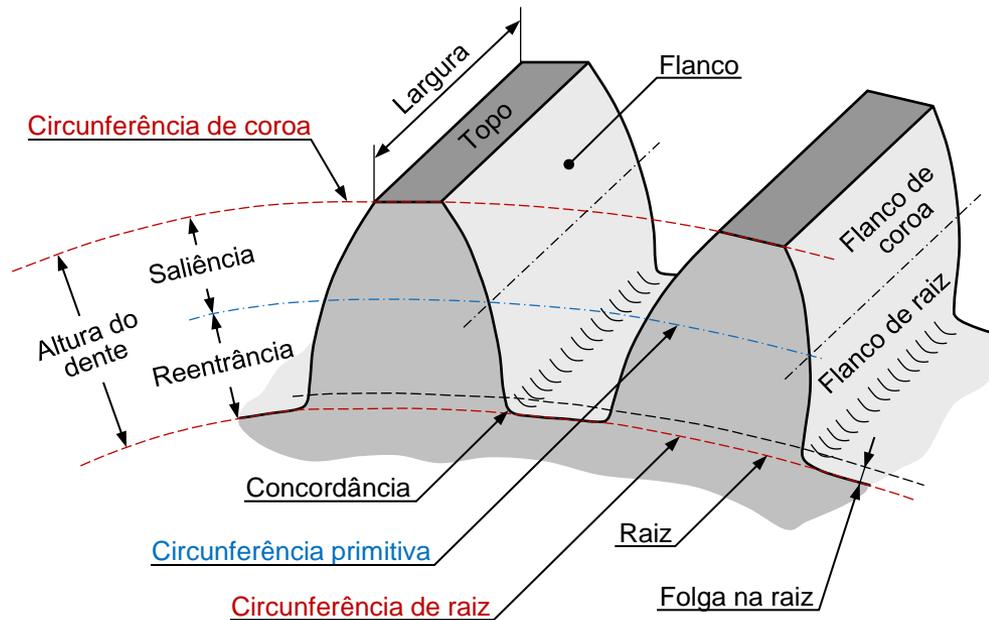


Fig. 48 Setor de uma roda cilíndrica exterior de dentes retos

Considere-se agora que uma engrenagem cilíndrica exterior de dentes retos é **intercetada por um plano perpendicular ao eixo das rodas**. Deste modo, obtém-se o **perfil transversal do dentado**, tal como se representa parcialmente na figura 49.

Quando o plano de interseção passa pelo eixo da roda obtém-se o **perfil axial do dentado**.

Terminologia Básica

Assim, no **perfil transversal do dentado** podem distinguir-se os seguintes elementos:

- **Coroa ou cabeça**, arco de circunferência que delimita superiormente o dente (segmento AE)
- **Raiz ou pé**, arco de circunferência que delimita inferiormente o dente (segmento DF)
- **Linha de flanco**, parte do perfil do dente compreendida entre a coroa e a raiz (segmentos AD e EF)

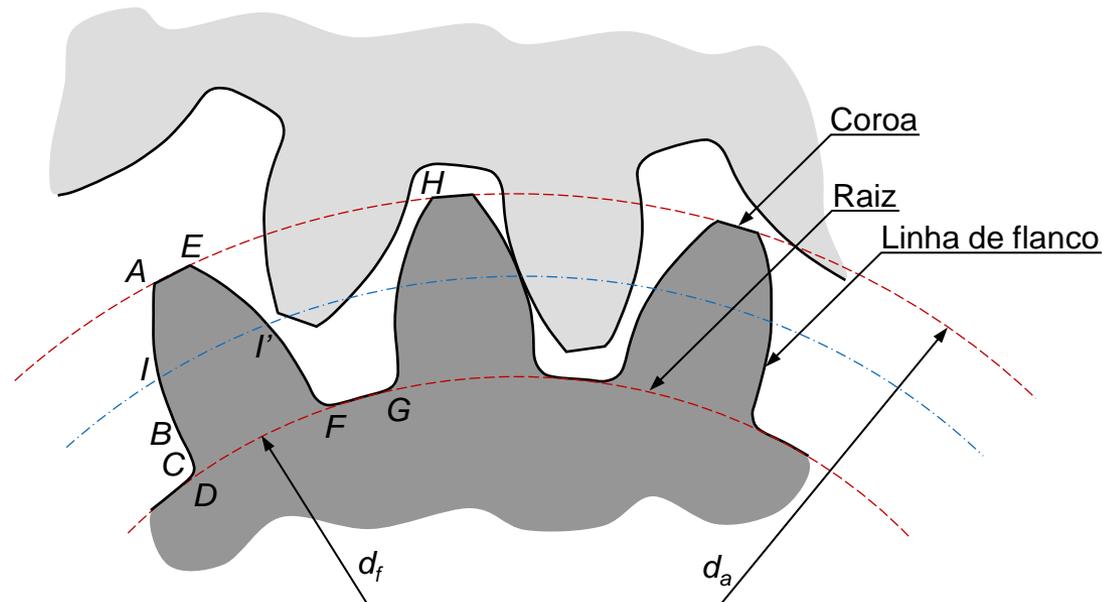


Fig. 49 Nomenclatura fundamental de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos

Às **superfícies cilíndricas** coaxiais com o eixo da roda que contêm as coroas e as raízes dos dentes dá-se o nome de **superfície de coroa** e **superfície de raiz**, respetivamente. Por conseguinte, os diâmetros destas superfícies denominam-se de **diâmetro de coroa** (d_a) e **diâmetro de raiz** (d_f).

Terminologia Básica

O **cilindro primitivo** tem um diâmetro intermédio entre o diâmetro de coroa e o diâmetro de raiz. O diâmetro primitivo é **representado simplesmente pela letra d** , tal como se pode observar na figura 50.

Refira-se ainda que o **diâmetro de base** (d_b) tem um diâmetro superior ao do da circunferência de raiz, como se verá ulteriormente.

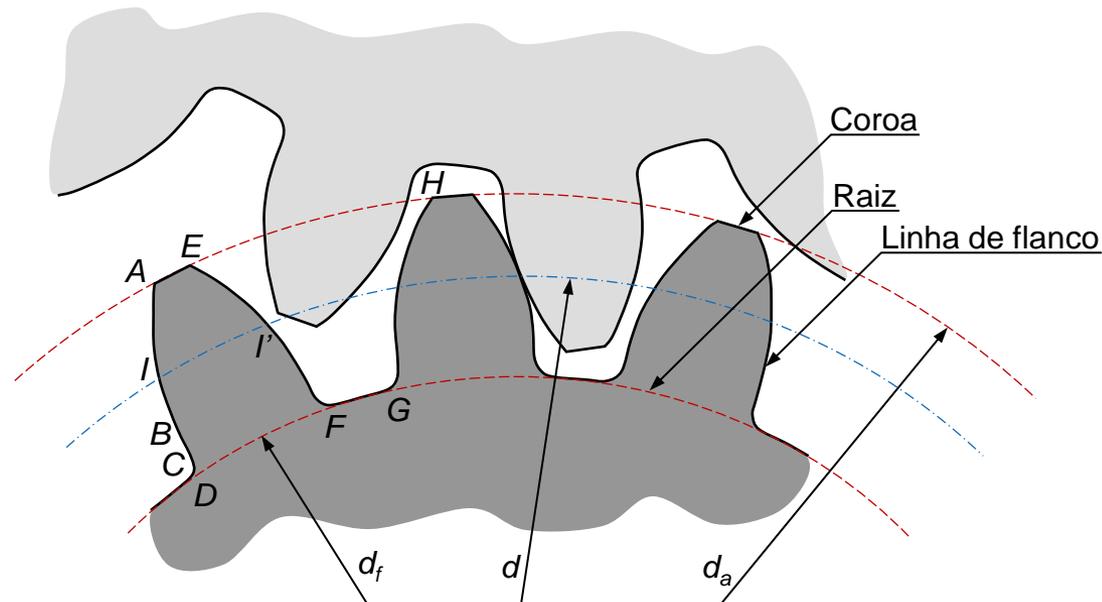


Fig. 50 Nomenclatura fundamental de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos

No caso de uma **transmissão do tipo pinhão-cremalheira**, os cilindros e as circunferências anteriormente referidos para o caso das rodas cilíndricas transformam-se em **planos e retas**, respetivamente.

Terminologia Básica

O **flanco do dente** é a parte exterior do dente compreendida **entre a raiz e a coroa**. Aos flancos que se podem sobrepor por rotação da roda denominam-se **flancos homólogos** (e.g. segmentos *AD* e *GH*).

Por outro lado, aos **flancos simétricos** em relação ao eixo de cada dente designam-se **flancos anti-homólogos** e, por conseguinte, não se podem sobrepor (e.g. segmentos *AD* e *EF*).

