Universidade do Minho
Instituto de Educação

Anderon Melhor Miranda

# A aprendizagem significativa de limites de funções por estudantes universitários

setembro de 2016

A aprendizagem significativa de limites de funções por estudantes universitários

Anderon Melhor Miranda

UMinho|2016

**Universidade do Minho**
Instituto de Educação

Anderon Melhor Miranda

# A aprendizagem significativa de limites de funções por estudantes universitários

Tese de Doutoramento em Ciências da Educação
Especialidade de Educação Matemática

Trabalho efetuado sob a orientação do
**Professor Doutor José António Fernandes**

setembro de 2016

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração da presente tese. Confirmo que em todo o trabalho conducente à sua elaboração não recorri à prática de plágio ou a qualquer forma de falsificação de resultados.

Mais declaro que tomei conhecimento integral do Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

Universidade do Minho, 1 de setembro de 2016

Nome Completo:

Anderon Melhor Miranda

Assinatura: Anderon Melhor Miranda

Com muito carinho:

Para minha filha Helena Miranda, pela inspiração; esposa Lílian Miranda, pelo companheirismo; aos meus pais – André Miranda e Irony Miranda – primeiros educadores, e ao meu irmão Andrezinho Miranda, pela dedicação, atenção e incentivo.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado saúde, força e inteligência no desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, oportunizando o meu desenvolvimento profissional, pessoal e intelectual.

Ao Professor Dr. José António Fernandes, por ter me orientado na construção, desenvolvimento e escrita deste estudo, sempre de forma dedicada, respeitosa e eficiente. A sua competência profissional e orientação me ajudaram, propiciando a formação de um educador matemático mais reflexivo sobre o exercício docente.

Aos Professores avaliadores deste estudo e participantes da banca de defesa, pela atenção, sugestão e comentários em prol da construção de um trabalho de pesquisa mais acadêmico e científico possível.

À Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, por ter oportunizado a participar deste convênio de doutoramento.

À Professora Drª. Rosineide Mubarack e a Professora Drª. Custódia Martins, por coordenarem com excelência o convênio de doutoramento estabelecido entre a Universidade Federal do Recôncavo da Bahia e a Universidade do Minho.

À minha família – Helena Miranda e Lílian Miranda – pela paciência e compreensão diante de tantos momentos de ausência e distância para construção da escrita da tese.

Aos meus Pais – André Miranda e Irony Miranda – por terem me educado e orientado desde os primeiros dias de vida, conduzindo-me a formar a pessoa que hoje eu sou.

Ao meu irmão Andrezinho Miranda, pelo incentivo e por sempre acreditar em mim.

Ao grupo EMFOCO, por apoiar intelectualmente este trabalho e conduzir-me na minha caminhada profissional na Educação Matemática.

Aos colegas de turma e profissão, pois em vários momentos compartilhamos dilemas e lamentações.

A todos(as) os(as) amigos(as) que de forma direta ou indireta contribuíram na construção deste trabalho de pesquisa.

*Se eu tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, diria isto: O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos. (David P. Ausubel)*

*Para abordar el estúdio del cálculo se require certa madurez que permita abrir la mente a distintas formas de proceder. Esta madurez no siempre es alcanzada por los estudiantes. Por esto los docentes debemos propiciar cambios metodológicos que permitan que los alumnos descubran cómo se construyen los conceptos a partir de sus conocimientos prévios. (Engler, Vrancken, Hecklein, Muller & Gregorini, 2007)*

A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE LIMITES DE FUNÇÕES POR ESTUDANTES UNIVERSITÁRIOS

Anderon Melhor Miranda
Doutoramento em Ciências da Educação — Especialidade em Educação Matemática
Universidade do Minho, 2016

## RESUMO

A presente pesquisa tratou de um estudo de intervenção para ensinar e aprender limites de funções de forma significativa para graduandos do curso de Licenciatura em Matemática, relacionando o conteúdo de limites de funções com os conhecimentos prévios existentes na estrutura cognitiva dos estudantes. Procurou-se investigar como o uso de dois livros, usados concomitantemente com livros didáticos convencionais, auxiliados por recursos tecnológicos, contribuiu para a aprendizagem significativa do conteúdo limites de funções na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Sendo um escrito na forma de histórias em quadrinhos (*Guia Mangá de Cálculo Diferencial e Integral*) e outro em uma linguagem coloquial (*Cálculos para Leigos*). Nesta perspectiva, o estudo focou-se nas seguintes questões de investigação: 1. Quais os conhecimentos, impressões e expectativas dos estudantes ao iniciar o estudo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, em especial, limites de funções?; 2. Quais recursos os professores utilizam para ensinar limites de funções? E qual a sua relevância para a aprendizagem dos estudantes de Cálculo Diferencial e Integral I?; e 3. Como o uso de recursos informacionais e comunicacionais pode contribuir para a aprendizagem significativa de limites de funções por estudantes de Cálculo Diferencial e Integral I?

O estudo, por meio de uma intervenção de ensino na forma de Ciclo de Estudos, assumiu uma natureza qualitativa e nele participaram estudantes iniciantes da disciplina de Cálculo. Nessa intervenção, desenvolvemos, inicialmente, uma avaliação diagnóstica e entrevistamos professores sobre o ensino que realizavam, seguiu-se a fase de aplicação do ciclo de estudos sobre limites de funções e finalizou-se com a avaliação do Ciclo de Estudos. Utilizamos como métodos de coleta de dados a observação, questionários e entrevistas.

Em termos dos resultados encontrados e da análise dos dados salientou-se a carência, nos estudantes, de conhecimentos prévios em relação a conteúdos de matemática elementar relacionados com a aprendizagem do conteúdo de limites de funções, apesar da predisposição e de expectativas favoráveis dos mesmos em aprender o conteúdo; e a utilização, pelos professores, de estratégias metodológicas pessoais, experiências de ensino tradicional e dos recursos quadro, giz e livro didático. Concluímos que os recursos informacionais e comunicacionais que contribuíram para o ensino e aprendizagem significativa de limites de funções foram: O uso dos livros *Guia Mangá de Cálculo Diferencial e Integral* e *Cálculos para Leigos*, como complemento aos livros didáticos de Cálculo convencionais, por apresentarem uma linguagem coloquial e próxima da compreensão e entendimento dos estudantes de Cálculo; confecção de mapas conceituais individuais e coletivos; o uso de *softwares* para plotagem e visualização de gráficos de funções; e a utilização de atividades e metodologias de ensino baseadas nos conhecimentos prévios dos estudantes, enfatizando a aprendizagem significativa de limites de funções. Finalmente, a pesquisa apresenta reflexões para o ensino de Cálculo, em especial no ensino e aprendizagem de limites de funções, e espera-se que ela sirva como referência para outras pesquisas que tratem sobre o mesmo tema.

**Palavras-Chave**: Limites de Funções; Aprendizagem Significativa; Pensamento Matemático Avançado; Ensino Universitário.

MEANINGFUL LEARNING OF FUNCTION LIMITS BY UNIVERSITY STUDENTS
Anderon Melhor Miranda
Doctorate in Educational Sciences – Specialty: Mathematics Education
University of Minho, 2016

## ABSTRACT

The present research addressed an intervention study focused at the teaching and learning of function limits in a meaningful way by students of an undergraduate licentiate course in Mathematics, relating the content of function limits with the background knowledge present in the students' cognitive structure. An investigation was carried out about how the use of two books, which were used simultaneously with conventional didactic books and with the support of technology resources, contributed to a meaningful learning of the content of function limits of the discipline of Differential and Integral Calculus I. One of these books consisted of comics (*The Manga Guide to Differential and Integral Calculus*) and the other one was written in informal language (*Calculus for Dummies*). The study focused on the following investigation questions: 1. What knowledge, expectations or impressions do students have when they begin to study the discipline of Differential and Integral Calculus I, especially regarding the topic of function limits?; 2. What resources do professors use to teach function limits? And what is their relevance to the learning process of students of Differential and Integral Calculus I?; and 3. How can the use of information and communication resources contribute to a meaningful learning of function limits by students of Differential and Integral Calculus I? The study, by means of a teaching intervention in the form of a Study Cycle, was of a qualitative nature and its participants were beginning students of the discipline of Calculus. In this intervention, a diagnostic assessment was initially carried out and professors were interviewed regarding their teaching procedure. This phase was followed by the application of the study cycle about function limits. Finally, the Study Cycle was assessed. The data collection methods used were observation, questionnaires and interviews.

Regarding the results found and the analysis of data, the lack of knowledge by the students of elementary mathematical content related to the learning of function limits was made evident, despite their predisposition and favorable expectations towards learning this topic. Also it was found that professors use personal methodology strategies, traditional teaching experience and resources such as blackboard, chalk and didactic books. It was possible to conclude that the information and communication resources that contributed to a meaningful teaching and learning of function limits were: the use of the books *The Manga Guide to Differential and Integral Calculus* and *Calculus for Dummies* as a complement to conventional Calculus didactic books, since these two books are written in informal language and are, thus, more easily understood by the students of Calculus; the production of individual and collective conceptual maps; the use of varied software for the plotting and visualization of function charts; and the use of activities and teaching methodologies based on the students' previous knowledge, focusing on a meaningful learning of function limits. Finally, the research presents reflections about the teaching of Calculus, especially about the teaching and learning of function limits, and it is expected that this research may serve as a reference for other studies that address the same theme.

**Keywords:** Function Limits; Meaningful Learning; Advanced Mathematical Thinking; University Teaching.

## ÍNDICE

## LISTA DE TABELAS

## LISTA DE FIGURAS

# CAPÍTULO I

# INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos de forma sucinta o problema de pesquisa, as inquietações que levaram à construção desta pesquisa e, seguidamente, as questões de investigação. Posteriormente é apresentada a relevância deste estudo, as justificativas para o desenvolvimento desta pesquisa e os procedimentos metodológicos. Por fim, apresentamos a organização do estudo, intitulada de composição da tese.

## 1.1. Problema de Pesquisa

Estudos sobre o ensino de matemática, nos últimos anos, têm demonstrado que a aprendizagem dos conteúdos desta disciplina está voltada, ainda frequentemente, para a memorização de técnicas e resolução de exercícios descontextualizados da realidade do aluno (Nasser, Souza, & Torraca, 2012). Um dos possíveis motivos que pode causar dificuldades e falta de empatia dos alunos com a Matemática, nos dias de hoje, é o modo essencialmente formal e dedutivo com que se ensina essa disciplina, o que a torna descontextualizada e abordada de forma mecânica, desligada da realidade (Tavares & Carvalho, 2010).

Neste contexto, a teoria da aprendizagem significativa se torna uma aliada dos fenômenos naturais e da realidade e pode ser a solução para esta aprendizagem memorística, tradicional e mecânica, uma vez que ela foi criada por David Paul Ausubel numa situação de aprendizagem mecânica, pois o autor da teoria, após anos de experiência docente, já considerava suas aulas enfadonhas e rotineiras. Cansado de ver os estudantes memorizarem os conteúdos ensinados, ele começou a experimentar práticas docentes que levassem em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes e uma aprendizagem que fosse duradoura e com significado, criando com isso o que, posteriormente, chamaríamos da Teoria da Aprendizagem Significativa.

Para Ausubel, a aprendizagem mecânica e significativa não se constitui em uma dicotomia entre elas e sim um contínuo que interliga as duas aprendizagens, sendo que em alguns momentos as aulas tendem mais para uma aprendizagem mecânica e em outros para a aprendizagem significativa e que devemos direcionar e planejar nossas práticas docentes para a aprendizagem significativa, embora Moreira (2013a) ressalta o uso equivocado da teoria, pois segundo o autor:

> A teoria não é apresentada como nova, mas sim como atual. Argumenta-se que houve uma apropriação superficial, polissêmica, do conceito de aprendizagem significativa, de modo que qualquer estratégia de ensino passou a ter a aprendizagem significativa como objetivo. No entanto, na prática a maioria dessas estratégias, ou a escola de um modo geral, continuam promovendo muito mais a aprendizagem mecânica, puramente memorística, do que a significativa. (Moreira, 2013a, p. 5)

No cotidiano, os estudantes desenvolvem uma matemática associada às necessidades reais, entretanto na escola não conseguem estabelecer uma reflexão crítica da matemática que utiliza/utilizou para resolver os problemas do cotidiano, como por exemplo: como fazer uma plantação e escolher a quantidade de grãos de sementes para o plantio; demarcar espaços; delimitar o tempo na execução de tarefas e ter noções geométricas genéricas. Também, reciprocamente, os estudantes exploram questões do cotidiano sem estabeleceram ligações com uma matemática formal, como, por exemplo, quando analisam gráficos estatísticos em jornais e revistas sem necessariamente remeter para o conhecimento matemático que existe nessas atividades, ou seja, executam-nas de forma prática e não estabelecem com elas uma reflexão teórica, numa perspectiva mais formal. Deste modo, torna-se importante estabelecer ligações entre estas duas visões da matemática: uma mais aplicada, onde se abordam questões de interesse prático e em que os estudantes podem desenvolver significados nos respectivos contextos, e uma matemática mais teórica, em que os estudantes podem contactar com uma perspectiva mais formal da matemática.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1998), por um lado, a matemática tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, e, por outro, desempenha também um papel instrumental, pois ela é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

Os estudantes também precisam ver a matemática como ciência. Para tal, o aluno deve perceber que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros, e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

> Para Poincaré a qualidade de uma definição matemática mede-se à custa do grau de compreensão que os alunos têm desse conceito. A definição enquanto

> actividade matemática pode evitar erros, corrigir dificuldades, esclarecer dúvidas porquanto sendo uma actividade humana de cariz geral (partilhada por toda uma comunidade) interage directamente com a denominada imagem mental do conceito, que cada um cria e é, por conseguinte, individual (Santos, 2010, p. 9).

