



Universidade do Minho  
Escola de Engenharia

Melhoramento de Modelos Dinâmicos  
de Elementos Finitos Identificados Experimentalmente

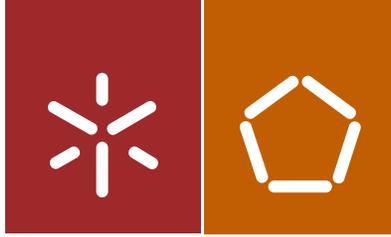
Marco Daniel Malheiro Dourado

UMinho | 2016

Marco Daniel Malheiro Dourado

Melhoramento de Modelos Dinâmicos  
de Elementos Finitos Identificados  
Experimentalmente

junho de 2016



Universidade do Minho  
Escola de Engenharia

Marco Daniel Malheiro Dourado

Melhoramento de Modelos Dinâmicos  
de Elementos Finitos Identificados  
Experimentalmente

Tese de Doutoramento  
Programa Doutoral em Engenharia Mecânica

Trabalho efectuado sob a orientação do  
**Professor Doutor José Filipe Bizarro de Meireles**

**Nome**

Marco Daniel Malheiro Dourado

**Título da tese**

Melhoramento de Modelos Dinâmicos de Elementos Finitos Identificados Experimentalmente

**Orientadores**

Professor Doutor José Filipe Bizarro de Meireles

**Ano de conclusão**

2016

**Designação do Doutoramento:**

Programa Doutoral em Engenharia Mecânica

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTEGRAL DESTA TESE APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE;

Universidade do Minho, 30 de junho de 2016

Assinatura:

---

## DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração da presente tese. Confirmo que em todo o trabalho conducente à sua elaboração não recorri à prática de plágio ou a qualquer forma de falsificação de resultados.

Mais declaro que tomei conhecimento integral do Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

Universidade do Minho, 30 de junho de 2016

Nome completo: Marco Daniel Malheiro Dourado

Assinatura: \_\_\_\_\_



## RESUMO

O presente trabalho tem como objectivo principal obter um modelo de elementos finitos simplificado e um modelo analítico para representação de juntas rebitadas em análise dinâmica de estruturas usando uma ferramenta de melhoramento de modelos de elementos finitos.

Foram realizados ensaios experimentais de análise modal em modelos semelhantes aos modelos de elementos finitos desenvolvidos. Foram extraídas destes ensaios as respostas modais que foram utilizadas como referência para possibilitar a comparação com os modelos de elementos finitos desenvolvidos.

Para responder ao objetivo deste trabalho, procedeu-se ao melhoramento de um programa de melhoramento de modelos de elementos finitos implementado em MatLab®, já desenvolvido. As evoluções implementadas passaram por dotar o programa com um otimizador de procura global baseado nos métodos estocásticos.

É também apresentado um método sequencial de duas etapas para modificação estrutural e melhoramento de modelos de elementos finitos, baseado numa função de otimização multi-objetivo. Este método apresenta novidades no sentido de que é possível otimizar os modelos com base na geometria, comportamento estático e comportamento dinâmico dos modelos. O processo é desenvolvido e implementado em MatLab®, e uma função multi-objetivo é usada para avaliar a proximidade entre o modelo a melhorar e o modelo de referência após cada iteração do processo.

É proposta uma nova abordagem para representação simplificada de juntas rebitadas em elementos finitos em análise dinâmica de estruturas. A nova abordagem compreende a representação do rebite em elementos finitos com recurso a elementos mola-amortecedor. São obtidos valores de constante de rigidez para as molas que representam o rebite em vários modelos de juntas rebitadas, usando as ferramentas de melhoramento de modelos de elementos finitos desenvolvidas. Com base nesses valores, é efetuado o desenvolvimento matemático de uma equação que permite definir por meio analítico o valor da constante de rigidez das molas que representam o rebite em elementos finitos.



## ABSTRACT

This study aims to get both a simplified finite element model and an analytical model to represent riveted lap joints in dynamic analysis of structures using a finite element model updating tool.

Experimental modal analysis tests were carried out on models similar to the developed finite element models. Were extracted from these tests the modal responses of the experimental models, which were used as reference to compare with the finite element models.

To accomplish the objectives of this work, the improvement of a finite element model updating program, previously developed in MatLab<sup>®</sup>, was carried out. The changes comprise the integration of a global optimizer, based on stochastic methods, instead of the local optimizer previously implemented.

A sequential two-step method for structural modification and updating of finite element models, based on a multi-objective function optimization, is also presented. This method presents novelty in the sense that is possible to optimize models based on geometry, static behavior and dynamic behavior of the models. The process is developed and implemented in MatLab<sup>®</sup>, and a multi-objective function is used to evaluate the similarity between the model to improve and the reference model at each iteration of the process.

Finally, a new approach to represent simplified finite element models of riveted lap joints for dynamic structural analysis, is proposed. The new approach includes the rivet representation in finite element models using the spring-damper elements. Stiffness constant values of the springs are obtained using the developed finite element model updating tool. Based on these values, a mathematical development is done in order to write an equation to compute the stiffness constant value of the springs.



# **PALAVRAS-CHAVE**

Análise de Elementos Finitos

Juntas Rebitadas

Constante de Rigidez de Juntas Rebitadas

Análise de Vibrações

Análise Modal

Melhoramento de Modelos de Elementos Finitos

Modificação Estrutural

Otimização

Função Multi-Objetivo



## **KEYWORDS**

Finite Element Analysis

Riveted Lap Joints

Stiffness Constant of Riveted Lap Joints

Vibration Analysis

Modal Analysis

Finite Element Model Updating

Structural Modification

Optimization

Multi-Objective Function



## **AGRADECIMENTOS**

A concretização deste trabalho não seria possível sem a contribuição de algumas pessoas que me acompanharam e incentivaram ao longo deste percurso. Por isso queria aqui deixar algumas palavras de apreço e os meus sinceros agradecimentos:

Ao Professor Doutor José Meireles, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade do Minho, orientador do trabalho, pela oportunidade proporcionada, pelo seu constante apoio, orientação, conhecimentos transmitidos e encorajamento;

Ao Professor Doutor António Marques Pinho, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade do Minho e responsável pelo Laboratório de Ensaio de Materiais, pelo apoio material e conselhos transmitidos;

Ao Professor Doutor José Luís da Silva Ramos, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Civil da Universidade do Minho, pelos conselhos e diálogos proporcionados;

À Professora Ana Maria Alves Coutinho Rocha, Professora Assistente do Departamento de Produção e Sistema, pela sua orientação nos temas relacionados com a otimização;

À Professora Doutora Irene Brito, Professora Auxiliar do Centro de Matemática, Departamento de Matemática e Aplicações da Universidade do Minho, pela ajuda no desenvolvimento matemático;

Ao Professor Doutor Nuno Peixinho, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade do Minho e diretor do Programa Doutoral em Engenharia Mecânica;

Ao Sr. Fernando Araújo e ao Sr. Miguel Abreu, respetivamente técnicos do Laboratório de Ensaio de Materiais e do Laboratório de Metalurgia da Universidade do Minho, pela pelo esforço voluntarioso manifestado na realização dos ensaios experimentais;

Finalmente, gostaria de agradecer à minha família pelo seu apoio constante e encorajamento ao longo deste trabalho.



# ÍNDICE

RESUMO .....	i
ABSTRACT .....	iii
PALAVRAS-CHAVE .....	v
KEYWORDS .....	vii
AGRADECIMENTOS .....	ix
ÍNDICE.....	xi
NOMENCLATURA .....	xv
Matrizes e Vetores .....	xv
Escalares .....	xv
Subscritos.....	xviii
Sobrescritos.....	xix
Operadores .....	xix
Abreviaturas.....	xix
CAPÍTULO 1 – CONTEXTO, MOTIVAÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	1
1.1 – Contexto e Motivação.....	1
1.2 – Revisão Bibliográfica.....	2
1.2.1 – Modelação de Juntas em Elementos Finitos .....	4
1.2.2 – O Método de Melhoramento de Modelos de Elementos Finitos .....	9
1.2.3 – Aplicação das Técnicas de Melhoramento de modelos de Elementos Finitos a Juntas de Ligação.....	18
1.2.4 – Algumas Limitações das Técnicas de Melhoramento de Modelos de Elementos Finitos .....	19
1.3 – Objetivos e Estruturação da Tese.....	20
CAPÍTULO 2 – CONCEITOS TEÓRICOS FUNDAMENTAIS .....	23
2.1 – Análise Estrutural de Sistemas Mecânicos .....	23
2.2 – Dinâmica de Estruturas.....	26
2.2.1 – Vibrações Livres de Sistemas com um GDL.....	27
2.2.2 – Vibrações Livres com Amortecimento Viscoso .....	30
2.2.3 – Resposta ao Carregamento Forçado de Amplitude Constante sem Amortecimento.....	34
2.2.4 – Resposta ao Carregamento Forçado de Amplitude Constante com Amortecimento ....	37
2.2.5 – Resposta ao Carregamento Forçado não Harmónico com Amortecimento Viscoso.....	42
2.2.6 – Resposta ao Carregamento Aleatório.....	46

2.2.7 – Função de Resposta em Frequência.....	..48
2.2.8 – Método da Largura de Banda de Média Potência da Amplitude do Pico.....	..51
2.2.9 – Sistema Dinâmico com Múltiplos GDL's.....	..51
2.3 – Análise Modal Experimental .....	..55
2.4 – Identificação Modal .....	..58
2.5 – Otimização e Melhoramento de Modelos de Elementos Finitos .....	..60
2.5.1 – Comandos e Algoritmos de Otimização usados no Melhoramento de Modelos de Elementos Finitos.....	..62
2.6 – Tipos de Elementos Finitos.....	..69
2.7 – Especificação de Rebites e Juntas Rebitadas .....	..73
CAPÍTULO 3 – APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO GLOBAL PARA MELHORAMENTO DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS .....	..77
3.1 – Introdução .....	..77
3.2 – Formulação da Função objetivo.....	..78
3.3 – Descrição do Processo de Melhoramento de Modelos de Elementos Finitos .....	..80
3.3.1 – Descrição do Algoritmo.....	..80
3.3.2 – Fluxograma do Processo .....	..81
3.4 – Descrição dos Modelos .....	..83
3.4.1 – Modelo de Referência.....	..83
3.4.2 – Modelo a Melhorar .....	..84
3.5 – Análises Numéricas .....	..86
3.5.1 – Resultados Obtidos com o <i>solver</i> Local.....	..87
3.5.2 – Resultados Obtidos com os <i>solvers</i> Globais .....	..92
3.6 – Conclusões .....	..99
CAPÍTULO 4 – MÉTODO SEQUENCIAL DE DUAS ETAPAS PARA MODIFICAÇÃO ESTRUTURAL E <i>UPDATING</i> .....	101
4.1 – Introdução .....	102
4.2 – Formulação da Função Multi-Objetivo.....	104
4.3 – Descrição do Processo Sequencial de Duas Etapas .....	106
4.3.1 – Descrição do Algoritmo.....	107
4.3.2 – Fluxograma do Processo Sequencial de Duas Etapas.....	108
4.4 – Descrição dos Modelos .....	111
4.4.1 – Modelo 1 e 2 .....	111
4.4.2 – Modelo 3 .....	117

4.5 – Resultados Obtidos .....	122
4.5.1 – Resultados Obtidos para o Modelo 1 .....	123
4.5.1.1 – Resultados da Primeira Etapa para o Modelo 1 .....	123
4.5.1.2 – Resultados da Segunda Etapa para o Modelo 1 .....	125
4.5.2 – Resultados Obtidos para o Modelo 2 .....	126
4.5.2.1 – Resultados da Primeira Etapa para o Modelo 2 .....	126
4.5.2.2 – Resultados da Segunda Etapa para o Modelo 2 .....	128
4.5.3 – Resultados Obtidos para o Modelo 3 .....	129
4.5.3.1 – Resultados da Primeira Etapa para o Modelo 3 .....	129
4.5.3.2 – Resultados da Segunda Etapa para o Modelo 3 .....	131
4.6 – Conclusões .....	132
<b>CAPÍTULO 5 – OBTENÇÃO DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS SIMPLIFICADOS PARA REPRESENTAÇÃO DE JUNTAS REBITADAS EM DINÂMICA DE ESTRUTURAS .....</b>	<b>133</b>
5.1 – Introdução .....	133
5.2 – Procedimento Experimental .....	134
5.3 – Modelos em Elementos Finitos para Obtenção da Constante de Rigidez da Mola .....	138
5.3.1 – Análise de Sensibilidade aos Modelos .....	138
5.3.2 – Modelação da Junta Rebitada .....	142
5.4 – Resultados Obtidos por <i>Updating</i> da Constante de Rigidez da Mola .....	145
5.4.1 – Modelos com Rebites do Tipo 1 .....	146
5.4.2 – Modelos com Rebites do Tipo 2 .....	150
5.4.3 – Modelos com Rebites do Tipo 3 .....	153
5.5 – Conclusões .....	155
<b>CAPÍTULO 6 – UM MODELO ANALÍTICO PARA REPRESENTAR MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS SIMPLIFICADOS DE JUNTAS REBITADAS EM DINÂMICA DE ESTRUTURAS .....</b>	<b>157</b>
6.1 – Introdução .....	157
6.2 – Procedimento Experimental .....	159
6.2.1 – Modelos de Juntas Rebitadas (Fase 1) .....	159
6.2.2 – Modelos de Juntas Rebitadas (Fase 2) .....	162
6.3 – Desenvolvimento Analítico .....	164
6.4 – Aplicação da Nova Abordagem a Vários Casos de Estudo .....	175

6.4.1 – Modelação em Elementos Finitos dos Casos de Estudo para Validação.....	175
6.5 – Resultados Obtidos .....	177
6.6 – Conclusões .....	182
CAPÍTULO 7 – CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....	185
7.1 – Conclusões .....	185
7.2 – Sugestões para Trabalhos Futuros .....	188
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	189
PUBLICAÇÕES .....	205
ANEXO I – CARACTERÍSTICAS DO EQUIPAMENTO SERVO-HIDRÁULICO INSTRON® 8874 PARA ENSAIOS DE TRAÇÃO.....	207
ANEXO II – CARACTERÍSTICAS DO EXTENSÓMETRO UNIAXIAL INSTRON® 2620-601 .....	209
ANEXO III – CARACTERÍSTICAS DO EXTENSÓMETRO HBM® DE ROSETA TIPO T .....	211
ANEXO IV – CARACTERÍSTICAS DOS REBITES (NORMA DIN 7337).....	213
ANEXO V – ENSAIO EXPERIMENTAL DE TRAÇÃO.....	215
ANEXO VI – CARACTERÍSTICAS DO EQUIPAMENTO LMS SCADAS® MOBILE SCM05 .....	219
ANEXO VII – CARACTERÍSTICAS DO MARTELO DE IMPACTO PCB® 086C01 ....	221
ANEXO VIII – CARACTERÍSTICAS DO VIBRÓMETRO POLYTEC® OFV-5000 ...	223
ANEXO IX – CARACTERÍSTICAS DO SENSOR DE FIBRA ÓTICA POLYTEC® OFV- 552.....	225
ANEXO X – CARACTERÍSTICAS DO SHAKER LDS® V203 E AMPLIFICADOR PA25E .....	227
ANEXO XI – CARACTERÍSTICAS DO ACELERÓMETRO TRIAXIAL PCB® 356A14	229
ANEXO XII – CARACTERÍSTICAS DO SENSOR DE FORÇA PCB® 221B01 .....	231

# NOMENCLATURA

## Matrizes e Vetores

Símbolo	Descrição
$\Lambda$	Matriz diagonal que contém os valores próprios
$\Phi$	Matriz $n \times n$ que contém nas colunas os vetores próprios
$\varphi$	Vetor próprio
$\hat{\varphi}$	Vetor próprio numérico estimado
$O$	Matriz $n \times n$ nula
$C$	Matriz de amortecimento
$H$	Matriz simétrica definida Hessiana
$K$	Matriz de rigidez
$M$	Matriz de massa
$I$	Matriz Identidade
$x$	Vetor deslocamento
$\dot{x}$	Vetor velocidade
$\ddot{x}$	Vetor aceleração
$f$	Vetor força da excitação externa
$\Phi$	Vetor próprio
$w$	Vetor da solução geral
$u, v$	Vetor que contém parâmetros a otimizar
$\hat{u}, \hat{v}$	Vetor que contém parâmetros otimizados

## Escalares

Símbolo	Descrição
$F$	Força a atuar em um corpo de massa $m$
$F_c$	Força do amortecedor
$k$	Constante elástica ou rigidez
$k_{eq}$	Constante elástica ou rigidez equivalente
$k_{eq_m}$	Constante elástica ou rigidez equivalente do material afetado
$k_j$	Constante de rigidez global da junta obtida por <i>updating</i>
$k_{r_u}$	Constante de rigidez do $r_u$ – <i>ésimo</i> rebite obtida por <i>updating</i>
$k_{e_u}$	Constante de rigidez de cada elemento $e_u$ do rebite obtida por <i>updating</i>
$\bar{k}_{r_u}$	Constante de rigidez média para cada rebite na junta obtida por <i>updating</i>
$\bar{k}_{e_u}$	Constante de rigidez média para cada elemento obtida por <i>updating</i>
$k_j$	Constante de rigidez global teórica da junta
$k_r$	Constante de rigidez teórica de cada rebite
$k_e$	Constante de rigidez teórica de cada elemento mola-amortecedor
$c$	Coefficiente de amortecimento
$c_{eq}$	Coefficiente de amortecimento equivalente
$h$	Coefficiente de amortecimento histerético

$\lambda$	Valor próprio
$\hat{\lambda}$	Valor próprio numérico estimado
$\Delta l$	Alongamento
$\epsilon_x$	Deformação na direção transversal à aplicação da carga
$\epsilon_y$	Deformação na direção paralela à aplicação da carga
$E$	Módulo de Young ou Módulo de Elasticidade
$A$	Área da secção de um corpo
$A_a$	Área de material afetado por tensões e deformações
$A_{a_e}$	Área de material afetado por tensões e deformações extrapolada
$L_0$	Comprimento inicial
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\nu_{xy}$	Coefficiente de Poisson que representa a relação entre a deformação na direção transversal “x” e a deformação na direção longitudinal “y”
$\nu_{yx}$	Coefficiente de Poisson que representa a relação entre a deformação na direção longitudinal “y” e a deformação na direção transversal “x”
$I$	Momento de inércia de área
$I_x$	Momento de inércia de área na direção “x”
$I_y$	Momento de inércia de área na direção “y”
$I_{x_{CM}}$	Momento de inércia de área na direção “x” relativamente ao Centro de Massa
$I_{y_{CM}}$	Momento de inércia de área na direção “y” relativamente ao Centro de Massa
$I_p$	Momento de inércia polar
$d_1$	Distância na direção “x” a um eixo que passa na origem “O”
$d_2$	Distância na direção “y” a um eixo que passa na origem “O”
$I_{x,y}$	Produto de inércia entre os eixos “x” e “y”
$\rho$	Massa específica
$m$	Massa do corpo
$f_n$	Frequência natural
$\hat{f}$	Frequência natural numérica estimada
$T$	Período
$x(t)$	Resposta geral
$\dot{x}(t)$	Velocidade em função do tempo
$\ddot{x}(t)$	Aceleração em função do tempo
$f(t)$	Força perturbadora externa a variar no tempo
$X$	Amplitude do Movimento
$\omega_n$	Frequência natural circular do sistema
$\omega$	Frequência de excitação externa
$\psi$	Ângulo de fase
$t$	Tempo / Espessura
$x_p(t)$	Solução particular
$x_c(t)$	Solução complementar
$C_1$ e $C_2$	Constantes de integração determinadas pelas condições iniciais de movimento
$\xi$	Razão de Amortecimento
$\eta$	Fator de perda

$Q$	Fator de Amplificação Dinâmica
$r$	Define uma razão
$a_0, a_j$ e $b_j$	Coefficientes de Fourier
$n$	Número de Graus de Liberdade
$N$	Número de ondas sinusoidais
$\omega_{m\acute{a}x}$	Valor máximo de frequência definido
$\Delta\omega$	Resolução do espectro de frequências
$\alpha(\omega)$	Função de recetância
$p_1$ e $p_2$	Pontos de média potência
$X_p$	Amplitude de meia potência
$X_{m\acute{a}x}$	Amplitude máxima
$B_i$	Constante complexa associada a um modo $i$
$R_0$	Raio do círculo
$S$	Menor espessura das placas envolvidas na rebitagem
$d_r$	Diâmetro do corpo do rebite
$d_{a_r}$	Diâmetro do corpo do rebite deformado após rebitagem
$D$	Diâmetro da cabeça do rebite
$d_f$	Diâmetro do furo
$L_c$	Comprimento útil do rebite
$L_t$	Espessura total dos componentes a unir
$p_1$	Distância entre centros de dois rebites
$p_2$	Distância entre duas filas de rebites
$e_1$	Distância entre o centro do rebite à extremidade frontal mais próxima da peça a unir
$e_2$	Distância entre o centro do rebite à extremidade lateral mais próxima da peça a unir
$f(\mathbf{v})$	Função objetivo que depende do vetor $\mathbf{v}$
$f_s$	Função que quantifica a diferença entre o modelo de elementos finitos a melhorar na primeira etapa do processo de melhoramento
$f_d$	Função que quantifica a diferença entre o modelo de elementos finitos a melhorar na segunda etapa do processo de melhoramento
$f_{\phi C}$	Função que quantifica a diferença entre os pares de modos de vibração correlacionadas do modelo de referência e do modelo numérico
$f_{\phi U}$	Função que quantifica a diferença entre os pares de modos de vibração não correlacionadas do modelo de referência e do modelo numérico
$f_\lambda$	Função que quantifica a diferença entre as frequências do modelo numérico e do modelo de referência
$f_V$	Função que quantifica a diferença entre o volume do modelo numérico e do modelo de referência
$f_C$	Função que quantifica a diferença entre o centro de massa do modelo numérico e do modelo de referência
$f_I$	Função que quantifica a diferença entre os momentos e produtos de inércia do modelo numérico e do modelo de referência
$N_C$	Número de pares de modos de vibração correlacionados da diagonal da matriz MAC
$N_U$	Número de pares de modos de vibração não correlacionados fora da diagonal da matriz MAC
$w_a$	Largura do elemento
$h_b$	Altura do elemento
$F_{mo}$	Função Multi-Ojetivo

$R$	Valor de referência
$\hat{N}$	Valor estimado do modelo numérico
$\hat{V}$	Volume do modelo numérico
$C$	Centro de massa do modelo de referência
$\hat{C}$	Centro de massa do modelo numérico
$f_M$	Função que quantifica a diferença entre a massa de referência e a massa numérica estimada
$M$	Massa do modelo de referência
$\hat{M}$	Massa do modelo numérico
$f_{DY}$	Função que quantifica a diferença entre o deslocamento máximo de referência e o deslocamento máximo numérico na direção “y”
$DY$	Deslocamento máximo do modelo de referência na direção “y”
$\hat{DY}$	Deslocamento máximo do modelo numérico na direção “y”
$f_{DZ+}$	Função que quantifica a diferença entre o deslocamento máximo de referência e o deslocamento máximo numérico estimado no sentido positivo da direção “z”
$DZ+$	Deslocamento máximo do modelo de referência na direção “z” e sentido positivo
$\hat{DZ}+q$	Deslocamento máximo do modelo numérico na direção “z” e sentido positivo
$f_{DZ-}$	Função que quantifica a diferença entre o deslocamento máximo de referência e o deslocamento máximo numérico estimado no sentido negativo da direção “z”
$DZ-$	Deslocamento máximo do modelo de referência na direção “z” e sentido negativo
$\hat{DZ}-$	Deslocamento máximo do modelo numérico na direção “z” e sentido negativo
$f_\gamma$	Função que quantifica a diferença entre a rotação máxima de referência e a rotação máxima numérica estimada no plano “yz”
$D\gamma$	Rotação máxima de referência no plano “yz”
$\hat{D}\gamma_q$	Rotação máxima numérica no plano “yz”
$l$	Comprimento da junta
$R_{ff}$	Função de Auto-Correlação
$R_{fx}$	Função de Correlação Cruzada
$S_{fx}$	Função de Correlação de Espetro Cruzado

## Subscritos

Símbolo	Descrição
0	Condições iniciais
$k, i, j$ e $f$	Relativo a um número
$q$	Relativo à iteração
$p$	Número de parâmetros a otimizar / Número de peças na junta rebitada
$LB$	Limite inferior
$UB$	Limite superior
$h$	Iteração para a qual foi encontrado o valor ótimo da função objetivo
$x$	Direção “x”
$y$	Direção “y”
$z$	Direção “z”
$xy$	Plano “xy”
$xz$	Plano “xz”
$yz$	Plano “yz”
$k$	Relativo à numeração de dimensões dos sólidos

$m$	Relativo à numeração de eixos de direção
$n$	Relativo à numeração de planos de rotação
$n_{r_u}$	Relativo ao número de rebites na junta
$n_{e_u}$	Relativo ao número de elementos que compõe o rebite

## Sobrescritos

Símbolo	Descrição
0	Condições iniciais
$q$	Relativo à iteração
$h$	Iteração para a qual foi encontrado o valor ótimo da função objetivo
ésima(o)	Relativo a um número que está dentro de um conjunto específico

## Operadores

Símbolo	Descrição
$()^T$	Matriz ou vector transposto
$(\dot{\cdot})$	Primeira derivada em relação ao tempo
$(\ddot{\cdot})$	Segunda derivada em relação ao tempo
$(+)$	Soma
$(-)$	Subtração
$(\cdot)$	Produto escalar
$(/)$	Divisão
$(=)$	Igualdade
$\int$	Integral
$(\Sigma)$	Somatório

## Abreviaturas

Símbolo	Descrição
APDL	Ansys Parametric Design Language, código comercial de FEM desenvolvido pela ANSYS®
3D	Três Dimensões
2D	Duas Dimensões
GDL's	Graus de Liberdade
MRB	Multiple Rigid Bar
RB-RSH	Rigid Bar-Rigid Shell
SN	Solid Nugget
FRF	Frequency Response Function
SI	Swarm Intelligence
GA	Genetic Algorithm
SA	Simulated Annealing
CLM	Coupled Local Minimizers
SQP	Sequential Quadratic Programming
ISO	International Organization for Standardization
CM	Centro de Massa
SDOF	Single Degree of Freedom
MDOF	Multi Degree of Freedom
SISO	Single-Input, Single-Output
SIMO	Single Input, Multiple Output
MIMO	Multiple Input, Multiple Output
MAC	Modal Assurance Criterion
BFGS	Broydon-Fletcher-Goldfarb-Shanno

DRPM  
ASD  
PSD

Diferença Relativa Percentual Média  
Auto Spectral Density  
Power Spectral Density

---

# **CAPÍTULO 1 – CONTEXTO, MOTIVAÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Neste Capítulo definem-se o contexto e motivação deste trabalho. É efetuado também um resumo do estado atual dos temas abordados e por fim apresentam-se os objetivos e a estruturação da tese.

## **1.1 – Contexto e Motivação**

Hoje em dia, grande parte dos projetos de engenharia não dispensam os métodos numéricos como recurso para análise e testes na fase de concepção dos mais variados tipos de estruturas mecânicas. O método dos elementos finitos é o método numérico mais conhecido e usado com esse propósito. A simulação em modelos de elementos finitos baseia-se no desenvolvimento de um modelo da estrutura discretizado em elementos finitos, o qual é submetido a um tipo de análise, consoante o objetivo e a resposta que se pretende obter. No campo das estruturas mecânicas as análises mais usadas são do tipo linear estática e dinâmica.

As juntas rebitadas possuem ampla aplicação em diversos setores industriais, principalmente na indústria automóvel e aeroespacial. As estruturas envolvidas nesses setores de atividade possuem normalmente um elevado número de ligações rebitadas. Para os projetistas desse tipo de estruturas não é prático modelar detalhadamente o rebite em elementos finitos, devido a que o tempo de modelação e o custo computacional da própria análise seria demasiado elevado. A direção a tomar é no sentido de desenvolver modelos simplificados que substituam a modelação detalhada desses elementos. Contudo ao assumirmos uma simplificação, devemos ter sempre presente que esses modelos nunca, ou muito dificilmente, serão coerentes com a referência física.

O desenvolvimento de técnicas computacionais de melhoramento de modelos de elementos finitos vai ao encontro da necessidade de correlacionar um modelo simplificado com o modelo de referência. Por isso, elas funcionam geralmente com base em sucessivas iterações de comparação entre o comportamento do modelo de referência e do modelo simplificado.

As principais premissas para aplicação desse tipo de técnicas são:

- Desenvolvimento do modelo simplificado em elementos finitos;
- Conhecimento do comportamento do modelo de referência, normalmente por via de ensaios experimentais ao modelo físico, mas também se pode tomar como modelo de referência um modelo em elementos finitos;
- Identificação dos parâmetros estruturais (físicos ou geométricos) que afetam o comportamento do modelo.

A correlação entre os dois modelos é atingida quando o comportamento entre eles for próximo dentro de uma tolerância definida. Conseqüentemente os parâmetros identificados terão o seu valor inicial alterado, mas permitem que o modelo simplificado seja, dentro das condições especificadas, representativo do modelo detalhado/referência.

Este trabalho contribui com pesquisa e aumento de conhecimento a nível do desenvolvimento de modelos de elementos finitos melhorados que possibilitam a otimização do seu comportamento estrutural em relação aos modelos iniciais no âmbito da análise estática e dinâmica de estruturas. A aplicação prática desta metodologia tem um horizonte promissor no desenvolvimento de protótipos a nível industrial.

Com o conhecimento desenvolvido neste trabalho, apresenta-se uma contribuição para o desenvolvimento de modelos de elementos finitos simplificados de juntas rebidadas em análise dinâmica de estruturas. Contribuí-se também com o aperfeiçoamento de uma técnica de melhoramento de modelos de elementos finitos, no sentido de melhor poder responder à necessidade do desenvolvimento de modelos simplificados. A nível prático, como resultado desta pesquisa e corolário das metodologias estudadas, resulta também um modelo analítico para representar modelos de juntas rebidadas aplicadas na área da dinâmica estrutural.

## **1.2 – Revisão Bibliográfica**

As juntas rebidadas constituem um dos métodos de ligação estrutural mais utilizados na indústria devido a um conjunto de propriedades que as diferenciam. A rebitagem é um processo que apresenta a vantagem de ser barato e simples, quando comparado com outros tipos de processos de união. Por outro lado tem a vantagem de poder ser usado na união de materiais que apresentam má soldabilidade, podendo

inclusive ser usado para unir dois ou mais tipos de materiais diferentes. Na indústria aeronáutica, muitos dos componentes em alumínio das aeronaves, como as asas e a fuselagem, que requerem elevada integridade estrutural ao longo da sua vida útil, são unidos por rebites. Sendo o alumínio um tipo de material que não possui vida infinita à fadiga, os furos que alojam os rebites permitem um controlo adequado da propagação das fendas nesses componentes.

O rebite é um elemento de fixação do tipo permanente, que pode ser fabricado em, alumínio, aço, cobre ou latão, sendo composto por uma espiga um corpo cilíndrico e por uma cabeça. A cabeça pode ter vários formatos, esférica, cilíndrica ou cónica, e vários diâmetros. O corpo por sua vez possui uma secção cilíndrica que pode ter vários comprimentos e vários diâmetros. O diâmetro da cabeça está relacionado com o diâmetro do corpo, sendo que para rebites de cabeça esférica o diâmetro é 1,6 vezes o diâmetro do corpo, e para rebites de cabeça cónica o diâmetro pode variar entre 1,8 a 2,4 vezes o diâmetro do corpo. O diâmetro do corpo pode variar entre 1,6 a 6 mm para os rebites de cabeça esférica, e 3 a 5 mm para os rebites de cabeça cónica. Quanto ao comprimento do corpo pode variar entre 3 a 40 mm para ambos os tipos de rebites.

A rebitagem pode ser efetuada manualmente, geralmente usando um alicate de rebites, ou pode ser efetuada mecanicamente usando uma pistola pneumática ou hidráulica. O processo de rebitagem mais comumente usado consiste em inserir a ponta do rebite no repuxador da ferramenta de rebitagem, comprimir os dois componentes a serem unidos e tracionar a ponta de modo a que o corpo do rebite seja deformado e dilatado, e assim preencher totalmente o furo.

Apesar da ampla aplicação de elementos de união a nível industrial, a modelação em elementos finitos de juntas em geral, e em particular as juntas rebitadas, nomeadamente no campo da dinâmica estrutural, não está ainda bem identificada, carecendo de algum desenvolvimento. Esse défice é ainda mais notório quando se parte em busca de modelações simplificadas desse tipo de juntas ou da utilização de técnicas de melhoramento de modelos de elementos finitos como uma ferramenta de ajuda para a modelação de juntas. Por isso, a revisão bibliográfica está dividida nos seguintes temas principais: a modelação em elementos finitos de juntas em geral, e em particular as juntas rebitadas; as técnicas de melhoramento de modelos de elementos finitos; a

aplicação dessas técnicas ao melhoramento de modelos de elementos finitos de juntas; as limitações do método de melhoramento de modelos de elementos finitos.

### **1.2.1 – Modelação de Juntas em Elementos Finitos**

O método dos elementos finitos é uma ferramenta, cujas bases que o sustentam foram lançadas há mais de um século. De fato foi em 1906 que os primeiros passos foram dados para a criação do método dos elementos finitos. Até aí o processo de análise de estruturas ou do comportamento mecânico dos sólidos era efetuado com base na resolução matemática de funções contínuas que melhor se aproximavam ao problema. Foi Gauss, que em 1795 (Sprott, 1978), desenvolveu as bases fundamentais do método dos mínimos quadrados no intuito de encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados. Para problemas de análise a estruturas simples, e com o conhecimento base acerca do comportamento dos sólidos, a evolução das tensões ou deslocamentos ao longo do corpo pode ser prevista, e com isso pode ser criada uma função que descreva esse comportamento. A dificuldade cresce quando os problemas são mais complexos e a criação de uma função apropriada para a resolução do problema desse tipo torna-se difícil, pelo simples fato de que a solução deixa de ser tão previsível.

No início do Século XX, é proposto a discretização de um modelo contínuo num modelo mais simples composto por um determinado número de barras em que os deslocamentos nos nós das barras representam o deslocamento do modelo contínuo (Cook et al., 2002). No entanto foi Courant que em 1943 formulou a base matemática dos elementos finitos tal como hoje os conhecemos, propondo a discretização de funções contínuas, como por exemplo, um problema cuja solução seja dada por uma função exponencial. Uma aproximação razoável a essa função pode ser feita por meio de vários segmentos de reta de formulação mais simples.

Foi graças à engenharia e ao aparecimento do computador que o trabalho de Courant teve grande valorização. A engenharia foi sem dúvida a área que mais contribuiu para o desenvolvimento do método dos elementos finitos. Nos anos 40, Hrennikoff (1941) propôs uma metodologia para análise de placas usando um modelo representativo composto por barras unidas entre si por nós. Em meados dos anos 50, Argyris e Kelsey (1954-1955) formulam os procedimentos para a análise matricial de estruturas. Considera-se que a primeira grande aplicação do método a nível industrial

teve lugar em 1956, quando Turner, Clough, Martin e Topp (Turner et al., 1956) utilizaram elementos finitos triangulares para modelar as asas de um avião da companhia aeronáutica Boeing. Outras contribuições importantes para o desenvolvimento do método dos elementos finitos foram os trabalhos de Clough (1960) e Zienkiewicz (1971).

Desde então e até aos dias de hoje, e em parte também devido à impressionante evolução dos computadores e das ferramentas de programação, o método dos elementos finitos tem sofrido grandes desenvolvimentos, tornando-se numa poderosa ferramenta de cálculo e resolução de problemas de engenharia, sobretudo em problemas que envolvem a simulação e análise do comportamento de estruturas. Na década de 60 e 70 começaram a aparecer alguns programas de elementos finitos comerciais, e nos dias de hoje podemos destacar alguns, como por exemplo o Ansys<sup>®</sup>, Nastran<sup>®</sup> ou o Abaqus<sup>®</sup>.

O método de elementos finitos aplicado à modelação de juntas tem sido maioritariamente usado para estudo das tensões e deformações no material ou para a prevenção do aparecimento de danos no material e consequente previsão da vida à fadiga. Gould e Mikic (1972) estudaram as áreas de contato e distribuição de tensões em juntas aparafusadas modeladas em elementos finitos. Wileman et al. (1991) analisaram a importância que a rigidez dos elementos de uma ligação aparafusada tem na segurança da estrutura quando esta é submetida a cargas estáticas e de fadiga, assim como na prevenção da separação das peças unidas. Izumi et al. (2005) investigaram os aspetos principais do mecanismo de aperto e desaperto de parafusos usando modelos de elementos finitos tridimensionais (3D). Ireman (1998) desenvolveu um modelo de elementos finitos 3D de ligações aparafusadas para determinar a distribuição de tensões não uniformes na espessura de materiais compósitos laminados em redor do furo do parafuso. Zhou et al. (2015) desenvolvem um modelo de elementos finitos 3D de para análise de dano em materiais compósitos envolvendo junta aparafusada. Kim et al. (2007) investigam uma técnica para modelar juntas aparafusadas usando quatro tipos de modelos de elementos finitos, entre os quais um modelo 3D com elementos sólidos, chegando à conclusão que esse modelo é o que fornece as respostas mais precisas em comparação com os resultados experimentais.

Um estudo experimental e análise numérica, envolvendo modelos 3D de juntas rebitadas é feito por Fung e Smart (1994). Karaoglu e Kuralay (2002) fazem o estudo da

análise de tensões no chassi de um caminhão, também com juntas rebitadas. Urban (2003) faz uma revisão bibliográfica sobre a vida à fadiga de juntas rebitadas em fuselagens metálicas. Imam et al. (2007) fazem um estudo à fadiga de conexões rebitadas em linhas de comboio usando modelos em elementos finitos a 3D detalhados. Chen et al. (2014) investigam os modos de falha de juntas rebitadas quando estas estão sujeitas a cargas de tração. Skorupa et al. (2015) estudam alguns fatores de redução da resistência à fadiga em furos para rebitar em fuselagem de aviões.

No caso de juntas soldadas alguns trabalhos recentes têm sido publicados, como por exemplo o de Liu et al. (2014) propõe uma nova abordagem em elementos finitos para estimar o efeito de tensões na vida à fadiga num componente, e Esmaeili et al. (2015) investigam os efeitos de diferentes geometrias de soldadura no comportamento à fadiga das juntas soldadas por pontos, por via experimental e simulação numérica.

Silva e Campilho (2012) desenvolvem um dos trabalhos mais importantes na análise de dano e dos modos de falha em modelos de juntas adesivas usando, entre outros métodos numéricos, o método dos elementos finitos.

O comportamento das ligações sob condições de carga estática tem sido amplamente estudado e documentado na literatura. Por outro lado, estudos que abordam o comportamento e análise modal de juntas sujeitas ao carregamento dinâmico não são, pelo menos na literatura, tão abundantes. Segundo Grimsmo (2015) foi após o ataque ao World Trade Center em 2001 que aumentou o interesse em estudar o comportamento dinâmico de estruturas em aço unidas por juntas aparafusadas, principalmente ao impacto.

Kim et al. (2007) fazem uma análise modal a fim de testar a utilização dos modelos de elementos finitos de junta aparafusada 3D desenvolvidos e comparar com os resultados de testes modais experimentais efetuados por Kwon et al. (2002). Lee et al. (2000) fazem a análise das características dinâmicas de estruturas com juntas aparafusadas 3D usando a influência dos coeficientes de rigidez. Oldfield et al. (2005), propõe um modelo de elementos finitos de junta aparafusada a 3D para estudar a influência do atrito dinâmico.

Encontram-se também alguns estudos de análise ao comportamento modal envolvendo elementos finitos em juntas adesivas. Kaya et al. (2004) estudam o efeito de vários parâmetros no comportamento dinâmico (frequências e modos de vibração) de juntas adesivas. He and Oyadiji (2001) e He (2012) estudam a influência que as

propriedades adesivas têm nas frequências naturais e modos transversais de vigas articuladas. Outros autores como Ko e Lin (1995) e Lin e Ko (1997) usam modelos de elementos finitos para preverem o comportamento às vibrações livres de placas de material compósito, unidas com adesivos. Du e Shi (2014) estudam o efeito da fadiga nas propriedades modais de juntas adesivas.

Marques et al. (2014) fazem a análise dos efeitos dinâmicos e de fadiga em uma ponte rebitada, usando para isso a simulação em elementos finitos validada por resultados experimentais. As uniões entre os componentes da ponte, no modelo de elementos finitos, são consideradas como rígidas. He et al. (2007) estudam o comportamento dinâmico de vigas unidas por rebites usando modelos de elementos finitos 3D. Vários exemplos numéricos são estudados para mostrar a influência das propriedades do material nas frequências naturais.

He et al. (2014) estudam e associam a evolução do dano na zona de fusão e na zona térmica afetada em juntas soldadas, ao valor das frequências naturais dos modelos. Os autores fazem primeiro uma avaliação experimental e comparam depois com modelos numéricos. Shang et al. (2003) analisam a relação entre o dano por fadiga e o valor das frequências naturais de juntas soldadas por pontos. O mesmo autor (Shang, 2009) faz um estudo da evolução do dano à junta soldada por pontos em modelos de elementos finitos 3D, e faz uma associação dessa evolução com a resposta em frequência dos modelos estudados. Wang e Lim (2001) usam modelos experimentais e modelos de elementos finitos para simular as funções de resposta em frequência (FRF's) de juntas soldadas por pontos. Pal e Cronin (1995) desenvolvem e estudam vários modelos de vigas com junta soldada por pontos com vários espaçamentos. Os autores avaliam a influência do espaçamento entre os pontos de soldadura no valor das frequências naturais e modos de vibração. Os resultados experimentais são comparados com valores obtidos por via numérica e alguns conhecimentos de como modelar esse tipo de elementos é obtido.

Uma revisão bibliográfica bastante completa acerca de diferentes abordagens para estudar o comportamento dinâmico de estruturas em modelos de elementos finitos, é feita por Bograd et al. (2011).

Muitos outros trabalhos envolvendo este tipo de problemas estão publicados, mas os aqui referidos são um exemplo dos que se consideram ser mais relevantes. De uma forma global, os trabalhos encontrados procuram abordar o tema a nível do detalhe

que a modelação 3D envolve. Quanto maior a quantidade de informação é fornecida ao modelo de elementos finitos mais demorada se torna a própria modelação e a análise vai requerer mais tempo computacional, para além de que vai exigir mais poder por parte do computador (Kapidzic et al., 2014). Para grandes estruturas como as utilizadas em aeronaves, a quantidade de parafusos e rebites é demasiado numerosa para serem modelados com geometria 3D detalhada. No entanto, nenhuma simulação realista pode ser empreendida sem ter toda essa informação em conta. Devido a estes limites computacionais, o desenho a nível industrial é geralmente levado a cabo empregando a modelação bidimensional (2D) que consiste em representar a parte estrutural com elementos de placa ou casca, e a ligação é geralmente feita com recurso a elementos de viga ou mola (Gant et al., 2011).

Tentando utilizar métodos mais simplificados para modelação de juntas rebitadas, outros autores produziram alguns trabalhos. Xiong e Bedair (1998) e Xiong (1999) utilizam os métodos analíticos e modelos numéricos simplificados para a análise de tensões em juntas rebitadas em estruturas de aeronaves e fazem uma análise de sensibilidade em função da variação do número de elementos de mola (30, 40, 50, 100 e 200 elementos) que simulam o rebite. Seshadri e Newman (2000) e Cope e Lacy (2000) usam elementos de mola não-lineares com seis graus de liberdade para modelar o rebite em análises de tensões na junta. Alguns trabalhos que fazem a análise de dano e do comportamento à fadiga de juntas rebitadas também usam modelações simplificadas (Harris et al. 2000), (Naarayan et al., 2009), (Kumar et al, 2012), (Huang et al. 2012). Todos eles utilizam elementos de mola-amortecedor ou elementos de viga para efetuar a ligação entre os nós das placas a unir, e assim simular o rebite. Contudo a ligação rebitada não fica totalmente definida se o valor da constante de rigidez também não for definido. Nesses trabalhos, o valor da constante de rigidez da junta nunca é claramente explícito. Adrian e Daniel (2012) desenvolveram um trabalho no sentido de obterem juntas rebitadas simplificadas para análise de tensões e deslocamentos em elementos finitos. Não obstante, a junta apenas possuía um rebite e o modelo de referência era um modelo de elementos finitos detalhado construído com elementos sólidos. Os mesmos autores propõem vários modelos simplificados com recurso a elementos de viga e elementos mola-amortecedor, chegando à conclusão que os últimos produzem melhores resultados. Contudo os valores atribuídos para a constante de rigidez da mola são ajustados manualmente e de forma empírica. Chen et al. (1999) modelou os rebites com

elementos de mola que ligam os nós dos elementos das placas superior e inferior da estrutura. Cada rebite é modelado com seis graus de liberdade correspondente ao alongamento, ao corte, à dobragem e torção do rebite. A rigidez axial, à flexão e torção da mola são calculadas assumindo que o rebite se comporta como uma haste elástica simples e com um diâmetro definido. A rigidez ao corte do rebite é calculada usando a relação empírica desenvolvida por Swift (1984). No entanto as equações usadas para o cálculo da rigidez da mola não têm em consideração a influência que os rebites exercem uns sobre os outros em função do espaçamento entre eles, sendo cada rebite tratado individualmente.

Um trabalho desenvolvido por Xu e Deng (2004) descreve uma avaliação de modelos simplificados de elementos finitos para juntas soldadas por pontos. Nesse trabalho, quatro tipos de modelos simplificados para simular aquele tipo de soldadura são avaliados pelos autores: o modelo de barra rígida múltipla ou *Multiple Rigid-Bar* (MRB), o modelo de casca e barra-rígida ou *Rigid Bar-Rigid Shell* (RB-RSH), o modelo sólido tridimensional ou *Solid Nugget* (SN) e o modelo de barra rígida ou *Rigid Bar* (RB). Um dos quatro modelos estudados pelos autores tem particular interesse para aplicação e desenvolvimento deste trabalho, o modelo MRB. No modelo MRB, duas chapas são conectadas por vários elementos de barra de modo a simular a soldadura por pontos. Esse modelo tem a vantagem de apresentar vários elementos de barra, o que permite obter mais estabilidade na junta de ligação devido à quantidade de graus de liberdade que são restringidos, o que não nos modelos RB-RSH e RB. O modelo SN é composto por elementos sólidos e, portanto, mais complexo de construir e consequentemente de análise computacional mais demorada.

Conclui-se que os modelos de elementos finitos de juntas simplificadas foram maioritariamente aplicados a análise no domínio da estática, não sendo por isso factível que os modelos desenvolvidos produzam bons resultados para uma análise de avaliação do comportamento dinâmico de ligações estruturais. Para além do mais, o valor atribuído à constante de rigidez da mola, em alguns casos não fazem referência e noutra ficam dúvidas que se possa generalizar para qualquer configuração de junta.

### **1.2.2 – O Método de Melhoramento de Modelos de Elementos Finitos**

O método de melhoramento de modelos de elementos finitos é uma técnica que se baseia na alteração de parâmetros que descrevem um modelos de elementos finitos

com o fim de se alterar o comportamento estático ou dinâmico, adequando-o ao fim pretendido. É um método que pode ser utilizado segundo a vertente do *updating* e vertente da modificação estrutural.

Assim, quando se constroem modelos de elementos finitos simplificados é necessário ter em conta que estes muito possivelmente não se irão comportar da mesma forma que os modelos de referência sejam eles modelos experimentais ou modelos de elementos finitos detalhados. A fim de ser possível aproximar o modelo simplificado do modelo de referência, mantendo o seu grau de simplificação, foram desenvolvidas as técnicas de melhoramento para esses modelos simplificados que se denominam na língua anglo-saxónica por *Finite Element Model Updating*. Assim, a vertente do *updating* aplica-se quando é necessário efetuar o melhoramento a modelos de elementos finitos simplificados que se quer que sejam representativos de modelos mais detalhados e que apresentam elevado tempo de computação. O modelo simplificado é submetido a melhoramento, atuando em vários parâmetros do sistema, até que um comportamento dinâmico semelhante ao modelo de detalhado seja obtido. O modelo detalhado é por norma também denominado por modelo de referência (Mottershead e Friswell, 1993). Assim, é possível obter um modelo computacional mais leve e ao mesmo tempo representativo do modelo detalhado. É importante referir que, nestes casos, não é obrigatório que os valores para os parâmetros estimados podem não ter qualquer significado físico passível de se implementado na realidade.

A vertente da modificação estrutural aplica-se quando se pretende melhorar ou otimizar o comportamento estático ou dinâmico de uma estrutura de modo a que consiga responder aos objetivos do projeto, sejam eles económicos ou técnicos. Por exemplo alterar os valores das frequências naturais por via da modificação de alguns aspetos geométricos, de forma a impedir que entre em ressonância, evitando assim o seu colapso por os seus modos de vibração apresentarem amplitudes elevadas. A modificação estrutural atua assim nos parâmetros do modelo que sejam mais vantajosos do ponto de vista do projeto. Os novos valores estimados para os parâmetros devem ter significado físico possível de implementar, sendo esse o principal fator diferenciador das duas vertentes (Maia e Silva, 1997).

As metodologias de melhoramento de modelos de elementos finitos podem ser agrupadas em dois grandes grupos: os métodos diretos e os métodos indiretos. Os

métodos diretos atuam diretamente nas matrizes de massa e rigidez dos modelos a melhorar, os quais são ajustados tendo como referência dados experimentais. Uma desvantagem desses métodos é que eles não são capazes de assegurar valores para os parâmetros com significado físico. A manutenção do significado físico do modelo é um dos principais objectivos das técnicas de melhoramento de modelos de elementos finitos, porque uma alteração aleatória nos parâmetros poderia conduzir a um modelo que coincida com os resultados de referência, mas que esteja longe da estrutura real. Outra desvantagem está relacionada com a elevada dimensão de alguns problemas práticos, que dificulta a abordagem matemática numa perspectiva do problema ser tratado analiticamente. Contudo, alguns trabalhos foram desenvolvidos em torno dos métodos diretos. Berman (1979) descreve as alterações necessárias na matriz de massa de modo a satisfazer a relação de ortogonalidade utilizando uma norma euclidiana para obter o mínimo ponderado e o método dos multiplicadores de Lagrange. Baruch (1982) propõe um método em que a matriz de rigidez é corrigida com base nos modos experimentais, por minimização da norma que usa a matriz de massa simétrica positiva definida como a matriz de ponderação. Bergan e Nagy (1983) desenvolvem um método que utiliza os modos de vibração e frequências naturais medidos experimentalmente, para melhorar por via analítica a matriz de massa e rigidez do modelo de uma estrutura. O método permite identificar diretamente, sem recurso a iterações, um conjunto de alterações nas matrizes que fazem com que as soluções dos valores e vetores próprios sejam concordantes com as medições experimentais. Kabe (1985) apresenta um método de minimização dos coeficientes da matriz rigidez para reproduzir com elevada precisão os modos usados na identificação. Zimmerman e Widengren (1990) determinam o amortecimento residual e a matriz de rigidez do modelo a melhorar, de tal forma que este corresponda o mais aproximadamente possível ao modelo experimental.

Grande parte dos métodos de melhoramento de modelos de elementos finitos não necessita de modos de vibração completos, sendo apenas obtida resposta nos graus de liberdade com relevância para a obtenção da resposta dinâmica do modelo. Wei (1980) e mais tarde Wei (1990) propõe a correção do modelo de elementos finitos usando como referência modos de vibração incompletos, obtidos experimentalmente. Lee e Eun (2009) fazem um estudo em que propõem uma função objetivo para corrigir a matriz de massa e a matriz de rigidez simultaneamente de modo a minimizar as diferenças entre o modelo analítico e o modelo físico usando os modos de vibração e

frequências naturais obtidos a partir de testes modais incompletos. Mais tarde Lee et al (2011) continuam o estudo anterior e acrescentam à função objetivo um termo relacionado com a minimização das diferenças entre os deslocamentos em sistemas estáticos, sendo este um aspeto de diferenciação relativamente aos trabalhos em que apenas se usa a resposta da componente dinâmica como base para o melhoramento dos modelos.

Nos métodos indiretos, ou métodos iterativos, o melhoramento é efetuado atuando nos parâmetros físicos do modelo, como por exemplo as propriedades do material. A aproximação entre os dois modelos é determinada através de uma função de penalidade, que envolve os modos de vibração e as frequências naturais. Muitos dos métodos existentes provêm dos métodos que usavam uma função de penalidade com base nas séries de Taylor. Também na base dos métodos iterativos atuais está o método de Collins et al. (1974), cujas alterações ao modelo a melhorar são feitas com base nos modos de vibração e frequências naturais obtidos experimentalmente, atuando em parâmetros que caracterizam o modelo. Por outras palavras, o método baseia-se nas diferenças das frequências naturais e modos de vibração entre os dois modelos. Características modais estas, que revelam sensibilidade a pequenas mudanças nos parâmetros. Vários autores aplicaram este método que se baseia em dados modais no desenvolvimento de modelos de elementos finitos simplificados de estruturas complexas sem amortecimento. Cunha e Ambrósio (1997) aplicam técnicas de melhoramento de modelos de elementos finitos a estruturas simplificadas de carruagens de veículos ferroviários, obtendo frequências naturais e modos de vibração semelhantes aos identificados experimentalmente. Wu e Li (2004) efetuam o procedimento de melhoramento de modelos de elementos finitos a uma torre de antena para televisão. Sinha et al. (2006) validam modelos simplificados de componentes de centrais nucleares através dos parâmetros modais obtidos. Jaishi et al. (2007) e Schlune et al. (2009) recorrem ao melhoramento de modelos de elementos finitos para melhoramento de um modelo simplificado de uma ponte a operar em condições de utilização. Dourado et al. (2009) aplicam a metodologia de melhoramento de elementos finitos, desenvolvida por Meireles (2007), para melhoramento da estrutura simplificada do chassis de um veículo automóvel com milhares de graus de liberdade. Mais recentemente Jin et al. (2015) desenvolvem uma função multi-objetivo a ser usada no melhoramento de modelos de elementos finitos com base em dados modais. Estes autores validam a abordagem

proposta aplicando-a a uma ponte para testes de vibração ambiente, e a partir dos quais são obtidas as propriedades modais da mesma.

Outro tipo de método indireto é o que usa a função de resposta em frequência, ou na linguagem anglo-saxónica *Frequency Response Function* (FRF). Esse método tem a vantagem de evitar a influência dos erros da análise modal, quando aplicado em sistemas amortecidos, nos quais a identificação modal é mais difícil (Friswell e Mottershead, 1995) e (Modak, 2014). Fritzen (1986) usa os dados da FRF obtidos experimentalmente para identificar a matriz de rigidez e a matriz de amortecimento do modelo. Lin e Ewins (1994) apresentaram um método iterativo baseado na resposta da FRF, em que a diferença física entre o modelo de referência e o modelo analítico é escrita como uma função linear dos parâmetros a serem atualizados. Mais recentemente Lyu e Yuan (2009), Arora et al. (2009), Pradhan e Modak (2012), Yuan e Lyu (2014) são alguns dos autores que desenvolveram e aplicaram esse tipo de método também para sistemas com amortecimento. Gang et al. (2014) desenvolvem um método de melhoramento de modelos de elementos finitos usando a resposta incompleta da FRF.

Outras revisões acerca das técnicas de melhoramento de modelos de elementos finitos podem ser encontradas em Imregun e Visser (1991), Mottershead e Friswell (1993) e Friswell e Mottershead (1995).

Os métodos de *updating* e modificação estrutural estão fortemente dependentes das metodologias e do processo de otimização.

A otimização é hoje em dia uma ferramenta matemática muito útil em qualquer projecto de engenharia. A pretensão de fabricar produtos económicos mantendo o patamar de qualidade exigido, leva a que esta técnica seja cada vez mais aplicada no projecto dos mesmos. Para otimizar é necessário ter um bom conhecimento das variáveis ou parâmetros que definem o produto e transforma-las em termos matemáticos, ou seja, em elementos que formulam o problema de otimização. As variáveis ou parâmetros de projeto são entidades que variam na procura do ótimo, dentro de um limite definido. A escolha dos parâmetros e dos limites de procura depende em grande parte da intuição, experiência e conhecimento do projetista. O modelo matemático do problema de otimização é definido pelas funções de mérito, também conhecidas por funções objectivo, que por sua vez dependem das variáveis ou parâmetros do projecto.

Os problemas de otimização podem ir desde funções lineares simples com poucas variáveis, até aos problemas mais complexos de funções não-lineares que envolvem muitas variáveis com constrangimentos e múltiplas soluções ótimas locais (Nocedal e Wright, 1999).

Dependendo do problema em estudo, podem ser usados métodos de otimização locais ou globais para encontrar o máximo ou o mínimo de uma função. A seleção do método de otimização mais apropriado para uma aplicação particular depende das características do problema, do tipo de variáveis associadas ao projeto, se são ou não desejados todos os mínimos ou máximos locais e da disponibilidade de gradientes das funções. Na engenharia, muitos dos problemas de otimização requerem a aplicação de métodos de procura global, de modo a evitar que o otimizador fique preso no primeiro mínimo ou máximo local encontrado. Os métodos de procura global permitem que o otimizador evolua para outras áreas da região envolvente, sendo assim possível obter soluções finais mais compatíveis com os objetivos do projeto.

Existem duas classes principais de métodos de otimização global: os métodos determinísticos e os métodos estocásticos. Nos métodos determinísticos é possível prever todos os passos do processo se o ponto de partida for conhecido. Nesse tipo de métodos a resposta será sempre a mesma se o ponto de partida inicial for sempre o mesmo. Nos métodos estocásticos ou aleatórios, várias escolhas podem ser feitas com base em pontos de partida selecionados aleatoriamente no momento de execução do algoritmo. Partindo de um mesmo ponto inicial, cada execução do algoritmo seguirá o seu próprio caminho, e possivelmente levará a uma resposta final diferente, uma vez que um método aleatório não executa a mesma sequência de operações em duas execuções sucessivas. Por esse motivo, os métodos estocásticos são usualmente mais rápidos a localizar o mínimo ou máximo global que os métodos determinísticos. Na maioria destes algoritmos de otimização, sejam determinísticos ou estocásticos, é possível identificar duas fases: uma fase local e uma fase global. A exploração exaustiva no espaço de procura é delegada para a fase global, onde a função é avaliada num número de pontos de amostragem aleatórios selecionados na fase local. Na fase local, os pontos de amostragem são manipulados por meio de métodos de procura locais de modo a encontrar os candidatos a mínimos ou máximos globais (Horst e Pardalos, 1995). Uma introdução mais detalhada acerca dos métodos de otimização global determinísticos e

estocásticos, pode ser encontrada respetivamente em Horst e Tuy (1996) e Törn e Zilinskas (1989).

Existem alguns exemplos de aplicação de métodos determinísticos na área da engenharia estrutural, tal como o trabalho de Stolpe (2004), que apresenta o algoritmo *branch-and-bound* aplicado ao problema de encontrar a massa mínima de uma estrutura em treliça com restrições de deslocamento e encurvadura local. Mais tarde, usando o mesmo algoritmo, Achtziger e Stolpe (2007) desenvolvem um estudo para determinar as variáveis ótimas do projeto de uma estrutura do mesmo tipo. Entretanto Lin e Chen (2000) enfatizam que os métodos determinísticos são baseados em suposições de funções objetivo restringidas, justificando assim que os métodos determinísticos não podem ser aplicados com eficiência satisfatória a problemas que envolvem a otimização de variáveis de projeto de estruturas reais. Desta forma, os métodos estocásticos tornaram-se mais relevantes para solucionar a maior parte dos problemas de otimização global, uma vez que eles são conhecidos por se adaptarem melhor a problemas reais, e portanto serem assim muito úteis para aplicações no campo da engenharia estrutural (Lucor, 2007).

Os métodos estocásticos são inspirados em ambientes naturais compostos por populações de indivíduos ou elementos que interagem entre si ou com o ambiente, e que envolvem processos químicos, físicos e biológicos. Esses comportamentos sociais inspiraram matemáticos e programadores no desenvolvimento de algoritmos que envolvem esses fenómenos naturais aleatórios, para solucionar problemas de otimização. Esses tipos de algoritmos são também conhecidos por se basearem em métodos de múltiplas etapas ou fases, e de procura aleatória, denominando-se por *Swarm Intelligence* (Birbil, 2002). Alguns exemplos destes sistemas são as colónias de formigas e térmitas, os bandos de pássaros, os cardumes de peixes, os enxames de abelhas, entre outros. Qualquer um destes sistemas é formado com o intuito de coletivamente atingirem o mesmo objetivo, nomeadamente alimento ou proteção. Alguns exemplos de aplicação destes métodos estão no trabalho de Lin e Chen (2000), em que estudam algoritmos de otimização baseados em múltiplas etapas de procura de modo a encontrar múltiplas soluções ótimas envolvendo problemas de engenharia estrutural, e no trabalho de Eriksson e Arora (2002) para estudarem a eficiência deste tipo de algoritmos na otimização do conforto de um autocarro em circulação rodoviária.

Dentro dos métodos estocásticos existe ainda a subclasse dos métodos heurísticos que compreendem os métodos que a cada iteração exploram apenas uma vizinhança de pontos á volta de cada ponto de partida. Os métodos heurísticos são também conhecidas por serem métodos de multi-partida (*multi-start*), pois envolvem vários pontos de partida. É o caso dos métodos evolucionários, o caso da técnica baseada num arrefecimento simulado (*Simulated Annealing, SA*) e o caso da pesquisa tabu (Ferreira, 2007).

Os métodos evolucionários são baseados em algoritmos genéticos (*Genetic Algorithms, GA*), e são inspirados na evolução biológica. Assim, o conjunto de soluções possíveis para o problema identifica-se com o conjunto de indivíduos de uma população, enquanto a função objetivo representa o ambiente em que os indivíduos (soluções) podem “sobreviver”. Traduzindo a analogia, significa isto que após a escolha aleatória de um conjunto de pontos admissíveis estes vão ser testados na função objetivo. Aqueles que menores valores possuírem (no caso de um problema de minimização), serão escolhidos para prosseguirem na pesquisa pelo ótimo global. A estes é aplicada uma estratégia de recombinação com o intuito de refinar as novas soluções. Perante este conjunto de pontos admissíveis melhorado, um novo teste é feito e o ciclo repete-se até que o critério de paragem, previamente definido, seja atingido e portanto, o suposto ótimo global encontrado.

Já o arrefecimento simulado é uma técnica fundamentada por analogia com o processo térmico existente para o tratamento de materiais em metalurgia, que consiste no arrefecimento lento desses materiais, após sujeitos a um aquecimento. Por analogia, a técnica conduz a procura segundo um esquema de arrefecimento, que permite, ou não, por comparação com a solução corrente, aceitar outras soluções vizinhas geradas aleatoriamente. A temperatura, descrita pelo esquema de arrefecimento, sofre redução quando a procura efetua progressos. Assim a procura é intensificada à volta desse ponto. Uma desvantagem desta técnica está relacionada com o fato de ser multi-partida, em que é analisado um ponto de partida de cada vez, aumentando o esforço computacional.

A pesquisa tabu é um esquema iterativo que está baseado no movimento de um ponto para o ponto vizinho numa única iteração, sendo também um método de multi-partida. Durante o processo de procura são guardadas as últimas soluções visitadas numa lista denominada por tabu. Se uma solução está já gravada na lista, então

a evolução para essa solução é proibida, permitindo que se visitem soluções em zonas menos exploradas, sendo mais fácil evitar ótimos locais.

Alguns exemplos de aplicação destes tipos de algoritmos podem ser encontrados em Sonmez (2007) para obter múltiplas formas ótimas em estruturas sujeitas a constrangimentos e carregamentos quase estáticos. Também Venazi e Materazzi (2007) utilizam este tipo de algoritmos para otimizar estruturas sujeitas ao carregamento do vento. Auvinen et al. (2002) recorrem a um algoritmo genético híbrido para encontrar o peso mínimo de uma máquina florestal, assim como Keller (2011) que aplica os algoritmos evolucionários a um caso de estudo envolvendo o leme lateral de um avião.

Outros trabalhos importantes na área de melhoramento de modelos de elementos finitos em análise de estruturas, envolvendo otimizadores baseados nos métodos estocásticos, podem ser encontrados em Levin e Lieven (1998), que usam os algoritmos GA e SA de modo a encontrar o mínimo global de entre muitos mínimos locais de uma função objetivo apropriada para o melhoramento de um modelo de elementos finitos de uma estrutura de uma asa de avião. Teughels et al. (2003) usam o método *Coupled Local Minimizers* (CLM) no programa de melhoramento de modelos de elementos finitos para a identificação de danos numa viga de concreto armado. O método combina a rápida convergência dos algoritmos locais baseados em gradientes com o algoritmo global GA, resultando num algoritmo de otimização global capaz de encontrar o mínimo global da função objetivo. O mesmo método é usado por Bakir et al. (2008) para efetuarem o melhoramento de uma viga em concreto armado usando 24 variáveis de projeto. Os autores comparam o método CLM com diferentes métodos de procura local, tal como o método de *Gauss-Newton*, o algoritmo *Levenberg-Marquardt* e o algoritmo *Sequential Quadratic Programming* (SQP) existente na *toolbox* do MatLab®, e provam que o método global aplicado produz melhores resultados. Ameri et al. (2012) usam o método *Globalized Bounded Nelder-Mead* para encontrar a orientação ótima das fibras de painéis cilíndricos laminados, por maximização da frequência natural fundamental do sistema. Os resultados obtidos pelos autores com o método implementado mostram boa precisão e menor tempo de otimização quando comparam com os resultados obtidos utilizando os GA. Jensen et al. (2014) aplicam os métodos estocásticos para o *updating* de modelos de elementos finitos de edifícios. Os autores usam o método da inferência de Bayesian para atualizar e aferir a probabilidade de que a hipótese encontrada é a correta.

### 1.2.3 – Aplicação das Técnicas de Melhoramento de modelos de Elementos Finitos a Juntas de Ligação

A modelação de juntas em elementos finitos sempre acarretou algumas incertezas para os engenheiros e projetistas de estruturas. As juntas são na maioria das vezes modeladas seguindo um princípio de experiência acumulada pelos engenheiros e utilizando critérios próprios, fato este que introduz erros e incertezas no modelo, e que por sua vez originam incremento de custos na fase de desenvolvimento dos produtos. A pressão económica impõe assim a necessidade de aplicar as técnicas de melhoramento de modelos de elementos finitos ao melhoramento desses modelos. Wang e Sas (1990) discutem alguns modelos de juntas propostas para a análise dinâmica de estruturas, bem como a sua parametrização com base em resultados modais obtidos experimentalmente. Mottershead et al. (1994), Ahmadian et al. (1996) desenvolvem o conceito da modelação em elementos finitos de juntas soldadas rígidas, ou seja, com as mesmas propriedades do material base. Esse conceito está baseado na união direta entre os nós dos elementos de viga que constituem o modelo. Os autores aplicam posteriormente o *updating* para o melhoramento do modelo de elementos finitos. O conceito de ligação rígida em juntas soldadas é particularmente válido, pois devido ao processo de soldadura, a rigidez na área circundante à solda aumenta, sendo por isso superior à do material base. Assim a modelação da ligação entre dois elementos pode, a nível de propriedades de material, ser considerada como uma continuidade do material base. Horton et al. (1999) aplicam o mesmo conceito e as técnicas de *updating* para o melhoramento de um modelo de elementos finitos formado por vigas em forma de H e unidas por junta soldada. Ahmadian et al. (2006) fazem o *updating* de juntas caracterizadas por grandes regiões de contato entre superfícies. As juntas são modeladas utilizando elementos sólidos de 8 nós que fazem a interface entre os elementos de placa a unir, e possuem propriedades de material que podem ser ajustadas para melhorar o comportamento do modelo. Duque et al. (2007) descrevem uma metodologia para obtenção das melhores condições iniciais para o processo de *updating* da estrutura de um autocarro unida por soldadura. Os autores propõem um procedimento dividido em três fases. Na primeira fase, a fase de selecção do conjunto de parâmetros, o objectivo é reduzir o número de parâmetros utilizados no processo de otimização, e seleccionar os mais influentes. A segunda fase está relacionada com a escolha dos valores iniciais para esses parâmetros, sendo executado o processo de otimização com o objectivo de

encontrar os melhores pontos de partida, para que na terceira, e última fase do processo, esses pontos sejam explorados mais exaustivamente. Gant et al. (2011) e Gant et. al (2013) aplicam a metodologia de *updating* para estimar os parâmetros de rigidez de juntas aparafusadas e rebitadas em painéis de aviões. O modelo numérico é modelado com elementos de placa na estrutura do painel e um elemento com propriedades de rigidez por cada parafuso.

#### **1.2.4 – Algumas Limitações das Técnicas de Melhoramento de Modelos de Elementos Finitos**

Pode-se dizer que o melhoramento de modelos de elementos finitos é hoje em dia uma técnica relativamente fiável e que tem sido largamente estudada, desenvolvida e aplicada. No entanto existe ainda margem para explorar dentro desse campo. Por exemplo, para que o *updating* feito de forma automática seja levado a cabo com sucesso, é necessário que o modelo a melhorar esteja relativamente próximo do modelo de referência. O trabalho de Meireles (2007) é disso um exemplo. Neste trabalho o autor faz com sucesso o *updating* de um modelo simplificado de uma placa, usando como referência dados obtidos experimentalmente. Apesar de tudo, o autor refere que o principal fator para o sucesso do *updating* é a relativa proximidade entre o modelo de elementos finitos a melhorar e o modelo de referência. De facto, em alguns casos o *updating* não é efetuado com sucesso. Isso acontece quando, por exemplo, o modelo de elementos finitos a melhorar é demasiado grosseiro e geometricamente muito diferente do modelo de referência, promovendo assim a existência inicial de pares de modos não correlacionados entre os dois modelos. Nessas condições, o *updating* com base nas características modais não pode ser efetuado com sucesso. O trabalho de Zivanovic et al. (2007) é baseado nesse princípio e procura contornar esse problema. Os autores dividem o processo de *updating* em quatro etapas: modelação do modelo de elementos finitos; análise modal e interpretação dos resultados; refinamento manual do modelo; *updating* automático. Estes autores começam por realizar um ajustamento manual, empírico, e de elevado consumo de tempo no modelo de elementos finitos, mas necessário para reduzir o erro inicial entre as frequências naturais de 30% para 4%. Após aplicação do ajustamento manual, o modelo de elementos finitos fica então suficientemente próximo do modelo de referência para que o *updating* automático seja efetuado com sucesso. Fica então claro que a dificuldade do problema cresce quando essa condição de

suficiente aproximação entre os dois modelos não é satisfeita, e alguns pares de modos não podem ser correlacionados, causando divergências no processo matemático. Isso é uma desvantagem das técnicas automáticas de melhoramento de modelos de elementos finitos, uma vez que os modos não correlacionados também contribuem com informação acerca do comportamento estrutural dinâmico do modelo. Além disso, a quantidade de modos para processar o *updating* é também pequena, o que contribui para um resultado pobre, ou mesmo impossível, processo de *updating*.

Tendo em linha de conta os problemas expostos, um trabalho recente, desenvolvido por Modak (2014), propõe uma nova solução que pretende ultrapassar essas limitações na forma de um novo método de *updating* que aceita modos correlacionados e modos não correlacionados. Apesar de esse trabalho ser um importante e relevante passo na área do *updating*, a técnica proposta pelo autor é por ele aplicada a modelos de elementos finitos a melhorar geometricamente ainda muito semelhantes aos modelos de referência.

### **1.3 – Objetivos e Estruturação da Tese**

O objetivo principal deste trabalho é obter um modelo de elementos finitos simplificado para representação de juntas rebitadas em análise dinâmica de estruturas usando uma ferramenta de melhoramento de modelos de elementos finitos. Pretende-se também evoluir um programa de melhoramento de modelos de elementos finitos, já desenvolvido, para melhor responder ao objetivo principal. As evoluções a implementar passam por dotar o programa com um otimizador de procura global baseado nos métodos estocásticos. Pretende-se também desenvolver e implementar no mesmo *software* uma função multi-objetivo para otimização das características geométricas, da resposta estática e da resposta dinâmica de estruturas. Como consequência dessa implementação pretende-se introduzir uma nova abordagem de melhoramento de modelos de elementos finitos que permite partir de modelos a melhorar inicialmente muito distantes dos modelos de referência e fazer um ajustamento inicial automático ao modelo de referência. Assim, o mesmo ficará capacitado para lidar na otimização de modelos com pares de modos não correlacionados. No fim pretende-se também desenvolver um modelo analítico, baseado numa equação matemática, que represente os modelos simplificados de juntas rebitadas.

A tese encontra-se estruturada em sete capítulos principais e que a seguir se resumem.