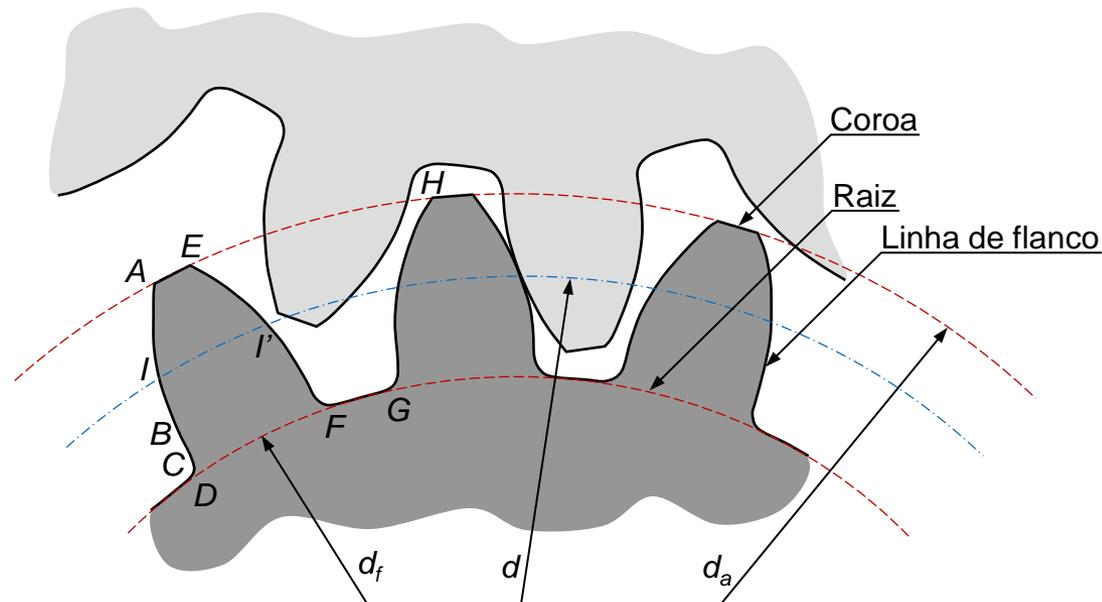


Fig. 51 Nomenclatura fundamental de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos

A **circunferência primitiva** representa uma circunferência teórica sobre a qual todos os cálculos são baseados. Numa engrenagem as circunferências primitivas são tangentes no ponto **primitivo**.

Terminologia Básica

O **flanco de um dente** pode ser dividido em **três partes** distintas, a saber:

- **Flanco ativo**, parte do flanco onde ocorre o contacto com os dentes da outra roda (segmento AB)
- **Flanco útil**, parte do flanco que pode ser usada como flanco ativo no engrenamento (segmento AC)
- **Flanco de concordância**, parte do flanco não utilizável, concordância com a raiz (segmento CD)

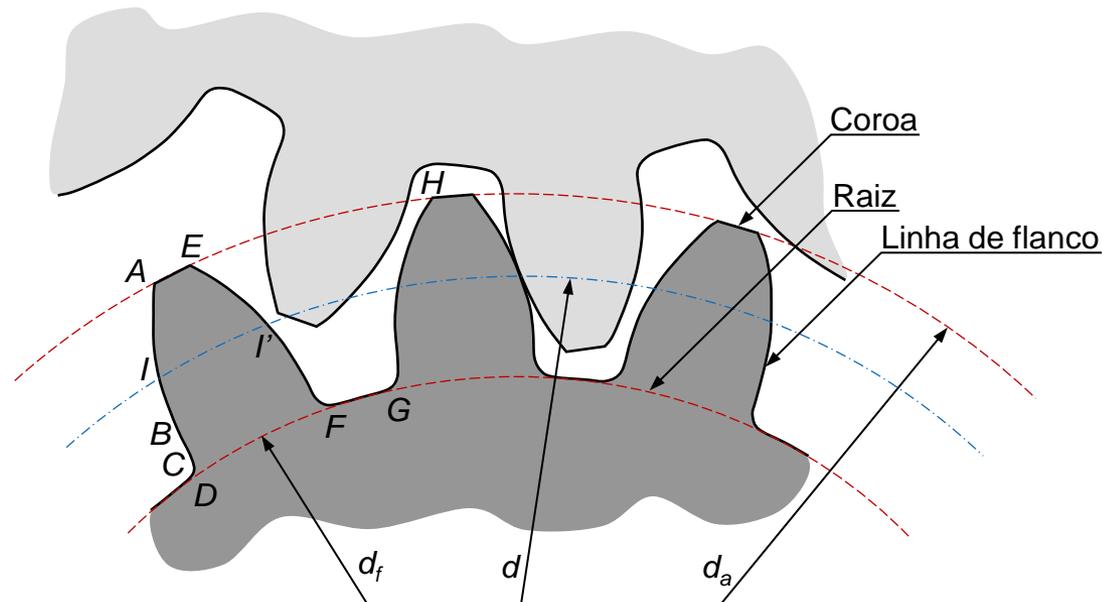


Fig. 52 Nomenclatura fundamental de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos

Terminologia Básica

Os flancos dos dentes podem ainda ser **divididos pela circunferência primitiva**. Assim, podem distinguir-se:

- **Flanco de coroa**, parte do flanco compreendida entre a superfície de coroa e a superfície primitiva (segmento *AI*)
- **Flanco de raiz**, parte do flanco compreendida entre a superfície primitiva e a superfície de raiz (segmento *ID*)

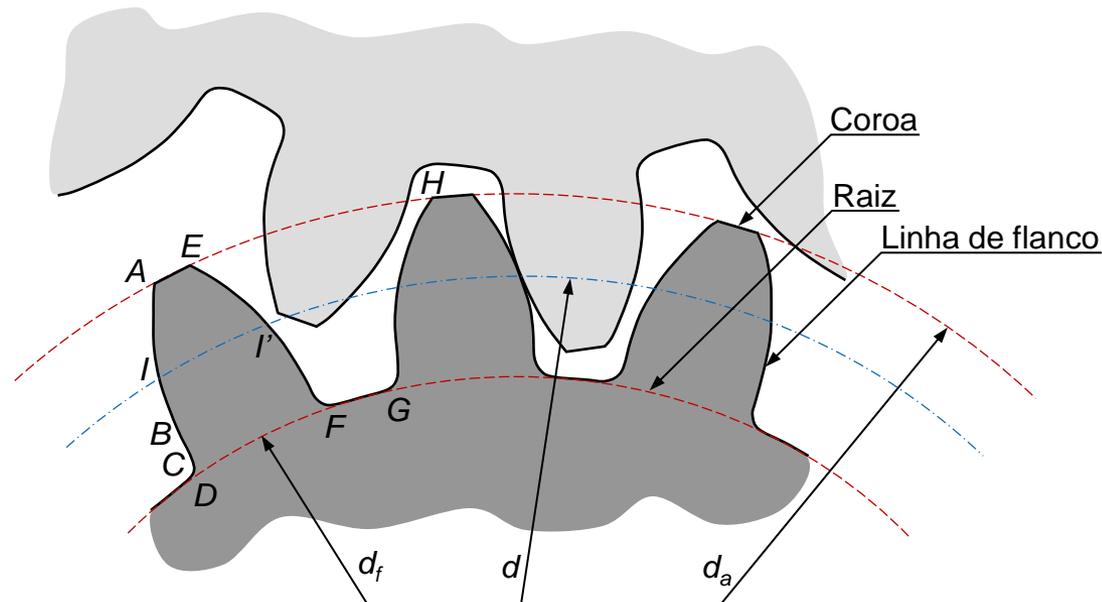


Fig. 53 Nomenclatura fundamental de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos

Ponto primitivo é o ponto de tangência de duas circunferências primitivas de **engrenagens conjugadas**. Este assunto será objeto de estudo aprofundado nas secções subsequentes deste documento.

Terminologia Básica

É evidente que a superfície primitiva divide o dente em duas partes distintas, nomeadamente:

- **Saliência**, parte do dente compreendida entre a superfície de coroa e a superfície primitiva, sendo medida pela distância (h_a) entre a circunferência de coroa e a circunferência primitiva
- **Reentrância**, parte do dente compreendida entre a superfície primitiva e a superfície de raiz, sendo medida pela distância (h_f) entre a circunferência primitiva e a circunferência de raiz

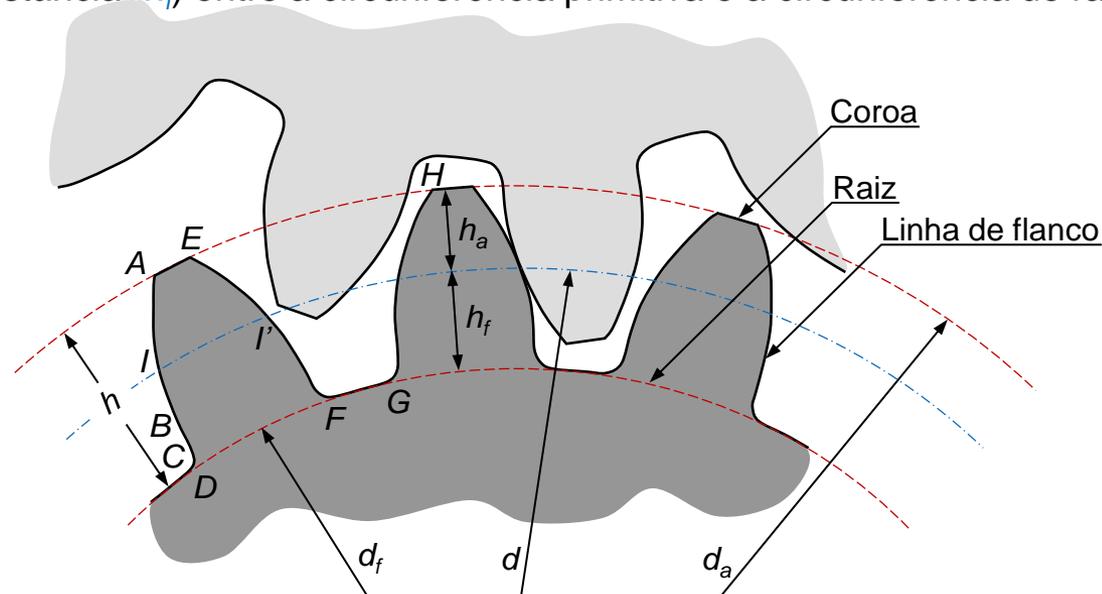


Fig. 54 Nomenclatura fundamental de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos

A **altura do dente (h)** é a distância entre a **circunferência de coroa** e a **circunferência de raiz**, ou seja, é igual à soma dos valores da saliência e da reentrância, isto é, $h = h_a + h_f$.