O ensino da matemática em nível superior constitui um grande desafio para os professores de matemática, uma vez que existe um histórico da disciplina na educação básica em que ela é vista com certo temor e distanciamento dos estudantes devido à forma como são ensinados seus conteúdos e ao que é exigido nas avaliações. No ensino superior, estas dificuldades são relativamente às mesmas da educação básica. Entretanto, no ensino superior, as práticas docentes, a falta de conhecimentos prévios em conteúdos matemáticos e o rigor nas avaliações ocasionam um aumento nas reprovações e evasões dos estudantes dos cursos que incluem a matemática na sua matriz curricular.

> No processo de aprendizagem a figura do docente é indispensável, pois é ele o responsável por motivar os alunos e conduzi-los na busca de descobertas. Ao docente, enquanto mediador da aprendizagem cabe explorar junto com o discente o conhecimento matemático que está sendo construído e explorar os conceitos matemáticos envolvidos. A observação e a percepção devem ser estimuladas para desenvolver no discente a capacidade de criticar e questionar a matemática como um conhecimento em construção. (Alves, Correia, & Melo, 2013, p. 2)

Para o ensino de Cálculo, autores como Rezende (2003) e Wrobel, Zeferino e Carneiro (2013) destacam três casos relacionados à aprendizagem dos alunos em Cálculo: 1. A psicologia cognitiva; 2. Dificuldades decorrentes do processo didático; 3. Dificuldades de natureza epistemológica.

No caso 1. os autores acreditam que a dificuldade de aprendizagem esteja relacionada a uma natureza psicológica, ou seja, os alunos não aprendem porque não possuem uma estrutura cognitiva apropriada para aprender os diferentes conceitos complexos do Cálculo. No caso 2. o professor procura meios e metodologias de ensinar melhor os conceitos e conteúdos do Cálculo. Neste caso, Rezende (2003) cita a Reforma do Cálculo (*Calculus Reform*) que, na década de 1980, baseou-se em quatro princípios: o uso de tecnologias; uma abordagem que envolvia soluções nas formas numéricas, geométricas e analíticas; a utilização do Cálculo num contexto real e dados obtidos por meio de referências; e a não valorização das respostas algébricas dos alunos, substituindo-as pelo uso de métodos algébricos no computador (Wrobel, Zeferino, & Carneiro, 2013). E por fim, o caso 3., que segundo Rezende (2003) "as raízes do problema estão além dos métodos e das técnicas, sendo inclusive anteriores ao próprio espaço-tempo local do ensino de Cálculo" (p. 313).

> Apesar da reforma sugerir mais atenção para a contextualização do ensino, a experiência mostra que na prática não houve mudanças significativas. Na melhor das hipóteses, a definição e a demonstração matemática formal do conceito de limite foi transferida para o Curso de Análise Matemática, passando a ser enfatizada, no Cálculo, a interpretação gráfica do conceito. Ávila (1985) em seu artigo que trata da evolução histórica dos conceitos de *função* e de *integral* lembra que a preocupação prematura com o rigor matemático é uma grave falha no ensino, pois atropela o desenvolvimento natural do estudante. (Santarosa & Moreira, 2011, p. 320)

Nesta perspectiva apontamos as ideias de Rezende (2003) e de Lima (2013) quando os autores indicam que o ensino de Cálculo faz parte de um ensino mais rigororo e com maior formalismo para se estudar na disciplina de Análise, ou seja, a disciplina de Cálculo fica como um preparativo para a dsiciplina de Análise, que possui mais exigências e um maior rigor e simbolismo matemático comparado ao Cálculo.

Na disciplina de Cálculo o aluno ainda não possui uma maturidade matemática para comprrender tais conceitos de forma tão rigorosa e as associações com toda terminologia e símbolos matemáticos utilizados. Sendo assim, Lima (2013), apoiada nas conclusões de Rezende (2003), afirma que o Cálculo passa por uma crise de identidade e que para superá-la é necessário

> voltar o ensino do Cálculo para o próprio Cálculo, seus problemas construtores, suas potencialidades e seus significados. É preciso procurar nele mesmo o nível de rigor possível e as metas de seu ensino, rompendo o cordão que submete o ensino deste conteúdo ao da Análise. Além disso, os professores precisam ter consciência do real papel desempenhado pela disciplina de Cálculo nos currículos dos mais diversos cursos superiores nos quais ela está presente. (Lima 2013, p. 14)

Ainda referente à preocupação com o ensino de Cálculo no tratamento e rigor que é dado em seus ensinamentos e da consciência do professor exigida por Lima (2013), Abreu e Reis (2011) em seus estudos orienta e sugere ao professor que na sua prática

> Não exagere nas definições e demonstrações rigorosas, principalmente se essas forem apresentadas de maneira mecanizada e sob um aspecto totalmente procedimental. Se uma demonstração não puder ser significativa para os alunos e, mais importante ainda, ser ilustrada, até mesmo com exemplos numéricos, tal demonstração pode ser muito mais um “exercício de ensino” para o próprio professor do que uma “atividade de aprendizagem” para os alunos. (Abreu & Reis, 2011, p. 457)

Neste sentido, no presente estudo, investigaremos e refletiremos sobre o ensino e aprendizagem de limites de funções, que atualmente se constitui em um conteúdo rigoroso na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, exigindo do aprendiz atenção e conhecimentos prévios de outros conteúdos matemáticos para compreender este conceito.

Segundo Cornu (2002) e Tall (1991), o ensino de limites se constitui um conteúdo que exige formalidade e necessita do conhecimento de uma matemática avançada, incluindo-se nos conteúdos estudados pelo grupo do Pensamento Matemático Avançado.

> O desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos desde o nível elementar até ao ensino superior ou mesmo até à investigação matemática tem-se constituído como um importante objecto de estudo. Vários autores têm-se debruçado sobre esta problemática evidenciando algumas das suas características essenciais em situações concretas. (Domingos, 2006, p. 52)

Tall (1991) considera uma distinção entre o pensamento matemático elementar e o pensamento matemático avançado, embora este último seja considerado pelo autor como um estudo a partir dos conteúdos finais do ensino médio. Outro pesquisador – Dreyfus (1991) – afirma que o pensamento matemático avançado ocorre desde a infância (Machado & Biachini, 2013). Isto é, "para a criança o conceito matemático de número ou do valor posicional do algarismo envolve complexidade, pois a complexidade depende do sujeito que a enfrenta" (Machado & Biachini, 2013, p. 591). Para Dreyfus (1991),

> é possível pensar sobre tópicos de matemática avançada de uma forma elementar e a distinção entre os dois tipos de pensamento reside na complexidade e na forma como se lida com ela...........não há uma distinção profunda entre muitos dos processos que são usados no pensamento matemático elementar e avançado, mesmo considerando que a matemática avançada se foca essencialmente nas abstracções de definição e dedução. Os processos que Dreyfus considera estarem presentes nos dois tipos de pensamento são os processos de representação e de abstracção, sendo a principal diferença marcada pela forma como a complexidade que é exigida em cada um deles é abordada. (Domingos, 2006, p. 56)

Assim, o conteúdo de limites de funções, no ensino superior, apresenta dificuldades tanto no ensino, quanto na aprendizagem, pois este tema se caracteriza em um amplo campo para a pesquisa e desenvolvimento da educação matemática, em especial no ensino superior.

Por meio da Teoria da Aprendizagem Significativa analisaremos as possibilidades para a ocorrência da aprendizagem de limites de funções por estudantes universitários. Com isso, aliaremos os elementos desta teoria com ideias do Pensamento Matemático Avançado. E nestas imbricações, estabeleceremos as possíveis relações entre elas, mais particularmente, a ideia dos subsunçores, diferenciação progressiva e reconciliação integradora da teoria com as células da imagem conceitual e definição conceitual, estudadas e definidas por Vinner (1991) no âmbito do Pensamento Matemático Avançado.

> É necessário repensar as formas com as quais o ensino de cálculo, em especial, o de limites, vem sendo tratado por muitos professores e por sequências didáticas presentes em vários livros. Torna-se urgente equacionar as formas de ensino para que a prioridade seja estabelecer espaços de aprendizagens onde os estudantes não tenham que recorrer à memorização por não conseguirem dar significado a teoria formal que lhes é apresentada. Nesse sentido, acredita-se que uma proposta de ensino de limites de uma função real de uma variável baseada nas noções de conceito imagem e conceito definição, propostas por Tall e Vinner (1981), possam contribuir para a formação de indivíduos críticos e reflexivos, que não só compreendem o significado que épsolons e deltas podem ter em definições formais, mas que sejam capazes de utilizá-los para intervir no mundo em que vivem. (Rosa & Costa, 2013, p. 11)

Nesta perspectiva, o problema de pesquisa se constitui em um estudo de intervenção para ensinar e aprender limites de funções de forma que tenha significados para os aprendizes, isto é, que estabeleça relações com os conhecimentos prévios existentes na estrutura cognitiva dos estudantes. Para isto, criaremos situações didáticas e estratégias metodológicas para o ensino do conteúdo de limites de funções de modo que elas oportunizem uma aprendizagem significativa por estudantes universitários em vez de uma aprendizagem mecânica, temporária e/ou substancial. Simultaneamente, valorizaremos que os estudantes compreendam este conteúdo e o rigor necessário e exigido no ensino deste conceito matemático em nível superior, conforme afirma Cornu (2002).

### 1.2. Inquietações e questões de investigação

A preocupação pelo ensino de Cálculo nasceu das nossas inquietações nas aulas de Cálculo ainda quando estudante e permanecem até os dias atuais no papel de docente. É visível a dificuldade dos estudantes quanto à aprendizagem dos conceitos e regras estudadas nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. Segundo Lima (2013), estas dificuldades continuam existindo, pois

> Muitos professores passaram, atualmente, a enfatizar, em um primeiro curso de Cálculo, as técnicas e os procedimentos algorítmicos, deixando a formalização dos conceitos para um segundo momento. O grande problema é que essa primazia dos cálculos de limites, derivadas e integrais acaba também, na maioria das vezes, esvaziando completamente de sentido a disciplina. Os estudantes aprendem a fazer cálculos, mas não são levados a refletir a respeito dos significados dos conceitos

envolvidos nos mesmos e ou sequer de suas aplicações, seja em outras ciências ou na própria Matemática. (pp. 10-11)

Estas inquietações nos levaram, ainda que de maneira informal, a utilizar nas aulas de Cálculo *softwares* para construção e visualização de gráficos, levando em consideração o risco de uma abordagem mecânica e a utilização destas tecnologias não introduzirem "mudanças significativas nas práticas pedagógicas, ocorrendo apenas a informatização dos métodos tradicionais de instrução" (Miquelino & Resende, 2013, p. 2). Segundo estudos destes autores, existe influência das TIC no desenvolvimento profissional de professores de Cálculo das Instituições de Ensino Superior (IES) pesquisadas, ou seja, segundo os autores, as tecnologias estão interligadas a fatores que podem influenciar o processo de ensino-aprendizagem de forma positiva, agregando conceitos antes não possibilitados pelo ensino tradicional, ou seja, aprender algo na sala de aula que não foi possível com recursos anteriormente utilizados.

No curso de Especialização em Educação Matemática, que realizamos na Universidade Católica do Salvador (UCSal), conhecemos a utilização das TIC e das tendências de estudos desta área e as direcionamos para o ensino da matemática, mais especialmente para o Cálculo.

Posteriormente, influenciado pela disciplina Teorias da Aprendizagem, cursada em um programa de mestrado/doutorado, conhecemos os elementos e as particularidades da Teoria da Aprendizagem Significativa (Ausubel, Novak & Hanesian, 1980).

A partir daí, desenvolvemos uma pesquisa de mestrado na Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), intitulada *As Tecnologias da Informação no Estudo do Cálculo na Perspectiva da Aprendizagem Significativa*[1]. Apesar de o tema ser parecido com nossa atual pesquisa de doutorado, todavia, o foco e o conteúdo estudado foram diferentes. Enquanto na pesquisa de mestrado estudamos superfícies em $IR^3$, auxiliadas pelo uso de tecnologias de informação de comunicação, na pesquisa de doutorado estudamos o conteúdo de limites de funções utilizando dois livros como recursos informacionais e comunicacionais, não sendo dada tanta ênfase no uso das TIC como na pesquisa de mestrado, apesar de que a utilização das tecnologias informáticas na investigação do doutorado também serviu como auxilio na compreensão do conceito de limites de funções.