No capítulo 1 definem-se o contexto e a motivação deste trabalho. É efetuado também um resumo do estado da arte dos temas abordados neste trabalho. Descrevem-se ainda os principais objectivos pretendidos com o presente trabalho.

No capítulo 2 é feita uma introdução à ao comportamento dos materiais quando submetidos a solicitações estáticas, à dinâmica estrutural, à análise modal experimental e à identificação modal. Apresentam-se alguns aspectos ligados à otimização e qual o papel desta no melhoramento de modelos de elementos finitos. Abordam-se também alguns aspetos relacionados com a especificação de rebites e de juntas rebitadas segundo o eurocódigo. Chama-se aqui a atenção do leitor para o fato de que alguns temas teóricos mais específicos de cada capítulo são abordados no próprio capítulo.

No capítulo 3 apresenta-se a aplicação de duas técnicas de otimização global estocásticas a um programa de melhoramento de modelos de elementos finitos, já desenvolvido, mas cuja técnica de otimização implementada é apenas local. Aplica-se o programa a um caso exemplificativo, e compara-se a performance das técnicas de otimização global com técnica de otimização local.

No capítulo 4 faz-se a apresentação do desenvolvimento um método sequencial de duas etapas para modificação estrutural e melhoramento de modelos de elementos finitos baseado numa função de otimização multi-objetivo. O método desenvolvido apresenta novidades no sentido de que é possível otimizar os modelos com base no comportamento estático e dinâmico do sistema. Outra mais-valia deste método de duas etapas é que pode ser também aplicado nos casos em que existem pares de modos não correlacionados entre o modelo de referência e o modelo de elementos finitos a melhorar. Dois exemplos são apresentados para aferir a robustez do novo método.

No capítulo 5 descreve-se o desenvolvimento de modelos de elementos finitos simplificados para representação de juntas rebitadas em análise dinâmica de estruturas. O rebite é representado em elementos finitos com recurso a elementos

mola-amortecedor. A metodologia de melhoramento de modelos de elementos finitos, apresentada no Capítulo 3, é usada para determinar o valor da constante rigidez da mola dos elementos mola-amortecedor que simulam o rebite, tendo como referência os modelos experimentais de juntas rebitadas construídos e submetidos a análise modal experimental. O objetivo é obter a melhor representação da ligação estrutural em modelos de elementos finitos de juntas rebitadas relativamente às amostras experimentais.

No capítulo 6 apresenta-se o desenvolvimento matemático de um modelo analítico para representar modelos simplificados de juntas rebitadas. Faz-se uso dos valores das constantes de rigidez das molas obtidos no Capítulo 5 para quantificar a área de material afetado, ou seja, a área de distribuição de tensões, devido aos carregamentos de compressão provocados pelos rebites no material das peças unidas. Com base no valor da área afetada para caso de estudo do Capítulo 5, é desenvolvida a equação para determinar a área de material afetado, e conseqüentemente é deduzida a equação geral para determinar a constante de rigidez da mola dos elementos mola-amortecedor. O novo modelo analítico é depois aplicado a vários casos de estudo.

No capítulo 7 resumem-se as conclusões e apresentam-se recomendações para os trabalhos futuros.

## **CAPÍTULO 2 – CONCEITOS TEÓRICOS FUNDAMENTAIS**

A maior parte dos equipamentos e sistemas estruturais estão sujeitos a esforços tanto estáticos como dinâmicos. Para a realização deste trabalho importa identificar os princípios de base dos fenómenos envolvidos no comportamento das estruturas quando sujeitas a esses tipos de esforços. Assim, pretende-se neste capítulo resumir um conjunto de conhecimentos que envolvem as análises estáticas e dinâmicas estudadas, e que permitem por sua vez ajudar a suportar, interpretar e explicar as decisões tomadas ao longo do trabalho. Abordam-se inicialmente alguns aspetos do comportamento dos materiais quando submetidos a solicitações estáticas e dinâmicas. Abordam-se também alguns aspetos da análise modal experimental e é feita uma introdução aos algoritmos usados na otimização e melhoramento de modelos de elementos finitos. Por último abordam-se os tipos de elementos finitos aplicados aos modelos usados neste trabalho, e a especificação de rebites e juntas rebitadas.

### **2.1 – Análise Estrutural de Sistemas Mecânicos**

A análise estrutural de sistemas mecânicos compreende a obtenção da resposta das estruturas perante solicitações estáticas ou dinâmicas. A resposta pode ser caracterizada por tensões e deformações no caso de se tratar de uma análise estática, ou caracterizada por frequências naturais e modos de vibração no caso de se tratar de uma análise dinâmica.

Todos os sólidos possuem a capacidade de se deformar quando submetidos a esforços ou carregamentos estáticos, podendo recuperar, ou não, as suas dimensões iniciais após a remoção desses esforços, dependendo de ter, ou não, sido excedida uma determinada força limite admissível para o material do corpo. Se essa força limite não for excedida, o corpo mantém-se no domínio elástico podendo recuperar as suas dimensões iniciais se a carga exterior for removida. Caso a força limite do material seja ultrapassada, o corpo passa a ter um comportamento elasto-plástico, entrando no domínio da plasticidade, ficando permanentemente deformado, recuperando apenas parte da deformação sofrida.

O comportamento elástico dos sólidos segue a Lei de Hooke

$$F = k \cdot \Delta l, \quad (2.1)$$

onde  $F$  é a força a atuar no corpo,  $k$  é a constante elástica ou rigidez do corpo e  $\Delta l$  é o alongamento sofrido pelo corpo devido à aplicação da força  $F$ .

Por outro lado, e manipulando a Eq. (2.1), a rigidez  $k$  é definida como a relação entre uma força constante  $F$ , que atua sobre um meio elástico deformável, e um deslocamento resultante  $\Delta l$ . Assim a rigidez pode ser expressa como

$$k = \frac{F}{\Delta l}, \quad (2.2)$$

ou

$$k = \frac{E \cdot A}{L_0}. \quad (2.3)$$

em que  $L_0$  é o comprimento inicial do corpo e  $A$  é a área da secção do corpo.

A Eq. (2.3) define assim a rigidez axial, que representa a capacidade que o sólido possui em resistir ao alongamento ou compressão quando sujeito à aplicação de cargas segundo o seu eixo.

Algumas características geométricas dos sólidos, como o momento de inércia de área, momento polar de inércia, produto de inércia, centro de massa e área, têm influência no seu comportamento quando submetidos tanto a solicitações estáticas como dinâmicas.

O momento de inércia de área, denotado por  $I$ , é uma grandeza que mede a resistência que uma determinada área oferece quando solicitada à flexão. Por sua vez, o momento polar de inércia, denotado por  $I_p$ , mede a resistência que uma determinada área oferece quando solicitada à torção.

O centro de massa (CM) representa o ponto onde toda a massa de um corpo ou sistema de corpos está concentrada. O conhecimento da posição do centro de massa é importante, na medida em que está relacionado com o valor do momento e produto de inércia. No desenrolar deste trabalho são usados os valores de momentos e produtos de inércia calculados relativamente à origem. A relação entre esses parâmetros geométricos pode ser efetuado recorrendo ao teorema de Steiner, também conhecido como teorema dos eixos paralelos. Considerando a Figura 2.1, e aplicando o teorema dos eixos paralelos, o momento de inércia na direção “x” e “y” do eixo que passa na origem O, respetivamente denotado por  $I_x$  e  $I_y$ , é dado respetivamente por

$$I_x = I_{x_{CM}} + A \cdot d_2^2 \quad (2.4)$$

e

$$I_y = I_{y_{CM}} + A \cdot d_1^2, \tag{2.5}$$

onde  $I_{x_{CM}}$  e  $I_{y_{CM}}$  são, respetivamente, o momento de inércia de área na direção “x” e “y” relativamente ao eixo que passa pelo centro de massa da área, e  $d_1$  e  $d_2$  são, respetivamente, a distância na direção “x” e “y” ao eixo que passa na origem O ao centro de massa da área.

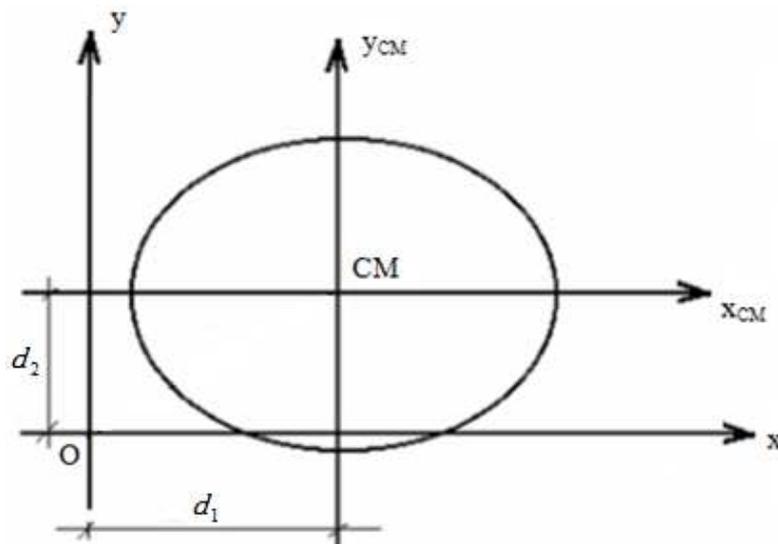


Figura 2.1 – Exemplo para aplicação da regra dos eixos paralelos.

Os valores de  $I_{x_{CM}}$  e  $I_{y_{CM}}$  são calculados em função da forma da secção da área do sólido.

Por sua vez o produto de inércia  $I_{x,y}$  relativamente à origem é, aplicando o teorema dos eixos paralelos, dado por

$$I_{x,y} = I_{x_{CM},y_{CM}} + A \cdot d_1 \cdot d_2 \tag{2.6}$$

Em muitos casos, os materiais são solicitados para além do domínio elástico, ficando com deformações permanentes, que não desaparecem após a remoção das cargas. Esse fenómeno é usado na indústria metalomecânica, nomeadamente nos processos de conformação dos metais por deformação plástica a frio. Nestes processos a partir da matéria-prima em forma de chapa, placa, perfil, etc., pode obter-se a forma final pretendida para a peça provocando deformações plásticas no material (De Moura Branco, 1998). Quando um metal é deformado a baixas temperaturas (abaixo da temperatura de recristalização) ocorre o fenómeno de encruamento. O encruamento é

assim o endurecimento de um metal por deformação plástica, tornando-o menos dúctil e mais frágil.

No processo de rebitagem ocorre um processo semelhante (Zhang et al, 2011). Quando a espiga do rebite é tracionada acontece a deformação e dilatação do corpo do rebite, processo pelo qual este é moldado ao seu furo de alojamento. O rebite sofre assim deformações plásticas durante o processo de rebitagem, não voltando à sua forma inicial. No entanto, durante a sua função como elemento de ligação entre dois componentes, ele mantém as suas propriedades elásticas, não entrando, desde que não seja ultrapassado o seu limite de cedência, no regime plástico. Convém salientar que, devido ao aumento da dureza provocada pelo encruamento no processo de rebitagem, o limite de cedência do rebite vai sofrer uma redução. Contudo, as solicitações a que as juntas rebitadas usadas neste trabalho estão sujeitas, não provocam tensões ou deformações acima do regime elástico. Por isso não são desenvolvidas neste trabalho análises do tipo não linear.

## **2.2 – Dinâmica de Estruturas**

A análise e caracterização do comportamento dinâmico de estruturas baseiam-se num conjunto de fundamentos que usualmente são aplicados a modelos estruturais com um ou mais graus de liberdade (GDL) (Clough e Penzien, 1995). Qualquer estrutura solicitada dinamicamente apresenta um comportamento de resposta que a caracteriza. A abordagem à sua resposta pode ser feita de forma analítica nos casos simples, recorrendo a modelos aproximados e utilizando ferramentas de simulação numérica, ou por via experimental utilizando instrumentação adequada e a métodos de tratamento de sinal para obtenção da identificação modal. A identificação modal está portanto relacionada com a resposta da estrutura às solicitações dinâmicas. As solicitações dinâmicas são excitações externas à estrutura, governadas por um modelo matemático, que juntamente com a resposta da estrutura proporcionam a obtenção de um modelo matemático da relação excitação-resposta. A resposta da estrutura é o movimento vibratório que se caracteriza pelas frequências naturais e modos de vibração naturais, sendo estes os parâmetros dinâmicos próprios da estrutura e que definem o modelo modal.

Dependendo da complexidade e número de GDL's, o modelo a adoptar pode ser discreto, como é o caso do sistema de suspensões dos veículos automóveis, ou contínuo, como é o caso das vigas, devendo o modelo em qualquer dos casos representar

aproximadamente as propriedades geométricas e físicas da estrutura, normalmente expressas através das matrizes de massa, rigidez e amortecimento.

Qualquer estrutura que é excitada por uma força a variar no tempo, está sujeita a vibrações (Fertis, 1984:2). As vibrações ocorrem devido ao deslocamento da massa quando esta é excitada. Se esses deslocamentos se repetirem de forma idêntica em intervalo de tempos iguais, o movimento designa-se por periódico, podendo este ser harmónico e não harmónico. A frequência de vibração fundamental  $f_n$  do sistema é dada por

$$f_n = \frac{1}{T}, \quad (2.7)$$

em que  $T$  é o período do movimento.

Se o movimento é periódico e harmónico, o sistema apresenta apenas uma frequência natural. Se o movimento é periódico mas não harmónico, o sistema apresenta uma frequência fundamental e as frequências correspondentes aos harmónicos superiores que são múltiplos inteiros da frequência fundamental.

As vibrações podem ser livres ou forçadas. Nas vibrações livres, a massa vibra harmonicamente devido à sua própria inércia, não necessitando de qualquer força exterior para manter o seu movimento, e diz-se que as frequências são naturais. No caso das vibrações forçadas, existe uma força exterior variável no tempo aplicada com uma ou várias frequências que provocam o movimento do sistema. As forças externas responsáveis por colocar uma estrutura a vibrar são normalmente o vento, as ondas, o som, terremotos, motores, aplicação de cargas e causas mecânicas.

As vibrações forçadas podem ser classificadas como periódicas, não periódicas (transitórias) e aleatórias. Os carregamentos aleatórios, por sua vez podem ser de dois tipos: estacionários e não estacionários.

O movimento harmónico é um caso particular do movimento periódico, e é caracterizado por uma função sinusoidal. Quando a vibração, depois de um estado estacionário, deixa de ser harmónica, designa-se por vibração transitória, como é o caso da paragem ou arranque de um equipamento.

### 2.2.1 – Vibrações Livres de Sistemas com um GDL

Para o sistema com um GDL representado na Figura 2.6, constituído por uma massa  $m$ , ligado a uma mola de constante elástica  $k$ , amortecido por um amortecedor

de constante de amortecimento  $c$  e submetido a uma força perturbadora externa considerada harmónica a variar no tempo  $f(t)$ , a equação do movimento que governa o sistema é dada por

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = f(t). \quad (2.8)$$

onde  $\ddot{x}$ ,  $\dot{x}$  e  $x$  são, respetivamente, a aceleração, a velocidade e o deslocamento do sistema.

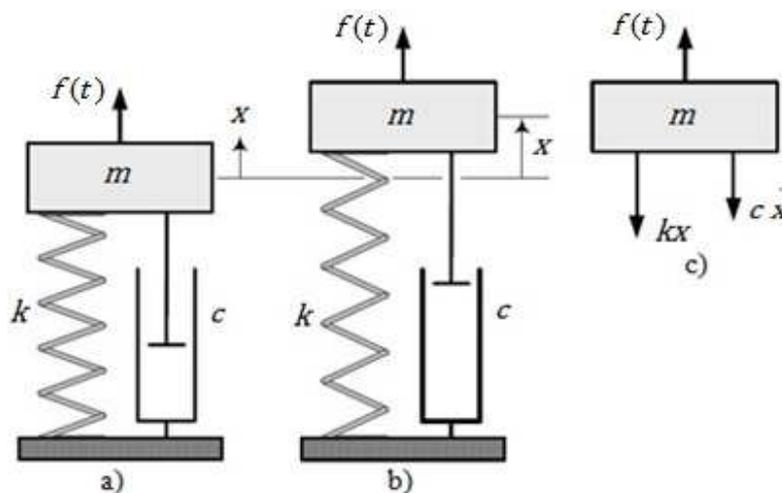


Figura 2.6 – Representação esquemática de um sistema com um GDL em: a) equilíbrio, b) movimento e c) diagrama de corpo livre (adaptado de Jazar, 2008).

Para um sistema com um GDL de massa  $m$  ligado a uma mola de constante elástica  $k$ , como representado na Figura 2.7, animado de movimento harmónico simples, sendo abandonado a si próprio, sem forças perturbadoras externas e sem amortecimento, a equação do movimento é dada por

$$m \ddot{x} + kx = 0. \quad (2.9)$$

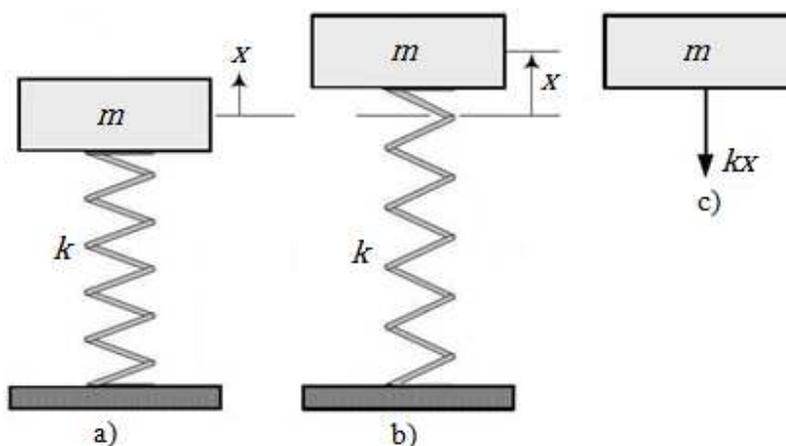


Figura 2.7 – Representação esquemática de um sistema com um GDL sem forças perturbadoras externas e sem amortecimento em: a) equilíbrio, b) movimento, c) diagrama de corpo livre (adaptado de Jazar, 2008).

A solução que satisfaz a equação diferencial linear de segunda ordem (2.9) pode ser escrita como

$$x(t) = A \cos(\omega_n t), \quad (2.10)$$

onde  $A$  é uma constante que depende das condições em  $t = 0$ ,  $\omega_n$  é a frequência natural angular do sistema em rad/s e  $t$  o instante de tempo.

Por outro lado a equação

$$x(t) = B \sin(\omega_n t) \quad (2.11)$$

também satisfaz a equação diferencial (2.9), onde  $B$  é uma constante que depende das condições em  $t = 0$ . Assim a solução geral é dada pela solução complementar

$$x(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t). \quad (2.12)$$

A primeira e segunda derivadas da Eq. (2.10) podem ser escritas como uma velocidade  $\dot{x}$  e uma aceleração  $\ddot{x}$  por, respectivamente,

$$\dot{x}(t) = -A\omega_n \sin(\omega_n t) \quad (2.13)$$

e

$$\ddot{x}(t) = -A\omega_n^2 \cos(\omega_n t). \quad (2.14)$$

Substituindo as Eq.s (2.14) e (2.10) na Eq. (2.9), vem

$$m(-A\omega_n^2 \cos(\omega_n t)) + k(A \cos(\omega_n t)) = 0, \quad (2.15)$$

e a partir da qual se obtém

$$-\omega_n^2 m + k = 0 \Leftrightarrow \omega_n^2 = \frac{k}{m}, \quad (2.16)$$

A frequência natural angular do sistema da Figura 2.7 é assim calculada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.17)$$

A partir da Eq. (2.12) é possível determinar as constantes  $A$  e  $B$  no início do movimento do sistema (instante  $t = 0$ ), tal que

$$A = x_0 \quad (2.18)$$

e

$$B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}. \quad (2.19)$$

A solução geral passa assim a ser definida por

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t). \quad (2.20)$$

Por sua vez, a amplitude do movimento  $X$  é definido como a hipotenusa de um triângulo retângulo com cateto adjacente  $x_0$  e cateto oposto  $\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$ , tal que

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}. \quad (2.21)$$

Transformando a Eq. (2.20) em

$$x(t) = X \left( \frac{x_0}{X} \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_0}{X\omega_n} \sin(\omega_n t) \right), \quad (2.22)$$

e sabendo que  $\frac{x_0}{X} = \cos(\psi)$  e  $\frac{\dot{x}_0}{X\omega_n} = \sin(\psi)$ , pode-se escrever

$$x(t) = X(\cos(\psi)\cos(\omega_n t) + \sin(\psi)\sin(\omega_n t)) \quad (2.23)$$

ou

$$x(t) = X \cos(\omega_n t - \psi), \quad (2.24)$$

em que  $\psi$  é o ângulo de fase.

### 2.2.2 – Vibrações Livres com Amortecimento Viscoso

Para o caso de vibrações livres com amortecimento a equação diferencial de segunda ordem é dada por

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = 0, \quad (2.25)$$

em que a solução que a satisfaz é do tipo

$$x(t) = Ce^{st} \quad (2.26)$$

sendo  $C$  uma constante que depende das condições em  $t = 0$ .

Obtendo a primeira e segunda derivadas de (2.26), respetivamente dadas por

$$\dot{x}(t) = Cse^{st} \quad (2.27)$$

e

$$\ddot{x}(t) = Cs^2 e^{st}, \quad (2.28)$$

e substituindo-as em (2.25), obtém-se

$$mCs^2 e^{st} + cCse^{st} + kCe^{st} = 0. \quad (2.29)$$

Simplificando (2.29) obtém-se a equação de segundo grau

$$ms^2 + cs + k = 0, \quad (2.30)$$

em que a sua solução é dada por duas raízes

$$\left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}. \quad (2.31)$$

Assim pode-se escrever a solução geral como a solução complementar

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}, \quad (2.32)$$

em que  $s_1$  e  $s_2$  dependem do tipo de amortecimento presente no sistema. Um sistema pode ser classificado quanto ao amortecimento como: crítico, sub-amortecido ou super-amortecido.

Da literatura (Jazar, 2008), sabe-se que a razão de amortecimento  $\xi$  é dada por

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}, \quad (2.33)$$

e a partir da qual se pode escrever o coeficiente de amortecimento  $c$  como

$$c = 2\sqrt{km}\xi. \quad (2.34)$$

Um sistema possui amortecimento crítico quando a razão de amortecimento  $\xi$  é igual a 1. Para os casos em que  $\xi < 1$  e  $\xi > 1$  o sistema é, respetivamente, do tipo sub-amortecido e sobre-amortecido.

A constante de rigidez  $k$  da mola é obtida a partir de (2.17), tal que

$$k = m\omega_n^2. \quad (2.35)$$

Substituindo a Eq. (2.35) na Eq. (2.34) obtém-se

$$c = 2\omega_n m\xi. \quad (2.36)$$

Aplicando (2.36) em (2.31), pode-se obter as raízes  $s_1$  e  $s_2$  através de

$$\left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}. \quad (2.37)$$

No caso do sistema ser criticamente amortecido, ou seja,  $\xi = 1$ , o radicando da Eq. (2.37) é nulo, pelo que

$$s_1 = s_2 = -\omega_n. \quad (2.38)$$

A solução geral pode ser escrita como

$$x(t) = C_1 e^{-\omega_n t} + C_2 t e^{-\omega_n t}, \quad (2.39)$$

em que o segundo termo é uma segunda solução independente que satisfaz a equação diferencial de segunda ordem (2.25), como demonstrado por (Delgado e Arêde, 2000).

A partir da Eq. (2.39) é possível determinar as constantes  $C_1$  e  $C_2$  no início do movimento do sistema (instante  $t = 0$ ), tal que

$$C_1 = x_0 \quad (2.40)$$

e

$$C_2 = \dot{x}_0 + \omega_n x_0. \quad (2.41)$$

Assim, a solução geral passa assim a ser definida por

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} \left( x_0 (1 + \omega_n t) + \dot{x}_0 t \right). \quad (2.42)$$

No caso de um sistema sobre-amortecido, ou seja,  $\xi > 1$ , a equação de segundo grau (2.30) possui duas raízes reais, tal que, a solução geral é dada por

$$x(t) = C_1 e^{(-\xi \omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})t} + C_2 e^{(-\xi \omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})t}, \quad (2.43)$$

ou alternativamente na seguinte forma

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} \left( A_1 \cosh(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t) + A_2 \sinh(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t) \right) \quad (2.44)$$

As constantes  $A_1$  e  $A_2$  são determinadas para o início do movimento do sistema (instante  $t = 0$ ), tal que

$$A_1 = x_0 \quad (2.45)$$

e

$$A_2 = \frac{\dot{x}_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}. \quad (2.46)$$

A solução geral passa assim a ser definida por

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} \left( x_0 \cosh(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t) + \frac{\dot{x}_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \sinh(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t) \right) \quad (2.47)$$

No caso de um sistema sub-amortecido, ou seja,  $\xi < 1$ , a equação de segundo grau (2.30) possui duas raízes imaginárias, tal que,

$$\left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = -\xi \omega_n \pm i \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}, \quad (2.48)$$

em que  $\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$  representa a frequência natural angular amortecida  $\omega_d$ , menor que  $\omega_n$ .

Assim, a solução geral para um sistema do tipo sub-amortecido é dada por

$$x(t) = C_1 e^{(-\xi\omega_n + i\omega_d)t} + C_2 e^{(-\xi\omega_n - i\omega_d)t}. \quad (2.49)$$

Recorrendo às equações de Euler pode-se escrever a Eq. (2.49) como

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)). \quad (2.50)$$

À semelhança dos casos anteriores são determinadas as constantes  $A$  e  $B$  no início do movimento do sistema (instante  $t = 0$ ), tal que

$$A = x_0 \quad (2.51)$$

e

$$B = \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d}. \quad (2.52)$$

Assim, a solução geral passa a ser definida por

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left( x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right). \quad (2.53)$$

À semelhança do caso sem amortecimento, a amplitude do movimento  $X$  é definido como a hipotenusa de um triângulo retângulo com cateto adjacente  $x_0$  e cateto

oposto  $\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d}$ , tal que

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d} \right)^2}. \quad (2.54)$$

Transformando a Eq. (2.53) em

$$x(t) = X e^{-\xi\omega_n t} \left( \frac{x_0}{X} \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{X\omega_d} \sin(\omega_d t) \right), \quad (2.55)$$

e sabendo que  $\frac{x_0}{X} = \cos(\psi)$  e  $\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{X\omega_d} = \sin(\psi)$ , pode-se escrever

$$x(t) = X e^{-\xi\omega_n t} (\cos(\psi) \cos(\omega_d t) + \sin(\psi) \sin(\omega_d t)) \quad (2.56)$$

ou

$$x(t) = X e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \psi). \quad (2.57)$$

Na Figura 2.8 apresenta-se o movimento do sistema em função do tipo de amortecimento. O sistema criticamente amortecido e sobre-amortecido não entram em movimento oscilatório, verificando-se que os sistemas criticamente amortecidos retornam à posição de equilíbrio mais rapidamente que os sistemas sobre-amortecidos.

Para o caso do sistema do tipo sub-amortecido verifica-se um movimento oscilatório com fator de atenuação  $e^{-\xi \omega_n t}$  com período de vibração amortecida  $T_d$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}. \quad (2.58)$$

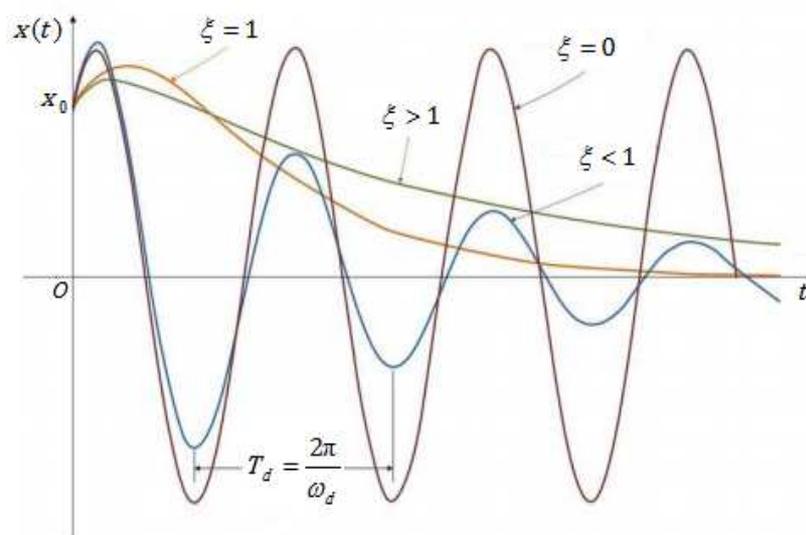


Figura 2.8 – Representação do movimento do sistema em função do tipo de amortecimento (adaptado de Cossolino e Pereira, 2010).

### 2.2.3 – Resposta ao Carregamento Forçado de Amplitude Constante sem Amortecimento

Considere-se agora um sistema com um GDL ao qual é aplicado um carregamento harmónico, como representado na Figura 2.9. Desprezando o amortecimento, a equação de equilíbrio dinâmico é assim definida por

$$m \ddot{x} + kx = F \sin(\omega t). \quad (2.59)$$

em que  $\omega$  é a frequência de excitação do sistema.

A solução complementar  $x_c(t)$  é dada por (2.12) e a solução particular  $x_p(t)$  pode ser do tipo

$$x_p(t) = X \sin(\omega t), \quad (2.60)$$

em que a primeira e segunda derivadas são dadas, respetivamente, por

$$\dot{x}_p(t) = X\omega \cos(\omega t) \quad (2.61)$$

e

$$\ddot{x}_p(t) = -X\omega^2 \sin(\omega t). \quad (2.62)$$

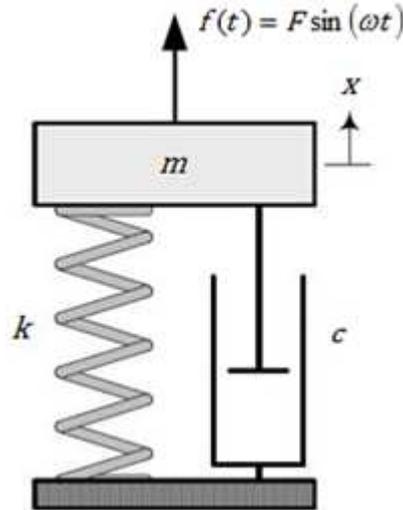


Figura 2.9 – Sistema com um GDL, excitado por uma força externa harmónica (adaptado de Jazar, 2008).

Substituindo (2.62) e (2.60) em (2.59) vem

$$-X\omega^2 m \sin(\omega t) + Xk \sin(\omega t) = F \sin(\omega t), \quad (2.63)$$

onde

$$X = \frac{F}{k - \omega^2 m}. \quad (2.64)$$

Sabendo que  $m = k/\omega_n^2$ , podemos escrever

$$X = \frac{F}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = X_0 \frac{1}{1 - r^2}, \quad (2.65)$$

em que  $F/k$  é o deslocamento estático, aqui definido por  $X_0$ , e  $\omega/\omega_n$  é a razão  $r$  de frequências. Quando  $\omega = \omega_n$ ,  $r = 1$ , o que indica que a frequência  $\omega$  com que a força externa excita o sistema é igual à frequência natural  $\omega_n$  do sistema. Como consequência dessa igualdade diz-se que o sistema entra em ressonância. Isto apenas se verifica nos casos em que o sistema é não amortecido.

A solução geral é dada pela soma da solução complementar  $x_c(t)$  (Eq. 2.12) com a solução particular  $x_p(t)$  (Eq. 2.60), tal que

$$x(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) + X_0 \frac{1}{1-r^2} \sin(\omega t). \quad (2.66)$$

A partir da Eq. (2.66) é possível determinar as constantes  $A$  e  $B$  no início do movimento do sistema (instante  $t = 0$ ). Admitindo que para  $t = 0$  a posição inicial e a velocidade inicial do sistema são, respetivamente,  $x_0 = 0$  e  $\dot{x}_0 = 0$ , vem

$$A = 0 \quad (2.67)$$

e

$$B = -\frac{X_0 \frac{\omega}{1-r^2}}{\omega_n} = -X_0 \frac{r}{1-r^2}. \quad (2.68)$$

Assim a solução geral passa a ser definida por

$$x(t) = \frac{X_0}{1-r^2} (\sin(\omega t) - r \sin(\omega_n t)), \quad (2.69)$$

sendo definida pela sobreposição de duas funções harmónicas com frequências diferentes, pelo que o movimento resultante não é harmónico. A função  $\sin(\omega t)$  representa a resposta em estado estacionário, enquanto a função  $r \sin(\omega_n t)$  representa a resposta transitória do sistema.

Contudo, quando  $r = 1 \rightarrow x(t) = \infty$ , sendo impossível determinar  $x(t)$ . Assim, uma solução particular possível é

$$x_p(t) = Ct \cos(\omega t), \quad (2.70)$$

em que a primeira e segunda derivadas são dadas, respetivamente, por

$$\dot{x}_p(t) = C \cos(\omega t) - Ct\omega \sin(\omega t) \quad (2.71)$$

e

$$\ddot{x}_p(t) = -2C\omega \sin(\omega t) - Ct\omega^2 \cos(\omega t). \quad (2.72)$$

Substituindo (2.72) e (2.70) em (2.59), e sabendo que  $\omega = \omega_n$ , vem

$$-2C\omega m \sin(\omega t) - Ct\omega^2 m \cos(\omega t) + Ct\omega^2 m \cos(\omega t) = F \sin(\omega t). \quad (2.73)$$

Assim,

$$C = -\frac{F}{2\omega m}. \quad (2.74)$$

A solução geral é então dada por

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) - \frac{F}{2\omega m} t \cos(\omega t). \quad (2.75)$$

A partir da Eq. (2.75) é possível determinar as constantes  $A$  e  $B$  no início do movimento do sistema (instante  $t = 0$ ). Admitindo que para  $t = 0$  a posição inicial e a velocidade inicial do sistema são, respetivamente,  $x_0 = 0$  e  $\dot{x}_0 = 0$ , vem

$$A = 0 \quad (2.76)$$

e

$$B = \frac{F}{2\omega^2 m}. \quad (2.77)$$

A solução geral, para o caso de sistemas não amortecidos, em que  $r = 1$ , passa assim a ser definida por

$$x(t) = \frac{F}{2\omega^2 m} \sin(\omega t) - \frac{F}{2\omega m} t \cos(\omega t) = \frac{F}{2k} (\sin(\omega t) - t\omega \cos(\omega t)) \quad (2.78)$$

#### 2.2.4 – Resposta ao Carregamento Forçado de Amplitude Constante com Amortecimento

Para o caso de um sistema com carregamento harmónico, em que é considerado o amortecimento do tipo viscoso (Figura 2.9), a equação de equilíbrio dinâmico é dada por

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = F \sin(\omega t). \quad (2.79)$$

A solução complementar  $x_c(t)$  é dada por (2.49) e a solução particular  $x_p(t)$  por

$$x_p(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t), \quad (2.80)$$

em que a primeira e segunda derivadas são dadas, respetivamente, por

$$\dot{x}_p(t) = C_1 \omega \cos(\omega t) - C_2 \omega \sin(\omega t) \quad (2.81)$$

e

$$\ddot{x}_p(t) = -C_1 \omega^2 \sin(\omega t) - C_2 \omega^2 \cos(\omega t). \quad (2.82)$$

Substituindo (2.82) e (2.80) em (2.79) vem

$$\begin{aligned} & (-C_1 \omega^2 \sin(\omega t) - C_2 \omega^2 \cos(\omega t))m + (C_1 \omega \cos(\omega t) - C_2 \omega \sin(\omega t))c + \\ & + (C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t))k = F \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (2.83)$$

Por separação dos múltiplos de  $\sin$  e  $\cos$ , dividindo todos os termos por  $m$ , e sabendo que  $c/m = 2\omega_n \xi$  e  $k/m = \omega_n^2$ , obtém-se

$$(-C_1 \omega^2 - 2C_2 \omega \omega_n \xi + C_1 \omega_n^2) \sin(\omega t) = \frac{F}{m} \sin(\omega t) \quad (2.84)$$

e

$$(-C_2\omega^2 + 2C_1\omega\omega_n\xi + C_2\omega_n^2)\cos(\omega t) = 0. \quad (2.85)$$

Dividindo todos os termos por  $\omega_n^2$ , vem

$$(-C_1r^2 - 2C_2r\xi + C_1) = \frac{F}{k} \Leftrightarrow (1-r^2)C_1 - 2C_2r\xi = \frac{F}{k} \quad (2.86)$$

e

$$(-C_2r^2 + 2C_1r\xi + C_2) = 0 \Leftrightarrow (1-r^2)C_2 + 2C_1r\xi = 0, \quad (2.87)$$

onde, pela regra de Cramer se obtém

$$C_1 = \frac{F}{k} \frac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \quad (2.88)$$

e

$$C_2 = \frac{F}{k} \frac{-2\xi r}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \quad (2.89)$$

Assim, a solução geral é dada por

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)) + \frac{F}{k} \frac{1}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} ((1-r^2)\sin(\omega t) - 2\xi r \cos(\omega t)), \quad (2.90)$$

sendo a segunda parcela da equação a parte estacionária.

Se considerarmos  $C$  como a hipotenusa de um triângulo retângulo com cateto adjacente  $1-r^2$  e cateto oposto  $2\xi r$ , podemos escrever

$$C = \sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}. \quad (2.91)$$

Considerando apenas a parte estacionária da Eq. (2.90), vem

$$x(t) = C \frac{F}{k} \frac{1}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \left( \frac{(1-r^2)}{C} \sin(\omega t) - \frac{2\xi r}{C} \cos(\omega t) \right), \quad (2.92)$$

e sabendo que  $\frac{(1-r^2)}{C} = \cos(\psi)$  e  $\frac{2\xi r}{C} = \sin(\psi)$ , pode-se escrever

$$x(t) = C \frac{F}{k} \frac{1}{C^2} (\cos(\psi)\sin(\omega t) - \sin(\psi)\cos(\omega t)) \quad (2.93)$$

ou

$$x(t) = \frac{F}{k} \frac{1}{C} (\sin(\omega t - \psi)), \quad (2.94)$$

em que a amplitude  $X$  é dada por

$$X = \frac{F}{k} \frac{1}{C}, \quad (2.95)$$

a partir da qual se obtém o coeficiente de amplificação dinâmica  $Q$ , que é definido pela relação entre a amplitude  $X$  da resposta resultante e o deslocamento  $X_0$  que o sistema sofreria se a força  $F$  fosse aplicada estaticamente (Correia, 2002)

$$\frac{1}{C} = \frac{X}{F/k} = Q. \quad (2.96)$$

Sendo  $F/k$  o deslocamento estático, a amplitude é então dada por

$$X = X_0 \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}. \quad (2.97)$$

O gráfico da Figura 2.10 mostra a relação entre o fator de amplificação dinâmica  $1/C$  e a razão de frequências  $r$  com influência da razão de amortecimento  $\xi$ .

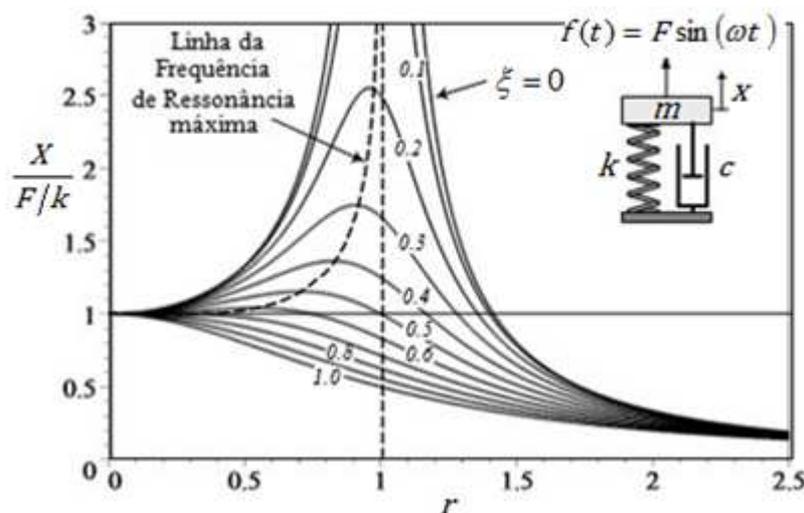


Figura 2.10 – Gráfico da resposta de um sistema com um GDL (adaptado de Jazar, 2008).

É mostrado que a razão de amortecimento para além de influenciar na amplitude da resposta, diminuindo à medida que  $\xi \rightarrow 1^+$ , onde  $1^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (1 + \epsilon)$ , também desvia o valor da frequência de ressonância.

Quando  $r = 1$ , a Eq. (2.97) vem na seguinte forma

$$X_{r=1} = X_0 \frac{1}{2\xi}. \quad (2.98)$$

Uma vez conhecida a amplitude máxima ( $r = 1$ ), pode ser determinado o valor de  $X$  no ponto de meia energia, tal que

$$X = \frac{X_{r=1}}{\sqrt{2}}. \quad (2.99)$$

Substituindo (2.98) em (2.99) vem

$$X = \frac{X_0}{\sqrt{22\xi}} = \frac{X_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}. \quad (2.100)$$

Resolvendo (2.100) em ordem a  $r$  obtém-se

$$r = \sqrt{1 \pm 2\xi}. \quad (2.101)$$

A frequência de ressonância é assim dada por

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi}. \quad (2.102)$$

A Figura 2.11 apresenta o ângulo de fase  $\psi$ , dado por

$$\psi = \arctan\left(\frac{2\xi r}{(1-r^2)}\right), \quad (2.103)$$

em função da razão das frequências  $r$ , descrevendo a mudança de fase para vários valores de razões de amortecimento desde o ângulo inicial de  $0^\circ$  até ao valor final de  $180^\circ$ . A mudança de fase indica o quanto a resposta está atrasada relativamente ao carregamento. Para  $\xi = 0$  o atraso é nulo.

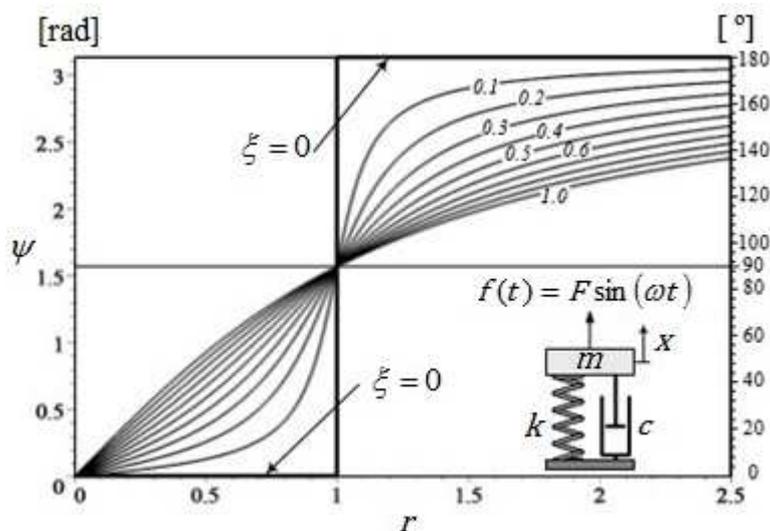


Figura 2.11 – Gráfico do ângulo de fase de um sistema com um GDL (adaptado de Jazar, 2008).

Contudo, o amortecimento que se observa nos sólidos é do tipo histerético. Nesse tipo de amortecimento a dissipação é feita à custa da capacidade que os materiais possuem para se deformar, pelo que o coeficiente de amortecimento não é proporcional à velocidade, mas sim ao deslocamento. Assim, a força de amortecimento  $F_c$  é

proporcional ao deslocamento mas a sua fase está avançada 90° em relação ao mesmo deslocamento (em fase com a velocidade), tal que

$$F_c = c_{eq} \dot{x}(t) = \frac{h}{\omega} \dot{x}(t), \quad (2.104)$$

em que  $c_{eq}$  é o coeficiente de amortecimento equivalente e é inversamente proporcional com a frequência (Maia e Silva, 1997) e  $h$  é o coeficiente de amortecimento hysterético.

A equação do movimento (2.8) pode assim ser escrita como

$$m \ddot{x} + \frac{h}{\omega} \dot{x} + kx = f(t). \quad (2.105)$$

Substituindo  $c_{eq}$  em (2.36) obtém-se a razão de amortecimento equivalente

$$\xi_{eq} = \frac{h}{2\omega\omega_n m}. \quad (2.106)$$

O fator de ampliação  $Q$  para sistema com amortecimento hysterético é assim definido por

$$Q = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + \eta^2}},$$

em que  $\eta$  é o fator de perda dado por

$$\eta = \frac{h}{k}. \quad (2.107)$$

Nos materiais metálicos, como o aço e o alumínio, as deformações são relativamente mais baixas quando comparadas com as deformações proporcionadas por exemplo, por uma borracha, considerando que ambos estão submetidos ao mesmo tipo de carregamento. A borracha tem uma capacidade elevada de absorver grandes quantidades de energia provocada pela deformação, e de a restituir quando o carregamento for removido. A esse fenómeno chama-se resiliência. Nos materiais metálicos essa capacidade é menor, não conseguindo estes absorver as mesmas quantidades de energia, ao ponto de o amortecimento poder ser desprezado. Considera-se que para valores de razão de amortecimento  $\xi$  inferior a 0.1, ou seja,  $\xi < 0.1$  (caraterístico de materiais como o aço e alumínio), o amortecimento é insignificante, podendo ser desprezado e ser assumido, com um erro inferior a 1%, que  $\omega_r = \omega_n$  (Maia e Silva, 1997).

### 2.2.5 – Resposta ao Carregamento Forçado não Harmônico com Amortecimento Viscoso

Até aqui os carregamentos forçados foram tratados de uma forma muito particular, como sendo definidos por uma função harmônica. Contudo, na realidade, os carregamentos podem ser de muitos tipos diferentes, como já descrito no início do subcapítulo 2.2. Assim, as funções matemáticas que os definem podem também apresentar diferentes formas, sendo vulgarmente periódicas mas raramente harmônicas. Se a função é periódica, mas não harmônica (Figura 2.12), a mesma pode ser representada como uma soma de várias funções harmônicas, conhecida como séries de Fourier.

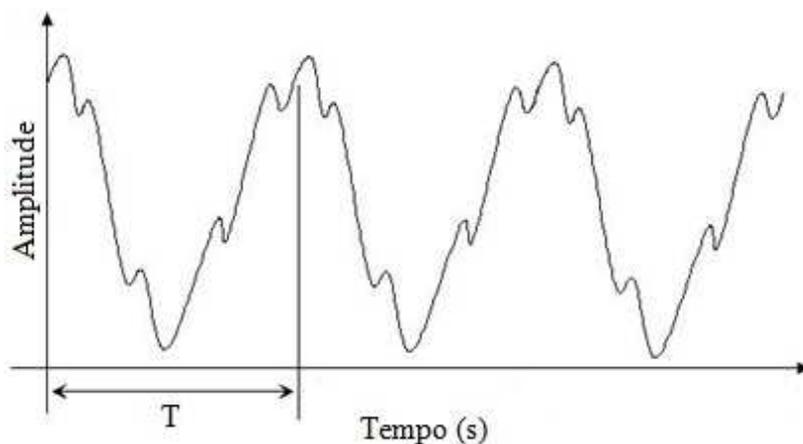


Fig. 2.12 – Representação de um sinal periódico (adaptado de Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas).

Na prática, a resposta a uma solicitação periódica é o somatório das respostas às solicitações harmônicas em que se decompõe a solicitação periódica. Fourier mostrou que uma função  $f(t)$  periódica é a soma de um número infinito de termos harmônicos, tal que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos(j\omega_j t) + b_j \sin(j\omega_j t)), \quad (2.108)$$

em que  $a_0/2$  é o valor médio da função  $f(t)$ ,  $a_j$  e  $b_j$  são os coeficientes da série, dados por

$$a_0 = \left(\frac{1}{T}\right) \int_0^T f(t) dt, \quad (2.109)$$

$$a_j = \left(\frac{2}{T}\right) \int_0^T f(t) \cos(j\omega t) dt \quad (2.110)$$

e

$$b_j = \left(\frac{2}{T}\right) \int_0^T f(t) \sin(j\omega_j t) dt, \quad (2.111)$$

com  $j = 1, \dots, \infty$ , em que  $j$  representa o número de harmônicos.

Aplicando a equação do movimento para este caso, vem

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos(j\omega_j t) + b_j \sin(j\omega_j t)), \quad (2.112)$$

cuja resposta em regime estacionário é dada por

$$x(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j \cos(j\omega_j t - \psi_j) + b_j \sin(j\omega_j t - \psi_j)}{k \sqrt{(1 - j^2 r^2)^2 + (2\xi j r)^2}}. \quad (2.113)$$

No caso de o carregamento ser definido por uma função não periódica (transitória), como representado na Figura 2.13, um método para determinação da resposta de um sistema submetido a um carregamento desse tipo é, considerar que a solicitação tem período  $T = \infty$  e aplicar a transformada discreta de Fourier (FFT – *Fast Fourier Transform*).

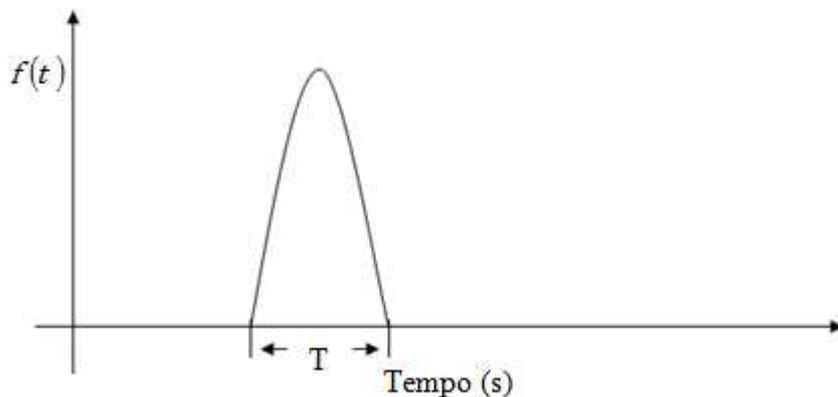


Fig. 2.13 – Representação de um sinal transitório (adaptado de Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas).

Neste caso uma função  $f(t)$  pode ser descrita pelo integral de Fourier dado por (Maia e Silva, 1997)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.114)$$

onde  $F(\omega)$  é conhecido como sendo a transformada de Fourier de  $f(t)$ . Por outro lado a função  $f(t)$  pode ser obtida a partir de  $F(\omega)$  através da transformada inversa de Fourier, tal que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.115)$$

em que as Eqs. (2.114) e (2.115) formam o par de transformadas de Fourier.

A resposta ao carregamento forçado com amortecimento viscoso (ver subcapítulo 2.2.4) pode também ser dada na forma complexa pela relação entre a resposta  $x(t)$  e a força  $f(t)$ , tal que

$$\frac{x(t)}{f(t)} = \frac{X}{F} = H(\omega) = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + i\omega c}, \quad (2.116)$$

em que  $H(\omega)$  é definida como a função complexa de resposta em frequência (FRF – *Frequency Response Function*).

A transformada de Fourier da resposta  $X(\omega)$  no domínio da frequência pode então ser dada por

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega), \quad (2.117)$$

onde  $F(\omega)$  é a transformada de Fourier do carregamento.

A resposta no domínio do tempo é assim definida como

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.118)$$

Uma alternativa à análise de Fourier, para resolver um problema com carregamento não periódico, é aproximar  $f(t)$  a uma sequência de impulsos. A função que descreve um carregamento  $f(t)$  impulsivo é conhecida por função de Dirac ou função delta, tal que

$$f(t) = \delta(t), \quad (2.119)$$

sendo a força impulsiva aplicada no instante  $t = 0$ . Neste caso  $\delta(t) = 0$  para valores de  $t \neq 0$ .

Se a força impulsiva ocorrer no instante  $t = \tau$ , como representado na Figura 2.14,  $f(t)$  assume a forma

$$f(t) = \delta(t - \tau), \quad (2.120)$$

sendo zero para todos os valores de  $t$ , exceto quando  $t = \tau$ , onde a área da força impulsiva é unitária, dada por

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\tau}^{\tau + \Delta t} f(t) dt = 1. \quad (2.121)$$

A Figura 2.14 representa a força impulsiva com área retangular  $\Delta t$  e altura  $1/\Delta t$ , tendendo para  $\infty$  quando  $\Delta t$  tende para zero.

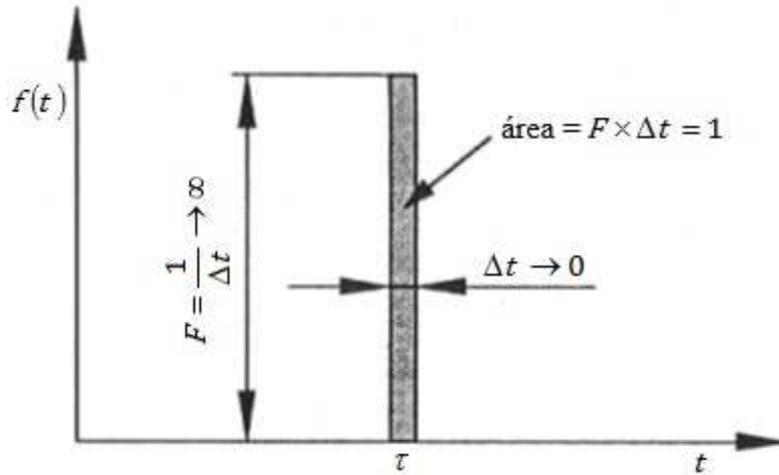


Figura 2.14 – Representação de uma força impulsiva (adaptado de Maia e Silva, 1997).

A resposta a uma força impulsiva unitária é uma vibração livre com deslocamento inicial  $x_0 = 0$ , mas com velocidade inicial  $\dot{x}_0 = \frac{I}{m}$  (Maia e Silva, 1997), com  $I = 1$ . Assim, a equação do movimento é definida por (2.25) e a solução geral por (2.50), a partir da qual é possível determinar as constantes  $A$  e  $B$  no início do movimento do sistema (instante  $t = 0$ ), tal que  $A = 0$  e

$$B = \frac{I}{m\omega_d} = \frac{1}{m\omega_d}. \quad (2.122)$$

A resposta geral é assim definida por

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \frac{1}{m\omega_d} \sin(\omega_d t), \text{ para } t > 0. \quad (2.123)$$

No caso da força impulsiva ocorrer para  $t = \tau$ , a resposta é dada na forma

$$x(t - \tau) = e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \frac{1}{m\omega_d} \sin(\omega_d(t - \tau)), \text{ para } t > \tau. \quad (2.124)$$

A função que define a resposta a uma força impulsiva é conhecida por função de resposta impulsiva (IRF – *Impulse Response Function*).

Considerando agora um carregamento  $f(t)$  aproximado a uma série de forças impulsivas, a resposta particular  $x_p(t)$  do sistema é a sobreposição (somatório) do produto da resposta a um impulso unitário pela força impulsiva no instante  $\tau$ , tal que

$$x_p(t) = \sum x(t - \tau)f(\tau)\Delta\tau. \quad (2.125)$$

No limite, quando  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , o somatório da Eq. (2.125) é convertido no integral de convolução

$$x_p(t) = \int_0^t f(\tau)x(t - \tau)d\tau. \quad (2.126)$$

Para este caso as condições iniciais não são nulas, ou seja,  $x_0 \neq 0$  e  $\dot{x}_0 \neq 0$ , pelo que a solução complementar  $x_c(t)$  é dada por (2.53), que somando à solução particular (2.126), permite obter a solução geral

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left( x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) + \int_0^t f(\tau)x(t-\tau)d\tau. \quad (2.127)$$

### 2.2.6 – Resposta ao Carregamento Aleatório

Por vezes, os carregamentos são de natureza aleatória (Figura 2.15), em que a magnitude  $f(t)$  do carregamento apenas pode ser encontrada recorrendo a ferramentas da estatística.

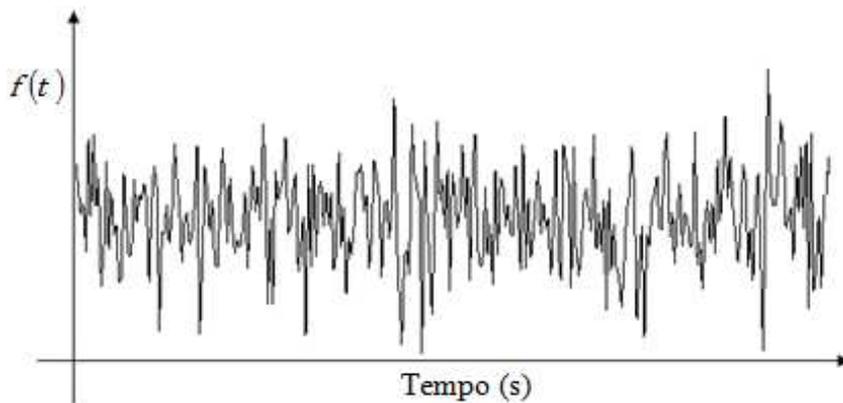


Fig. 2.15 – Representação de um sinal aleatório (adaptado de Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas).

Consideremos então a magnitude  $f(t)$  no instante  $t$  e a magnitude  $f(t + \tau)$  observada no mesmo sinal aleatório depois de um intervalo de tempo  $\tau$  decorrido. A média entre os dois instantes temporais, é dada por

$$R_{ff}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t + \tau)dt, \quad (2.128)$$

também conhecida pela função de auto-correlação, em que  $T$  é o período de amostragem estabelecido no sinal aleatório. Na Figura 2.16 apresentam-se representações da função de auto-correlação.

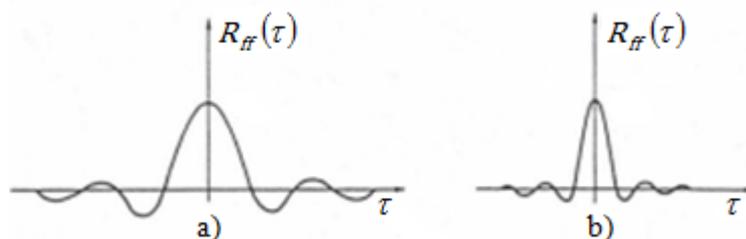


Figura 2.16 – Exemplo de funções de auto-correlação (adaptado de Magalhães, 2012).

O intervalo  $\tau$  vai depender do limite de frequência estabelecido, e quanto maior é o limite, mais curto é o intervalo, logo mais funções de auto-correlação podem ser obtidas no período  $T$ . Por sua vez, quanto mais alto o limite de frequência, mais estreita é a propagação da função de auto-correlação (Figura 2.16b) e vice-versa. Se não existisse limite de frequência a função de auto-correlação seria a função de Dirac para  $\tau = 0$ , ou seja um impulso unitário, o que na realidade não acontece.

A função de auto-correlação pode ser convertida para o domínio da frequência, aplicando as transformadas de Fourier

$$S_{ff}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} R_{ff}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (2.129)$$

também conhecida como densidade auto-espectral (ASD – *Auto-Spectral Density*) ou espectro de potência (PSD – *Power Spectral Density*). O auto-espectro é uma função real que quantifica a distribuição do conteúdo energético do sinal no domínio da frequência (Magalhães, 2012).

Se considerarmos simultaneamente as funções de força e resposta aleatória, podemos definir as funções de correlação cruzada e espectro cruzado, respetivamente, por

$$R_{fx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{fx}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.130)$$

e

$$S_{fx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{fx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (2.131)$$

O auto-espectro pode ser também definido em termos de resposta como

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (2.132)$$

Os auto-espectros da força de excitação e da resposta podem ser relacionados por

$$S_{xx}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{ff}(\omega), \quad (2.133)$$

que permite obter a amplitude da função de resposta em frequência  $H(\omega)$ .

Outras relações baseadas nas funções de correlação cruzada podem ser obtidas (Maia e Silva, 1997)

$$S_{fx}(\omega) = H(\omega) S_{ff}(\omega) \quad (2.134)$$

e

$$S_{xx}(\omega) = H(\omega) S_{xf}(\omega), \quad (2.135)$$

as quais têm a vantagem de permitirem identificar a amplitude e a fase da função de resposta em frequência  $H(\omega)$ .

### 2.2.7 – Função de Resposta em Frequência

A Função Resposta em Frequência (FRF) também denominada por recetância ou função de transferência, representada por  $\alpha(\omega)$ , é uma quantidade complexa, e descreve a relação entre a resposta em termos de deslocamento e a força de excitação aplicada a um sistema, caracterizando assim as suas propriedades dinâmicas (Maia e Silva, 1997). Uma FRF é constituída pela parte real, a parte imaginária (Imag) e a frequência. Assim só é possível representar uma FRF num único gráfico se este for tridimensional, como representado na Figura 2.17.

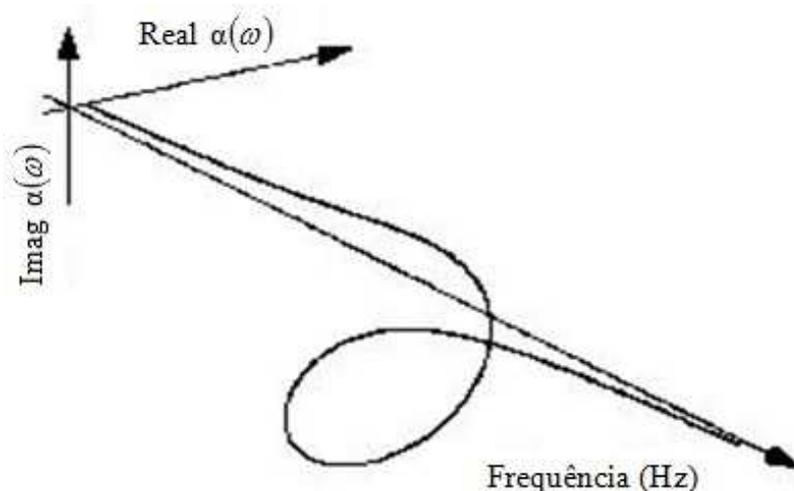


Figura 2.17 – Representação tridimensional da FRF (adaptado de Soeiro, 2001).

No entanto, esta não é a melhor forma para representar uma FRF. Assim, para uma melhor perceção, a FRF pode ser representada em dois gráficos separados. A Figura 2.18a representa a parte real em função da frequência e a Figura 2.18b representa a parte imaginária em função da frequência.

Contudo, a forma mais comum de representar uma FRF é através do diagrama de Bode, que é constituído pela representação da magnitude e ângulo de fase de  $\alpha(\omega)$  em função da frequência, como mostrado, respetivamente, na Figura 2.19a e 2.19b. O gráfico da Figura 2.19a é semelhante ao da Figura 2.10. A diferença é que a magnitude de  $\alpha(\omega)$  é a razão  $X/F$ , e não a razão adimensional  $X/X_0$  (2.97). Assim

$$\alpha(\omega) = \frac{X}{F} = \frac{1/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}. \quad (2.136)$$

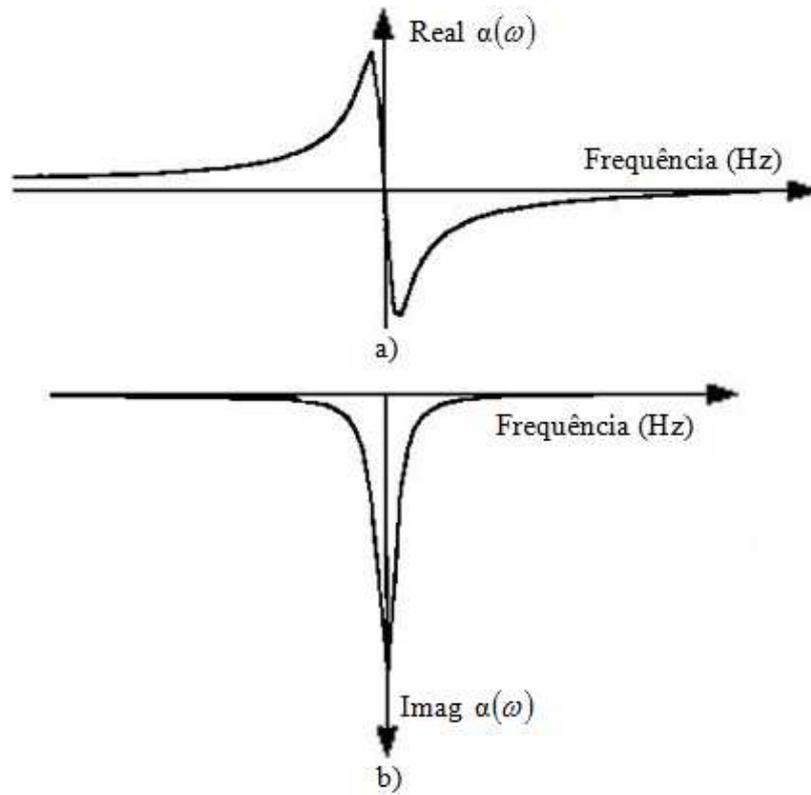


Figura 2.18 – a) Parte real e b) Parte imaginária da FRF (adaptado de Soeiro, 2001).

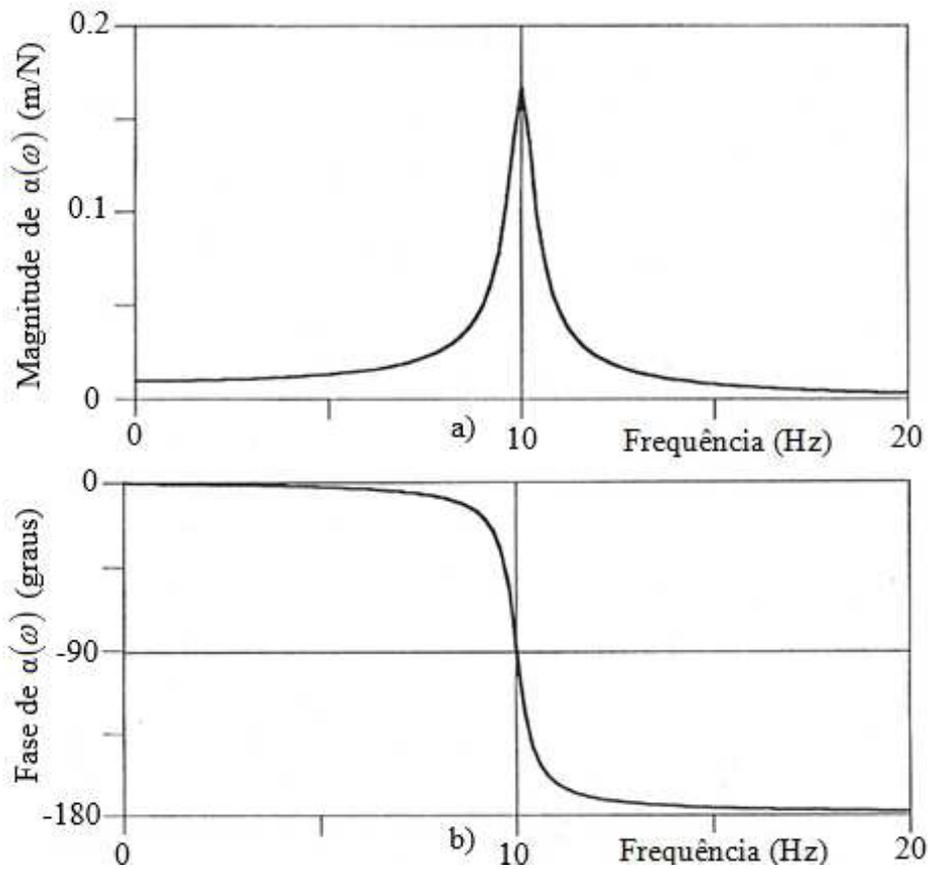


Figura 2.19 – Representação de: a) magnitude e b) ângulo de fase de  $\alpha(\omega)$  em função da frequência (adaptado de Maia e Silva, 1997).

Se representarmos  $\alpha(\omega)$  no plano Real/Imaginário, também conhecido por plano de Argand, obtemos um círculo que contém informação acerca da resposta do sistema, no qual se representa a FRF de um sistema em termos da amplitude da resposta e do respetivo ângulo de fase (Moutinho, 2007). Essa representação é conhecida por diagrama de Nyquist (Figura 2.19), e baseia-se na representação gráfica dos vetores que definem o conteúdo da FRF em coordenadas polares para valores de frequência a variar de zero até infinito (Moutinho, 2007).

Através do diagrama de Nyquist é possível observar que quando  $\omega = 0$  o fator de amplificação dinâmica da FRF é 1 e quando  $\omega \rightarrow \infty$  o fator de amplificação dinâmica tende para zero, qualquer que seja o nível de amortecimento do sistema. Isso pode ser comprovado por aplicação da Eq. (2.136).

No caso de  $\omega = \omega_n$  a amplitude é máxima, como já discutido no sub-capítulo 2.2.4 e o ângulo de fase vale  $90^\circ$ , como se pode verificar por aplicação da Eq. (2.103), em que  $\omega_n$  corresponde ao ponto definido pela interseção da curva com o eixo imaginário.

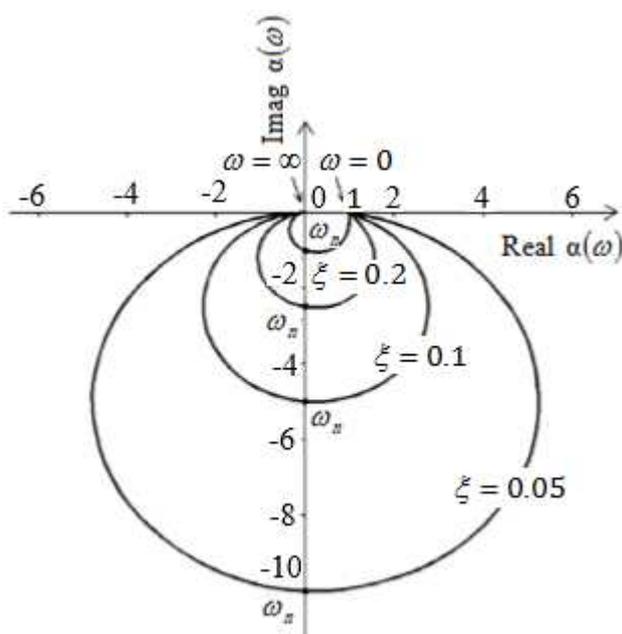


Figura 2.20 – Representação do diagrama de Nyquist para um sistema com um GDL em função de várias razões de amortecimento (adaptado de Moutinho, 2007).

Pelo diagrama de Nyquist observa-se também que a amplitude da resposta varia com as razões de amortecimento.

### 2.2.8 – Método da Largura de Banda de Média Potência da Amplitude do Pico

O método da largura de banda de média potência é o método mais simples para identificar as razões de amortecimento  $\xi$  de um sistema. É o método ideal para casos em que as FRF's exibem modos de vibração bem separados e o amortecimento não seja muito elevado, como é o caso dos modelos ensaiados neste trabalho. Pelo método da largura de banda de média potência podem ser determinadas as razões de amortecimento para cada modo (Beards, 1996), tal que

$$\xi_i = \frac{\Delta\omega_i}{2\omega_i}, \quad (2.137)$$

onde  $\Delta\omega_i = p_{2_i} - p_{1_i}$  é a largura de banda em frequência entre os  $i$ -ésimos pontos de média potência  $p_{1_i}$  e  $p_{2_i}$ , e  $\omega_i$  é a  $i$ -ésima frequência natural circular do modo de vibração que está entre  $p_{1_i}$  e  $p_{2_i}$ . Uma vez conhecida a  $i$ -ésima amplitude máxima  $X_{máx_i}$ , os  $i$ -ésimos pontos de média potência são encontrados quando a  $i$ -ésima amplitude de média potência  $X_{p_i}$  é determinada, em que

$$X_{p_i} = \frac{X_{máx_i}}{\sqrt{2}}. \quad (2.138)$$

A Figura 2.21 mostra um exemplo de aplicação do método da largura de banda de média potência. A Figura 2.21b é uma representação pormenorizada do pico assinalado a preto na Figura 2.21a.

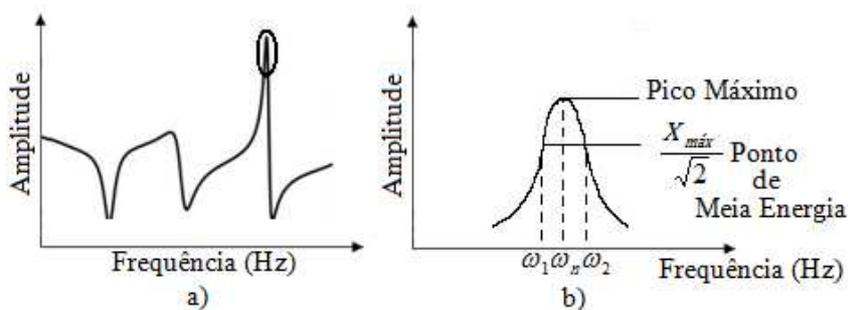


Figura 2.21 – a) Picos de ressonância e b) Exemplo de aplicação do método do ponto de meia energia.