Terminologia Básica

Numa roda dentada, podem ainda identificar-se os seguintes elementos:

- **Entredente**, o espaço compreendido entre dois dentes consecutivos
- **Espessura do dente (s)**, comprimento do arco da circunferência primitiva compreendido entre os pontos primitivos dos flancos anti-homólogo e homólogo do mesmo dente

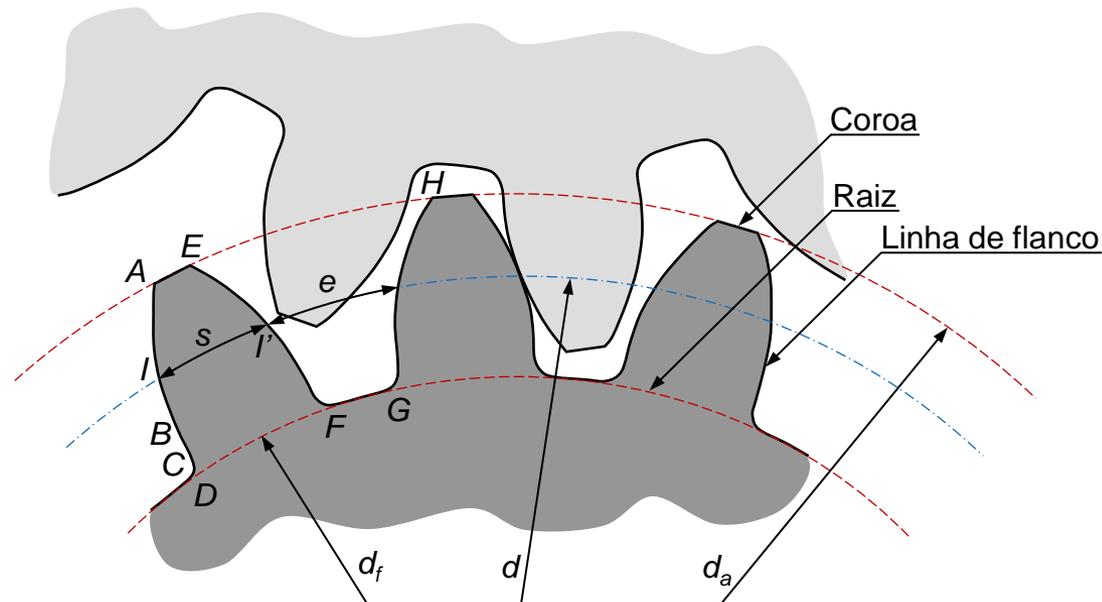


Fig. 55 Nomenclatura fundamental de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos

- **Intervalo entre dentes (e)**, comprimento do arco da circunferência primitiva compreendido entre os pontos primitivos dos flancos anti-homólogo e homólogo de dois dentes consecutivos

Terminologia Básica

Numa roda dentada, podem ainda identificar-se os seguintes elementos:

- **Largura do dente (b)**, o comprimento do perfil axial do dente (ver figura 48)
- **Passo primitivo** ou, simplesmente, **passo (p)**, comprimento do arco da circunferência primitiva compreendido entre dois flancos homólogos e consecutivos, ou seja, $p=s+e$

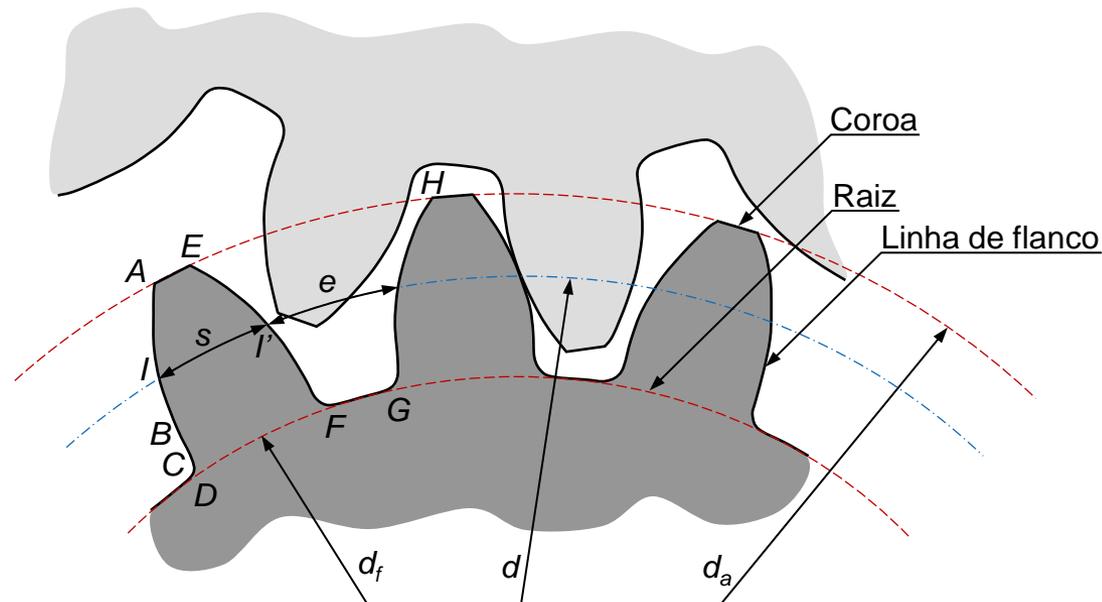


Fig. 56 Nomenclatura fundamental de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos

- **Passo normal (p_n)**, distância que separa dois flancos homólogos consecutivos. Trata-se, portanto, de um segmento de reta

Ângulo de Pressão

Ao ângulo agudo formado pela tangente ao perfil do dente num ponto qualquer e pelo raio da roda nesse ponto chama-se **ângulo de incidência** (θ), tal como ilustra a figura 57.

Na situação em que o ponto considerado para a tangência é o **ponto primitivo** (I), então o ângulo é denominado **ângulo de pressão** (α). O ângulo de pressão é o ângulo que define a direção da força que a roda motora exerce sobre a movida.

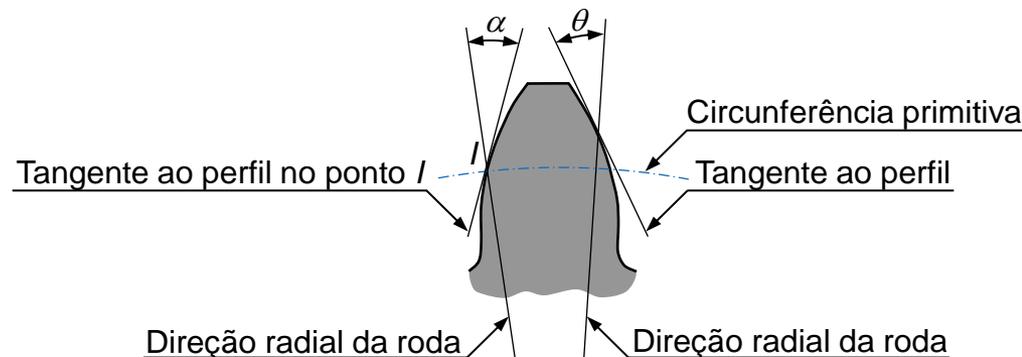


Fig. 57 Representação dos ângulos de incidência (θ) e de pressão (α)



Conceito de Módulo

Com o intuito de relacionar as dimensões características dos dentes defina-se **passo angular** de uma roda dentada como sendo

$$p_{ang} = \frac{p}{r} \quad (1.1)$$

em que p é o **passo primitivo** e r representa o **raio primitivo** da roda. Por seu lado, o passo primitivo é expresso do seguinte modo

$$p = \frac{2\pi r}{z} \quad (1.2)$$

onde z é o **número de dentes da roda**. Da substituição de (1.1) em (1.2) resulta que

$$p_{ang} = \frac{2\pi}{z} \quad (1.3)$$

Este **parâmetro não é conveniente** na definição de engrenagens, uma vez que nele aparece explicitamente o número irracional π !

Por isso, define-se uma outra **grandeza denominada de módulo**, que é indubitavelmente mais apropriada e conveniente na definição das rodas dentadas.

Deve desde já referir-se que **só é possível o engrenamento de rodas dentadas se estas tiverem o mesmo módulo**, a fim de que os espaços entre os dentes sejam compatíveis.



Conceito de Módulo

O **módulo**, que é expresso em milímetros, é, **por definição**, escrito do seguinte modo

$$m = \frac{P}{\pi} \quad (1.4)$$

Substituindo a equação (1.2) em (1.4) vem que

$$m = \frac{2\pi r}{z\pi} = \frac{d}{z} \quad (1.5)$$

que é também uma definição de módulo. Alternativamente, a equação (1.5) pode ser reescrita como

$$d = mz \quad (1.6)$$

Com efeito, o **módulo**, conjuntamente com o **número de dentes**, **define completa e perfeitamente qualquer roda dentada**.