Hoje, pensamos em criar condições para que o ensino de Cálculo seja cada vez mais expressivo e motivador para os professores e estudantes desta disciplina e que a relação entre

[1] Pode-se aceder à dissertação no sítio: http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/Diss_Anderon.PDF

ensino e aprendizagem favoreça um ambiente propício para a ocorrência de uma aprendizagem significativa. Para Lima (2013) é importante

> mostrar aos alunos que de nada adianta eles decorarem coisas; é preciso que os estudantes percebam que este é um aspecto fundamental em suas formações. Da mesma forma, eles devem aprender a não aceitar tão facilmente aquilo que lhes é dito em sala de aula. (p. 12)

Pensando nisso, buscamos conhecer e adentrar no estudo do Cálculo facilitando a sua compreensão e o seu ensino, com a possibilidade de estabelecer uma aprendizagem significativa dos seus conteúdos, conceitos e regras, em especial, no estudo de limites de funções. Nesta perspectiva, é da maior relevância o trabalho desenvolvido por um grupo de pesquisadores que estudam questões relativas ao ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos no ensino superior, denominado de Pensamento Matemático Avançado (Tall, 1991).

> A tomada de consciência da existência deste tipo de pensamento matemático pode ser bastante útil para o ensino. Ao ter em conta os diferentes processos envolvidos na construção dos conceitos é possível desenhar modelos pedagógicos que valorizem a compreensão e não apenas a memorização e a repetição de procedimentos realizada muitas vezes sem compreensão. Esta abordagem coloca-nos também um desafio ao nível das práticas sociais que acontecem em muitas salas de aula. As normas sociais e sociomatemáticas que regem muitas das aulas onde os conceitos matemáticos mais complexos são trabalhados terão de sofrer alterações várias, no sentido de permitir que os alunos sejam envolvidos em tarefas de pesquisa e descoberta, tal como aconteceu muitas vezes com os matemáticos que estudaram estes conceitos pela primeira vez. (Domingos, 2006, p. 77)

Apoiado nas ideias de Vinner (1991), Abreu e Reis (2011) fazem uma análise das relações entre os conhecimentos prévios dos estudantes e informações matemáticas, afirmando haver um processo complexo de interação entre eles.

> Quando evocamos um conceito qualquer ou quando vamos nos apropriar de uma nova informação, e aqui podemos incluir os conceitos e as informações matemáticas, o fazemos de maneira complexa e acionamos diferentes partes de nosso cérebro ao mesmo tempo. Existe toda uma estrutura cognitiva extremamente complexa para a apropriação desta nova informação. Nosso cérebro evoca diferentes imagens para se apropriar deste novo conceito, acionando toda uma rede complexa de imagens, definições pré-estabelecidas e saberes prévios para compreendermos esta nova informação. (Abreu & Reis, 2011, p. 448)

Conforme vimos nos estudos dos autores, há influência e presença, em sua citação, de elementos existentes na teoria da aprendizagem signifcativa, por exemplo, quando afirmam a interação de uma nova informação com conhecimentos prévios de um indivíduo, pois este processo se caracretriza como o princípio de assimilação contido na teoria, na qual uma nova informação "a" interage com um conhecimento prévio denominado de subsunçor "A". Esta interação por meio de processos cíclicos entre ambos resultará numa aprendizagem que é chamada significativa, pois tanto "a" quanto "A" sofreram modificações e depois de uma fase obliterativa (esquecimento) restará o subsunçor "Aa", ou seja, o subsunçor "A" modificado pela nova informação "a" (Ausubel et al., 1980).

Tendo em conta a literatura sobre o Pensamento Matemático Avançado (Vinner, 1991; Tall, 1991), e a Teoria da Aprendizagem Significativa (Ausubel et al., 1980), as práticas vivenciadas em sala de aula e as inquietações antes apontadas, operacionalizou-se a problemática do presente estudo estabelecendo as três seguintes questões de investigação:

1. Quais os conhecimentos, impressões e expectativas dos estudantes ao iniciar o estudo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, em especial, limites de funções?
2. Quais recursos os professores utilizam para ensinar limites de funções? E qual a sua relevância para a aprendizagem dos estudantes de Cálculo Diferencial e Integral I?
3. Como o uso de recursos informacionais e comunicacionais pode contribuir para a aprendizagem significativa de limites de funções por estudantes de Cálculo Diferencial e Integral I?

## 1.3. Relevância e objetivo do estudo

Uma das necessidades explícitas da existência deste estudo resulta da vivência de disciplinas como pré-cálculo, ou seja, disciplinas que antecedem a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, com conteúdos básicos que ajudam o estudante a consolidar e aprofundar os seus conhecimentos em conteúdos e conceitos estudados no ensino médio e fundamental.

> Os professores, tanto de Cálculo como de Física, ensinam os conteúdos pressupondo que os alunos têm os conhecimentos prévios necessários, num nível elevado de abstração. Especificamente no Cálculo, os professores contam com conhecimentos prévios que os alunos possam ter adquirido no Curso Pré-Cálculo. (Santarosa & Moreira, 2011, p. 347)

Contudo, as conclusões nos estudos de Barbosa (1994) referente à aprendizagem dos alunos em relação ao Cálculo indicam que "a interação entre os alunos da turma é um dos fatores que dificultam a aprendizagem dos conteúdos de cálculo e, consequentemente, interfere no rendimento desses alunos" (p. 62). Outra questão que está relacionada ao fracasso na disciplina de Cálculo é a formação deficiente em matemática, gerando consequentemente a evasão na disciplina. O estudo ainda aponta que há problemas relacionados ao ensino desta disciplina, conforme vimos na citação abaixo.

> Observou-se que, apesar de os alunos admitirem que as maiores falhas recaiam sobre eles, devido à deficiência na formação matemática e do fraco desempenho no vestibular, admitem também que existem falhas, com certo grau de intensidade, na forma de trabalho desenvolvida pelos professores, interferindo de modo decisivo no desempenho e no rendimento dos alunos, questionam sobre a metodologia utilizada, a falta de clareza, objetividade e motivação na transmissão dos conteúdos e, principalmente, a não preocupação do professor com a aprendizagem dos alunos e o pouco ou nenhum relacionamento entre professor e aluno, tão necessário como fator facilitador na aprendizagem. Além disso, constatou-se, também, que o nível de participação dos alunos em sala de aula é bastante reduzido. Certamente todos esses questionamentos e a pouca participação dos alunos decorrem da prática utilizada pelos professores em sala de aula do modelo tradicional de através da aula meramente expositiva. (Barbosa, 1994, p. 63)

Assim, essa pesquisa justifica-se por ser mais um auxílio neste resgate de conteúdos e ao mesmo tempo por servir como ponte para a ancoragem destes conteúdos com os primeiros conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, sobretudo em relação a limites de funções, ou seja, uma forma de interagir entre os novos conhecimentos do Cálculo e conhecimentos já ancorados na estrutura cognitiva dos estudantes iniciantes em Cálculo — fundamento principal da Teoria da Aprendizagem Significativa (Ausubel et al., 1980).

Os resultados desta pesquisa para o ensino de Cálculo é de grande valia, tanto se pensarmos na ampliação do campo da docência do ensino superior quanto nas futuras práticas do docente universitário, mais especificamente do professor de Cálculo. Outra contribuição para o campo temático de investigação é que a pesquisa proporcione um desenvolvimento e uma intervenção metodológica na forma de ensinar e aprender limites de funções, e em termos mais gerais conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, pois "a facilitação da aprendizagem significativa depende muito mais de uma nova postura docente, de uma nova diretriz escolar, do que de novas metodologias, mesmo as modernas tecnologias de informação e comunicação". (Moreira, 2013a, p. 26). Esta ideia é ratificada por Zuchi (2005) quando a autora afirma que, baseado em livros didáticos, os professores de Cálculo adotam estratégias metodológicas diferenciadas para ensinar limites e que estas podem ocasionar em uma dificuldade para aprendizagem do conceito de limites de funções.

> Um dos motivos do obstáculo do processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite se dá porque o professor usa o ponto de vista cinemático para introduzir o

> conceito de limite e a seguir formaliza o conceito usando o ponto de vista de aproximação $(\varepsilon, \delta)$. Isso pode gerar dificuldades no processo de ensino aprendizagem desse conceito, pois os alunos não conseguem visualizar a relação entre ambos e não entendem o porquê de encontrar a relação entre $\varepsilon$ e $\delta$. (Zuchi, 2005, p. 69)

Com isso, tendo como parâmetro esta breve fundamentação teórica, a pesquisa teve por objetivo investigar como o uso de dois livros — *Guia Mangá de Cálculo Diferencial e Integral* e *Cálculos para Leigos*, usados concomitantemente pelo professor regente com outros livros didáticos mais tradicionais, auxiliados por recursos tecnológicos (*softwares*), poderão contribuir e favorecer uma aprendizagem significativa do conteúdo limites de funções na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral para estudantes iniciantes nesta disciplina. Para atingirmos este objetivo é necessário que os materiais e recursos utilizados sejam potencialmente significativos. Entretanto,

> O significado está nas pessoas, não nas coisas. Então, não há, por exemplo, livro significativo ou aula significativa; no entanto, livros, aulas, materiais instrucionais de um modo geral, podem ser potencialmente significativos e para isso devem ter significado lógico (ter estrutura, organização, exemplos, linguagem adequada, enfim, serem aprendíveis) e os sujeitos devem ter conhecimentos prévios adequados para dar significado aos conhecimentos veiculados por esses materiais. (Moreira, 2013a, p. 75)

Além dos livros citados, teremos um estudo paralelo com outros livros didáticos de Cálculo, utilizando, também, *softwares* matemáticos para "plotagem" de gráficos como *WinPlot* e o *GeoGebra*. É provável que este suporte tecnológico – potencialmente significativo – auxilie a visualização e contribua para uma maior dinâmica de aprendizagem de limites de funções na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

### 1.4. Procedimentos Metodológicos

A escolha da metodologia de pesquisa está diretamente ligada às questões de investigação e ao objetivo da pesquisa. Nesta perspectiva, a pesquisa desenvolvida apresentou características de um estudo qualitativo, pois os determinantes para a escolha metodológica foram: o tema que se pretendeu estudar; a natureza dos dados que foram coletados e os métodos de coleta e análise utilizados. Assim, estes fatores foram determinantes na seleção da metodologia utilizada e na definição do caráter da pesquisa.

### 1.4.1. Opções metodológicas

A escolha dos métodos deve se assemelhar a um funil, ou seja, no início do estudo ela deve ser ampla com o pesquisador coletando o máximo de informações e dados possíveis para responder as questões de investigação, seguidamente o estreitamento destas informações irá determinar especificamente o que se pretende pesquisar, assim como no funil, no início mais largo e depois mais estreito (Ludke & André, 1986; Bogdan & Biklen, 1994).

Não existe apenas um método a ser utilizado, ou o melhor, ou mais efetivo. A escolha dentre estes se faz a partir do problema estudado e, na maioria dos casos, é necessário haver uma combinação de um método com outros. Neste caso, é importante que o pesquisador esteja atento à quantidade e qualidade dos dados coletados, não podendo perder de vista o foco da pesquisa, ou seja, que os dados coletados sejam suficientes e necessários para responder às questões de investigação e para atingir os objetivos propostos na pesquisa.

Assim, esta pesquisa assumiu um caráter qualitativo e teve como métodos de coleta de dados: dois questionários, observações (Ciclo de Estudos) e entrevistas. Ainda na etapa do Ciclo de Estudos, recorremos ao método de observação-participante e à análise de documentos produzidos pelos estudantes a quando da resolução de atividades, como mapas, resolução de tarefas e gráficos realizados pelos estudantes participantes. Acreditamos que o conjunto de métodos selecionados darão as informações necessárias para responder às questões de investigação e atingir o objetivo da pesquisa.

### 1.4.2. Tratamento dos dados

Segundo Ludke e André (1986), a análise de dados deve passar por uma fase de classificação e outra de organização. Ambas as fases devem considerar aspectos fundamentados teoricamente e de uma análise criteriosa do material coletado. Posteriormente, os autores classificam outra fase chamada de teorização, a qual consiste num diálogo entre os dados coletados e a parte teórica defendida pelos autores na fundamentação teórica. Nesta última, cabe a sensibilidade e o olhar do pesquisador, uma vez que é necessário utilizar uma subjetividade para analisar os dados coletados. Ratificamos a importância das categorias de dados para este feito, uma vez que esta facilitará a codificação, tradução dos dados e das informações que estes revelarão.

### 1.5. Composição da tese

Esta tese está dividida em cinco capítulos, incluindo o presente capítulo, o Capítulo I — Introdução, onde são relatadas as inquietações, é destacada a relevância do estudo e são referidos o objetivo e as questões de investigação estabelecidas. Apresentamos, ainda de forma sucinta, os procedimentos metodológicos a serem adotados na pesquisa.

No Capítulo II — Aportes Teóricos — faremos uma revisão de literatura sobre tópicos que iremos desenvolver no decorrer da tese, como por exemplo: aprendizagem significativa; pensamento matemático avançado; o ensino de Cálculo e o uso de recursos informacionais e comunicacionais (livros didáticos, livros em geral e *softwares*).

No Capítulo III — Procedimentos Metodológicos — descrevemos o nosso encaminhamento metodológico para o estudo, trazendo os métodos e as opções metodológicas para a investigação.

No Capítulo IV — Análise e Discussão dos Resultados — apresentamos uma análise dos dados coletados e obtidos na pesquisa, auxiliados pela fundamentação teórica. Neste processo foram levadas em consideração as atividades desenvolvidas no Ciclo de Estudos, as observações efetuadas durante a sua realização e as entrevistas com professores e estudantes. Por fim, faremos uma avaliação de todo este processo.