### 2.2.9 – Sistema Dinâmico com Múltiplos GDL's

Para um sistema dinâmico, com vários graus de liberdade, a equação de movimento que governa a resposta dinâmica do sistema, quando sujeito a vibrações externas, é dada na forma matricial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (2.139)$$

onde,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$ , denotam, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema, e  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{f}(t)$ , denotam, respetivamente, os vetores aceleração, velocidade, deslocamento e excitação externa em função do tempo.

Para um sistema não amortecido e sem perturbação externa, a Eq. (2.139) é reduzida a

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}. \quad (2.140)$$

Uma solução do sistema linear homogêneo de segunda ordem (2.140) pode ser escrita como

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}_i \cos(\omega_i t + \psi_i), \quad (2.141)$$

onde  $\psi_i$  é um ângulo de mudança de fase,  $\boldsymbol{\varphi}_i$  representa um vetor próprio e  $\omega_i$  está relacionado com o valor próprio do problema de valores e vetores próprios, com  $i = 1, \dots, n$ , como se explica a seguir.

Calculando a segunda derivada da Eq. (2.141) em ordem a  $t$  obtém-se

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\omega_i^2 \boldsymbol{\varphi}_i \cos(\omega_i t + \psi_i), \quad (2.142)$$

que em conjunto com (2.141) pode ser inserido na expressão (2.140), obtendo-se

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_i. \quad (2.143)$$

Pré-multiplicando a Eq. (2.143) por  $\mathbf{M}^{-1}$  pode-se escrever a igualdade

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_i = \omega_i^2 \boldsymbol{\varphi}_i, \quad (2.144)$$

ou, introduzir a matriz identidade,

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{I})\boldsymbol{\varphi}_i = \mathbf{0}. \quad (2.145)$$

De modo a existir uma solução não-trivial,  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{I}$  deve ser singular. Assim,

$$\det(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{I}) = 0. \quad (2.146)$$

A partir de (2.146) pode-se determinar os valores próprios  $\lambda_i$ , em que

$$\lambda_i = \omega_i^2, \quad (2.147)$$

e cada valor próprio tem um vetor próprio  $\boldsymbol{\varphi}_i \neq \mathbf{0}$  associado, o qual pode então ser obtido a partir da solução de (2.143). Os vetores próprios  $\boldsymbol{\varphi}_i$  correspondem aos modos de vibração, cujas componentes representam amplitudes, e  $\omega_i$  representam as

frequências naturais circulares medidas em rad/s, definidas como as raízes quadradas positivas dos valores próprios. Note-se que para os sistemas de  $n$  equações (ou  $n$  graus de liberdade), existem  $n$  valores próprios  $\lambda_i$  e  $n$  frequências naturais  $\omega_i^2$ , com  $n$  vetores próprios  $\boldsymbol{\varphi}_i$  associados.

A solução geral para (2.140) pode ser expressa como combinação linear de  $n$  soluções linearmente independentes (2.141), o que acontece se os valores próprios forem distintos, da seguinte maneira

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \boldsymbol{\varphi}_i \cos(\omega_i t + \psi_i), \quad (2.148)$$

onde as constantes  $C_i$  e  $\psi_i$  podem ser determinadas através das condições iniciais.

As equações (2.143) e (2.145), também podem ser reescritas, respetivamente, como

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{\Phi}, \quad (2.149)$$

e

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \boldsymbol{\Lambda}^2)\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{O}, \quad (2.150)$$

onde  $\boldsymbol{\Phi}$  é uma matriz  $n \times n$  contendo nas colunas os vetores próprios  $\boldsymbol{\varphi}_i$ , ou seja,

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{11} & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{\varphi}_{n1} & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda}^2 \text{ é uma matriz diagonal contendo os valores próprios } \omega_i^2, \text{ e } \mathbf{O}$$

é a matriz  $n \times n$  nula. A solução geral (2.148) pode ser escrita em termos da matriz  $\boldsymbol{\Phi}$

e de um vetor  $\mathbf{w}(t) = [C_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1), \dots, C_n \cos(\omega_n t + \psi_n)]^T$  como

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{w}(t). \quad (2.151)$$

Considere-se agora o caso de um sistema com múltiplos GDL's, com amortecimento viscoso, sujeito a carregamento. A resposta no domínio da frequência, ou recetância  $\alpha_{jk}(\omega)$ , passa a ser definida pela soma de todas as contribuições dos  $n$  GDL's, tal que

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{ji}\varphi_{ki}}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2i\xi_i\omega\omega_i}, \quad (2.152)$$

em que  $\varphi_{ji}$  e  $\varphi_{ki}$  representam, respetivamente, as componentes  $j$  e  $k$  do modo de vibração  $\boldsymbol{\varphi}_i$ , e  $j$  e  $k$  representam, respetivamente, a coordenada da resposta e a

coordenada do carregamento, encontrando-se os modos de vibração normalizados em relação à massa.

Como exemplo, consideremos um sistema não amortecido com 4 GDL's, em que as medições da resposta são efetuadas no ponto coincidente com o ponto do carregamento  $k$ . Assim, a Eq. (2.152) adquire a forma

$$\alpha_{kk}(\omega) = \frac{X_k}{F_k} = \sum_{i=1}^4 \frac{\varphi_{ki}^2}{\omega_i^2 - \omega^2} = \frac{\varphi_{k1}^2}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\varphi_{k2}^2}{\omega_2^2 - \omega^2} + \frac{\varphi_{k3}^2}{\omega_3^2 - \omega^2} + \frac{\varphi_{k4}^2}{\omega_4^2 - \omega^2}. \quad (2.153)$$

Para este caso, a matriz  $\Phi$  contém apenas uma linha com os elementos  $\Phi = [\varphi_{k1} \quad \varphi_{k2} \quad \varphi_{k3} \quad \varphi_{k4}]$ .

As Figuras 2.22 representa um digrama de Bode exemplificativo para o sistema não amortecido com 4 GDL's.

A partir do gráfico da magnitude é possível observar quatro picos de amplitude, correspondente às quatro frequências naturais do sistema. Observa-se pelo gráfico da fase (Figura 2.22b) que para cada frequência natural corresponde uma mudança de fase de  $180^\circ$ . No entanto, é também visível, no mesmo gráfico, a ocorrência de mudança de fase para valores de frequências intermédios entre duas frequências naturais.

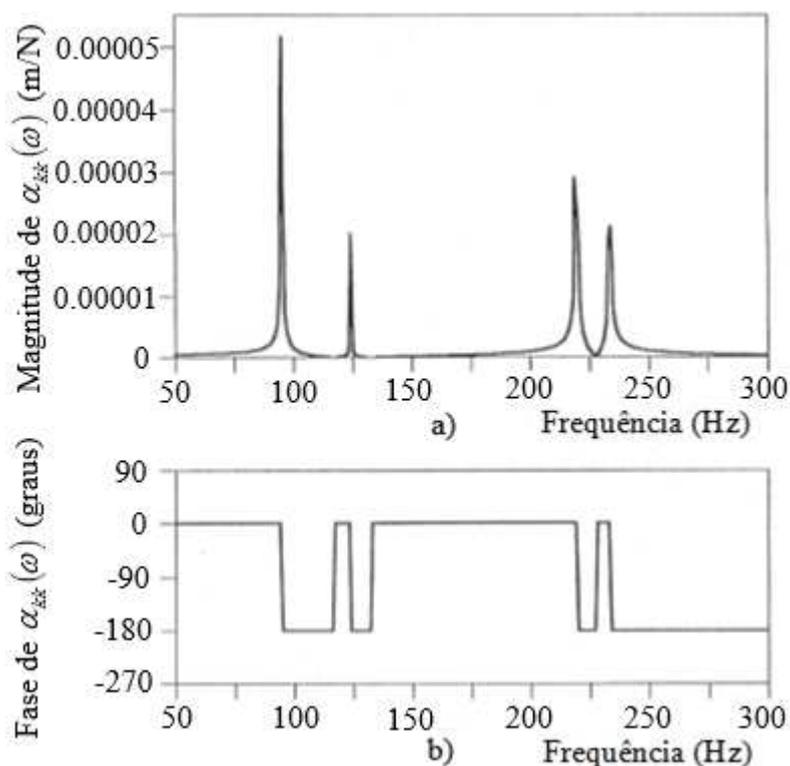


Figura 2.22 – Representação de: a) magnitude e b) ângulo de fase de  $\alpha_{kk}(\omega)$  em função da frequência para um sistema com 4 GDL's sem/baixo amortecimento (adaptado de Maia e Silva, 1997).

No caso apresentado os valores das amplitudes no ponto medido, correspondente às quatro frequências naturais, teriam um valor com sinal negativo, uma vez que a mudança de fase ocorre de 0 para  $-180^\circ$ .

### 2.3 – Análise Modal Experimental

A análise modal é uma ferramenta que permite ter uma compreensão das características estruturais, condições de operação e comportamento estrutural que possibilita projetar um sistema novo no sentido de obter o seu comportamento dinâmico ótimo ou resolução de problemas dinâmicos estruturais em projetos já existentes.

O comportamento dinâmico de uma estrutura pode ser conhecido, para além da via analítica, através de ensaios experimentais. Neste tipo de ensaio, a estrutura é submetida a uma força excitadora externa variável no tempo, provocando o movimento vibratório. O objetivo é obter conjuntos de Funções de Resposta em Frequências (FRF's), (Figura 2.21) a partir das quais é possível analisar e extrair as propriedades modais da estrutura, ou seja, obter os modos de vibração e as frequências naturais ou de ressonância. A identificação das propriedades dinâmicas de uma estrutura a partir de dados obtidos experimentalmente é denominado por identificação modal. O conhecimento das características dinâmicas de modelos físicos permite a validação do comportamento dinâmico de modelos numéricos previamente desenvolvidos.

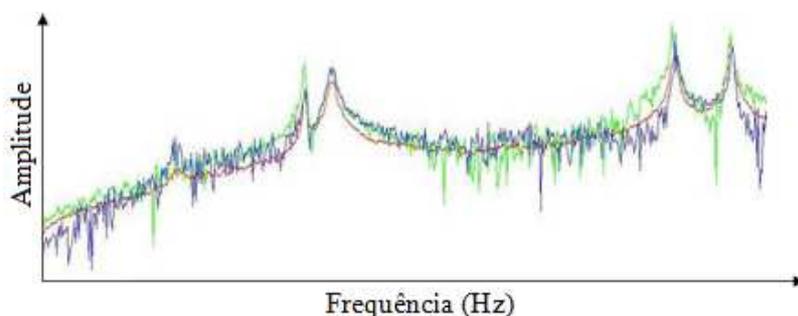


Figura 2.21 – Exemplo de ajuste da curva (representada a vermelho) para duas FRF's obtidas.

Existem alguns aspetos a ter em conta em um processo de análise modal experimental, de modo a conseguir uma boa aquisição de dados para posterior identificação modal. Os aspetos a considerar são (Ewins, 2000):

- aspetos relacionados com o suporte da estrutura a ser medida e o mecanismo de excitação;
- o uso correto de transdutores para medição da resposta do movimento e da força de excitação;
- o processador de sinal apropriado para o tipo de teste pretendido.

As frequências naturais de vibração de uma estrutura por via experimental, podem ser obtidas com esta livre no espaço ou fixa em algum ponto por meio de um aperto rígido. No caso de um ensaio com a estrutura livre no espaço, esse deve ser efetuado de modo que a estrutura permaneça suspensa, de tal forma que a suspensão tenha a mínima influência no ensaio. Normalmente usam-se elementos de suspensão com elevada elasticidade, como é o caso de molas macias ou elásticos, como representado na Figura 2.22. No caso de a estrutura a ensaiar permanecer fixa, as condições de fronteira serão diferentes do caso em que a estrutura é ensaiada livre no espaço. Como tal as frequências naturais de vibração obtidas variam de caso para caso, dependendo das condições de fronteira.

Os mecanismos de excitação estão relacionados com uso de geradores de vibrações, também conhecidos na linguagem anglo-saxónica por *shaker* ou o uso de alguma forma de excitação transiente, tais como martelos de impacto, ou até pela excitação provocada pelas condições de serviço.

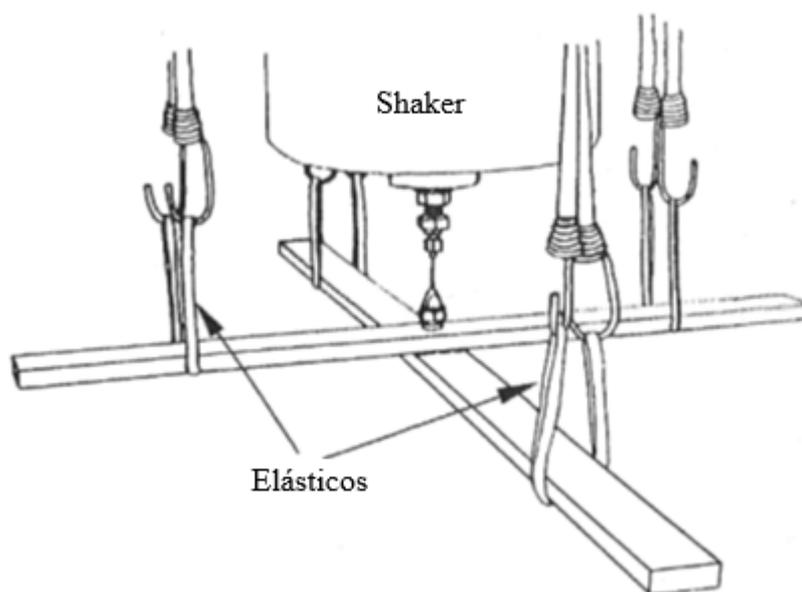


Figura 2.22 – Exemplo de uma suspensão elástica (adaptado de Maia e Silva, 1997).

O suporte do sistema de excitação é normalmente efetuado de forma a estar fixo ao solo ou por meio de um sistema de suspensão. No caso do *shaker* ser fixo ao solo, deve ter-se o cuidado de evitar a transmissão de vibrações através do apoio para o sistema, normalmente colocando elementos com alto fator de amortecimento, como borracha, para o isolamento do *shaker*. No caso do *shaker* estar suspenso, é necessário ter em conta que se ele moverá como resultado das forças geradas. Quanto maior a massa menor o movimento do *shaker*. Esse movimento tem o inconveniente de gerar baixas

frequências quando os modos do sistema de suspensão do *shaker* são excitados. Isso faz com que o movimento atinja grandes amplitudes e possam ocorrer danos nos componentes do *shaker* ou nos transdutores. Uma forma de solucionar esse problema é adicionar massa de forma a aumentar a inércia do *shaker*.

Os transdutores são elementos que medem as ações de entrada e a resposta da estrutura. Os transdutores piezoelétricos são largamente usados para detetar forças, no caso do sensor de força, e acelerações da estrutura, no caso de acelerómetro, revestindo-se de maior importância assegurar que eles interferem o menos possível com a estrutura a medir e que as suas especificações sejam as adequadas para as escalas de frequência e amplitude que se pretendem medir. Outro tipo de transdutor usado para medir a resposta em termos de velocidade ou deslocamento é o laser de interferometria Doppler, usado também neste trabalho.

Na Figura 2.23, apresenta-se o exemplo de uma configuração típica para um ensaio experimental de vibrações, com a peça a testar e o shaker suspensos por elementos flexíveis, um sensor de força e um acelerómetro.

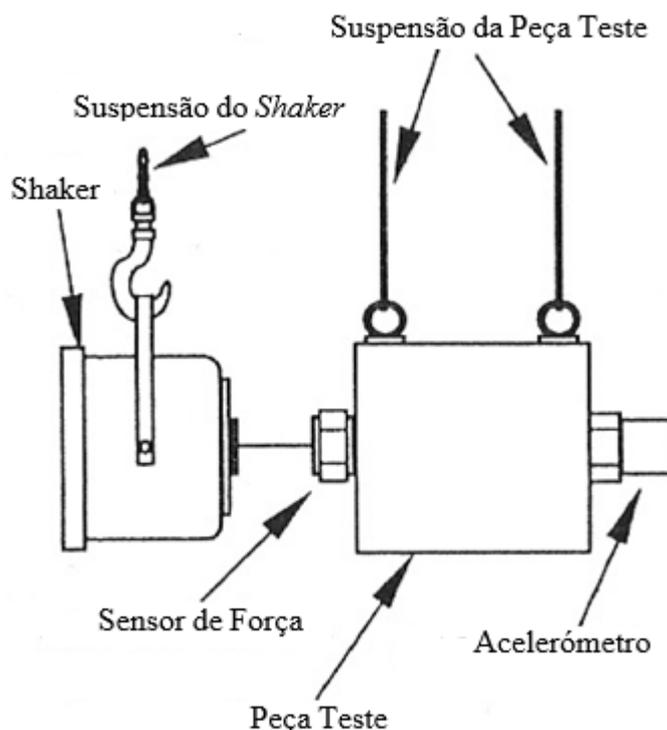


Figura 2.23 – Exemplo de uma configuração típica para um ensaio de vibrações (adaptado de Maia e Silva, 1997).

Uma escolha criteriosa do equipamento experimental a utilizar nesse tipo análises implica um conhecimento prévio do comportamento dinâmico esperado para estrutura (Maireles, 2008). E de fato, o equipamento a utilizar depende muito da peça que queremos analisar, nomeadamente da sua massa, rigidez e geometria. Assim, e em

função das propriedades físicas e geométricas da peça a ensaiar, é necessário selecionar (Proença e Azevedo, 2009):

- o controlador (computador), apoiado por um *software*, que procede à gestão do ensaio através do controle da excitação, da aquisição dos sinais de resposta, e consequente identificação modal;
- o sistema de excitação, que é responsável pela aplicação de uma excitação com características controladas, nomeadamente em termos de intensidade e frequência;
- o sistema de medição, que é responsável pela medição simultânea dos sinais de excitação e resposta, nomeadamente através de sensores de força e acelerómetros;
- sistema de conversão e tratamento do sinal (analisador espectral), para conversão dos sinais analógicos em sinais digitais, para posterior análise modal, recorrendo a um *software* de análise modal.

Na Figura 2.24 pode-se observar o esquema geral de um sistema normalmente usado em um ensaio de vibrações com recurso a um vibrador ou *shaker*.

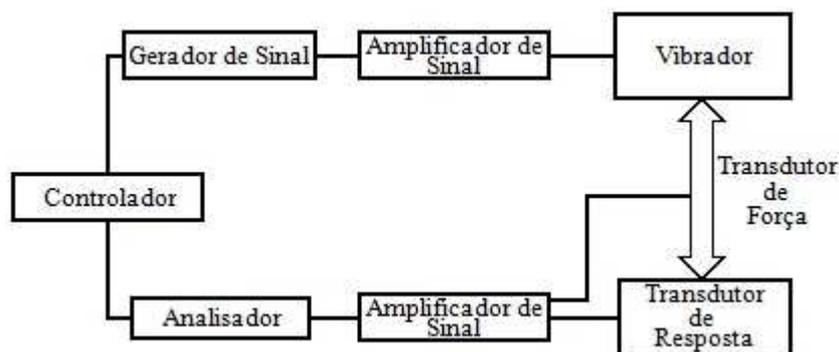


Figura 2.24 – Esquema geral de um sistema de análise de vibrações com recurso a um vibrador ou *shaker* (adaptado de Proença e Azevedo (2009)).

## 2.4 – Identificação Modal

A identificação modal é a ultima fase da análise modal experimental, e está relacionada com a análise e tratamento dos dados recolhidos, ou seja, com a obtenção dos modos que caracterizam a estrutura. Nos dias de hoje esse procedimento é efetuado por meio de algoritmos desenvolvidos para o propósito e que estão integrados em *softwares* comerciais de análise modal em conjunto com aplicações para recolha de dados experimentais (Maia e Silva, 1997).

Neste sub-capítulo pretende-se dar uma visão geral da classificação dos métodos de identificação modal.

Os métodos de identificação modal podem ser classificados em dois grandes grupos: métodos no domínio do tempo e métodos no domínio da frequência (Ewins, 2000). Por sua vez os métodos no domínio do tempo e da frequência podem ser divididos em diretos e indiretos. O termo indireto significa que o modelo modal é identificado a partir das FRF's, a partir das quais se obtém as frequências naturais, fatores de amortecimento, modos de vibração e respectivas fases. Por outro lado, no método direto, a identificação modal é efetuada diretamente na equação geral do equilíbrio dinâmico.

Uma outra divisão pode ser feita com base no número de modos que podem ser analisados. A este respeito pode-se ter a análise de um único grau de liberdade (SDOF – *Single Degree of Freedom*) e de múltiplos graus de liberdade (MDOF – *Multi Degree of Freedom*). No domínio do tempo tem-se somente a análise MDOF, enquanto no domínio da frequência com o método indireto pode-se ter análises SDOF e MDOF, enquanto com o método direto tem-se apenas a análise MDOF (Soeiro, 2001).

Por último, e dependendo do número de entradas (*input's*) e saídas (*output's*) envolvidas, existem três diferentes tipos de medição das FRF's. A maneira mais simples de medir uma única curva FRF é denominada por SISO (*Single Input, Single Output*), ou seja, são métodos de uma única entrada e saída. Os métodos SISO não impedem que sejam analisados sistemas com múltiplos graus de liberdade, apenas requerem a medição de um grau de liberdade de cada vez, nos casos em que apenas exista um transdutor de resposta. Outros métodos permitem que várias FRF's sejam analisadas simultaneamente, com respostas obtidas em vários pontos da estrutura, mas apenas com um ponto de excitação. São denominados por métodos globais ou métodos de única entrada e múltiplas saídas (SIMO – *Single Input, Multiple Output*). Com este método é possível obter um conjunto de FRF's (uma FRF para cada ponto medido) que teoricamente não variam de uma para outra, relativamente às suas frequências naturais e coeficiente de amortecimento, sendo assim possível obter um conjunto único e consistente daquelas propriedades processando várias FRF's ao mesmo tempo. Existem outros métodos que podem processar simultaneamente todas as FRF's obtidas a partir de vários pontos de resposta e excitação. São métodos denominados por múltiplas entradas ou referências e múltiplas saídas (MIMO – *Multiple Input, Multiple Output*). Na Figura 2.25 apresenta-se a classificação dos métodos de identificação modal.

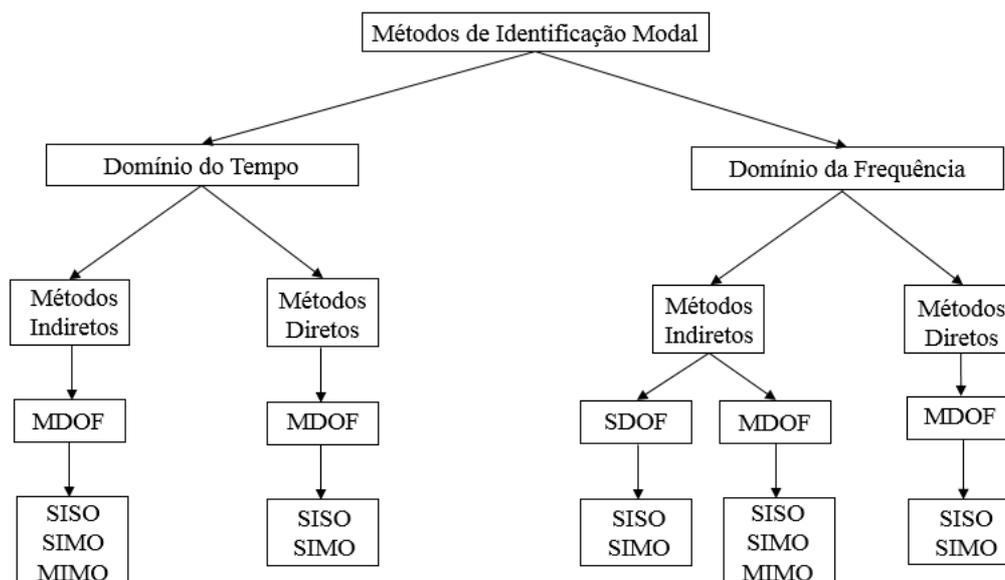


Figura 2.25 – Classificação dos métodos de identificação modal.

## 2.5 – Otimização e Melhoramento de Modelos de Elementos Finitos

Para implementar qualquer tipo de modificação em uma estrutura é conveniente efetuar um estudo que permita analisar de que forma o comportamento dinâmico é alterado efetuando alterações em cada um dos parâmetros físicos do sistema independentemente (Maia e Silva, 1997). A análise de sensibilidade das características dinâmicas de um sistema com respeito às modificações dos seus parâmetros físicos permite perceber se essas modificações são de facto importantes para uma contribuição efetiva do melhoramento do comportamento do sistema e, conseqüentemente, para a sua otimização. A forma mais efetiva de utilizar os resultados da análise de sensibilidade na modificação estrutural, é integrando-os num processo iterativo, em que é aplicada uma alteração de cada vez.

O processo de melhoramento de modelos de elementos finitos ou modificação estrutural é baseado num algoritmo que segue uma estrutura geral, representada na Figura 2.26, comum a todos os algoritmos desenvolvidos para correlação e correção de modelos de elementos finitos por métodos iterativos (Kaloutsey, 2007). A correlação é determinada através de uma função objetivo que envolve os modos de vibração e as frequências naturais.

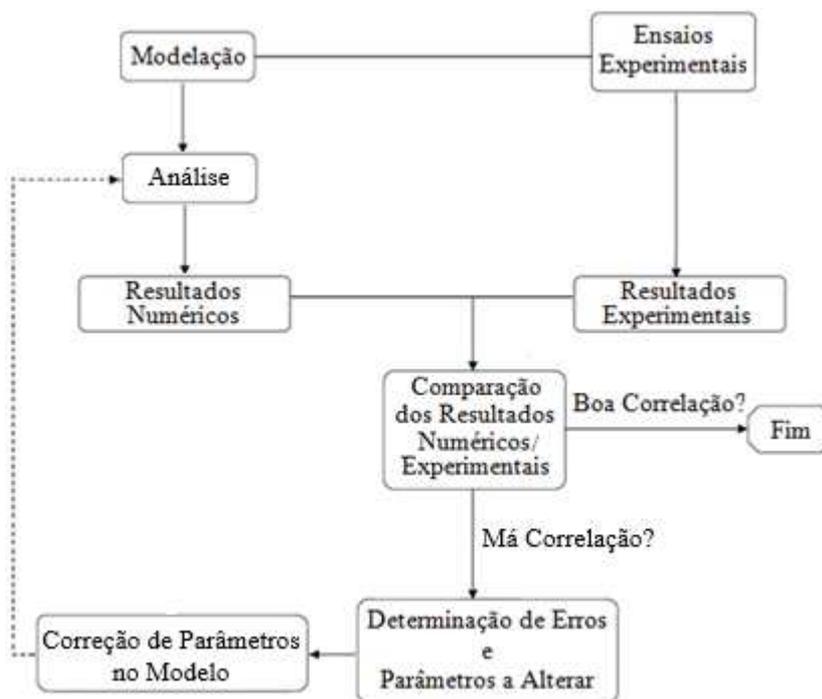


Figura 2.26 – Estrutura geral do algoritmo para o processo de otimização de modelos de elementos finitos (adaptado de Kaloutsey, 2007).

Um dos critérios utilizado para comparação entre os valores dos modos de vibração do modelo de referência e o modelo de elementos finitos é o *Modal Assurance Criterion* (MAC), desenvolvido por Allemang e Brown (1982). O valor do MAC entre

dois modos  $\boldsymbol{\varphi}_i$  e  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{j_q}$  é definido por

$$MAC_{ij} = \frac{\left( \boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{j_q} \right)^2}{\left( \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i \right) \left( \left( \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{j_q} \right)^T \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{j_q} \right)}, \quad (2.154)$$

onde  $\boldsymbol{\varphi}_i$  é o vetor de referência que contém os modos de vibração experimentais  $i$  e  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{j_q}$  é vetor que contém os modos de vibração numéricos estimados  $j$  a cada iteração  $q$ , com  $q \geq 0$ .

O valor do MAC é calculado entre todas as combinações possíveis de  $i$  com  $j$ . Os valores escalares obtidos pela aplicação do MAC entre um modo de vibração experimental e um modo de vibração numérico, são ordenados numa matriz, que nos casos em que se verifica  $i = j$ , o valor do MAC é disposto na diagonal da matriz.

Se a correlação entre dois modos de vibração for boa, o valor na diagonal da matriz MAC aproxima-se de 1 (um), ou seja, existe 100% de correlação, e aproxima-se do valor 0 (zero), ou é nulo, se a correlação for má, ou seja, existe 0% de correlação.

Dois modelos estão perfeitamente correlacionados quando a diagonal da matriz MAC é unitária, enquanto os valores fora da diagonal são nulos ou quase nulos. Os valores fora da diagonal MAC são obtidos para os casos em que  $i \neq j$ . Na realidade a obtenção de valores MAC iguais a 1 (um) só acontece se os modelos forem iguais, sendo aceitável valores acima de 0.9 (90% de correlação), da mesma forma que se considera que valores abaixo de 0.1 (10% de correlação) sejam indicativos de modos que não se correlacionam.

A equação do MAC é neste trabalho introduzida na função objetivo utilizada para avaliar a correlação entre os dois modelos. Outros termos, que avaliam os modos não correlacionados e os valores das frequências naturais entre os dois modelos, são também incluídos na função objetivo, como veremos nos capítulos seguintes.

### 2.5.1 – Comandos e Algoritmos de Otimização usados no Melhoramento de Modelos de Elementos Finitos

Neste sub-capítulo é feita uma breve introdução aos comandos, ou *solvers*, e aos algoritmos usados neste trabalho. São usados dois *solvers* de procura global, fornecidos pela *toolbox* do MatLab<sup>®</sup>, o GlobalSearch e o MultiStart, que substituem o *solver* local, *fmincon*, previamente usado no programa de *updating*.

O comando *fmincon* é usado para encontrar o mínimo local de um problema não linear constrangido, de múltiplas variáveis. Por sua vez, este *solver* pode trabalhar com quatro tipos de algoritmos dentro do MatLab<sup>®</sup> a partir de um dado ponto inicial. São eles, o algoritmo *active-set*, o *interior-point*, o SQP ou PSQ (Programação Sequencial Quadrática) e o *trust-region-reflective*.

Os problemas de otimização consistem na minimização ou maximização de uma função que pode ser sujeita a constrangimentos, definida de forma geral por

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a } & g_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (i = 1, \dots, m_e) \\ & h_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, m_f) \\ & l_k \leq \mathbf{x} \leq u_k \quad (k = 1, \dots, m_a) \end{aligned} \quad (2.155)$$

onde  $f(\mathbf{x})$  é a função objetivo,  $\mathbf{x}$  é um vetor de  $n$  variáveis a otimizar,  $g_i(\mathbf{x})$  é uma função com  $m_e$  constrangimentos de igualdade,  $h_j(\mathbf{x})$  é uma função com  $m_f$  constrangimentos de desigualdade, e  $l$  e  $u$  são constrangimentos de limite em que  $l$  é o limite inferior e  $u$  é o limite superior (MathWorks, 2011 e Meireles, 2007).

Aqueles problemas em que tanto a função objetivo como os constrangimentos são funções lineares, constituem os problemas de programação linear (PL). Quando o problema possui uma função objetivo e constrangimentos não lineares estamos perante um problema de programação não-linear (PNL). A solução para um problema do tipo PNL requer um procedimento iterativo de modo a estabelecer uma direção de procura a cada iteração. A solução das equações de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) formam a base de muitos dos algoritmos de PNL, e baseiam-se diretamente no cálculo dos multiplicadores de Lagrange, tal que

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*) &= 0 \\ \lambda_i \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}^*) &= 0, \quad i = 1, \dots, m_e, \\ \lambda_i &\geq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m_f \end{aligned} \quad (2.156)$$

onde, a primeira equação descreve a perpendicularidade entre os gradientes da função objetivo e os constrangimentos ativos no ponto onde ocorre a solução  $\mathbf{x}^*$ . Para os gradientes serem anulados são necessários os multiplicadores de Lagrange  $\lambda_i (i = 1, \dots, m_f)$ , de modo a equilibrar os desvios em amplitude da função objetivo e os gradientes dos constrangimentos. Aos constrangimentos não ativos estão associadas multiplicadores de Lagrange nulos, o que está implícito nas duas últimas equações de (2.156) (MathWorks, 2011 e Meireles, 2007).

O cálculo do gradiente faz-se analiticamente ou através de derivadas parciais usando um método de diferenciação numérica por diferenças finitas. Para gradientes por diferenças finitas faz-se uma alteração em cada variável  $x$  do problema, e calcula-se a razão de variação na função objetivo. Esta avaliação é feita à função objetivo com o intuito de se obter o mínimo da função dentro do intervalo estipulado pelo incremento das variáveis previstas no problema. Concluída a avaliação da função, a metodologia prossegue de volta à iteração principal,  $k$ , numa linha de procura que é a direção dada por

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{H}_k^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}_k), \quad (2.157)$$

onde  $\mathbf{H}$  é a matriz Hessiana, uma matriz quadrada das derivadas parciais de segunda ordem da função objetivo (Meireles, 2007).

Dos métodos que usam a informação de gradiente, os mais usados são os métodos Quasi-Newton. Os métodos quasi-Newton constrangidos convergem rapidamente, por isso são utilizados para obter resultados de segunda ordem em relação

às equações de KKT, usando um procedimento de melhoramento quasi-Newton. Estes métodos são normalmente conhecidos como métodos de Programação Sequencial Quadrática (PSQ) e recorrem a um sub-problema de programação quadrática (PQ) que é resolvido para cada iteração principal, cuja solução é usada para formar uma direção de procura num procedimento de procura em linha (MathWorks, 2011 e Meireles, 2007).

Com base no problema descrito em (2.155) pode ser formulado um sub-problema de PQ, baseado em uma aproximação quadrática da função Lagrangeana (MathWorks, 2011)

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(\mathbf{x}). \quad (2.158)$$

A partir da Eq. (2.155), e assumindo que os constrangimentos de limite são expressos por constrangimentos de desigualdade, o subproblema de PQ obtém-se linearizando os constrangimentos não lineares, tal que (MathWorks, 2011)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n} & \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H}_k \mathbf{d} + \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d} \\ \nabla g_i(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d} + g_i(\mathbf{x}_k) &= 0, \quad i = 1, \dots, m_e \\ \nabla g_i(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d} + g_i(\mathbf{x}_k) &\leq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.159)$$

Este sub-problema pode ser resolvido usando qualquer algoritmo de PQ. A solução é utilizada para formar uma nova iteração do tipo (MathWorks, 2011)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k, \quad (2.160)$$

onde  $\mathbf{x}_k$  representa a iteração em curso e  $\alpha_k \geq 0$  é um parâmetro escalar de incremento que representa a distância até ao mínimo. O parâmetro  $\alpha_k$  é determinado por um procedimento de procura em linha assim que uma redução suficiente na função de mérito seja obtida. A matriz  $\mathbf{H}_k$  é uma aproximação positiva da matriz Hessiana da função de Lagrange (Eq. 2.158) e pode ser atualizada por qualquer um dos métodos quasi-Newton, embora o método *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno* (BFGS) seja o mais usado (MathWorks, 2011 e Meireles, 2007).

A implementação da PSQ consiste em três etapas principais: atualização da matriz Hessiana, obtenção da solução por programação quadrática e pesquisa de linha e cálculo da função de mérito (MathWorks, 2011).

A cada iteração principal, uma aproximação quasi-Newton positiva da matriz Hessiana, da função de Lagrange,  $\mathbf{H}$ , é calculada usando o método BFGS (MathWorks, 2011)

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{\mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k} - \frac{\mathbf{H}_k \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{s}_k}, \quad (2.161)$$

onde

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k, \quad (2.162)$$

$$\mathbf{q}_k = \left( \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}_{k+1}) \right) - \left( \nabla f(\mathbf{x}_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}_k) \right) \quad (2.163)$$

e  $\lambda_i (i = 1, \dots, m)$  é uma estimativa dos multiplicadores de Lagrange. A cada iteração  $\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k$  deve ser positivo, de modo a obter-se uma Hessiana definida positiva. Se  $\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k$  não é positivo, modifica-se  $\mathbf{q}_k$  elemento a elemento até que  $\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k > 0$ . O objetivo é tornar  $\mathbf{q}_k$  cada vez menor até que  $\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k$  seja maior ou igual a uma pequena tolerância a definir. Se ainda assim  $\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k$  continuar a não ser positivo,  $\mathbf{q}_k$  é modificado adicionando um vetor  $\boldsymbol{\kappa}$  multiplicado por uma constante escalar  $w$ , tal que

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k + w \boldsymbol{\kappa}. \quad (2.164)$$

onde

$$\boldsymbol{\kappa}_i = \nabla g_i(\mathbf{x}_{k+1}) \cdot g_i(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla g_i(\mathbf{x}_k) \cdot g_i(\mathbf{x}_k), \quad (2.165)$$

se  $(\mathbf{q}_k)_i \cdot w < 0$  e  $(\mathbf{q}_k)_i \cdot (\mathbf{s}_k)_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

caso contrário,  $\boldsymbol{\kappa}_i = 0$  e aumenta-se  $w$  sistematicamente até que  $\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k$  seja positivo (MathWorks, 2011 e Meireles, 2007).

Na fase seguinte, para obtenção da solução do problema de programação quadrática, em cada iteração principal do método PSQ, um problema PQ é resolvido da seguinte forma

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d} \in \mathfrak{R}^n} q(\mathbf{d}) &= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H} \mathbf{d} + \mathbf{c}^T \mathbf{d} \\ A_i \mathbf{d} &= \mathbf{b}_i, \quad i = 1, \dots, m_e \\ A_i \mathbf{d} &\leq \mathbf{b}_i, \quad i = m_e + 1, \dots, m_f \end{aligned} \quad (2.166)$$

onde  $A_i$  se refere à  $i$ ésima linha da matriz  $\mathbf{A}$ , de dimensão  $m$  por  $n$ ,  $\mathbf{b}_i$  é um vetor constante de dimensões  $m_e$  e  $m_f$  respetivamente e  $\mathbf{d}$  é o vetor direção de procura desconhecido. O método utilizado usa um procedimento dito ativo (*active set*) também conhecido como um método de projeção. O procedimento para obtenção da solução

envolve duas fases. A primeira fase consiste no cálculo de um ponto admissível (se existir) e a segunda fase consiste na geração de uma sequência de pontos admissíveis iterativamente de modo que convirjam para a solução (MathWorks, 2011 e Meireles, 2007).

Se o ponto obtido a partir do método PSQ não é admissível, então um ponto pode ser encontrado resolvendo o problema de programação linear (MathWorks, 2011 e Meireles, 2007)

$$\min_{\gamma \in \mathcal{R}, \mathbf{x} \in \mathcal{R}^p} \gamma, \text{ tal que} \quad (2.167)$$

$$\begin{aligned} A_i \mathbf{x} &= \mathbf{b}_i, & i &= 1, \dots, m_e \\ A_i \mathbf{x} - \gamma &\leq \mathbf{b}_i, & i &= m_e + 1, \dots, m_f \end{aligned}$$

Um ponto admissível pode ser encontrado, caso exista, ajustando  $\mathbf{x}$  de modo a que satisfaça as equações de constrangimentos e utilizando a Eq. (2.167), resolvendo um conjunto de equações lineares sub-determinadas ou sobredeterminadas, formadas a partir de um conjunto de equações constrangidas. Se existir uma solução para este problema, então a variável  $\gamma$  é o conjunto de inequações de constrangimento máximo neste ponto.

Na terceira e última fase, e como consequência da resolução do problema de PQ, é obtido um vetor  $\mathbf{d}_k$  usado para formar uma nova iteração por aplicação da Eq. (2.160).

O algoritmo `interior-point` faz a abordagem à minimização de problemas com constrangimentos, resolvendo uma sequência de problemas de minimização aproximada. O problema original é do tipo (MathWorks, 201)

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \text{ sujeito a } h(\mathbf{x}) = 0 \text{ e } g(\mathbf{x}) \leq 0. \quad (2.168)$$

Para cada  $\mu > 0$ , o problema aproximado é

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{s}} f_{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{s}} f(\mathbf{x}) - \mu \sum_i \ln s_i, \text{ sujeito a } h(\mathbf{x}) = 0 \text{ e } g(\mathbf{x}) + \mathbf{s} = 0, \quad (2.169)$$

em que as variáveis  $s_i$  permitem transformar a desigualdade  $g(\mathbf{x}) \leq 0$  na igualdade  $g(\mathbf{x}) + \mathbf{s} = 0$ . As variáveis  $s_i$  estão confinadas a ser positivas de modo a que  $\ln s_i$  devolva um número real. Como  $\mu$  diminui para zero, o mínimo de  $f_{\mu}$  deve aproximar-se do mínimo de  $f(\mathbf{x})$ . O termo logarítmico adicionado é chamado de função de barreira.

Para resolver o problema aproximado de (2.169), o algoritmo usa a cada iteração um dos dois tipos de passos. O passo direto em  $(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ , também chamado de método de

Newton para aproximações lineares, tentando resolver as equações de KKT, ou o método dos gradientes conjugados (*Conjugate Gradient*) na região de procura/confiança. Por defeito, o algoritmo tenta primeiro o passo direto. Se não for possível, ele tenta o método dos gradientes conjugados (MathWorks, 2011).

A cada iteração do algoritmo é diminuída a função de mérito dada por

$$f_{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + \nu \|h(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) + \mathbf{s}\|, \quad (2.170)$$

em que o parâmetro  $\nu$  pode aumentar com o número de iterações, a fim de forçar a solução no sentido de esta ser viável (MathWorks, 2011).

Muitos dos métodos usados nos *solvers* são baseados em regiões de confiança (*trust regions*), é o caso do algoritmo `trust-region-reflective` que está baseado no sub-problema

$$\min_{\mathbf{s}} \{q(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in N\}, \quad (2.171)$$

em que a ideia básica é aproximar  $f(\mathbf{x})$  a uma função  $q(\mathbf{s})$  mais simples, o que reflete de forma razoável o comportamento da função  $f(\mathbf{x})$  numa vizinhança  $N$  em torno do ponto  $\mathbf{x}$ . Essa vizinhança é a região de confiança. O ponto atual é atualizado para ser  $\mathbf{x} + \mathbf{s}$  se  $f(\mathbf{x} + \mathbf{s}) < f(\mathbf{x})$ , caso contrário, o ponto atual mantém-se inalterado e  $N$ , a região de confiança, é reduzida e o cálculo é repetido (MathWorks, 2011).

As questões-chave na definição de uma abordagem específica para minimizar  $f(\mathbf{x})$  estão relacionadas com a forma como a função  $q$  (definida no atual ponto  $\mathbf{x}$ ) é escolhida e calculada, como escolher e modificar a região de confiança  $N$ , e como o sub-problema da região de confiança é resolvido com precisão. Matematicamente o sub-problema da região de confiança é definido como

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H} \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{g} \text{ tal que } \|\mathbf{D} \mathbf{s}\| \leq \Delta \right\}, \quad (2.172)$$

onde  $\mathbf{g}$  é o gradiente de  $f$  no ponto  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{D}$  é uma matriz diagonal e  $\Delta$  é um escalar positivo (MathWorks, 2011).

Os *solvers* `GlobalSearch` e `MultiStart` implementam os métodos de procura estocásticos e são similares na técnica de procura de múltiplas soluções ótimas. Ambos trabalham com base num *solver* local, como por exemplo o `fmincon`, partindo de uma variedade de pontos iniciais. Geralmente os pontos de partida são determinados aleatoriamente.

O `GlobalSearch` usa um mecanismo de procura aleatória dividido em duas fases. A Figura 2.27 mostra o fluxograma do processo efetuado pelo `GlobalSearch`.

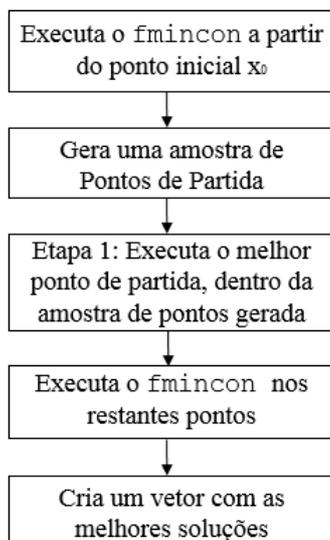


Figura 2.27 – Fluxograma do algoritmo `GlobalSearch` (adaptado de MathWorks, 2011).

Na primeira fase, o ponto de partida definido pelo utilizador e uma quantidade de pontos, também definida pelo utilizador, gerados como pontos de partida, obtidos aleatoriamente, são manipulados pelo *solver* de procura local `fmincon`, para encontrar os candidatos a mínimos locais, por avaliação da função objetivo, rejeitando todos os restantes pontos que são improváveis de alcançar o melhor mínimo local. Assim, o ponto de partida fornecido pelo utilizador e o melhor mínimo local, dos candidatos a mínimos locais, são executados novamente pelo `fmincon`. Na segunda fase são analisados os restantes pontos gerados aleatoriamente e que não foram executados na primeira fase. Após atingir o tempo máximo de execução ou analisar todos os pontos de partida, o algoritmo cria um vetor de soluções com os melhores valores da função objetivo, do mais baixo (ótimo global) para o mais alto.

O `MultiStart` executa aleatoriamente e exaustivamente todos os pontos de partida dentro dos limites definidos pelo utilizador. O algoritmo efetua assim uma filtragem dos pontos de partida que estão fora da região admissível, ou seja, pontos de partida que não respeitem as condições de limite e constrangimentos de desigualdade impostas pelo utilizador. O algoritmo executa então todos os pontos de partida que passaram nessa triagem. Os pontos de partida são executados com o *solver* local `fmincon`, e todos eles podem, ou não, convergir para um ótimo local. Se o ponto convergir para uma solução, e alguma condição de paragem, definida pelo utilizador, for atingida, os resultados são guardados e o algoritmo segue para a próxima etapa. Após atingir a convergência, o algoritmo cria um vetor de soluções, com os melhores valores

da função objetivo, do mais baixo (ótimo global) para o mais alto. Assim, o ótimo global é o melhor ótimo local. A Figura 2.28 mostra o fluxograma do processo efetuado pelo MultiStart.

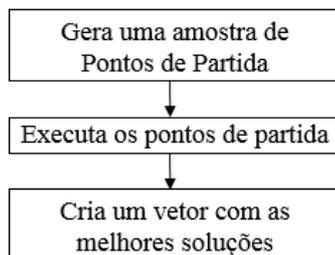


Figura 2.28 – Fluxograma do algoritmo MultiStart (adaptado de MathWorks, 2011).

## 2.6 – Tipos de Elementos Finitos

O método dos elementos finitos é baseado na utilização de funções de forma para exprimir deslocamentos, e na discretização de um sistema contínuo em vários sistemas mais simples denominados de elementos finitos. A cada tipo de elemento finito estão associadas algumas características e recursos que permitem definir e avaliar a aplicabilidade de um certo tipo de elemento finito ao caso que se pretende simular. Podemos assim dividir e classificar os tipos de elementos finitos em: estrutural, térmico, elétrico, fluido, eletromecânico, eletromagnético, contacto, etc. Neste trabalho são usados elementos do tipo estrutural. A definição do elemento finito estrutural a utilizar depende do tipo de estrutura que se pretende analisar. Segundo Azevedo (2003), as estruturas podem ser classificadas quanto à sua geometria como reticuladas, laminadas ou sólidas.

São consideradas estruturas laminares, aquelas cuja espessura é muito inferior às restantes dimensões. Quando a superfície média é plana, a estrutura laminar pode ser classificada como placa ou casca plana. Uma placa pode ter forças aplicadas perpendicularmente ao plano médio e momentos cujo vetor está contido no plano médio. Uma estrutura laminar plana sujeita a outros tipos de ações é designada por casca plana. Quando a superfície média não é plana, tem-se uma casca tridimensional.

As estruturas reticuladas são as constituídas por barras prismáticas, cujas dimensões transversais são muito menores do que o comprimento do respetivo eixo. Neste tipo de estruturas é habitual distinguir os pórticos das treliças, conforme é ou não considerada a compatibilidade de rotações nas extremidades de barras adjacentes.

As estruturas sólidas são aquelas cuja geometria apresenta três dimensões: comprimento, altura e largura. Numa análise por elementos finitos, a distinção entre uma estrutura ser considerada como sólida ou ser considerada laminada, depende da

relação entre a dimensão da espessura e a dimensão da largura ou comprimento. Se o valor da espessura não for consideravelmente inferior ao valor do comprimento ou largura, a estrutura é tratada, numa análise em elementos finitos, como sendo um sólido.

As estruturas envolvidas neste trabalho são do tipo estrutura laminar plana, ou seja do tipo casca, e do tipo reticuladas. Para a modelação desse tipo de estruturas são usados elementos de casca, nomeadamente o elemento designado por SHELL63 disponível no ANSYS®, e elementos de viga, designados por BEAM3 e BEAM188, também disponível no ANSYS®, para as estruturas reticuladas.

O elemento SHELL63 é definido por quatro nós (I, J, K e L), quatro espessuras e admite propriedades de materiais ortotrópicos. Possui comportamento de membrana e dobragem, e admite carregamentos normais e de superfície. Pode ser aplicado em análises do tipo estática ou dinâmica para obtenção do comportamento modal da estrutura. O elemento possui seis GDL's em cada nó: translação nas direções “x”, “y” e “z”, e rotação em torno dos eixos “x”, “y” e “z”. Na Figura 2.29 apresenta-se a geometria desse elemento.

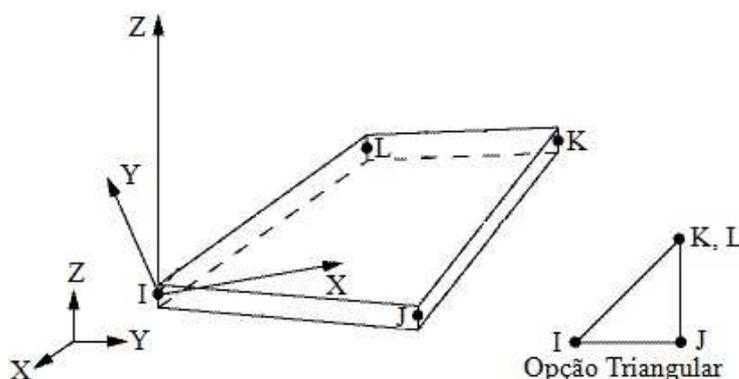


Figura 2.29 – Geometria do elemento SHELL63 (adaptado de Ansys, 2013).

O elemento SHELL63 pode possuir geometria quadrangular ou triangular, conforme representado na Figura 2.29.

O elemento BEAM3 é um elemento uniaxial com capacidade para tração/compressão e dobragem. O elemento possui três GDL's em cada nó: translação nas direções “x”, “y” e rotação em torno do eixo “z”. Na Figura 2.30 apresenta-se a geometria desse elemento.

Como se pode ver pela figura, o elemento é definido por dois nós (I e J), a área da secção, o momento de inércia, a altura e as propriedades do material.

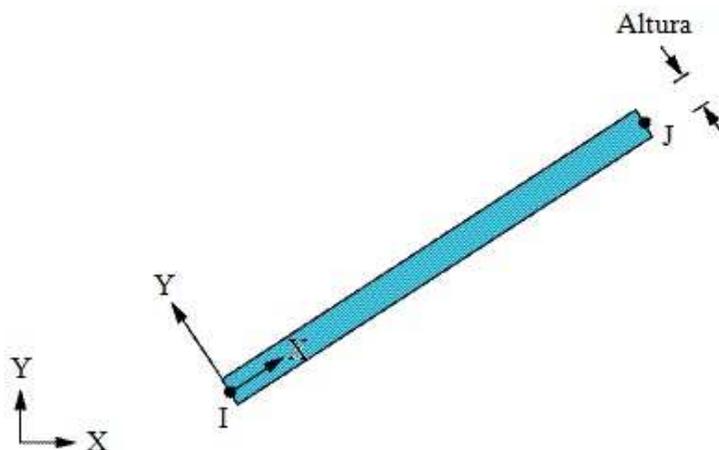


Figura 2.30 – Geometria do elemento BEAM3 (adaptado de Ansys, 2013).

Por sua vez o elemento BEAM188 é também uma linha unidimensional no espaço. Contudo, e ao contrário do BEAM3, é um elemento apropriado para aplicação em barras relativamente espessas. É um elemento que pode possuir seis GDL's por cada nó: translação nas direções “x”, “y” e “z”, e rotação em torno dos eixos “x”, “y” e “z”. Um sétimo GDL pode ser considerado se a intenção é efetuar uma análise à instabilidade elástica. A Figura 2.31 representa a geometria desse elemento.

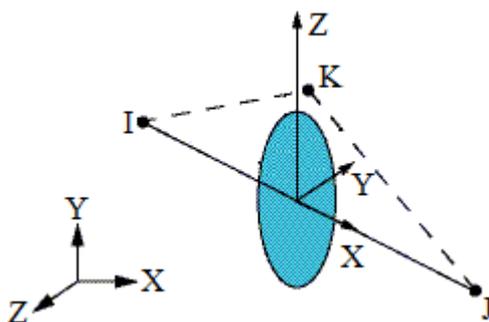


Figura 2.31 – Geometria do elemento BEAM188 (adaptado de Ansys, 2013).

O elemento é definido por dois nós (I e J). Um nó K pode ser adicionado para definir a orientação do elemento. À semelhança do BEAM3, o elemento BEAM188 requer também o fornecimento das características da secção, como o tipo de secção e as suas dimensões.

Outros tipos de elementos são usados na modelação das estruturas analisadas neste trabalho. É o caso do elemento de massa (MASS21), o elemento mola-amortecedor (COMBIN14) e o elemento bi-dimensional axissimétrico para geometrias e carregamentos simétricos em relação em um eixo (PLANE182), disponíveis no ANSYS®.

O elemento MASS21 é um elemento que pode possuir seis GDL's por cada nó: translação nas direções “x”, “y” e “z”, e rotação em torno dos eixos “x”, “y” e “z”. Pode ser também atribuída uma massa diferente a cada nó, assim como um momento de

inércia de massa. Na Figura 2.32 está representada a geometria do elemento MASSA21, que como se pode observar é definido apenas por um nó (I).

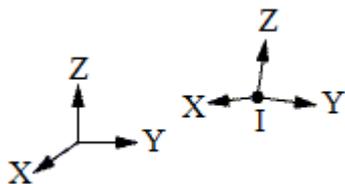


Figura 2.32 – Geometria do elemento MASSA21 (adaptado de Ansys, 2013).

O elemento COMBIN14 é um elemento longitudinal mola-amortecedor com capacidade de tração/compressão, com três graus de liberdade: translação nas direções “x”, “y” e “z”. A Figura 2.33 mostra a geometria do elemento COMBIN14.

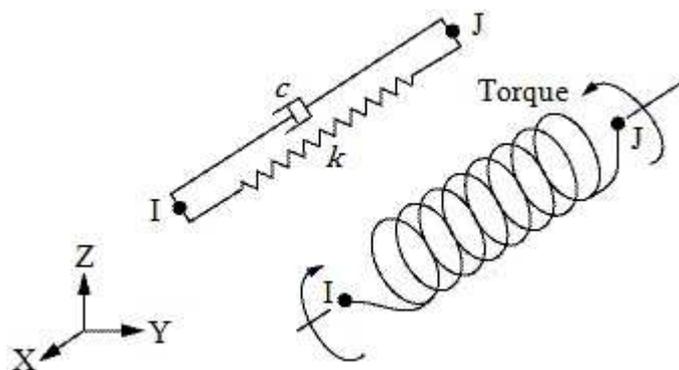


Figura 2.33 – Geometria do elemento COMBIN14 (adaptado de Ansys, 2013).

Como se pode observar na Figura 2.33, o elemento COMBIN14 é definido por dois nós (I e J), uma mola com constante de rigidez  $k$  e um amortecedor com coeficiente de amortecimento  $c$ . O amortecimento não é considerado no caso de análises do tipo estática ou em análises de estruturas não amortecidas ou de baixo amortecimento. O elemento COMBIN14 não possui massa, sendo esta atribuída através de elementos de massa, como o MASS21. Nestes casos o elemento de massa pontual é coincidente com os nós I e J do elemento COMBIN14.

O elemento PLANE182 é um elemento bidimensional para corpos sólidos, definido por quatro nós (I, J, K e L) e com dois GDL’s por cada nó, ou seja, translação nas direções “x” e “y”. A Figura 2.34 mostra a geometria do elemento PLANE182.

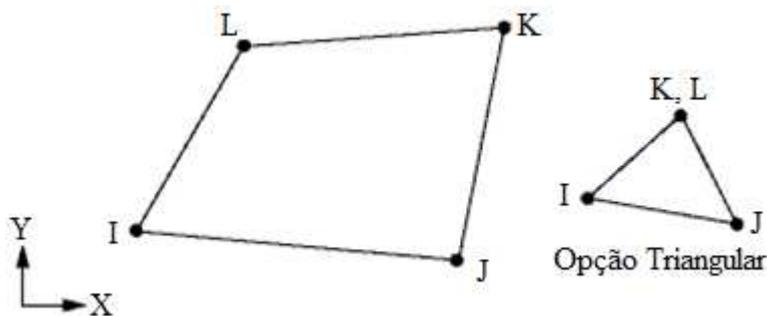


Figura 2.34 – Geometria do elemento PLANE182 (adaptado de Ansys, 2013).

Pode ser usado como um elemento plano ou como um elemento axissimétrico que permite obter tensões e deformações na direção perpendicular ou normal à direção do carregamento, como é o caso das placas. O elemento permite definir espessura, na opção de elemento plano, e propriedades de materiais ortotrópicos.

O elemento PLANO182 pode possuir geometria quadrangular ou triangular, conforme representado na Figura 2.34.

## 2.7 – Especificação de Rebites e Juntas Rebitadas

A rebitagem de componentes e a especificação do rebite adequado para um determinado caso, segue algumas normas. Antes do processo de rebitagem propriamente dito é necessário efetuar alguns cálculos, como o diâmetro do corpo do rebite e o comprimento do corpo do rebite, para determinar qual o rebite que melhor se adequa à espessura dos componentes a rebitar. Outro fator a ter em conta é o número de fileiras de rebites, o número de rebites em cada fileira e o espaçamento entre rebites. Esse número depende do comprimento das peças a unir, assim como depende da largura da junta. O eurocódigo 9 (2000) para projeto de estruturas em alumínio prevê as normas para cálculo e montagem de rebites. Dessas recomendações se retiram alguns aspetos importantes a aplicar neste trabalho.

Antes de rebitar, é então necessário escolher o rebite mais adequado para o caso, em função da espessura dos componentes a serem unidos, do diâmetro do furo de alojamento do rebite e do comprimento do corpo do rebite. Na Figura 2.35 mostra-se o tipo de rebite usado neste trabalho.

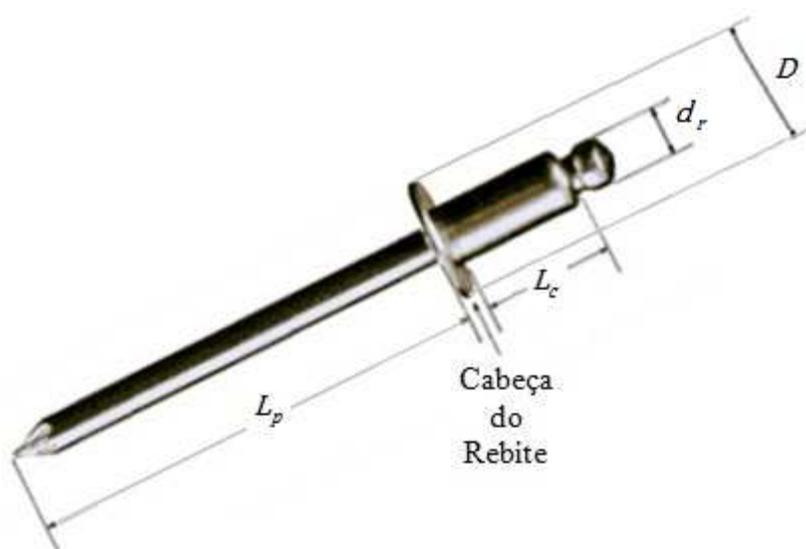


Figura 2.35 – Rebite de cabeça redonda e cilíndrica (adaptado de Shanghai Metal Corporation).

A escolha do rebite é feita de acordo com a espessura das peças que se quer unir. A prática (SENAI, 2000) recomenda que se considere a peça de menor espessura e se multiplique esse valor por 1,5, tal que

$$d_r = 1,5 \cdot S, \quad (2.173)$$

onde  $d_r$  é o diâmetro do corpo do rebite e  $S$  corresponde à menor espessura.

Para além do diâmetro do corpo do rebite, é necessário também calcular o diâmetro do furo  $d_f$  de alojamento do rebite. Esse parâmetro pode ser calculado multiplicando-se o diâmetro do rebite por 1,06, tal que

$$d_f = d_r \cdot 1,06. \quad (2.174)$$

Por último é necessário especificar o comprimento útil do rebite, ou do corpo do rebite. A equação para cálculo do comprimento útil do rebite depende da forma da cabeça do rebite. Se a cabeça do rebite é redonda e cilíndrica, o comprimento útil  $L_c$  é dado por

$$L_c = 1,5 \cdot d_r + L_t, \quad (2.175)$$

em que  $L_t$  é a soma das espessuras dos componentes a unir. Para o caso de rebites com cabeça cônica, o comprimento útil  $L_c$  é dado por

$$L_c = 1 \cdot d_r + L_t. \quad (2.176)$$

A disposição dos rebites na junta segue também algumas considerações. Na Figura 2.36 está representado um caso com duas fileiras de rebites e as respectivas distâncias entre centro dos rebites, e também a distância dos rebites às bordas das peças a unir.

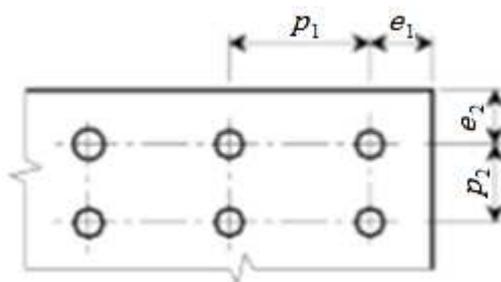


Figura 2.36 – Representação de uma possível disposição de rebites na junta (adaptado de Eurocódigos, 2000).

A distância  $p_1$ , correspondente à distância entre centros de dois rebites, e a distância  $p_2$ , correspondente à distância entre duas filas de rebites, são respetivamente definidas por

$$p_1 = 3 \cdot d_f \quad (2.177)$$

e

$$p_2 = 2,5 \cdot d_f . \quad (2.178)$$

Por sua vez a distância  $e_1$ , medida entre o centro do rebite à extremidade frontal mais próxima da peça a unir, e a distância  $e_2$ , medida entre o centro do rebite à extremidade lateral mais próxima da peça a unir, são respetivamente definidas por

$$e_1 = 1,5 \cdot d_f \quad (2.179)$$

e

$$e_2 = 2 \cdot d_f . \quad (2.180)$$

Para os casos em que os rebites estão dispostos em “zigue-zague”, eles podem ter as configurações apresentadas na Figura 2.37.

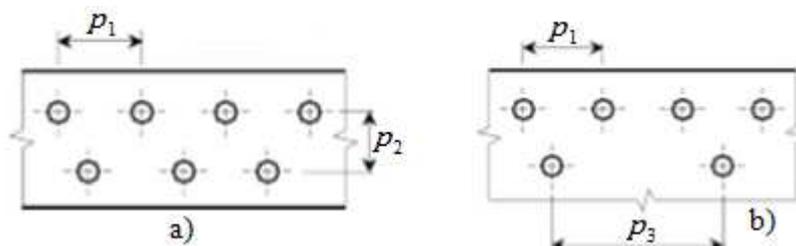


Figura 2.37 – Disposição de rebites em “zigue-zague” (adaptado de Eurocódigos, 2000).

A distância  $p_3$  será, no caso apresentado na Figura 2.37b, correspondente a

$$p_3 = 2 \cdot p_1 \quad (2.181)$$

As juntas rebitadas apresentadas neste trabalho seguem as disposições de rebites apresentadas, assim como todos os cálculos relacionados com a especificação do rebite, distância entre rebites e a distância dos rebites às bordas das peças a unir são baseados nas equações apresentadas neste sub-capítulo.



# CAPÍTULO 3 – APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO GLOBAL PARA MELHORAMENTO DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo é apresentada a aplicação de duas técnicas de otimização global estocásticas a um programa de melhoramento de modelos de elementos finitos já desenvolvido. Essas técnicas de otimização global são fornecidas pela *toolbox* do MatLab® através dos *solvers* GlobalSearch e MultiStart, sendo portanto técnicas baseadas nas metas-heurísticas. Os *solvers* são aplicados num programa de melhoramento de modelos de elementos finitos com o intuito de o dotar de maiores potencialidades que os métodos globais podem providenciar. O programa de melhoramento de modelos de elementos finitos, previamente desenvolvido, usava um *solver* de procura local, o *fmincon*, estando portanto sujeito aos constrangimentos que esse tipo de técnicas possui.

É efetuada, com base nos resultados obtidos, uma avaliação que compara a eficiência dos métodos globais relativamente ao método de procura local. Os resultados obtidos mostram que os métodos globais permitem atingir mais e melhores soluções que o método local. Por outro lado, os resultados mostram também que o *solver* GlobalSearch é mais eficiente que o *solver* MultiStart, uma vez que requer menos esforço computacional para obter a solução global ótima.

## 3.1 – Introdução

No sentido de melhorar a eficiência do programa de melhoramento de modelos de elementos finitos desenvolvido por (Meireles, 2007), dois *solvers* de otimização global estocástica presentes na *toolbox* do MatLab®, GlobalSearch e MultiStart (MathWorks, 2011) são aplicados. A eficiência de cada um deles é avaliada pela sua aplicação ao melhoramento de um modelo em elementos finitos. O objetivo é comparar cada um desses *solvers* com o *solver* local *fmincon*. O programa de melhoramento de modelos de elementos finitos foi previamente implementado com um otimizador local, que usa o algoritmo Sequential Quadratic Programming (SQP) executado através do *solver* local *fmincon* também presente na *toolbox* do MatLab®. Entretanto esta estratégia de procura local tem dificuldades em encontrar o ótimo global, uma vez que foi desenvolvida para

encontrar apenas uma solução. Por essa razão, o processo de melhoramento de modelos de elementos finitos era efetuado com base numa primeira aproximação, de forma empírica, na busca do melhor ponto de partida, e só depois era aplicado o *solver* local *fmincon*. É esperado com esta nova implementação que o programa de melhoramento de modelos de elementos finitos aumente a sua eficácia na resolução de problemas de otimização mais complexos.

Este capítulo está organizado como se segue. O sub-capítulo 3.2 apresenta a formulação da função objetivo usada para a otimização de um primeiro problema. O sub-capítulo 3.3 procura descrever o novo processo de otimização implementado. O sub-capítulo 3.4 descreve os modelos de elementos finitos usados para testar a eficiência do novo processo de otimização. O sub-capítulo 3.5 mostra os resultados obtidos e respectiva discussão, e no sub-capítulo 3.6 são apresentadas as conclusões.

### 3.2 – Formulação da Função objetivo

Neste sub-capítulo é descrito o formalismo desenvolvido para a função objetivo. A função objetivo  $f$ , que depende do vetor  $\mathbf{v}$  que contém os parâmetros a otimizar, e quantifica a diferença do comportamento dinâmico entre o modelo numérico e o modelo de referência, é dada pela soma de três funções específicas como descrito abaixo

$$f(\mathbf{v}) = f_{\phi C}(\mathbf{v}) + f_{\phi U}(\mathbf{v}) + f_{\lambda}(\mathbf{v}), \quad (3.1)$$

onde a função  $f_{\phi C}$  representa e quantifica a diferença entre os pares de modos de vibração correlacionadas do modelo de referência e do modelo numérico, a função  $f_{\phi U}$  representa e quantifica a diferença entre os pares de modos de vibração não correlacionadas do modelo de referência e do modelo numérico, e a função  $f_{\lambda}$  representa e quantifica a diferença entre as frequências do modelo numérico e do modelo de referência.

A função objetivo  $f_{\phi C}$  é dada por

$$f_{\phi C}(\mathbf{v}) = - \frac{\sum_{i=1}^{N_c} \hat{MAC}_{i_i q} \left( \hat{\mathbf{v}}_q \right)}{\sum_{i=1}^{N_c} \hat{MAC}_{i_i 0} \left( \hat{\mathbf{v}}_0 \right)}, \quad (3.2)$$

onde  $N_C$  é o número de pares de modos de vibração correlacionados da diagonal da matriz MAC, em que  $i = j$ ,  $\hat{MAC}_{ii_0}$  são os elementos da diagonal da matriz MAC inicialmente estimados,  $\mathbf{v}_0$  é o vetor que contém os valores iniciais dos parâmetros,  $\hat{MAC}_{ii_q}$  são os elementos da diagonal da matriz MAC estimados a cada iteração  $q$  e  $\mathbf{v}_q$  é o vetor que contém os valores dos parâmetros estimados a cada iteração  $q$ , com  $q \geq 0$ . O valor do MAC entre dois modos de vibração é dado pela Eq. (2.154), já apresentada no capítulo 2, e  $i$  corresponde aos modos de vibração de referência/experimentais e  $j$  corresponde aos modos de vibração numéricos estimados.

A função  $f_{\phi U}$  é dada por

$$f_{\phi U}(\mathbf{v}) = \left( \frac{1}{N_U} \right) \frac{\sum_{j=1}^{N_U} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_U} \hat{MAC}_{ij_q} \left( \hat{\mathbf{v}}_q \right)}{\sum_{j=1}^{N_U} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_U} \hat{MAC}_{ij_0} \left( \hat{\mathbf{v}}_0 \right)}, \quad (3.4)$$

onde  $N_U$  é o número de pares de modos de vibração não correlacionados fora da diagonal da matriz MAC, em que  $i \neq j$ .

A função  $f_\lambda$  é dada por

$$f_\lambda(\mathbf{v}) = \frac{\sum_{j=1}^{N_\lambda} \left( f_i - \hat{f}_{j_q} \left( \hat{\mathbf{v}}_q \right) \right)^2}{\sum_{j=1}^{N_\lambda} \left( f_i - \hat{f}_{j_0} \left( \hat{\mathbf{v}}_0 \right) \right)^2}, \quad (3.5)$$

onde  $N_\lambda$  é o número de valores próprios  $\lambda$  correspondente aos pares de modos de vibração correlacionados,  $f_i$  é a  $i^{\text{ésima}}$  frequência natural de referência obtida experimentalmente,  $\hat{f}_{j_0}$  é a  $j^{\text{ésima}}$  frequência numérica inicial estimada e  $\hat{f}_{j_q}$  é a  $j^{\text{ésima}}$  frequência natural numérica estimada a cada iteração  $q$ . O termo quadrático na Eq. (3.5) é usado para acelerar a convergência e obter apenas diferenças positivas entre as frequências do modelo numérico e de referência. O denominador nas Eqs. (3.2), (3.4) e (3.5) é usado para obter diferenças normalizadas. Os vetores que contêm os modos de vibração estimados  $\hat{\boldsymbol{\phi}}_{j_q}$  e os valores próprios estimados  $\hat{\lambda}_{j_q}$  são função

dos parâmetros contidos no vetor  $\hat{\mathbf{v}}_q$ . A relação entre eles pode ser escrita, respetivamente, como

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{j_q} = f\left(\hat{V}_{q_1}, \hat{V}_{q_2}, \hat{V}_{q_3}, \dots, \hat{V}_{q_p}\right) \quad (3.6)$$

e

$$\hat{\lambda}_{j_q} = f\left(\hat{V}_{q_1}, \hat{V}_{q_2}, \hat{V}_{q_3}, \dots, \hat{V}_{q_p}\right), \text{ para } j = 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

onde  $p$  é o número de parâmetros a otimizar e  $n$  é o número de graus de liberdade.

Os parâmetros  $\hat{V}_{q_1}, \dots, \hat{V}_{q_p}$  contidos no vetor  $\hat{\mathbf{v}}_q$  estão sujeitos à restrição

$$V_{\text{LB}} \leq \hat{V}_{q_i} \leq V_{\text{UB}}, \text{ para } i = 1, \dots, p, \quad (3.8)$$

onde a quantidade  $V_{\text{LB}}$  representa o limite inferior e a quantidade  $V_{\text{UB}}$  representa o limite superior.

### 3.3 – Descrição do Processo de Melhoramento de Modelos de Elementos Finitos

O algoritmo usado no processo de melhoramento de modelos de elementos finitos é apresentado nesta secção. O algoritmo é implementado em MATLAB<sup>®</sup>, usando algumas ferramentas da sua *toolbox*, e está preparado para interagir com o programa de cálculo de elementos finitos ANSYS<sup>®</sup>.