Pode dizer-se que o **módulo está diretamente** relacionado com a **dimensão dos dentes** e, por conseguinte, com a sua **resistência**.

Por seu lado, o **número de dentes** de uma roda dentada está diretamente associado à **relação de transmissão** de uma engrenagem.

Conceito de Módulo

O **módulo** é um **parâmetro normalizado** que visa uniformizar os perfis adotados para os dentes das engrenagens e facilitar a obtenção de máquinas e ferramentas.

A tabela 1 lista valores normalizados para o módulo, cuja escolha deve iniciar-se pelas **séries mais baixas**.

Tab. 1 Valores normalizados do módulo expressos em milímetros

Série 1	Série 2	Série 3	Série 1	Série 2	Série 3
0,1				3,5	
	0,15				3,75
0,2			4		
	0,25			4,5	
0,3			5		
	0,35			5,5	
0,4			6		
	0,45				6,5
0,5				7	
	0,55		8		
0,6				9	
		0,65	10		
	0,7			11	
	0,75		12		
0,8				14	
	0,9		16		
1				18	
1,25			20		
1,5				22	
	1,75		25		
2				28	
	2,25		32		
2,5				36	
	2,75		40		
3				45	
		3,25	50		

Conceito de Módulo

A figura 58 ilustra a **evolução do tamanho e do número de dentes de rodas dentadas**, para o mesmo diâmetro primitivo em função do módulo. Da análise desta figura observa-se que com o **aumento do módulo aumenta-se também o tamanho do dente** e, conseqüentemente, a **resistência** da roda.

Por outro lado, com o **aumento do módulo diminui-se o número de dentes da roda**. É, pois, evidente que para um diâmetro primitivo constante, se se considerar um módulo pequeno resulta numa roda com muitos dentes, em que os dentes são de pequenas dimensões.

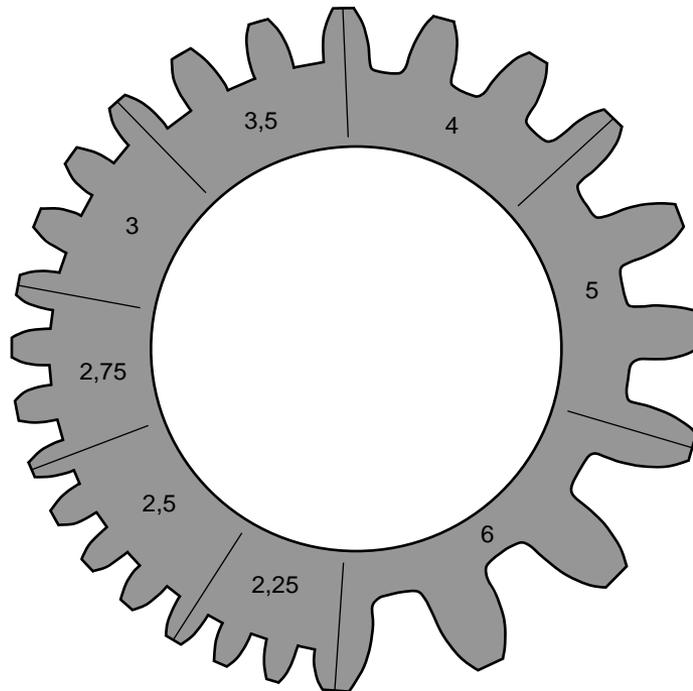


Fig. 58 Relação entre o módulo, tamanho dos dentes e número de dentes

Conceito de Módulo

Tal como foi referido anteriormente, **duas rodas dentadas só podem funcionar corretamente se tiverem o mesmo módulo**. Assim, a fim de se demonstrar este princípio considere-se duas engrenagens com as seguintes características:

- $m_1=m_2=1$ mm, $z_1=20$ e $z_2=40$ (figura 59)
- $m_1=1$ mm, $m_2=2$ mm, $z_1=z_2=20$ (figura 60)

As figuras 59 e 60 ilustram estas engrenagens onde são visíveis as diferenças pelo facto de se **considerar ou não o mesmo módulo**. Engrenagens com **maior número de dentes** proporcionam transmissões mais **suaves e evitam interferências**.

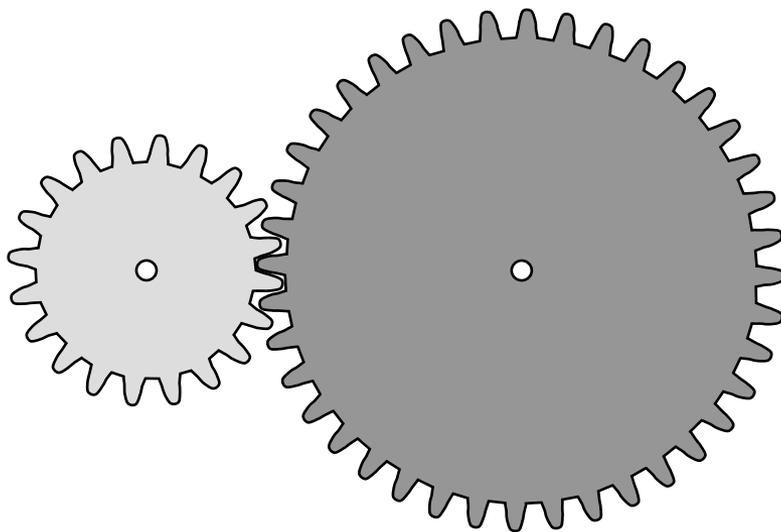


Fig. 59 Engrenagem com $m_1=m_2=1$ mm, $z_1=20$ e $z_2=40$

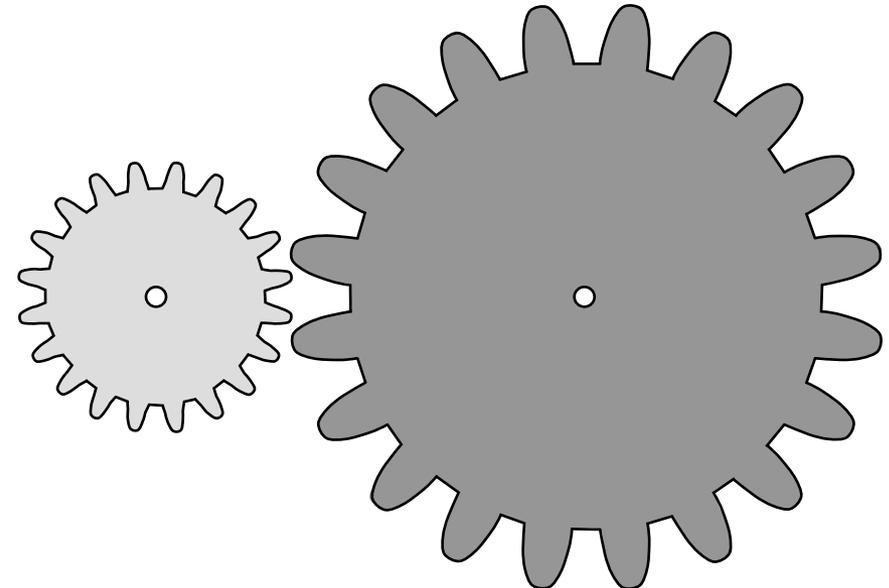


Fig. 60 Engrenagem com $m_1=1$ mm, $m_2=2$ mm e $z_1=z_2=20$

Perfis Conjugados

Uma **engrenagem só funcionará corretamente** se, durante o período de contacto entre as superfícies dos dentes, de uma e outra roda, aquelas **forem permanentemente tangentes**. O funcionamento correto diz respeito à garantia na transmissão do movimento com relação de transmissão constante.

Quando existe tangência entre as superfícies de dois dentes de duas rodas engrenadas, então estes perfis dos dentes denominam-se **perfis conjugados**, tal como se ilustra na figura 61.

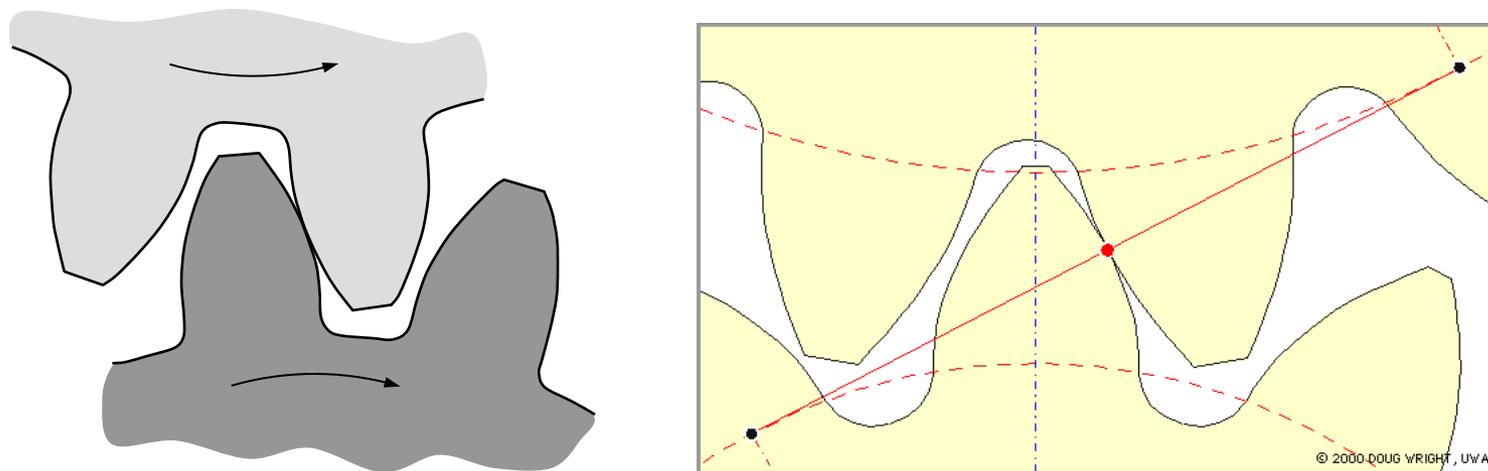


Fig. 61 Setores de duas rodas dentadas com perfis conjugados e engrenamento de perfis conjugados

Os perfis dos dentes devem ser projetados de modo a **garantir uma relação de transmissão constante** durante todo o engrenamento. Na verdade, esta ideia traduz o **princípio fundamental do engrenamento**, tal como se analisará mais detalhadamente nas secções seguintes deste documento.