No Capitulo V — Considerações Finais — Abordamos as ideias conclusivas deste trabalho respondendo as perguntas de investigação. Por meio dos resultados e análise dos dados feitos nesta pesquisa sugerimos algumas recomendações para futuras pesquisas que possam partir deste estudo ou mesmo que venham a tê-lo como referência e fonte para outras pesquisas que tratem sobre o mesmo tema.

Finalmente nas Referências, ao concluir a tese, apresenta-se a lista da bibliografia usada ao longo do desenvolvimento da mesma.

## CAPÍTULO II

## APORTES TEÓRICOS

Neste capítulo apresentamos os aportes teóricos desta pesquisa, isto é, uma visão do ensino da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, mais especialmente limites de funções, nos cursos que utilizam-se deste conteúdo e disciplina na sua matriz curricular. Para simplificação, posteriormente, utilizaremos apenas o termo Cálculo para identificar a disciplina. Ainda neste capítulo abordaremos sobre a teoria da aprendizagem significativa, o pensamento matemático avançado e o uso de recursos informacionais e comunicacionais – entendemos como tais recursos o uso de estratégias de ensino, sequências didáticas, livros, *softwares/*aplicativos (GeoGebra, *Winplot*, Excel, Maple), calculadora, lousa eletrônica, tecnologias informáticas, etc. Este capítulo servirá como subsídio para os dados coletados, de modo que faremos um diálogo com eles na análise dos dados.

A preocupação com o ensino de Cálculo nas Instituições de Ensino Superior já é indicada há muito tempo, desde o movimento chamado Reforma do Cálculo, no qual professores e pesquisadores estudaram métodos e estratégias de ensino que pudessem erradicar a evasão e amenizar o número de repetências na disciplina.

As questões de investigação e a sua interligação dividirão nossa revisão de literatura em quatro subtópicos que contemplarão: a Aprendizagem Significativa, que é o primeiro ponto a considerar e consiste numa teoria de aprendizagem que dará suporte aos resultados desta investigação; seguidamente abordaremos a questão do Pensamento Matemático Avançado, enfatizando os conceitos de imagem conceitual e definição conceitual; o terceiro ponto relaciona-se a teoria da Aprendizagem Significativa com o Pensamento Matemático avançado; e, finalmente, trata-se a questão do Ensino do Cálculo, especialmente de limites de funções, auxiliado por Recursos Informacionais e Comunicacionais e por dois livros de texto, sendo que um deles é fundamentado em histórias em quadrinhos, fatos que levaram a uma abordagem desta temática em nosso corpo teórico. Ainda neste tópico, daremos um tratamento ao uso de tecnologias informáticas como suporte, verificação e fixação do conteúdo de limites de funções. Acreditamos que esta rede teórica dê subsídios necessários para desenvolvermos a pesquisa e respondermos às questões de investigação.

## 2.1. A teoria da aprendizagem significativa

No estudo a realizar utilizaremos a Teoria da Aprendizagem Significativa ausubeliana, que posteriormente teve contribuições de pesquisadores como Novak, Gowin e Hanesian. Atualmente, passados um pouco mais de 50 anos do surgimento da teoria, é natural que tenham surgido novas visões da aprendizagem significativa, sobretudo numa perspetiva de complementaridade e de enriquecimento da visão clássica ausubeliana. Por exemplo, Joseph Novak dá à aprendizagem significativa uma visão humanista, em que ela subjaz à integração positiva, engrandecedora de pensamentos, sentimentos e ações; Gowin apresenta uma visão interacionista social vigotskyana, na qual a aprendizagem significativa é uma decisão do aprendiz após ter captado significados, contextualmente aceites, em um processo de negociação de significados, cujo objetivo é o compartilhar significados.

Esta teoria foi objeto de algumas interpretações e contribuições de estudiosos e pesquisadores brasileiros, como Moreira (2006) — autor no qual nos apoiaremos para a fundamentação dessa teoria, com suas ideias de implementar a aprendizagem significativa de maneira crítica no ensino e aprendizagem em salas de aula. Masini e Moreira (2008), "mais recentemente, defendem uma visão crítica para a aprendizagem significativa, uma perspectiva na qual não basta captar significados aceites no contexto da matéria de ensino, é preciso captá-los criticamente" ( p. 41).

O conceito central da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel consiste no

> processo pelo qual uma nova informação se relaciona, de maneira *substantiva*[2] (não literal) e *não arbitrária*[3], a um aspecto relevante da estrutura cognitiva, do indivíduo. Neste processo a nova informação *interage* com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel chama de "conceito subsunçor" ou, simplesmente "subsunçor" existente na estrutura cognitiva de quem aprende. (Moreira, 2006, p. 14-15, grifo nosso)

O conceito de subsunçor (Moreira, 2006) refere-se "a qualquer ideia, conceito, proposição existente na estrutura cognitiva do aprendiz" e os subsunçores servem "como ancoradouros para os novos conhecimentos, se interagir com esses na finalidade de obter a aprendizagem significativa" (Moreira, 2006, p. 15).

---

[2] "o que é aprendido de maneira significativa tem também significados pessoais, idiossincráticos. Os conhecimentos têm significados denotativos que são compartilhados por certa comunidade de usuários e os conotativos que são pessoais". (Masini & Moreira, 2008, p. 15-16)

[3] "quer dizer, o novo conhecimento não interage com qualquer conhecimento prévio, mas sim com algum conhecimento que seja especificamente relevante para dar-lhe significado. Isso implica que se não houver esse conhecimento prévio não poderá haver aprendizagem significativa". (ibidem, 2008, p. 15-16)

> O subsunçor é, portanto, um conhecimento estabelecido na estrutura cognitiva do sujeito que aprende e que permite, por interação, dar significado a outros conhecimentos. Não é conveniente "coisificá-lo", "materializá-lo" como um conceito, por exemplo. O subsunçor pode ser também uma concepção, um construto, uma proposição, uma representação, um modelo, enfim um conhecimento prévio especificamente relevante para a aprendizagem significativa de determinados novos conhecimentos. (Moreira, 2013a, p. 8)

Na ausência do subsunçor na estrutura cognitiva é sugerido usar um "organizador prévio", que consiste em um "recurso instrucional apresentado em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade em relação ao material de aprendizagem" (Moreira, 2013a, p.14). Isso não quer dizer que o organizador prévio seja um resumo ou um sumário que estaria no mesmo nível de abstração do material a aprender, sendo necessário que ele esteja em um nível de abstração e inclusividade maior, como uma pergunta, uma situação-problema, um problema, uma dramatização, e segundo o autor pode resultar de uma aula que precede um conjunto de outras aulas. O autor enfatiza que é importante que o organizador prévio "preceda a apresentação do material de aprendizagem e que seja mais abrangente, mais geral e inclusivo do que este" (Moreira, 2013a, p.14).

Além disso, os organizadores prévios podem ser utilizados como recursos favorecendo a relacionabilidade de novos conhecimentos com os conhecimentos prévios, isto é, "devem ajudar o aprendiz a perceber que novos conhecimentos estão relacionados a ideias apresentadas anteriormente, a subsunçores que existem em sua estrutura cognitiva prévia" (Moreira, 2013a, p.15). Para Ausubel, a função do organizador prévio é de "pontes cognitivas", ou seja, servirá como uma ponte entre o conhecimento que o aprendiz já possui e o novo conhecimento do qual se pretende aprender. Todavia, elas devem também servir como identificação do conteúdo relevante existente na estrutura cognitiva e explicar, de forma clara claro a relevância deste conteúdo para um novo conhecimento; oferecer uma visão geral do que se pretende ensinar em um nível de abstração maior ratificando as possíveis relações existentes; e prover um conjunto de ideias que levem o aprendiz a apreender de forma significativa novos conhecimentos. (Moreira, 2013a)

Ainda, para este autor, coadunando com as ideias ausubelianas, existe uma contraposição à aprendizagem significativa que consiste na aprendizagem mecânica ou automática, que consiste em uma aprendizagem

> em que novas informações são aprendidas praticamente sem interagirem com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva, sem ligar-se a conceitos

> subsunçores específicos. A nova informação é armazenada de maneira arbitrária e literal, não interagindo com aquela já existente na estrutura cognitiva e pouco ou nada contribuindo para sua elaboração e diferenciação. (Moreira, 2006, p. 16)

Para Ausubel et al. (1980), se quisermos promover a aprendizagem significativa é preciso averiguar esse conhecimento e ensinar de acordo. De modo geral, Ausubel quis dizer que

> se tivesse que reduzir toda psicologia educacional a um só princípio, diria o seguinte: o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Averigue isso e ensine-o de acordo. (Moreira, 2006, p. 13)

Para Miranda (2010), o averiguar e o ensinar de acordo são tarefas bastante difíceis defendidas pelo autor, pois averiguar consiste na revelação (mostrar, compreender) da estrutura cognitiva do aprendiz e no entendimento da sua organização; e o ensinar de acordo requer uma boa resposta dessa análise de averiguação, para que, na posse dos instrumentos básicos, recursos e metodologias de cada disciplina, o educador possa chegar a uma aprendizagem que seja significativa para o aluno, e não a uma simples sequência de atividades que possa induzir a uma memorização e/ou aprendizagem mecânica.

Para Ausubel et al. (1980) e Moreira (2006), a aprendizagem significativa quer dizer aprender de maneira não arbitrária e não literal, sendo que, ao falarmos sobre aquilo que o aprendiz já sabe, não queremos nos referir, simplesmente, à ideia de pré-requisito; ou seja, para a teoria ausubeliana a ideia é mais ampla, consistindo em aspectos específicos da estrutura cognitiva que são relevantes para a aprendizagem de nova informação.

Ausubel et al. (1980) não consideram o ensino e aprendizagem extensivos, ou seja, ainda que tenhamos um ensino bastante eficaz, isso não garante uma aprendizagem eficiente. A relação de ensino e aprendizagem é vista pelo autor como uma das condições que influencia a aprendizagem significativa. Nesse caso, ainda é possível que os aprendizes estejam desmotivados, desatentos, não querendo aprender, mesmo que com um ensino de qualidade. E também, por outro viés, podemos ter a possibilidade de um aprendiz ser autodidata e não necessitar do professor. Assim, "o ato de ensinar não se encerra em si mesmo, pois a finalidade do ensino é o aprendizado por parte do aluno e assim o produto da aprendizagem é, ainda, a única medida possível para se avaliar o mérito do ensino" (Ausubel et al., 1980, p. 12).

Nesse contexto, Ausubel et al. (1980) apresentam um quadro com dois "*continuum*", um vertical e outro horizontal, mostrando os tipos de aprendizagem e como elas se dispõem na teoria. Para os autores, tanto a aprendizagem por descoberta quanto a aprendizagem por recepção podem ser significativas, não havendo necessariamente uma dicotomia entre elas.

Assim, como a aprendizagem mecânica e a significativa não constituem algo dicotômico, e sim um *continuum* que transita entre essas duas aprendizagens, de forma análoga podemos estabelecer outro *continuum* para a aprendizagem por descoberta e recepção, na perspectiva da aprendizagem significativa.

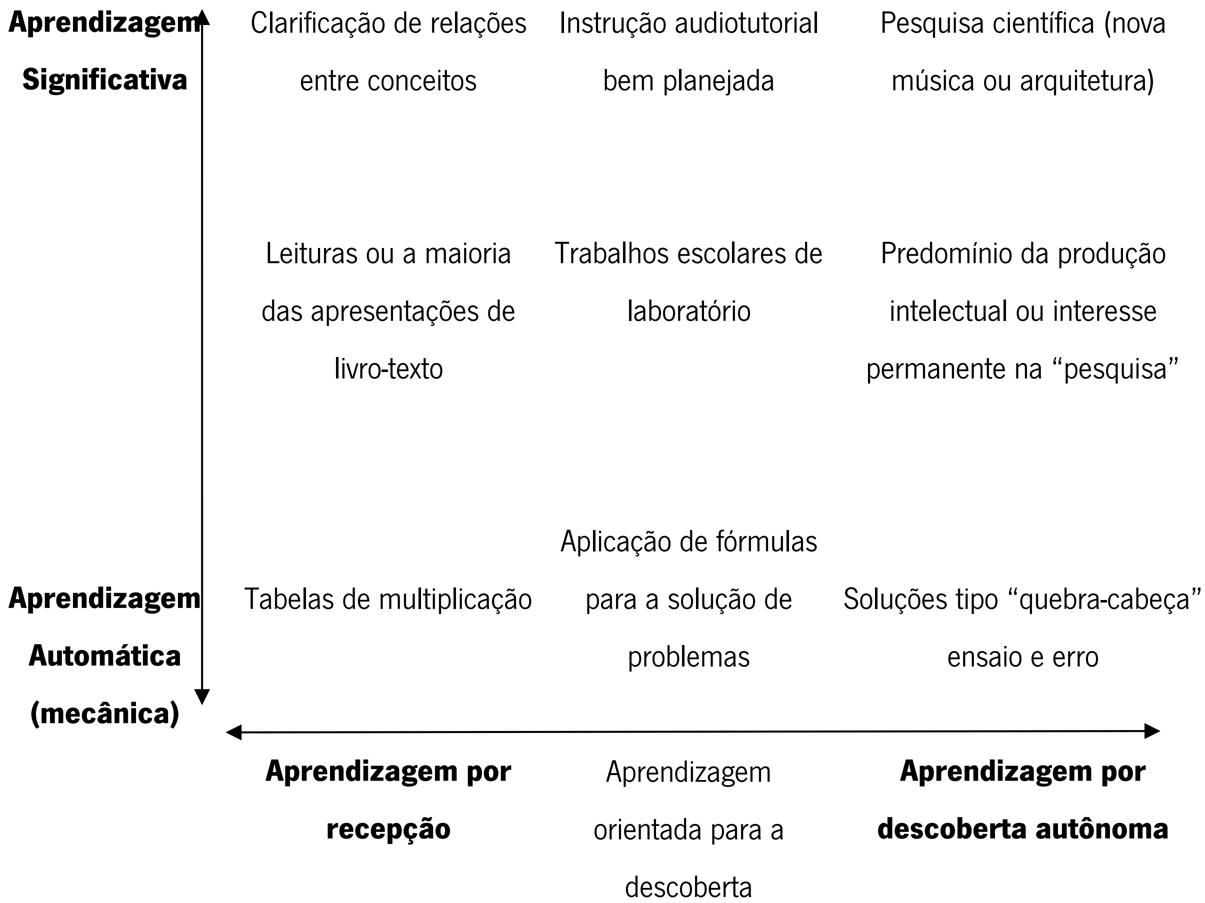



Figura 1 – Aprendizagem receptiva e aprendizagem por descoberta situam-se em diferentes contínuos que partem da aprendizagem automática ou da aprendizagem significativa. Fonte: (Ausubel et al., 1980, p.12)