#### 3.3.1 – Descrição do Algoritmo

Considere-se  $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{j_0}\left(\hat{\mathbf{v}}_0\right)$  e  $\hat{\lambda}_{j_0}\left(\hat{\mathbf{v}}_0\right)$ , respetivamente como, os vetores próprios numéricos iniciais estimados e os valores próprios numéricos iniciais estimados, a partir dos quais podem ser calculados  $\hat{MAC}_{i_0}\left(\hat{\mathbf{v}}_0\right)$ ,  $\hat{MAC}_{ij_0}\left(\hat{\mathbf{v}}_0\right)$  e  $\hat{f}_{j_0}\left(\hat{\mathbf{v}}_0\right)$ , onde  $\hat{MAC}_{i_0}\left(\hat{\mathbf{v}}_0\right)$  são os elementos da diagonal da matriz MAC inicial estimada e  $\hat{MAC}_{ij_0}\left(\hat{\mathbf{v}}_0\right)$  são os valores fora da diagonal da matriz MAC inicial estimada. A função objetivo inicial  $f^0$ , definida em (3.1), dependendo das Eqs. (3.2) - (3.5), é usada para comparar os valores numéricos iniciais estimados com os valores de

referência/experimentais. Se  $f^0 \rightarrow -1^+$ , onde  $-1^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-1 + \epsilon)$ , ou, se a condição  $\|f^{q+1} - f^q\| \leq 10^{-6}$  é satisfeita como critério de paragem, então o processo de melhoramento de modelos de elementos finitos é concluído. Quando a diferença entre o valor da função objetivo, obtido entre duas iterações consecutivas for  $10^{-6}$  significa que as alterações nos parâmetros são muito pequenas, não tendo grande influência no comportamento do modelo a melhorar. Assim se justifica a escolha de  $10^{-6}$  como critério de paragem. Se nenhuma das condições acima é satisfeita, então  $q = q + 1$  e novas estimativas  $\hat{\varphi}_{q+1}(\hat{\mathbf{v}}_{q+1})$  e  $\hat{\lambda}_{q+1}(\hat{\mathbf{v}}_{q+1})$  são calculadas. Novamente, estes valores são comparados com os valores de referência usando a função objetivo  $f^{q+1}$  baseada na Eq. (3.1). Se para alguma iteração  $q = h \geq 1$ , tal que  $f^h \rightarrow -1^+$ , ou, se a condição  $\|f^{q+1} - f^q\| \leq 10^{-6}$  é satisfeita, então o processo de melhoramento de modelos de elementos finitos é concluído e os valores ótimos de  $\hat{\varphi}_h(\hat{\mathbf{v}}_h)$  e  $\hat{\lambda}_h(\hat{\mathbf{v}}_h)$  são encontrados.

### 3.3.2 – Fluxograma do Processo

O processo de otimização usa a interação entre os programas comerciais MatLab® e o *software* de elementos finitos ANSYS® para proceder ao melhoramento das características dinâmicas de um modelo de elementos finitos, calculando o valor mínimo da função objetivo e encontrando assim o valor ótimo para os parâmetros da estrutura. O fluxograma que descreve o algoritmo de interação entre o MatLab® e o ANSYS® é apresentado na Figura 3.1.

O primeiro passo de um processo de otimização deste tipo é idealizar ou coletar dados experimentais que descrevam o comportamento dinâmico de um modelo considerado como sendo a referência. Esses dados são representados por valores de amplitudes que formam cada modo de vibração ou forma de vibrar da estrutura, e os valores das respectivas frequências naturais associadas a cada modo de vibração. O próximo passo é construir um modelo em elementos finitos e obter o comportamento dinâmico desse modelo. As características que descrevem o comportamento dinâmico de ambos os modelos são então usadas pelo otimizador como meio de comparação para avaliar se os dois modelos estão, ou não, bem correlacionados. O processo é

repetido até que a solução encontrada convirja para um valor ótimo da função objetivo.

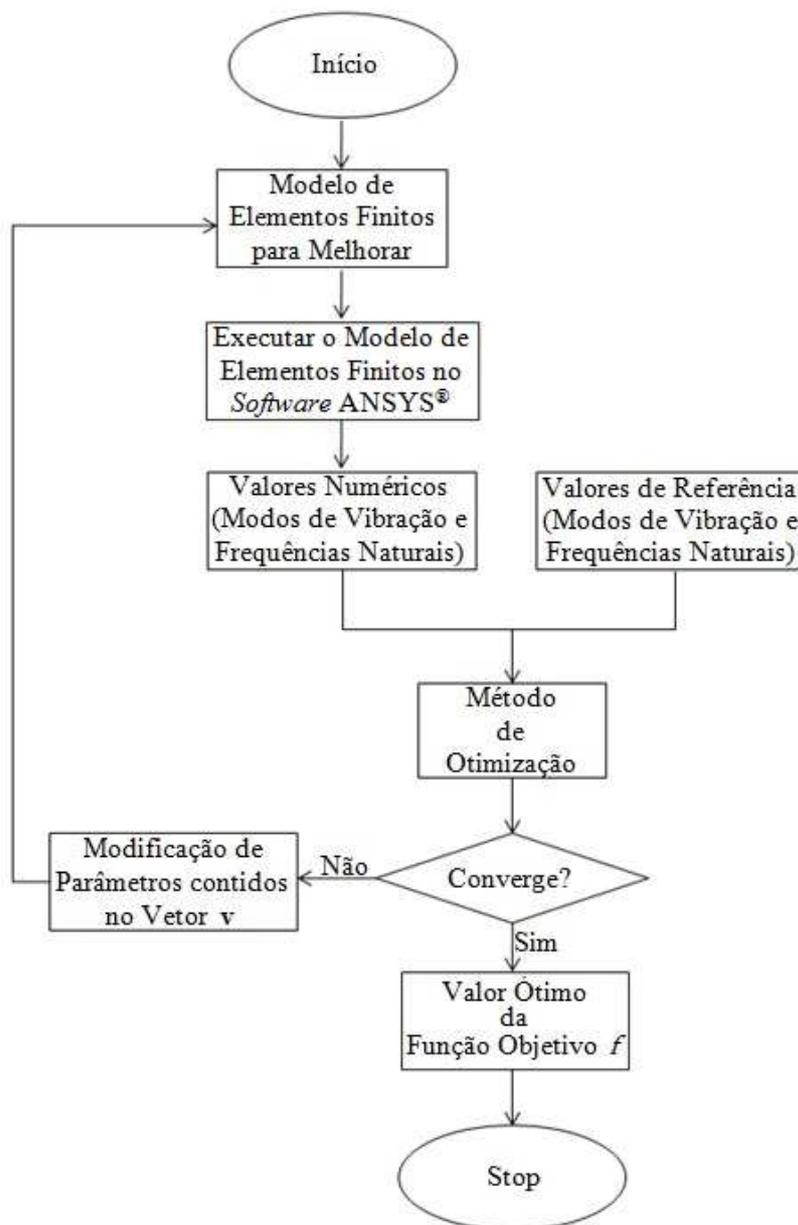


Figura 3.1 – Fluxograma de interação entre o MatLab® e o ANSYS®.

A descrição detalhada do fluxograma pode dar uma ideia mais concreta do processo de otimização:

1. Executa o ANSYS® com o modelo de elementos finitos inicial a otimizar, construído em APDL num ficheiro `input.txt`, com os parâmetros a otimizar contidos no vetor inicial  $\mathbf{v}_0$ ;
2. O MatLab® lê o ficheiro de resultados `output.txt` obtido do ANSYS® e compara os valores estimados com os valores de referência/experimentais, de modo a preencher a função objetivo  $f$ ;

3. Conclui o processo se um valor ótimo é atingido, ou seja, se as condições de paragem, descritas no sub-capítulo 3.3.1, são satisfeitas, ou vai para o passo 4;
4. Obtém os novos parâmetros  $\hat{\mathbf{v}}_{q+1}$  definidos pelo otimizador, tendo em conta os constrangimentos definidos pela condição (3.8);
5. Modifica o modelo de elementos finitos no ficheiro `input.txt` com os novos parâmetros  $\hat{\mathbf{v}}_{q+1}$ ;
6. O ANSYS® inicia uma nova análise com o novo ficheiro `input.txt`, indo para o passo 1.

Como já referido anteriormente, são usados dois *solvers* de procura global, o GlobalSearch e MultiStart, que substituem o *solver* local, fmincon, previamente usado no programa de melhoramento de modelos de elementos finitos. Estes *solvers* de procura global apresentam vantagens teóricas relativamente ao *solver* de procura local previamente usado, e cuja descrição dos mesmos se encontra no Capítulo 2.

### 3.4 – Descrição dos Modelos

Tendo em vista que se pretende avaliar o desempenho dos *solvers* de procura global relativamente ao *solver* de procura local, recorre-se apenas a modelos numéricos, ou seja, tanto o modelo de referência como o modelo a melhorar são modelos de elementos finitos. Assim, faz-se nesta secção uma apresentação desses modelos.

#### 3.4.1 – Modelo de Referência

O modelo de referência é uma placa retangular com dimensões 200x300x5 mm<sup>3</sup>, ou seja, com largura  $w$ , altura  $h$  e espessura  $t$ , como se mostra na Figura 3.2a.

O modelo de referência é um modelo de elementos finitos, construído no *software* ANSYS® com elementos de casca (SHELL63), composto por 48 nós, como mostrado na Figura 3.2b. Depois de construído, o modelo é submetido a análise modal para extração dos primeiros 24 modos de vibração e respetivas frequências naturais. Os modos de vibração são obtidos nos 24 nós assinalados a vermelho na Figura 3.2a.

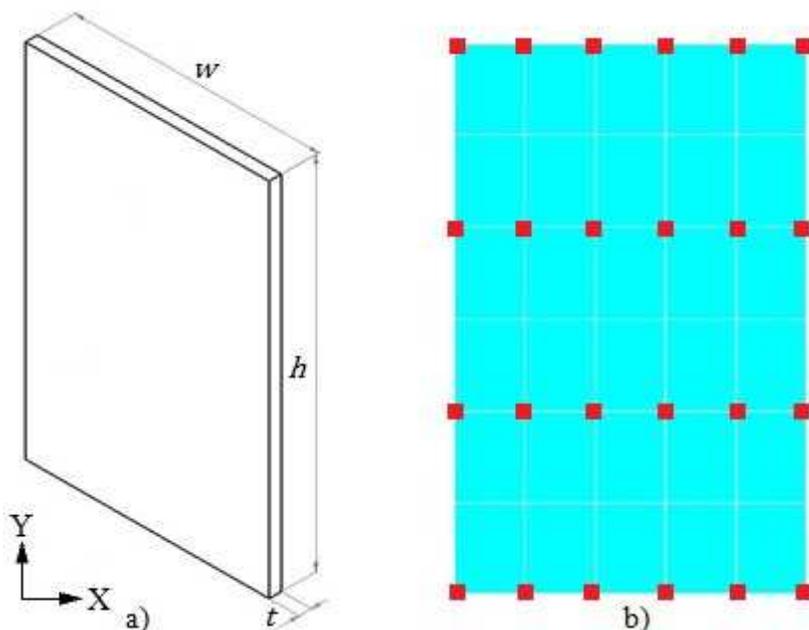


Figura 3.2 – a) Desenho técnico do modelo de referência; b) Modelo de referência em elementos finitos.

É considerado que a placa possui um material com as propriedades mecânicas apresentadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Propriedades mecânicas do modelo de referência.

Propriedade	Símbolo	Unidades	Valor
Módulo de Elasticidade	$E_x$	[Pa]	$210 \times 10^9$
Módulo de Elasticidade	$E_y$	[Pa]	$220 \times 10^9$
Coefficiente de Poisson	$\nu_{xy} = \nu_{yx}$	-	0,27
Massa Específica	$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	7847

A propriedade  $E_x$  representa o módulo de elasticidade na direção transversal ou perpendicular à laminagem,  $E_y$  representa o módulo de elasticidade na direção longitudinal ou paralela à laminagem,  $\nu_{xy}$  representa o coeficiente de Poisson (relação entre a deformação na direção transversal  $x$  e a deformação na direção longitudinal  $y$ ) e  $\nu_{yx}$  representa o coeficiente de Poisson (relação entre a deformação na direção longitudinal  $y$  e deformação na direção transversal  $x$ ).

### 3.4.2 – Modelo a Melhorar

O modelo de elementos finitos a melhorar é também construído no *software* ANSYS® e possui um conjunto de 240 áreas que podem variar a sua forma geométrica, como mostrado na Figura 3.3. As 240 áreas correspondem à quantidade de elementos de casca (SHELL63) que constituem o modelo. Essas áreas (elementos) são criadas a partir de pontos, alguns com liberdade para poderem variar as suas

coordenadas, permitindo alterar a forma geométrica de todas as áreas envolvidas, mantendo-se invariável a dimensão global do modelo. Os pontos ou nós que podem variar as suas coordenadas (identificados a cor verde na Figura 3.3) são função dos parâmetros  $w_a$  e  $h_b$ , como representado na Figura 3.3.

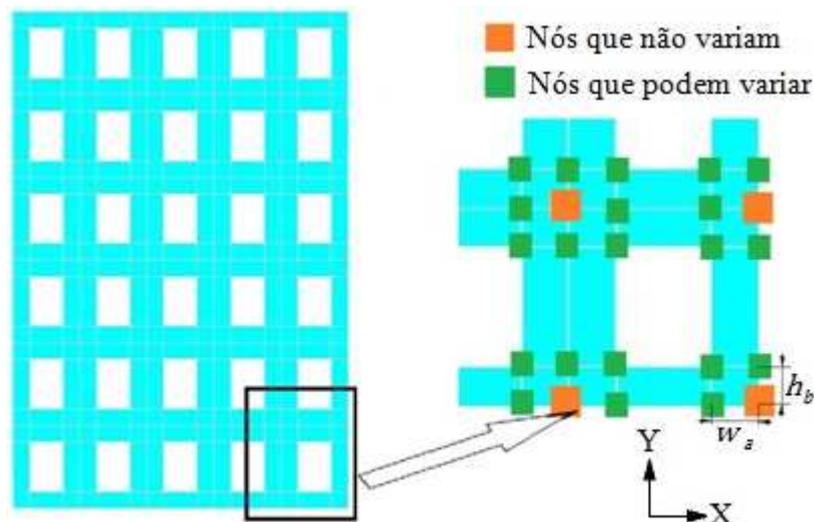


Figura 3.3 – Modelo de elementos finitos usado para melhoramento.

Os 24 nós escolhidos para leitura dos modos de vibração no modelo a melhorar são mantidos constantes, de modo a coincidirem com a posição dos 24 nós no modelo de referência, como mostrado na Figura 3.2a.

As propriedades do material do modelo a melhorar são iguais às propriedades mecânicas do modelo de referência, já apresentadas na Tabela 3.1. A largura  $w$ , altura  $h$  e espessura  $t$  são iguais ao modelo de referência, representado na Figura 3.2. No entanto a espessura  $t$  será um dos parâmetros a variar ao longo do processo de melhoramento, assim como os parâmetros  $w_a$  e  $h_b$  também serão sujeitos a otimização. Os valores desses parâmetros, que correspondem ao modelo a melhorar inicial, e os respectivos limites inferiores e superior, são indicados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Parâmetros a otimizar e respectivos limites inferiores e superiores.

Propriedade	Variável	Unidades	Valor Inicial	Limite Inferior	Limite Superior
Espessura	$t$		5	1	10
Largura do Elemento	$w_a$	[mm]	10	5	19
Altura do Elemento	$h_b$		10	5	24

O valor do limite superior de  $w_a$  e  $h_b$ , são respetivamente, 19 e 24, porque para valores superiores a esses, a distância entre nós é demasiado pequena ao ponto de criar instabilidade na construção e consequente solução do modelo. O mesmo se aplica aos limites inferiores das mesmas variáveis. É esperado que o valor ótimo dos

parâmetros  $w_a$  e  $h_b$  tenha uma tendência clara para convergir para os limites superiores, de modo a preencher os espaços vazios do modelo de elementos finitos a melhorar, e a espessura  $t$  se mantenha próxima do valor inicial, uma vez que o valor atribuído no modelo inicial a melhorar é igual ao valor da espessura do modelo de referência.

### 3.5 – Análises Numéricas

Nesta secção é feita uma apresentação das análises efetuadas com a otimização do modelo a melhorar e avaliados os respetivos resultados obtidos. Primeiro são apresentadas as soluções obtidas com *solver* local `fmincon`, e depois as soluções obtidas com os *solvers* de procura global `GlobalSearch` e `MultiStart`.

As análises usando o `fmincon` são executadas apenas com o ponto inicial fornecido pelo utilizador utilizando os quatro algoritmos atrás referenciados, `active-set`, `interior-point`, `SQP` e `trust-region-reflective`.

Inicialmente o *solver* de procura global `GlobalSearch` é executado com 100 pontos de partida, sendo depois efetuada uma segunda análise com 1000 pontos de partida, de modo ser possível avaliar o comportamento do *solver* e a influência que o aumento do número de pontos de partida provoca no resultado final. A esse número de pontos deve ser sempre somado o ponto inicial fornecido pelo utilizador. O *solver* `GlobalSearch` recorre também ao `fmincon` para explorar localmente cada um dos pontos de partida. Assim, o `GlobalSearch` aplica primeiro o `fmincon` no ponto inicial fornecido pelo utilizador, fazendo uma avaliação completa desse ponto. No seguimento faz uma avaliação inicial para cada um dos pontos de partida restantes (100 na primeira análise e 1000 na segunda análise), definidos pelo utilizador. Finalmente o *solver* aplica o `fmincon` para executar uma avaliação final completa no ponto com melhor ótimo local de entre esses pontos de partida, avaliado pela função objetivo. Assim, o processo apenas é executado completamente para dois pontos, o inicial e o que produziu o melhor ótimo local de entre os restantes pontos de partida. O `GlobalSearch` tem assim a vantagem de não explorar exaustivamente todos os pontos de partida, fazendo na primeira fase uma ligeira avaliação para cada um deles, excluindo os pontos com pior avaliação.

Pelo contrário, o `MultiStart` explora todos os pontos de partida exaustivamente. Por isso, um grande número de pontos de partida implica um esforço computacional muito elevado, pelo que se optou por um número de pontos de partida

não muito elevado, optando-se, para além do ponto inicial fornecido pelo utilizador, por 10 pontos de partida para a primeira análise e 20 pontos de partida para a segunda análise. Também aqui o *solver* `fmincon` é usado para explorar localmente cada um dos pontos de partida. A utilização do mesmo número de pontos de partida no *solver* `GlobalSearch` e `MultiStart` tem como finalidade avaliar a performance de ambos os *solvers*, equiparando-os para o mesmo número de pontos de partida.

Para cada um dos *solvers* globais foi também efetuada uma análise envolvendo os quatro algoritmos, `active-set`, `interior-point`, `SQP` e `trust-region-reflective`. Para além dos critérios de paragem atrás mencionados (sub-capítulo 3.3.1), são definidos nos quatro algoritmos, de forma igual, outros parâmetros relacionados com o critério de paragem, como o limite máximo de 5000 avaliações da função objetivo e o limite máximo de 500 iterações. É definido também que a diferença mínima entre o valor da variável entre duas iterações consecutivas é  $10^{-6}$ , uma vez que uma variação na variável dessa ordem de grandeza deixa de ter influência significativa no comportamento do modelo a melhorar.

### 3.5.1 – Resultados Obtidos com o *solver* Local

A análise com o *solver* `fmincon` é efetuada com base na procura do ótimo local, com apenas um ponto de partida fornecido pelo utilizador, como apresentado na Tabela 3.2. Os resultados dessa análise são apresentados na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Resultados de performance do *solver* `fmincon`.

<i>Output</i>		<code>active-set</code>	<code>interior-point</code>	<code>SQP</code>	<code>trust-region-reflective</code>
Nº de Avaliações da Função Objetivo		307	96	263	296
Tempo de Otimização [h]		~0,43	~0,13	~0,37	~0,41
	$t$	5,07	5,07	5,08	5,08
Valor Ótimo da Variável [mm]	$w_a$	19,00	16,64	19,00	19,00
	$h_b$	11,82	21,53	11,47	11,49
Valor Ótimo da Função Objetivo $f$		0,75	1,71	0,74	0,74

O valor mínimo ótimo atingido pela função objetivo é 0,74, utilizando os algoritmos `SQP` e `trust-region-reflective`, e requerem, respetivamente, 263 e 296 avaliações da função objetivo até atingir o valor mínimo ao fim de 0,37 e 0,41 horas. Assim, apesar do valor ótimo da função objetivo ser idêntico com esses dois algoritmos, o `SQP` revelou ser 1,1 vezes mais rápido que o `trust-region-reflective`. O algoritmo `active-set` consegue atingir uma solução muito

semelhante à conseguida com o SQP, no entanto revelou ser 1,2 vezes mais moroso que este último.

Na Figura 3.4 apresenta-se dois gráficos a cores, que mostram o grau de correlação entre o modelo de referência e o modelo melhorado. Na Figura 3.4a, as cores escuras na diagonal da matriz significam que o valor do MAC se aproxima do um, enquanto as cores claras significam que o valor do MAC se aproxima do zero. Assim, a cor preta corresponde a um valor do MAC igual 1, enquanto a cor branca corresponde a um valor do MAC igual a zero. Na Figura 3.4b, as cores escuras significam que a correlação entre as frequências naturais dos dois modelos é fraca, enquanto as cores claras significam que a correlação entre as frequências naturais dos dois modelos é boa. Assim, a Figura 3.4a representa a matriz de correlação MAC, e mede a correlação entre os modos de vibração do modelo de referência e o modelo de elementos finitos antes do melhoramento, e a Figura 3.4b representa a matriz de correlação entre as frequências naturais dos dois modelos antes do melhoramento.

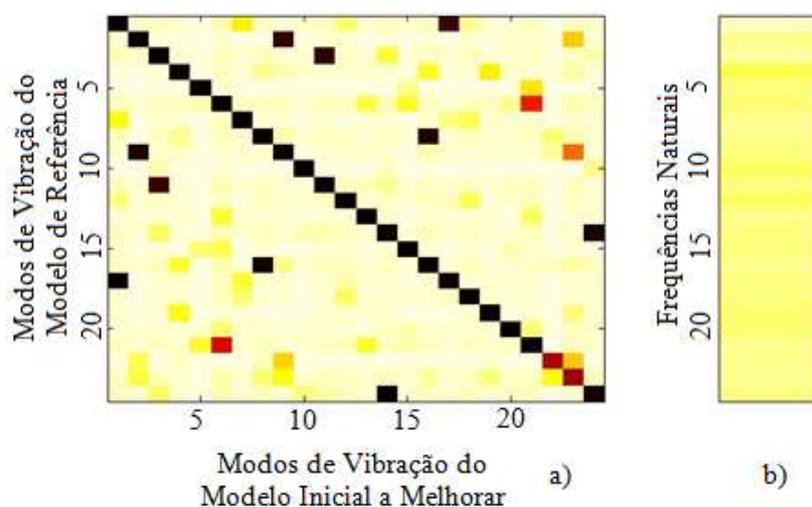


Figura 3.4 – a) Matriz de correlação MAC e b) Matriz de correlação das frequências naturais antes do melhoramento.

Como se pode verificar pela matriz de cores das frequências naturais a correlação entre os dois modelos é fraca, uma vez que para existir boa correlação a cor da matriz deveria ser a mais clara possível (branca). Pelo contrário, a correlação entre os modos de vibração é, antes de efetuar qualquer otimização, boa, como indicam as cores escuras presentes na diagonal da matriz MAC. Outro indicador positivo, e que indica boa correlação entre os modos de vibração, é a predominância de cores claras fora da diagonal da matriz MAC.

É também efetuada uma avaliação com base na diferença relativa percentual média (DRPM) entre as frequências naturais do modelo de referência e do modelo de elementos finitos melhorado, definida como

$$DRPM = \frac{1}{N_\lambda} \sum_{\substack{i=1 \\ j=i}}^{N_\lambda} \left( \frac{|\hat{f}_j - f_i|}{f_i} \right) \times 100\% , \quad (3.9)$$

onde  $\hat{f}_j$  é a  $j^{ésima}$  frequência natural numérica estimada final.

A Tabela 3.4 apresenta a DRPM entre as 24 primeiras frequências naturais do modelo de referência (coluna 2) e do modelo de elementos finitos, antes do melhoramento (coluna 4) e depois do melhoramento (coluna 6), usando o algoritmo SQP, por ter sido o que apresentou melhor performance.

Tabela 3.4 – Evolução das 24 primeiras frequências naturais do modelo de elementos finitos a melhorar, usando o *solver* *fmincon* e o algoritmo SQP.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Inicial [Hz]	Diferença antes do Melhoramento [%]	Frequência Numérica Final [Hz]	Diferença depois do Melhoramento [%]
1	286,07	275,30	3,76	289,08	1,05
2	304,09	277,87	8,62	304,31	0,07
3	661,32	591,00	10,63	663,56	0,34
4	684,16	622,14	9,07	679,60	0,67
5	828,00	754,55	8,87	822,65	0,65
6	929,23	826,94	11,01	927,80	0,15
7	1227,06	1129,82	7,92	1223,99	0,25
8	1402,88	1287,78	8,20	1398,92	0,28
9	1709,53	1531,75	10,40	1698,30	0,66
10	1864,34	1614,56	13,40	1856,75	0,41
11	2061,61	1813,37	12,04	2056,84	0,23
12	2063,88	1870,88	9,35	2059,21	0,23
13	2101,25	1927,79	8,26	2095,23	0,29
14	2599,25	2335,20	10,16	2603,66	0,17
15	2845,63	2550,57	10,37	2805,83	1,40
16	2987,62	2731,91	8,56	2986,56	0,04
17	3148,84	2863,68	9,06	3141,01	0,25
18	3382,34	3069,41	9,25	3387,94	0,17
19	3626,93	3195,94	11,88	3674,32	1,31
20	3772,47	3363,81	10,83	3834,23	1,64
21	4059,15	3741,72	7,82	4119,88	1,50
22	4196,35	3838,28	8,53	4205,17	0,21
23	4273,99	3931,45	8,01	4357,15	1,95
24	4357,44	3947,86	9,40	4382,03	0,56
DRPM [%]			9,39	0,60	

A DRPM, obtida por aplicação da Eq. (3.9), antes do melhoramento, é de 9,39%. Depois da otimização com o *solver* local, é notório que o modelo de elementos finitos melhorado se aproxima do modelo de referência, como se verifica pela diferença relativa percentual média (0,60%) entre os dois modelos. O mesmo se pode

constatar pela Figura 3.5b, em que matriz de cores das frequências naturais evolui, no geral, para cores mais claras. A Figura 3.5a mostra a correlação entre os modos de vibração, onde não se verificam alterações significativas tanto na diagonal como fora da diagonal da matriz MAC, o que indica que a correlação continua a ser boa.

A Figura 3.5c mostra o modelo de elementos finitos após otimização com o *solver* *fmincon* e o algoritmo SQP. Constata-se que o modelo sofre alterações relativamente ao modelo inicial antes do melhoramento. Verifica-se que a tendência é no sentido de preencher os espaços vazios, convergindo os parâmetros  $w_a$  e  $h_b$  para os limites superiores impostos, e manter a espessura  $t$  do modelo inicial, como se verifica na Tabela 3.3.

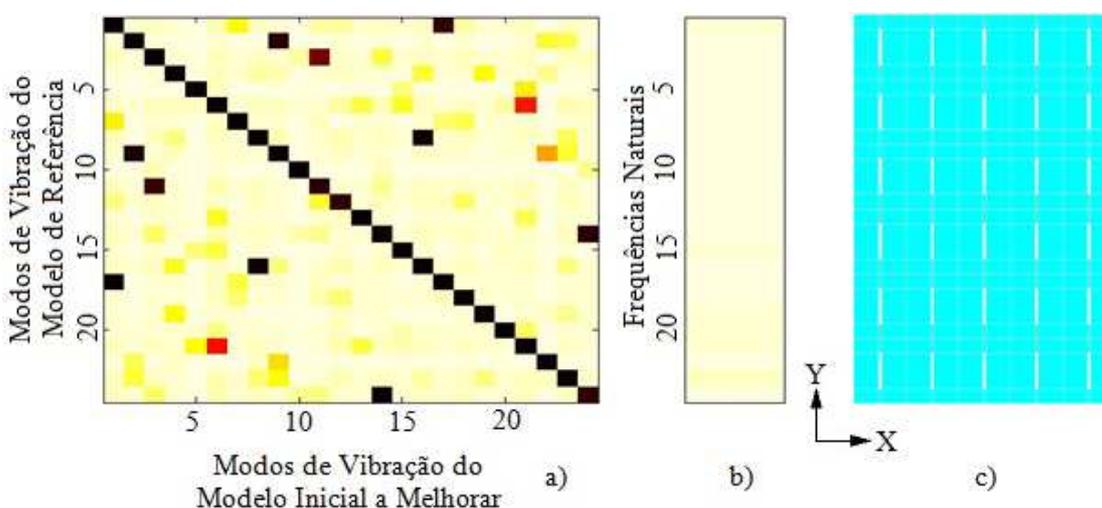


Figura 3.5 - a) Matriz de correlação MAC, b) Matriz de correlação das frequências naturais e c) Modelo de elementos finitos, após otimização com o *solver* *fmincon* e o algoritmo SQP.

Nas figuras 3.6, 3.7 e 3.8, apresenta-se, respetivamente, a evolução dos parâmetros  $t$ ,  $w_a$  e  $h_b$  dentro dos limites inferiores e superiores impostos para cada um deles, com o *solver* *fmincon* e o algoritmo SQP, usando apenas um ponto de partida.

Pode-se observar em cada uma das três figuras uma nuvem de pontos próxima do valor ótimo para cada variável encontrado pelo otimizador com o *solver* local *fmincon*, usando o algoritmo SQP. Os pontos mais afastados dessa nuvem representam outras tentativas de convergência para o valor ótimo, feitas pelo otimizador, mas cujo valor obtido pela função objetivo é pior do que o obtido na região da nuvem em volta do ponto ótimo. Por essa razão o otimizador não evoluiu a partir desses pontos mais afastados.

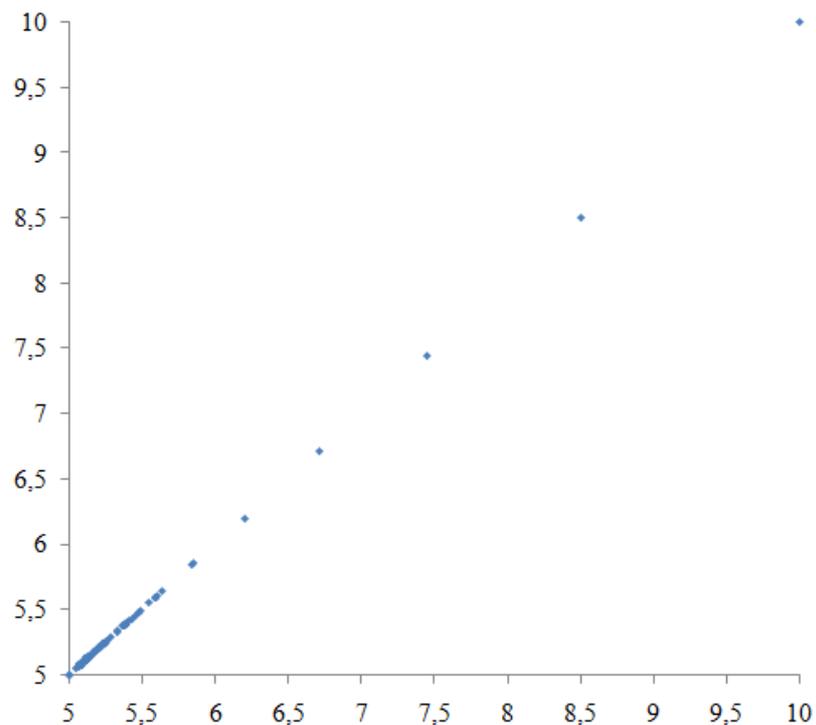


Figura 3.6 – Evolução do parâmetro  $t$  durante o processo de otimização com o *solver* fmincon e o algoritmo SQP.

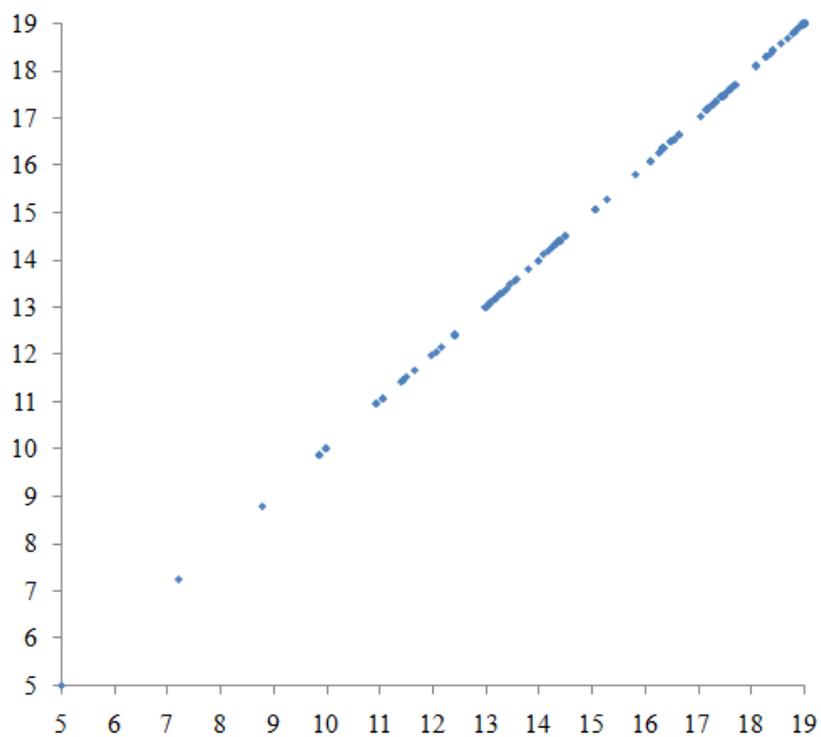


Figura 3.7 – Evolução do parâmetro  $W_a$  durante o processo de otimização com o *solver* fmincon e o algoritmo SQP.

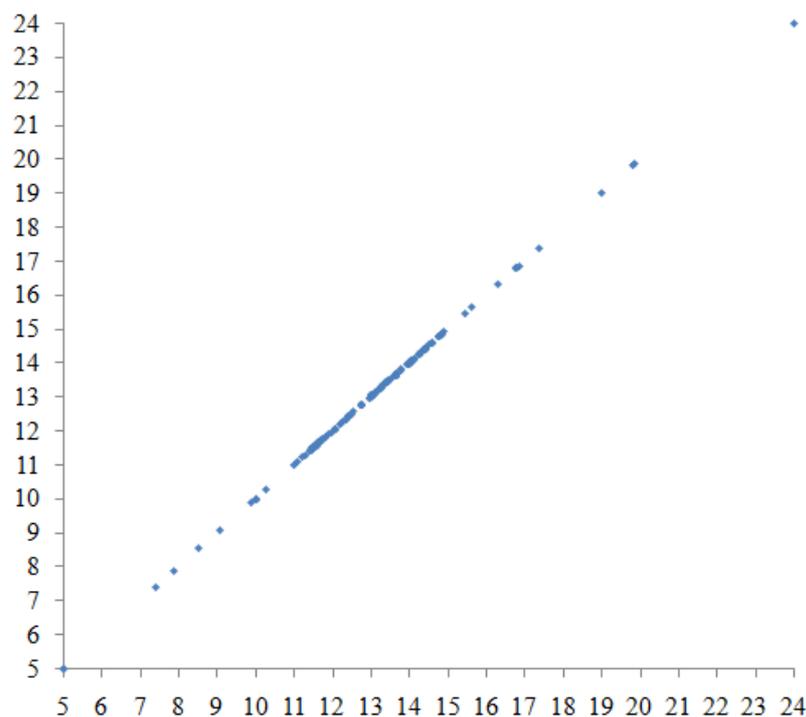


Figura 3.8 – Evolução do parâmetro  $h_b$  durante o processo de otimização com o *solver* `fmincon` e o algoritmo SQP.

É esperado com os *solvers* globais a obtenção de mais do que uma nuvem de pontos concentrados, devido a que o número de pontos de partida é maior relativamente ao *solver* local, e que conseqüentemente, convergem para vários ótimos locais.

### 3.5.2 – Resultados Obtidos com os *solvers* Globais

Assim, no sentido de avaliar a capacidade dos *solvers* globais, procedeu-se à resolução do mesmo problema recorrendo aos *solvers* `GlobalSearch` e `MultiStart`. As condições iniciais são as mesmas para os dois *solvers*, assim como os parâmetros de otimização. A diferença está no número de pontos de partida. Nas análises com o *solver* `GlobalSearch`, existe melhoria no valor mínimo da função objetivo relativamente ao obtido com o *solver* local, usando 100 e 1000 pontos de partida. Na tabela 3.5 e 3.6 pode-se observar o valor mínimo atingido pela função objetivo, para análise com 100 e 1000 pontos de partida, respetivamente, como sendo de 0,70 para os dois casos, usando os algoritmos `active-set`, `SQP` e `trust-region-reflective`, o que significa uma melhoria de 5,4% relativamente ao valor atingido usando o *solver* local `fmincon` (0,74). De salientar no entanto, como seria de esperar, o maior esforço computacional que o *solver* `GlobalSearch` necessita para atingir o valor ótimo para as variáveis, relativamente ao *solver* local,

requerendo aproximadamente duas vezes mais (1,9 vezes) de tempo de otimização e número de avaliações da função objetivo. A análise com o algoritmo *interior-point*, não permite chegar ao mesmo valor mínimo da função objetivo atingido com os outros três algoritmos.

Usando 1000 pontos de partida o tempo de otimização é ainda maior. Por exemplo, a análise com os algoritmos *active-set* e *trust-region-reflective* precisa de 2265 avaliações da função objetivo e 3,15 horas de tempo de otimização para atingir o mesmo valor da função objetivo (0,70), o que representa um esforço computacional 4,4 vezes maior, relativamente à análise com 100 pontos de partida. Isto significa que, apesar de usar muitos pontos de partida para explorar, o resultado final não tem necessariamente de ser melhor, pelo que cada caso é um caso, e deve ser tratado de forma isolada e independente. O que se pode concluir é que, para um mesmo caso de estudo, o *solver* de procura global *GlobalSearch* produz melhores soluções de que o *solver* local.

Tabela 3.5 – Resultados de performance do *solver* *GlobalSearch* com 100 pontos de partida.

<i>Output</i>	<i>active-set</i>	<i>interior-point</i>	SQP	<i>trust-region-reflective</i>
Nº de Avaliações da Função Objetivo	512	369	653	512
Tempo de Otimização [h]	~0,71	~0,51	~0,91	~0,71
<i>t</i>	5,09	5,13	5,09	5,09
Valor Ótimo da Variável [mm]	$w_a$	16,79	19,00	19,00
	$h_b$	13,53	10,67	10,65
Valor Ótimo da Função Objetivo <i>f</i>	0,70	0,90	0,70	0,70

Tabela 3.6 – Resultados de performance do *solver* *GlobalSearch* com 1000 pontos de partida.

<i>Output</i>	<i>active-set</i>	<i>interior-point</i>	SQP	<i>trust-region-reflective</i>
Nº de Avaliações da Função Objetivo	2265	2173	2327	2265
Tempo de Otimização [h]	~3,15	~3,02	~3,23	~3,15
<i>t</i>	5,09	5,12	5,09	5,09
Valor Ótimo da Variável [mm]	$w_a$	17,28	19,00	19,00
	$h_b$	13,34	10,66	10,65
Valor Ótimo da Função Objetivo <i>f</i>	0,70	0,88	0,70	0,70

Na análise com o *solver* *MultiStart*, usando 10 pontos de partida (ver Tabela 3.7) o valor da função objetivo é de 0,70, usando os algoritmos *active-set*, SQP e *trust-region-reflective*, sendo igual ao atingido por esses algoritmos com o *solver* *GlobalSearch* com 100 e 1000 pontos de partida. Na análise com o

algoritmo *interior-point* observa-se uma melhoria de 10,2% no valor mínimo atingido pela função objetivo (0,79) relativamente ao conseguido na análise com o *solver* *GlobalSearch* e 1000 pontos de partida (0,88).

O esforço computacional com o *solver* *MultiStart* e os algoritmos *active-set* e *trust-region-reflective*, usando 10 pontos de partida, é aproximadamente 3 vezes superior ao esforço computacional com o *solver* *GlobalSearch* e esses mesmos dois algoritmos, usando 100 pontos de partida, apesar de o *GlobalSearch* ter sido definido para explorar um número de pontos 10 vezes superior ao definido para o *MultiStart*. É natural esse aumento do esforço computacional relativamente ao *solver* *GlobalSearch*, uma vez que o *solver* *MultiStart* explora exaustivamente todos os pontos de partida.

Usando 20 pontos de partida, cujos resultados se apresentam na Tabela 3.8, o tempo de otimização é ainda mais elevado (4,5 vezes) relativamente à análise com o *solver* *GlobalSearch* e o algoritmo *active-set*, usando 100 pontos de partida. O menor valor da função objetivo continua a ser 0,70, conseguido com os algoritmos *active-set*, *SQP* e *trust-region-reflective*. Relativamente à análise com o algoritmo *interior-point* não se registam alterações no valor mínimo da função objetivo relativamente à análise com 10 pontos de partida.

Pode-se concluir que não é vantajoso usar o *solver* *MultiStart* para resolver problemas como o que aqui é apresentado. O *solver* *GlobalSearch* consegue produzir os mesmos resultados com menor esforço computacional, sendo assim mais eficiente que o *MultiStart*. De modo geral os *solvers* globais aqui analisados convergem para uma solução melhor que o *solver* local *fmincon*, como seria de esperar, uma vez que estão preparados para encontrarem vários mínimos locais, e em que o melhor mínimo local é o ótimo global do problema.

Tabela 3.7 – Resultados de performance do *solver* *MultiStart* com 10 pontos de partida.

<i>Output</i>	<i>active-set</i>	<i>interior-point</i>	<i>SQP</i>	<i>trust-region-reflective</i>
Nº de Avaliações da Função Objetivo	1513	900	1513	1513
Tempo de Otimização [h]	~2,10	~1,25	~2,10	~2,10
Valor Ótimo da Variável [mm]	5,09	5,09	5,09	5,09
	19,00	18,34	19,00	19,00
	10,65	12,43	10,63	10,65
Valor Ótimo da Função Objetivo $f$	0,70	0,79	0,70	0,70

Tabela 3.8 – Resultados de performance do *solver* MultiStart com 20 pontos de partida.

<i>Output</i>		active-set	interior-point	SQP	trust-region-reflective
Nº de Avaliações da Função Objetivo		2312	2237	2704	2642
Tempo de Otimização [h]		~3,21	~3,11	~3,76	~3,67
	$t$	5,09	5,09	5,09	5,09
Valor Ótimo da Variável [mm]	$w_a$	19,00	18,27	19,00	19,00
	$h_b$	10,62	12,41	10,66	10,64
Valor Ótimo da Função Objetivo $f$		0,70	0,79	0,70	0,70

A Tabela 3.9 apresenta diferenças relativas percentuais entre as 24 primeiras frequências naturais do modelo de referência (coluna 2) e do modelo de elementos finitos, antes do melhoramento (coluna 4) e depois do melhoramento (coluna 6), usando o *solver* GlobalSearch e algoritmo active-set com 100 pontos de partida, por ter sido, a par com o trust-region-reflective, o que necessitou de menor número de avaliações para atingir o valor mínimo da função objetivo.

Tabela 3.9 – Evolução das 24 primeiras frequências naturais do modelo de elementos finitos a melhorar, usando o *solver* GlobalSearch e o algoritmo active-set com 100 pontos de partida.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Inicial [Hz]	Diferença antes do Melhoramento [%]	Frequência Numérica Final [Hz]	Diferença depois do Melhoramento [%]
1	286,07	275,30	3,76	289,52	1,21
2	304,09	277,87	8,62	304,82	0,24
3	661,32	591,00	10,63	664,46	0,47
4	684,16	622,14	9,07	677,04	1,04
5	828,00	754,55	8,87	823,76	0,51
6	929,23	826,94	11,01	927,18	0,22
7	1227,06	1129,82	7,92	1225,73	0,11
8	1402,88	1287,78	8,20	1399,04	0,27
9	1709,53	1531,75	10,40	1702,54	0,41
10	1864,34	1614,56	13,40	1850,18	0,76
11	2061,61	1813,37	12,04	2052,91	0,42
12	2063,88	1870,88	9,35	2059,52	0,21
13	2101,25	1927,79	8,26	2095,83	0,26
14	2599,25	2335,20	10,16	2599,25	0,00
15	2845,63	2550,57	10,37	2815,46	1,06
16	2987,62	2731,91	8,56	2987,61	0,00
17	3148,84	2863,68	9,06	3148,31	0,02
18	3382,34	3069,41	9,25	3384,39	0,06
19	3626,93	3195,94	11,88	3658,17	0,86
20	3772,47	3363,81	10,83	3820,33	1,27
21	4059,15	3741,72	7,82	4121,21	1,53
22	4196,35	3838,28	8,53	4222,68	0,63
23	4273,99	3931,45	8,01	4354,1	1,87
24	4357,44	3947,86	9,40	4372,33	0,34
	DRPM [%]		9,39		0,57

A DRPM, obtida por aplicação da Eq. (3.9), antes e depois do melhoramento é de 9,39% e 0,57%, respectivamente, o que representa uma melhoria de 5% relativamente ao *solver* local (DRPM de 0,60%).

Verifica-se na Tabela 3.5 (coluna 4) que se mantém a tendência de o parâmetro  $w_a$  convergir para o limite máximo e o parâmetro  $h_b$  convergir para o limite inferior. Essa tendência do parâmetro  $h_b$  vai contra o que seria de esperar no início, antes de serem efetuadas estas análises. Era esperado que a melhor solução para o modelo de elementos finitos se aproximar do modelo de referência, seria preencher os espaços vazios ao máximo. No entanto isso não se verifica. Uma explicação possível poderá ter a ver com o fato da malha do modelo de elementos finitos a melhorar ser mais refinada que a do modelo de referência, e consequentemente influenciar nos valores das frequências naturais. Assim o modelo de elementos finitos melhorado tem de apresentar uma geometria de tal forma que compense essa influência da malha. O valor da espessura  $t$  converge para o valor da espessura do modelo de referência, como se previa. Na Figura 3.9c pode-se observar o modelo de elementos finitos após melhoramento com o *solver* GlobalSearch e algoritmo active-set, apesar de não ser notório, pela visualização da figura, a diferença relativamente ao modelo melhorado com o *solver* fmincon.

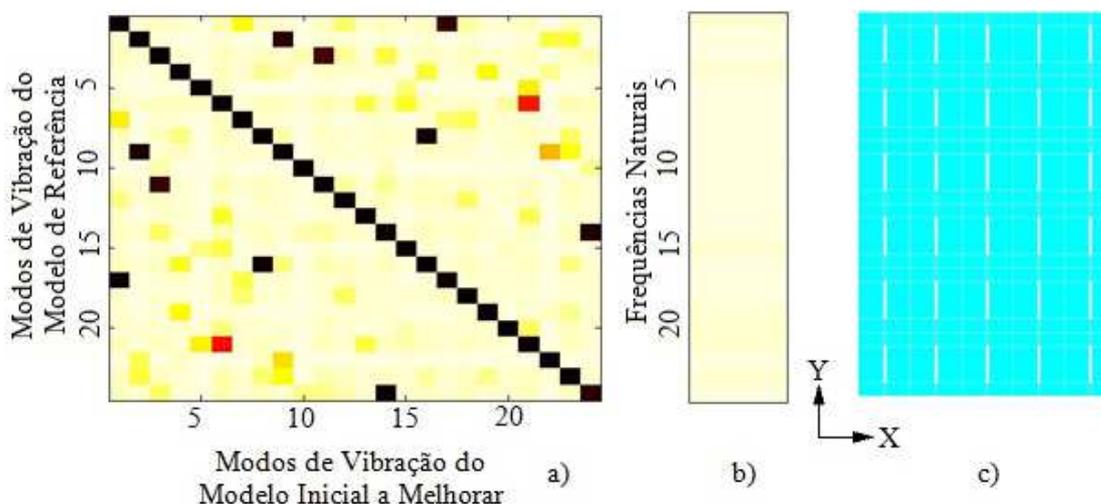


Figura 3.9 - a) Matriz de correlação MAC, b) Matriz de correlação das frequências naturais e c) Modelo de elementos finitos após otimização com o *solver* GlobalSearch e o algoritmo active-set.

Relativamente à matriz de cores da Figura 3.9a, também não se verifica alterações significativas tanto na diagonal como fora da diagonal da matriz MAC, o que indica que a correlação entre os modos de vibração dos dois modelos continua a ser boa. O mesmo se pode dizer relativamente à Figura 3.9b, relativa à correlação entre as frequências naturais dos dois modelos, não sendo visível pela análise das

cores da matriz a melhoria perceptível na DRPM obtida por aplicação da Eq. (3.9). A melhoria relativamente ao *solver* local, apenas é perceptível pelo valor mínimo da função objetivo atingido e pela análise das frequências naturais apresentadas na Tabela 3.9.

Nas Figuras 3.10, 3.11 e 3.12, apresenta-se, respetivamente, a evolução dos parâmetros  $t$ ,  $w_a$  e  $h_b$  dentro dos limites inferiores e superiores impostos para cada um deles, com o *solver* GlobalSearch e o algoritmo SQP, de modo a ser possível comparar a evolução desses parâmetros ocorrida com o *solver* fmincon e o algoritmo SQP. Comparando as Figuras 3.10-3.12 com as obtidas com o *solver* local (Figuras 3.6-3.8), verifica-se uma maior densidade de pontos distribuídos na região de procura definida pelos limites inferiores e superiores.

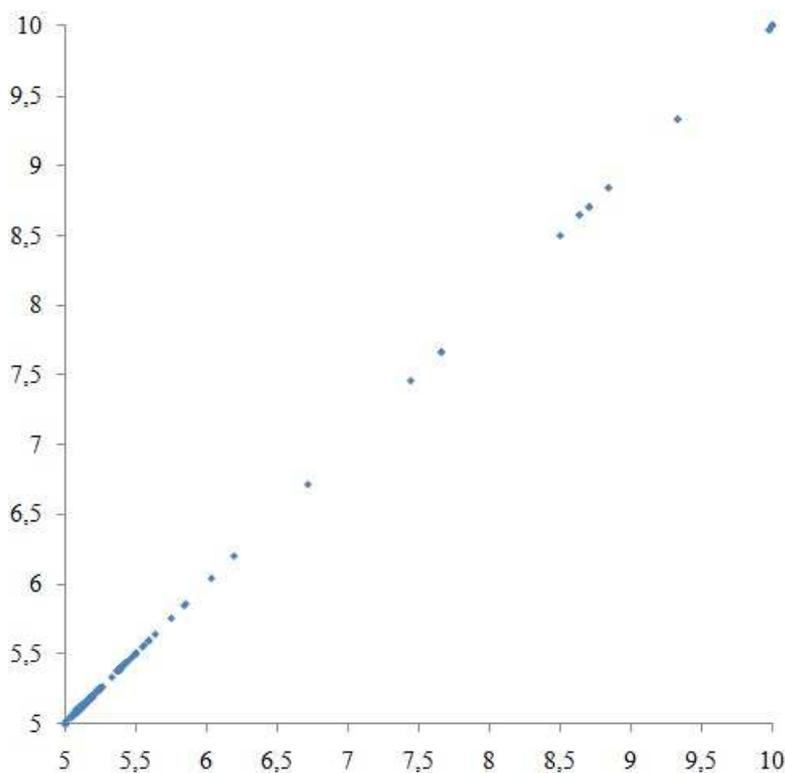


Figura 3.10 – Evolução do parâmetro  $t$  durante o processo de otimização com o *solver* GlobalSearch e o algoritmo SQP, usando 100 pontos de partida.

Como dito anteriormente, o processo de otimização, para os casos de estudo com os *solvers* GlobalSearch, apenas é executado completamente para dois pontos, o inicial, fornecido pelo utilizador, e o que produziu a melhor avaliação inicial da função objetivo de entre os restantes pontos de partida. Por isso não se observa nuvens de pontos concentrados à volta de todos os pontos de partida, pois aqueles pontos de

partida que inicialmente não evoluem para valores de função objetivo favoráveis, são consequentemente abandonados pelo otimizador.

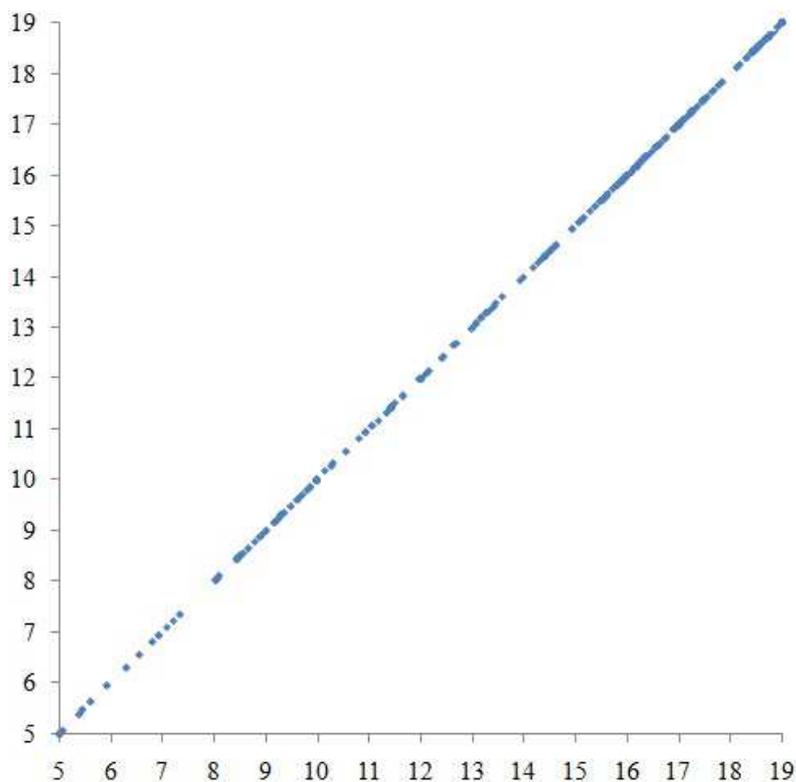


Figura 3.11 – Evolução do parâmetro  $W_a$  durante o processo de otimização com o solver GlobalSearch e o algoritmo SQP, usando 100 pontos de partida.

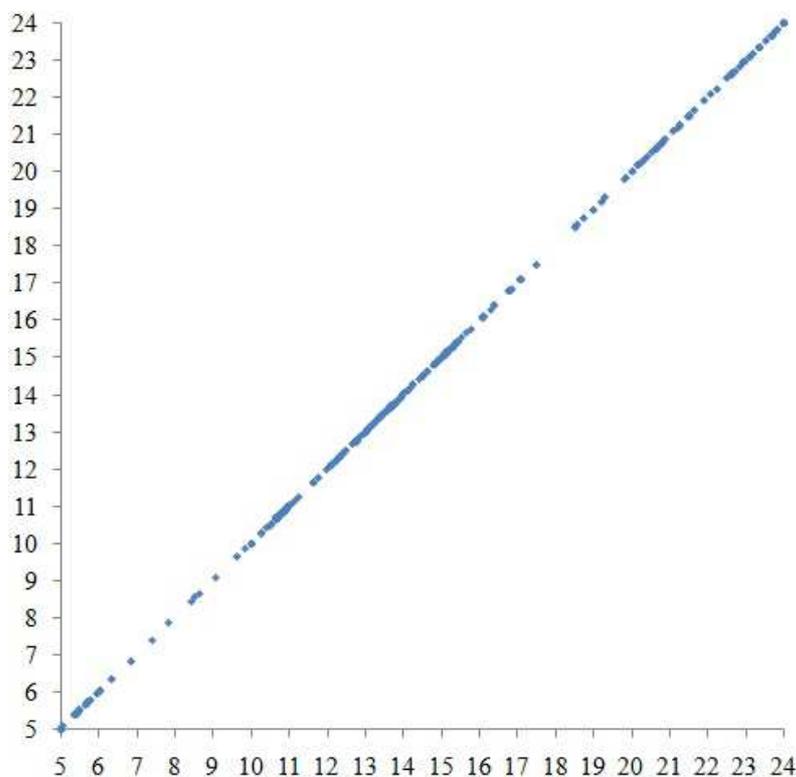


Figura 3.12 – Evolução do parâmetro  $h_b$  durante o processo de otimização com o solver GlobalSearch e o algoritmo SQP, usando 100 pontos de partida.

### 3.6 – Conclusões

Dois técnicas de otimização global estocásticas foram aplicadas a um programa de melhoria de modelos de elementos finitos, de modo a aumentar as potencialidades deste. Os *solvers* globais possuem a vantagem de serem capazes de trabalharem com um elevado número de pontos de partida, e por isso são mais eficientes na busca pelo melhor ótimo global, de que os *solvers* locais. Os dois *solvers* globais testados no programa de melhoria de modelos de elementos finitos trabalham de forma diferente, pelo que as performances obtidas com cada um deles também são diferentes, não no que diz respeito à melhor solução encontrada, mas sim no tempo computacional gasto para a encontrar. A esse nível o `MultiStart` perde para o `GlobalSearch` pois é um tipo de *solver* que analisa exaustivamente todos os pontos de partida, o que implica maior tempo gasto. Isso fica claro com o fato de que o `MultiStart` com 10 pontos de partida gasta 3 vezes mais tempo computacional de que o `GlobalSearch` com 100 pontos de partida.

Foram testados quatro tipos de algoritmos, o `active-set`, o `interior-point`, o `SQP` e o `trust-region-reflective`. Na análise com o *solver* local `fmincon` o algoritmo `SQP` revelou ser o mais eficaz. No caso em que se associam os esses algoritmos com os *solvers* globais apresentados, os algoritmos `active-set`, `SQP` e `trust-region-reflective` possibilitam chegar ao mesmo valor mínimo da função objetivo, no entanto os algoritmos `active-set` e `trust-region-reflective` são mais rápidos a atingir a melhor solução do que o `SQP`, revelando serem a melhor opção em conjunto com o *solver* `GlobalSearch`. O algoritmo `interior-point` não permitiu em nenhuma das análises chegar ao valor mínimo da função objetivo atingido pelos outros três, ficando a ideia de que seriam precisos mais pontos de partida para que isso fosse possível.



## **CAPÍTULO 4 – MÉTODO SEQUENCIAL DE DUAS ETAPAS PARA MODIFICAÇÃO ESTRUTURAL E *UPDATING***

No capítulo anterior aplicaram-se as metodologias de procura global ao processo de melhoramento de modelos de elementos finitos. Verificou-se que essas metodologias são mais eficazes a atingir o valor ótimo de um problema de otimização comparativamente às metodologias de procura local. Contudo o processo de melhoramento de modelos de elementos finitos não está ainda preparado para lidar com certos tipos de problemas que a seguir se apresentam.

Neste capítulo é apresentado um método sequencial de duas etapas para modificação estrutural e *updating*, baseado numa função de otimização multi-objetivo. Este método apresenta novidades no sentido de que é possível otimizar os modelos com base nas características geométricas, no comportamento estático e no comportamento dinâmico do sistema. Assim é possível, no mesmo processo de otimização, conciliar o comportamento estático com o comportamento dinâmico das estruturas. A primeira etapa do processo é baseada no uso e comparação de características geométricas e/ou comportamento estático (análise de deformações) entre o modelo de elementos finitos a otimizar e o modelo de referência, e a segunda etapa é baseada no uso e comparação da resposta modal entre os dois modelos. Outra mais-valia deste método de duas etapas é que pode ser também aplicado nos casos em que existem pares de modos não correlacionados entre o modelo de referência e o modelo de elementos finitos a melhorar.

Três exemplos são apresentados para aferir a eficácia do novo método. O primeiro exemplo é um modelo construído com elementos de viga, cujo modelo de referência possui uma forma em T e o modelo de elementos finitos a melhorar possui uma forma quadrada. O segundo exemplo é um modelo construído com elementos de casca, cujo modelo de referência possui uma forma em hexágono e o modelo de elementos finitos a melhorar possui uma também uma forma quadrada. A razão para o estudo desses modelos, prende-se com o fato de ser necessário aferir o comportamento do método desenvolvido perante modelos construídos com diferentes tipos de geometrias e diferentes tipos de elementos finitos. Estes são casos em que à partida os modos entre o modelo de referência e o modelo de elementos finitos a melhorar não

estão correlacionados, e o que se pretende é que no fim de todo o processo, o modelo de elementos finitos a melhorar também aqui denominado por modelo numérico tenha o mesmo comportamento do modelo de referência. O segundo exemplo é um chassis de um carro de rally todo o terreno, com largo número de variáveis para otimizar, e ao qual por um lado se pretende melhorar o seu comportamento estático e dinâmico, e por outro lado reduzir a sua massa.

O processo é desenvolvido e implementado em MatLab®, e uma função multi-objetivo, para ser minimizada, é usada para avaliar a proximidade entre o modelo a melhorar e o modelo de referência após cada iteração do processo.

Os resultados obtidos da aplicação dos exemplos descritos, mostram que a metodologia proposta é eficaz e consegue estimar os valores ótimos para os parâmetros que definem os modelos, mesmo na presença de modelos com modos não correlacionados.

#### 4.1 – Introdução

Dois modelos estão correlacionados quando os seus modos, compostos pelo par modo de vibração e frequência natural, também estão correlacionados. Dois modelos podem ter todos os modos de vibração correlacionados, mas se as respetivas frequências naturais não estão correlacionadas, então os modos também não estão correlacionados. Por isso se diz que os modelos possuem pares de modos não correlacionados. No sentido de otimizar o modelo de elementos finitos a melhorar, existem as técnicas de melhoramento de modelos de elementos finitos, também conhecidas por *updating*, e as técnicas de modificação estrutural, como já referido no Capítulo 2.

O problema de correlacionar modelos de elementos finitos a melhorar com modelos de referência, quando o primeiro é muito diferente a nível geométrico do segundo, motivou o desenvolvimento de um novo método capaz de lidar com casos de modos correlacionados e não correlacionados. Para além do mais, também é capaz de usar informação acerca do comportamento estático ou das características geométricas dos modelos, como por exemplo o momento de inércia e o centro de massa, enquanto os métodos tradicionais de *updating* apenas se baseiam na informação modal. A seguir apresentam-se em linhas gerais o novo método desenvolvido.

É conhecido que as características geométricas dos sólidos como o volume, o centro de massa e o momento de inércia de área, entre outras, estão relacionadas com a

forma geométrica dos sólidos. Por outro lado os modos de vibração também estão relacionados com a forma geométrica. Então uma relação entre as características geométricas e os modos de vibração pode ser estabelecida. Se as características geométricas entre o modelo de elementos finitos a melhorar e o modelo de referência estão correlacionadas, ou seja, se os dois modelos são geometricamente iguais, então os modos de vibração também podem ser correlacionados. Isto deve-se ao fato de que, ao contrário das frequências naturais, a forma dos modos de vibração não dependem das propriedades mecânicas do material, como massa específica, módulo de elasticidade ou coeficiente de Poisson, apesar de que a amplitude de movimento dos nós que compõem o modo também depende das propriedades do material. No entanto, a correlação entre dois modos de vibração é feita essencialmente com base na forma do modo. Ou seja, um modo pode, por exemplo, ter amplitudes nodais duas vezes maiores que as do outro modo com que está a ser comparado, mas se o sentido do movimento dos nós que os compõem for o mesmo, então esses dois modos podem ser correlacionáveis. De acordo com esse princípio, a nova metodologia permite que, na primeira etapa, a forma geométrica do modelo de elementos finitos seja modificada no sentido de ir ao encontro da forma geométrica do modelo de referência. Entretanto, e apesar de no fim desta etapa os modos de vibração estarem correlacionados, as frequências naturais muito provavelmente não estarão, o que implica que os pares de modos de vibração não estão ainda totalmente correlacionados. Contudo, nestas condições é possível, na segunda etapa do processo, efetuar com elevada probabilidade de sucesso o *updating* usando as características modais dos modelos.

Este novo método também permite, por exemplo, na primeira etapa do processo, otimizar o comportamento estático de uma estrutura usando para isso informação acerca de deslocamentos e rotações. Para além disso, o comportamento dinâmico pode também ser otimizado na segunda etapa. Este método apresenta assim vários potenciais interesses devido ao facto de que o utilizador pode escolher as características estruturais a otimizar que sejam mais vantajosas do ponto de vista do projeto.

Para avaliar a eficácia do novo método, três exemplos são estudados. Os dois primeiros exemplos são dois modelos de elementos finitos a melhorar, compostos por elementos de viga (modelo 1) e elementos de casca (modelo 2), ambos com forma quadrada. Os dois modelos de referência, também construídos com os mesmos tipos de elementos finitos dos modelos a melhorar, possuem, respetivamente, uma forma em

T e uma forma em hexágono, como descrito no sub-capítulo 4.4. Devido às diferenças indiscutíveis na forma geométrica entre os modelos de referência e os modelos a melhorar, os mesmos não são correlacionáveis, pelo que o *updating* com base na informação modal não pode ser efetuado. Então na primeira etapa do processo é feita uma aproximação suficiente ao modelo de referência, de tal forma que no início da segunda etapa os dois modelos são geometricamente tão próximos que não existem modos de vibração não correlacionados. Entretanto, as frequências naturais ainda não estão correlacionadas. Assim a segunda etapa é executada com todos os modos, e a informação modal pode ser usada com sucesso para a otimização das frequências naturais do modelo de elementos finitos.

O segundo exemplo, também apresentado no sub-capítulo 4.4, é um chassis de um carro de rally todo o terreno, modelado com elementos de viga. Com este modelo pretende-se minimizar a sua massa, minimizar os deslocamentos e rotações máximas, mantendo contudo o comportamento modal inalterado. Na primeira etapa, o processo faz uma modificação estrutural atuando em variáveis geométricas do chassis de modo a minimizar a sua massa, assim como os deslocamentos e rotações máximas. Contudo é natural, que devido a essas alterações, o comportamento dinâmico original da estrutura seja alterado. De modo a recuperar o comportamento dinâmico inicial do chassis, a segunda etapa é aplicada com base nas características modais do mesmo. Um elevado número de variáveis (911 variáveis), é usado neste exemplo. Não se encontrou na literatura nenhum caso com um número de variáveis tão elevado.

Para avaliar a proximidade entre o modelo de elementos finitos a melhorar e o modelo de referência é usada a função multi-objetivo, apresentada no sub-capítulo 4.2. Para executar todo o processo de modificação estrutural e *updating* é aplicada a nova metodologia de melhoramento de modelos de elementos finitos sequencial de duas etapas, como explicado no sub-capítulo 4.3. O otimizador usa o *solver* de otimização global GlobalSearch e o algoritmo *active-set* do MatLab<sup>®</sup>, já apresentado no Capítulo 3.

## 4.2 – Formulação da Função Multi-Objetivo

Neste sub-capítulo é descrito o formalismo desenvolvido para a função multi-objetivo. A função multi-objetivo  $F_{mo}$  é dada por

$$F_{mo} = f_s(\mathbf{u}) + f_d(\mathbf{v}), \quad (4.1)$$

onde  $f_s(\mathbf{u})$  é uma função objetivo que depende dos parâmetros de um vetor  $\mathbf{u}$  e quantifica a diferença entre o modelo de elementos finitos a melhorar, também aqui denotado por modelo numérico, e o modelo de referência na primeira etapa do processo, e  $f_d(\mathbf{v})$  é uma função objetivo que depende dos parâmetros de um vetor  $\mathbf{v}$  e quantifica a diferença entre o modelo numérico e o modelo de referência na segunda etapa do processo.

O vetor  $\mathbf{u}$  contém parâmetros que definem a geometria dos modelos, como por exemplo, as coordenadas que definem a posição dos nós que constituem o modelo, e o vetor  $\mathbf{v}$  contém parâmetros que definem as propriedades mecânicas do material, como por exemplo, o módulo de elasticidade, o coeficiente de Poisson e a massa específica.

Os dois conjuntos de parâmetros são sequencialmente otimizados no sentido de minimizar a função multi-objetivo  $F_{mo}$ .

A função objetivo  $f_s(\mathbf{u})$  é definida pela soma de funções

$$f_s(\mathbf{u}) = f_1(\mathbf{u}) + f_2(\mathbf{u}) + f_3(\mathbf{u}) + \dots + f_f(\mathbf{u}), \quad (4.2)$$

onde as funções  $f_1(\mathbf{u})$ ,  $f_2(\mathbf{u})$ ,  $f_3(\mathbf{u})$ , ...,  $f_f(\mathbf{u})$ , representam a quantificação das diferenças entre as características geométricas ou comportamento estático do modelo de elementos finitos a melhorar e do modelo de referência. Por exemplo, considerando uma característica geométrica ou comportamento estático, com valor de referência denotado por  $R$ , a função  $f_1$  é dada por

$$f_1(\mathbf{u}) = \frac{\left( R - \hat{N}_q(\hat{\mathbf{u}}_q) \right)^2}{\left( R - \hat{N}_0(\hat{\mathbf{u}}_0) \right)^2}, \quad (4.3)$$

onde  $\hat{N}_0$  é o valor inicial estimado para o modelo numérico,  $\hat{\mathbf{u}}_0$  é o vetor que contém os parâmetros iniciais,  $\hat{N}_q$  é o valor numérico estimado na iteração  $q$  e  $\hat{\mathbf{u}}_q$  é o vetor que contém os parâmetros atualizados na iteração  $q$ , com  $q \geq 0$ . Os termos na Eq. (4.3) são elevados ao quadrado para acelerar a convergência da função objetivo e obter apenas diferenças positivas, e o denominador é usado para a normalização do resultado. O valor numérico estimado  $\hat{N}_q$  é função dos parâmetros do vetor  $\hat{\mathbf{u}}_q$ . A relação entre eles pode ser escrita como

$$\hat{N}_q = f\left(\hat{u}_{q_1}, \hat{u}_{q_2}, \hat{u}_{q_3}, \dots, \hat{u}_{q_p}\right). \quad (4.4)$$

Os parâmetros  $\hat{u}_{q_1}, \dots, \hat{u}_{q_p}$  contidos no vetor  $\hat{\mathbf{u}}_q$  estão sujeitos à restrição

$$u_{\text{LB}} \leq \hat{u}_{q_i} \leq u_{\text{UB}}, \text{ para } i = 1, \dots, p, \quad (4.5)$$

onde a quantidade  $u_{\text{LB}}$  representa o limite inferior e a quantidade  $u_{\text{UB}}$  representa o limite superior.

A função objetivo  $f_d(\mathbf{v})$ , já descrita no sub-capítulo 3.2 como Eq. (3.1), é definida pelas Eqs. (3.2) – (3.8).

### 4.3 – Descrição do Processo Sequencial de Duas Etapas

O algoritmo que descreve o processo de modificação estrutural e *updating* desenvolvido é apresentado neste sub-capítulo. O novo processo é implementado no *software* MatLab<sup>®</sup>, usando algumas ferramentas da sua *toolbox*, e está preparado para interagir com o *software* de modelação e simulação em elementos finitos ANSYS<sup>®</sup>. É utilizado o *solver* GlobalSearch combinado com o algoritmo active-set com 1000 pontos de partida aleatórios mais o ponto inicial definido pelo utilizador.

Como já dito, o processo está dividido em duas etapas. Na primeira etapa, o processo otimiza o modelo de elementos finitos a melhorar com base no uso e comparação de características geométricas e comportamento estático dos modelos. Parte-se do princípio que os modelos a comparar não diferem no tipo de elementos finitos que usam. Quer isso dizer que, por exemplo, a um modelo a melhorar com elementos de casca, não vai ser pedido que passe a ter o comportamento de um modelo de referência modelado com elementos sólidos. O valor ótimo da função objetivo  $f_s$  é encontrado quando essas características entre o modelo de elementos finitos a melhorar e o modelo de referência são similares ou iguais. Consequentemente os valores do vetor  $\hat{\mathbf{u}}$  são também os valores ótimos estimados para os parâmetros nele contidos. A segunda etapa inicia com o modelo de elementos finitos a melhorar, usando os valores iniciais para os parâmetros contidos no vetor  $\mathbf{v}_0$ . Nesta etapa, o processo usa a informação acerca da resposta ou características modais do modelo numérico e do modelo de referência de modo a estimar o valor ótimo da função objetivo  $f_d$ . O valor ótimo da função objetivo é encontrado quando as características modais entre os dois

modelos são similares ou iguais. Conseqüentemente os valores do vetor  $\hat{\mathbf{v}}$  são também os valores ótimos estimados para os parâmetros nele contidos. O valor ótimo da função multi-objetivo  $F_{mo}$  é a soma do valor ótimo das funções  $f_s$  e  $f_d$ .