Curvas Cíclicas e Evolventes

O modo mais frequente de gerar os perfis dos dentes é o que se baseia na utilização de **curvas cíclicas** ou de **curvas evolventes**, tal como se resume na figura 62.

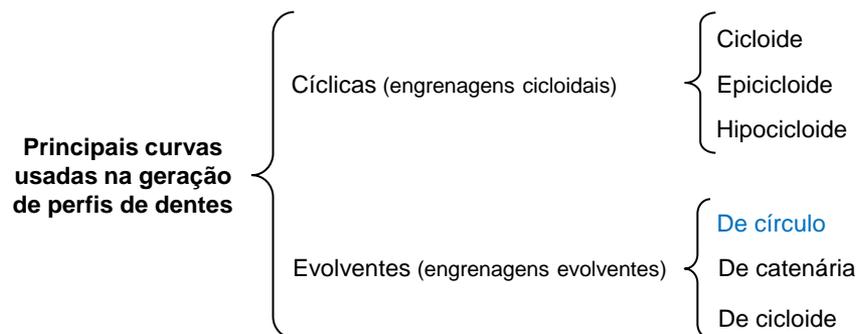


Fig. 62 Principais curvas usadas na geração de perfis de dentes

As **curvas cíclicas** são geralmente obtidas a partir de trajetórias de pontos associados à circunferência.

Uma **evolvente** é uma curva obtida a partir de uma dada curva, unindo a esta uma corda inextensível e traçando a trajetória de um ponto da corda ao ser enrolada ou desenrolada sobre a curva dada.

De seguida é apresentado o procedimento para se obter um **dentado em evolvente de círculo** para uma engrenagem cilíndrica exterior de dentes retos.

Curva Evolvente de Círculo

A maioria das **engrenagens de uso corrente** utiliza dentes com perfis em evolvente de círculo. Com este tipo de perfil evitam-se muitos dos inconvenientes associados ao dentado cicloidal, tais como os choques e as dificuldades de fabrico.

Uma evolvente de círculo é a **curva descrita por um ponto de uma reta que rola sem escorregar em torno de um círculo**, denominado círculo de base, tal como se ilustra na figura 63.

A reta, que é representada por uma **corda esticada e inextensível**, é sempre tangente ao círculo de base.

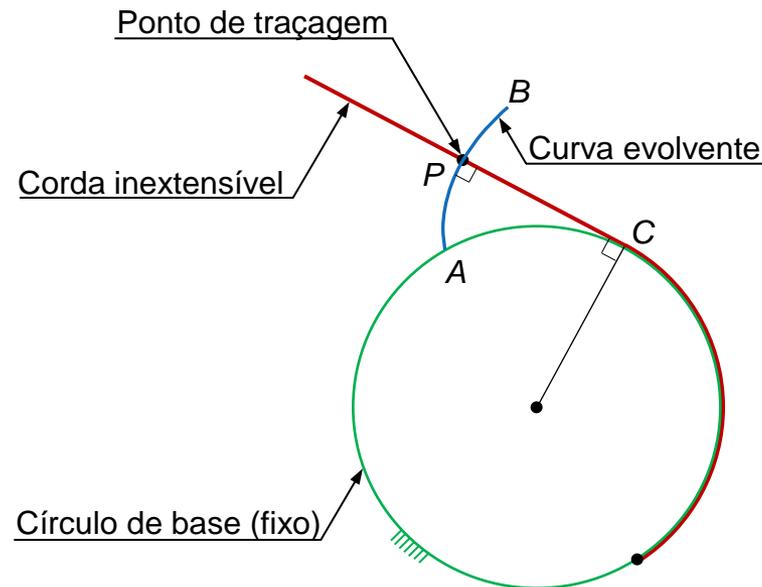


Fig. 63 Curva evolvente de círculo

Curva Evolvente de Círculo

Verifica-se ainda que o **centro de curvatura da evolvente** está sempre localizado num ponto de tangência da corda com o círculo de base.

Pode atestar-se que **qualquer tangente à evolvente é perpendicular à corda**, que representa o raio instantâneo de curvatura da evolvente. Observa-se, portanto, que a evolvente apresenta um **raio variável**.

A evolvente é desenhada quando a **corda é enrolada ou desenrolada à volta do círculo**. O ponto P , situado na corda, é o ponto traçador ou de traçagem, sendo considerado para desenharmos a **curva evolvente AB** .

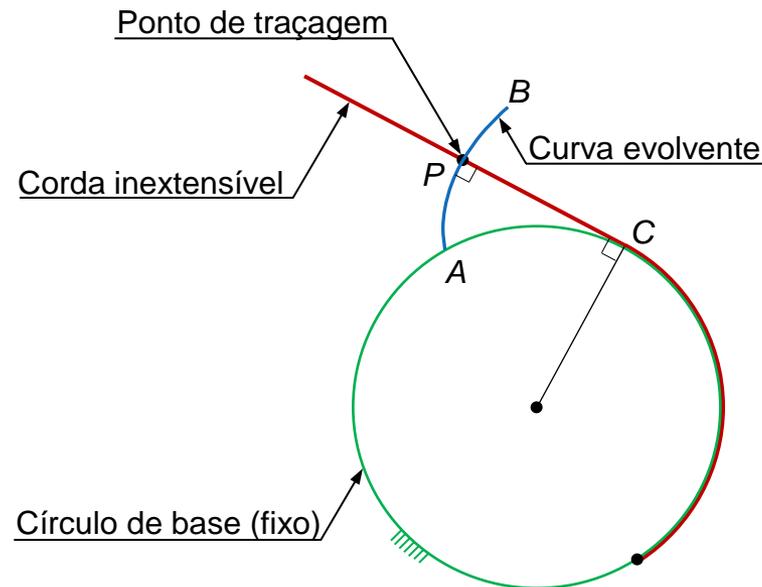


Fig. 64 Curva evolvente de círculo

Traçado da Curva Evolvente de Círculo

Em primeiro lugar desenha-se o **círculo de base** de raio r_b . De seguida **divide-se o círculo em partes iguais**, desenhando também os **segmentos de reta radiais** OP , OA_1 , OA_2 , ... OA_4 , tal como se ilustra na figura 65.

A partir dos pontos A_1 , A_2 , ... A_4 desenham-se **segmentos perpendiculares às direções radiais** anteriormente traçadas.

O **segmento de reta** A_1P_1 mede exatamente o mesmo que o **comprimento do arco** A_1P .

Do mesmo modo, o segmento de reta A_2P_2 mede exatamente o mesmo que o comprimento do arco A_2P , e assim sucessivamente para os demais segmentos.

Finalmente, **unindo os pontos** P , P_1 , P_2 , ... P_4 obtém-se a curva evolvente do círculo de base.

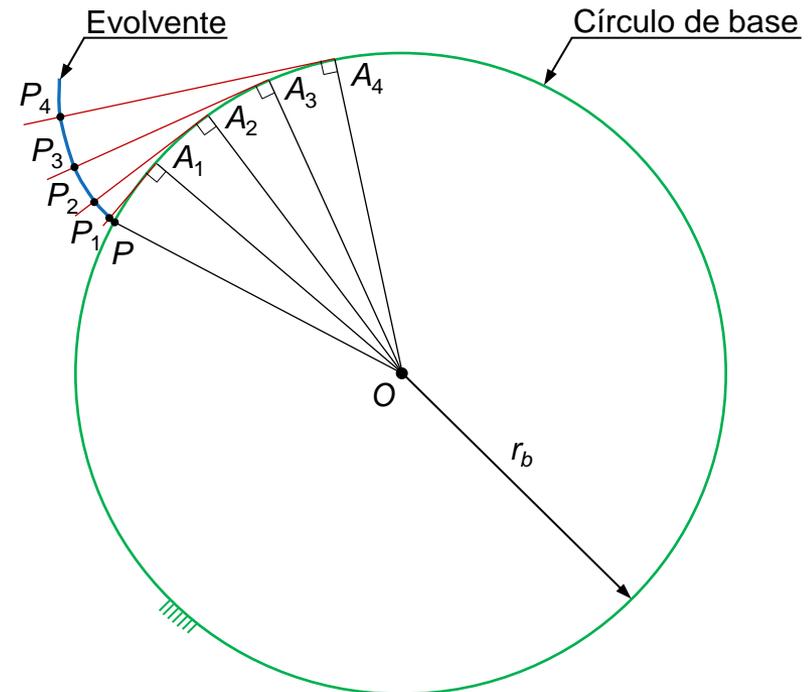


Fig. 65 Traçado de uma curva evolvente de círculo

Traçado da Curva Evolvente de Círculo

A figura 66 ilustra a evolvente de um círculo, bem como um **dente obtido a partir da curva evolvente**.