Os autores afirmam que "tanto a aprendizagem receptiva como por descoberta podem ser automáticas [mecânicas] ou significativas, dependendo das condições sob as quais a aprendizagem ocorre" (Ausubel et al., 1980, p. 23, grifo dos autores). Na aprendizagem receptiva "o que deve ser aprendido é apresentado ao aprendiz em sua forma final" (p. 17), ou seja, a tarefa neste tipo de aprendizagem não envolve qualquer descoberta independente por parte do estudante. Deste exige-se somente internalizar ou incorporar o conteúdo que lhe foi apresentado. Já para a aprendizagem por descoberta "o conteúdo principal a ser aprendido deve ser descoberto pelo aprendiz" (ibidem, p. 17), ou seja, o conteúdo principal daquilo que vai ser aprendido não é dado, mas deve ser descoberto pelo aluno antes que possa ser significativamente incorporado a sua estrutura cognitiva.

Salientamos e corroboramos com o pensamento de Ausubel et al. (1980) da não existência de uma dicotomia entre a aprendizagem por recepção e a aprendizagem por descoberta, nem tão pouco entre a aprendizagem significativa e mecânica, acontecendo a aprendizagem no conjunto delimitado pelos dois "*continuum*". Moreira (2006) vem dizer que a aprendizagem na escola, a aprendizagem acadêmica, ocorre em uma "zona cinzenta" localizada no centro de ambos os "*continuum*", conforme a figura abaixo

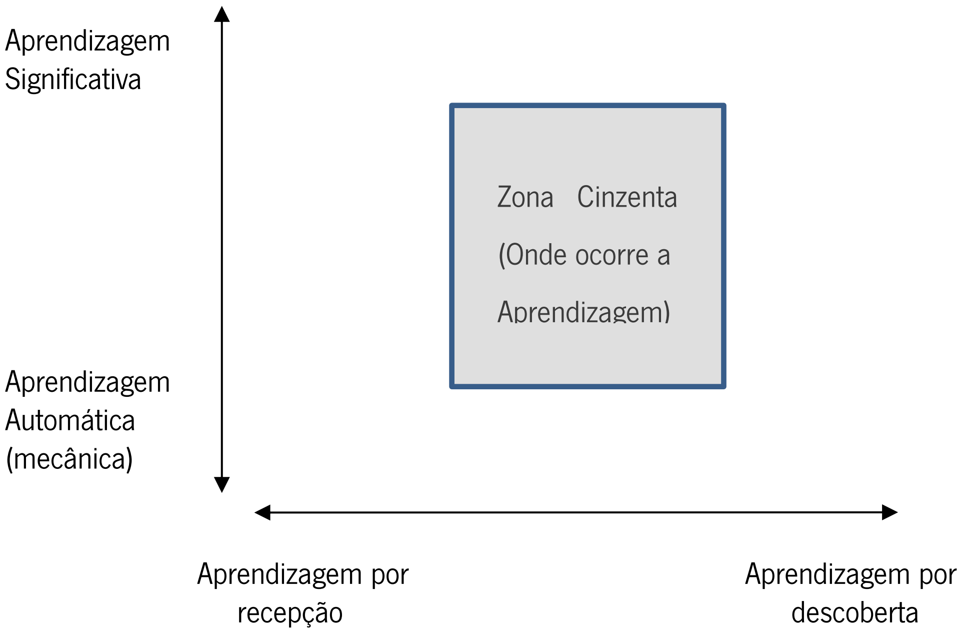



Figura 2 – Uma representação a respeito das aprendizagens significativa x mecânica com as aprendizagens por recepção x descoberta. Fonte: Própria, baseada na Figura 1 e nas ideias do professor Marco Antônio Moreira.

É importante salientar que o conhecimento não necessariamente é construído por recepção ou por descoberta, pois no ensino médio e superior é predominante a aprendizagem por recepção, mesmo com o ensino centrado no aluno, e o fato de ser receptiva não quer dizer, necessariamente, que será mecânica. Ocorrer aprendizagem por recepção e significativa vai depender das condições para a ocorrência da aprendizagem significativa e da possível interação dos novos conhecimentos com os conhecimentos prévios de forma não arbitrária e não literal (Moreira, 2013a).

> É importante reiterar que a aprendizagem significativa se caracteriza pela *interação* entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos, e que essa interação é *não-literal* e *não-arbitrária.* Nesse processo, os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade cognitiva. (Moreira, 2013a, p. 6)

Esse processo ocorre de maneira lenta, entretanto sempre progressivo, com quebras e continuidades ao longo do processo de interação dos conhecimentos novos com os prévios. Utilizando uma metáfora para explicar a ideia do autor supracitado, podemos exemplificar com o ensino do teorema fundamental do Cálculo (suponha este como um novo conhecimento para o aprendiz). Na relação da proposição e dos conceitos dos termos do teorema com os conteúdos de limites, derivada e integral (conhecimentos prévios), teremos uma possível interação, que segundo Moreira (2013a) modificará ambos os conhecimentos. Assim, é possível que o aprendiz perceba a existência e funcionalidade da derivada e da integral no teorema fundamental do Cálculo, no qual, havendo uma interação não literal e não arbitrária, consequentemente haverá a aprendizagem significativa do teorema.

A aprendizagem significativa processa-se em três formas: subordinada, superordenada e combinatória, e em três tipos: representacional, conceitos e proposicional. No caso da forma superordenada, Moreira (2013a) afirma que "uma nova ideia, um novo conceito, uma nova proposição, mais abrangente, passa a subordinar conhecimentos prévios" (p. 7). Contudo, o autor afirma que a maneira mais comum de aprender significativamente é a aprendizagem significativa subordinada, "na qual um novo conhecimento adquire significado na ancoragem interativa com algum conhecimento prévio especificamente relevante" (p. 7). Por exemplo,

> se o aprendiz já tem uma ideia, uma representação do que seja uma escola, a aprendizagem significativa de distintos tipos de escola como escola técnica, escola aberta, escola normal, escola pública, e outros, serão aprendidos por ancoragem e subordinação à ideia inicial de escola. Mas, ao mesmo tempo, como o processo é interativo, essa ideia inicial vai se modificando, ficando cada vez mais elaborada, mais rica e mais capaz de servir de ancoradouro cognitivo para novas aprendizagens. (Moreira, 2013a, p. 18)

> Suponhamos agora que o aprendiz não tivesse uma idéia mais ampla, ou o conceito de escola, e fosse aprendendo de modo significativo o que é uma escola pública, uma escola aberta, uma escola confessional, uma escola militar, etc., ela ou ele poderia começar a fazer ligações entre diferentes tipos de escola, buscando semelhanças e diferenças e chegar, por meio de um raciocínio indutivo, ao *conceito de escola*. Esta seria uma aprendizagem superordenada. (*idem*, *Ibidem*)

Já a aprendizagem combinatória consiste em uma forma em que a atribuição de significados de um novo conhecimento se dá por meio da interação com diversos outros conhecimentos existentes na estrutura cognitiva e não subordina nem superordena nenhum deles, apenas pode ter algo em comum (Moreira, 2013a).

Em relação aos tipos, o representacional é o mais simples, associado apenas a um referente concreto: o significado de um termo ou de um conceito. Já o tipo de conceitos não precisa de um referente concreto, mas sim da percepção do sujeito de regularidades e padrões representados por certo símbolo. A aprendizagem de conceitos, nos diz Moreira (2013a), seria uma aprendizagem representacional de alto nível. Finalmente, o terceiro tipo, o proposicional, consiste em dar significados a uma proposição, sendo mais elaborada que os tipos representacional e de conceitos, pois a proposição é composta por conceitos, mas não necessariamente o proposicional seria a soma dos conceitos existentes na proposição.

Ausubel definiu dois processos que ocorrem na estrutura cognitiva de um aprendiz: diferenciação progressiva e reconciliação integradora, que são utilizados de forma simultânea e dinâmica para obter a aprendizagem significativa. A diferenciação progressiva "é o processo de atribuição de novos significados a um dado subsunçor (um conceito ou uma proposição, por exemplo) em resultado da sucessiva utilização deste subsunçor para dar significado a novos conhecimentos" (Moreira, 2013a, p. 9). A reconciliação integradora "é um processo da dinâmica da estrutura cognitiva, simultâneo ao da diferenciação progressiva, que consiste em eliminar diferenças aparentes, resolver inconsistências, integrar significados, fazer superordenações" (Moreira, 2013a, p. 10). O autor nos diz que

> o ensino deveria começar com os aspectos mais gerais, mais inclusivos, mais organizadores, do conteúdo e, então, progressivamente diferenciá-los. Não seria, no entanto, uma abordagem dedutiva. Uma vez introduzidos os conceitos e proposições mais gerais e inclusivos, eles devem imediatamente ser exemplificados, trabalhados em situações de ensino. Ao longo de todo o curso de uma disciplina, por exemplo, os conteúdos gerais e específicos devem ser trabalhados em uma perspectiva de diferenciação e integração, de descer e subir, várias vezes, nas hierarquias conceituais. Também não é uma abordagem indutiva. São as duas coisas, diferenciação progressiva e reconciliação integradora, acontecendo, intencionalmente, ao mesmo tempo. (Moreira, 2013a, p .22)

Salientamos que na apresentação de um conteúdo matemático na sua forma final, acabada e sofisticada não se salienta uma diferenciação progressiva e ainda mais, segundo Moreira (2013a), estaria se contrariando tanto este processo quanto a reconciliação integradora e os conhecimentos prévios dos alunos. Abaixo apresentamos um modelo de funcionamento dos processos de diferenciação progressiva e reconciliação integradora conforme a citação supracitada.

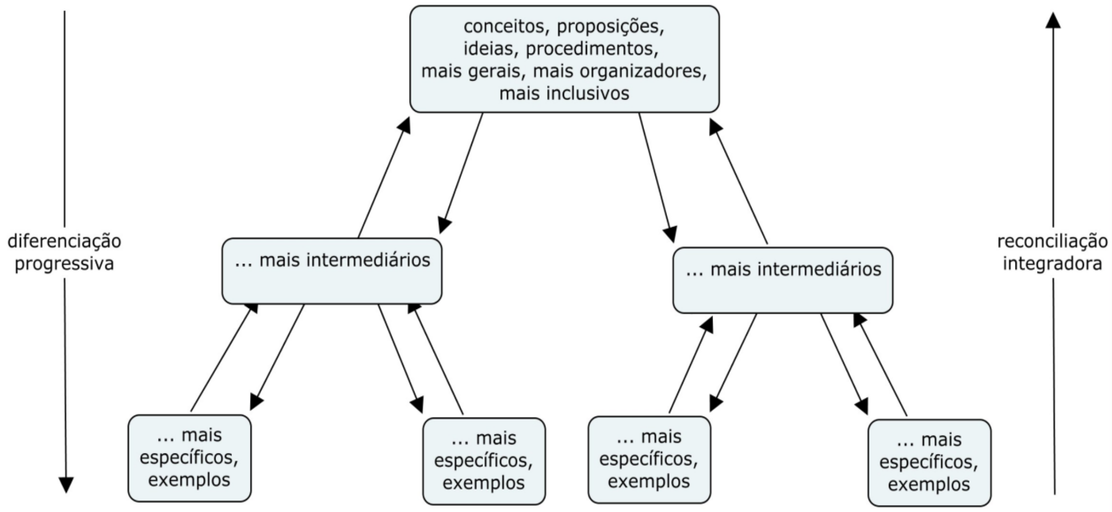



Figura 3 – Um diagrama indicando que a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora são interdependentes e simultâneos tanto na dinâmica da estrutura cognitiva como no ensino. Fonte: (Moreira, 2013a, p. 22)

São duas as condições para a ocorrência da aprendizagem significativa: o material de aprendizagem deve ser potencialmente significativo e o aprendiz deve apresentar uma predisposição para aprender (Ausubel et al., 1980). Quanto ao material ser potencialmente significativo, Moreira (2013a) diz que “o material de aprendizagem (livros, aulas, aplicativos, ...) tenha significado lógico, isto é, seja relacionável de maneira não-arbitrária e não-literal a uma estrutura cognitiva apropriada e relevante” (p. 11). Em relação a predisposição do aprendiz para aprender, o autor nos diz que “o aprendiz tenha em sua estrutura cognitiva ideias-âncora relevantes com as quais esse material possa ser relacionado. Quer dizer, o material deve ser relacionável à estrutura cognitiva e o aprendiz deve ter o conhecimento prévio necessário para fazer esse relacionamento de forma não-arbitrária e não- literal” (Moreira, 2013a, p. 11-12).