#### 4.3.1 – Descrição do Algoritmo

Considere-se  $\hat{N}_0(\hat{\mathbf{u}}_0)$  o valor inicial estimado para o modelo numérico dependendo do vetor de parâmetros iniciais  $\hat{\mathbf{u}}_0$ . O valor inicial estimado é comparado com o valor de referência  $R$ . A função objetivo inicial  $f_s^0$ , definida em (4.2), é calculada dependendo da diferença entre o valor de referência e o valor numérico estimado, obtida pela Eq. (4.3). O sobrescrito em  $f_s^0$  denota a iteração. Se  $f_s^0 \rightarrow 0$  ou se a condição  $\|f_s^{q+1} - f_s^q\| \leq 10^{-6}$ , com  $q \geq 0$ , é satisfeita como critério de paragem, então a primeira etapa do processo é concluída, como já explicado no sub-capítulo 3.3.1. Se nenhuma das condições acima é satisfeita, então  $q = q + 1$  e novas estimativas  $\hat{N}_{q+1}(\hat{\mathbf{u}}_{q+1})$  são calculadas. Novamente, estes valores são comparados com os valores de referência usando a função objetivo  $f_s^{q+1}$  baseada na Eq. (4.2). Se para alguma iteração  $q = h \geq 1$ , tal que  $f_s^h \rightarrow 0$ , ou, se a condição  $\|f_s^{q+1} - f_s^q\| \leq 10^{-6}$  é satisfeita, então a primeira etapa do processo é concluída e os valores ótimos de  $\hat{N}_h(\hat{\mathbf{u}}_h)$  são encontrados.

Na segunda etapa do processo, considere-se  $\hat{\phi}_0(\hat{\mathbf{v}}_0)$  e  $\hat{\lambda}_0(\hat{\mathbf{v}}_0)$ , respetivamente como, os vetores próprios numéricos iniciais estimados e os valores próprios numéricos iniciais estimados, a partir dos quais podem ser calculados  $\hat{MAC}_{i_0}(\hat{\mathbf{v}}_0)$ ,  $\hat{MAC}_{j_0}(\hat{\mathbf{v}}_0)$  e  $\hat{f}_{j_0}(\hat{\mathbf{v}}_0)$ , onde  $\hat{MAC}_{i_0}(\hat{\mathbf{v}}_0)$  são os elementos da diagonal da matriz MAC inicial estimada e  $\hat{MAC}_{j_0}(\hat{\mathbf{v}}_0)$  são os valores fora da diagonal da matriz MAC inicial estimada. A função objetivo inicial  $f_d^0$ , definida em (3.1), dependendo das Eqs. (3.2) - (3.5), é usada para comparar os valores numéricos

iniciais estimados com os valores de referência/experimentais. Se  $f_d^0 \rightarrow -1^+$ , onde  $-1^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-1 + \epsilon)$ , ou, se a condição  $\|f_d^{q+1} - f_d^q\| \leq 10^{-6}$  é satisfeita como critério de paragem, então a segunda etapa do processo é concluída. Se nenhuma das condições acima é satisfeita, então  $q = q + 1$  e novas estimativas  $\hat{\varphi}_{q+1}(\hat{\mathbf{v}}_{q+1})$  e  $\hat{\lambda}_{q+1}(\hat{\mathbf{v}}_{q+1})$  são calculadas. Novamente, estes valores são comparados com os valores de referência usando a função objetivo  $f_d^{q+1}$  baseada na Eq. (3.1). Se para alguma iteração  $q = h \geq 1$ , tal que  $f_d^h \rightarrow -1^+$ , ou, se a condição  $\|f_d^{q+1} - f_d^q\| \leq 10^{-6}$  é satisfeita, então o processo de melhoramento de modelos de elementos finitos é concluído e os valores ótimos de  $\hat{\varphi}_h(\hat{\mathbf{v}}_h)$  e  $\hat{\lambda}_h(\hat{\mathbf{v}}_h)$  são encontrados.

#### 4.3.2 – Fluxograma do Processo Sequencial de Duas Etapas

O fluxograma que descreve o algoritmo de interação entre o MatLab® e o ANSYS® é apresentado na Figura 4.1.

A descrição detalhada desse fluxograma que descreve o processo de otimização é a seguinte:

##### 1. Etapa 1

1.1. Executa o ANSYS® com o modelo de elementos finitos inicial a otimizar, construído em APDL num ficheiro `input.txt`, com os parâmetros a otimizar contidos no vetor inicial  $\mathbf{u}_0$ ;

1.2. O MatLab® lê o ficheiro de resultados `output.txt` obtido do ANSYS® e compara os valores estimados com os valores de referência/experimentais, de modo a preencher a função objetivo  $f_s$ ;

1.3. Conclui o processo se um valor ótimo é atingido, ou seja, se as condições de paragem, descritas no sub-capítulo 4.3.1, são satisfeitas, e vai para a etapa 2, ou vai para o passo 1.4;

1.4. Obtém os novos parâmetros  $\hat{\mathbf{u}}_{q+1}$  definidos pelo otimizador, tendo em conta os constrangimentos definidos pela condição (4.5);

1.5. Modifica o modelo de elementos finitos no ficheiro `input.txt` com os novos parâmetros  $\hat{\mathbf{u}}_{q+1}$ ;

1.6. O ANSYS® inicia uma nova análise com o novo ficheiro `input.txt`, indo para o passo 1.1.

Nesta fase o modelo de elementos finitos a melhorar atinge uma condição de aproximação ao modelo de referência, de tal forma que os modos de vibração entre os dois modelos estão correlacionados.

## 2. Etapa 2

2.1. Executa o ANSYS® com o modelo de elementos finitos inicial a otimizar, construído em APDL num novo ficheiro `input.txt`, já com a geometria modificada, com os parâmetros a otimizar contidos no vetor inicial  $\mathbf{v}_0$ ;

2.2. O MatLab® lê o ficheiro de resultados `output.txt` obtido do ANSYS® e compara os valores estimados com os valores de referência/experimentais, de modo a construir a função objetivo  $f_d$ ;

2.3. Conclui o processo se um valor ótimo é atingido, ou seja, se as condições de paragem, descritas no sub-capítulo 3.3.1, são satisfeitas, ou vai para o passo 2.4;

2.4. Obtém os novos parâmetros  $\hat{\mathbf{v}}_{q+1}$  definidos pelo otimizador, tendo em conta os constrangimentos definidos pela condição (3.8);

2.5. Modifica o modelo de elementos finitos no ficheiro `input.txt` com os novos parâmetros  $\hat{\mathbf{v}}_{q+1}$ ;

2.6. O ANSYS® inicia uma nova análise com o novo ficheiro `input.txt`, indo para o passo 2.1.

Como já referido, o otimizador usa o *solver* de otimização global GlobalSearch e o algoritmo active-set do MatLab®, já apresentado no Capítulo 3, para procurar o valor ótimo das funções objetivo  $f_s$  e  $f_d$ , e consequentemente da função multi-objetivo  $F_{mo}$ .

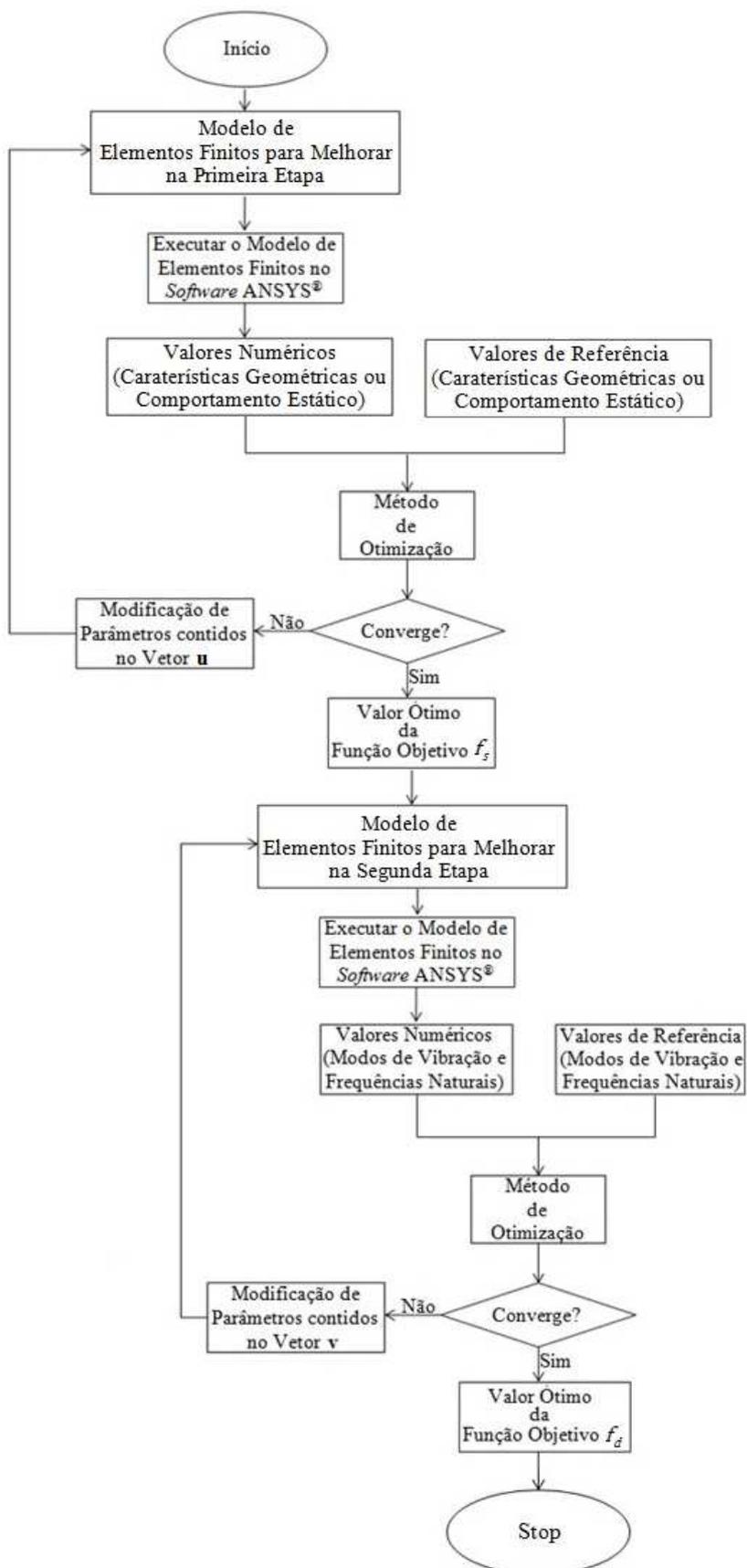


Figure 4.1 - Fluxograma de interação entre o MatLab® e o ANSYS® para o processo de otimização sequencial de duas etapas.

## 4.4 – Descrição dos Modelos

Nesta secção são apresentados os modelos usados para demonstrar a eficácia do método proposto.

### 4.4.1 – Modelo 1 e 2

Com o modelo 1 e 2 pretende-se demonstrar casos em que existem modos não correlacionados entre o modelo de referência e o modelo de elementos finitos a melhorar. Os não estão correlacionados devido a diferenças geométricas entre eles, e esse facto promove modos de vibração não correlacionáveis. Por isso, os métodos tradicionais de *updating* não podem ser aplicados nestes casos. Para que o *updating* seja efetuado com sucesso, primeiro é necessário efetuar a modificação estrutural aos modelos de elementos finitos a melhorar, de modo a que sejam geometricamente correlacionáveis com os modelos de referência, e consequentemente os modos de vibração passem também a estar correlacionados. Então, e após a primeira fase, o processo de *updating* pode ser efetuado com sucesso usando todos os pares de modos.

O modelo de referência 1 é um modelo em elementos finitos em forma de T composto por elementos de viga (elemento BEAM3 disponível no ANSYS®), como apresentado na Figura 4.2a. O modelo de elementos finitos inicial a melhorar é também composto por elementos de viga (BEAM3) e tem a forma de um quadrado, como apresentado na Figura 4.2b.

O modelo de referência 2 é um modelo em elementos finitos em forma de hexágono composto por elementos de casca (elemento SHELL63 disponível no ANSYS®), com espessura de 5 mm, como apresentado na Figura 4.3a. O modelo de elementos finitos inicial a melhorar é também composto por elementos de casca (SHELL63) e tem a forma de um quadrado, como apresentado na Figura 4.3b.

De notar que modelos a melhorar são construídos com o mesmo tipo de elemento e o mesmo número de nós dos modelos de referência, para que a solução final seja atingível.

O modelo de referência 1 é construído usando oito nós, cujas coordenadas são apresentadas na Tabela 4.1, e sete elementos de viga. O modelo de referência 2 é construído usando 20 nós, cujas coordenadas são apresentadas na Tabela 4.2, e nove elementos de casca.

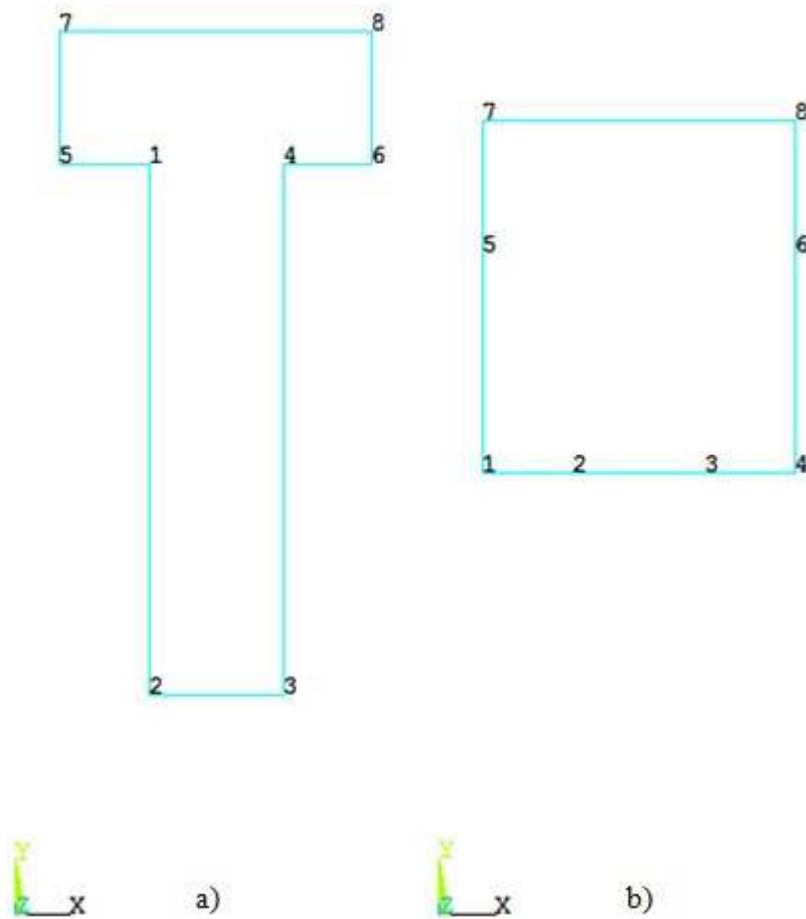


Figura 4.2 – a) Modelo de referência 1 e b) respectivo modelo de elementos finitos a melhorar.

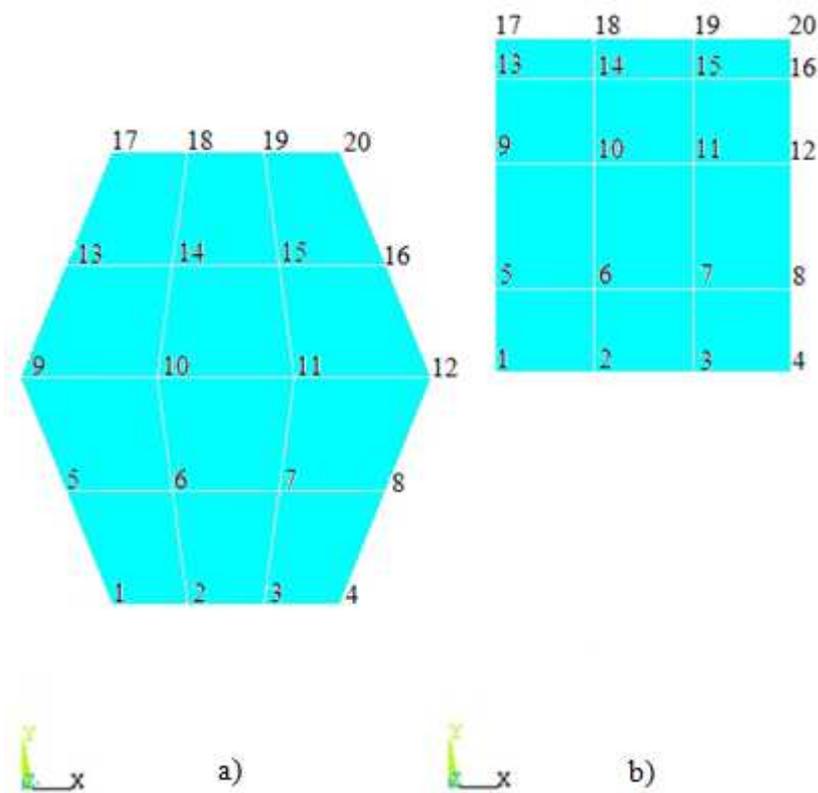


Figura 4.3 – a) Modelo de referência 2 e b) respectivo modelo de elementos finitos a melhorar.

Tabela 4.1 – Coordenadas dos nós do modelo de referência 1.

Número do Nó	Coordenadas	
	“x” (mm)	“y” (mm)
1	300	1700
2	300	500
3	600	500
4	600	1700
5	100	1700
6	800	1700
7	100	2000
8	800	2000

Tabela 4.2 – Coordenadas dos nós do modelo de referência 2.

Número do Nó	Coordenadas	
	“x” (mm)	“y” (mm)
1	200	500
2	367	500
3	533	500
4	700	500
5	100	750
6	333	750
7	567	750
8	800	750
9	0	1000
10	300	1000
11	600	1000
12	900	1000
13	100	1250
14	333	1250
15	567	1250
16	800	1250
17	200	1500
18	367	1500
19	533	1500
20	700	1500

Os modelos de referência possuem ambos um módulo de elasticidade de  $200 \times 10^9$  Pa, coeficiente de Poisson igual a 0,28 e uma massa específica de  $7800 \text{ kg/m}^3$ .

Os modelos de referência são executados no *software* ANSYS®, e a partir do qual são extraídas as suas propriedades geométricas, assim como as oito (no caso do modelo 1) e seis (no caso do modelo 2) primeiras frequências naturais, assim como o respetivo vetor próprio associado a cada frequência natural. Os pontos medidos correspondem aos vértices dos modelos. Os dados obtidos são considerados como referência.

O modelo 1 a otimizar é construído usando oito nós, cujas coordenadas são apresentadas na Tabela 4.3, e sete elementos de viga. Dez das 16 componentes que

definem as coordenadas dos oito nós, e que dependem de seis variáveis  $A, B, C, D, G$  e  $F$ , são assumidas como não sendo conhecidas.

O modelo 2 a otimizar é construído usando 20 nós, cujas coordenadas são apresentadas na Tabela 4.4, e 9 elementos de casca. Vinte das 40 componentes que definem as coordenadas dos 20 nós, e que dependem de 7 variáveis  $A, B, C, D, G, F, G, H, I, J, K$  e  $L$  são assumidas como não sendo conhecidas. Para além de ser otimizado nas coordenadas, o modelo 2 é também otimizado na espessura  $t$ .

Tabela 4.3 – Coordenadas dos nós do modelo 1 inicial a otimizar.

Número do Nó	Coordenadas	
	“x” (mm)	“y” (mm)
1	$A$	$B$
2	300	$C$
3	600	$C$
4	$D$	$B$
5	100	$F$
6	800	$F$
7	100	$G$
8	800	$G$

Tabela 4.4 – Coordenadas dos nós do modelo 2 inicial a otimizar.

Número do Nó	Coordenadas	
	“x” (mm)	“y” (mm)
1	$A$	$B$
2	333	1000
3	567	1000
4	$C$	$B$
5	$D$	$F$
6	333	1200
7	567	1200
8	$G$	$F$
9	$H$	$I$
10	333	1500
11	567	1500
12	$J$	$I$
13	$D$	$K$
14	333	1700
15	567	1700
16	$G$	$K$
17	$A$	$L$
18	333	1800
19	567	1800
20	$C$	$L$

Os modelos iniciais a otimizar são construído com o propósito de possuir coordenadas diferentes do modelo de referência, pelo que consequentemente os modelos diferem nas sua forma geométrica e características geométricas. A nível de propriedades mecânicas, a ambos os modelos a melhorar atribuiu-se um módulo de elasticidade  $E$  de  $100 \times 10^9$  Pa, coeficiente de Poisson  $\nu$  igual a 0,25 e uma massa específica  $\rho$  de  $5000 \text{ kg/m}^3$ . Parte-se do princípio que nestes casos, os valores iniciais

são escolhidos arbitrariamente. As Tabelas 4.5 e 4.6 mostram essas variáveis com os valores iniciais atribuídos, respectivamente, ao modelo 1 e 2 a melhorar, e respectivos limites inferiores e superiores das variáveis.

Tabela 4.5 – Vetores que contêm os parâmetros a otimizar no modelo 1.

Vetor	Variável	Unidades	Valor Inicial	Limite Inferior	Limite Superior
<b>u</b>	<i>A</i>		100	100	300
	<i>B</i>		1000	1000	1700
	<i>C</i>	[mm]	1000	500	1000
	<i>D</i>		800	600	800
	<i>F</i>		1500	1500	1700
	<i>G</i>		1800	1800	2000
	<i>E</i>		[Pa]	100x10 <sup>9</sup>	100x10 <sup>9</sup>
<b>v</b>	$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	5000	5000	8000
	<i>v</i>	-	0,25	0,25	0,28

Tabela 4.6 – Vetores que contêm os parâmetros a otimizar no modelo 2.

Vetor	Variável	Unidades	Valor Inicial	Limite Inferior	Limite Superior
<b>u</b>	<i>A</i>		100	100	200
	<i>B</i>		1000	500	1000
	<i>C</i>		800	700	800
	<i>D</i>		100	100	200
	<i>F</i>		1200	750	1200
	<i>G</i>	[mm]	800	700	800
	<i>H</i>		100	0	100
	<i>I</i>		1500	1000	1500
	<i>J</i>		800	800	900
	<i>K</i>		1700	1250	1700
	<i>L</i>	1800	1500	1800	
	<i>t</i>	2,5	2,5	5	
	<b>v</b>	<i>E</i>	[Pa]	100x10 <sup>9</sup>	100x10 <sup>9</sup>
$\rho$		[kg/m <sup>3</sup> ]	5000	5000	8000
<i>v</i>		-	0,25	0,25	0,28

No sentido de otimizar os modelos de elementos finitos a melhorar de modo a que eles tenham o mesmo comportamento dos respectivos modelos de referência, a nova metodologia é aplicada. Na primeira etapa, é feita a modificação estrutural no sentido de encontrar os valores ótimos para as variáveis contidas no vetor **u**, relacionadas com as coordenadas dos modelos e que têm influência nas características geométricas, tais como volume, centro de massa, momento de inércia e produto de inércia.

A função objetivo  $f_s(\mathbf{u})$  é usada para comparar os valores numéricos estimados com os valores de referência, baseados nas referidas características geométricas. A função objetivo  $f_s(\mathbf{u})$ , já descrita no sub-capítulo 4.2, é agora definida por

$$f_s(\mathbf{u}) = f_v(\mathbf{u}) + f_c(\mathbf{u}) + f_I(\mathbf{u}), \quad (4.6)$$

onde,  $f_V$  é uma função que quantifica a diferença entre o volume do modelo de referência e o volume do modelo a otimizar, respectivamente denotado como  $V$  e  $\hat{V}_q$ ,  $f_C$  é uma função que quantifica a diferença entre o centro de massa do modelo de referência e o centro de massa do modelo a otimizar, respectivamente denotado como  $C$  e  $\hat{C}_q$ , e  $f_I$  é uma função que quantifica a diferença entre os momentos e produtos de inércia de referência e os momentos e produtos de inércia do modelo a otimizar em relação à origem, respectivamente denotado como  $I$  e  $\hat{I}_q$ .

A função  $f_{VOL}$  é dada por

$$f_V(\mathbf{u}) = \frac{\left( V - \hat{V}_q(\hat{\mathbf{u}}_q) \right)^2}{\left( V - \hat{V}_0(\hat{\mathbf{u}}_0) \right)^2}. \quad (4.7)$$

A função  $f_C$  é dada por

$$f_C(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{k=1}^{N_D} \left( C_k - \hat{C}_{k,q}(\hat{\mathbf{u}}_q) \right)^2}{\sum_{k=1}^{N_D} \left( C_k - \hat{C}_{k,0}(\hat{\mathbf{u}}_0) \right)^2}, \quad (4.8)$$

onde  $N_D$  é o número de dimensões do modelo. Podem ser usadas três dimensões, “x”, “y” e “z”. Para:  $k = 1$  corresponde à dimensão na direção “x”;  $k = 2$  corresponde à dimensão na direção “y”;  $k = 3$  corresponde à dimensão na direção “z”.

A função  $f_I$  é dada por

$$f_I(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{m=1}^{N_R} \left( I_m - \hat{I}_{m,q}(\hat{\mathbf{u}}_q) \right)^2}{\sum_{m=1}^{N_R} \left( I_m - \hat{I}_{m,0}(\hat{\mathbf{u}}_0) \right)^2} + \frac{\sum_{n=1}^{N_P} \left( I_n - \hat{I}_{n,q}(\hat{\mathbf{u}}_q) \right)^2}{\sum_{n=1}^{N_P} \left( I_n - \hat{I}_{n,0}(\hat{\mathbf{u}}_0) \right)^2}, \quad (4.9)$$

onde  $N_R$  é o número de eixos. Podem ser usados três eixos, “x”, “y” e “z”. Para:  $m = 1$  corresponde ao eixo na direção “x”;  $m = 2$  corresponde ao eixo na direção “y” e  $m = 3$  corresponde ao eixo na direção “z”.  $N_P$  é o número de planos de rotação. Podem ser usados três planos de rotação,  $n = 1$  corresponde ao plano de rotação “xy”;  $n = 2$  corresponde ao plano de rotação “xz” e  $n = 3$  corresponde ao plano de rotação “yz”.

As características geométricas numéricas estimadas  $\hat{V}_q$ ,  $\hat{C}_q$ , e  $\hat{I}_q$  são função das variáveis ou parâmetros contidos no vetor  $\mathbf{u}$ , como apresentado na Tabela 4.3. Então, a Eq. (4.4) pode ser re-escrita de modo a descrever a relação entre eles como

$$\left( \hat{V}_q, \hat{C}_q, \hat{I}_q \right) = f \left( \hat{A}_q, \hat{B}_q, \hat{C}_q, \hat{D}_q, \hat{F}_q, \hat{G}_q \right), \quad (4.10)$$

onde  $\hat{A}_q, \dots, \hat{G}_q$  denotam os valores dos parâmetros estimados a cada iteração  $q$ .

Nesta fase o modelo de elementos finitos melhorado já se aproxima do modelo de referência a nível geométrico, pelo que os modos de vibração entre os dois modelos já podem ser correlacionados.

Depois de finalizada a primeira etapa, é iniciada a segunda etapa do processo, usando informação acerca das características modais dos modelos, no sentido de estimar os valores ótimos para as variáveis contidas no vetor  $\mathbf{v}$ . Como se pode observar pela consulta das Tabelas 4.5 e 4.6, o vetor  $\mathbf{v}$  contém os parâmetros relacionados com as propriedades mecânicas do material do modelo, como o módulo de elasticidade, o coeficiente de Poisson e a massa específica. A relação entre as características modais do modelo e essas propriedades pode ser obtida reescrevendo as Eqs. (3.6) e (3.7), respetivamente como

$$\hat{\Phi}_{j_q} = f \left( \hat{E}_q, \hat{\nu}_q, \hat{\rho}_q \right) \quad (4.11)$$

e

$$\hat{\lambda}_{j_q} = f \left( \hat{E}_q, \hat{\nu}_q, \hat{\rho}_q \right), \quad (4.12)$$

onde  $\hat{E}_q$  denota o módulo de elasticidade numérico estimado,  $\hat{\nu}_q$  é o coeficiente de Poisson numérico estimado e  $\hat{\rho}_q$  é a massa específica numérica estimada a cada iteração  $q$ .

A comparação entre as características modais do modelo a otimizar e do modelo de referência é efetuada usando a função objetivo  $f_d(\mathbf{v})$  (Eq. 3.1).

#### 4.4.2 – Modelo 3

O terceiro modelo de elementos finitos a melhorar é o chassis de um carro de rally todo o terreno, modelado com elementos de viga, como apresentado na Figura 4.4.

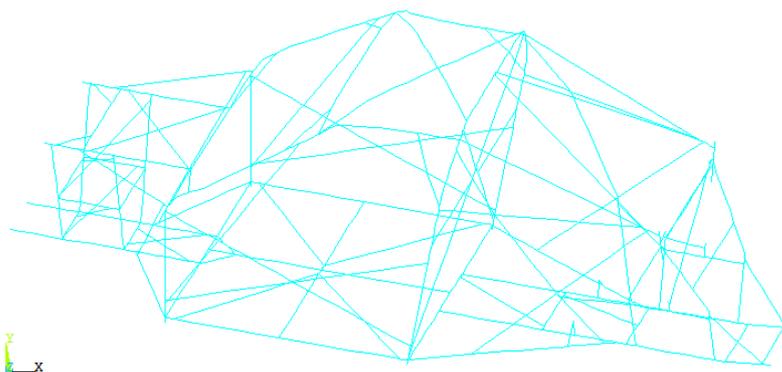


Figura 4.4 – Modelo baseado no chassis tubular de um carro de rally todo o terreno a otimizar.

O chassis é modelado com 342 elementos de viga (elemento BEAM188 disponível no ANSYS®), e 241 nós. O elemento BEAM188 possui seis GDL's em cada nó: translação nas direções “x”, “y” e “z”, e rotação nos planos “xy”, “yz” e “xz”. Cada elemento tem também associada uma secção circular oca.

As propriedades mecânicas do material do chassis são estimadas por via experimental, sendo obtido por via de ensaios de tração um módulo de elasticidade  $E$  de  $202 \times 10^9$  Pa e um coeficiente de Poisson  $\nu$  com valor igual a 0,30. A massa específica é determinada em função da massa e do volume de um fragmento tubular do mesmo material do chassis com valor de  $7898 \text{ kg/m}^3$ . Por simplicidade, e com boa aproximação, considera-se que o material possui um comportamento isotrópico.

Dos 241 nós que compõem o modelo em elementos finitos do chassis, 66 nós localizados na parte da frente e 104 nós na parte de trás do chassis, são usados na primeira etapa do processo de otimização para modificação estrutural. Os nós envolvidos na modificação estrutural são selecionados tendo em conta as restrições impostas pelo projeto. Por exemplo, os nós não selecionados são aqueles que estão relacionados com as barras de segurança do cockpit do veículo, e que por imposição das regras da Federação Internacional do Automóvel, não podem ser alteradas. Cada nó é definido por coordenadas tri-dimensionais (“x”, “y” e “z”), pelo que, no total são usadas 510 variáveis relacionadas com os nós, ou seja 170 nós multiplicados por três dimensões.

Por outro lado, alguns elementos de viga são sujeitos a alteração nas propriedades que definem a sua secção, tal como raio externo e a espessura da parede. O chassis é composto por cinco tipos diferentes de secções como apresentado na Tabela 4.7. As secções envolvidas na modificação estrutural, são também selecionadas

tendo em conta as restrições impostas pelo projeto. Aquelas que estão relacionadas com as barras de segurança do cockpit do veículo, não podem ser alteradas por imposição das regras da Federação Internacional do Automóvel.

Tabela 4.7 – Resumo das secções usadas no chassis e na modificação estrutural.

Tipo	Quantidade	Quantidade Sujeita a Modificação	Raio Externo [mm]	Espessura [mm]	Quantidade de Variáveis
1	84	16	25	2	32
2	214	152	20	2	304
3	24	18	20	1,5	36
4	14	9	17,5	2	18
5	6	5	17,5	1,5	10

São assim usadas 400 variáveis relacionadas com as secções, o que no total perfaz uma quantidade de 910 variáveis (400+510) para a modificação estrutural na primeira etapa do processo.

Na primeira etapa, a modificação estrutural é executada no sentido de estimar os valores ótimos das 910 variáveis contidas no vetor  $\mathbf{u}$ , que conseqüentemente corresponde a minimizar a massa, a minimizar o deslocamento nas direções vertical “y” e lateral “z”, e minimizar a rotação máxima no plano “yz” do chassis, apresentado na Figura 4.4.

A função objetivo  $f_s(\mathbf{u})$  é usada para comparar os valores numéricos estimados com os valores de referência, e é agora definida por

$$f_s(\mathbf{u}) = f_M(\mathbf{u}) + f_{DY}(\mathbf{u}) + f_{DZ+}(\mathbf{u}) + f_{DZ-}(\mathbf{u}) + f_\gamma(\mathbf{u}), \quad (4.13)$$

onde  $f_M$  é uma função que quantifica a diferença entre a massa de referência e a massa numérica estimada, respetivamente denotada por  $M$  e  $\hat{M}_q$ ,  $f_{DY}$  é uma função que quantifica a diferença entre o deslocamento máximo de referência na direção “y” e o deslocamento máximo numérico estimado na direção “y”, respetivamente denotado por  $DY$  e  $\hat{DY}_q$ ,  $f_{DZ+}$  é uma função que quantifica a diferença entre o deslocamento máximo de referência no sentido positivo da direção “z” e o deslocamento máximo numérico estimado no sentido positivo da direção “z”, respetivamente denotado  $DZ +$  e  $\hat{DZ} +_q$ ,  $f_{DZ-}$  é uma função que quantifica a diferença entre o deslocamento máximo de referência no sentido negativo da direção “z” e o deslocamento máximo numérico estimado no sentido negativo da direção “z”, respetivamente denotado  $DZ -$  e  $\hat{DZ} -_q$ , e  $f_\gamma$  é uma função que quantifica a diferença entre a rotação máxima de

referência no plano “yz” e a rotação máxima numérica estimada no plano “yz”, respectivamente denotada por  $D\gamma$  e  $D\hat{\gamma}_q$ .

As funções  $f_M$ ,  $f_{DY}$ ,  $f_{DZ+}$ ,  $f_{DZ-}$  e  $f_\gamma$  são respectivamente definidas como se segue

$$f_M(\mathbf{u}) = \frac{\left( M - \hat{M}_q \left( \hat{\mathbf{u}}_q \right) \right)^2}{\left( M - \hat{M}_0 \left( \hat{\mathbf{u}}_0 \right) \right)^2}, \quad (4.14)$$

$$f_{DY}(\mathbf{u}) = \frac{\left( DY - \hat{DY}_q \left( \hat{\mathbf{u}}_q \right) \right)^2}{\left( DY - \hat{DY}_0 \left( \hat{\mathbf{u}}_0 \right) \right)^2}, \quad (4.15)$$

$$f_{DZ+}(\mathbf{u}) = \frac{\left( (DZ+) - \left( \hat{DZ} +_q \right) \left( \hat{\mathbf{u}}_q \right) \right)^2}{\left( (DZ+) - \left( \hat{DZ} +_0 \right) \left( \hat{\mathbf{u}}_0 \right) \right)^2}, \quad (4.16)$$

$$f_{DZ-}(\mathbf{u}) = \frac{\left( (DZ-) - \left( \hat{DZ} -_q \right) \left( \hat{\mathbf{u}}_q \right) \right)^2}{\left( (DZ-) - \left( \hat{DZ} -_0 \right) \left( \hat{\mathbf{u}}_0 \right) \right)^2}, \quad (4.17)$$

$$f_\gamma(\mathbf{u}) = \frac{\left( D\gamma - \hat{D\gamma}_q \left( \hat{\mathbf{u}}_q \right) \right)^2}{\left( D\gamma - \hat{D\gamma}_0 \left( \hat{\mathbf{u}}_0 \right) \right)^2}, \quad (4.18)$$

Os valores numéricos estimados para  $\hat{M}_q$ ,  $\hat{DY}_q$ ,  $\hat{DZ} +_q$ ,  $\hat{DZ} -_q$  e  $\hat{D\gamma}_q$ , são função das 910 variáveis contidas no vetor  $\mathbf{u}$ . Então a Eq. (4.4) pode ser reescrita de modo a descrever a relação entre eles como

$$\left( \hat{M}_q, \hat{DY}_q, \hat{DZ} +_q, \hat{DZ} -_q, \hat{D\gamma}_q \right) = f \left( \hat{A1}_q, \dots, \hat{A910}_q \right), \quad (4.19)$$

onde  $\hat{A}1_q, \dots, \hat{A}910_q$  denotam os valores das 910 variáveis estimados a cada iteração  $q$ .

Nesta fase, o modelo foi alterado geométricamente no sentido de otimizar a sua massa, o deslocamento nas direções vertical “y” e lateral “z”, e a rotação máxima no plano “yz” do chassi, por intermédio de aumento da sua rigidez e diminuição do seu peso.

Depois de finalizada a primeira etapa, é iniciada a segunda etapa do processo, usando informação acerca das características modais dos modelos, no sentido de estimar os valores ótimos para as variáveis contidas no vetor  $\mathbf{v}$ , correspondente ao módulo de elasticidade  $E$ . A relação entre as características modais do modelo e o módulo de elasticidade pode ser obtida reescrevendo as Eqs. (3.6) e (3.7), respetivamente como

$$\hat{\Phi}_{j_q} = f\left(\hat{E}_q\right) \quad (4.20)$$

e

$$\hat{\lambda}_{j_q} = f\left(\hat{E}_q\right). \quad (4.21)$$

onde  $\hat{E}_q$  denota o módulo de elasticidade numérico estimado.

A escolha desse parâmetro como única variável de otimização na segunda etapa está relacionada com o fato de ser uma propriedade mecânica bastante influente no comportamento modal das estruturas, e por ser uma propriedade que pode possuir uma gama de valores bastante larga dentro do mesmo tipo de aço. Por exemplo, para um aço normal podem ser encontrados valores convencionais entre 200 e 220 GPa. A massa específica contribui também influentemente para esse comportamento, pois está diretamente relacionada com a massa da estrutura. No entanto a intenção é manter o aço como o material de que é feito o chassi, pelo que não existe interesse em obter valores de massa específica que não correspondam ao aço.

A comparação entre as características modais numéricas estimadas e as características de referência é efetuada usando a função objetivo  $f_d(\mathbf{v})$  (Eq. 3.1).

Todas as variáveis a otimizar em ambas as etapas, estão sujeitas a limites inferiores e superiores, como apresentado na Tabela 4.8. As variáveis relacionadas com os nós (510 variáveis) podem variar entre -200 mm e +200 mm a partir do valor inicial igual a  $g_n$ , com  $n = 1, \dots, 510$ . O raio externo pode variar entre 6 e 25 mm para

as variáveis  $A511$  a  $A710$ , e a espessura da parede pode variar entre 1,5 e 2,5 mm para as variáveis  $A711$  a  $A910$  (ver Tabela 4.8). As colunas 2 e 5 da Tabela 4.8, estão respectivamente relacionadas com o tipo de secção e os valores atribuídos às propriedades apresentadas na Tabela 4.7.

Tabela 4.8 – Vetores que contêm os parâmetros a otimizar no modelo 3.

Vetor	Propriedade	Tipo de Secção	Variável	Unidades	Valor Inicial	Limite Inferior	Limite Superior	
<b>u</b>	-	-	$A1$	[mm]	$g_1$	$g_1 - 200$	$g_1 + 200$	
			...		...	...		
			$A510$		$g_{510}$	$g_{510} - 200$	$g_{510} + 200$	
			1		$A511$	25	6	25
			...		...	...	...	...
			2		$A527$	20	6	25
			...		...	...	...	...
			3		$A679$	20	6	25
			...		...	...	...	...
			4		$A697$	17,5	6	25
			...		...	...	...	...
			5		$A706$	17,5	6	25
			...		...	...	...	...
			...		$A710$	...	...	...
			1		$A711$	2	1,5	2,5
...	...	...	...	...				
2	$A727$	2	1,5	2,5				
...	...	...	...	...				
3	$A879$	1,5	1,5	2,5				
...	...	...	...	...				
4	$A897$	2	1,5	2,5				
...	...	...	...	...				
5	$A906$	1,5	1,5	2,5				
...	...	...	...	...				
...	$A910$	...	...	...				
<b>v</b>	Módulo de Elasticidade	-	$E$	[ $10^9$ Pa]	202	200	220	

Os valores de referência são impostos para ser zero (o mínimo possível) e os valores numéricos da massa, dos deslocamentos máximos nas direções “y” e “z”, e a rotação máxima no plano “yz”, são calculados pelo *software* de elementos finitos ANSYS®.

#### 4.5 – Resultados Obtidos

Neste sub-capítulo são apresentados os resultados após aplicação do processo sequencial de duas etapas aos exemplos descritos anteriormente. Primeiro são apresentados os resultados obtidos na primeira etapa do processo e então depois são apresentados os resultados da segunda etapa.

### 4.5.1 – Resultados Obtidos para o Modelo 1

Neste sub-capítulo são apresentados os resultados obtidos na otimização do modelo 1.

#### 4.5.1.1 – Resultados da Primeira Etapa para o Modelo 1

Na primeira etapa o modelo de elementos finitos inicial com forma quadrada é submetido a modificação estrutural usando a informação das características geométricas. As variáveis *A*, *B*, *C*, *D*, *G* e *F* partem dos valores iniciais, apresentados na Tabela 4.5, e são otimizados até atingirem os valores de referência apresentados na Tabela 4.1.

A Tabela 4.9 contém as oito primeiras frequências naturais de referência (coluna 2), bem como as oito primeiras frequências do modelo numérico inicial (coluna 3). Para comparação é apresentada a diferença entre as frequências de referência e as frequências numéricas, antes e depois da aplicação da primeira etapa. Também os valores iniciais e finais (depois da primeira etapa) do MAC para cada modo são apresentados.

Tabela 4.9 – Evolução das características modais durante a otimização do modelo 1 na primeira etapa.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Inicial [Hz]	Diferença Antes da 1ª Etapa [%]	MAC Inicial	Frequência Depois da 1ª Etapa [Hz]	Diferença Depois da 1ª Etapa [%]	MAC Depois da 1ª Etapa
1	271,32	357,55	31,78	0	239,63	11,68	1
2	297,72	590,33	98,28	0	262,94	11,68	1
3	353,27	1110,86	214,45	0	312,00	11,68	1
4	709,27	1194,67	68,44	0	626,41	11,68	1
5	1006,05	1488,35	47,94	0	888,52	11,68	1
6	1214,58	2025,64	66,78	0	1072,68	11,68	1
7	1892,25	2131,11	12,62	0	1671,19	11,68	1
8	2020,99	2638,26	30,54	0	1784,89	11,68	1

Observando a Tabela 4.9, torna-se evidente que o modelo numérico inicial não está correlacionado com o modelo de referência. Os valores iniciais do MAC indicam uma má correlação (todos os valores do MAC são iguais a zero, como mostrado na coluna 5) e nestas condições nenhum modo poderia ser usado no processo tradicional de *updating*, usando as características modais. As diferenças entre as características geométricas dos dois modelos são evidentes, como se pode observar nas colunas 3, 4 e 5 da Tabela 4.10.

Tabela 4.10 – Evolução das características geométricas durante a otimização do modelo 1 na primeira etapa.

Notação da Característica Geométrica	Unidades	Valor de Referência	Valor Numérico Inicial	Diferença Antes da 1ª Etapa [%]	Valor Depois da 1ª Etapa	Diferença Depois da 1ª Etapa [%]
$V$	[m <sup>3</sup> ]	0,14	0,09	35,71	0,14	0
$C_x$		0,45	0,45	0	0,45	0
$C_y$	[m]	1,36	1,40	2,94	1,36	0
$C_z$		0	0	0	0	0
$I_x$		9,28	6,19	33,29	9,28	0
$I_y$		1,08	0,86	20,37	1,08	0
$I_z$	[m <sup>4</sup> ]	10,36	7,05	31,95	10,36	0
$I_{xy}$		-2,69	-1,89	29,74	-2,69	0
$I_{xz}$		0	0	0	0	0
$I_{yz}$		0	0	0	0	0

A notação  $C_x$ ,  $C_y$  and  $C_z$ , representa o centro de massa nas direções “x”, “y” e “z”, respetivamente. A notação  $I_x$ ,  $I_y$  and  $I_z$ , representa o momento de inércia nas direções “x”, “y” e “z”, respetivamente. A notação  $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$  e  $I_{yz}$ , representa o produto de inércia nos planos de rotação “xy”, “xz” e “yz”, respetivamente.

Depois de aplicada a nova metodologia desenvolvida, e observando a coluna 8 da Tabela 4.9, é evidente que não existem modos de vibração não correlacionados (os valores finais do MAC são igual a 1). Isso quer dizer que os modelos são geométricamente semelhantes, ou seja ambos possuem uma forma em T. Assim, e consultando a Tabela 4.10, e comparando os valores da coluna 3 com os da coluna 6 dessa tabela, é possível observar que ao fim da primeira etapa as características geométricas são também iguais em ambos os modelos.

Os valores das variáveis contidas no vetor  $\mathbf{u}$  são corretamente estimados, como apresentado na Tabela 4.11, o que significa que a função objetivo  $f_s(\mathbf{u})$ , definida por (4.6) é minimizada para zero, cumprindo 2255 avaliações da função objetivo em 0,63 horas. De salientar que com apenas um ponto de partida (o ponto inicial definido pelo utilizador), o valor mínimo da função objetivo foi de 0,33 ao fim de 216 avaliações da função objetivo, apenas atingindo o valor zero, após aplicação

dos 1000 pontos de partida aleatórios. Apercebe-se também por aqui, a mais-valia das metodologias de procura global face às de procura local.

Tabela 4.11 – Valores do vetor **u** otimizados para o modelo 1 após a primeira etapa.

Vetor	Variável	Unidades	Valor Otimizado	Valor de Referência
<b>u</b>	A	[mm]	300	300
	B		1700	1700
	C		500	500
	D		600	600
	F		1700	1700
	G		2000	2000

A diferença entre os valores das frequências naturais de referência e numéricas é reduzida após a primeira etapa do processo de otimização (ver coluna 7 da Tabela 4.9). No entanto, não pode ser considerado que os dois modelos tenham o par de modos completamente correlacionados, porque as frequências naturais não estão correlacionadas. No sentido de obter a correlação entre as frequências naturais do modelo de referência e do modelo sujeito a otimização, a segunda etapa do processo é aplicada.

#### 4.5.1.2 – Resultados da Segunda Etapa para o Modelo 1

Na segunda etapa do processo, o modelo numérico 1 é otimizado com base nas suas propriedades mecânicas e usando a informação das características modais. As variáveis módulo de elasticidade  $E$ , coeficiente de Poisson  $\nu$  e massa específica  $\rho$  partem dos valores iniciais apresentados na Tabela 4.5, e são alterados até que o modelo numérico tenha comportamento dinâmico igual ao modelo de referência.

Na Tabela 4.12 é apresentada a evolução das características modais durante a segunda etapa.

Tabela 4.12 – Evolução das características modais durante a otimização do modelo 1 na segunda etapa.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Depois da 1ª Etapa [Hz]	Diferença Depois da 1ª Etapa [%]	MAC Depois da 1ª Etapa	Frequência Depois da 2ª Etapa [Hz]	Diferença Depois da 2ª Etapa [%]	MAC Depois da 2ª Etapa
1	271,32	239,63	11,68	1	271,32	0	1
2	297,72	262,94	11,68	1	297,72	0	1
3	353,27	312,00	11,68	1	353,27	0	1
4	709,27	626,41	11,68	1	709,27	0	1
5	1006,05	888,52	11,68	1	1006,05	0	1
6	1214,58	1072,68	11,68	1	1214,58	0	1
7	1892,25	1671,19	11,68	1	1892,25	0	1
8	2020,99	1784,89	11,68	1	2020,99	0	1

Como se pode observar na coluna 7 da Tabela, depois de aplicada a segunda etapa, a diferença entre as frequências naturais dos dois modelos é 0%, o que significa que ambos os modelos possuem as mesmas características modais e estão totalmente correlacionados.

Os valores otimizados para o vetor  $\mathbf{v}$  são corretamente estimados, como apresentado na Tabela 4.13. Isto significa que a função objetivo  $f_d(\mathbf{v})$  é minimizada, neste caso para o valor -0,88, cumprindo 2181 avaliações da função objetivo em 0,61 horas.

Tabela 4.13 – Valores do vetor  $\mathbf{v}$  otimizados para o modelo 1 após a segunda etapa.

Vetor	Variável	Unidades	Valor Otimizado	Valor de Referência
$\mathbf{v}$	$E$	[Pa]	$200 \times 10^9$	$200 \times 10^9$
	$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	7800	7800
	$\nu$	-	0,28	0,28

De referir que o valor mínimo possível de atingir pela função objetivo  $f_d(\mathbf{v})$  é -1. Ou seja, a função  $f_{\phi C}$  é minimizada quando atingir o valor 1 e as funções  $f_{\phi U}$  e  $f_{\lambda}$ , são minimizadas quando atingirem o valor zero. Como o termo em  $f_d(\mathbf{v})$ , correspondente a  $f_{\phi C}$ , possui sinal negativo, o valor mínimo de  $f_d(\mathbf{v})$  é -1. Neste caso esse valor não foi atingido porque a função  $f_{\phi U}$  não foi minimizada para zero, ficando-se pelo valor 0,22, o que somando com -1, resulta o valor de -0,88.

#### 4.5.2 – Resultados Obtidos para o Modelo 2

Neste sub-capítulo são apresentados os resultados obtidos na otimização do modelo 2.

##### 4.5.2.1 – Resultados da Primeira Etapa para o Modelo 2

Na primeira etapa o modelo de elementos finitos inicial com forma quadrada é submetido a modificação estrutural usando a informação das características geométricas. As variáveis  $A, B, C, D, F, G, H, I, J, K, L$  e  $t$  partem dos valores iniciais, apresentados na Tabela 4.6, e são otimizados até atingirem os valores de referência apresentados na Tabela 4.2.

A Tabela 4.14 contém as seis primeiras frequências naturais de referência (coluna 2), bem como as seis primeiras frequências do modelo numérico inicial (coluna 3). Para comparação é apresentada a diferença entre as frequências de referência e as frequências numéricas, antes e depois da aplicação da primeira etapa. Também os valores iniciais e finais (depois da primeira etapa) do MAC para cada modo são apresentados.

Tabela 4.14 – Evolução das características modais durante a otimização do modelo 2 na primeira etapa.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Inicial [Hz]	Diferença Antes da 1ª Etapa [%]	MAC Inicial	Frequência Depois da 1ª Etapa [Hz]	Diferença Depois da 1ª Etapa [%]	MAC Depois da 1ª Etapa
1	26,98	13,26	50,85	0	23,93	11,30	1
2	28,35	17,82	37,14	0	25,25	10,93	1
3	51,49	24,53	52,36	0	44,91	12,78	1
4	61,99	32,86	46,99	0	54,98	11,31	1
5	70,73	36,59	48,27	0	62,49	11,65	1
6	96,2	51,07	46,91	0	84,24	12,43	1

Observando a Tabela 4.14, torna-se evidente que o modelo numérico inicial não está correlacionado com o modelo de referência. Os valores iniciais do MAC indicam uma má correlação (todos os valores do MAC são iguais a zero, como mostrado na coluna 5) e nestas condições nenhum modo poderia ser usado no processo tradicional de *updating*, usando as características modais. As diferenças entre as características geométricas dos dois modelos são evidentes, como se pode observar nas colunas 3, 4 e 5 da Tabela 4.15.

Tabela 4.15 – Evolução das características geométricas durante a otimização do modelo 2 na primeira etapa.

Notação da Característica Geométrica	Unidades	Valor de Referência	Valor Numérico Inicial	Diferença Antes da 1ª Etapa [%]	Valor Depois da 1ª Etapa	Diferença Depois da 1ª Etapa [%]
$V$	[m <sup>3</sup> ]	0,0035	0,0014	60,00	0,0035	0
$C_x$		0,45	0,45	0,00	0,45	0
$C_y$	[m]	1,00	1,40	40,00	1,00	0
$C_z$		0	0	0	0	0
$I_x$		0,75	1,13	50,67	0,75	0
$I_y$		0,17	0,14	17,65	0,17	0
$I_z$	[m <sup>4</sup> ]	0,92	1,26	36,96	0,92	0
$I_{xy}$		-0,32	-0,35	9,37	-0,32	0
$I_{xz}$		0	0	0	0	0
$I_{yz}$		0	0	0	0	0

Depois de aplicada a nova metodologia desenvolvida, e observando a coluna 8 da Tabela 4.14, é evidente que não existem modos de vibração não correlacionados (os valores finais do MAC são igual a 1). Isso quer dizer que os modelos são geométricamente semelhantes, ou seja, ambos possuem uma forma em hexágono. Assim, e consultando a Tabela 4.15, e comparando os valores da coluna 3 com os da

coluna 6 dessa tabela, é possível observar que ao fim da primeira etapa as características geométricas são também iguais em ambos os modelos.

Os valores das variáveis contidas no vetor  $\mathbf{u}$  são corretamente estimados, como apresentado na Tabela 4.16, o que significa que a função objetivo  $f_s(\mathbf{u})$ , definida por (4.6) é minimizada para zero, cumprindo 2548 avaliações da função objetivo em 1,06 horas. De salientar que com apenas um ponto de partida (o ponto inicial definido pelo utilizador), o valor mínimo da função objetivo foi de 0,02 ao fim de 245 avaliações da função objetivo, apenas atingindo o valor zero, após aplicação dos 1000 pontos de partida aleatórios. Mais uma vez fica evidente a mais-valia das metodologias de procura global face às de procura local.

Tabela 4.16 – Valores do vetor  $\mathbf{u}$  otimizados para o modelo 2 após a primeira etapa.

Vetor	Variável	Unidades	Valor Otimizado	Valor de Referência
$\mathbf{u}$	A		200	200
	B		500	500
	C		700	700
	D		100	100
	F		750	750
	G		800	800
	H	[mm]	0	0
	I		1000	1000
	J		900	900
	K		1250	1250
	L		1500	1500
	t		5	5

#### 4.5.2.2 – Resultados da Segunda Etapa para o Modelo 2

Na segunda etapa do processo, o modelo numérico é otimizado com base nas suas propriedades mecânicas e usando a informação das características modais. As variáveis módulo de elasticidade  $E$ , coeficiente de Poisson  $\nu$  e massa específica  $\rho$  partem dos valores iniciais apresentados na Tabela 4.6, e são alterados até que o modelo numérico tenha comportamento dinâmico igual ao modelo de referência.

Na Tabela 4.17 é apresentada a evolução das características modais durante a segunda etapa. Como se pode observar na coluna 7 dessa tabela, depois de aplicada a segunda etapa, a diferença entre as frequências naturais dos dois modelos é 0%, o que significa que ambos os modelos possuem as mesmas características modais e estão totalmente correlacionados.

Tabela 4.17 – Evolução das características modais durante a otimização do modelo 2 na segunda etapa.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Depois da 1ª Etapa [Hz]	Diferença Depois da 1ª Etapa [%]	MAC Depois da 1ª Etapa	Frequência Depois da 2ª Etapa [Hz]	Diferença Depois da 2ª Etapa [%]	MAC Depois da 2ª Etapa
1	26,98	23,93	11,30	1	26,98	0	1
2	28,35	25,25	10,93	1	28,35	0	1
3	51,49	44,91	12,78	1	51,49	0	1
4	61,99	54,98	11,31	1	61,99	0	1
5	70,73	62,49	11,65	1	70,73	0	1
6	96,2	84,24	12,43	1	96,2	0	1

Os valores otimizados para o vetor  $\mathbf{v}$  são corretamente estimados, como apresentado na Tabela 4.18. Isto significa que a função objetivo  $f_d(\mathbf{v})$  é minimizada, neste caso para o valor -0,83, cumprindo 2056 avaliações da função objetivo em 0,86 horas.

Tabela 4.18 – Valores do vetor  $\mathbf{v}$  otimizados para o modelo 2 após a segunda etapa.

Vetor	Variável	Unidades	Valor Otimizado	Valor de Referência
$\mathbf{v}$	$E$	[Pa]	200x10 <sup>9</sup>	200x10 <sup>9</sup>
	$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	7800	7800
	$\nu$	-	0,28	0,28

De referir, que mais uma vez o valor mínimo a atingir por  $f_d(\mathbf{v})$ , -1, não é atingido, porque a função  $f_{\rho\nu}$  não é minimizada para zero, ficando-se pelo valor 0,17, o que somando com -1, resulta o valor de -0,83.

### 4.5.3 – Resultados Obtidos para o Modelo 3

Neste sub-capítulo são apresentados os resultados obtidos na otimização do modelo 3.

#### 4.5.3.1 – Resultados da Primeira Etapa para o Modelo 3

Na primeira etapa do processo, o modelo numérico é submetido a modificação estrutural usando a informação do valor da massa do chassis, do valor dos deslocamentos máximos nas direções “y” e “z” e o valor da rotação máxima no plano “yz”. As variáveis  $A1$  a  $A910$  partem dos valores iniciais apresentados na Tabela 4.8, e são otimizadas até que a função objetivo  $f_s(\mathbf{u})$ , definida por (4.13), seja minimizada. É atribuído o valor de zero à referência dessas características, pois caso o modelo de elementos finitos o conseguisse atingir corresponderia ao ótimo da função objetivo, ou seja,  $f_s(\mathbf{u}) = 0$ .

A Tabela 4.19 mostra a evolução durante a otimização do chassi na primeira etapa.

Tabela 4.19 – Evolução durante a otimização do modelo 3 na primeira etapa.

Notação da Característica	Unidades	Valor de Referência	Valor Numérico Inicial	Valor Numérico Depois da 1ª Etapa	Diferença Depois da 1ª Etapa [%]
$M$	[kg]	0	157,8	143,4	9,10
$DY$	[mm]	0	0,038	0,033	13,16
$DZ+$	[mm]	0	0,049	0,050	-2
$DZ-$	[mm]	0	0,001	0,001	0
$D\gamma$	[rad]	0	0,003	0,003	0

Depois de aplicada a modificação estrutural, é demonstrado (como se pode observar pela Tabela 4.19) que a estrutura do chassi sofre alguns melhoramentos, reduzindo o deslocamento máximo na direção “y” em 13,16%, apesar de um ligeiro agravamento de 2% no deslocamento máximo no sentido positivo da direção “z”. O deslocamento máximo no sentido negativo da direção “z”, bem como a rotação máxima no plano “yz” não sofreram qualquer alteração. Outro aspeto positivo da otimização, é a redução da massa do chassi em 9,1%. O chassi modificado é apresentado na Figura 4.5.

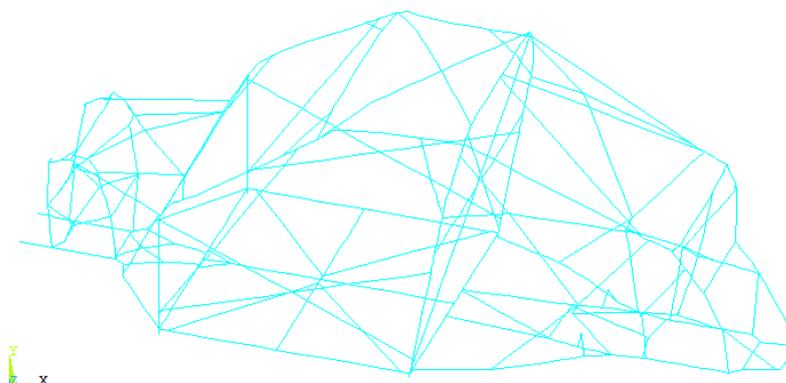


Figura 4.5 - Modelo do chassi tubular de um carro de rally todo o terreno depois de aplicada a modificação estrutural.

Na Tabela 4.20 são apresentados os valores das quatro primeiras frequências naturais de referência que correspondem ao chassi inicial e as frequências numéricas após aplicação da primeira etapa de otimização, assim como a diferença percentual entre elas. Também são apresentados os valores do MAC, após a primeira etapa, para cada modo.

Observando a tabela, é evidente que após a aplicação da primeira etapa, os quatro modos de vibração estão satisfatoriamente bem correlacionados, havendo, no entanto, um agravamento relativamente ao valor do MAC antes da primeira etapa. É

normal que isso aconteça, pois inicialmente o modelo de referência e o modelo a melhorar eram iguais.

Tabela 4.20 – Evolução das características modais durante a otimização do modelo 2 na primeira etapa.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Depois da 1ª Etapa [Hz]	Diferença Depois da 1ª Etapa [%]	MAC Antes da 1ª Etapa	MAC Depois da 1ª Etapa
1	70,25	68,26	2,83	1	1
2	76,68	79,60	3,81	1	0,98
3	92,91	89,76	3,39	1	0,95
4	97,59	92,90	4,81	1	0,82

Depois da otimização, eles deixaram de ser geometricamente iguais, mas ainda assim semelhantes e de tal forma correlacionados, que o *updating* pode ser aplicado na segunda etapa do processo. Pode-se também verificar que existe uma redução no valor das frequências naturais do modo 1, 3 e 4, e que a diferença relativa percentual média entre as quatro frequências naturais, obtida pela aplicação da Eq. (3.9), é de 3,71%. No sentido de aproximar os valores dessas frequências naturais do modelo modificado aos valores das frequências naturais de referência, é aplicada a segunda etapa, ou seja a etapa de *updating*.

#### 4.5.3.2 – Resultados da Segunda Etapa para o Modelo 3

Na segunda etapa do processo, o modelo numérico é otimizado com base no módulo de elasticidade  $E$ . A variável parte do valor inicial apresentado na Tabela 4.8, e é alterado até que os valores das quatro primeiras frequências naturais sejam os mais próximos possíveis dos valores de referência.

Na Tabela 4.21 é apresentada a evolução das características modais durante a segunda etapa.

Tabela 4.21 – Evolução das características modais durante a otimização do modelo 2 na segunda etapa.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Depois da 1ª Etapa [Hz]	Diferença Depois da 1ª Etapa [%]	MAC Depois da 1ª Etapa	Frequência Depois da 2ª Etapa [Hz]	Diferença Depois da 2ª Etapa [%]	MAC Depois da 2ª Etapa
1	70,25	68,26	2,83	1	70,25	0	1
2	76,68	79,60	3,81	0,98	81,92	6,83	0,98
3	92,91	89,76	3,39	0,95	92,38	0,57	0,95
4	97,59	92,90	4,81	0,82	95,60	2,03	0,82

Pode-se observar que os valores das frequências naturais dos modos 1, 3 e 4 estão mais próximos dos valores de referência. Apesar da diferença entre os valores das frequências naturais do modo 2 ter aumentado, no global a diferença relativa

percentual média é reduzida para 2,36%. O valor do MAC após a 2ª etapa não sofre qualquer alteração relativamente ao valor do MAC obtido após a 1ª etapa.

O valor otimizado para o módulo de elasticidade contido no vetor  $\mathbf{v}$  é estimado como sendo  $214 \times 10^9$  Pa.

Apesar de que, o módulo de elasticidade é um parâmetro que está relacionado com a resposta estática das estruturas e não apenas com a resposta dinâmica, o valor estimado, superior ao valor original de  $202 \times 10^9$  Pa, afeta positivamente a redução do valor máximo dos deslocamentos e rotações, uma vez que aumenta a rigidez estrutural do chassis.

#### 4.6 – Conclusões

Neste capítulo foi apresentada uma nova metodologia sequencial de duas etapas para modificação estrutural e *updating* de modelos de elementos finitos. Esta metodologia é suportada por uma função multi-objetivo desenvolvida para quantificar a correlação entre o modelo de referência e o modelo de elementos finitos a melhorar.

Três exemplos são aplicados para testar a eficácia do método desenvolvido. Nos dois primeiros exemplos é demonstrado que o novo método é capaz de lidar com modelos que possuem pares de modos não correlacionados, onde o modelo numérico difere significativamente a nível geométrico do modelo de referência. É mostrado que, após a aplicação da primeira etapa, os dois modelos possuem todos os modos de vibração correlacionados, e assim a segunda etapa, ou seja, a etapa de *updating* pode ser aplicada com sucesso. No terceiro exemplo é utilizado o chassis de um carro de rally todo o terreno como modelo a otimizar. A metodologia desenvolvida é aplicada, com sucesso, para melhorar o comportamento estático e dinâmico do chassis, usando um número elevado de variáveis (911 variáveis) para otimizar.

O processo de modificação estrutural e *updating* revelou ser eficaz, conseguindo estimar os valores ótimos dos parâmetros a otimizar. Além do mais demonstra-se que o problema de lidar com modos de vibração não correlacionados no processo de *updating*, devido a discrepâncias geométricas entre o modelos de elementos finitos a melhorar e o modelo de referência, é ultrapassado com este novo método.

# **CAPÍTULO 5 – OBTENÇÃO DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS SIMPLIFICADOS PARA REPRESENTAÇÃO DE JUNTAS REBITADAS EM DINÂMICA DE ESTRUTURAS**

A modelação em elementos finitos de elementos de ligação em projeto de estruturas apresenta desafios para os projetistas. É o caso das juntas rebitadas que vão ser alvo de estudo neste capítulo.

Descreve-se assim o desenvolvimento de modelos de elementos finitos simplificados para representação de juntas rebitadas em análise dinâmica de estruturas. A nova abordagem aqui apresentada compreende a representação do rebite em elementos finitos com recurso a elementos mola-amortecedor parametrizáveis. A junção de componentes pela técnica de rebitagem aplica-se a placas do tipo casca, pelo que não se aplicam a estes casos modelos construídos com elementos sólidos.

A metodologia de melhoramento de modelos de elementos finitos, desenvolvida e apresentada no Capítulo 3, é aqui usada para determinar o valor da constante rigidez dos elementos mola-amortecedor que simulam o rebite, tendo como referência os modelos experimentais de juntas rebitadas construídos e ensaiados. O objetivo é obter a melhor representação em modelos de elementos finitos da junta rebitada relativamente às amostras experimentais.

## **5.1 – Introdução**

Após análise da revisão bibliográfica, fica claro que os modelos de elementos finitos de juntas rebitadas simplificadas apenas foram aplicados a análise no domínio da estática, e relativamente ao valor atribuído à constante de rigidez da mola, ou não fazem referência ou existem dúvidas que se possa generalizar para qualquer tipo de junta rebitada. No sentido de dar resposta às questões levantadas descreve-se neste capítulo a obtenção de um modelo de elementos finitos simplificado para representação de juntas rebitadas, com rebites de diferentes diâmetros, em análise dinâmica de estruturas. Os modelos de elementos finitos são descritos no sub-capítulo 5.3.

A partir da técnica de melhoramento de modelos de elementos finitos, apresentada no Capítulo 3, determina-se o valor da constante rigidez dos elementos

mola-amortecedor, utilizando como referência modelos experimentais de juntas rebitadas. O comportamento dos modelos experimentais é obtido por análise modal experimental, como descrito no sub-capítulo 5.2.

Para evitar a possível distorção de resultados, conseqüente da utilização de modelos complexos, numa fase inicial escolhe-se modelos simples de geometria retangular e de pequenas dimensões para proceder ao estudo das ligações rebitadas. Os casos de estudo compreendem assim modelos constituídos por duas chapas de alumínio unidas por diferentes quantidades de rebites (1, 2, 3 e 5) com diâmetro de 3,2 mm, 4,0 mm e 4,8 mm.

A escolha do alumínio deve-se ao fato de que a maior parte das aplicações industriais empregam este tipo de material nos casos que envolvem ligações rebitadas. É o caso da indústria aeronáutica.

Uma avaliação da melhor representação numérica da junta rebitada é efetuada com base na comparação entre as frequências naturais experimentais e as frequências naturais do modelo de elementos finitos, para cada modo de vibração, após aplicação do processo de melhoramento de elementos finitos. Mostra-se, com base nos resultados obtidos apresentados no sub-capítulo 5.4, que o modelo de junta composto por oito elementos mola-amortecedor por rebite consegue uma melhor aproximação ao comportamento dinâmico observado experimentalmente. Um valor para a constante de rigidez da mola é obtido para as juntas rebitadas em estudo.

## 5.2 – Procedimento Experimental

Os modelos experimentais (amostras) utilizados possuem forma retangular, são cortados por tecnologia laser e obtidos a partir de quatro lotes diferentes. Os modelos experimentais são compostos por duas placas unidas aos pares por rebites de alumínio de três dimensões diferentes. Os pares de placas são unidos por diferentes quantidades de rebites, como mais à frente se vai descrever. As propriedades mecânicas do material das placas são determinadas experimentalmente por ensaio de tração, recorrendo ao equipamento servo-hidráulico para ensaios axiais de tração, INSTRON® 8874, ao extensómetro INSTRON® 2620-601 para leitura da deformação na direção vertical do provete, a extensómetros HBM® de roseta tipo T com 2 *grids* de medição, dispostos a um ângulo de 90° afastados um do outro para leitura da deformação na direção vertical e

horizontal do provete, cujas características são, respetivamente, apresentadas nos Anexos I, II e III.

As amostras para análise modal experimental consistem em duas placas (uma placa superior, denominada por PL1 e uma placa inferior, denominada PL2) de alumínio interligadas por rebites. Três diferentes tipos de rebites de cabeça redonda, Tipo 1, Tipo 2 e Tipo 3, são usados nesta fase. Os rebites do Tipo 1, Tipo 2 e Tipo 3 são usados nas placas provenientes do Lote 1, Lote 2 e Lote 3, respetivamente. Cada tipo de rebite é usado para fixar quatro tipos de amostras diferentes que representam juntas rebitadas com um, dois, três e cinco rebites. O material usado na amostra composta por cinco rebites do Tipo 3 é proveniente de um outro lote (Lote 4). O valor da espessura  $t$  das placas é apresentado na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Valores de espessura das placas superiores e inferiores das amostras.

Nomenclatura	Símbolo	Unidades	Valor			
			Lote 1	Lote 2	Lote 3	Lote 4
PL1	$t$	[m]	$1,97 \times 10^{-3}$	$2,00 \times 10^{-3}$	$1,99 \times 10^{-3}$	$1,98 \times 10^{-3}$
PL2			$1,97 \times 10^{-3}$	$2,00 \times 10^{-3}$	$1,98 \times 10^{-3}$	$1,97 \times 10^{-3}$

As características dos rebites e dos furos de alojamento são apresentadas na Tabela 5.2. Nessa tabela são apresentados os valores calculados com base nas equações apresentadas no sub-capítulo 2.7, para os casos de rebites de cabeça redonda, assim como são apresentados os respetivos valores normalizados segundo a norma DIN 7337, apresentada no Anexo IV. Neste trabalho as dimensões usadas são as normalizadas, contudo o diâmetro das brocas usadas para efetuar o furo de alojamento dos rebites é de 3,2 mm, 4,0 mm e 5,0 mm para os rebites com corpo de diâmetro de 3,2 mm, 4,0 mm e 4,8 mm, respetivamente. Assim as medições aos furos efetuados nas peças indicam diâmetros de 3,2 mm, 4,0 mm e 5,1 mm, respetivamente.

Tabela 5.2 – Dimensões calculadas e normalizadas para os rebites usados.

Caraterística	Unidades	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
Diâmetro do Corpo do Rebite $d_r$ Normalizado		3,2	4,0	4,8
Diâmetro do Furo de Alojamento $d_f$ Calculado		3,4	4,2	5,1
Diâmetro do Furo de Alojamento $d_f$ Normalizado	[mm]	3,3	4,1	4,9
Comprimento útil do Rebite $L_c$ Calculado		8,8	10,0	11,2
Comprimento útil do Rebite $L_c$ Normalizado		10,0	10,0	12

As propriedades mecânicas são estimadas através de ensaios experimentais de tração, como apresentado no Anexo V. São o caso do módulo de elasticidade no sentido transversal  $E_x$  (perpendicular à laminagem do material), no sentido longitudinal  $E_y$

(paralelo à laminagem do material) e o coeficiente de Poisson  $\nu_{yx}$  (relação entre a deformação na direção transversal  $x$  e a deformação na direção longitudinal  $y$ , quando é aplicada uma tensão na direção longitudinal). A massa específica  $\rho$  das placas foi obtida pela divisão entre a massa e o volume das placas. Na Tabela 5.3 apresentam-se essas propriedades. Os valores apresentados para os módulos de elasticidade de cada um dos lotes são a média dos valores obtidos de três ensaios de tração efetuados a provetes provenientes de cada um dos lotes. A título de exemplo, apresentam-se no Anexo V os gráficos obtidos do ensaio de tração aos provetes provenientes do Lote 1. As dimensões dos provetes usados são também apresentadas no Anexo V.

Tabela 5.3 – Propriedades mecânicas do alumínio proveniente dos quatro lotes.