Pode observar-se que quanto maior for o raio do círculo de base, menos acentuada será a evolvente.

No caso de uma cremalheira (roda de raio infinito), a evolvente é uma reta.

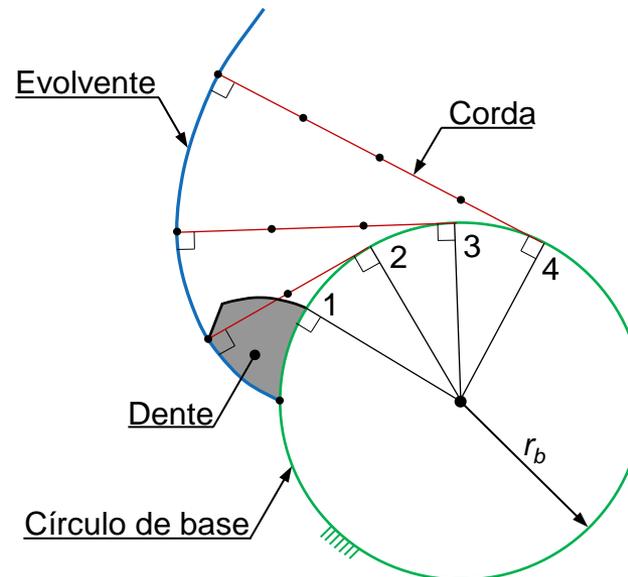


Fig. 66 Dente gerado em evolvente de círculo

Elementos Geométricos

Quando um dentado tem perfil em evolvente de círculo, a normal a esse perfil do dente é tangente à **circunferência de base**.

Assim, torna-se necessário estabelecer uma relação entre as **circunferências de base** (que servem para gerar o perfil dos dentes em evolvente de círculo) e as **circunferências primitivas** (que ajudam a definir uma roda dentada).

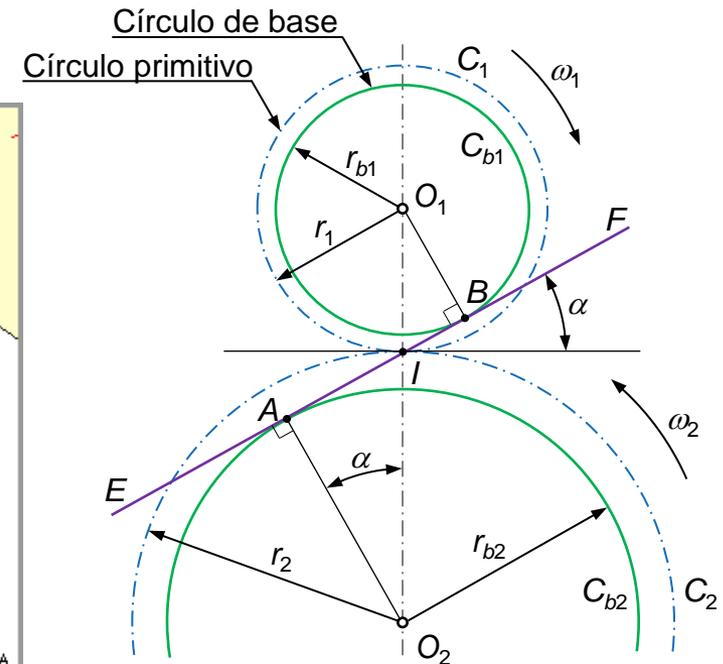
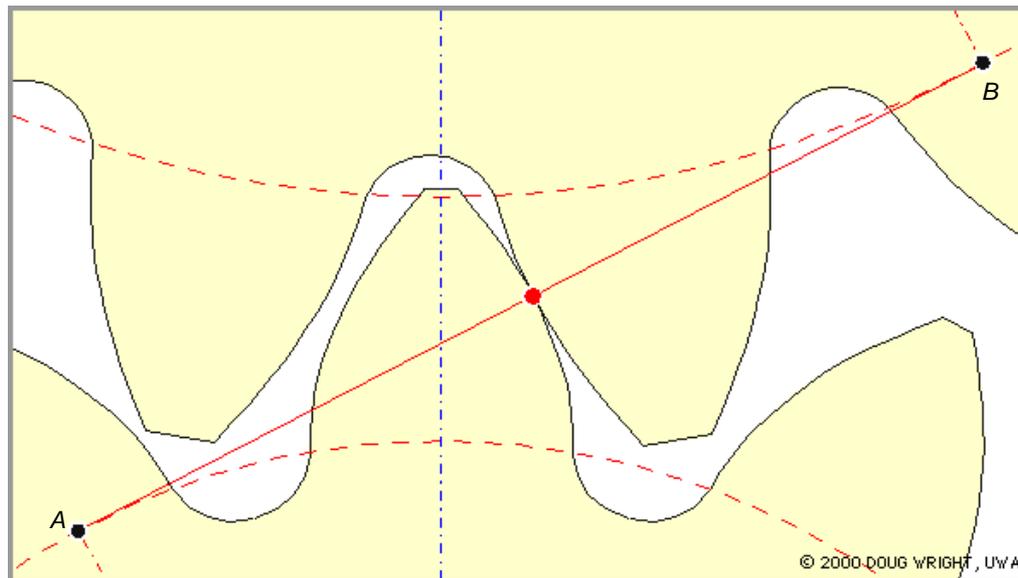


Fig. 67 Engrenamento de rodas dentadas e representação da linha de ação ou de engrenamento

Linha de Engrenamento

Quando um dentado tem perfil em evolvente de círculo, a normal a esse perfil do dente é tangente à **circunferência de base**.

Assim, torna-se necessário estabelecer uma relação entre as **circunferências de base** (que servem para gerar o perfil dos dentes em evolvente de círculo) e as **circunferências primitivas** (que ajudam a definir uma roda dentada).

Para que **não exista escorregamento** entre os círculos primitivos é condição *sine qua non* que a **relação entre os seus raios primitivos** seja constante, e a mesma que a relação entre os raios de base, ou seja

$$i = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}$$

Como a corda, representada na figura 68 pelo segmento de reta EF , é **sempre tangente aos círculos de base**, então este segmento intersesta a linha de centros no mesmo ponto de contacto entre os círculos primitivos (*i.e.* o ponto primitivo I), qualquer que seja o valor de α .

O ângulo α representa o **ângulo de pressão**.

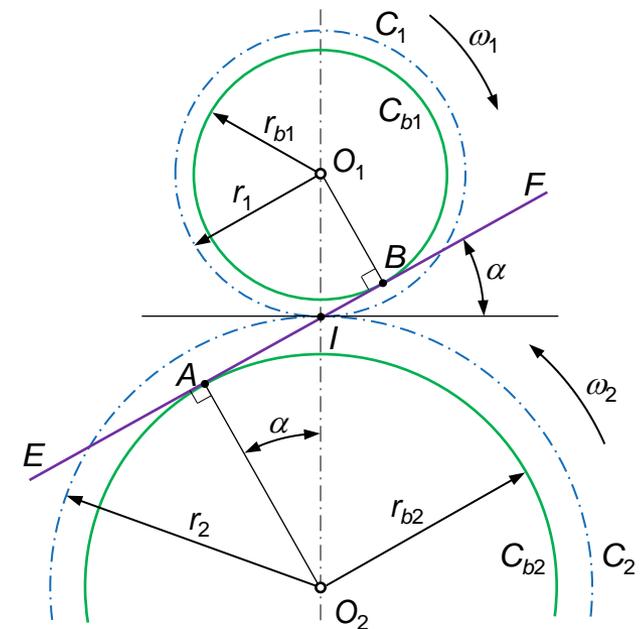


Fig. 68 Linha de ação ou de engrenamento

Linha de Engrenamento

O segmento EF denomina-se de **linha da ação**, linha de **engrenamento**, linha de **pressão**, linha de **geração** ou ainda linha **de forças**.

Esta linha não altera a sua direção **tangente aos círculos de base**.

Atendendo a que a linha de ação é sempre perpendicular à evolvente no ponto de contacto, a condição de transmissão uniforme de movimento é garantida, isto é, com relação de transmissão constante.

Da análise da figura 69 podem ser escritas as seguintes relações

$$r_{b1} = r_1 \cos \alpha$$

$$r_{b2} = r_2 \cos \alpha$$

Estas duas equações estabelecem a **relação entre os raios primitivos e os raios de base** de uma engrenagem cilíndrica exterior de dentado reto com perfil em evolvente de círculo.

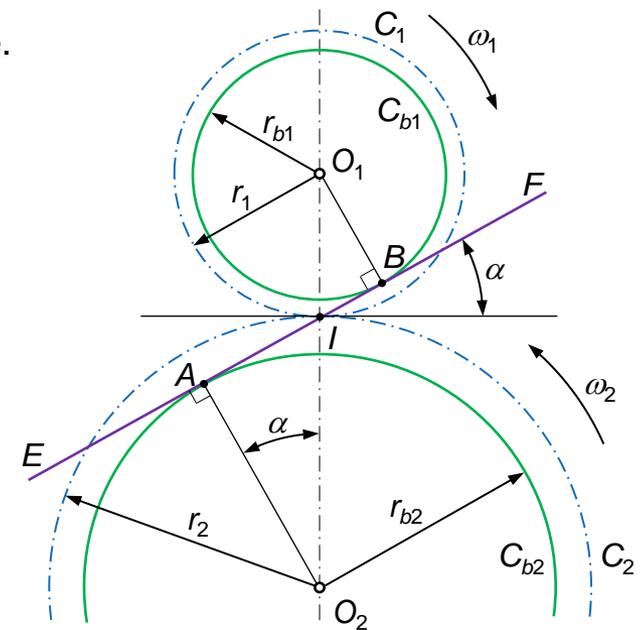


Fig. 69 Linha de ação ou de engrenamento

Geração do Perfil em Evolvente

Considere-se um **qualquer ponto C**, situado entre A e B no segmento de reta EF, tal como representado na figura 70. Supondo que a corda é cortada em C, então resultam dois segmentos da corda que podem ser usados para **gerar os perfis em evolvente dos círculos de base** das rodas 1 e 2.