O que seria um material potencialmente significativo? Conforme a teoria ausubeliana, o significado está nas pessoas e não no objeto de aprendizagem ou em certo conteúdo ou conceito. Disso podemos apresentar outro recurso que pode auxiliar na aprendizagem significativa, que são os mapas conceituais, que se constituem em “diagramas conceituais hierárquicos destacando conceitos de certo campo conceitual e relações (proposições) entre eles. São muito úteis na diferenciação progressiva e na reconciliação integrativa de conceitos e na própria conceitualização" (Moreira, 2013a, p.25). Diferentemente de organogramas, mapas de setas, diagramas de fluxo, quadros sinópticos, os mapas buscam relacionar conceitos e hieraquizá-los e não classificá-los como nos quadros sinópticos (Moreira, 2013b, p.41). Os mapas são pessoais e idiossincráticos e mostram as ideias, pensamentos e conhecimentos prévios dos estudantes sobre certos conceitos ou conteúdos por meio de conceitos interligados por linhas ou setas que servem para informar alguma relação entre eles. Contudo, Moreira (2013a) afirma que a "facilitação da aprendizagem significativa depende muito mais de uma nova postura docente, de uma nova diretriz escolar, do que de novas metodologias, mesmo as modernas tecnologias de informação e comunicação" (p. 26).

Poderia nos perguntar: se a aprendizagem é significativa e não memorística, então tudo que se aprende significativamente nunca se esquece? A resposta é negativa, não porque a aprendizagem significativa está fadada ao esquecimento, mas porque, como referem Ausubel et al. (1980) e Moreira (2006; 2013a), o esquecimento, também chamado de fase obliteradora, é diferente do esquecimento em uma aprendizagem mecânica.

> **a** interage com **A** gerando um produto interacional **a'A**' que é dissociável em **a'+A'** durante a fase de retenção, mas que progressivamente perde dissociabilidade até que se reduza simplesmente a **A'**, o subsunçor modificado em decorrência da interação inicial. Houve, então, o esquecimento de **a'**, mas que, na verdade, está obliterado em **A'**. (Moreira, 2013a, p.20, grifo do autor)

Para entender melhor esta citação de Moreira (2013a), veja na figura abaixo como ocorre o príncipio de assimilação ausubeliano.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nova informação potencialmente significativa[4] | → | Relacionada e assimilada por | → | Conceito Subsunçor existente na estrutura cognitiva | → | Produto interacional |
| **a** | | | | **A** | | **A'a'** |

Figura 4 – Princípio de assimilação ausubeliano. Fonte: (Moreira, 2006, p. 29)

A figura 4 nos diz exatamente que uma nova informação/novo conhecimento (a) interage com um conceito subsunçor (A), relevante na estrutura cognitiva do indivíduo, obtendo-se o produto interacional no qual tanto o conhecimento novo quanto o subsunçor se tornam

[4] Corresponde a uma informação capaz de estabelecer interações com os subsunçores existentes na estrutura cognitiva do indivíduo (ver Ausubel et al., 1980).

modificados e mais consolidados e elaborados para futuras diferenciações progressivas e reconciliações integradoras. A figura 5 mostra de forma mais completa o príncipio de assimilação.

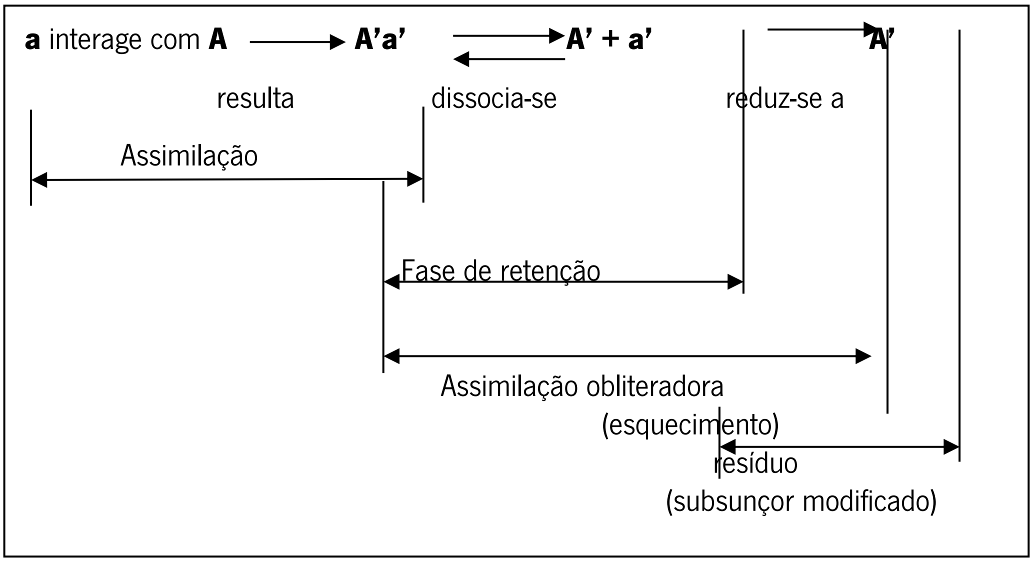



Figura 5 – A teoria da assimilação com todas as suas fases. Fonte: (MOREIRA, 2006, p. 31)

Segundo Moreira (2013a), na aprendizagem mecânica o esquecimento pode ser bem rápido se comparado com o que ocorre na aprendizagem significativa. Neste último caso, o esquecimento "é residual, ou seja, o conhecimento esquecido está "dentro" do subsunçor, há um "resíduo" dele no subsunçor" (p. 20, grifo do autor). Em outras palavras:

> Quando não usamos um conhecimento por muito tempo, se a aprendizagem foi significativa temos a sensação (boa, tranquilizante) de que, se necessário, podemos reaprender esse conhecimento sem grandes dificuldades, em um tempo relativamente curto. Se a aprendizagem foi mecânica a sensação (ruim, de perda de tempo no passado) é a de que esse conhecimento nunca foi aprendido, e não tem sentido falar em reaprendizagem. (Moreira, 2013, p. 20)

Sendo assim, acreditamos que esta apresentação da teoria da aprendizagem significativa servirá como fonte teórica de informação e construto para a análise dos dados e conclusões deste estudo.

## 2.2. O pensamento matemático avançado

"A natureza do pensamento matemático está inextricavelmente interligada aos processos cognitivos que dão origem ao conhecimento matemático" (Costa, 2002, p. 261). A autora não apresenta uma definição para o termo pensamento matemático avançado, mas discute uma ideia sobre o termo, baseada nas concepções de teóricos, como Tall, Dreyfrus, Dubinsky e Vinner, sobre a natureza desse pensamento.

Costa (2002) toma como fundamento as ideias de Tall e afirma que este autor advoga um pensamento que usa "estruturas cognitivas produzidas por um grande leque de atividades matemáticas para construir novas ideias que continuam a construir e alargar um sistema sempre crescente de teoremas demonstrados" (pp. 257-258). Simultaneamente, corrobora-se a perspectiva de Gray ao afirmar que o termo pensamento matemático avançado tem sido usado mais no sentido do pensamento de matemáticos profissionais criativos, quando imaginam, conjecturam e provam teoremas. Acrescenta-se, ainda, que esse termo também se aplica ao pensar dos estudantes, aos quais foram apresentadas definições e teoremas criados por outros e pedida a construção de um conceito.

"Não há uma distinção nítida entre muitos dos processos no pensamento matemático elementar e avançado, embora a matemática avançada é mais focada nas abstrações da definição e dedução" (Dreyfus, 1991, p. 25). Com base em Dreyfus (1991), Costa (2002) diz que o pensamento matemático avançado "consiste numa grande série de processos que interagem entre si, como por exemplo, os processos de representar, visualizar, generalizar, ou ainda outros tais como classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair ou formalizar" (p. 257).

Tall (1991) define a existência de uma transição do Pensamento Matemático Elementar (PME) para o Pensamento Matemático Avançado (PMA), sendo o primeiro característico de uma matemática focada na compreensão de conteúdos do ensino médio e fundamental, enquanto o segundo caracteriza-se por se desenvolver com o início do estudante no ensino superior e por possuir características de abstração, dedução e demonstração em matemática.

Corroboramos "a complexidade dos processos usados no pensamento matemático e as mudanças cognitivas que se verificam no indivíduo que determinam o tipo de pensamento envolvido na aprendizagem de um dado conceito e que caracterizam a transição do PME para o PMA" (Henriques, 2010, p. 16). A autora considera que a mudança dos hábitos experimentais e intuitivos do raciocínio matemático da escola para o formalismo do PMA é abrupta e que as dificuldades no raciocínio matemático avançado são devidas às mudanças do pensamento concreto para o abstrato e às noções dedutiva e indutiva de prova matemática, como vemos na citação abaixo, na qual a autora, com base em Tall, considera que no centro da transição da Matemática elementar para a avançada está a ideia de construir conceitos a partir da definição em vez de encontrar propriedades a partir de conceitos já existentes, usando-as como axiomas para construir teorias matemáticas sistemáticas e, entretanto modificando a noção de prova. Em ambos os casos a linguagem é usada para formular as propriedades dos objectos mas na Matemática elementar a descrição é construída a partir de experiências sobre o objecto, enquanto na Matemática avançada as propriedades dos objectos são construídas a partir da definição. (Henriques, 2010, pp. 17-18)

Apesar de haver controvérsias entre os autores sobre a complexidade e o conhecimento matemático avançado nos conceitos dos conteúdos de ensino fundamental e médio, Tall (1991) formatiza a evolução do pensamento matemático em três passos: percepção (entrada), pensamento (processo) e resposta (saída), e caracteriza o PMA "como aquele que dá atitude produtiva de se considerar a contextualização de um problema, numa investigação matemática, leva à formulação produtiva de conjecturas e ao estágio[5] final de refinamento e prova" (Tall, 1991, p. 46).

Embora a matemática avançada seja focada nas abstrações de definição e dedução, não há uma distinção clara entre o Pensamento Matemático Avançado e o Elementar, é possível abordar tópicos da matemática avançada de uma forma elementar. A relevância está em como esses tópicos são abordados. É necessário que haja uma interação entre os processos envolvidos nas diferentes formas de representação de um mesmo conceito, na generalização e na abstração. (Santos & Bianchini, 2011, p. 3)

Dreyfus (1991) afirma que o poder de abstração e de representação de um indivíduo ocorrem simultaneamente e que não existe uma dicotomia entre eles.

A abstração *é um processo construtivo de estruturas mentais* a partir de propriedades e relações entre objetos matemáticos. O **processo de abstrair** supõe os subprocessos de **generalizar** e **sintetizar**. O processo de generalização é aquele que permite ao sujeito tirar como consequência ou induzir do particular, identificar o que há de comum, expandir o domínio de validade. Enquanto o processo de sintetizar significa combinar ou compor partes de tal forma que elas formem um todo, isto é, um objeto matemático. É importante ressaltar que tais processos são indissociáveis. O **processo de representar** um conceito é aquele de gerar uma instância, um espécime, um exemplo, uma imagem dele. Ocorre em registros compartilhados como da escrita, do desenho, da fala, dos gestos e outros. (Machado & Biachini, 2013, p. 592, grifo do autor)

A pesquisa de Almeida e Igliori (2013) objetivou a organização de um panorama de artigos, de autoria de David Tall, relacionados à aprendizagem do Cálculo Diferencial e

[5] Referência à etapa final do processo

Integral. A partir dos dados foram geradas seis categorias de proposições teóricas e oito categorias de tópicos do Cálculo Diferencial e Integral. Dentre estas categorias teóricas aparecem três artigos que abordam a imagem conceitual e a definição conceitual e cinco artigos que tratam sobre os proceitos. Esta última categoria foi concebida por Tall e Gray em 1991 e a sua origem foi a partir das observações dos pesquisadores ao duplo caráter que certos símbolos da matemática possuem no contexto da aritmética. Em suma e mais especificamente, Almeida e Igliori (2013) referem-se aos conceitos de imagem e definição e à noção de proceito, afirmando:

> Tall e seus colaboradores [referenciando aos autores do livro Advanced Mathematical Thinking] produziram um quadro teórico amplo que possibilitou a elaboração de modelos que descrevem o desenvolvimento dos sujeitos e elementos teóricos que descrevem as operações cognitivas dos sujeitos. Dois exemplos de elementos teóricos que procuram descrever as operações cognitivas do sujeito são: o conceito imagem e conceito definição e a noção de proceito (processo e conceito). (p. 10)

Em nossos estudos, nos concentraremos nos conceitos de *imagem conceitual* e *definição conceitual* (Vinner, 1991) e na relação entre ambos. Para este autor, a imagem conceitual é

> algo não verbal associado em nossa mente ao nome do conceito. Pode ser uma representação visual do conceito, caso o conceito tenha representações visuais; pode ser também uma coleção de impressões ou experiências. As representações visuais, as figuras mentais, as impressões e as experiências associadas ao nome do conceito podem ser traduzidas em formas verbais. (p. 68)

Já na definição conceitual, "as representações visuais, as figuras mentais, as impressões e as experiências associadas ao nome do conceito podem ser traduzidas em formas verbais" (Vinner, 1991, p. 68). Assim, a definição conceitual passa a ser uma forma verbal de representar e definir um determinado conceito. Existe ainda a definição conceitual pessoal, que vai ser a definição construída ou compreendida pelo indivíduo. Ela geralmente nasce da imagem conceitual ou muitas vezes da própria definição conceitual formal que é aceita pela comunidade matemática. Para Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991), esta definição conceitual pessoal é a própria imagem da definição conceitual, que por sua vez é parte da imagem conceitual do indivíduo, pois para Cornu (1983), a "imagem conceitual" inclui também a "definição conceitual", isto é, uma classe de palavras usadas para especificar o conceito, podendo ser em frases aprendidas mecanicamente com mais ou menos ligação com o conceito; ele pode ser uma reestruturação, uma reformulação pessoal de uma definição matemática e também todas as palavras utilizadas para explicar o conceito.