Propriedade	Unidades	Valor							
		Lote 1		Lote 2		Lote 3		Lote 4	
		PL1	PL2	PL1	PL2	PL1	PL2	PL1	PL2
$E_x$	[Pa]	66,9x10 <sup>9</sup>		61,2x10 <sup>9</sup>		61,1x10 <sup>9</sup>		66,9x10 <sup>9</sup>	
$E_y$	[Pa]	71,0x10 <sup>9</sup>		75,5x10 <sup>9</sup>		75,4x10 <sup>9</sup>		71,6x10 <sup>9</sup>	
$\nu_{yx}$	-	0,31		0,31		0,30		0,31	
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	2708	2708	2680	2667	2687	2701	2701	2708

As amostras são submetidas a análise modal experimental para extração dos dados experimentais, ou seja das frequências naturais e modos de vibração, a serem usados como referência no processo de melhoramento de modelos de elementos finitos para obtenção da constante de rigidez da junta de ligação rebitada dessas amostras. No total são testadas 12 amostras, quatro por cada tipo de rebite (Tipo 1, Tipo 2 e Tipo 3), que representam 12 casos de estudo. As amostras possuem as dimensões apresentadas na Figura 5.1a, apenas variando o diâmetro do furo de alojamento em função do tipo de rebite usado.

Os testes são realizados em temperatura ambiente, cerca de 20°C, utilizando o equipamento LMS SCADAS<sup>®</sup> XSI para análise modal experimental. As amostras são testadas na condição próxima de livre no espaço, estando suspensas em dois pontos por meio de um fio de *nylon* de 350 mm de comprimento, de modo a não causar interferência no ensaio, conforme mostrado na Figura 5.1b. Os testes são realizados utilizando um martelo de impacto da PCB<sup>®</sup>, sendo a força de impacto aplicada no ponto P1, e a resposta medida com um sistema de medição por laser de interferometria Doppler da POLYTEC<sup>®</sup> em oito pontos, P1 a P8 como mostrado na Figura 5.1c.

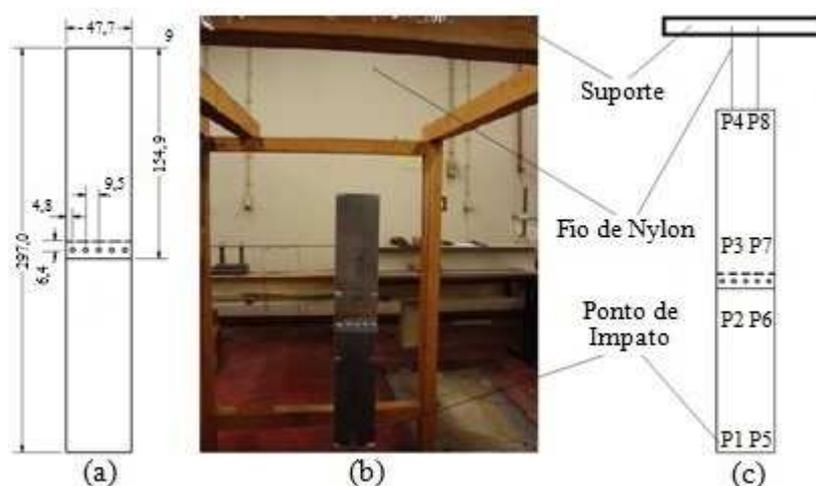


Figura 5.1 – (a) Representação esquemática de um modelo com junta composta por 5 rebites, (b) modelo submetido a análise modal experimental e (c) localização dos pontos medidos.

Nos Anexos VI, VII, VIII e IX mostram-se, respectivamente, as características do equipamento LMS SCADAS® MOBILE SCM05, do martelo de impacto PCB® 086C01, do Vibrômetro POLYTEC® OFV-5000 e do sensor de fibra óptica OFV-552.

Os oito pontos selecionados são os mínimos necessários para a obtenção de dados de referência/experimentais suficientes de modo a que o processo de melhoramento de modelos de elementos finitos seja efetuado com sucesso.

No entanto, para melhor visualização dos modos de vibração, são efetuadas medições em doze pontos, de modo a ser possível representar graficamente com boa aproximação as oito primeiras formas naturais de vibração dos modelos experimentais.

Os dados são coletados no domínio do tempo (amplitude em função do tempo) e processados no *software* de análise modal LMS® de modo a serem convertidos para o domínio da frequência. As frequências de ressonância ou frequências naturais e amplitudes de cada ponto são obtidos a partir da curva ajustada da Função de Resposta em Frequência (FRF).

Foram efetuados três ensaios em condições idênticas em cada caso para avaliar a repetibilidade dos resultados, verificando-se uma diferença entre eles que pode ser desprezável, pelo que por simplificação se usa valores de um único ensaio para cada caso de estudo.

### 5.3 – Modelos em Elementos Finitos para Obtenção da Constante de Rigidez da Mola

Neste sub-capítulo descreve-se a construção dos modelos em elementos finitos semelhantes às peças físicas utilizadas nos ensaios experimentais, utilizando o *software* comercial ANSYS® na versão *Parametric Design Language* (APDL), com as propriedades geométricas e mecânicas obtidas dos modelos experimentais, como apresentado nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3. As peças são modeladas com elementos de casca (SHELL63). A dimensão do elemento de casca é de 0,003x0,003 m. A escolha da dimensão do elemento de casca é justificada com base em uma análise de sensibilidade efetuada.

#### 5.3.1 – Análise de Sensibilidade aos Modelos

A análise de sensibilidade aos modelos construídos em elementos finitos divide-se em duas fases. Numa primeira fase é efetuada uma análise de sensibilidade à dimensão do elemento mais adequada para os modelos usados neste trabalho. Na segunda fase é analisada a representatividade dos modelos das placas em elementos finitos em relação às placas físicas. Para isso, foi efetuada uma análise experimental apenas às placas e comparados os resultados obtidos com os resultados de uma análise numérica das mesmas.

Para a análise de sensibilidade da dimensão do elemento foi considerada uma placa retangular com as dimensões 297x47,7x1,97 mm, retirada do Lote 1. Foi efetuada a análise modal experimental para obtenção das características modais da placa física, considerada como referência, da qual foram extraídas as 8 primeiras frequências naturais e os 8 primeiros modos de vibração.

É criado o modelo de elementos finitos com as mesmas dimensões da placa física, com as seguintes propriedades mecânicas: módulo de elasticidade perpendicular à laminagem  $E_x = 66,9$  GPa, módulo de elasticidade paralelo à laminagem  $E_y = 71,0$  GPa, coeficiente de Poisson  $\nu_{yx} = 0,31$  e massa específica  $\rho = 2712$  kg/m<sup>3</sup>. As propriedades mecânicas foram obtidas conforme descrito no sub-capítulo 5.2.

São aplicadas 15 dimensões diferentes de elemento de casca (SHELL63) ao mesmo modelo, entre 0,0005 m e 0,01 m. É efetuada uma comparação, dada pela diferença relativa percentual média (DRPM) entre as frequências de ressonância dos

modelos de elementos finitos com as diferentes dimensões de elemento de casca e do respetivo modelo experimental, como definido pela Eq. (3.9) do Capítulo 3. A Figura 5.2 mostra a evolução da DRPM em função do número de elementos de casca.

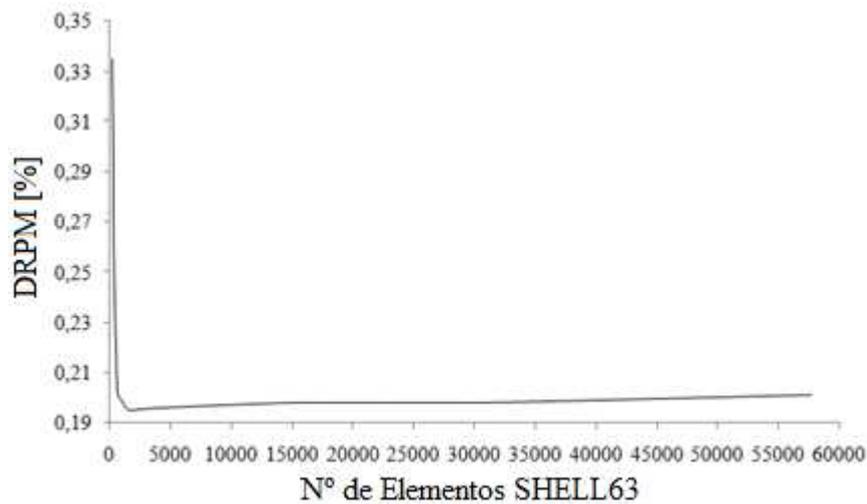


Figura 5.2 – Evolução da diferença relativa percentual média em função do número de elementos de casca (SHELL63) para o modelo de uma placa retangular com dimensões 297x47,7x1,97 mm.

Verifica-se que o valor da DRPM decresce acentuadamente até ao valor mínimo de 0,195 %, correspondente ao modelo de elementos finitos com 1700 elementos. Nesse caso a dimensão do elemento é de 0,003x0,003 m. Contudo, a partir desse ponto a DRPM aumenta muito lentamente à medida que o número de elementos também aumenta.

Na Tabela 5.4 apresenta-se as diferenças percentuais entre as oito primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental (coluna 2) e do modelo de elementos finitos (coluna 3) com a dimensão do elemento de casca de 0,003x0,003 m. A tabela mostra também a DRPM obtida pela aplicação da Eq. (3.9).

Tabela 5.4 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos com a dimensão do elemento de casca de 0,003x0,003 m.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica [Hz]	Diferença [%]
1	117,76	117,65	0,09
2	326,15	325,53	0,19
3	435,70	437,16	0,34
4	641,55	640,94	0,10
5	888,12	890,20	0,23
6	1064,62	1063,96	0,06
7	1366,73	1374,00	0,53
8	1594,80	1595,15	0,02
DRPM			0,195

Podemos assim afirmar que as placas modeladas em elementos finitos com elemento de casca, com dimensões de 0,003x0,003 m, são bastante representativas das

placas físicas. Esse fato permite ter maior confiança nos valores obtidos para a constante de rigidez da mola na fase de *updating*.

Na segunda fase é analisada a representatividade dos modelos das placas em elementos finitos em relação às placas físicas. Para isso, foram consideradas as placas retangulares com as dimensões  $154,9 \times 47,7 \times t$  mm, retiradas dos quatro lotes referidos no sub-capítulo 5.2, em que os valores de  $t$  são os apresentados na Tabela 5.1 para as placas PL1 e PL2. Foi efetuada a análise modal experimental para obtenção das características modais das placas físicas, consideradas como referência, da qual foram extraídas as 8 primeiras frequências naturais e os 8 primeiros modos de vibração.

São criados os modelos de elementos finitos com as mesmas dimensões das placas físicas, com as propriedades mecânicas apresentadas na Tabela 5.3. As placas são modeladas com elementos de casca (SHELL63) de dimensão  $0,003 \times 0,003$  m.

Nas Tabelas 5.5-5.12 apresentam-se as diferenças percentuais entre as oito primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental (coluna 2) e do modelo de elementos finitos (coluna 3) para as 8 placas analisadas, assim como o valor do MAC para cada um dos casos. As tabelas mostram também a DRPM obtida pela aplicação da Eq. (3.9).

Tabela 5.5 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos da placa física PL1 do Lote 1.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica [Hz]	Diferença [%]	MAC
1	436,41	434,22	0,50	1
2	859,07	848,89	1,19	1
3	1208,79	1206,14	0,22	1
4	1796,48	1785,62	0,60	1
5	2376,29	2376,53	0,01	1
6	2895,54	2892,13	0,12	1
7	3911,60	3923,88	0,31	1
8	4229,67	4243,11	0,32	1
DRPM			0,41	

Tabela 5.6 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos da placa física PL2 do Lote 1.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica [Hz]	Diferença [%]	MAC
1	435,53	434,22	0,30	1
2	859,39	848,89	1,22	1
3	1208,82	1206,14	0,22	1
4	1796,47	1785,62	0,60	1
5	2376,32	2376,53	0,01	1
6	2895,37	2892,13	0,11	1
7	3912,71	3923,88	0,29	1
8	4230,79	4243,11	0,29	1
DRPM			0,38	

Tabela 5.7 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos da placa física PL1 do Lote 2.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica [Hz]	Diferença [%]	MAC
1	444,36	456,77	2,79	1
2	849,03	866,36	2,04	1
3	1230,63	1267,65	3,01	1
4	1777,68	1825,18	2,67	1
5	2418,50	2495,25	3,17	1
6	2869,23	2963,85	3,30	1
7	3980,87	4106,88	3,17	1
8	4209,69	4362,56	3,63	1
DRPM			2,97	

Tabela 5.8 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos da placa física PL2 do Lote 2.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica [Hz]	Diferença [%]	MAC
1	443,67	457,88	3,20	1
2	848,74	868,47	2,32	1
3	1221,02	1270,74	4,07	1
4	1775,54	1829,62	3,05	1
5	2413,41	2501,32	3,64	1
6	2873,68	2971,06	3,39	1
7	3966,77	4116,87	3,78	1
8	4202,13	4373,17	4,07	1
DRPM			3,44	

Tabela 5.9 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos da placa física PL1 do Lote 3.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica [Hz]	Diferença [%]	MAC
1	447,24	453,49	1,40	1
2	857,84	863,12	0,62	1
3	1237,19	1258,03	1,68	1
4	1797,41	1817,29	1,11	1
5	2429,24	2475,68	1,91	1
6	2899,35	2948,87	1,71	1
7	3999,04	4075,76	1,92	1
8	4251,76	4337,30	2,01	1
DRPM			1,54	

Tabela 5.10 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos da placa física PL2 do Lote 3.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica [Hz]	Diferença [%]	MAC
1	446,71	450,04	0,75	1
2	856,97	856,55	0,05	1
3	1235,72	1248,46	1,03	1
4	1794,96	1803,47	0,47	1
5	2426,36	2456,85	1,26	1
6	2893,92	2926,44	1,12	1
7	3992,83	4044,76	1,30	1
8	4240,43	4304,30	1,51	1
DRPM			0,94	

Tabela 5.11 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos da placa física PL1 do Lote 4.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica [Hz]	Diferença [%]	MAC
1	438,46	438,82	0,08	1
2	861,50	856,50	0,58	1
3	1215,62	1218,85	0,27	1
4	1802,48	1801,76	0,04	1
5	2388,72	2401,46	0,53	1
6	2905,74	2918,65	0,44	1
7	3930,66	3964,48	0,86	1
8	4242,33	4282,75	0,95	1
DRPM			0,47	

Tabela 5.12 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos da placa física PL2 do Lote 4.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica [Hz]	Diferença [%]	MAC
1	436,60	436,04	0,13	1
2	858,37	851,07	0,85	1
3	1209,84	1211,13	0,11	1
4	1796,70	1790,34	0,35	1
5	2377,90	2386,24	0,35	1
6	2897,84	2900,16	0,08	1
7	3913,76	3939,35	0,65	1
8	4232,82	4255,60	0,54	1
DRPM			0,38	

As Tabelas 5.5-5.12 mostram uma DRPM entre as frequências naturais das placas PL1 e PL2 dos quatro lotes, e o respectivo modelo de elementos finitos relativamente pequena. Podemos assim concluir que os modelos em elementos finitos são representativos das respectivas placas físicas. As placas PL1 e PL2 do Lote 2 apresentam valores de DRPM mais elevados e discrepantes dos obtidos para os outros seis casos. A DRPM observada nessas placas deve-se, possivelmente, aos valores obtidos para o módulo de elasticidade do material do Lote 2. O valor do MAC igual a 1 indica que os modos de vibração entre o modelo de referência e o modelo em elementos finitos estão bem correlacionados.

### 5.3.2 – Modelação da Junta Rebitada

Voltando à construção dos modelos rebitados em elementos finitos, é necessário representar o rebite sem recorrer a modelos 3D. Como já referido no estado da arte, a forma mais consensual de representa elementos de ligação a 2D é recorrer a elementos finitos que permitem efetuar a interligação entre dois nós localizados na periferia do furo das peças a unir.

O rebite efetivamente é montado de modo a que os pares de peças a unir fiquem sujeitas a forças de compressão. Por outro lado o corpo do rebite vai deformar até preencher a área do furo, como há-de ser abordado no capítulo seguinte.

Nesta fase ainda não há preocupação com a tecnologia do processo. Apenas se procura garantir que o modelo de elementos finitos seja o mais representativo possível dos modelos experimentais. A definição do número de elementos finitos a interligar dois nós para definir um rebite é então analisada nesta fase.

O rebite é construído com elementos mola-amortecedor, que combinam mola e amortecedor (COMBIN14). O amortecimento em materiais metálicos como o alumínio é considerado insignificante, pelo que pode ser desprezado, não sendo assim considerado no elemento mola-amortecedor. Para justificar essa opção é apresentado no sub-capítulo 5.4 as razões de amortecimento  $\zeta$  para os modos de vibração obtidos experimentalmente no modelo de junta rebitada com cinco rebites. Os valores são obtidos usando método da largura de banda de média potência, já apresentado no Capítulo 2.

Para a realização do processo de melhoramento de modelos de elementos finitos é atribuído um valor inicial à constante de rigidez da mola de  $5 \times 10^7$  N/m, que é variável durante o processo. A massa do rebite é obtida por pesagem. Como o rebite é modelado com vários elementos COMBIN14, a sua massa é dividida pontualmente pelos nós que interligam as duas placas por meio dos elementos mola-amortecedor. A massa é modelada com elementos de massa (MASS21), não sendo utilizada como variável ao longo do processo de melhoramento, uma vez que esse parâmetro está bem definido e é conhecido. As propriedades iniciais do rebite modelado em elementos finitos são apresentadas na Tabela 5.13.

Tabela 5.13 – Propriedades atribuídas aos rebites modelados em elementos finitos.

Propriedade	Símbolo	Unidades	Valor
Constante de Rigidez por cada Elemento Mola-Amortecedor	$k$	[N/m]	$5 \times 10^7$
Massa do Rebite Tipo 1			$2,5 \times 10^{-4}$
Massa do Rebite Tipo 2	$m$	[kg]	$6,0 \times 10^{-4}$
Massa do Rebite Tipo 3			$8,0 \times 10^{-4}$

A Figura 5.3 mostra as várias representações do rebite em elementos finitos com diferentes quantidades de elementos mola-amortecedor (4, 6, 8, 12, 16 e 20) por rebite.

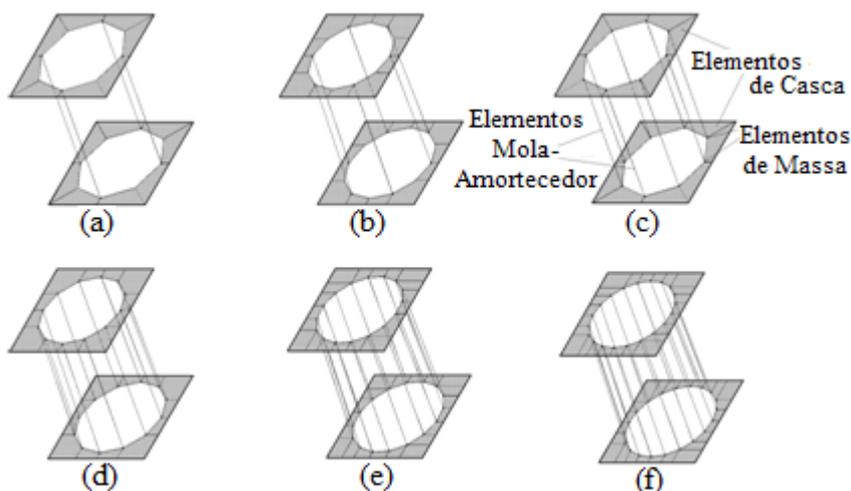


Figura 5.3 – Representação do rebite em elementos finitos com: (a) quatro, (b) seis, (c) oito, (d) doze, (e) dezasseis e (f) vinte elementos mola-amortecedor por rebite.

O diâmetro do furo para cada tipo de rebite é igual ao diâmetro do furo de alojamento normalizado apresentado na Tabela 5.2.

A Figura 5.4 mostra em corte transversal os vários modelos em elementos finitos de duas placas interligadas por diferentes quantidades de rebites (1, 2, 4 e 5), no plano médio da espessura.

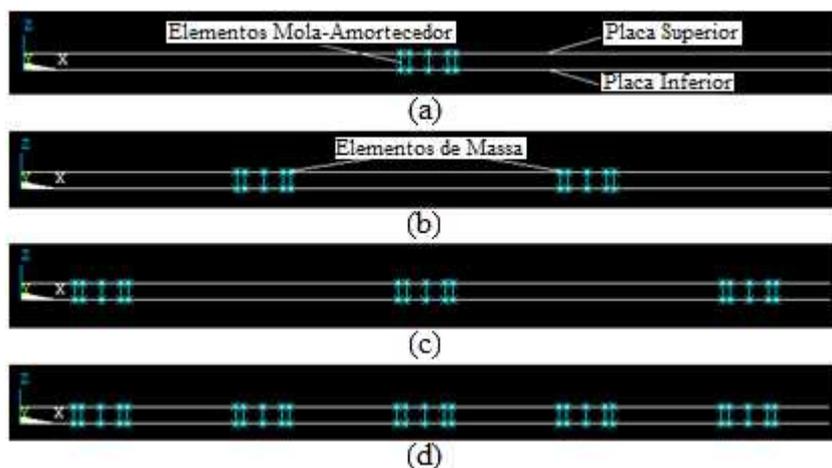


Figura 5.4 – Modelo da junta rebitada em elementos finitos com: (a) um, (b) dois, (c) três e (d) cinco rebites.

O processo de melhoramento de modelos de elementos finitos, apresentado no Capítulo 3, é usado de modo a encontrar o valor da constante de rigidez  $k$  dos elementos mola-amortecedor, e, conseqüentemente, da junta rebitada numérica que melhor reproduz o modelo experimental. É esperado que esse valor possa variar de acordo com a quantidade de rebites e elementos mola-amortecedor por cada rebite. Para estudar esse efeito, são construídos 72 modelos diferentes de juntas rebitadas em elementos finitos: quatro juntas rebitadas com diferentes quantidades de rebites (1, 2, 3 e

5), combinado com seis diferentes quantidades de elementos mola-amortecedor (4, 6, 8, 12, 16 e 20) por cada tipo de rebite (Tipo 1, Tipo 2 e Tipo 3). Na Tabela 5.14, apresentam-se as 72 combinações de modelos de juntas rebitadas.

Tabela 5.14 – Combinações de modelos de juntas rebitadas construídos.

Nº de Rebites na Junta	Nº de Elementos COMBIN 14																	
1	4	6	8	12	16	20	4	6	8	12	16	20	4	6	8	12	16	20
2	4	6	8	12	16	20	4	6	8	12	16	20	4	6	8	12	16	20
3	4	6	8	12	16	20	4	6	8	12	16	20	4	6	8	12	16	20
5	4	6	8	12	16	20	4	6	8	12	16	20	4	6	8	12	16	20
Tipo de Rebite	Tipo 1				Tipo 2				Tipo 3									

#### 5.4 – Resultados Obtidos por *Updating* da Constante de Rigidez da Mola

Nesta secção são apresentados os resultados após aplicação da metodologia de melhoramento de modelos de elementos finitos apenas para os modelos com oito elementos mola-amortecedor para cada tipo de rebite. Apenas são apresentados os modelos com oito elementos mola-amortecedor para cada tipo de rebite, porque são os que melhor conseguem representar os modelos experimentais, como mais à frente se apresenta. É também efetuada uma comparação, dada pela diferença relativa percentual média (DRPM) entre as frequências de ressonância dos modelos numéricos melhorados e dos respetivos modelos experimentais, como definido pela Eq. (3.9) do Capítulo 3.

A constante de rigidez de cada rebite obtida após *updating*, denotada por  $k_{r_u}$ , pode por vezes ser diferente de um rebite para o outro na mesma junta. A constante de rigidez global da junta denotada por  $k_{j_u}$ , é obtida pela soma da rigidez obtida para cada rebite utilizado na junta, uma vez que os rebites estão em paralelo, como pode ser observado na Figura 5.1b. Assim,

$$k_{j_u} = \sum_{r_u=1}^{n_{r_u}} k_{r_u} , \quad (5.1)$$

em que  $n_{r_u}$  é o número total de rebites na junta usada para *updating*,  $k_{r_u}$  representam a constante de rigidez do  $r_u$  –ésimo rebite obtido por *updating*, e é obtido pela soma do valor da constante de rigidez de cada elemento  $e_u$  do rebite obtida por *updating*, denotada por  $k_{e_u}$ , uma vez que também estão em paralelo, como pode ser observado na Figura 5.3 e 5.4. Ou seja,

$$k_{r_u} = \sum_{e_u=1}^{n_{e_u}} k_{e_u} . \quad (5.2)$$

em que  $n_{e_u}$  é o número total de elementos que compõe o rebite no processo de *updating*. Se dividirmos o valor da constante de rigidez global pelo número de rebites obtemos um valor médio para cada rebite na junta. Por simplificação, considera-se esse valor para constante de rigidez do rebite, denotada por  $\bar{k}_{r_u}$ , tal que

$$\bar{k}_{r_u} = \frac{1}{n_{r_u}} \sum_{r_u=1}^{n_{r_u}} k_{r_u} . \quad (5.3)$$

Por sua vez se dividirmos  $\bar{k}_{r_u}$  pelo número de elementos  $n_{e_u}$  que constitui o rebite obtemos um valor médio da constante de rigidez para cada elemento, denotada por  $\bar{k}_{e_u}$ , tal que

$$\bar{k}_{e_u} = \frac{1}{n_{e_u}} \bar{k}_{r_u} . \quad (5.4)$$

### 5.4.1 – Modelos com Rebites do Tipo 1

A Figura 5.5 mostra a relação entre a diferença relativa percentual média, obtida por aplicação de (3.9), entre as frequências de ressonância dos modelos numéricos melhorados e dos respectivos modelos experimentais, em função da quantidade de elementos mola-amortecedor, usando rebites de 3,2 mm de diâmetro.

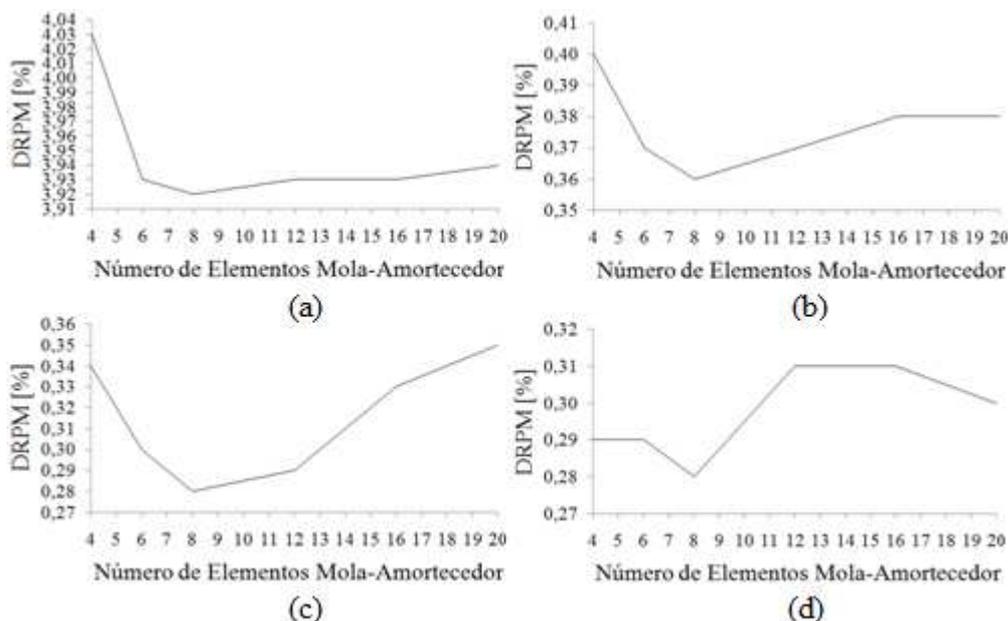


Figura 5.5 – Diferença percentual, após *updating*, entre os modelos de elementos finitos e o modelo experimental de junta rebitada com (a) um rebite, (b) dois rebites, (c) três rebites e (d) cinco rebites de 3,2 mm de diâmetro.

A diferença relativa percentual média, obtida pela aplicação de (3.9), é de 3,92% para o modelo com um rebite (Figura 5.5a), 0,36% para o modelo com dois rebites

(Figura 5.5b), 0,28% para os modelos com três rebites (Figura 5.5c) e cinco rebites (Figura 5.5d).

Fica claro nestes gráficos que a DRPM é mínima quando o modelo de elementos finitos possui 8 elementos mola-amortecedor por cada rebite.

As Tabelas 5.15-5.18 mostram as diferenças percentuais entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência (coluna 2) e do modelo de elementos finitos, antes do *updating* (coluna 4) e depois do *updating* (coluna 6), para os modelos com um, dois, três e cinco rebites, respetivamente. Por outro lado, como pode ser observado nessas tabelas, o valor de 1 para o MAC inicial e final, revela, que os modos estão bem correlacionados para todos os casos. Este facto indica que os valores ótimos obtidos por *updating* para as constantes de rigidez dos elementos mola-amortecedor são obtidos com elevada fiabilidade.

Na Tabela 5.19 apresenta-se o valor médio da constante de rigidez para cada rebite (Eq. (5.3)) e para cada elemento (Eq. (5.4)), assim como valor da constante de rigidez da junta (Eq. (5.1)), obtidos após *updating*, usando rebites de 3,2 mm de diâmetro.

Tabela 5.15 – Evolução das frequências naturais e modos de vibração (MAC) para o modelo de elementos finitos de junta rebitada com um rebite de 3,2 mm de diâmetro e oito elementos mola-amortecedor.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Inicial [Hz]	Diferença antes do <i>Updating</i> [%]	Frequência Numérica Final [Hz]	Diferença depois do <i>Updating</i> [%]	MAC Inicial	MAC Final
1	101,90	104,44	2,49	102,31	0,41	1	1
2	325,37	322,34	0,93	322,32	0,94	1	1
3	444,19	389,43	12,33	380,11	14,43	1	1
4	564,80	572,16	1,30	564,12	0,12	1	1
5	856,42	852,69	0,44	852,64	0,44	1	1
6	1057,65	1039,53	1,71	1039,34	1,73	1	1
7	1363,77	1210,99	11,20	1182,92	13,26	1	1
8	1402,80	1420,80	1,28	1402,80	0,00	1	1

Tabela 5.16 – Evolução das frequências naturais e modos de vibração (MAC) para o modelo de elementos finitos de junta rebitada com dois rebites de 3,2 mm de diâmetro e oito elementos mola-amortecedor.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Inicial [Hz]	Diferença antes do <i>Updating</i> [%]	Frequência Numérica Final [Hz]	Diferença depois do <i>Updating</i> [%]	MAC Inicial	MAC Final
1	109,32	105,13	3,83	109,39	0,06	1	1
2	324,85	324,17	0,21	324,34	0,16	1	1
3	443,03	434,18	2,00	435,85	1,62	1	1
4	592,64	574,49	3,06	592,58	0,01	1	1
5	849,38	851,99	0,31	853,00	0,43	1	1
6	1057,09	1054,82	0,21	1055,94	0,11	1	1
7	1369,06	1360,57	0,62	1366,07	0,22	1	1
8	1467,81	1427,00	2,78	1471,83	0,27	1	1

Tabela 5.17 – Evolução das frequências naturais e modos de vibração (MAC) para o modelo de elementos finitos de junta rebitada com três rebites de 3,2 mm de diâmetro e oito elementos mola-amortecedor.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Inicial [Hz]	Diferença antes do <i>Updating</i> [%]	Frequência Numérica Final [Hz]	Diferença depois do <i>Updating</i> [%]	MAC Inicial	MAC Final
1	112,13	112,26	0,12	112,13	0,00	1	1
2	325,71	325,12	0,18	325,12	0,18	1	1
3	448,72	446,75	0,44	446,75	0,44	1	1
4	606,86	606,20	0,11	605,61	0,21	1	1
5	851,80	849,10	0,32	849,09	0,32	1	1
6	1058,86	1061,24	0,23	1061,23	0,22	1	1
7	1389,75	1400,94	0,81	1400,93	0,81	1	1
8	1508,88	1511,15	0,15	1509,54	0,04	1	1

Tabela 5.18 – Evolução das frequências naturais e modos de vibração (MAC) para o modelo de elementos finitos de junta rebitada com cinco rebites de 3,2 mm de diâmetro e oito elementos mola-amortecedor.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Inicial [Hz]	Diferença antes do <i>Updating</i> [%]	Frequência Numérica Final [Hz]	Diferença depois do <i>Updating</i> [%]	MAC Inicial	MAC Final
1	112,75	112,78	0,03	112,75	0,00	1	1
2	325,68	325,13	0,17	325,12	0,17	1	1
3	449,07	446,76	0,51	446,72	0,52	1	1
4	607,59	607,85	0,04	607,67	0,01	1	1
5	849,17	846,98	0,26	846,92	0,26	1	1
6	1058,59	1061,31	0,26	1061,30	0,26	1	1
7	1390,99	1400,98	0,72	1400,88	0,71	1	1
8	1512,36	1517,62	0,35	1517,06	0,31	1	1

Tabela 5.19 – Valores de constante de rigidez obtidos após *updating* dos modelos de elementos finitos para os quatro tipos de juntas rebitadas com rebites de 3,2 mm de diâmetro, em que o rebite é modelado com oito elementos mola-amortecedor.

Propriedade	Unidades	Valor			
		1 Rebite	2 Rebites	3 Rebites	5 Rebites
$k_{e_u}^-$		$2,2 \times 10^7$	$3,3 \times 10^7$	$34,4 \times 10^7$	$40,5 \times 10^7$
$k_{r_u}^-$	[N/m]	$17,3 \times 10^7$	$26,0 \times 10^7$	$275,3 \times 10^7$	$324,2 \times 10^7$
$k_{j_u}$			$52,0 \times 10^7$	$825,9 \times 10^7$	$1621,0 \times 10^7$

De modo a justificar a opção por desprezar o coeficiente de amortecimento nos modelos de elementos finitos, são apresentados na Tabela 5.20 as razões de amortecimento  $\zeta$  obtidas por aplicação das Eqs.(2.137) e (2.138) para cada modo de vibração do modelo de junta rebitada com 5 rebites de 3,2 mm de diâmetro.

Tabela 5.20 – Razões de amortecimento para cada modo do modelo de junta rebitada com 5 rebites de 3,2 mm de diâmetro.

Modo	Frequência Natural Experimental [Hz]	Razão de amortecimento $\zeta$
1	112,75	0,0102
2	325,68	0,0015
3	449,07	0,0034
4	607,59	0,0022
5	849,17	0,0012
6	1058,59	0,0008
7	1390,99	0,0008
8	1512,36	0,0012

Na Figura 5.6 apresenta-se a FRF obtida por análise modal experimental a esse modelo, e a partir da qual se aplicou o método da largura de banda de média potência para obtenção das razões de amortecimento  $\zeta$ .

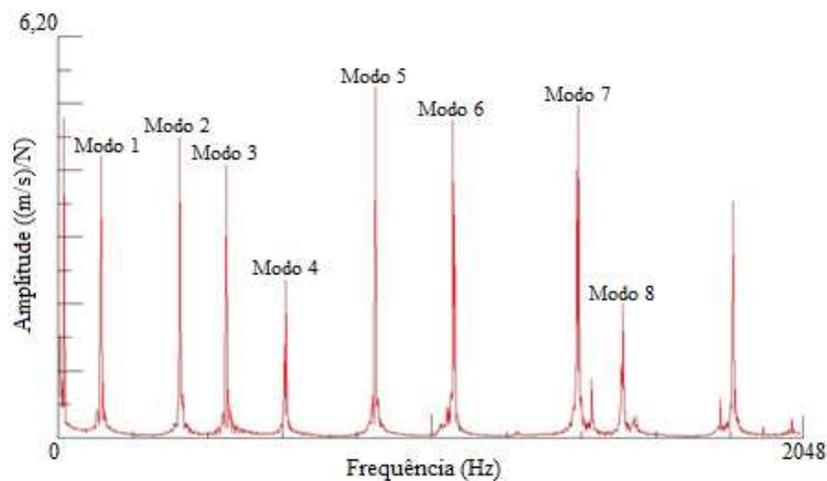


Figura 5.6 – FRF obtida por análise modal experimental ao modelo de junta rebitada com 5 rebites de 3,2 mm de diâmetro.

As razões de amortecimento  $\zeta$  apresentadas são muito pequenas ( $\zeta < 0,1$ ) para todos os modos de vibração, podendo o amortecimento ser desprezado nos modelos de elementos finitos.

A Figura 5.7 mostra uma representação dos 8 primeiros modos de vibração para o modelo de elementos finitos com junta rebitada composta por cinco rebites de 3,2 mm de diâmetro. A Figura 5.8 mostra a representação dos 8 primeiros modos de vibração obtidos experimentalmente, após identificação modal, em doze pontos para o mesmo modelo. Como se pode observar por comparação entre as Figuras 5.7 e 5.8, existe boa correlação entre os modos de vibração do modelo de elementos finitos e o modelo experimental.

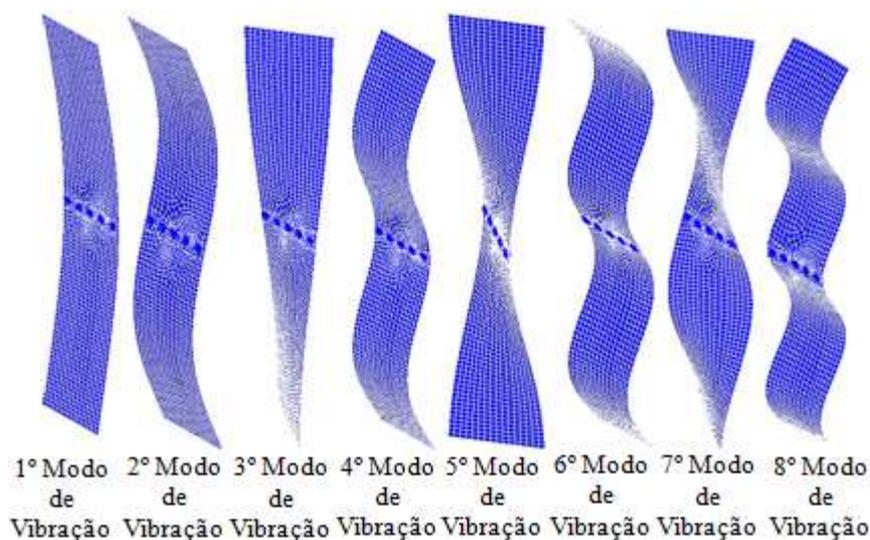


Figura 5.7 – Representação das 8 primeiras formas naturais de vibração do modelo de elementos finitos com junta rebitada composta por 5 rebites de 3,2 mm de diâmetro.



Figura 5.8 – Representação das 8 primeiras formas naturais de vibração do modelo experimental com junta rebitada composta por 5 rebites de 3,2 mm de diâmetro.

Como as amostras possuem as mesmas dimensões e forma, variando apenas a quantidade de rebites e o tipo de rebites, pode-se concluir que essa correlação se mantém para os restantes casos de estudo.

#### 5.4.2 – Modelos com Rebites do Tipo 2

A Figura 5.9 mostra a relação entre a diferença relativa percentual média, obtida por aplicação de (3.9), entre as frequências de ressonância dos modelos numéricos melhorados e dos respectivos modelos experimentais, em função da quantidade de elementos mola-amortecedor, usando rebites de 4,0 mm de diâmetro.

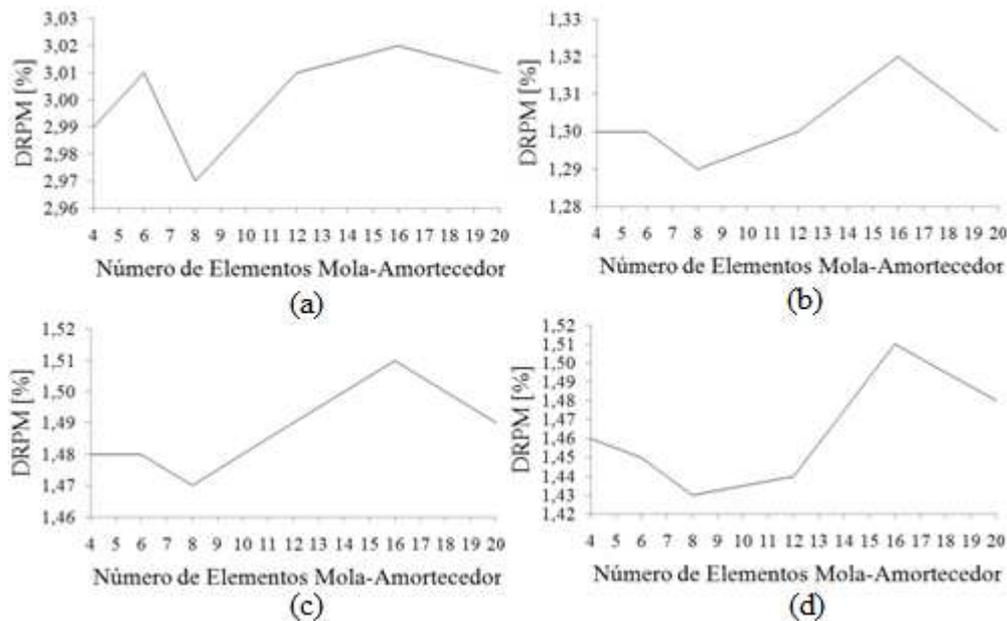


Figura 5.9 – Diferença percentual, após *updating*, entre os modelos de elementos finitos e o modelo experimental de junta rebizada com (a) um rebite, (b) dois rebites, (c) três rebites e (d) cinco rebites de 4,0 mm de diâmetro.

A diferença relativa percentual média, obtida pela aplicação de (3.9), é de 2,97% para o modelo com um rebite (Figura 5.9a), 1,29% para o modelo com dois rebites (Figura 5.9b), 1,47% para o modelo com três rebites (Figura 5.9c) e 1,43% para o modelo com cinco rebites (Figura 5.9d).

À semelhança do caso anterior, o número de elementos mola-amortecedor para representar um rebite e que minimiza a DRPM é de oito.

As Tabelas 5.21-5.24 mostram as diferenças percentuais entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência (coluna 2) e do modelo de elementos finitos, antes do *updating* (coluna 4) e depois do *updating* (coluna 6), para os modelos com um, dois, três e cinco rebites, respetivamente. Por outro lado, como pode ser observado nessas tabelas, o valor de 1 para o MAC inicial e final, revela, que os modos estão bem correlacionados para todos os casos. Este facto indica que os valores ótimos obtidos por *updating* para as constantes de rigidez dos elementos mola-amortecedor são obtidos com elevada fiabilidade.

Na Tabela 5.25 apresenta-se o valor médio da constante de rigidez para cada rebite (Eq. (5.3)) e para cada elemento (Eq. (5.4)), assim como valor da constante de rigidez da junta (Eq. (5.1)), obtidos após *updating*, usando rebites de 4,0 mm de diâmetro.

Tabela 5.21 – Evolução das frequências naturais e modos de vibração (MAC) para o modelo de elementos finitos de junta rebitada com um rebite de 4,0 mm de diâmetro e oito elementos mola-amortecedor.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Inicial [Hz]	Diferença antes do <i>Updating</i> [%]	Frequência Numérica Final [Hz]	Diferença depois do <i>Updating</i> [%]	MAC Inicial	MAC Final
1	108,01	108,61	0,55	108,19	0,17	1	1
2	332,44	337,66	1,57	337,64	1,56	1	1
3	441,33	400,27	9,30	398,52	9,70	1	1
4	599,14	596,25	0,48	594,66	0,75	1	1
5	854,94	874,50	2,29	874,47	2,28	1	1
6	1078,65	1086,57	0,73	1086,46	0,72	1	1
7	1359,79	1248,46	8,19	1243,02	8,59	1	1
8	1478,72	1482,35	0,25	1478,72	0,00	1	1

Tabela 5.22 – Evolução das frequências naturais e modos de vibração (MAC) para o modelo de elementos finitos de junta rebitada com dois rebites de 4,0 mm de diâmetro e oito elementos mola-amortecedor.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Inicial [Hz]	Diferença antes do <i>Updating</i> [%]	Frequência Numérica Final [Hz]	Diferença depois do <i>Updating</i> [%]	MAC Inicial	MAC Final
1	114,86	114,35	0,44	114,44	0,36	1	1
2	331,94	339,88	2,39	339,89	2,39	1	1
3	442,84	445,95	0,70	446,02	0,72	1	1
4	619,37	618,97	0,07	619,37	0,00	1	1
5	853,00	871,55	2,18	871,61	2,18	1	1
6	1078,10	1104,76	2,47	1104,85	2,48	1	1
7	1374,82	1400,43	1,86	1400,68	1,88	1	1
8	1536,74	1539,90	0,21	1540,94	0,27	1	1

Tabela 5.23 – Evolução das frequências naturais e modos de vibração (MAC) para o modelo de elementos finitos de junta rebitada com três rebites de 4,0 mm de diâmetro e oito elementos mola-amortecedor.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Inicial [Hz]	Diferença antes do <i>Updating</i> [%]	Frequência Numérica Final [Hz]	Diferença depois do <i>Updating</i> [%]	MAC Inicial	MAC Final
1	115,80	115,73	0,06	115,71	0,07	1	1
2	332,22	340,60	2,52	340,60	2,52	1	1
3	448,32	456,57	1,84	456,56	1,84	1	1
4	624,39	624,83	0,07	624,77	0,06	1	1
5	848,78	857,28	1,00	857,27	1,00	1	1
6	1079,16	1109,61	2,82	1109,61	2,82	1	1
7	1392,37	1434,04	2,99	1434,03	2,99	1	1
8	1552,21	1559,30	0,46	1559,14	0,45	1	1

Tabela 5.24 – Evolução das frequências naturais e modos de vibração (MAC) para o modelo de elementos finitos de junta rebitada com cinco rebites de 4,0 mm de diâmetro e oito elementos mola-amortecedor.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Inicial [Hz]	Diferença antes do <i>Updating</i> [%]	Frequência Numérica Final [Hz]	Diferença depois do <i>Updating</i> [%]	MAC Inicial	MAC Final
1	116,07	115,29	0,67	115,50	0,49	1	1
2	332,19	340,59	2,53	340,60	2,53	1	1
3	449,93	456,43	1,44	456,46	1,45	1	1
4	625,35	620,93	0,71	621,93	0,55	1	1
5	843,36	851,66	0,98	851,74	0,99	1	1
6	1079,18	1109,58	2,82	1109,61	2,82	1	1
7	1397,25	1433,69	2,61	1433,76	2,61	1	1
8	1556,08	1553,33	0,18	1556,08	0,00	1	1

Tabela 5.25 – Valores de constante de rigidez obtidos após *updating* dos modelos de elementos finitos para os quatro tipos de juntas rebitadas com rebites de 4,0 mm de diâmetro, em que o rebite é modelado com oito elementos mola-amortecedor.

Propriedade	Unidades	Valor			
		1 Rebite	2 Rebites	3 Rebites	5 Rebites
$\bar{k}_{e_u}$		$3,8 \times 10^7$	$18,2 \times 10^7$	$41,3 \times 10^7$	$43,9 \times 10^7$
$\bar{k}_{r_u}$	[N/m]	$30,1 \times 10^7$	$145,9 \times 10^7$	$330,0 \times 10^7$	$351,5 \times 10^7$
$k_{j_u}$			$291,7 \times 10^7$	$989,9 \times 10^7$	$1757,4 \times 10^7$

### 5.4.3 – Modelos com Rebites do Tipo 3

A Figura 5.10 mostra a relação entre a diferença relativa percentual média, obtida por aplicação de (3.9), entre as frequências de ressonância dos modelos numéricos melhorados e dos respectivos modelos experimentais, em função da quantidade de elementos mola-amortecedor, usando rebites de 4,8 mm de diâmetro.

A diferença relativa percentual média, obtida pela aplicação de (1), é de 2,72% para o modelo com um rebite (Figura 5.10a), 0,73% para o modelo com dois rebites (Figura 5.10b), 1,01% para o modelo com três rebites (Figura 5.10c) e 0,38% para o modelo com cinco rebites (Figura 5.10d).

A DRPM é minimizada quando o número de elementos mola-amortecedor por cada rebite é de 8, à semelhança do que acontece com os restantes tipo de rebites.

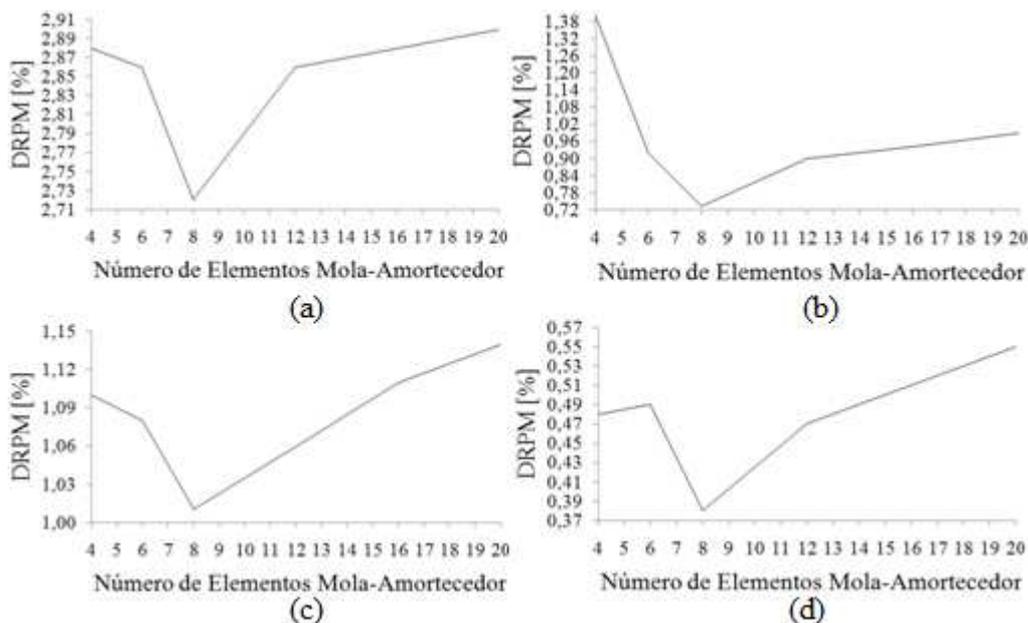


Figura 5.10 – Diferença percentual, após *updating*, entre os modelos de elementos finitos e o modelo experimental de junta rebitada com (a) um rebite, (b) dois rebites, (c) três rebites e (d) cinco rebites de 4,8 mm de diâmetro.

As Tabelas 5.26-5.29 mostram as diferenças percentuais entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência (coluna 2) e do modelo de elementos

finitos, antes do *updating* (coluna 4) e depois do *updating* (coluna 6), para os modelos com um, dois, três e cinco rebites, respetivamente. Por outro lado, como pode ser observado nessas tabelas, o valor de 1 para o MAC inicial e final, revela, que os modos estão bem correlacionados para todos os casos. Este facto indica que os valores ótimos obtidos por *updating* para as constantes de rigidez dos elementos mola-amortecedor são obtidos com elevada fiabilidade.

Tabela 5.26 – Evolução das frequências naturais e modos de vibração (MAC) para o modelo de elementos finitos de junta rebitada com um rebite de 4,8 mm de diâmetro e oito elementos mola-amortecedor.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Inicial [Hz]	Diferença antes do <i>Updating</i> [%]	Frequência Numérica Final [Hz]	Diferença depois do <i>Updating</i> [%]	MAC Inicial	MAC Final
1	107,39	108,10	0,67	108,21	0,76	1	1
2	333,49	333,67	0,05	333,68	0,06	1	1
3	440,32	399,26	9,33	399,70	9,23	1	1
4	606,21	592,76	2,22	593,17	2,15	1	1
5	861,60	870,77	1,06	870,79	1,07	1	1
6	1081,81	1073,82	0,74	1073,89	0,73	1	1
7	1352,39	1248,10	7,71	1249,47	7,61	1	1
8	1472,18	1473,02	0,06	1473,97	0,12	1	1

Tabela 5.27 – Evolução das frequências naturais e modos de vibração (MAC) para o modelo de elementos finitos de junta rebitada com dois rebites de 4,8 mm de diâmetro e oito elementos mola-amortecedor.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Inicial [Hz]	Diferença antes do <i>Updating</i> [%]	Frequência Numérica Final [Hz]	Diferença depois do <i>Updating</i> [%]	MAC Inicial	MAC Final
1	115,10	113,30	1,56	113,74	1,18	1	1
2	333,71	335,84	0,64	335,90	0,66	1	1
3	444,81	441,17	0,82	441,71	0,70	1	1
4	619,85	612,86	1,13	614,90	0,80	1	1
5	856,38	865,79	1,10	866,12	1,14	1	1
6	1082,80	1091,47	0,80	1091,87	0,84	1	1
7	1379,50	1384,91	0,39	1386,67	0,52	1	1
8	1530,44	1524,96	0,36	1530,44	0,00	1	1

Tabela 5.28 – Evolução das frequências naturais e modos de vibração (MAC) para o modelo de elementos finitos de junta rebitada com três rebites de 4,8 mm de diâmetro e oito elementos mola-amortecedor.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Inicial [Hz]	Diferença antes do <i>Updating</i> [%]	Frequência Numérica Final [Hz]	Diferença depois do <i>Updating</i> [%]	MAC Inicial	MAC Final
1	116,07	113,85	1,91	113,92	1,86	1	1
2	333,46	336,46	0,90	336,47	0,90	1	1
3	449,54	451,56	0,45	451,55	0,45	1	1
4	623,91	614,42	1,52	614,67	1,48	1	1
5	839,00	845,72	0,80	845,62	0,79	1	1
6	1082,48	1095,59	1,21	1095,61	1,21	1	1
7	1397,40	1417,11	1,41	1417,07	1,41	1	1
8	1533,82	1533,26	0,04	1533,82	0,00	1	1

Tabela 5.29 – Evolução das frequências naturais e modos de vibração (MAC) para o modelo de elementos finitos de junta rebitada com cinco rebites de 4,8 mm de diâmetro e oito elementos mola-amortecedor.

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica Inicial [Hz]	Diferença antes do <i>Updating</i> [%]	Frequência Numérica Final [Hz]	Diferença depois do <i>Updating</i> [%]	MAC Inicial	MAC Final
1	111,58	111,21	0,34	111,17	0,37	1	1
2	325,65	327,31	0,51	327,30	0,51	1	1
3	450,82	447,63	0,71	447,59	0,72	1	1
4	599,07	598,00	0,18	597,81	0,21	1	1
5	829,77	831,45	0,20	831,40	0,20	1	1
6	1059,83	1068,13	0,78	1068,12	0,78	1	1
7	1400,01	1403,87	0,28	1403,77	0,27	1	1
8	1498,53	1499,07	0,04	1498,53	0,00	1	1

Na Tabela 5.30 apresenta-se o valor médio da constante de rigidez para cada rebite (Eq. (5.3)) e para cada elemento (Eq. (5.4)), assim como valor da constante de rigidez da junta (Eq. (5.1)), obtidos após *updating*, usando rebites de 4,8 mm de diâmetro.

Tabela 5.30 – Valores de constante de rigidez obtidos após *updating* dos modelos de elementos finitos para os quatro tipos de juntas rebitadas com rebites de 4,8 mm de diâmetro, em que o rebite é modelado com oito elementos mola-amortecedor.

Propriedade	Unidades	Valor			
		1 Rebite	2 Rebites	3 Rebites	5 Rebites
$\bar{k}_{e_u}$		$5,8 \times 10^7$	$52,3 \times 10^7$	$51,4 \times 10^7$	$58,2 \times 10^7$
$\bar{k}_{r_u}$	[N/m]	$46,4 \times 10^7$	$418,6 \times 10^7$	$411,5 \times 10^7$	$465,4 \times 10^7$
$k_{j_u}$			$837,1 \times 10^7$	$1234,5 \times 10^7$	$2326,9 \times 10^7$

Os resultados mostram que os modelos elementos finitos construídos com oito elementos mola-amortecedor por rebite permitem obter a melhor representação relativamente aos respetivos modelos experimentais com um, dois, três e cinco rebites, como se pode observar nas Figuras 5.6, 5.7 e 5.8, verificando-se essa tendência para os três tipos de rebites usados.

## 5.5 – Conclusões

Neste capítulo, vários modelos de elementos finitos simplificados de juntas rebitadas são estudados e avaliados. A avaliação é efetuada com base na comparação entre as características modais desses modelos, após aplicado o processo de *updating*, e os respetivos modelos experimentais. Com base nos resultados obtidos conclui-se que as juntas rebitadas com oito elementos mola-amortecedor por rebite apresentam a diferença relativa percentual média (DRPM) mais baixa entre o modelo de elementos finitos e o modelo experimental.

A metodologia de melhoramento de modelos de elementos finitos pôde ser aplicada com sucesso para obtenção da constante de rigidez das molas do elemento mola-amortecedor que compõem o rebite para cada caso de estudo. Para cada caso foi obtida, como seria de esperar, uma constante de rigidez diferente. Esses valores serão tratados no capítulo seguinte no sentido de obter uma equação que defina a constante de rigidez para modelos de juntas rebitadas.

Verificou-se que o amortecimento nos modelos estudados é muito baixo, característico de sistemas do tipo sub-amortecido, pelo que pôde ser desprezado.

O modelo proposto, com oito elementos mola-amortecedor por rebite, permite também boa eficiência computacional devido à simplicidade do tipo de elementos usados.

Contudo, os valores obtidos para a constante de rigidez das molas do elemento mola-amortecedor para o caso de estudo com rebites de 4,0 mm (Tipo 2), que envolve as placas PL1 e PL2 do Lote 2, poderiam ter sido um pouco diferentes se a representatividade entre as placas modeladas em elementos finitos e as respectivas placas físicas fosse mais robusta. Essa diferença entre o modelo em elementos finitos e o modelo físico, provoca que o processo de *updating*, relativamente à constante de rigidez das molas, compense a diferença inicial entre os modelos das placas com os valores obtidos para a constante. Para isso ter sido evitado, era necessário que se tivesse aumentado a representatividade entre o modelo de elementos finitos e o modelo físico por via do processo de *updating* individual às placas em elementos finitos, mesmo que após o *updating*, as placas PL1 e PL2 apresentassem, possivelmente, propriedades físicas e mecânicas sem significado real.

# **CAPÍTULO 6 – UM MODELO ANALÍTICO PARA REPRESENTAR MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS SIMPLIFICADOS DE JUNTAS REBITADAS EM DINÂMICA DE ESTRUTURAS**

No capítulo anterior foi estudada uma forma de representar uma ligação rebitada em elementos finitos utilizando elementos mola-amortecedor, e foram identificados os parâmetros adequados para esses elementos. Neste capítulo apresenta-se uma nova abordagem analítica para representação simplificada de juntas rebitadas em elementos finitos na análise dinâmica de estruturas, com vista a sistematizar a parametrização das juntas rebitadas em modelos de elementos finitos. A nova abordagem compreende o desenvolvimento matemático de uma equação geral que permite definir o valor da constante de rigidez da mola dos elementos mola-amortecedor.

Faz-se uso dos valores das constantes de rigidez das molas obtidos por *updating*, no Capítulo 5, para quantificar a área de material afetado, ou seja, a área de distribuição de tensões, devido aos carregamentos de compressão provocados pelos rebites no material das peças unidas. Com base no valor da área afetada para caso de estudo do Capítulo 5, é desenvolvida a equação geral para determinar a área de material afetado, e consequentemente é deduzida a equação geral para determinar a constante de rigidez dos elementos mola-amortecedor, em função das condições dos modelos de juntas rebitadas.

O novo modelo analítico é depois aplicado a vários casos de estudo, incluindo um modelo de uma viga em caixão, conclui-se que novo modelo analítico consegue produzir valores de constante de rigidez, para juntas rebitadas, com elevada fiabilidade, uma vez que se verifica uma correlação de mais de 94% entre os valores das frequências naturais do modelo experimental e do modelo de elementos finitos, para todos os casos de estudo apresentados. Pela análise e comparação entre os modos de vibração do modelo experimental e do modelo de elementos finitos da viga em caixão, observa-se uma boa correlação entre os dois modelos.

## **6.1 – Introdução**

Como já referido anteriormente, é importante definir o valor da constante de rigidez das juntas, de modo a que estas sejam bem representadas em modelos de

elementos finitos. Não obstante, o trabalho desenvolvido e apresentado no Capítulo 5 poder contribuir para a idealização simplificada de rebites com recurso a elementos mola-amortecedor, os valores das constantes de rigidez obtidas para esses elementos, e conseqüentemente para a junta rebitada, são específicos dos casos de estudo apresentados, não permitindo de maneira geral extrapolar para outros casos. Assim, pretende-se desenvolver uma equação geral que defina a constante de rigidez desse tipo de juntas.

Os valores das constantes de rigidez obtidos por *updating* para os casos de estudo com rebites de diâmetro de 3,2 mm, 4,0 mm e 4,8 mm, são usados nesse desenvolvimento para quantificar, através de uma equação matemática, a área de material afetado devido à força que os rebites exercem por unidade de área, ou seja, a área na qual se distribuem as tensões provocadas pela rebitagem. O desconhecimento desse parâmetro contribui em parte para a dificuldade em determinar a constante de rigidez de juntas de qualquer tipo, seja ela rebitada, aparafusada, soldada ou colada. Já vários autores se debruçaram sobre a pesquisa da distribuição de tensões numa junta rebitada. O trabalho de Atre (2006) é apenas um exemplo. O autor analisa a distribuição de tensões em modelos de elementos finitos tridimensionais e conclui que com a correcta aplicação das ferramentas de elementos finitos a distribuição de tensões pode ser obtida com precisão. Contudo o problema acresce nos casos em que a junta possui mais que um rebite, e existe a interferência de um rebite sobre o outro, dependendo da distância entre eles. O mesmo autor faz referência a outros trabalhos em que os autores salientam a complexidade e dificuldade em quantificar a área afetada por tensões (Muller, 1995), (Langrande et. al, 2001), (Fitzgerald e Cohen, 1994), (Nepershin e Knigin, 1992), (Yarkovets, et. al, 1987), (Demina e Volkov, 1989) e (Ryzhova, 1994).

Neste trabalho, um modelo matemático, descrito no sub-capítulo 6.3, é então desenvolvido e testado em vários casos de aplicação. É efetuada a análise modal experimental a todos os casos de estudo.

No sub-capítulo 6.4 faz-se a descrição dos modelos de elementos finitos usados nesta fase, e no sub-capítulo 6.5 apresentam-se os resultados em forma de tabelas que comparam a diferença entre as oito primeiras frequências naturais do modelo experimental e do modelo de elementos finitos. Apresentam-se, no mesmo sub-capítulo, os oito primeiros modos de vibração obtidos experimentalmente, assim como os obtidos

por elementos finitos, para o caso de estudo de uma viga em caixão como exemplo de uma aplicação mais complexa. Após análise dos resultados conclui-se, no sub-capítulo 6.6, que a nova abordagem e a equação desenvolvida consegue produzir valores de constante de rigidez, para juntas rebitadas, com elevada fiabilidade.

## 6.2 – Procedimento Experimental

Seguindo uma metodologia semelhante à seguida no capítulo anterior, apresenta-se neste sub-capítulo o procedimento experimental para obtenção dos dados de referência, dividido em duas fases. Em cada uma das fases se descreve os modelos usados a nível das suas propriedades geométricas e mecânicas, assim como o procedimento para a análise modal experimental. Os modelos usados na primeira fase são constituídos por duas placas unidas por diferentes números de rebites, enquanto na segunda fase os modelos usados são mais complexos, tendo por base uma viga em caixão.

### 6.2.1 – Modelos de Juntas Rebitadas (Fase 1)

Numa primeira fase efetuaram-se ensaios experimentais de análise modal a peças, cujo comportamento modal é depois usado como referência para comparação com os resultados obtidos por via numérica. Essas peças consistem em duas placas (uma placa superior, denominada por PL1 e uma placa inferior, denominada PL2) de alumínio, obtidas por corte a laser, interligadas por rebites. As placas estão unidas por meio de rebites de alumínio com diâmetro  $d_r$  de 3,2 mm (Tipo 1). São rebitadas oito amostras diferentes que representam juntas rebitadas com:

- duas linhas de cinco rebites, como representado na Figura 6.1a (Amostra 1);
- três linhas de cinco rebites, como representado na Figura 6.1b (Amostra 2);
- quatro linhas de cinco rebites, como representado na Figura 6.1c (Amostra 3);
- cinco linhas de cinco rebites, como representado na Figura 6.1d (Amostra 4);
- uma linha de dez rebites, como representado na Figura 6.2a (Amostra 5);
- uma linha de 20 rebites, como representado na Figura 6.2b (Amostra 6);
- 19 rebites em ziguezague, como representado na Figura 6.3a (Amostra 7);
- 23 rebites em ziguezague, como representado na Figura 6.3b (Amostra 8).

O material usado nas amostras é proveniente do mesmo lote (Lote 5). O valor da espessura  $t$  das placas é apresentado na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Valores de espessura das placas PL1 e PL2 das amostras.

Nomenclatura	Símbolo	Unidades	Valor				
			Amostra 1/2/3/4	Amostra 5	Amostra 6	Amostra 7	Amostra 8
PL1	$t$	[m]	$1,99 \times 10^{-3}$	$1,98 \times 10^{-3}$	$1,99 \times 10^{-3}$	$1,99 \times 10^{-3}$	$2,00 \times 10^{-3}$
PL2			$2,01 \times 10^{-3}$	$1,98 \times 10^{-3}$	$1,99 \times 10^{-3}$	$1,99 \times 10^{-3}$	$2,00 \times 10^{-3}$

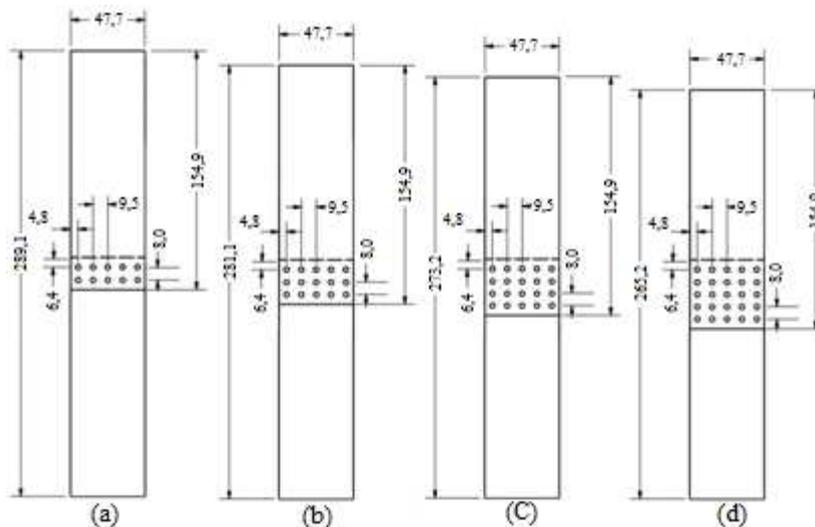


Figura 6.1 – Representação esquemática de um modelo com junta composta por: (a) duas linhas de cinco rebites (Amostra 1), (b) três de cinco rebites (Amostra 2), (c) quatro linhas de cinco rebites (Amostra 3) e (d) cinco linhas de cinco rebites (Amostra 4).

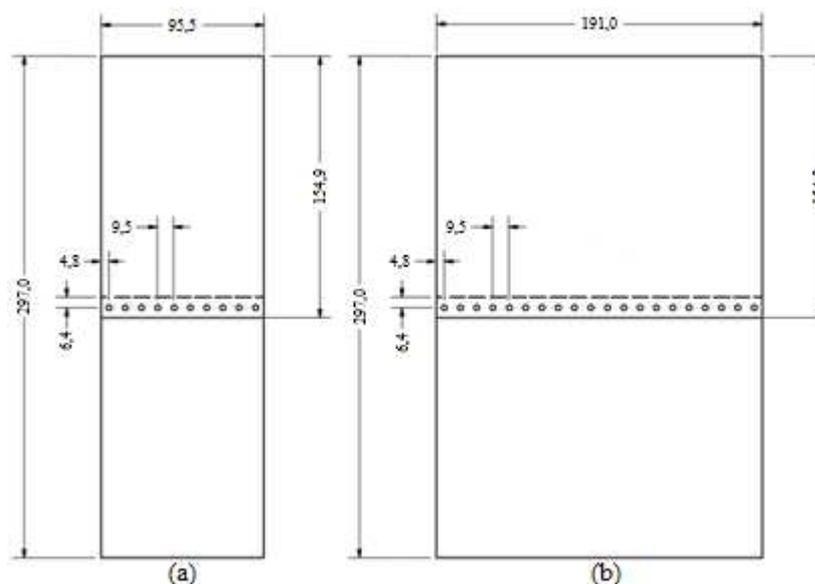


Figura 6.2 – Representação esquemática de um modelo com junta composta por: (a) uma linha de dez rebites (Amostra 5) e (b) uma linha de vinte rebites (Amostra 6).

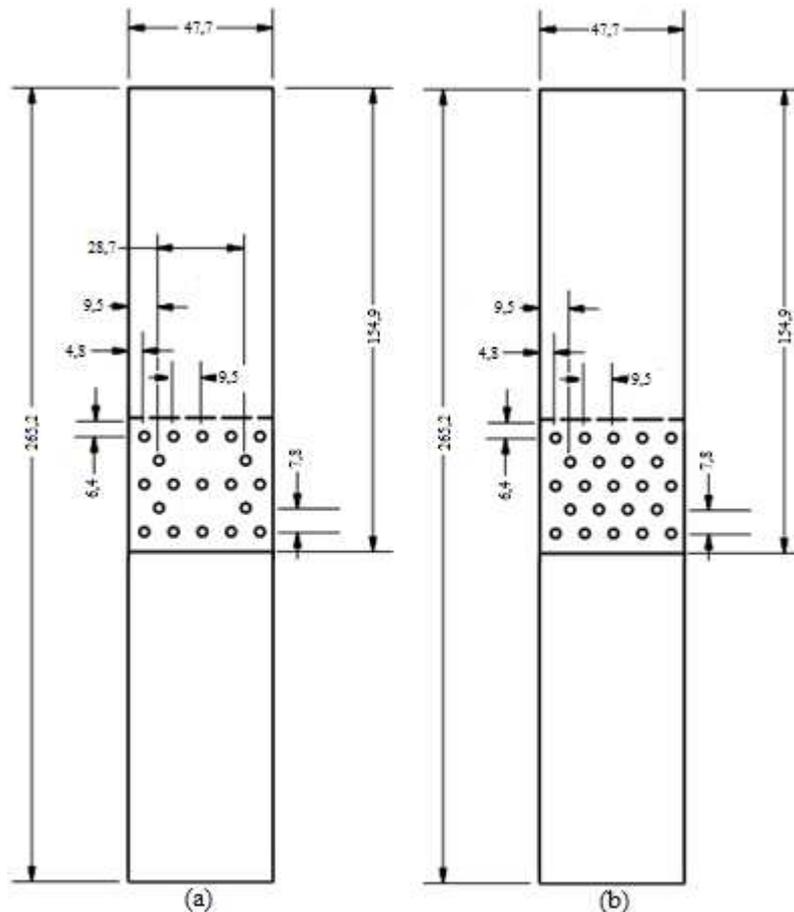


Figura 6.3 – Representação esquemática de um modelo com junta composta por: (a) 19 rebites em ziguezague (Amostra 7) e (b) 23 rebites em ziguezague (Amostra 8).

As propriedades mecânicas, como o módulo de elasticidade no sentido transversal  $E_x$  (perpendicular à laminagem do material), no sentido longitudinal  $E_y$  (paralelo à laminagem do material) e o coeficiente de Poisson  $\nu_{yx}$  das placas PL1 e PL2, foram estimadas por meio de ensaios experimentais de tração, usando o mesmo equipamento apresentado no Capítulo 5. A massa específica  $\rho$  das placas foi obtida pela divisão entre a massa e o volume das placas. Na Tabela 6.2 apresentam-se essas propriedades. Os valores apresentados para os módulos de elasticidade são a média dos valores obtidos de três ensaios efetuados a provetes provenientes do mesmo lote.

Tabela 6.2 – Propriedades mecânicas das oito amostras retiradas do mesmo lote.

Propriedade	Unidades	Valor									
		Amostra 1/2/3/4		Amostra 5		Amostra 6		Amostra 7		Amostra 8	
		PL1	PL2	PL1	PL2	PL1	PL2	PL1	PL2	PL1	PL2
$E_x$	[Pa]					64,8x10 <sup>9</sup>					
$E_y$	[Pa]					73,8x10 <sup>9</sup>					
$\nu_{yx}$	-					0,29					
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	2680	2687	2699	2703	2697	2688	2687	2701	2694	2687

### 6.2.2 – Modelos de Juntas Rebitadas (Fase 2)

Nesta fase efetuaram-se ensaios experimentais de análise modal a vigas em caixão, e cujo comportamento modal foi usado como referência para comparação com os resultados obtidos por via numérica. As vigas em caixão são constituídas por duas metades (denominada por M1 e M2) de alumínio, obtidas por corte a laser, ligadas por rebites de alumínio com diâmetro  $d_r$  de 3,2 mm (Tipo 1). A viga caixão é rebitada em duas faces, com igual número de rebites em cada uma das faces. São rebitadas três amostras diferentes que representam juntas rebitadas com:

- uma linha de 105 rebites por cada face, como representado na Figura 6.4 (Amostra 9);
- uma linha de 53 rebites por cada face, como representado na Figura 6.5 (Amostra 10);
- uma linha de 27 rebites por cada face, como representado na Figura 6.6 (Amostra 11).