A figura 70 ilustra parte dos perfis gerados pelo ponto C. Observa-se que ambas são curvas evolventes, cuja normal num qualquer ponto é tangente à respetiva circunferência de base.

Verifica-se **que o ponto de contacto se situa no segmento de reta EF**.

Esta situação traduz o facto de que numa engrenagem com dentes em perfil em evolvente de círculo, **os dentes de uma e outra roda rolam sem escorregar uns sobre os outros** durante o engrenamento.

Este assunto está diretamente relacionado com o **princípio fundamental do engrenamento** que será objeto de estudo na secção seguinte deste documento.

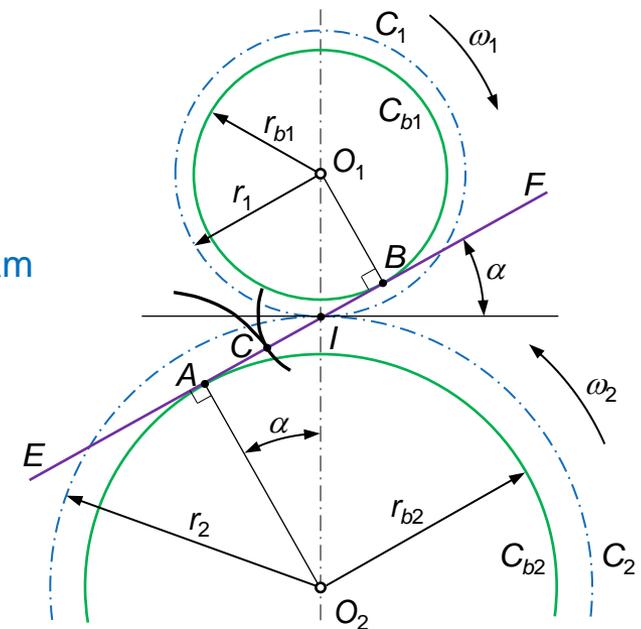


Fig. 70 Geração do perfil em evolvente

Geração do Perfil em Evolvente

A direção da **velocidade linear do ponto C** é tangente às circunferências de base das rodas 1 e 2. Pelo que dividindo o módulo desta velocidade linear pelo raio de base de cada roda, obtêm-se as respetivas velocidades de rotação das rodas 1 e 2.

Este facto é verificado para qualquer ponto situado no segmento de reta *EF*. Assim, pode escrever-se a seguinte relação matemática

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}$$

em que ω_1 e ω_2 representam as velocidades angulares das rodas 1 e 2, respetivamente.

Fica assim, demonstrado que **o perfil em evolvente de círculo** obedece à condição de que é **constante a relação de transmissão**.

Também se pode observar que a curva evolvente não pode ser gerada para o interior das circunferências de base.

Uma vez que o ângulo de pressão é estabelecido *a priori*, não poderá existir contacto entre os dentes **fora do segmento de reta AB**.

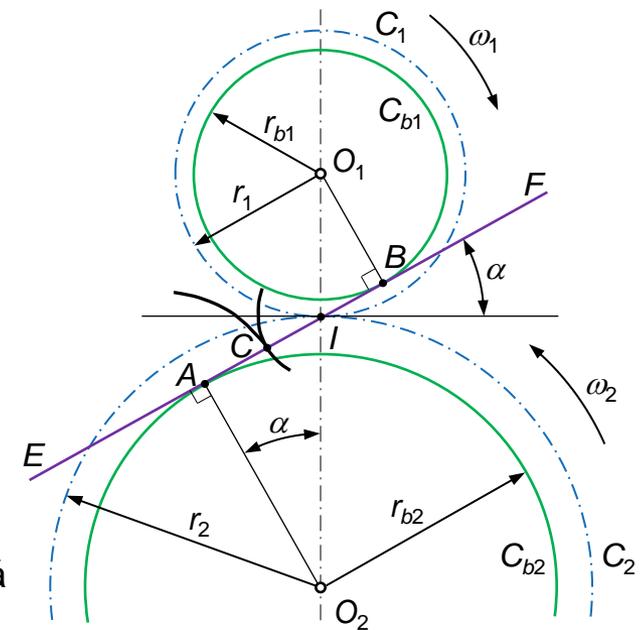


Fig. 71 Geração do perfil em evolvente

Vantagens do Perfil em Evolvente

O dentado em evolvente é o **mais utilizado em engrenagens** de máquinas e mecanismos, dado o leque de vantagens que apresenta. De seguida resumem-se algumas das características que tornam atrativos os dentados em evolvente de círculo

- É **possível o engrenamento** entre rodas com dentes com perfil em evolvente, mesmo quando **existe variação do entre-eixo**, desgaste dos apoios ou deformação dos elementos de transmissão. Esta circunstância altera, todavia, o valor do ângulo de pressão, tal como se ilustra na figura 72

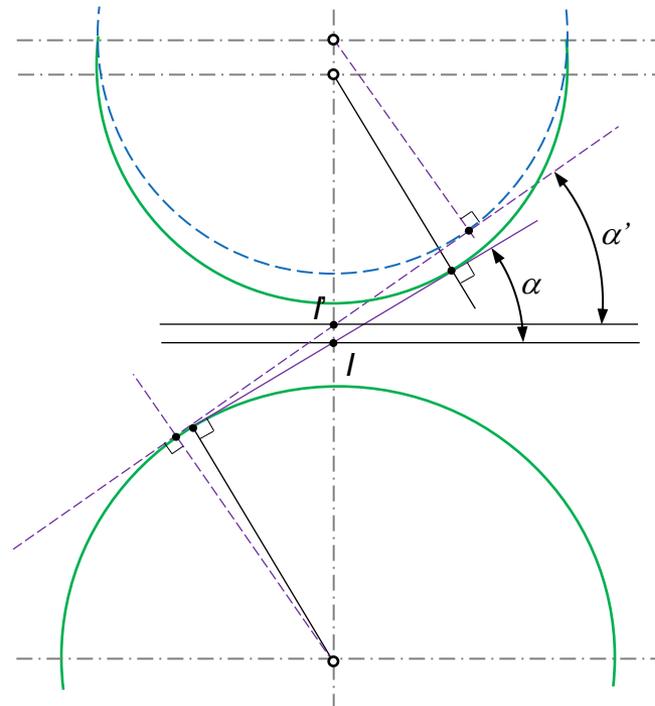


Fig. 72 Efeito da variação do entre-eixo no ângulo de pressão

Vantagens do Perfil em Evolvente

O dentado em evolvente é o **mais utilizado em engrenagens** de máquinas e mecanismos, dado o leque de vantagens que apresenta. De seguida resumem-se algumas das características que tornam atrativos os dentados em evolvente de círculo

- É **possível o engrenamento** entre rodas com dentes com perfil em evolvente, mesmo quando **existe variação do entre-eixo**, desgaste dos apoios ou deformação dos elementos de transmissão. Esta circunstância altera, todavia, o valor do ângulo de pressão, tal como se ilustra na figura 72
- Os perfis dos dentes em evolvente de círculo apresentam uma **curvatura com um sentido único**, tornando fácil a maquinagem dos dentes pelos processos mais vulgares de talhe
- Os dentes com perfil em evolvente de círculo proporcionam **maior área na raiz do dente**, tornando-os mais resistentes e com **maior capacidade de carga** quando comparados com os dentados cicloidais com características idênticas (*e.g.* mesmo módulo)
- A linha de ação ou de linha de engrenamento é um segmento de reta que forma com a tangente às circunferências primitivas um **ângulo de pressão que é constante** durante a transmissão do movimento
- Uma roda dentada com perfis dos dentes em evolvente de círculo pode funcionar com qualquer outra roda, desde de que ambas apresentem o mesmo módulo.

Forças no Engrenamento

A **força transmitida** entre os dentes apresenta sempre a **direção da linha de ação**. Esta força está representada pela letra N na figura 73, a qual se pode relacionar com a **força tangencial**, responsável pela **transmissão de potência**, do seguinte modo

$$F_t = N \cos \alpha$$

O momento (ou binário) a ser transmitido pela engrenagem é dado pela seguinte expressão

$$M_1 = F_t r_1$$

em que r_1 é o raio primitivo da roda motora.