> Nós assumimos que para adquirir o significado de um conceito é preciso formar uma imagem do conceito para ele. Isso significa que saber de cor a definição de um conceito não garante a compreensão do mesmo. Para entender um conceito, acredito que se tenha uma imagem do conceito e de certos significados que devem ser associados com palavras. (Vinner, 1991, p. 69)

Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991) afirmam que felizmente muitos conceitos que utilizamos no dia a dia não são definidos formalmente e que nós aprendemos a reconhecê-los pela experiência e sua utilização em certos contextos. "Estes conceitos vão sendo construídos ao longo do tempo sem necessidade de uma definição precisa ou formal e podem ser redefinidos no seu significado e interpretados de forma diferente quando o indivíduo encontra novos estímulos e/ou amadurece". (Henriques, 2010, pp. 41-42).

Por exemplo, na frase "meu lindo carro verde está parado em frente a minha casa" utilizamos palavras do dia a dia, de modo que não é necessário consultar as suas definições e algumas nem possuem mesmo uma definição. São palavras usadas no cotidiano e as suas combinações fazem com que entendamos a ideia da frase. Por outro lado, a frase "entre todos os retângulos com o mesmo perímetro o quadrado é o único que tem a área máxima" possui uma conotação mais técnica, afirmando o autor que ela está inserida em "contextos técnicos", pois retângulo, quadrado, perímetro e área são palavras do universo matemático e para sua compreensão é necessário um conhecimento da definição de quadrado, retângulo, perímetro e área. Para compreender o que a frase diz, todavia, a maioria das pessoas não tem este contato ou conhecimento, a não ser a comunidade de matemáticos ou um grupo de pessoas que lidam com a matemática no dia a dia. (Vinner, 1991).

"Em contextos técnicos as definições podem ter papéis extremamente importantes. Não só isso, eles ajudam na formação da imagem conceitual: contudo, muitas vezes tem um papel crucial em tarefas cognitivas" (Vinner, 1991, p. 69). Por exemplo, para encontrar o valor máximo de uma função em um intervalo fechado, caso você recorra ao gráfico da função, poderá diferenciar um máximo relativo de outro e, por meio da definição de máximo relativo, é possivel fazer a diferenciação com maior precisão e certeza do valor máximo procurado.

Em pesquisas realizadas por Vinner (1991), o autor investiga se os alunos utilizam as definições em tarefas cognitivas em contextos técnicos e a conclusão parece evidenciar uma confirmação. Para tal, o autor aplicou um questionário a 147 estudantes de nível superior com três perguntas que questionavam a compreensão do estudante a respeito da definição de função. O conceito de função foi ensinado e verificou-se que cerca de 57% dos alunos apresentaram uma definição de função bem próxima do conceito estudado.

Num outro caso, sobre a definição de limite de sequências, foi pedida a estudantes que voltavam das férias de verão para que eles escrevessem de forma intuitiva ou informal o que eles lembravam sobre limites de sequências e também lhes foi pedido sua definição formal e precisa. Dos 15 estudantes participantes, o autor afirma que apenas um deu uma resposta que seria mais próxima do rigor exigido na definição formal – "O limite de uma seqüência é o número a partir do qual todos os termos na seqüência, depois de certo ponto, variam apenas por um pequeno número ε" (Vinner, 1991, p. 78).

Para o autor, numa vertente mais rigorosa, poderíamos dizer que nem esta resposta satisfaz a definição de limite de uma sequência, pois na resposta falta um elemento de grande relevância para a definição, que é o fato de dever ser $\varepsilon > 0$. Por outro lado, entre os 14 estudantes que não conseguiram dar uma resposta satisfatória o autor identifica alguns equívocos, que foram evidenciados pela formação de uma imagem conceitual errônea devido à existência de um conflito entre a definição conceitual e os exemplos típicos usados para definir o conceito que, provavelmente, levou a construção de uma imagem conceitual errada. Para isso o autor sugere duas situações opostas: uma evitar os "conflitos cognitivos" para alunos que não estudaram uma matemática avançada e a outra seria ir em frente com os conflitos se o objetivo é gerar um grau maior de intelectualidade e conhecimento sobre o assunto. Ainda assim, o autor recomenda que autores de livros e professores valorizem o conhecimento do cotidiano dos alunos e que, dependendo do tipo de matemática que o aluno está predeterminado a estudar, para uma matemática elementar, evitemos os conflitos, e para uma matemática avançada, exploremos tais conflitos em busca de um crescimento intelectual sobre o assunto.

> Nós não acreditamos em uma "matemática para todos". Nós acreditamos em um pouco de matemática para alguns estudantes. E mesmo isso pode ser alcançado apenas por uma pedagogia apropriada sob condições adequadas para a aprendizagem. (Vinner, 1991, p. 81, grifo do autor)

Para Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991) a aprendizagem de um conceito não deve se iniciar com a sua definição formal. É necessário primeiramente um processo intuitivo de conhecer o conceito para depois partir para a sua formalização. Segundo Domingos (2003), a formação de conceitos é um dos tópicos de maior importância na psicologia da aprendizagem; com isso, o autor, referenciando Vinner (1991), afirma a existência de duas dificuldades para lidar com a formação de um conceito: uma diz respeito à noção do próprio conceito e a outra refere-se à determinação de quando um conceito está corretamente formado na mente de um indivíduo.

Em relação à formação de um conceito, segundo Vinner (1991), como já referimos anteriormente, possuímos a imagem conceitual e a definição conceitual de certo conceito, sendo que a definição conceitual servirá de base para a formação da imagem conceitual do conceito pretendido, e uma vez construída a imagem conceitual não é mais necessária a definição conceitual.

> quando um indivíduo ouve o nome de um conceito, ele produz um estímulo que aciona algo em sua memória caracterizado como conceito imagem. Dessa forma, pode-se afirmar que o conceito imagem é algo presente em nossa mente que associa uma *coisa não verbal* [representações visuais, impressões ou experiências] ao nome do conceito. Note que tais representações não verbais podem ser traduzidas por formas verbais, porém nem sempre essas últimas são precisas e ou as primeiras a serem evocadas por nossa mente. Por exemplo, quando falamos limite de uma função real de uma variável quando x tende ao número a, pode vir a mente de um indivíduo a imagem $lim_{x \to a} f(x)$, ou ainda, $f(x) \to c$ quando $x \to a$. (Rosa & Costa, 2013, p. 6)

Quanto a estas representações já defendidas por Dreyfus (1991), temos a representação mental defendida por Henriques (2010), mais central na aprendizagem e no pensamento matemático e que a considera de forma individual – cada sujeito terá sua representação mental dos objetos e processos matemáticos. Para a autora, representar um conceito é similar a gerar um caso, um exemplo ou uma imagem dele. Entretanto esta descrição do caso descrito não informa se a representação é simbólica ou mental e nem que "o 'gerar' significa em termos de processos pelos quais as representações mentais surgem e como são desenvolvidas" (p. 20, grifo da autora).

Para Domingos (2006), as noções de imagem conceitual e definição conceitual "surgem como ferramentas que nos permitem analisar o modo como os conceitos matemáticos se formam na mente dos alunos" (p. 13). Já para Abreu (2011), existe uma lacuna entre a imagem conceitual e a definição conceitual, o que significa algo errado. O autor, em seu estudo, discutiu o aproveitamento da "imagem conceitual pela qual o aluno constrói o seu conhecimento e aplica a definição conceitual como suporte para o aprimoramento e refinamento desta imagem conceitual" (p. 14). Para o autor, não quer dizer "uma "desconstrução" da imagem conceitual e sim, o seu aprimoramento à luz da definição conceitual" (p. 14, grifo do autor).

Quanto a estes conceitos formados na mente dos indivíduos, destacamos a imagem conceitual evocada, que consiste numa imagem conceitual construída com base em certos conceitos e conhecimentos prévios (Tall & Vinner, 1981)

Ainda sobre a imagem conceitual evocada, Vinner (1991) e Henriques (2010) afirmam que estudantes que já possuem uma imagem conceitual, e aos quais é introduzida a definição, pode ocorrer três situações possíveis: a imagem conceitual se modifica para acomodar a definição; a imagem conceitual se mantém intacta e a definição é esquecida ou distorcida e, por último, a imagem conceitual se mantém tal como se encontra e a definição está presente, caso em que elas não estão ligadas e são evocadas independentemente.

Tall e Vinner (1981) nos dizem que pode haver um conflito entre uma parte da imagem conceitual ou definição conceitual com outra parte da imagem conceitual ou definição conceitual, a que o autor chama de "fator de conflito potencial". Ainda que tais fatores nunca precisem ser evocados para a ocorrência de conflitos cognitivos, uma vez evocado os autores designam-nos de "fatores de conflito cognitivo".

Os autores citam como exemplo a definição de um número complexo $x + iy$ como um par ordenado de números reais $(x, y)$. Neste caso, a identificação de $x + i0 = (x, 0)$ como um número real $x$ passa a ser um fator de conflito potencial do conceito de número complexo, uma vez que o conflito cognitivo pode ocorrer quando o elemento $x$ é visto como diferente do par ordenado $(x, 0)$. Segundo as respostas aos questionários, dadas por estudantes, observou-se que muitos deles consideraram $\sqrt{2}$ como um número que não é complexo e outros afirmaram ser um número complexo com parte imaginária igual a zero. Com isso, $\sqrt{2}$ foi considerado como um número real e $\sqrt{2} + i0$ como um número complexo, tendo sido avaliados como entidades distintas ou iguais dependendo das circunstâncias, sem causar nenhum conflito cognitivo. Por outro lado, eles se tornaram fatores de um conflito cognitivo quando evocados simultaneamente (Tall & Vinner, 1981).

Os autores afirmam que os alunos, inicialmente, têm grandes dificuldades no uso de quantificadores — "todos os" e "alguns" — e que na definição formal de limites estes podem originar problemas na aprendizagem dos estudantes. Isto geralmente ocorre quando o estudante possui uma boa imagem conceitual e uma fraca definição conceitual, agravando-se especialmente quando há um fator de conflito potencial entre os dois. Com os mesmos quantificadores, "todos os" e "alguns", estes pesquisadores investigaram o seu uso com os teoremas do valor intermediário e do valor extremo e daí constatou-se que as dificuldades se mostraram evidentes, uma vez que as imagens mentais destes teoremas são óbvias. Por outro lado, as provas e demonstrações deles são mais sutis, o que levou os pesquisadores a concluir que a grande dificuldade dos estudantes em relação aos quantificadores, como se suspeitava, leva-os a ter grande dificuldade na manipulação e conhecimento das definições de limites e continuidade.

Em sua pesquisa, Henriques (2010) concluiu que os estudantes privilegiam o uso de representações algébricas para explicar suas tarefas matemáticas e que a representação gráfica é usada apenas quando os alunos não têm outro tipo de representação para usar. Afirma ainda que esta última – tida como um raciocínio pouco formal, matematicamente não aceita no ensino superior – é usada para obter resultados, explicar raciocínios, verificar resultados e visualização gráfica. A pesquisa deixa como orientação que os alunos devem ganhar experiência no uso de diversas representações matemáticas e que, sempre que possível, estabeleçam ligações entre elas.