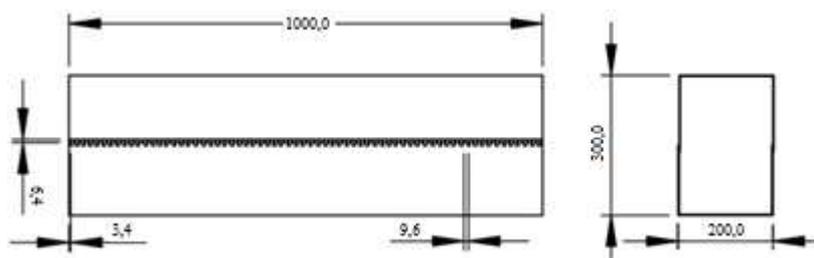


Figura 6.4 – Representação esquemática do modelo da viga em caixão com 105 rebites por cada face.

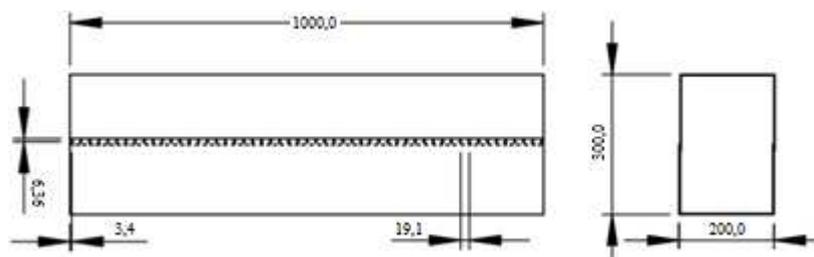


Figura 6.5 – Representação esquemática do modelo da viga em caixão com 53 rebites por cada face.

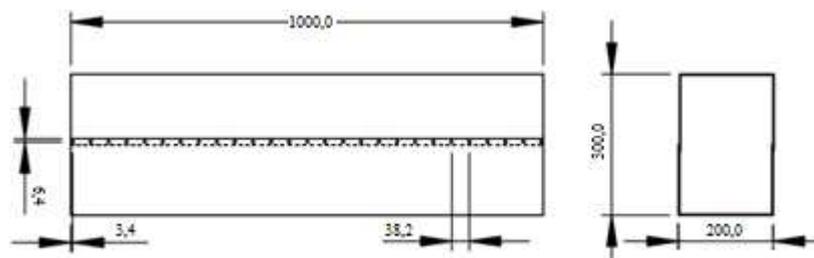


Figura 6.6 – Representação esquemática do modelo da viga em caixão com 27 rebites por cada face.

O material usado é proveniente do mesmo lote (Lote 6). O valor da espessura  $t$  de M1 e M2 são apresentados na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 – Valores de espessura das duas meias metades.

Nomenclatura	Símbolo	Unidades	Valor	
			Amostra 9/10/11	
M1	$t$	[m]	1,97x10 <sup>-3</sup>	
M2			1,97x10 <sup>-3</sup>	

As propriedades mecânicas, como o módulo de elasticidade no sentido longitudinal  $E_x$  (paralelo à laminagem do material), no sentido transversal  $E_y$  (perpendicular à laminagem do material) e o coeficiente de Poisson  $\nu_{xy}$  (relação entre a deformação na direção transversal  $y$  e a deformação na direção longitudinal  $x$ , quando é aplicada uma tensão na direção longitudinal) das metades M1 e M2, foram estimadas por meio de ensaios experimentais de tração, à semelhança dos casos já apresentados. A massa específica  $\rho$  das placas foi obtida pela divisão entre a massa e o volume das duas metades que compõem a viga em caixão. Na Tabela 6.4 apresentam-se essas propriedades.

Tabela 6.4 – Propriedades mecânicas do alumínio usado na viga em caixão.

Propriedade	Unidades	Valor	
		Amostra 9/10/11	
		M1	M2
$E_x$	[Pa]	73,5x10 <sup>9</sup>	
$E_y$	[Pa]	58,0x10 <sup>9</sup>	
$\nu_{xy}$	-	0,29	
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	2694	

Os testes são realizados em temperatura ambiente, cerca de 20 °C, utilizando o equipamento LMS SCADAS® XSI para análise modal experimental. A viga é testada na condição próxima de livre no espaço, estando suspensa em dois pontos por meio de um fio de *nylon* de 350 mm de comprimento, de modo a não causar interferência no ensaio, como mostrado na Figura 6.7. A viga é submetida a uma vibração forçada provocada por um excitador (*shaker*) LDS® V203, cujas características se apresentam no Anexo X, sendo a resposta medida com um acelerômetro triaxial PCB® 356A14 em 264 pontos. As características do acelerômetro apresentam-se no Anexo XI. Um sensor de força, apresentado no Anexo XII, faz a leitura da força de entrada. Os dados são coletados no domínio do tempo (amplitude em função do tempo) e processados no *software* de análise modal LMS® de modo a serem convertidos para o domínio da frequência. As frequências naturais e amplitudes de cada ponto são obtidas a partir da curva ajustada da

Função de Resposta em Frequência (FRF). Os 264 pontos são os necessários de modo a ser possível representar graficamente com boa aproximação os oito primeiros modos vibração da viga.

### 6.3 – Desenvolvimento Analítico

Depois de aplicado na junta, o rebite exerce carregamentos e constrangimentos nas peças que está a unir. Essa situação a que as peças unidas ficam sujeitas é análoga a uma viga constrangida nas duas extremidades sujeita a uma força  $F$  aplicada axialmente em cada uma dessas extremidades com sentidos opostos, como representado na Figura 6.8.

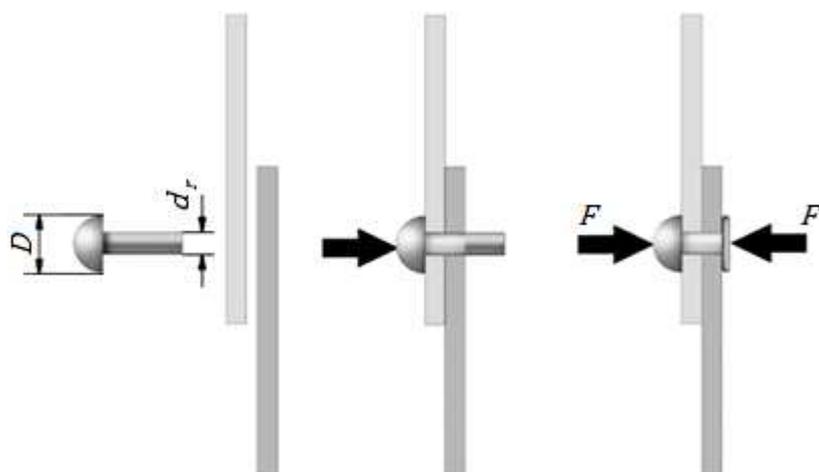


Figura 6.8 – Esquema de uma junta composta por duas peças a serem unidas com um rebite (Adaptado de Lexikon, Dicionário Online Caldas Aulete, 2015).

Devido à aplicação da força de compressão por unidade de área, tensões e deformações são induzidas no material das peças que compõem a junta. Por simplicidade, é usual assumir-se que a área do material da peça afetado  $A_m$  por tensões e deformações corresponde à secção transversal de um cilindro oco dada por

$$A_m = \frac{\pi(D^2 - d_r^2)}{4}, \quad (6.1)$$

em que  $D$  é o diâmetro da cabeça do rebite e  $d_r$  é o diâmetro do corpo do rebite, como representado na Figura 6.8.

No entanto essa assunção é apenas uma aproximação à realidade. Um exemplo mais realista de como a tensão se distribui no material para uma montagem ideal em que um carregamento é axial e uniforme nas duas extremidades do rebite, é apresentado na Figura 6.9.

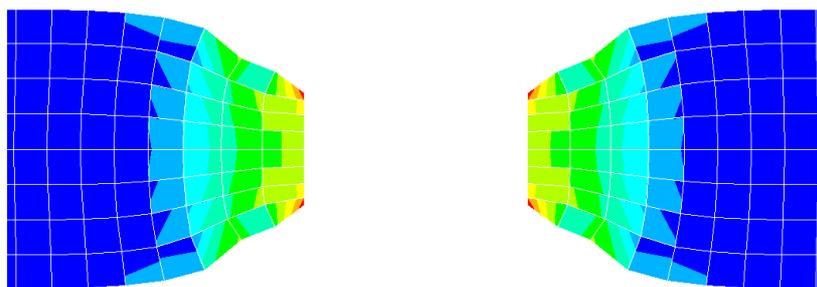


Figura 6.9 – Análise em elementos finitos da distribuição de tensões e deformações no material, correspondente uma ligação com um rebite.

A Figura 6.10 mostra o modelo a duas dimensões em elementos finitos com os carregamentos e condições de fronteira, com o qual se pretende simular essa distribuição de tensões, apresentada na Figura 6.8. É simulado o caso de duas peças sobrepostas, com 2 mm de espessura cada uma, unidas por um rebite de alumínio com  $d_r$  de 3,2 mm e  $D$  de 6,2 mm. O rebite não está representado, uma vez que se pretende apenas a distribuição de tensões no material devido aos esforços de compressão que o rebite provoca no mesmo. Assim, uma carga vertical unitária  $F$  distribuída é aplicada na peça superior e na peça inferior com a mesma magnitude, conforme mostra a Figura 6.10. A carga unitária  $F$  está distribuída numa superfície correspondente à área da coroa circular da cabeça do rebite, e admite-se que se distribui uniformemente na área de contacto e é igual nas duas peças. Os nós da superfície da parede lateral, que na realidade está em contacto com o corpo do rebite, são restringidos na direção perpendicular ao seu eixo, uma vez que o rebite se expande nessa direção, não permitindo o deslocamento da parede. É também imposta uma restrição perpendicular e paralela ao eixo do rebite na peça inferior conforme mostra a Figura 6.10. É usado um elemento plano, de 4 nós por elemento (PLANE182), com dimensões de 0,5x0,5 mm. Efetivamente este tipo de problema tridimensional tem uma geometria e carregamento simétrico em relação a um eixo, possibilitando a utilização de elementos bidimensionais axi simétricos como é o caso do elemento PLANE182.

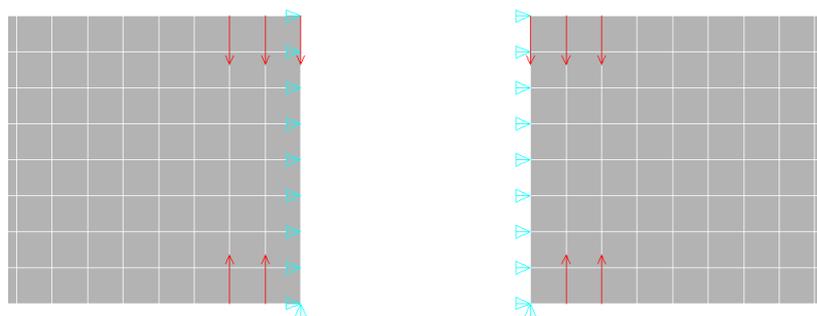


Figura 6.10 – Modelo de elementos finitos para análise estática correspondente a uma junta de ligação composta por um rebite.

A Figura 6.9 mostra assim a secção da área de influência provocada por um rebite sobre o material, conseqüente da análise estática ao modelo apresentado na Figura 6.10. A distribuição de tensões apresentada na Figura 6.9 é análoga à apresentada no trabalho de Budynas e Nisbett (2011), que estudaram uma junta aparafusada.

Analisando o problema do ponto de vista estático, e aplicando os conceitos apresentados no sub-capítulo 2.1, aos casos de juntas rebitadas aqui abordados, o material das placas em série fica sujeito à compressão que o rebite exerce após aplicado. Essa situação é análoga a molas em série sujeitas à compressão, pelo que se pode escrever que

$$\frac{1}{k_{eq_m}} = \sum_{p=1}^{n_p} \frac{1}{k_p}, \quad (6.7)$$

em que  $k_{eq_m}$  é o valor da constante de rigidez equivalente do material afetado e  $k_p$  representa a constante de rigidez da  $p$ -ésima peça na junta rebitada e  $n_p$  é o número de peças em série na junta rebitada.

Desenvolvendo a Eq. (6.7) para duas peças em série (placa superior PL1 e placa inferior PL2) podemos escrever

$$\frac{1}{k_{eq_m}} = \frac{1}{\frac{E_1 \times A_{a_1}}{t_1}} + \frac{1}{\frac{E_2 \times A_{a_2}}{t_2}}, \quad (6.8)$$

ou

$$\frac{1}{k_{eq_m}} = \frac{t_1}{E_1} \times \frac{1}{A_{a_1}} + \frac{t_2}{E_2} \times \frac{1}{A_{a_2}}, \quad (6.9)$$

em que  $t_1$  e  $t_2$  correspondem respectivamente à espessura da placa superior PL1 e inferior PL2, e que tem correspondência com  $L$  na Eq. (6.6), e  $E_1$  e  $E_2$  correspondem ao módulo de elasticidade na direção da espessura da placa superior PL1 e inferior PL2, respectivamente. Neste trabalho, assume-se que o módulo de elasticidade na direção da espessura é igual ao módulo de elasticidade na direção perpendicular à laminagem do material. Assume-se também que  $A_{a_1}$  e  $A_{a_2}$  é a área de material afetado, na placa superior PL1 e na placa inferior PL2, respectivamente. Por observação da Figura 6.9,

considera-se que  $A_{a_1} = A_{a_2}$ , pelo que a área afetada passa então a ser denotada por  $A_a$ . A

Eq. (6.9) pode assim ser escrita na seguinte forma

$$\frac{1}{k_{eq_m}} = \left( \frac{t_1}{E_1} + \frac{t_2}{E_2} \right) \times \frac{1}{A_a}, \quad (6.10)$$

e que resolvendo em ordem a  $A_a$  vem

$$A_a = \left( \frac{t_1}{E_1} + \frac{t_2}{E_2} \right) \times (k_{eq_m}). \quad (6.11)$$

Por outro lado o próprio corpo do rebite com diâmetro  $d_r$  está também sujeita a esforços e vai sofrer um deslocamento, pelo que possui também uma constante de rigidez, aqui denotada por  $k_h$ , e é dada por

$$k_h = \frac{E \times \pi \times d_r^2}{4 \times L_t}, \quad (6.12)$$

em que  $L_t$  corresponde à soma da espessura  $t$  das placas envolvidas.

Voltando ao caso em estudo, o valor de  $k_{j_u}$  obtido por *updating*, e apresentado nas Tabelas 5.9, 5.15 e 5.20 do Capítulo 5, para os casos de estudo com rebites de diâmetro de 3,2 mm, 4,0 mm e 4,8 mm, respetivamente, vai ser agora usado para determinar a área de material afetado em função do número de rebites na junta. No entanto o valor de  $k_{j_u}$ , corresponde ao valor da constante de rigidez que engloba o material afetado  $k_{eq_m}$  e o rebite  $k_h$ . Assim, ao valor de  $k_{j_u}$  não deve incluir o valor de  $k_h$ , calculado pela Eq. (6.12), de modo a se obter apenas o valor da constante de rigidez equivalente do material afetado  $k_{eq_m}$ . A abordagem é idealizar uma junta rebitada como um par de molas em paralelo. Uma mola representa o rebite e a outra representa o material afetado (Brown et al., 2008), tal que

$$k_{j_u} = k_{eq_m} + k_h \times n_r. \quad (6.13)$$

em que  $n_r$  é o número de rebites na junta.

Os valores de  $k_h$  são calculados e apresentados na Tabela 6.5 para os 12 casos de estudo apresentados no Capítulo 5. Para o módulo de elasticidade do rebite em alumínio é atribuído o valor convencional de 70 GPa.

Tabela 6.5 – Valores de  $k_h$  para cada caso de estudo.

Caso de Estudo	$k_h$ [N/m]
1 Rebite de $d_r = 3,2$ mm	$14,3 \times 10^7$
1 Rebite de $d_r = 4,0$ mm	$20,9 \times 10^7$
1 Rebite de $d_r = 4,8$ mm	$33,2 \times 10^7$
2 Rebites de $d_r = 3,2$ mm	$28,6 \times 10^7$
2 Rebites de $d_r = 4,0$ mm	$41,8 \times 10^7$
2 Rebites de $d_r = 4,8$ mm	$66,4 \times 10^7$
3 Rebites de $d_r = 3,2$ mm	$42,9 \times 10^7$
3 Rebites de $d_r = 4,0$ mm	$62,7 \times 10^7$
3 Rebites de $d_r = 4,8$ mm	$99,6 \times 10^7$
5 Rebites de $d_r = 3,2$ mm	$71,5 \times 10^7$
5 Rebites de $d_r = 4,0$ mm	$104,5 \times 10^7$
5 Rebites de $d_r = 4,8$ mm	$167,0 \times 10^7$

Reescrevendo a Eq. (6.12) e usando a Eq. (6.13), vem

$$A_a = \left( \frac{t_1}{E_1} + \frac{t_2}{E_2} \right) \times (k_{j_u} - k_h \times n_r). \quad (6.14)$$

Por aplicação da Eq. (6.14) a área de material afetado  $A_a$  é obtida para os 12 casos de estudo do Capítulo 5, e o seu valor é apresentado na coluna 5 da Tabela 6.6. Na coluna 4 da mesma tabela são apresentados os valores da relação de área  $r$ . A relação de área  $r$  é obtida pela divisão entre uma área definida pelo diâmetro  $d_r$  do corpo do rebite e o número  $n_r$  de rebites na junta, dada por  $\pi \times \frac{d_r^2}{4} \times n_r$ , e uma área definida pelo comprimento  $l$  da junta e uma largura  $w$  correspondente ao diâmetro  $d_r$  do corpo do rebite, dada por  $l \times w$  ou  $l \times d_r$ . A relação de área  $r$  pode então ser escrita em função de

$$r = \frac{\pi \times d_r \times n_r}{4 \times l}. \quad (6.15)$$

A utilização da variável correspondente ao diâmetro  $d_r$  para definir a relação de área prende-se com o facto de ser o parâmetro dimensional mais comumente usado para identificar um rebite.

Tabela 6.6 – Dados obtidos em condições experimentais para cada caso de estudo.

Caso de Estudo	$\pi \times \frac{d_r^2}{4} \times n_r$ [m <sup>2</sup> ]	$l \times d_r$ [m <sup>2</sup> ]	$r$	$A_a$ Experimental [m <sup>2</sup> ]
1 Rebite de $d_r = 3,2$ mm	0,000008	0,00015	0,053	0,0000018
1 Rebite de $d_r = 4,0$ mm	0,000012	0,00019	0,064	0,0000060
1 Rebite de $d_r = 4,8$ mm	0,000019	0,00023	0,081	0,0000086
2 Rebites de $d_r = 3,2$ mm	0,000016	0,00015	0,105	0,0000138
2 Rebites de $d_r = 4,0$ mm	0,000024	0,00019	0,128	0,0001633
3 Rebites de $d_r = 3,2$ mm	0,000024	0,00015	0,158	0,0004615
2 Rebites de $d_r = 4,8$ mm	0,000038	0,00023	0,161	0,0005005
3 Rebites de $d_r = 4,0$ mm	0,000036	0,00019	0,193	0,0006058
3 Rebites de $d_r = 4,8$ mm	0,000057	0,00023	0,242	0,0007370
5 Rebites de $d_r = 3,2$ mm	0,000040	0,00015	0,263	0,0009133
5 Rebites de $d_r = 4,0$ mm	0,000060	0,00019	0,321	0,0010798
5 Rebites de $d_r = 4,8$ mm	0,000094	0,00023	0,403	0,0012746

A partir da Tabela 6.6, pode ser construído o gráfico da Figura 6.11 em função de  $A_a$  e  $r$ .

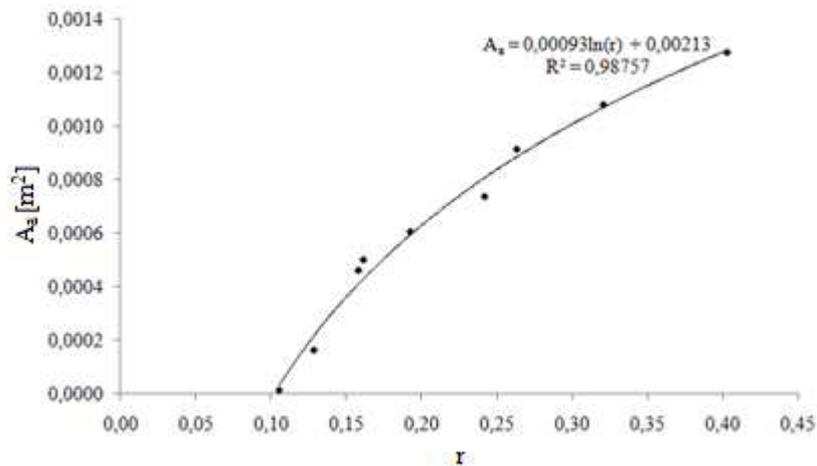


Figura 6.11 – Gráfico obtido a partir de dados experimentais que relaciona a área de material afetado  $A_a$  com a relação de área  $r$  para todos os casos de estudo apresentados.

Os três primeiros casos da Tabela 6.6 não são incluídos no gráfico, pois são casos em que apenas é usado um rebite, e para os quais a constante de rigidez da junta pode ser determinada com boa aproximação por

$$k_j = \frac{E \times \pi \times d_{ar}^2}{4 \times L_t}, \quad (6.16)$$

considerando que a área  $A$  envolvida corresponde à secção transversal de um cilindro com diâmetro  $d_{ar}$ , como representado na Figura 6.12. Assim, considera-se que uma

representação mais realista da área sujeita a compressão envolvendo as duas placas possa ser definida pelo diâmetro  $d_a$ .

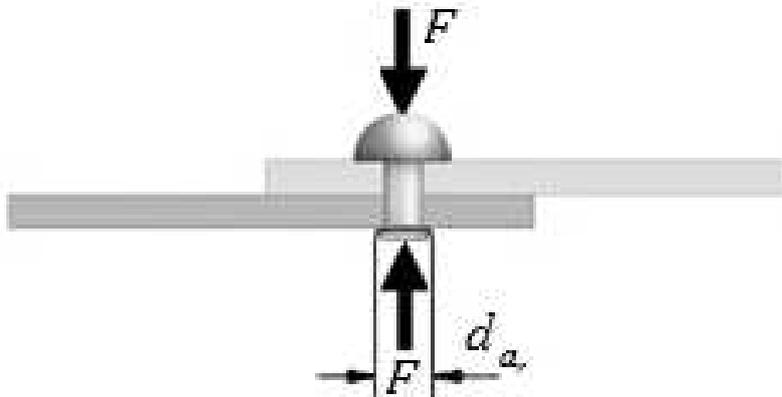


Figura 6.12 – Representação esquemática de uma ligação rebitada.

Na Tabela 6.7 apresenta-se a comparação entre os valores de  $k_j$  obtidos por via analítica, usando a Eq. (6.16), e os valores obtidos experimentalmente por via do processo de *updating*, para os três primeiros casos. Para obtenção dos valores de  $d_a$ , apresentados na Tabela 6.7, são efetuados os seguintes passos:

- 1º - Remoção do rebite da junta;
- 2º - Medição do novo valor do diâmetro  $d_r$ , aqui denotado por  $d_r'$ , devido à expansão do corpo do rebite no furo de alojamento, tal que  $d_r' = d_r$  medido nas peças, como explicado no sub-capítulo 5.2;
- 3º - Observação do rebite ao microscópio ótico a uma ampliação de 100X e obtenção de imagens, apresentadas nas Figuras 6.13-6.15, do corpo do rebite deformado;
- 4º - Fazer a equivalência entre 500  $\mu\text{m}$  e o número de pixéis nas imagens obtidas a uma ampliação de 100X, sendo que 500  $\mu\text{m}$  correspondem a 852 pixéis com a imagem a 100% no *software Paint*;
- 5º - Medir os pixéis correspondentes na zona deformada em 6 locais diferentes, converter para micrómetros e obter a média;
- 6º - Obter o valor de  $d_a$  pela soma de  $d_r'$  com duas vezes o valor obtido na medição efetuada no passo 5.

Observa-se pela Tabela 6.7, uma boa correlação entre os valores analíticos e os valores experimentais de  $k_j$ , para os três casos de estudo, pelo que se pode concluir que

a área de material sujeito a compressão pode ser bem definida usando o valor do diâmetro  $d_{ar}$ .

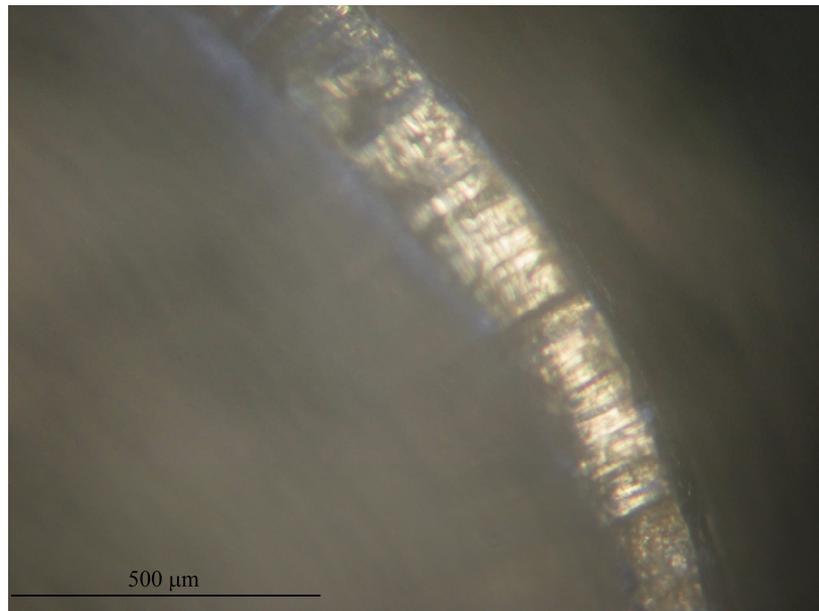


Figura 6.13 – Deformação ocorrida no rebite de  $d_r = 3,2$  mm.

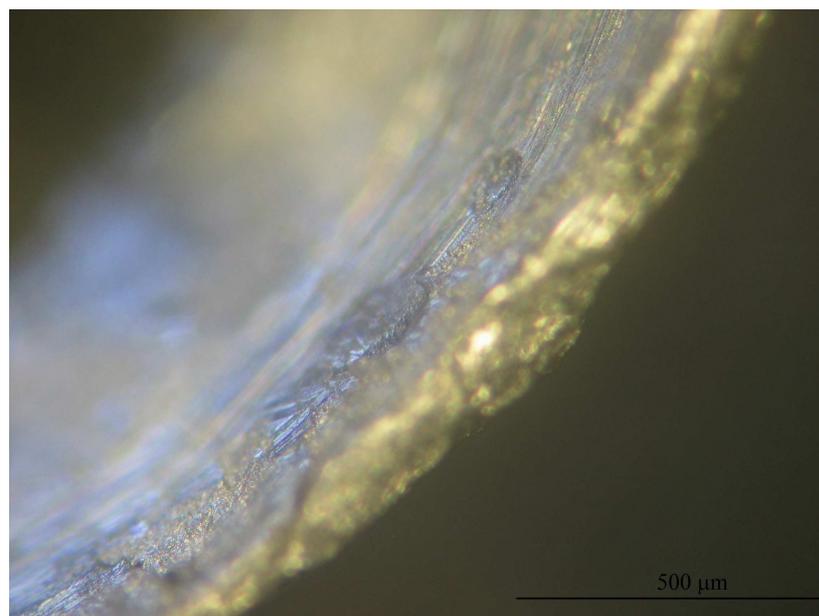
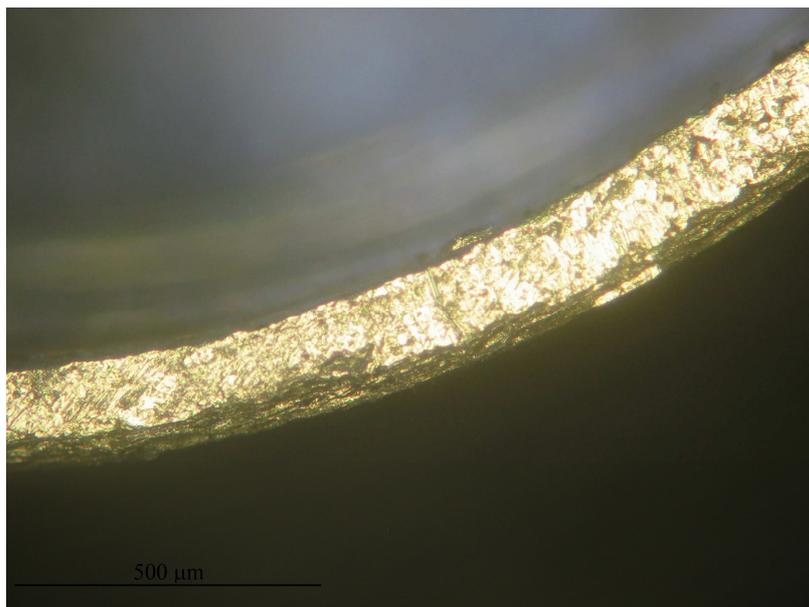


Figura 6.14 – Deformação ocorrida no rebite de  $d_r = 4,0$  mm.

Figura 6.15 – Deformação ocorrida no rebite de  $d_r = 4,8$  mm.Tabela 6.7 – Comparação entre os valores de  $k_j$  obtidos por via analítica e experimental.

Caso de Estudo	$d_r$ [mm]	$d_{a_r}$ [mm]	$k_j$ Analítico [N/m]	$k_j$ Experimental ( $k_{j_u}$ ) [N/m]	Diferença [%]
Rebite de $d_r = 3,2$ mm	3,2	3,5	$17,1 \times 10^7$	$17,3 \times 10^7$	1,2
Rebite de $d_r = 4,0$ mm	4,0	4,5	$30,3 \times 10^7$	$30,1 \times 10^7$	0,7
Rebite de $d_r = 4,8$ mm	5,1	5,5	$41,9 \times 10^7$	$46,4 \times 10^7$	9,7

A partir do gráfico da Figura 6.11 observa-se que os dados experimentais estão próximos do modelo da regressão logarítmica. Esta regressão foi obtida com o *software* Microsoft Excel, recorrendo ao método dos mínimos quadrados. O coeficiente de determinação  $R^2$ , que mede a qualidade do ajuste do modelo de regressão em relação aos dados experimentais, é de aproximadamente 0,99, o que significa que 99% do valor da variável dependente ( $A_a$ ) consegue ser explicado pelo modelo de regressão obtido. Assim, a equação que permite determinar a área afetada  $A_a$  em função da relação de área  $r$  é dada por

$$A_a = 0,00093 \ln(r) + 0,00213, \quad (6.17)$$

ou, substituindo a Eq. (6.15) na Eq. (6.17),

$$A_a = 0,00093 \ln\left(\frac{\pi \times d_r \times n_r}{4 \times l}\right) + 0,00213. \quad (6.18)$$

Se substituirmos os valores de  $r$  da Tabela 6.6 na Eq. (6.17), podemos obter o valor da área afetada calculada analiticamente e comparar, como apresentado na Tabela

6.8, com a área afetada obtida experimentalmente, usando o Erro Quadrático Médio (EQM), calculado com  $n_d$  pares de dados e definido por

$$EQM = \frac{1}{n_d} \sum_{i=1}^{n_d} (A_a E_i - A_a A_i)^2, \quad (6.19)$$

em que  $A_a E_i$  é a  $i$ -ésima área afetada obtida experimentalmente e  $A_a A_i$  é a  $i$ -ésima área afetada calculada analiticamente usando a Eq. (6.17). Por exemplo, neste caso tem-se  $n_d = 9$ .

Tabela 6.8 – Comparação entre a área afetada calculada analiticamente, usando a Eq. (6.17), e a área afetada obtida experimentalmente.

$A_a$ Experimental [m <sup>2</sup> ]	$A_a$ Analítica [m <sup>2</sup> ]	$(A_a E - A_a A)^2$
0,0000018	0,000037	$5,30242 \times 10^{-10}$
0,0000060	0,000221	$3,31228 \times 10^{-9}$
0,0000086	0,000414	$2,26758 \times 10^{-9}$
0,0000138	0,000433	$4,53845 \times 10^{-9}$
0,0001633	0,000598	$6,17974 \times 10^{-11}$
0,0004615	0,000810	$5,36094 \times 10^{-9}$
0,0005005	0,000889	$5,92301 \times 10^{-10}$
0,0006058	0,001073	$4,70225 \times 10^{-11}$
0,0007370	0,001285	$1,12683 \times 10^{-10}$
EQM		$1,86925 \times 10^{-9}$

Por aplicação da Eq. (6.19), e consultando a Tabela 6.8, pode-se observar um EQM muito pequeno entre a área afetada obtida experimentalmente e a área afetada analítica obtida por aplicação de (6.16), pelo que, uma vez mais, se pode considerar que a equação obtida por regressão logarítmica produz resultados muito próximos dos experimentais.

É conveniente referir que a Eq. (6.18) representa a área de material afetado  $A_a$  pelo comprimento  $l$  da junta, em que nos casos de estudo, apresentados na Tabela 6.6, é sempre igual a 0,0477 m, como se pode observar na Figura 5.1a. O que significa que para obter a área de material afetado para outros comprimentos de junta, esse valor terá de ser extrapolado, de tal forma que a área de material afetado extrapolada  $A_{a_e}$  é dada por

$$A_{a_e} = \frac{l \times \left( 0,00093 \ln \left( \frac{\pi \times d_r \times n_r}{4 \times l} \right) + 0,00213 \right)}{0,0477} \quad (6.20)$$

Substituindo a Eq. (6.14) na Eq. (6.20) e assumindo que  $A_a$ , obtida por meio experimental, é agora a  $A_{a_e}$  teórica, e que  $k_{j_u}$ , obtida por *updating*, é agora a  $k_j$  teórica, vem

$$\left(\frac{t_1}{E_1} + \frac{t_2}{E_2}\right) \times (k_j - k_h \times n_r) = \frac{I \times \left(0,00093 \ln\left(\frac{\pi \times d_r \times n_r}{4 \times I}\right) + 0,00213\right)}{0,0477} \quad (6.21)$$

e a partir da qual se pode escrever a equação que permite determinar por meio analítico a constante de rigidez da junta rebitada  $k_j$ , como

$$k_j = \frac{I \times \left(0,00093 \ln\left(\frac{\pi \times d_r \times n_r}{4 \times I}\right) + 0,00213\right)}{0,0477 \times \left(\frac{t_1}{E_1} + \frac{t_2}{E_2}\right)} + k_h \times n_r. \quad (6.22)$$

Se dividirmos  $k_j$  pelo número  $n_r$  de rebites que compõe a junta obtém-se a constante de rigidez de cada rebite  $k_r$

$$k_r = \frac{I \times \left(0,00093 \ln\left(\frac{\pi \times d_r \times n_r}{4 \times I}\right) + 0,00213\right)}{0,0477 \times n_r \times \left(\frac{t_1}{E_1} + \frac{t_2}{E_2}\right)} + k_h. \quad (6.23)$$

Se dividirmos  $k_r$  pelo número  $n_e$  de elementos mola-amortecedor, obtemos a constante de rigidez de cada elemento  $k_e$

$$k_e = \frac{I \times \left(0,00093 \ln\left(\frac{\pi \times d_r \times n_r}{4 \times I}\right) + 0,00213\right)}{0,3816 \times n_r \times \left(\frac{t_1}{E_1} + \frac{t_2}{E_2}\right)} + \frac{k_h}{8}, \quad (6.24)$$

sendo que 8, que consta no denominador da segunda parcela da Eq. (6.24), é o número ideal de elementos mola-amortecedor para representar um rebite, como concluído no Capítulo 5.

Para o caso da junta rebitada possuir apenas um rebite, a constante de rigidez do elemento mola-amortecedor é dado por

$$k_e = \frac{E \times \pi \times d_{ar}^2}{32 \times L_t}. \quad (6.25)$$

## 6.4 – Aplicação da Nova Abordagem a Vários Casos de Estudo

Neste sub-capítulo é apresentada a aplicação da nova abordagem a vários casos de modelos com juntas rebitadas. É aplicada a Eq. (6.24) para determinar o valor da constante de rigidez de cada elemento  $k_e$ . O valor é atribuído a cada elemento mola-amortecedor que compõem o rebite no modelo de elementos finitos. É efetuado o ensaio experimental, como referido no sub-capítulo 6.2, e os resultados obtidos são comparados com os resultados obtidos da análise aos modelos de elementos finitos.

### 6.4.1 – Modelação em Elementos Finitos dos Casos de Estudo para Validação

Os modelos de elementos finitos usados para validação da abordagem desenvolvida são construídos utilizando o *ANSYS® Parametric Design Language* (APDL), com as mesmas propriedades geométricas e mecânicas dos modelos experimentais, como apresentado nas Tabelas 6.1 e 6.2 (Fase 1) e Tabelas 6.3 e 6.4 (Fase 2).

Os modelos são criados com elementos de casca (SHELL63). A dimensão do elemento de casca é de 0,003x0,003 m. O rebite é construído com oito elementos mola-amortecedor, que combinam mola e amortecedor (COMBIN14), como representado na Figura 5.2c, do Capítulo 5. O amortecimento em materiais metálicos como o alumínio é considerado insignificante, como já comprovado no Capítulo 5, pelo que pode ser desprezado, não sendo assim considerado no elemento mola-amortecedor. Por aplicação da Eq. (6.24) é determinado o valor da constante de rigidez da mola.

No caso particular de uma junta rebitada ser composta por mais do que uma linha de rebites, deve ser primeiro aplicada a Eq. (6.22) a uma linha de cada vez em função do número  $n_r$  de rebites que compõe a linha. Para obter o valor total de constante de rigidez da junta  $k_j$ , o valor obtido pela aplicação de (6.22) em cada linha deve ser somado, uma vez que as linhas de rebites estão em paralelo.

Nas Tabelas 6.9 e 6.10 apresentam-se os valores da constante de rigidez da mola  $k_e$  por cada elemento para todos os casos de estudo da Fase 1 e 2, respetivamente.

Tabela 6.9 – Propriedades atribuídas aos rebites modelados em elementos finitos para as amostras de 1 a 8.

Propriedade	Símbolo	Unidades	Amostra	Amostra	Amostra	Amostra	Amostra
			1/2/3/4	5	6	7	8
Constante de Rigidez por cada Elemento	$k_e$	[N/m]	37,8x10 <sup>7</sup>	38,1x10 <sup>7</sup>	38,0x10 <sup>7</sup>	31,1x10 <sup>7</sup>	37,2x10 <sup>7</sup>
Mola-Amortecedor							
Massa do Rebite de $d_r = 3,2$ mm	$m$	[kg]			2,5x10 <sup>-4</sup>		

O caso da amostra 11, correspondente à viga em caixão constituída por 27 rebites por cada face, como apresentado na Figura 6.6, merece atenção especial pela sua particularidade. Se for aplicada a Eq. (6.15) para esse caso, obtém-se um valor de relação de área  $r$  de aproximadamente 0,07. Se consultarmos a Tabela 6.6, facilmente percebemos que para o caso da amostra 11 a constante de rigidez da junta não pode ser calculada pela nova equação, pois esta apenas produz valores de área afetada positivos para valores de  $r$  superiores a aproximadamente 0,105. Por outro lado, isso significa que a distância entre os rebites é tal (38, 2 mm, como pode ser observado na Figura 6.6) que a influência entre eles não é significativa. Assim a constante de rigidez de um rebite da amostra 11 é calculado por aplicação de (6.16), que multiplicado por  $n_r$  permite obter o valor da constante de rigidez da junta, em que neste caso  $n_r = 27$ . Por sua vez o valor da constante de rigidez da mola do elemento mola-amortecedor é obtido por aplicação de (6.25), em que para um rebite com  $d_r = 3,2$  mm, o valor de  $d_{a_r}$  é em média 3,5 mm.

Tabela 6.10 – Propriedades atribuídas aos rebites modelados em elementos finitos para as amostras de 9 a 11.

Propriedade	Símbolo	Unidades	Amostra 9	Amostra 10	Amostra 11
			Valor		
Constante de Rigidez por cada Elemento	$k_e$	[N/m]	34,5x10 <sup>7</sup>	20,3x10 <sup>7</sup>	2,1x10 <sup>7</sup>
Mola-Amortecedor					
Massa do Rebite de $d_r = 3,2$ mm	$m$	[kg]		2,5x10 <sup>-4</sup>	

A massa do rebite do tipo de rebite (Tipo 1, em que  $d_r = 3,2$  mm) usado nas amostras apresentadas neste capítulo, obtida por pesagem (2,5x10<sup>-4</sup> kg), é dividida pontualmente pelos nós que interligam as duas placas por meio dos elementos mola-amortecedor, e é modelada com elementos de massa (MASS21). A Figura 6.16a apresenta a viga em caixão (Amostra 9) em modelo de elementos finitos construída com base na nova abordagem apresentada.

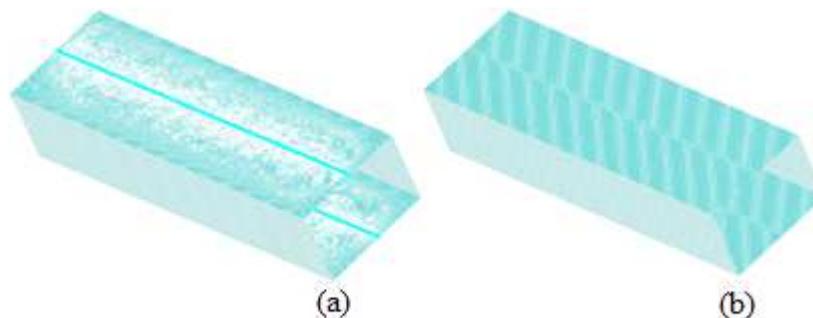


Figura 6.16 – (a) Modelo de elementos finitos da viga em caixão com junta de 105 rebites em cada face, unida por elementos mola-amortecedor e (b) modelo de elementos finitos da viga em caixão com áreas sobrepostas para simular uma junta rígida.

Para comparar a representação de junta rebitada simplificada desenvolvida neste trabalho com uma peça idealmente construída sem ligações, é criado um modelo de elementos finitos da viga em caixão com junta de ligação rígida. A viga é modelada com as mesmas propriedades geométricas e mecânicas do modelo experimental, e com elementos de casca (SHELL63) de dimensão 0,003x0,003 m. A junta de ligação rígida é reproduzida pela sobreposição de duas áreas com secção de valor igual a 12,72x1000 mm<sup>2</sup>, conforme se pode verificar na Figura 6.4. A Figura 6.16b mostra a viga em caixão modelada em elementos finitos para simulação da junta rebitada rígida.

### 6.5 – Resultados Obtidos

As Tabelas 6.11-6.21 mostram as diferenças percentuais entre as oito primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental (coluna 2) e do modelo de elementos finitos (coluna 3) que representam as amostras 1-11. As tabelas mostram também a diferença relativa percentual média obtida pela aplicação da Eq. (3.9).

Para o caso da Tabela 6.19, relacionada com a viga em caixão com duas juntas rebitadas de 105 rebites cada, é ainda efetuada uma comparação entre o modelo de elementos finitos construído seguindo a nova abordagem e o modelo de elementos finitos em que se considera a junta de ligação rígida.

Tabela 6.11 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos que representa a amostra 1 com duas linhas de cinco rebites (Figura 6.1a).

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica [Hz]	Diferença [%]
1	117,96	117,28	0,57
2	348,83	350,92	0,60
3	462,52	473,00	2,27
4	649,66	647,08	0,40
5	845,77	874,19	3,36
6	1117,82	1131,44	1,22
7	1470,28	1495,54	1,72
8	1626,33	1634,33	0,49
Diferença Relativa Percentual Média			1,33

Tabela 6.12 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos que representa a amostra 2 com três linhas de cinco rebites (Figura 6.1b).

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica [Hz]	Diferença [%]
1	127,71	124,85	2,24
2	368,00	371,44	0,94
3	497,62	495,97	0,33
4	697,41	683,62	1,98
5	853,44	876,14	2,66
6	1171,18	1186,21	1,28
7	1571,38	1559,26	0,77
8	1783,00	1747,82	1,97
Diferença Relativa Percentual Média			1,52

Tabela 6.13 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos que representa a amostra 3 com quatro linhas de cinco rebites (Figura 6.1c).

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica [Hz]	Diferença [%]
1	140,57	133,48	5,04
2	388,95	391,77	0,73
3	532,73	520,46	2,30
4	760,63	727,87	4,31
5	865,50	884,66	2,21
6	1229,10	1236,07	0,57
7	1676,13	1621,00	3,29
8	1976,92	1874,42	5,18
Diferença Relativa Percentual Média			2,95

Tabela 6.14 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos que representa a amostra 4 com cinco linhas de cinco rebites (Figura 6.1d).

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica [Hz]	Diferença [%]
1	157,57	143,95	8,64
2	412,30	414,76	0,60
3	576,27	552,80	4,07
4	844,42	786,19	6,90
5	888,03	907,05	2,14
6	1301,13	1290,63	0,81
7	1802,72	1684,32	6,57
8	1993,87	2024,14	1,52
Diferença Relativa Percentual Média			3,91

Tabela 6.15 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos que representa a amostra 5 com dez rebites em linha (Figura 6.2a).

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica [Hz]	Diferença [%]
1	118,52	114,72	3,20
2	238,38	231,30	2,97
3	337,95	334,26	1,09
4	465,97	452,82	2,82
5	636,51	621,19	2,41
6	801,05	786,65	1,80
7	1093,62	1076,35	1,58
8	1100,36	1088,57	1,07
Diferença Relativa Percentual Média			2,12

Tabela 6.16 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos que representa a amostra 6 com 20 rebites em linha (Figura 6.2b).

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica [Hz]	Diferença [%]
1	117,38	113,76	3,08
2	118,89	118,66	0,19
3	261,42	253,86	2,89
4	348,73	294,74	15,48
5	398,45	391,02	1,86
6	500,38	493,54	1,37
7	653,31	626,56	4,09
8	777,99	761,77	2,08
Diferença Relativa Percentual Média			3,88

Tabela 6.17 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos que representa a amostra 7 com 19 rebites em ziguezague (Figura 6.3a).

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica [Hz]	Diferença [%]
1	160,29	144,64	9,76
2	412,49	410,36	0,52
3	581,30	544,39	6,35
4	859,21	783,48	8,81
5	898,96	900,43	0,16
6	1314,59	1286,17	2,16
7	1821,68	1669,93	8,33
8	1973,28	2012,20	1,97
Diferença Relativa Percentual Média			4,76

Tabela 6.18 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos que representa a amostra 8 com 23 rebites em ziguezague (Figura 6.3b).

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica [Hz]	Diferença [%]
1	157,82	144,45	8,47
2	414,62	412,53	0,50
3	575,47	546,21	5,08
4	850,10	783,09	7,88
5	896,83	904,99	0,91
6	1308,41	1291,27	1,31
7	1809,18	1674,27	7,46
8	1983,69	2013,36	1,50
Diferença Relativa Percentual Média			4,14

Tabela 6.19 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos que representa a amostra 9 com 105 rebites em linha por cada face (Figura 6.4), e considerando o modelo de elementos finitos com ligação rígida (Figura 6.12b).

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica (Amostra 9) [Hz]	Diferença (Amostra 9) [%]	Frequência Numérica (Ligação Rígida) [Hz]	Diferença (Ligação Rígida) [%]
1	46,62	45,09	3,28	42,41	9,03
2	47,23	46,41	1,74	43,27	8,38
3	65,96	66,13	0,25	65,55	0,63
4	71,66	68,93	3,81	68,90	3,85
5	84,76	78,60	7,27	79,94	5,69
6	102,10	94,10	7,83	96,97	5,02
7	109,98	96,76	12,02	98,46	10,47
8	120,13	109,77	8,62	111,91	6,84
Diferença Relativa Percentual Média			5,60	6,24	

Tabela 6.20 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos que representa a amostra 10 com 53 rebites em linha por cada face (Figura 6.5).

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica [Hz]	Diferença [%]
1	46,46	45,17	2,78
2	46,90	46,50	0,84
3	66,61	66,12	0,74
4	71,75	68,97	3,88
5	84,66	78,70	7,05
6	101,27	94,30	6,89
7	109,46	96,99	11,40
8	120,34	110,09	8,52
Diferença Relativa Percentual Média			5,26

Tabela 6.21 – Comparação entre as 8 primeiras frequências naturais do modelo de referência/experimental e do modelo de elementos finitos que representa a amostra 11 com 27 rebites em linha por cada face (Figura 6.6).

Modo	Frequência de Referência [Hz]	Frequência Numérica [Hz]	Diferença [%]
1	46,44	45,19	2,69
2	46,69	46,53	0,34
3	65,29	63,86	2,18
4	70,47	66,87	5,11
5	83,21	76,73	7,79
6	100,07	91,86	8,20
7	108,59	95,11	12,41
8	118,37	107,60	9,10
Diferença Relativa Percentual Média			5,98

Analisando as Tabelas 6.11-6.21, verifica-se que os modelos numéricos de juntas rebitadas, construídos com base na nova abordagem desenvolvida, conseguem reproduzir com elevada aproximação o modelo experimental, onde se verifica uma correlação entre os valores das frequências naturais dos dois modelos de mais de 94% em todos os casos. Verifica-se que com o aumento de linhas de rebites na junta a diferença relativa percentual média entre os dois modelos aumenta ligeiramente, verificando-se também essa tendência para os casos em que a junta rebitada é em forma de ziguezague.

Na Tabela 6.19 pode-se observar que no geral o modelo de elementos finitos com ligação rígida afasta-se mais do modelo experimental, relativamente ao modelo de elementos finitos construído sob a nova abordagem. No entanto a diferença mais expressiva reside nos valores da primeira e segunda frequência natural, onde a diferença entre o modelo experimental e o modelo de elementos finitos construído pela nova abordagem é de 3,29% para a primeira e 1,74% para a segunda frequência natural, equanto se compararmos a diferença entre o modelo experimental e o modelo de elementos finitos com junta rígida, esta é de 9,03% para a primeira e 8,38% para a segunda frequência natural. Esta observação assume elevada importância na medida em

que os primeiros modos de vibração são os mais relevantes a ter em conta no projeto de sistemas estruturais.

Na Figura 6.17 e 6.18 são apresentadas os oito primeiros modos de vibração da viga em caixão em modelo de elementos finitos e do modelo experimental, respetivamente.

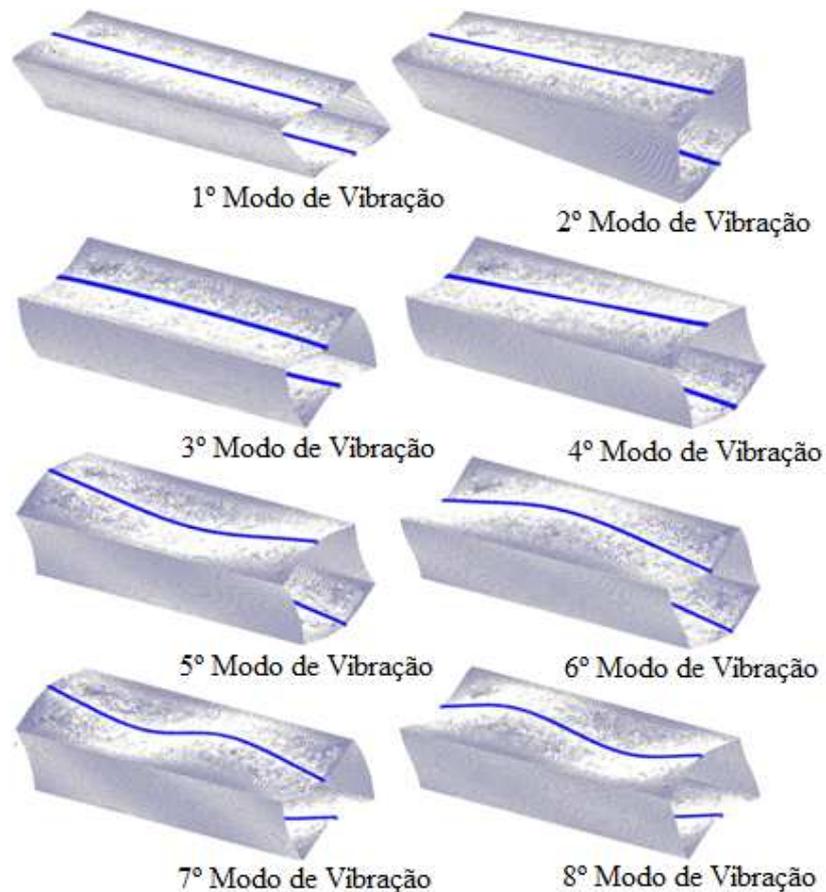


Figura 6.17 – Oito primeiros modos de vibração da viga em caixão em modelo de elementos finitos.

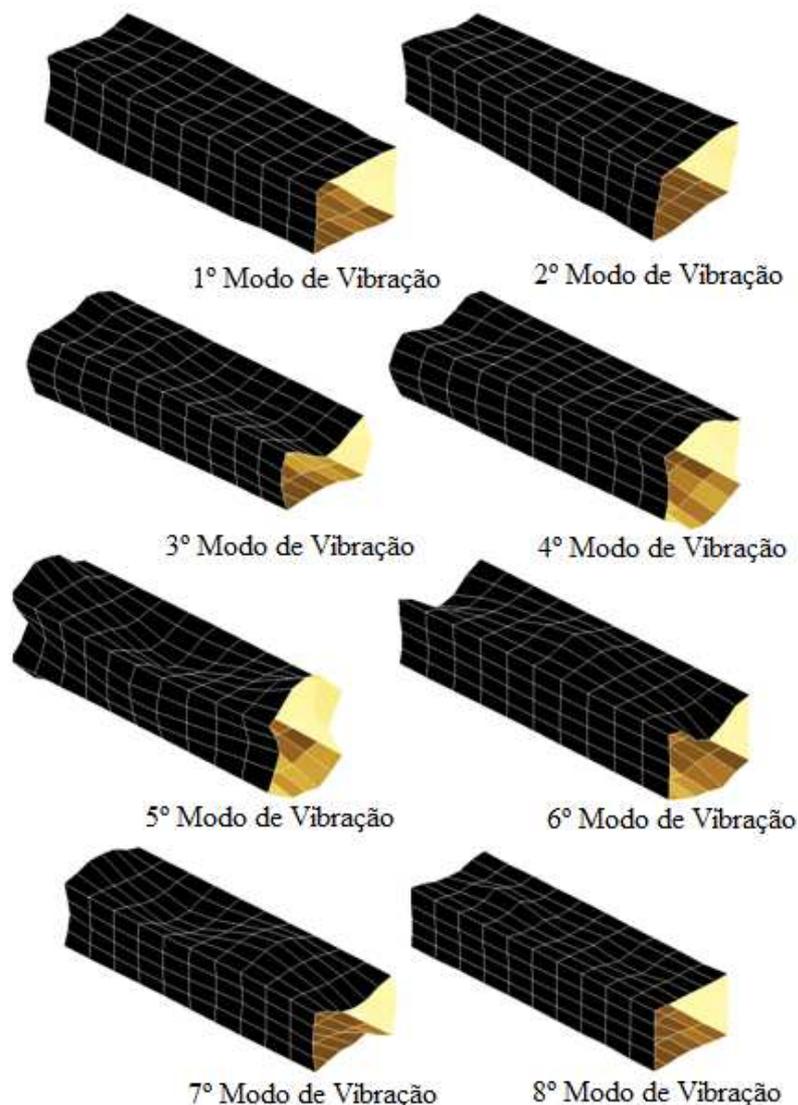


Figura 6.18 – Oito primeiros modos de vibração da viga em caixão obtidos experimentalmente.

Como se pode observar por comparação entre as Figuras 6.16 e 6.17, existe boa correlação entre os modos de vibração dos dois modelos, o que permite concluir que a aplicação da nova abordagem é fiável e robusta.

## 6.6 – Conclusões

Neste capítulo, é desenvolvido um modelo analítico assente numa equação que permite determinar o valor da constante de rigidez da mola  $k_e$  a atribuir aos elementos mola-amortecedor que simulam o rebite. Esta abordagem aplica-se a modelos de juntas rebitadas em que os rebites se encontram uniformemente distribuídos. A equação desenvolvida está relacionada com a área de material sujeita a tensões e deformações provocadas pela força de compressão a que os rebites ficam sujeitos depois de aplicados. Verifica-se que para valores de relação de área  $r$  inferiores a aproximadamente 0,105, a

influência entre os rebites não é significativa, podendo o valor da constante de rigidez da junta ser calculado em função da constante de rigidez individual de cada rebite. Nesses casos a área envolvida corresponde à secção transversal de um cilindro com o diâmetro  $d_a$ , definido no sub-capítulo 6.3. Quando os valores de relação de área  $r$  são superiores a 0,105, significa que os rebites exercem influência uns sobre os outros. Nesses casos, a área de material sujeito a tensões e deformações é dado pela Eq. (6.18) e o valor da constante de rigidez da junta é dada pela Eq. (6.24).

A nova abordagem é aplicada a vários casos de estudo para validação da mesma, entre eles uma viga em caixão formada pela união de duas partes em forma de “U”, e unidas entre si por duas juntas rebitadas com diferentes números de rebites. Verifica-se que é possível produzir modelos de elementos finitos de juntas rebitadas, cujo comportamento dinâmico é muito próximo ao dos modelos experimentais, observando-se uma correlação entre os valores das frequências naturais dos dois modelos de mais de 94% em todos os casos de estudo. Assim, é materializada uma nova abordagem para modelação de juntas rebitadas na ótica do projetista em análise dinâmica de estruturas.



# CAPÍTULO 7 – CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo apresentam-se o resumo das conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.

## 7.1 – Conclusões

Neste trabalho foram abordados os conceitos teóricos da dinâmica e vibrações. Abordaram-se os princípios inerentes à análise modal em modelos experimentais e também aplicada à simulação em modelos de elementos finitos. Fez-se uso das técnicas de melhoramento de modelos de elementos finitos segundo duas vertentes: o *updating* onde o objetivo é apenas garantir que o modelo de elementos finitos simplificado tenha um comportamento semelhante ao modelo de referência, e a modificação estrutural onde se pretende que o modelo a otimizar sofra alterações nos parâmetros dentro de uma gama de valores que seja possível de reproduzir fisicamente. Essas ferramentas foram usadas com sucesso na busca de um modelo de elementos finitos simplificado para representação de juntas rebitadas em análise dinâmica de estruturas. Consequentemente deste trabalho resultou também um modelo analítico para representar esse tipo de juntas. A seguir resumem-se as conclusões deste trabalho.

No sentido de melhorar um programa de melhoramento de modelos de elementos finitos já desenvolvido, foram aplicadas duas técnicas de otimização global estocásticas, fornecidas pela *toolbox* do MatLab<sup>®</sup> através dos *solvers* GlobalSearch e MultiStart. Foram também testados quatro tipos de algoritmos combinados com cada um dos *solvers* globais, o *active-set*, *interior-point*, *SQP*, e o *trust-region-reflective*, também fornecidos pelo MatLab<sup>®</sup>. Verifica-se que os *solvers* globais são capazes de trabalharem com um elevado número de pontos de partida, e por isso são mais eficientes na busca pelo melhor ótimo global, de que os *solvers* locais. O *solver* local implementado no programa original era o *fmincon*. Os dois *solvers* globais testados no programa de melhoramento de modelos de elementos finitos trabalham de forma diferente, pelo que as performances obtidas com cada um deles também são diferentes, não no que diz respeito à melhor solução encontrada, mas sim no tempo computacional gasto para a encontrar. A esse nível, verificou-se que o GlobalSearch é mais eficaz que o MultiStart. No que diz respeito aos algoritmos testados em conjunto com os *solvers* globais verificou-se que os algoritmos *active-set*, *SQP* e *trust-region-reflective* possibilitam chegar ao mesmo valor mínimo da função objetivo, no entanto os

algoritmos *active-set* e *trust-region-reflective* são mais rápidos a atingir a melhor solução do que o SQP, revelando serem a melhor opção em conjunto com o solver *GlobalSearch*.

Para além de dotar o programa de melhoramento de modelos de elementos finitos com um otimizador de procura global, outra contribuição foi dada no sentido de o tornar mais versátil. Assim, uma nova metodologia sequencial de duas etapas para modificação estrutural e *updating* de modelos de elementos finitos foi desenvolvida. Este método é suportado por uma função multi-objetivo desenvolvida para quantificar a correlação entre o modelo de referência e o modelo de elementos finitos a melhorar. O novo método está dividido em duas etapas de otimização. Na primeira etapa o modelo numérico é otimizado usando informação acerca das características geométricas e/ou resposta estática. Na segunda etapa do processo o modelo numérico é otimizado usando informação acerca da resposta modal. Três exemplos são aplicados para testar a robustez do método desenvolvido. No primeiro e segundo exemplo é demonstrado que o novo método é também capaz de lidar com modelos que possuem pares de modos não correlacionados, onde o modelo numérico difere significativamente a nível geométrico do modelo de referência. É mostrado que após a aplicação da primeira etapa que os dois modelos possuem todos os modos de vibração correlacionados, e assim a segunda etapa, ou seja, a etapa de *updating* pode ser aplicada. No segundo exemplo é utilizado o chassis de um carro de rally todo o terreno como modelo a otimizar. A metodologia desenvolvida é aplicada, com sucesso, para melhorar o comportamento estático e dinâmico do chassis, com 911 variáveis para otimizar. A utilização de um número muito elevado de variáveis não impede que seja conseguido um melhoramento no comportamento da estrutura, o que atesta a aplicabilidade do método a casos reais e complexos.

Recorrendo ao programa de melhoramento de modelos de elementos finitos melhorado, faz-se uso dessa ferramenta para desenvolver modelos de elementos finitos simplificados capazes de representar juntas rebitadas em análise dinâmica de estruturas. Vários modelos de elementos simplificados de juntas rebitadas são estudados e avaliados. São construídos 72 casos diferentes de juntas rebitadas, modelando-as em elementos finitos: quatro juntas rebitadas com diferentes quantidades de rebites (1, 2, 3 e 5), combinado com seis diferentes quantidades de elementos mola-amortecedor (4, 6, 8, 12, 16 e 20) por cada tipo de diâmetro de rebite (3,2 mm, 4,0 mm e 4,8 mm). Pretendeu-se também com esse estudo encontrar os parâmetros a atribuir aos elementos mola-amortecedor que representam o rebite, como é o caso da constante de rigidez da mola. É comprovado que, no tipo de material usado, o amortecimento pode ser desprezado. A avaliação é efetuada com base na comparação entre as características modais desses modelos, após aplicado o processo de *updating*, e os

respetivos modelos experimentais. Com base nos resultados obtidos conclui-se que as juntas rebitadas com oito elementos mola-amortecedor por rebite apresentam a diferença relativa percentual média (DRPM) mais baixa entre o modelo de elementos finitos e o modelo experimental. A metodologia de melhoramento de modelos de elementos finitos pôde ser aplicada com sucesso para obtenção da constante de rigidez das molas do elemento mola-amortecedor que compõem o rebite para cada caso de estudo. Para cada caso foi obtida, como seria de esperar, uma constante de rigidez diferente. O modelo proposto, com oito elementos mola-amortecedor por rebite, permite também boa eficiência computacional devido à simplicidade do tipo de elementos usados.

Com base nos valores das constantes de rigidez das juntas rebitadas estudadas, é quantificada a área de material afetado, ou seja, a área de distribuição de tensões, devido aos carregamentos de compressão provocados pelos rebites no material das peças unidas. Foi desenvolvida uma equação que permite determinar a área de material afetado em função do número do rebites, do diâmetro do rebite e da dimensão da junta, e conseqüentemente é deduzida a equação geral para determinar a constante de rigidez dos elementos mola-amortecedor. Esta nova abordagem aplica-se a modelos de juntas rebitadas em que os rebites se encontram uniformemente distribuídos. A equação desenvolvida está relacionada com a área de material sujeita a tensões e deformações provocadas pela força de compressão a que os rebites ficam sujeitos depois de aplicados. Verifica-se que para valores de relação de área  $r$  inferiores a aproximadamente 0,105, a influência entre os rebites não é significativa, podendo o valor da constante rigidez da junta ser calculado em função da constante de rigidez individual de cada rebite. Quando os valores de relação de área  $r$  são superiores a 0,105, significa que os rebites exercem influência uns sobre os outros. Nesses casos, aplica-se a equação desenvolvida para cálculo da constant de rigidez da junta.

A nova abordagem é aplicada a vários casos de estudo para validação da mesma, entre eles uma viga em caixão formada pela união de duas partes em forma de “U”, e unidas entre si por duas juntas rebitadas com diferentes números de rebites. Verifica-se que é possível produzir modelos de elementos finitos de juntas rebitadas, cujo comportamento dinâmico é muito próximo ao dos modelos experimentais, observando-se uma correlação entre os valores das frequências naturais dos dois modelos de mais de 94% em todos os casos de estudo. Assim, é materializada uma nova abordagem para modelação de juntas rebitadas na ótica do projetista em análise dinâmica de estruturas.

Com este trabalho foram criadas metodologias e desenvolvidas ferramentas de cálculo que contribuem para que projetos de grandes estruturas sejam menos morosos, com recurso à

modelação bidimensional (2D), e possam ser otimizados. Assim, este trabalho tem particular interesse para os *designers* na modelação de juntas rebitadas em modelos de elementos finitos para análise dinâmica de estruturas, e em geral para toda a comunidade científica da mecânica estrutural.

## 7.2 – Sugestões para Trabalhos Futuros

Foi implementado no programa de melhoramento de modelos de elementos finitos um otimizador global estocástico, presente na *toolbox* do MatLab®, o GlobalSearch, constituindo uma evolução face ao *solver* local originalmente implementado. No entanto existem outros tipos de *solvers* globais estocásticos, fora da *toolbox* do MatLab®, que poderiam também ser testados no programa de melhoramento de elementos finitos. Um trabalho futuro compreenderia a adaptação de outros *solvers* para linguagem MatLab® e aplica-los no programa de melhoramento de modelos de elementos finitos.

Foi desenvolvido um modelo de elementos simplificado para representação de juntas rebitadas em análise dinâmica de estruturas. Como seguimento deste trabalho sugere-se o aperfeiçoamento do modelo desenvolvido de modo que seja válido também para análise estática.

Outro caminho seria verificar se a equação desenvolvida para o cálculo de rigidez das juntas rebitadas é válida para outro tipo de juntas, como a aparafusada, soldada e colada. No caso de não se verificar, uma outra possibilidade seria desenvolver equações semelhantes para esse tipo de juntas.

Neste trabalho apenas foram usadas amostras cujo material é o alumínio. Apesar do modelo em elementos finitos e o modelo analítico, para representar juntas rebitadas, responder eficientemente para esse tipo de material, seria interessante fazer a sua validação para outro tipo de materiais, como o aço, os compósitos ou os poliméricos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Achtziger W., Stolpe M., Truss Topology Optimization with Discrete Design Variables - Guaranteed Global Optimality and Benchmark Examples, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 34, 1-20, 2007.

Adrian T., Daniel V., Idealization of Riveted Joints, Degree Project in Machine Engineer Program, Institution of Applied mechanics Department of Dynamics, Chalmers University College Gothenburg, Sweden, 2012.

Ahmadian H., Mottershead J., Friswell M., Joint Modelling for Finite Element Model Updating. In: *Proceedings of IMAC 1996, the 14th International Modal Analysis Conference*, 591–596, 1996.

Ahmadian H., Mottershead J. E., James S., Friswell M., Reece C. A., Modelling and Updating of Large Surface-to-Surface Joints in the AWE-MACE Structure, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20 (4), 868–880, 2006.

Ameri E., Aghdam M. M., Shakeri M., Global Optimization of Laminated Cylindrical Panels Based on Fundamental Natural Frequency, *Composite Structures*, 94, 2697–2705, 2012.

Ansys, ANSYS Mechanical User's Guide, Release 15.0, ANSYS, Inc., Pennsylvania, 2013.

Argyris J. H., Kelsey S., Energy theorems and structural analysis: A Generalised Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non-Linear Stress-Strain Relations, Plenum Publishing Corporation, United States of America, 1968.

Arora V., Singh S. P., Kundra T. K., Damped FE Model Updating using Complex Updating Parameters: Its use for Dynamic Design, *Journal of Sound and Vibration*, 324, 350-364, 2009.

Atre A., A Finite Element and Experimental Investigation on the Fatigue of Riveted Lap Joints in Aircraft Applications, A Dissertation Presented to The Academic Faculty, Georgia Institute of Technology, 2006.

Auvinen P., Makela M. M., Makinen J., Structural Optimization of Forest Machines with Hybridized Nonsmooth and Global Methods, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 23, 382–389, 2002.

Azevedo A. F. M., Método dos Elementos Finitos, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003.

Bakir P. G., Reynders E., De Roeck, G., An Improved Finite Element Model Updating Method by the Global Optimization Technique Coupled Local Minimizers, *Computers and Structures*, 86, 1339–1352, 2008.

Baruch M., Optimal Correction of Mass and Stiffness Matrices using Measured Modes, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 20, 1623–1626, 1982.

Beards C. F., *Structural Vibration: Analysis and Damping*, Arnold, London, 1996.

Berman A., Mass Matrix Correction using an Incomplete Set of Measured Modes, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 17, 1147–1148, 1979.

Berman A., Nagy E. J., Improvement of a Large Analytical Model using Test Data, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 21 (8), 1168–1173, 1983.

Birbil S. I., *Stochastic Global Optimization Techniques*, Faculty of North Carolina State University of Raleigh, 2002.

Bograd S., Reuss P., Schmidt A., Gaul L., Mayer M., Modeling the Dynamics of Mechanical Joints, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(8), 2801–2826, 2011.

Brown K. H., Morrow C., Durbin S. e Baca A., *Guideline for Bolted Joint Design and Analysis: Version 1.0*, Sandia National Laboratories Albuquerque, California, 2008.

Budynas R. G. e Nisbett J. K., *Shigley's Mechanical Engineering Design*, 9th Edition, McGraw-Hill, 2011.

Chen N., Luo H., Wan M., Chen J-L, *Experimental and Numerical Studies on Failure Modes of Riveted Joints Under Tensile Load*, *Journal of Materials Processing Technology*, 214(10), 2049–2058, 2014.

Chen C-S., Wawrzynek P. A., Ingraffea A. R., *Crack Growth Simulation and Residual Strength Prediction in Airplane Fuselages*, NASA/CR-1999-209115, Hampton (VA): NASA Langley Research Center, 1999.

Clough R. W., *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*, *Proceedings, Second ASCE Conference on Electronic Computation*, Pittsburg, 345-378, 1960.

Clough R. W., Penzien J., *Dynamics of Structures*, Computers & Structures, Inc., Berkley, United States of America, 1995.

Collins J. D., Hart G. C., Hasselman T. K., Kennedy B., *Statistical identification of structures*, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 12, 185-190, 1974.

Cook R. D., Malkus D. S., Plesha M. E., Witt R. J., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4<sup>th</sup> ed., John Wiley & Sons Inc., United States of America, 2002.

Cope D. A., Lacy T. E., *Modeling Mechanical Fasteners in Lap Joints for Stress Intensity Determination*, In: *Proceedings of the 4th Joint DoD/FAA/NASA Conference on Aging Aircraft*, St. Louis, Missouri, 2000.

Correia V. F., *Vibrações Mecânicas: Textos de Apoio*, Escola Superior Náutica Infante D. Henrique, 2002.

Cossolino L. C., Pereira A. H. A., Amortecimento: classificação e métodos de determinação, Informativo Técnico-Científico ITC04-Amortecimento/ATCP, São Carlos, Brasil, 2010.

Courant R., Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations, Bulletin of American Mathematical Society, 49, 1-23, 1943.

Cunha H., Ambrósio J., Melhoramento de Modelos de Elementos Finitos com Aplicação à Dinâmica Estrutural de Veículos Ferroviários, Technical Report IDMEC/CPM-97/00, IDMEC, Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 1997.

Da Silva L. F. M., Campilho R. D. S. G., Advances in Numerical Modelling of Adhesive Joints, SpringerBriefs in Computational Mechanics, DOI: 10.1007/978-3-642-23608-2\_1, 2012.

De Moura Branco C. A. G., Mecânica dos Materiais, 3ª Edição, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1998.