Para uma engrenagem que transmite um momento constante, a **potência transmitida** será também constante e, por isso, a **força normal de contacto nos dentes é constante**, uma vez que

$$P = M_1 \omega_1$$

Combinando as equações anteriores resulta que

$$N = \frac{P}{\omega_1 r_1 \cos \alpha}$$

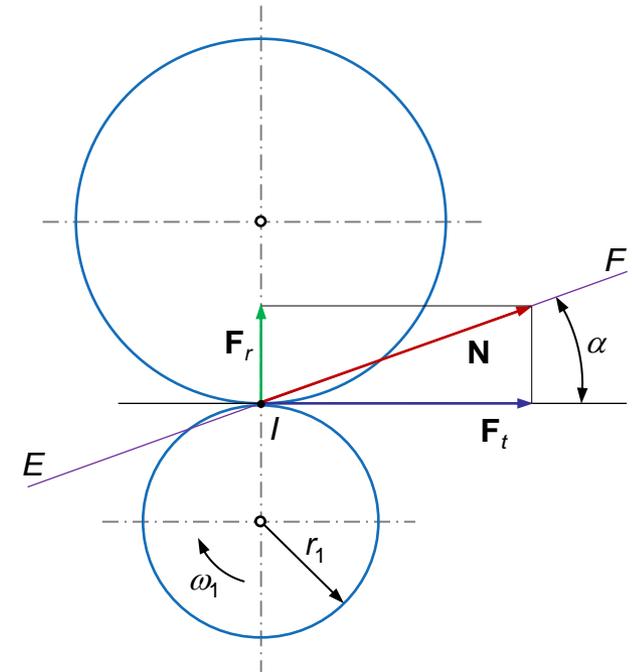


Fig. 73 Forças de engrenamento

Velocidade do Ponto Primitivo

As rodas 1 e 2, representadas parcialmente na figura 74, rodam com **velocidades angulares** ω_1 e ω_2 , respetivamente, então pode definir-se **relação de transmissão** do seguinte modo

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

em que nesta definição se admite que a roda 1 é a motora, sendo a roda 2 movida ou mandada.

A **velocidade linear do ponto primitivo** pode ser calculada pela roda 1 ou pela roda 2, resultando a mesma quantidade. Assim, pode escrever-se que

$$v_1 = v_2 \Rightarrow \omega_1 \overline{O_{01}I} = \omega_2 \overline{O_{02}I}$$

Esta **equação pode ser reescrita** como

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{O_{02}I}}{\overline{O_{01}I}}$$

A relação de velocidades angulares é inversamente proporcional à relação dos segmentos que definem as distâncias do ponto primitivo aos centros de rotação das rodas.

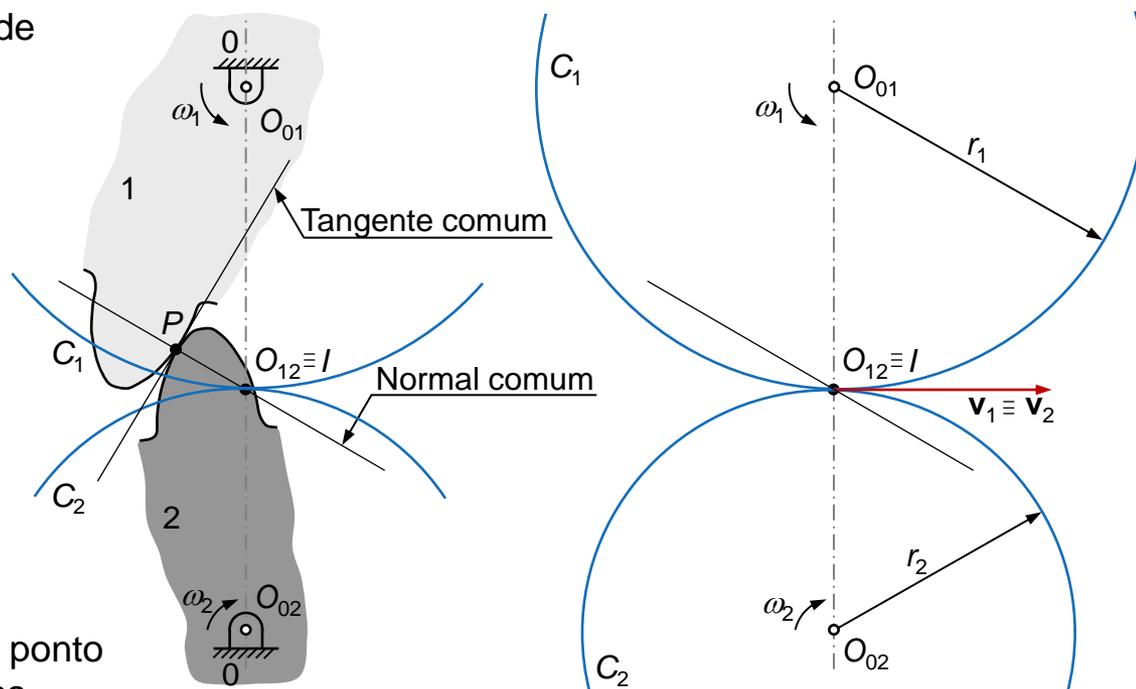


Fig. 74 Velocidade do ponto primitivo

Velocidade do Ponto de Contacto

O facto de o **ponto primitivo ser fixo** e de haver **constância na relação de velocidades angulares** das rodas, traduz o **princípio fundamental do engrenamento**. Às curvas dos perfis dos dentes que obedecem a este princípio chamam-se **curvas conjugadas**.

A **lei fundamental da ação conjugada entre dentes** de uma engrenagem pode enunciar-se do seguinte modo, no engrenamento de duas rodas dentadas, **a normal comum às superfícies dos dentes no ponto de contacto tem que interseccionar a linha de centros sempre no ponto primitivo** (figura 74).

Por conseguinte, **é constante a relação de velocidades angulares das rodas motora e movida**, uma vez que não se admite escorregamento. A constância de relação de transmissão é, na verdade, um objetivo associado ao funcionamento das engrenagens.

Atendendo a que o **ponto de contacto pertence aos corpos 1 e 2**, a velocidade periférica deste ponto pode ser calculada do seguinte modo

$$v_1 = \omega_1 \overline{O_{01}P}$$

$$v_2 = \omega_2 \overline{O_{02}P}$$

As **projeções destas velocidades**, na direção normal no ponto de contacto, têm de ter a **mesma intensidade**, se assim não fosse, os dentes penetrariam um no outro ou afastar-se-iam um do outro.

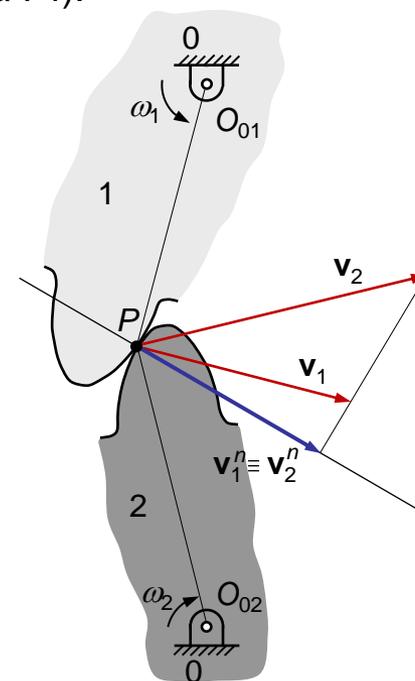


Fig. 75 Velocidades do ponto de contacto



8. Revisão de Conhecimentos

Perguntas de Revisão

Apresenta-se, de seguida, um **conjunto diversificado de questões** relativas aos principais aspetos relacionados com a temática das engrenagens:

- Apresente uma definição de engrenagem.
- Liste cinco exemplos de aplicações das engrenagens.
- Apresente duas vantagens das engrenagens de dentado helicoidal face ao dentado reto.
- Represente, em perspetiva, um setor dentado de uma roda cilíndrica de dentes retos.
- Defina módulo de uma roda dentada.
- Discuta a importância do módulo no funcionamento de uma engrenagem.
- Diga quais são os principais parâmetros que definem e caracterizam uma roda dentada.
- Para o mesmo diâmetro, explique a influência do módulo na quantidade e dimensão dos dentes.
- Apresente três características do dentado em evolvente de círculo.
- Faça a representação, e respetiva legenda, da linha de engrenamento de uma engrenagem cilíndrica exterior de dentes retos.
- Estabeleça a relação matemática entre o diâmetro primitivo e o diâmetro de base.
- Descreva o princípio fundamental do engrenamento.
- Defina relação de transmissão de uma engrenagem.
- Explique o conceito de ângulo de pressão.
- Diga o que entende por perfis conjugados.



Bibliografia Recomendada

Apresentam-se em seguida as [principais fontes bibliográficas](#) utilizadas na preparação deste documento:

- Branco, C.M., Ferreira, J.M., da Costa, J.D., Ribeiro, A.S. (2009) *Projecto de Órgãos de Máquinas*. 2ª Edição, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Budynas, R.G., Nisbett, J.K. (2011) *Elementos de Máquinas de Shigley*. 8ª edição McGraw-Hill, Brasil.
- Flores, P., Gomes, J. (2014) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens. 1. Aspectos Gerais sobre Engrenagens*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 41p.
- Flores, P., Gomes, J. (2015) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens: Teoria e Exercícios de Aplicação*. Publindústria, Porto.
- Flores, P., Gomes, J., Dourado, N., Marques, F. (2017) *Órgãos de Máquinas II: Exercícios de Aplicação*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 26p.
- Henriot, G. (1979) *Traité Théorique et Pratique des Engrenages*. Editora Dunod.
- Juvinall, R.C., Marshek, K.M. (2006) *Fundamentals of Machine Component Design*. John Wiley and Sons, New York.
- Wilson, C.E., Sadler, J.P. (1993) *Kinematics and Dynamics of Machinery*. 2nd Edition, Harper Collins College Publishers, New York.