Delgado R., Arêde A., Dinâmica de Estruturas, Apontamentos da disciplina de Dinâmica de Estruturas da Licenciatura em Engenharia Civil - Secção de Estruturas, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2000.

Demina N. I., Volkov A. K., The Influence of the Interference of a Rivet on the Mechanical Properties of D16 Alloy Sheet in Biaxial Tension, Cambridge Science Abstracts, Aluminum Industry Abstracts, 21, 407-409, 1989.

Dourado M. D., Desenvolvimento de Modelos de Elementos Finitos Reduzidos de Estruturas para Aplicação a Modelos de Veículos Automóveis, Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade do Minho, Guimarães, 2009.

Du Y., Shi L., Effect of Vibration Fatigue on Modal Properties of Single Lap Adhesive Joints, *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 53, 72-79, 2014.

Duque O. A-S., Senin A. R., Stenti A., De Munck M., Aparicio F., A Methodology for the Choice of the Initial Conditions in the Model Updating of Welded Joints using the Fuzzy Finite Element Method, *Computers & Structures*, 85 (19–20), 1534–1546, 2007.

Eriksson P., Arora, J. S., A comparison of Global Optimization Algorithms Applied to a Ride Comfort Optimization Problem, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 24, 157–167, 2002.

Esmaeili F., Rahmani A., Barzegar S., Afkar A., Prediction of Fatigue Life for Multi-Spot Welded Joints with Different Arrangements Using Different Multiaxial Fatigue Criteria, *Materials & Design*, 72(5), 21-30, 2015.

Eurocódigos, Eurocódigo 9 – Proyecto de Estructuras de Aluminio, Parte 1-1: Regras Generales y Reglas para Edificación, Asociación Española de Normalización y Certificación, 2000.

Ewins D. J., *Modal Testing: Theory, Practice and Application*, 2<sup>nd</sup> edition, Research Studies Press Ltd, Hertfordshire, England, 2000.

Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, Conceitos Básicos e Características Gerais de Instrumentos. Disponível em: [http://www.fem.unicamp.br/~instmed/CGI\\_temp.htm](http://www.fem.unicamp.br/~instmed/CGI_temp.htm).

Ferreira A. F., Métodos de Otimização Global, Relatório de Estágio da Licenciatura em Matemática Aplicada Ramo Investigação Operacional, Universidade do Minho, Braga, 2007.

Fertis, D. G., *Dynamics and Vibration of Structures*, Robert E. Krieger, Malabar, Florida, 1984.

Fitzgerald T. J., Cohen J. B., Residual Stresses in and AroundR in Clad Aluminum alloy Plates, *Materials Science and Engineering A*, 188(1-2), 51-58, 1994.

Friswell M. I., Mottershead J. E., *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Swansea, 1995.

Fritzen C-P., Identification of mass, damping and stiffness matrices of mechanical systems, *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 108 (1), 9-17, 1986.

Fung C. P., Smart J., An Experimental and Numerical Analysis of Riveted Single Lap Joints, *Journal of Aerospace Engineering*, 208, 70–79, 1994.

Xianyue Gang X., Chai S., Allemang R. J., Li L., A New Iterative Model Updating Method using Incomplete Frequency Response Function Data, *Journal of Sound and Vibration*, 333 (29), 2443–2453, 2014.

Gant F., Rouch Ph., Louf F., Champaney L., Definition and Updating of Simplified Models of Joint Stiffness, *International Journal of Solids and Structures*, 48(5), 775-784, 2011.

Gant F., Rouch Ph., Louf F., Champaney L., Updating of uncertain joint models using the Lack-Of-Knowledge theory, *Computers & Structures*, 128, 128–135, 2013.

Gould H. H., Mikic B. B., Areas of Contact and Pressure Distribution in Bolted Joints, *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, 94, 864–870, 1972.

Grimsmo E. L., Clausen A. H., Langseth M., Aalberg A., An Experimental Study of Static and Dynamic Behaviour of Bolted End-Plate Joints of Steel, *International Journal of Impact Engineering*, 85, 132–145, 2015.

Harris C. E., Piascik R. S., Newman Jr J. C., A Practical Engineering Approach to Predicting Fatigue Crack Growth in Riveted Lap Joints, *NASA/TM-2000-210106*, 2000.

He C., Huang C., Liu Y., Wang Q., Fatigue Damage Evaluation of Low-Alloy Steel Welded Joints in Fusion Zone and Heat Affected Zone Based on Frequency Response Changes in Gigacycle Fatigue, *International Journal of Fatigue*, 61, 297–303, 2014.

He X., Numerical and Experimental Investigations of the Dynamic Response of Bonded Beams with a Single-Lap Joint, *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 37, Pages 79–85, 2012.

He X., Oyadiji S. O., Influence of Adhesive Characteristics on the Transverse Free Vibration of Single Lap-Jointed Cantilevered Beams, *Journal of Materials Processing Technology*, 119(1–3), 366–373, 2001.

He X. C., Pearson I., Young K. W., Three Dimensional Finite Element Analysis of Transverse Free Vibration of Self-Pierce Riveting Beam, *Key Engineering Materials*, 344, 647-654, 2007.

Hrennikoff A., Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method, *Journal of Applied Mechanics*, 8, 169-175, 1941.

Horst R., Pardalos P., *Handbook of Global Optimization*, Kluwer, 1995.

Horst R., Tuy H., *Global Optimization Deterministic Approaches*, Springer, 1996.

Horton C. B., Gurgenci H., Veidt M., Friswell M. I., Finite-Element Model Updating of the Welded Joints in a Tubular *h*-frame. In: *Proceedings of IMAC 1999, the 17th International Modal Analysis Conference*, Orlando, USA, 1556–1562, 1999.

Huang W., Huang T-J., Garbatov Y., Soares C. G., Fatigue Reliability Assessment of Riveted Lap Joint of Aircraft Structures, *International Journal of Fatigue*, 43, 54-61, 2012.

Imam B. M., Righiniotis D. T., Chryssanthopoulos M. K., Numerical Modelling of Riveted Railway Bridge Connections for Fatigue Evaluation, *Engineering Structures*, 29(11), 3071–3081, 2007.

Imregun M., Visser W. J., A Review of Model Updating Techniques, *The Shock and Vibration Digest*, 23, 141–162, 1991.

Ireman T., Three-dimensional Stress Analysis of Bolted Single-Lap Composite Joints, *Composite Structures*, 43(3), 195–216, 1998.

Izumi S., Yokoyama T., Iwasaki A., Sakai S., Three-dimensional Finite Element Analysis of Tightening and Loosening Mechanism of Threaded Fastener, *Engineering Failure Analysis*, 12(4), 604–615, 2005.

Jazar R. N., *Vehicle Dynamics: Theory and Application*, Springer, New York, 2008.

Jensen H. A., Millas E., Kusanovic D., Papadimitriou C., Model-Reduction Techniques for Bayesian Finite Element Model Updating using Dynamic Response Data, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (279), 301–324, 2014.

Jaishi B., Kim H. J., Kim M. K., Ren W. X., Lee S. H., Finite Element Model Updating of Concrete-Filled Steel Tubular Arch Bridge under Operational Condition using Modal Flexibility, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21 (6), 2406–2426, 2007.

Jin S-S., Cho S., Jung H-J., Lee J-J., Yun C-B., A New Multi-Objective Approach to Finite Element Model Updating, *Journal of Sound and Vibration*, 333 (11), 2323–2338, 2014.

Kabe A. M., Stiffness Matrix Adjustment using Mode Data, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 23, 1431–1436, 1985.

Kaloutsey A. E. H., Correção de Modelos Elementos Finitos – Estudo de um Conjunto Rotor-Gerador, *Dissertação de Mestrado*, Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

Kapidžić Z., Nilsson L., Ansell H., Finite Element Modeling of Mechanically Fastened Composite-Aluminum Joints in Aircraft Structures, *Composite Structures*, 109, 198-210, 2014.

Karaoglu C., Kuralay N. S., Stress Analysis of a Truck Chassis With Riveted Joints, *Finite Elements in Analysis and Design*, 38(12), 1115–1130, 2002.

Kaya A., Tekelioğlu M. S., Findik F., Effects of Various Parameters on Dynamic Characteristics in Adhesively Bonded Joints, *Materials Letters*, 58(27–28), 3451–3456, 2004.

Keller D., Global Laminate Optimization on Geometrically Partitioned Shell Structures, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43, 353–368, 2011.

Kim J., Yoon J-C., Kang B-S., Finite Element Analysis and Modeling of Structure with Bolted Joints, *Applied Mathematical Modelling*, 31(5), 895-911, 2007.

Ko T. C., Lin C. C., Chu R. C., Vibration of bonded laminated lap-joint plates using adhesive interface elements. *Journal of Sound and Vibrations*, 184(4), 567-583, 1995.

Kumar D. V. T. G. P., Naarayan S. S., Sundaram S. K., Chandra S., Further Numerical and Experimental Failure Studies on Single and Multi-Row Riveted Lap Joints, *Engineering Failure Analysis*, 20, 9-24, 2012.

Kwon Y. D., Goo N. S., Kim S. Y., Cho M. H., Finite Element Modeling for Static and Dynamic Analysis of Structures with Bolted Joints, *Key Engineering Materials*, 26, 667–676, 2002.

Langrand B., Deletombe E., Markiewicz E., Drazetic P., Riveted Joint Modeling for Analysis of Airframe Crashworthiness, *Finite Elements in Analysis and Design*, 48, 21-44, 2001.

Lee E-T., Eun H-C., Correction of Stiffness and Mass Matrices utilizing Simulated Measured Modal Data, *Applied Mathematical Modelling*, 33 (6), 2723–2729, 2009.

Lee E-T., Rahmatalla S., Eun H-C., Estimation of Parameter Matrices Based on Measured Data, *Applied Mathematical Modelling*, 35 (10), 4816–4823, 2011.

Lee S-Y., Ko K-H., Le J. M., Analysis of Dynamic Characteristics of Structural Joints Using Stiffness Influence Coefficients, *KSME International Journal*, 14(12), 1319-1327, 2000.

Levin R., Lieven N., Dynamic Finite Element Model Updating Using Simulated Annealing and Genetic Algorithms, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12, 91–120, 1998.

Lexikon, Dicionário Online Caldas Aulete. Disponível em: <http://www.aulete.com.br/>. Acesso em 28 de junho de 2015.

Lin C.-Y., Chen W.-T., Stochastic Multistage Algorithms for Multimodal Structural Optimization, *Computers and Structures*, 24, 233–241, 2000.

Lin R. M., Ewins D. J., Analytical Model Improvement using Frequency Response Functions, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 8 (4), 437-458, 1994.

Lin C-C, Ko T-C., Free Vibration of Bonded Plates, *Computers & Structures*, 64(1-4), 441-452, 1997.

Linder C., *Materiais de Construção Mecânica: Seleção, Uso e Solução*, Disponível em: <http://carroceria.blogspot.com.br/>. Acesso em 08 de setembro de 2015.

Liu G., Liu Y., Huang Y., A Novel Structural Stress Approach for Multiaxial Fatigue Strength Assessment of Welded Joints, *International Journal of Fatigue*, 63, 171-182, 2014.

Liu H., Yuan Y., New Model Updating Method for Damped Structural Systems, *Computers and Mathematics with Applications*, 57 (5), 685-690, 2009.

Lucor D., Enaux C., Jourden H. e Sagaut, P., Stochastic Design Optimization: Application to Reacting Flows, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, 5047–5062, 2007.

Maia N. M. M., Silva J. M. M., *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, Hertfordshire, Research Studies Press Ltd, 1997.

Magalhães F. M. R. L., Identificação Modal Estocástica para Validação Experimental de Modelos Numéricos, Tese de Mestrado em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2012.

Marques F., Moutinho C., Magalhães F., Caetano E., Cunha Á., Analysis of Dynamic and Fatigue Effects in an Old Metallic Riveted Bridge, *Journal of Constructional Steel Research*, 99, 85–101, 2014.

MathWorks, *Global Optimization Toolbox: User's Guide R2011b*, The MathWorksInc., Massachusetts, 2011.

Meireles J. F. B., Análise Dinâmica de Estruturas por Modelos de Elementos Finitos Identificados Experimentalmente, Tese de Doutoramento em Engenharia Mecânica, Escola de Engenharia da Universidade do Minho, Guimarães, Portugal, 2007.

Modak S. V., Model Updating using Uncorrelated Modes, *Journal of Sound and Vibration*, 333 (11), 2297–2322, 2014.

Mottershead J. E., Brandon J. A., Friswell M. I., Ng GHT, Experience in Mechanical Joint Model Updating. In: *Proceedings of the 19th International Seminar on Modal Analysis*, K.U.L., Leuven, Belgium, 1994.

Mottershead, J. E., Friswell, M. I., Model Updating in Structural Dynamics: A Survey, *Journal of Sound and Vibrations*, 167, 347–375, 1993.

Moutinho C. M. R., *Controlo de Vibrações em Estruturas de Engenharia Civil*, Tese de Mestrado em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2007.

Muller R. P., *An Experimental and Analytical Investigation on the Fatigue Behavior of Fuselage Riveted Lap Joints*, PhD Thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 1995.

Naarayan S. S., Kumar D.V. T. G. P., Chandra S., *Implication of Unequal Rivet Load Distribution in the Failures and Damage Tolerant Design of Metal and Composite Civil Aircraft Riveted Lap Joints*, *Engineering Failure Analysis*, 16, 2255-2273, 2009.

Nepershin R. I., Knigin V. V., *Interferences and Residual Stresses in Riveted Joints*, *Journal of Machinery, Manufacture and Reliability*, 5, 47-51, 1992.

Nocedal J., Wright S. J., *Numerical Optimization. Series in Operations Research*, Springer Verlag, Heidelberg, 1999.

Oldfield M., Ouyang H., J. E. Mottershead, *Simplified Models of Bolted Joints under Harmonic Loading*, *Computers & Structures*, 84(1-2), 25-33, 2005.

Pal K., Cronin D.L., *Static and Dynamic Characteristics of Spot Welded Sheet Metal Beams*, *Journal of Engineering for Industry*, 117, 316-322, 1995.

Pradhan S., Modak S. V., *Normal Response Function Method for Mass and Stiffness Matrix Updating using Complex FRFs*, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 32, 232-250, 2012.

Proença J. M., Azevedo J. J., *Identificação Dinâmica de Sistemas Estruturais – Conceitos gerais*, *Disciplina de Dinâmica de Estruturas do Mestrado em Engenharia de Estruturas*, IST, Lisboa, 1999.

Ryzhova T. B., *Estimation of the Reliability of Ultrasonic Quality Control of Riveted Joints with Clearance*, *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 30, 418-421, 1994.

Schlune H., Plos M., Gylltoft K., Improved Bridge Evaluation through Finite Element Model Updating using Static and Dynamic Measurements”, Engineering Structures, 31 (7), 1477-1485, 2009.

Seshadri B. R., Newman Jr J. C., Residual Strength Analyses of Riveted Lap-Splice Joints, NASA/TM-2000-209856, Washington (DC), National Aeronautics and Space Administration, 2000.

Shang D-G., Measurement of Fatigue Damage Based on the Natural Frequency for Spot-Welded Joints, Materials & Design, 30(4), 1008–1013, 2009.

Shang D-G., Barkey M. E., Wang Y., Lim T. C., Effect of Fatigue Damage on Dynamic Response Frequency for Spot-Welded Joints, International Journal of Fatigue, 25(4), 311–316, 2003.

Shanghai Metal Corporation, Pop Rivets. Disponível em: [http://www.smc01.com/Pop\\_rivets--pds453.html](http://www.smc01.com/Pop_rivets--pds453.html).

SENAI, Módulos Especiais Mecânica-Elementos de Máquinas 1, Escola SENAI Hessel Horácio Cherkassky, 2000.

Sinha J. K., Rao A. R., Sinha R. K., Realistic Seismic Qualification Using the Updated Finite Element Model for In-Core Components of Reactors, Nuclear Engineering and Design, 236 (3), 232-237, 2006.

Skorupa M., Machniewicz T., Skorupa A., Korbel A., Fatigue Strength Reduction Factors at Rivet Holes for Aircraft Fuselage Lap Joints, 80, 417–425, 2015.

Soeiro N. S., Análise Modal Experimental, Disciplina de Vibrações e Acústica do Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2001.

Sonmez, F. O., Shape Optimization of 2D Structures Using Simulated Annealing, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196, 3279-3299, 2007.

Stolpe M., Global Optimization of Minimum Weight Truss Topology Problems with Stress, Displacement, and Local Buckling Constraints using Branch-and-Bound, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 61, 1270–1309, 2004.

Sprott D. A., Gauss's Contributions to Statistics, *Historia Mathematica*, 5, 183-203, 1978.

Swift T., Fracture Analysis of Stiffened Structures, In: *Damage Tolerance of Metallic Structures: Analysis Methods and Application*, ASTM STP 842, 69-107, Philadelphia, 1984.

Teughels A., De Roeck G., Suykens J. A. K., Global Optimization by Coupled Local Minimizers and its Application to FE Model Updating, *Computers and Structures*, 81, 2337–2351, 2003.

Törn A., Zilinskas A., *Global Optimization*, Springer-Verlag, 1989.

Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C., Topp L. J., Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23, 805-823, 1956.

Venanzi I., Materazzi, A. L., Multi-objective Optimization of Wind-Excited Structures *Engineering Structures*, 23, 983-990, 2007.

Wang Y., Lim T. C., An Experimental and Computational Study of the Dynamic Characteristics of Spot-Welded Sheet Metal Structures Spot Welding and Welded Joint Failure Processes, *SAE Technical Publication*, 1621, 85–93, 2001.

Wang J., Sas P., Joint Models and their Parameters for FE Dynamic Analysis. In: *Proceedings of the 15th International Seminar on Modal Analysis*, K.U.L., Leuven, Belgium, 1990.

Wei F. S., Stiffness Matrix Correction from Incomplete Test Data, *AIAA J.*, 18, 1274–1275, 1980.

Wei F. S., Structural Dynamic Model Improvement Using Vibration Test Data, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 28, 175–177, 1990.

Wileman J., Choudhury M., Green I., Computation of Member Stiffness in Bolted Connections, *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, 113, 432–437, 1991.

Wu J. R., Li Q. S., Finite Element Model Updating for a High-Rise Structure Based on Ambient Vibration Measurements, *Engineering Structures*, 26 (7), 979–990, 2004.

Xiong Y., Analytical and Finite Element Modelling of Riveted Lap Joints in Aircraft Structure, *The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 37(1), 93-99, 1999.

Xiong Y, Bedair O. K., Analytical and Finite Element Modeling of Riveted Lap Joints in Aircraft Structure, In: *39th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Long Beach, 1998.

Xu S., Deng X., An Evaluation of Simplified Finite Element Models for Spot-Welded Joints, *Finite Elements in Analysis and Design*, 40, 1175–1194, 2004.

Yarkovets A. I., Sirotkin O. S., Firsov V. V., Kisilev N. M., Processes for Ensuring Long Life of Riveted and Bolted Joints in Aircraft Structures, *Mashinostroyeniye*, Moscow, 1987.

Yuan Y., Liu H., An Iterative Updating Method for Damped Structural Systems using Symmetric Eigenstructure Assignment, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 256, 268–277, 2014.

Zhang K., Cheng H., Li Y., Riveting Process Modeling and Simulating for Deformation Analysis of Aircraft's Thin-walled Sheet-metal Parts, *Chinese Journal of Aeronautics*, 24 (3), 369-377, 2011.

Zhou Y., Nezhad H. Y., Hou C., Wan X., McCarthy C. T., McCarthy M. A., A Three Dimensional Implicit Finite Element Damage Model and its Application to Single-Lap Multi-Bolt Composite Joints With Variable Clearance, *Composite Structures*, 131, 1060-1072, 2015.

Zimmerman D. C., Widengren M., Correcting Finite Element Models Using a Symmetric Eigenstructure Assignment Technique, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 28, 1670–1676, 1990.

Zivanovic S., Pavic A., Reynolds P., Finite Element Modeling and Updating of a Lively Footbridge: The Complete Process, *Journal of Sound and Vibration*, 30, 126-145, 2007.

## **PUBLICAÇÕES**

Dourado M., Meireles J., Obtenção de Um Modelo de Elementos Finitos Simplificado para Representação de Juntas Rebitadas em Análise Dinâmica de Estruturas usando Uma Ferramenta de *Updating* / Obtaining a Simplified Finite Element Model for Riveted Lap Joints in Structural Dynamics Analysis using a Updating Tool, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, 2015, DOI 10.1016/j.rimni.2015.04.002.

Dourado M., Meireles J., A Simplified Finite Element Riveted Lap Joint Model in Structural Dynamic Analysis, Advanced Materials Research, 1016, pp. 185-191, 2014.

Dourado M., Meireles J., Rocha A. M. A. C., A Global Optimization Methodology Applied to Structural Dynamic Updating, Lecture Notes in Computer Science, 8580, pp. 195-210, 2014.

Dourado M., Soares D., Barbosa J., Pinho A. M., Meireles J., Branco P., Ribeiro C., Rei C., A Comparative Study of Fatigue Behaviour of MAG and Laser Welded Components Using Reliability Analysis, Materials Science and Engineering: A, 606, pp. 31-39, 2014.

Dourado M., Meireles J., Rocha A. M. A. C., Structural Dynamic Updating Using a Global Optimization Methodology, IOMAC'13, 5<sup>th</sup> International Operational Modal Analysis Conference, pp. 1-8, Guimarães, Portugal, 13 a 15 maio, 2013.

Dourado M., Meireles J., Analytical and Numerical Modal Analysis of an Automobile Rear Torsion Beam Suspension, ICEM15, 15<sup>th</sup> International Conference on Experimental Mechanics, pp. 1-13, Porto, Portugal, 22 a 27 julho, 2012.

### **Em Revisão**

Dourado M., Meireles J., Brito I., An Analytical Model to Represent Simplified Finite Element Models of Riveted Lap Joints in Structural Dynamics Analysis. Submetido ao International Journal of Structural Engineering.



# ANEXO I – CARACTERÍSTICAS DO EQUIPAMENTO SERVO-HIDRÁULICO INSTRON® 8874 PARA ENSAIOS DE TRAÇÃO



## 8874 Axial-Torsion Servohydraulic Fatigue Testing System | 25 kN / 100 Nm

The Instron® 8874 is a compact tabletop axial-torsion servohydraulic testing system that meets the challenging demands various static and dynamic tests requires. The system carries out axial, torsion, or combined axial-torsion tests. With the actuator in the upper crosshead and a lower t-slot table, the 8874 makes an ideal platform for testing a variety of medical devices, biomaterials, advanced materials, and other components testing.

### Features

- Double-acting servohydraulic actuator with force capacity up to  $\pm 25$  kN ( $\pm 5620$  lbf) and torque capacity of  $\pm 100$  Nm (880 in-lb)
- High-stiffness, precision-aligned load frame with twin columns and actuator in upper crosshead
- 100 mm (4 in) of usable axial stroke and  $\pm 130^\circ$  of rotation
- Designed for both dynamic and static testing on a variety of materials and components
- Choice of hydraulic configuration and dynamic performance to suit application
- Extra-height frame option for testing longer load strings
- Adjustable upper crosshead with hydraulic lifts and manual locks fitted as standard for easy adjustment of daylight
- Patented, Dynacell™ load cell technology for faster testing and reduction of inertial errors
- Compact tabletop servohydraulic fatigue testing system – frame requires less than  $0.4 \text{ m}^2$  ( $4.3 \text{ ft}^2$ ) of space
- Designed to be used with the 3520 Series of Hydraulic Power Units
- Compatible with a large range of grips, fixtures, chambers, video extensometers, protective shields, and other accessories

### Controller & Software

The 8874 is supplied with a two-axis digital 8800 controller that provides full system control, including features such as automatic loop tuning, amplitude control specimen protect, 19-bit resolution across the full range of transducers, and patented adaptive control technology. It also allows access to WaveMatrix™ dynamic testing software, Bluehill® software for axial static tests, and other application specific software, such as the Low Cycle Fatigue or Fracture Mechanics suite.



## Specifications

		Standard Height Frame		Extra Height Frame	
Daylight Opening (Maximum Between Load Cell and Actuator at Mid-stroke)	mm	683		983	
	in	26.9		40.0	
Dynamic Load Capacity	kN	±10	±25	±10	±25
	lbf	±2250	±5620	±2250	±5620
Torque Capacity	Nm	100			
	inlb	880			
Actuator Stroke (Total)	mm	100			
	in	3.9			
Actuator Rotation	°	±130			
Configuration	-	Twin-Column High-Stiffness Load Frame with Actuator in Upper Crosshead and T-Slot Base			
Lifts and Locks	-	Hydraulically-Powered Lifts and Manual Locks			
Load Cell	-	Patented, Biaxial Dynacell™: Fatigue-Rated Load Cell with Capacity to Suit Actuators			
Load Weighing Accuracy	-	±0.5% of Indicated Load or ±0.005% of Load Cell Capacity (1-100%), Whichever is Greater			
Hydraulic Pressure Supply (Required)	bar	207			
	psi	3000			
Electrical Supply	-	Single-Phase Mains 90-132 or 180-264 VAC 45/65 Hz Power Consumption: 800 VA Max			
Operating Environment	°C	+10 to +38°C (+50 to +100°F) with 10 to 90% Humidity Non-Condensing			
Frame Stiffness	kN/mm	260			
Frame Weight	kg	287			
	lb	634			

### Mechanical Interfaces

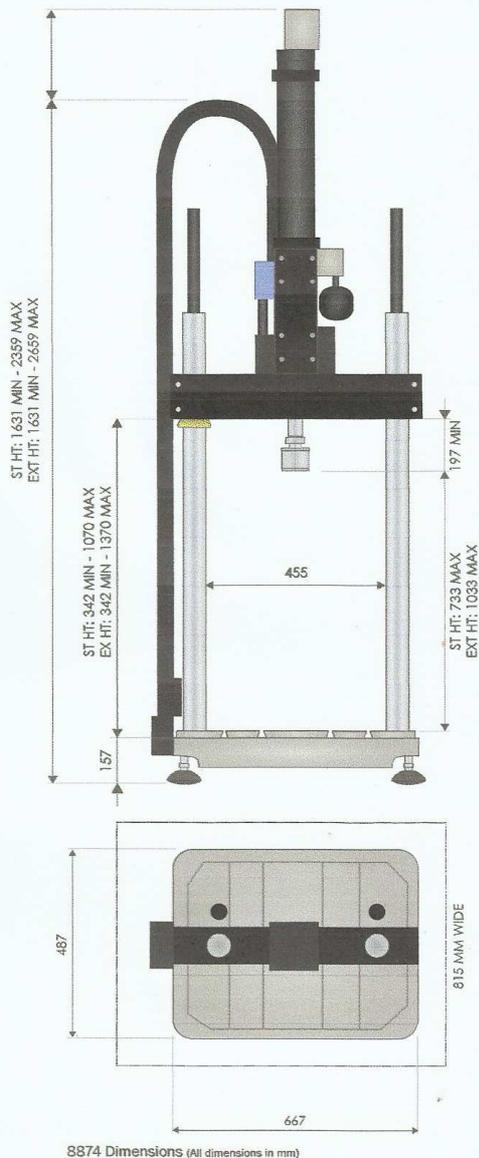
Load Cell	6 x M8 on 75 PCD
Actuator	6 x M8 on 75 mm PCD
	6 x 9 mm Diameter Through Holes on 75 mm PCD
Table and Crosshead	4 x M10 Holes on a 280 mm x 90 mm for Accessory Mounting
	6 x M10 x 20 Deep on 100 mm PCD (Table) with 40 mm Location Diameter
	4 x M10 T-Slots Running Front to Back, Spaced 80 and 100 mm from Centerline

## Accessories

### Catalog Number

8260C	±25 kN / ±100 Nm Fatigue Rated Hydraulic Wedge Grips
8000-101	Attachment Kit to Provide M20 Right Hand Female Thread on 8874 Load Cell or Actuator
8000-050	Flange for 8874 Base to Provide M20 Right Hand Female Thread

1) US Patent Number 6508132



8874 Dimensions (All dimensions in mm)

[www.instron.com](http://www.instron.com)



Worldwide Headquarters  
825 University Ave, Norwood, MA 02062-2643, USA  
Tel: +1.900.564.8378 or +1.781.575.5000

European Headquarters  
Coronation Road, High Wycombe, Bucks HP12 3SY, UK  
Tel: +44.1494.464546

Instron Industrial Products  
900 Liberty Street, Grove City, PA 16127, USA  
Tel: +1.724.458.9610

Instron is a registered trademark of Illinois Tool Works Inc. (ITW). Other names, logos, icons and marks identifying Instron products and services referenced herein are trademarks of ITW and may not be used without the prior written permission of ITW. Other product and company names listed are trademarks or trade names of their respective companies. Copyright © 2012 Illinois Tool Works Inc. All rights reserved. All of the specifications shown in this document are subject to change without notice.

WB1294

## ANEXO II – CARACTERÍSTICAS DO EXTENSÓMETRO UNIAxIAL INSTRON® 2620-601

Accessory Height	63 mm (2.48 in)
Accessory Weight	0.02 kg lb
Accessory Width	21 mm (0.83 in)
Gauge Length	12.5, 25 and 50 mm in
Specimen Diameter	3 - 25 mm (0.12 to 1 in)
Specimen Thickness	3 - 12.5 mm (0.12 - 0.5 in)
Specimen Width	0 - 25 mm (0 - 1 in)
Static or Fatigue Rated	Fatigue
Temperature Rating	-80 to +200°C (-112 to +392°F)
% Travel (Axial)	40, 20 and 10%



Figura AII.1 – Extensômetro uniaxial INSTRON® 2620-601.



# ANEXO III – CARATERÍSTICAS DO EXTENSÓMETRO HBM® DE ROSETA TIPO T



Dehnungsmessstreifen  
Strain gages  
Jauges d'extensométrie

Bestellnummer  
Order No.  
No. de référence

1-XY93-6/120

Typ  
Type  
Type

6/120 XY93

Stückzahl  
Contents  
Quantité

5

Widerstand  
Resistance  
Résistance

120 Ω ±0,50 %

k-Faktor  
Gage factor  
Facteur k

a: 2,08 ±1,0 %

b: 2,04 ±1,0 %

Querempfindlichkeit  
Transverse sensitivity  
Sensibilité transverse

a: 0,1 %

b: 1,4 %

Temperaturkoeffizient  
des k-Faktors  
Temperature coefficient  
of gage factor  
Coefficient de température  
du facteur k

101 ±10 [10<sup>-6</sup> / °C]

(-10°C ... +45°C)

Folienlos  
Lot  
Lot de la feuille

A400/05

Herstellungsjahr  
Batch  
Lot de fabrication

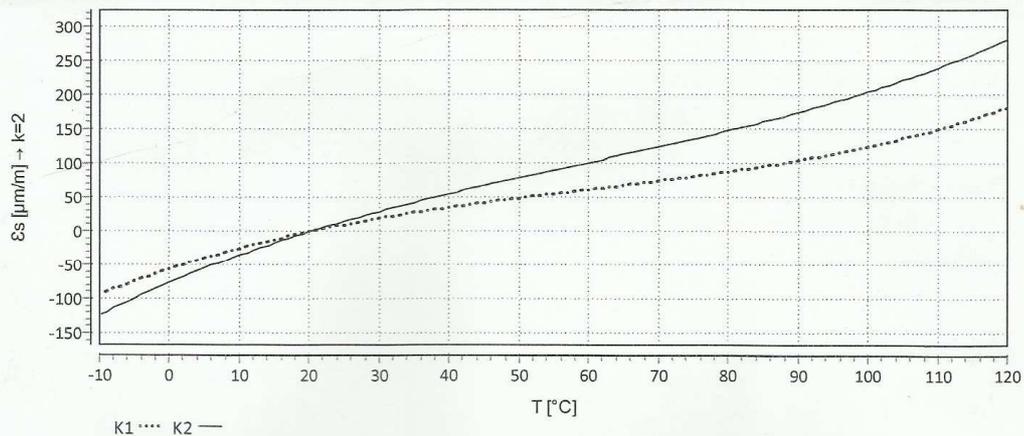
812054813

Daten / Data / Données

Temperaturkompensation: Angepasst für  
Temperature compensation: Compensated for  
Compensation de température: Compensation pour

Aluminium mit  
aluminium with  
aluminium avec

$\alpha = 23,0 [10^{-6} / ^\circ\text{C}]$



$$\epsilon_s(T) = -56,50 + 3,43 * T - 3,69E-02 * T^2 + 2,07E-04 * T^3 + 0,03330 * L * (T-20) [\mu\text{m}/\text{m}] \pm 0,30 [\mu\text{m}/\text{m}/^\circ\text{C}]$$

Alle technischen Daten nach OIML IR 62, bei Beachtung der abweichenden Toleranzangaben auch nach VDI/VDE 2635. Geben Sie bei Rückfragen bitte Bestellnummer und Herstellungs-Los an.

All specifications in accordance with OIML IR 62, also compliant with VDI/VDE 2635 if deviating tolerances are observed. In case of further inquiries please indicate order no. and batch number.

Toutes caractéristiques techniques selon OIML IR 62 et VDI/VDE 2635 pour les indications différentes de tolérance. Pour toutes questions, indiquer le no. de référence ainsi que le lot de fabrication.

Réponse en température des jauges d'extensométrie appliquées sur des matériaux dont les coefficients de dilatation thermique  $\alpha$  sont indiqués au verso. Mesurée au d'une variation continue de la température.

Courbe 1: Jauges sans pattes de raccordement.

Courbe 2: Jauges avec pattes de raccordement (longueur unitaire de la patte de 30 mm). Lorsque les pattes sont plus courtes, la réponse en température se trouvera entre les deux courbes 1 et 2. La représentation numérique permet de calculer exactement la réponse en température pour chaque longueur de patte.  
T = température en °C L = longueur unitaire de la patte en mm

Temperaturgang der Dehnungsmessstreifen bei Applikationen mit umseitig angegebenen Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha$ . Gemessen bei kontinuierlicher Temperaturänderung.

Kennlinie 1: DMS ohne Anschlussbändchen.

Kennlinie 2: DMS mit Anschlussbändchen (30mm einfache Bändchenlänge). Bei gekürzten Bändchen liegt der Temperaturgang zwischen Kennlinie 1 und 2. Die numerische Darstellung erlaubt, den Temperaturgang für jede Bändchenlänge exakt zu errechnen.  
T = Temperatur in °C L = einfache Bändchenlänge in mm

The temperature response refers to strain gages bonded to materials with the coefficient of thermal expansion  $\alpha$  given overleaf. Values are measured with continuous temperature variation.

Curve 1: Strain gages without leads.

Curve 2: Strain gages with leads (simple lead length of 30 mm). If the leads are shorter, the temperature response lies between curve 1 and 2. The numeric representation allows exact calculation of the temperature response for any lead length.  
T = temperature in °C L = simple lead length in mm

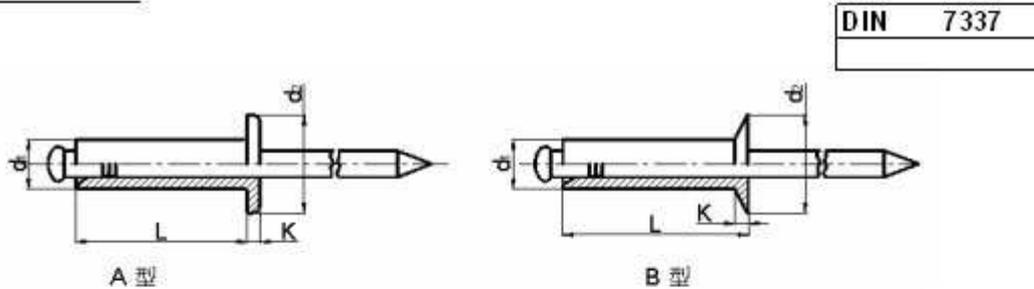
Kopfdaten / Header / Titre





# ANEXO IV – CARATERÍSTICAS DOS REBITES (NORMA DIN 7337)

## Blind Rivets



### Steel/Aluminium/Copper/Stainless Steel

d1	A/B	2.4	3	3.2	4	4.8	5.0	6	6.4
d2	A	5	6.5	6.5	8	9.5	9.5	12	13
	B	-	6	6	7.5	9	9	11	12
k	A	0.55	0.8	0.8	1	1.1	1.1	1.5	1.8
	B	-	0.9	0.9	1	1.2	1.2	1.5	1.6
L [mm]									
4		•	•	•					
6		•	•	•	•	•	•	•	
8		•	•	•	•	•	•	•	•
10		•	•	•	•	•	•	•	•
12		•	•	•	•	•	•	•	•
16		•	•	•	•	•	•	•	•
20		•	•	•	•	•	•	•	•
25		•	•	•	•	•	•	•	•
30			•	•	•	•	•	•	•
35					•	•	•	•	•
40					•	•	•	•	•
45						•	•	•	•
50						•	•	•	•



## ANEXO V – ENSAIO EXPERIMENTAL DE TRAÇÃO

A Figura AV.1 mostra o esquema com a forma e as dimensões dos provetes usados nos ensaios de tração para caracterização das propriedades mecânicas do material.

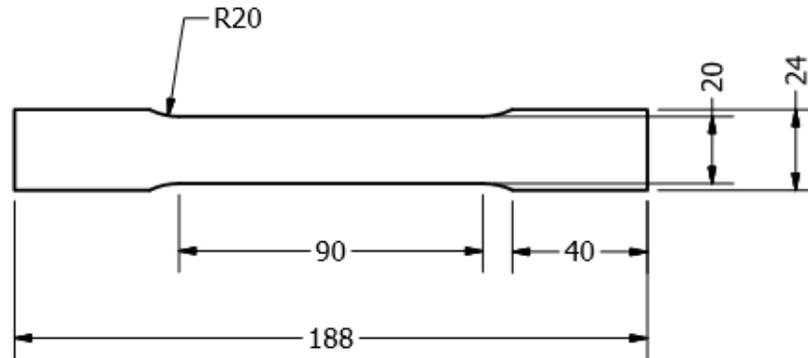


Figura AV.1 Dimensões dos provetes usados para ensaio à tração.

A Figura AV.2 mostra o ensaio de tração a decorrer no equipamento servo-hidráulico para ensaios axiais de tração, INSTRON® 8874, com extensómetro eletromecânico INSTRON® 2620-601 para leitura da deformação na direção vertical do provete, e um extensómetro elétrico HBM® de roseta tipo T com 2 *grids* de medição, dispostos a um ângulo de 90° afastados um do outro, para leitura da deformação na direção vertical e horizontal do provete, de modo a ser possível obter o coeficiente de Poisson  $\nu_{yx}$ .



Figura AV.2 – Ensaio de tração para determinação das propriedades mecânicas do material.

A Figura AV.3 mostra o gráfico Tensão-Deformação ( $\sigma - \varepsilon$ ) para três ensaios de tração no regime elástico linear, a partir do qual se obtém o módulo de elasticidade no sentido transversal à laminagem  $E_x$  do material obtido do Lote 1.

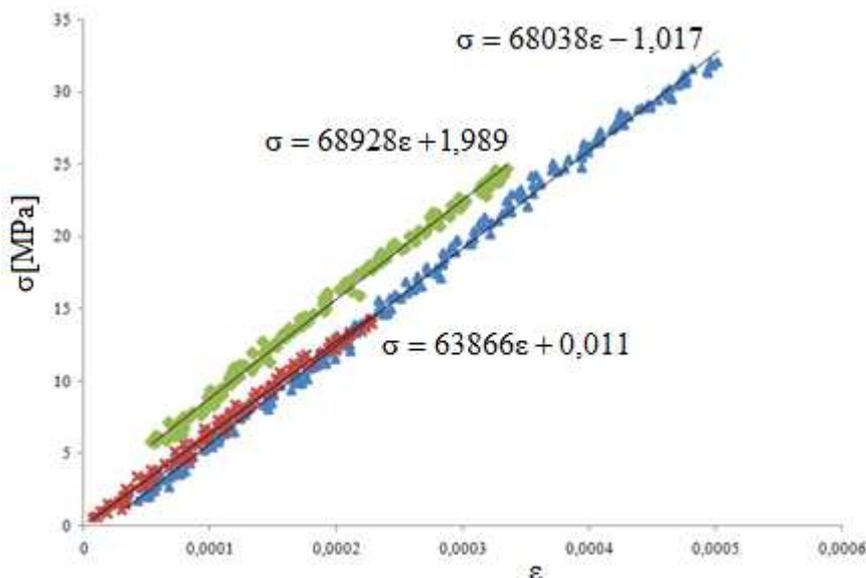


Figura AV.3 – Gráfico Tensão-Deformação ( $\sigma - \varepsilon$ ) para três ensaios de tração no regime elástico linear no sentido transversal à laminagem  $E_x$  do material obtido do Lote 1.

A Figura AV.4 mostra o gráfico Tensão-Deformação ( $\sigma - \varepsilon$ ) para três ensaios de tração no regime elástico linear, a partir do qual se obtém o módulo de elasticidade no sentido paralelo à laminagem  $E_y$  do material obtido do Lote 1.

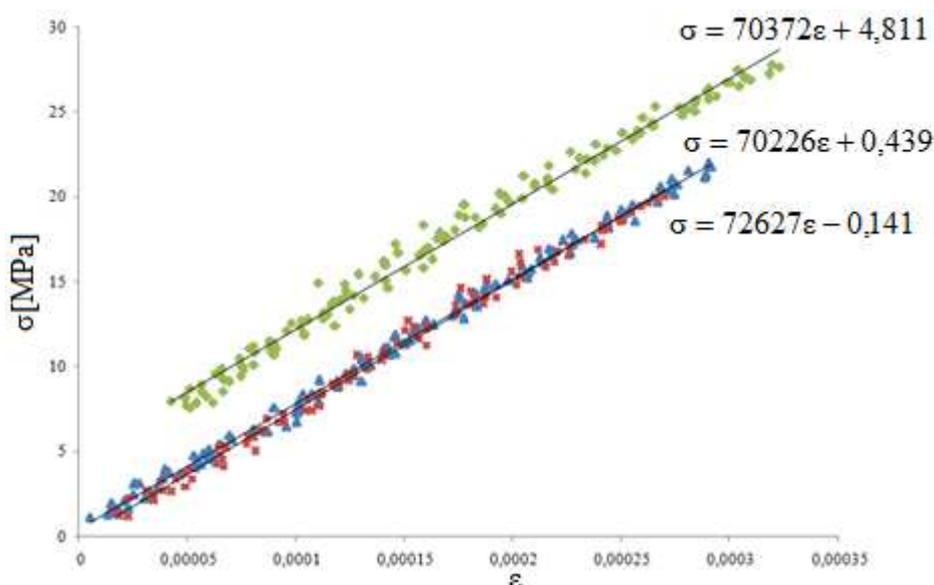


Figura AV.4 – Gráfico Tensão-Deformação ( $\sigma - \varepsilon$ ) para três ensaios de tração no regime elástico linear no sentido paralelo à laminagem  $E_y$  do material obtido do Lote 1.

A Figura AV.5 mostra a relação entre a deformação na direção transversal e a deformação na direção longitudinal, quando é aplicada uma tensão na direção longitudinal

para três ensaios de tração no regime elástico linear, a partir do qual se obtém o coeficiente de Poisson  $\nu_{yx}$  do material obtido do Lote 1.

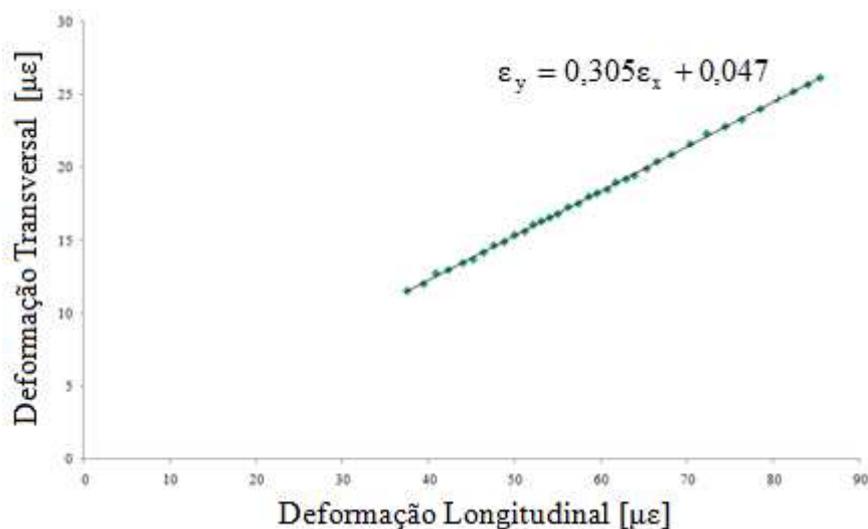


Figura AV.5 – Gráfico que mostra a relação entre a deformação na direção transversal e a deformação na direção longitudinal, a partir do qual se obtém o coeficiente de Poisson  $\nu_{yx}$  do material obtido do Lote 1.



# ANEXO VI – CARATERÍSTICAS DO EQUIPAMENTO LMS SCADAS® MOBILE SCM05

Frame code	SCM01	SCR01	SCM02	SCR02	SCM03S	SCM05	SCR05	SCM06S
Usage discipline	L,M	L,M,A	L,M	L,M,A	-	L,M	L,M,A	-
Number of free slots	1	1	2	2	3	5	5	6
Max number of channels per frame	8	8	16	16	24	40	40	48
Channel expansion via slave frame	-	-	yes	yes	yes	yes	yes	yes
Transfer rate (Msamples/sec)	3,8	3,8	14	14	-	14	14	-
Embedded tachometer inputs	2	2	2	2	-	2	2	-
Embedded signal generator	2	2	2	2	-	2	2	-
Embedded CAN-bus	option	1	option	1	-	option	1	-
Embedded GPS	option	1	option	1	-	option	1	-
Embedded incremental encoder	option	-	option	-	-	option	-	-
Embedded IRIG-B	option	option	option	option	-	option	option	-
Wireless remote control	-	yes	-	yes	-	-	yes	-
Internal data storage	-	yes	-	yes	-	-	yes	-
Ethernet interface	100Mb	100Mb	1Gb	1Gb	-	1Gb	1Gb	-
Power consumption	15Watts		25Watts			40Watts		
External power mode	Auto ranging AC using external mains adapter, Auto ranging DC input from 9VDC to 42VDC							
Internal battery mode	Rechargeable Li-ion battery; rating 21.6V-1.6Ah							
Internal battery operation time (fully equipped)	150min		90min			60min		
Cooling system	Heat conduction via card guides, Cooling via heat pipes to heat sink							
Dimensions (WxHxD) mm	203x62x280		216x76x271			345x92x300		
Weight (full configuration)	2.5kg		5.3kg			6.2kg		
Operating temperature	Operating: -20°C to +55°C, Storage: -20°C to +70°C							
Relative humidity	Up to 95% non-condensing							
Vibration protection	MIL-STD-810F [20-2000Hz (random): 7.7grms]							
Shock protection	MIL-STD-810F [60gpk applying an 11ms sawtooth shock pulse; 3 shocks per direction]							
Ingress protection	IP32							

L – Laboratory • M – Mobile • A – Autonomous

SCM – LMS SCADAS Mobile • SCR – LMS SCADAS Recorder • SCD – LMS SCADAS Durability Recorder

SCL – LMS SCADAS Lab

STR – Structures • SIG – Rotating Machinery • ENV – Environmental/ Vibration Control



Figura AVI.1 – Equipamento LMS SCADAS® MOBILE SCM01 que pode ter um número de canais entre 8 e 40.



# ANEXO VII – CARATERÍSTICAS DO MARTELO DE IMPATO PCB® 086C01

Model Number 086C01	ICP® IMPACT HAMMER		Revision: K ECN #: 32387
<b>Performance</b>	<b>ENGLISH</b>	<b>SI</b>	<b>OPTIONAL VERSIONS</b> Optional versions have identical specifications and accessories as listed for the standard model except where noted below. More than one option may be used.  T - TEDS Capable of Digital Memory and Communication Compliant with IEEE P1451.4
Sensitivity(± 15 %)	50 mV/lbf	11.2 mV/N	
Measurement Range	± 100 lbf pk	± 444 N pk	<b>NOTES:</b> [1] Typical [2] See PCB Declaration of Conformance PS068 for details.
Resonant Frequency	± 15 kHz	± 15 kHz	
Non-Linearity	± 1 %	± 1 %	<b>SUPPLIED ACCESSORIES:</b> Model 081B05 Mounting Stud (10-32 to 10-32) (2) Model 084A06 Extender - aluminum, 0.6" diameter (1) Model 084B03 Hard Tip- Hard (S.S) (1) Model 084B04 Hammer Tip- Medium (White Plastic) (1) Model 084C05 Hammer Tip- Soft (Black) (2) Model 084C11 Hammer Tip- Supersoft (Red) (2) Model 085A10 Vinyl Cover For Medium Tip (Blue) (2) Model HCS-2 Calibration of Series 086 instrumented impact hammers (1)
<b>Electrical</b>			
Excitation Voltage	20 to 30 VDC	20 to 30 VDC	Entered: <i>JH</i> Engineer: <i>SK</i> Sales: <i>MM</i> Approved: <i>EB</i> Spec Number: Date: <i>2/24/10</i> Date: <i>2/8/09</i> Date: <i>2/17/10</i> Date: <i>2/17/10</i> <b>9120</b>
Constant Current Excitation	2 to 20 mA	2 to 20 mA	
Output Impedance	<100 ohm	<100 ohm	<b>PCB PIEZOTRONICS™</b> VIBRATION DIVISION 3425 Walden Avenue, Depew, NY 14043 Phone: 716-684-0001 Fax: 716-685-3886 E-Mail: vibration@pcb.com
Output Bias Voltage	8 to 14 VDC	8 to 14 VDC	
Discharge Time Constant	≥ 500 sec	≥ 500 sec	
<b>Physical</b>			
Sensing Element	Quartz	Quartz	
Sealing	Epoxy	Epoxy	
Hammer Mass	0.23 lb	0.10 kg	
Head Diameter	0.62 in	1.57 cm	
Tip Diameter	0.25 in	0.63 cm	
Hammer Length	8.5 in	21.6 cm	
Electrical Connection Position	Bottom of Handle	Bottom of Handle	
Extender Mass Weight	0.9 oz	25 gm	
Electrical Connector	BNC Jack	BNC Jack	



All specifications are at room temperature unless otherwise specified.  
In the interest of constant product improvement, we reserve the right to change specifications without notice.  
ICP® is a registered trademark of PCB Group, Inc.



Figura AVII.1 – Martelo de Impato PCB® 086C01.



# ANEXO VIII – CARACTERÍSTICAS DO VIBRÓMETRO POLYTEC® OFV-5000



## OFV-5000 Technical Data

General Specifications	
Operating temperature	+ 5 °C ... +40 °C (41 °F ... 104 °F)
Storage temperature	-15 °C ... +65 °C (5 °F ... 149 °F)
Relative humidity	Max. 80 %, non-condensing
Power supply	Switch mode power supply with wide range input 100 V ... 240 V
Weight	10 kg
Dimensions [W x H x L]	450 mm x 360 mm x 145 mm (19" rack mount)
Interface	RS-232
Display	Illuminated graphics LCD with menu assistance
Outputs analog	On the front: Velocity out, Displacement out, DSP out, Auxiliary out; On the back: Signal level out
Outputs digital	S/P-DIF optical and electrical

Sensor Head Compatibility	
Standard single point sensor heads	OFV-505, OFV-503, OFV-534
Fiber optic sensor heads	OFV-551, OFV-552

Available Velocity Decoders	
Analog decoders	
VD-02	max. 1.5 MHz, 4 measurement ranges (mm/s/V): 5, 25, 125, 1000
VD-04	max. 250 kHz, 3 measurement ranges (mm/s/V): 10, 100, 1000
VD-05	max. 10 MHz, 2 measurement ranges (mm/s/V): 100, 500
Digital decoders	
VD-06	max. 350 kHz, 4 measurement ranges (mm/s/V): 1, 2, 10, 50
VD-09	max. 2.5 MHz, 14 measurement ranges (mm/s/V): 5 ... 1,000

Available Displacement Decoders	
DD-100	14 bit FC decoder, 250 kHz, 8 measurement ranges
DD-200	14 bit FC decoder, 250 kHz, 13 measurement ranges
DD-300	Ultrasonic displacement decoder, 24 MHz, 1 measurement range
DD-400	Analog integrator, 250 kHz, 3 measurement ranges
DD-500	16 bit DSP decoder, 350 kHz, 16 measurement ranges
DD-600	I&Q decoder, direct output of the quadrature signal, optional further processing with VibSoft-VDD

Adaptive Filter Module	
LF-02	DSP based, analog and digital output signal, frequency range: 0 ... 20 kHz

For more information on signal decoders please see the "Decoder Guidelines" data sheet and the respective decoder data sheets, or contact your local sales/application engineer. The data sheets can be downloaded from [www.polytec.com/vibrometers](http://www.polytec.com/vibrometers)

**Polytec GmbH (Germany)**  
Polytec-Platz 1-7  
76337 Waldbronn  
Tel. + 49 (0) 7243 604-0  
Fax + 49 (0) 7243 69944  
info@polytec.de

**Polytec France S.A.S.**  
32 rue Délizy  
93694 Pantin Cedex  
Tel. + 33 (0) 1 48 10 39 30  
Fax + 33 (0) 1 48 10 09 66  
info@polytec.fr

**Polytec Ltd.  
(Great Britain)**  
Lambda House, Batford Mill  
Harpenden, Herts AL5 5BZ  
Tel. + 44 (0) 1582 711670  
Fax + 44 (0) 1582 712084  
info@polytec-ltd.co.uk

**Polytec Japan**  
Hakusan High Tech Park  
1-18-2 Hakusan, Midori-ku  
Yokohama-shi, 226-0006  
Kanagawa-ken  
Tel. +81 (0) 45 938-4960  
Fax +81 (0) 45 938-4961  
info@polytec.co.jp

**Polytec, Inc. (USA)**  
North American Headquarters  
1342 Bell Avenue, Suite 3-A  
Tustin, CA 92780  
Tel. +1 714 850 1835  
Fax +1 714 850 1831  
info@polytec.com

Midwest Office  
3915 Research Park Dr.  
Suite A-12  
Ann Arbor, MI 48108  
Tel. +1 734 662 4900  
Fax +1 734 662 4451

East Coast Office  
25 South Street, Suite A  
Hopkinton, MA 01748  
Tel. +1 508 544 1224  
Fax +1 508 544 1225

Technical specifications are subject to change without notice. OM\_DS\_OFV-5000\_2008\_04\_2000\_US

Advancing Measurements by Light

[www.polytec.com](http://www.polytec.com)



Figura AVIII.1 – Vibrômetro POLYTEC® OFV-5000.

# ANEXO IX – CARACTERÍSTICAS DO SENSOR DE FIBRA ÓTICA POLYTEC® OFV-552



## OFV-551/552 Technical Data

### Vibrometer Optics Specifications

Laser wavelength	633 nm, visible red laser beam
Laser protection class	Class II He-Ne laser, < 1 mW, eye-safe
Available fiber lengths	1000 mm, 2000 mm, 2069 mm (OFV-551), 3000 mm

### Characteristics

Sensor Head	Mini sensor <sup>1)</sup>	OFV-102 <sup>2)</sup>	OFV-130-3 <sup>2)</sup>	OFV-130-5 <sup>2)</sup>
Focal length mm	16	20	60	80
Min. stand-off distance mm	60	80	55 ± 2	76 ± 2
Aperture diameter 1/e <sup>2</sup> μm	3.2	4	16	16
Spot Size (typ.) μm				
@ 55 mm	–	–	3	–
@ 76 mm	16	–	–	4
@ 100 mm	20	21	–	–
@ 300 mm	66	51	–	–
@ 1000 mm	223	180	–	–
@ each additional meter plus	211	180	–	–

### Coherence Properties

Sensor head	Maxima of Visibility
OFV-551	135 mm + n · 204 mm; n = 0; 1; 2; ...
OFV-552 (differential measurement)	0 mm + n · 204 mm
OFV-552 (single point measurement) <sup>3)</sup>	63 mm + n · 204 mm

<sup>1)</sup>included as standard <sup>2)</sup>optional accessories <sup>3)</sup>with reference head

### General Specifications

Ambient temperature	0 °C ... 40 °C
Storage temperature	–15 °C ... 65 °C
Relative humidity	20 % ... 80 %, non-condensing
Housing protection	IP 40 standard (NEMA 1)
Dimensions	235 mm x 355 mm x 140 mm
Weight	8 kg
Power	max. 15 W

### Accessories

OFV-102 Sensor Head (included as standard)	High precision, compact sensor head, 23 mm outside diameter, f = 20 mm front lens, centering to 0.5 mrad
OFV-130-5 Micro-Spot Sensor Head	for model OFV-552 <sup>1)</sup> . 25 mm outside diameter, 130 mm length, stand-off distance 76 mm ± 2 mm, spot diameter 4 μm
OFV-130-3 Micro-Spot Sensor Head	25 mm outside diameter, 135 mm length, stand-off distance 56 mm ± 2 mm, spot diameter 3 μm <sup>1)</sup>
OFV-153 Adjustable Reference Head	for optimizing the coherence position when using the OFV-552 in single beam mode. Model OFV-153 requires OFV-102 compact sensor head

<sup>1)</sup> Optimum performance is obtained when used with model OFV-552 fiber interferometer and model OFV-153 adjustable reference head.

For more information visit our website [www.polytec.com](http://www.polytec.com) or contact your local Polytec sales/application engineer.



**Polytec GmbH**  
Polytec-Platz 1-7  
76337 Waldbronn  
Germany  
Tel. + 49 (0) 7243 604-0  
Fax + 49 (0) 7243 69944  
info@polytec.de

**Polytec-PI, S.A.**  
32 rue Délizy  
93694 Pantin  
France  
Tel. + 33 (0) 1 48 10 39 34  
Fax + 33 (0) 1 48 10 09 66  
info@polytec-pi.fr

**Lambda Photometrics Ltd.**  
Lambda House, Batford Mill  
Harpenden, Herts AL5 5BZ  
Great Britain  
Tel. + 44 (0) 1582 764334  
Fax + 44 (0) 1582 712084  
info@lambdaphoto.co.uk

**Polytec KK**  
Hakusan High Tech Park  
1-18-2 Hakusan, Midori-ku  
Yokohama-shi, 226-0006  
Kanagawa-ken  
Japan  
Tel. +81 (45) 938-4960  
Fax +81 (45) 938-4961  
info@polytec.co.jp

**Polytec, Inc.**  
North American Headquarters  
1342 Bell Avenue, Suite 3-A  
Tustin, CA 92780  
USA  
Tel. +1 714 850 1835  
Fax +1 714 850 1831  
info@polytec.com

**Polytec, Inc.**  
East Coast Office  
16 Albert Street  
Auburn, MA 01501  
USA  
Tel. +1 508 832 0501  
Fax +1 508 832 4667

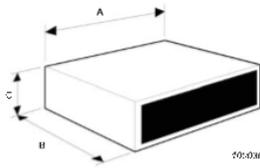
Technical specifications are subject to change without notice. LM\_DS\_OFV-551\_2004\_06\_xxxx\_E



Figura AIX.1 – Sensor de Fibra Óptica POLYTEC® OFV-552.

# ANEXO X – CARATERÍSTICAS DO SHAKER LDS<sup>®</sup> V203 E AMPLIFICADOR PA25E

System Characteristics		
Shaker + PA25E Amplifier	V101/2	V201/3
System Maximum 1/2-sine Shock Force*	2 lbf	4 lbf
Acoustic Noise at 3.3 ft Distance.†		
Shaker‡	<70 dBA	75 dBA
Amplifier	silent	silent
Total Heat Dissipation:		
Shaker – heat rejected to air	9.5 W	48 W
Amplifier	0.067 kW	0.067 kW
Amplifier Electrical Requirement	0.09 kVA	0.13 kVA
Max. Working Ambient Temperature:		
Shaker	86° F	86° F
Amplifier	95° F	95° F
Health and Safety:		
Complies with the following EU directives:		
• Machinery: 2006/42/EC		
• Low Voltage: 2006/95/EC		
• EMC: 2004/108/EC		
• CE		
Designed in accordance with EN 61010 – 1:2001		

PA25E Amplifier Data	
	<b>Dimensions:</b>
	Dim. A (in) 19.2
	Dim. B (in) 13.3
	Dim. C (in) 3.6
	Weight (lb) 20
	<b>Protection:</b>
	Fast acting current limit
<b>Characteristics:</b>	
Rated Sinusoidal Power Output – matched resistive load	48 W (5R3)
Signal-to-noise Ratio	>75 dB
Total Harmonic Distortion – at rated output (10 Hz – 10 kHz)	Typically 0.3%
Input Sensitivity for Maximum Output (400 Hz)	1.0 V rms
Amplifier Efficiency	59%
Voltage Regulation	1%
Maximum Continuous Sinusoidal VA Output (0.5 pf)	48 VA
Frequency Range – at rated power	10 Hz – 10 kHz
Output Current – at rated VA	2.7 A rms
Random Output Current	5.9 A pk
Maximum Output Current	3 A rms
Maximum Output Voltage	16 V rms
Maximum No Load Voltage	24 V rms
Overcurrent Trip Level	4.2 A rms

Shaker Options	
<b>Armature Insert Selection:</b>	
M4	◆
6/32" UNC (with V102)	◆
10/32" UNC (with V203)	◆
<b>Mounting Selection:</b>	
Base Mounting	◆
Support Trunnion (with V201/3)	●
<b>Other Options:</b>	
Auxiliary Suspension (with V201/3)	●
<b>Key:</b>	
◆ Standard – Available on shortest delivery	
● Option – Stocked item, available on short delivery	

**Make Our Experience Your Advantage**  
From application engineering, installation and training through to maintenance, spares and repairs, Brüel & Kjær offers a total service approach to keep your system operating efficiently and reliably. All LDS systems (standards and specials) are designed and manufactured to ISO 9001 standard. Brüel & Kjær offers a comprehensive range of vibration, measurement and analysis equipment. Please consult our website for details.

\* 1/2-sine shock force is calculated with the standard payload, 2 ms pulse width, 10% pre/post pulse  
 † Measured at a height of 63 in above floor level in enclosed cell  
 ‡ Maximum noise when running at full level

© Brüel & Kjær. All rights reserved.

HEADQUARTERS: Brüel & Kjær Sound & Vibration Measurement A/S - DK-2850 Naarum - Denmark  
 Telephone: +45 7741 2000 - Fax: +45 4580 1405 - www.bkav.com - info@bkav.com  
 Local representatives and service organisations worldwide

Brüel & Kjær 



Figura AX.1 – Shaker LDS<sup>®</sup> V203.

2012.02. Brüel & Kjær reserves the right to change specifications and accessories without notice. BP 2418 – 11





Figura AX.2 – Amplificador PA25E.

# ANEXO XI – CARACTERÍSTICAS DO ACELERÓMETRO TRIAXIAL PCB® 356A14

Model Number 356A14	TRIAxIAL ICP® ACCELEROMETER		Revision: A ECN #: 30479
<b>Performance</b>	<b>ENGLISH</b>	<b>SI</b>	<b>OPTIONAL VERSIONS</b>
Sensitivity( $\pm 10\%$ )	100 mV/g	10.2 mV/(m/s <sup>2</sup> )	Optional versions have identical specifications and accessories as listed for the standard model except where noted below. More than one option may be used.
Measurement Range	$\pm 50$ g pk	$\pm 400$ m/s <sup>2</sup> pk	<b>A - Adhesive Mount</b> Supplied Accessory: Model 08GA109 Petro Wax (1) Supplied Accessory: Model 080A80 Quick Bonding Gel (1)
Frequency Range( $\pm 5\%$ )	0.5 to 5000 Hz	0.5 to 5000 Hz	<b>T - TEDS Capable of Digital Memory and Communication Compliant with IEEE P1451.4</b>
Frequency Range( $\pm 10\%$ )	0.3 to 6000 Hz	0.3 to 6000 Hz	<b>TLA - TEDS LMS International - Free Format</b>
Resonant Frequency	$\pm 25$ kHz	$\pm 25$ kHz	<b>TLB - TEDS LMS International - Automotive Format</b>
Phase Response( $\pm 5^\circ$ )	1.0 to 5000 Hz	1.0 to 5000 Hz	<b>TLC - TEDS LMS International - Aeronautical Format</b>
Bandwidth Resolution(1 to 10,000 Hz)	0.0001 g rms	0.001 m/s <sup>2</sup> rms	<b>TLD - TEDS Capable of Digital Memory and Communication Compliant with IEEE 1451.4</b>
Non-Linearity	$\pm 1\%$	$\pm 1\%$	Temperature Range(Operating) -65 to +176 °F -54 to +80 °C
Transverse Sensitivity	$\pm 5\%$	$\pm 5\%$	Output Bias Voltage 8.5 to 13.0 VDC 8.5 to 13.0 VDC
<b>Environmental</b>			
Overload Limit(Shock)	$\pm 7000$ g pk	$\pm 68,600$ m/s <sup>2</sup> pk	
Temperature Range(Operating)	-65 to +176 °F	-54 to +80 °C	
Temperature Response	See Graph	See Graph	
Base Strain Sensitivity	0.001 g/μ	0.01 (m/s <sup>2</sup> )/μ	
<b>Electrical</b>			
Excitation Voltage	20 to 30 VDC	20 to 30 VDC	
Constant Current Excitation	2 to 20 mA	2 to 20 mA	
Output Impedance	$\leq 200$ ohm	$\leq 200$ ohm	
Output Bias Voltage	8 to 12 VDC	8 to 12 VDC	
Discharge Time Constant	1.0 to 3.0 sec	1.0 to 3.0 sec	
Settling Time(within 10% of bias)	<10 sec	<10 sec	
Spectral Noise(1 Hz)	40 μg/√Hz	392 (μm/sec <sup>2</sup> )/√Hz	<b>NOTES:</b>
Spectral Noise(10 Hz)	10 μg/√Hz	98 (μm/sec <sup>2</sup> )/√Hz	(1) Typical.
Spectral Noise(100 Hz)	3 μg/√Hz	29.4 (μm/sec <sup>2</sup> )/√Hz	(2) Zero-based, least-squares, straight line method.
Spectral Noise(1 kHz)	1 μg/√Hz	9.8 (μm/sec <sup>2</sup> )/√Hz	(3) See PCB Declaration of Conformance PSC23 for details.
Spectral Noise(10 kHz)	0.5 μg/√Hz	4.9 (μm/sec <sup>2</sup> )/√Hz	
<b>Physical</b>			
Sensing Element	Ceramic	Ceramic	
Sensing Geometry	Shear	Shear	
Housing Material	Titanium	Titanium	
Sealing	Hermetic	Hermetic	
Size (Height x Length x Width)	0.55 in x 0.80 in x 0.55 in	14.0 mm x 20.3 mm x 14.0 mm	
Weight	0.37 oz	10.5 gm	
Electrical Connector	1/4-28 4-Pin Side	1/4-28 4-Pin Side	
Electrical Connection Position	Side	Side	
Mounting Thread	10-32 Female	10-32 Female	
Mounting Torque	10 to 20 in-lb	113 to 225 N-cm	
			<b>SUPPLIED ACCESSORIES:</b> Model 08GA109 Petro Wax (1) Model 08GA12 Adhesive Mounting Base (1) Model 080A80 Quick Bonding Gel (1) Model 081B05 Mounting Stud (10-32 to 10-32) (1) Model ACS-1T NIST traceable triaxial amplitude response, 10 Hz to upper 5% frequency. (1) Model M081B05 Mounting Stud 10-32 to M6 X 0.75 (1)
			Entered: <u>HS</u> Engineer: <u>DDT</u> Sales: <u>WDC</u> Approved: <u>EB</u> Spec Number: Date: <u>4-10-09</u> Date: <u>4-10-09</u> Date: <u>4-10-09</u> Date: <u>4-10-09</u> 30963
			<b>PCB PIEZOTRONICS</b> Phone: 716-654-0001 VIBRATION DIVISION Fax: 716-685-3886 3425 Walden Avenue, Depew, NY 14043 E-Mail: vibration@pcb.com

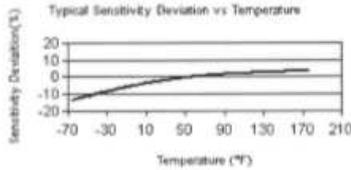


Figura AXI.1 – Acelerómetro triaxial PCB® 356A14.



# ANEXO XII – CARATERÍSTICAS DO SENSOR DE FORÇA PCB® 221B01

Model Number 221B01	ICP® FORCE		Revision: G ECN #: 15530										
<b>Performance</b>	<b>ENGLISH</b>	<b>SI</b>	<b>OPTIONAL VERSIONS</b>										
Sensitivity (±15 %)	500 mV/lb	112404 mV/kN	Optional versions have identical specifications and accessories as listed for the standard model except where noted below. More than one option may be used.										
Measurement Range (Compression)	10 lb	0.04448 kN	<b>J</b> - Ground Isolated										
Measurement Range (Tension)	10 lb	0.04448 kN	<b>M</b> - Metric Mount										
Maximum Static Force (Compression)	60 lb	0.2669 kN	Mounting Thread										
Maximum Static Force (Tension)	60 lb	0.2669 kN	Not Applicable										
Broadband Resolution (1 to 10000 Hz)	0.0002 lb-rms	0.0008896 N-rms	M6 x 0.75 Female										
Low Frequency Response (-5 %)	0.01 Hz	0.01 Hz	<b>N</b> - Negative Output Polarity										
Upper Frequency Limit	15 kHz	15 kHz	Output Polarity (Compression)										
Non-Linearity	≤1 % FS	≤1 % FS	Negative										
<b>Environmental</b>			Negative										
Temperature Range	-65 to +250 °F	-54 to +121 °C	<b>W</b> - Water Resistant Cable										
Temperature Coefficient of Sensitivity	±0.03 %/°F	±0.054 %/°C	Electrical Connector										
<b>Electrical</b>			Sealed Cable										
Discharge Time Constant (at room temp)	≥50 sec	≥50 sec	Electrical Connection Position										
Excitation Voltage	20 to 30 VDC	20 to 30 VDC	Side										
Constant Current Excitation	2 to 20 mA	2 to 20 mA	Side										
Output Impedance	≤100 ohms	≤100 ohms											
Output Bias Voltage	8 to 14 VDC	8 to 14 VDC											
Output Polarity (Compression)	Positive	Positive											
<b>Physical</b>			<b>NOTES:</b>										
Stiffness	2 lb/μin	0.35 kN/μm	[1] Typical.										
Size (Diameter x Height)	0.65 in x 1.25 in	16.51 mm x 31.75 mm	[2] Calculated from discharge time constant.										
Weight	1.1 oz	31 gm	[3] Estimated using rigid body dynamics calculations.										
Housing Material	Stainless Steel	Stainless Steel	[4] Zero-based, least-squares, straight line method.										
Sealing	Hermetic	Hermetic	[5] See PCB Declaration of Conformance PS023 for details.										
Electrical Connector	10-32 Coaxial Jack	10-32 Coaxial Jack	<b>OPTIONAL ACCESSORIES:</b>										
Electrical Connection Position	Side	Side	Model 081A06 Mounting stud, 1/4-28 to 1/4-28 x .37 in. long, BeCu, no shoulder (1)										
Mounting Thread	1/4-28 Female	Not Applicable											
<table border="1"> <tr> <td>Entered: <i>ZAB</i></td> <td>Engineer: <i>ZAB</i></td> <td>Sales: <i>JPM</i></td> <td>Approved: <i>JMP</i></td> <td>Spec Number:</td> </tr> <tr> <td>Date: <i>12/31/12</i></td> <td>Date: <i>12/31/12</i></td> <td>Date: <i>12/31/12</i></td> <td>Date: <i>12/31/12</i></td> <td><b>1243</b></td> </tr> </table>				Entered: <i>ZAB</i>	Engineer: <i>ZAB</i>	Sales: <i>JPM</i>	Approved: <i>JMP</i>	Spec Number:	Date: <i>12/31/12</i>	Date: <i>12/31/12</i>	Date: <i>12/31/12</i>	Date: <i>12/31/12</i>	<b>1243</b>
Entered: <i>ZAB</i>	Engineer: <i>ZAB</i>	Sales: <i>JPM</i>	Approved: <i>JMP</i>	Spec Number:									
Date: <i>12/31/12</i>	Date: <i>12/31/12</i>	Date: <i>12/31/12</i>	Date: <i>12/31/12</i>	<b>1243</b>									
<p><b>CE</b> [5]</p> <p>All specifications are at room temperature unless otherwise specified. In the interest of constant product improvement, we reserve the right to change specifications without notice. ICP® is a registered trademark of PCB Group, Inc.</p>													
<p><b>PCB PIEZOTRONICS™</b> FORCE / TORQUE DIVISION 3425 Walden Avenue, Depew, NY 14043</p> <p>Phone: 716-684-0001 Fax: 716-684-8877 E-Mail: force@pcb.com</p>													



Figura AXII.1 – Sensor de força PCB® 221B01.