A pesquisa de Abreu (2011) teve como objetivo identificar, tão detalhadamente quanto possível, as relações entre imagem conceitual e definição conceitual manifestadas por alunos de Cálculo I quanto ao estudo de limites de funções reais de uma variável. Para isso, o autor aplicou questões sobre o conceito de limites de funções e continuidades a 56 alunos do curso de Cálculo Diferencial e Integral. Em uma das atividades, o pesquisador pediu aos participantes que escrevessem com as suas palavras, sem utilizar números nem símbolos, o que eles entendiam por uma função ter limite quando a variável independente tende a certo valor. O autor analisou as respostas dadas a esta questão, tendo concluído:

> Podemos observar que os alunos têm uma noção, ao menos intuitiva, que a existência do limite está diretamente ligada a uma "aproximação lateral". Um total de 14 (quatorze) alunos (25%) associou a expressão "ter limite" a uma aproximação lateral. Por outro lado, apenas 3 (três) alunos (5,4%) atribuem esta aproximação lateral ao conceito de vizinhança à esquerda e à direita da variável dependente e, mesmo assim, o fazem sem citar explicitamente o termo "vizinhança" em qualquer momento. (Abreu, 2011, p. 69)

> Se considerarmos a imagem conceitual "ter limite é tender/se aproximar de um mesmo valor por ambos os lados" como aquela que contém elementos mais coerentes com uma definição formal de limite, verificamos um índice que pode ser considerado baixo: apenas 14 (quatorze) alunos (25%) associaram a existência do limite da função aos limites laterais. (Abreu, 2011, p. 70)

Ainda sobre esta pesquisa, é sabido que os alunos participantes já tinham tido contato com a definição formal de limites na disciplina de Introdução ao Cálculo, que antecede a de

Cálculo I. Com essa informação, Abreu (2011) concluiu que, "ainda assim, nenhum aluno pareceu construir imagens conceituais ou uma definição conceitual que se aproximasse das definições precisas" (p. 79), acrescentando que "inferimos que os alunos parecem apenas interpretar a existência do limite a partir de uma intuição gráfico-geométrica e se mostram limitados quando têm que transitar entre as representações gráfica e algébrica" (p. 92). Com base nessas conclusões do trabalho, Abreu (2011) oferece algumas sugestões metodológicas para o professor de Cálculo refletir e inserir na sua prática. Acredito que nossos estudos estejam corroborando tais sugestões, referenciadas abaixo:

> Procure fazer com que seus alunos escrevam sobre aquilo que estão entendendo, evidenciando assim suas definições conceituais e estimulando-os a explicar "como" aplicam a teoria na resolução de problemas/exercícios. Isso possibilita ao professor uma maior flexibilidade ao abordar a definição formal, além de incentivar os alunos a consultar a "célula" da definição conceitual envolvida nas atividades e até mesmo modificá-la quando necessário, em caso de conflitos com definição formal (Abreu, 2011, p. 95)

> Não exagere nas definições e demonstrações rigorosas, principalmente se essas forem apresentadas de maneira mecanizada e sob um aspecto totalmente procedimental. Se uma demonstração não puder ser significativa para os alunos e, mais importante ainda, ser ilustrada, até mesmo com exemplos numéricos, tal demonstração pode ser muito mais um "exercício de ensino" para o próprio professor do que uma "atividade de aprendizagem" para os alunos. Especificamente, em limites e continuidade, as definições e demonstrações envolvendo a notação $\varepsilon - \delta$, mostram-se totalmente incapazes de evocar imagens conceituais significativas. (Abreu, 2011, pp. 95-96)

Na pesquisa de Messias e Brandemberg (2012), os autores apresentaram uma investigação sobre as imagens conceituais que os estudantes possuem a respeito de limites de funções bem semelhante, quase uma réplica da pesquisa realizada por Tall e Vinner (1981). Para isso, a pesquisa tinha como questão norteadora: "Quais elementos compõem a *Imagem Conceitual* de estudantes universitários do curso de Licenciatura em Matemática acerca do conceito de limite de função?". Para responder a pergunta de investigação, os autores lançaram mão de duas hipóteses: "[H1] Existem dificuldades de apreensão do conceito de limite de função; [H2] As *Imagens Conceituais Evocadas* por estudantes acerca do conceito de limite de função não são coerentemente relacionadas com a sua definição conceitual, levando os sujeitos a apresentarem uma *definição conceitual pessoal* diferente da *definição conceitual formal*;" (p. 12)

Na coleta de dados, os autores aplicaram um questionário contendo questões sobre aspectos conceituais do conteúdo para estudantes universitários do curso de matemática de duas universidades públicas brasileiras. As questões elaboradas pelos autores eram parecidas com as de Tall e Vinner (1981). Por exemplo, Messias e Brandemberg (2012) perguntam na primeira questão: "o número 1,999999... é menor ou igual a 2? Justifique a sua resposta", enquanto Tall e Vinner (1981) perguntaram se 0,9999... < 1 ou 0,99999... = 1, também, com justificativa para a resposta. Neste último caso, os autores concluíram que os estudantes evocaram diferentes imagens conceituais e que, por mais que o número esteja perto do 1, tecnicamente ele não será igual a 1. Já na pesquisa de Messias e Brandemberg (2012), os autores compararam os resultados com os deles e identificaram respostas análogas às de Tall e Vinner.

De maneira geral, dos resultados apresentados, os autores salientam a existência de uma dicotomia entre *estático* e *dinâmico* existente nas imagens conceituais dos participantes de ambas as pesquisas, constituindo-se como um possível entrave à compreensão do conceito estudado.

> A dualidade *estático/dinâmico* permeia todo o processo de compreensão do conceito de limite e encontra-se presente, sobretudo, na dificuldade dos estudantes em afirmar se uma função pode alcançar o valor do limite (*noção de estático*) ou se o mesmo jamais pode ser alcançado, independente da constante aproximação em relação ao valor do limite (*noção de dinâmico*). (Messias & Brandemberg, 2012, p. 13, grifo dos autores).

E como conclusão da sua pesquisa, Messias e Brandemberg (2012) consideram, com base nas respostas dadas pelos participantes ao questionário, que existe conformidades com diversas pesquisas que tiveram como foco o estudo de imagens conceituais de estudantes em relação a limites e que estas "admitem o conceito de limite mediante a ideia de aproximação, dinamismo, na qual a função jamais poderá alcançar seu limite" (p. 23). Os autores ainda destacam as seguintes conclusões de outros autores que também estudaram as mesmas questões:

- Noção dinâmica; ideia de aproximação em relação a determinado valor, sem alcançá-lo;
- *Tendência a se aproximar de algo* (Cornu, 1983);
- Noção de infinitamente pequeno;
- Ideia de estar tão próximo de algo, de maneira a alcançá-lo;
- Dicotomia *estático/dinâmica*;
- *A ideia de proceito* (Tall & Gray, 1993).

- Não é possível calcular limites que tendem para o infinito;
- Indeterminações implicam na não existência do limite;
- Expressões do tipo *"tender para"* e *"se aproxima de"* implicam na ideia de que a função se aproxima do limite à medida que $x$ se aproxima de $a$, ou seja, $f(x)$ deve ser necessariamente, diferente de L. (Tall & Vinner, 1981).
- Para o limite de uma função existir, seus limites laterais devem ser iguais;
- O conceito de limite de função encontra-se relacionado com uma investigação nas proximidades de determinado ponto, de maneira que a função se aproxime de L sem, no entanto, alcançar esse limite. Ou seja, $f(x) \neq$ L (Tall & Vinner, 1981; Cornu, 1983; Sierpinska, 1885; CottrillL *et* al., 1996; Zuchi, 2005; Jordaan, 2005; Juter, 2006; Nair, 2009).
- Para que o limite de uma função exista, a função deve estar definida no ponto, ou seja, $f(a) = lim_{x \to a} f(x)$ o que implica que deve ser contínua nesse ponto (Cottrill *et al*, 1996; Jordan, 2005; Nair, 2009);
- O limite de uma função existe se não houver saltos no gráfico da função; (Messias & Brandemberg, 2012, pp. 24-25, grifo dos autores)

Apesar de os estudos de Messias e Brandemberg (2012) enfocarem o conteúdo de limites – que é o tema central de nossa pesquisa e que abordaremos com maiores detalhes mais adiante –, a pesquisa deles mostra as interações existentes entre a definição conceitual e a imagem conceitual, que podem se relacionar com qualquer conteúdo matemático e cuja interação se ilustra de forma simplificativa na Figura 6.

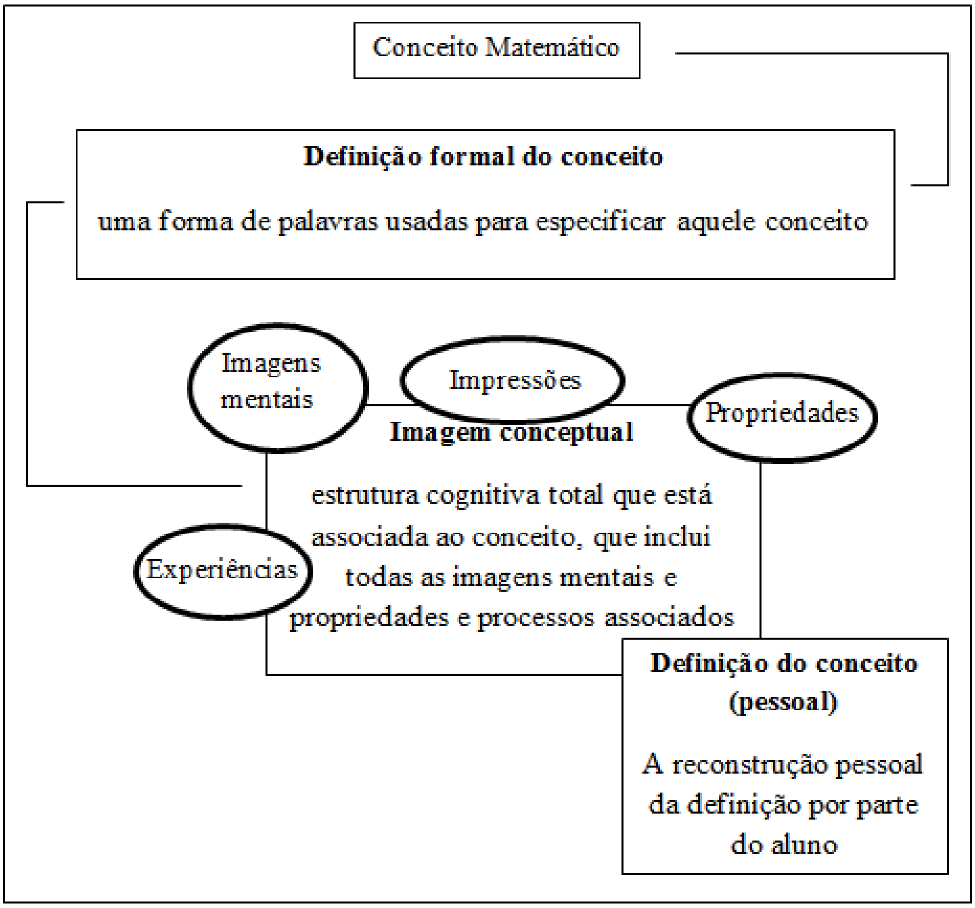



Figura 6 – Exemplificação da Imagem Conceitual e Definição Conceitual (Rosken & Rolka, 2007, *apud* Guerra, 2012, p. 38)

Na Figura 6 mostra-se claramente a relação da imagem conceitual com a definição conceitual de um conceito matemático. Ainda em termos de relações, na próxima seção avaliamos possíveis imbricações do pensamento matemático avançado, mais especificamente a imagem conceitual e a definição conceitual, com elementos que norteiam a teoria da aprendizagem significativa.

### 2.3. A teoria da aprendizagem significativa e o pensamento matemático avançado: possíveis relações

Na presente seção visa-se compreender as possíveis relações e contribuições que a teoria da aprendizagem significativa pode oferecer ao ensino da matemática por meio do pensamento matemático avançado. Na busca por estas relações, nos apoiamos em aportes teóricos que visem justificar a existência de analogias entre a teoria da aprendizagem significativa e o pensamento matemático avançado.

São diversos os conceitos e definições estudados no PMA. Com base em nossas leituras, identificamos algumas obras, de autores como Dubinsky, Dreyfus, Harel, Kaput e Eisenberg (Tall, 1991), sobre o pensamento matemático avançado que perpassam por condições de aprendizagem e possuem estreitas ligações com a psicologia cognitiva e os conceitos da teoria ausubeliana. Com base nessas contribuições teóricas do PMA, optamos pelos estudos de Vinner (1991) sobre imagem conceitual e definição conceitual por entender que este assunto apresenta concordância, em diversos aspectos relacionais, com o da teoria da aprendizagem significativa. Daí, com base nas leituras de ambos os campos teóricos, aperfeiçoamos/criamos um modelo do pensamento matemático avançado com elementos da teoria da aprendizagem significativa, o qual apresentaremos no final desta seção.

O PMA requer uma difícil transição, pois os conceitos baseados nas intuições e nas experiências poderão coexistir, mais tarde, em definições formais e deduções lógicas, permanecendo na mente do aprendiz sempre como experiências prévias que poderão se tornar conflitos cognitivos e atuar como obstáculos didáticos e epistemológicos para a aprendizagem (Tall, 1992).

Segundo o PMA, a imagem conceitual evocada é ativada quando, dado o nome de um conceito, sendo este visto ou ouvido, ele passa a ser um estímulo para a nossa memória no sentido de buscar alguma coisa que o associe, ou seja, algo é evocado em nossa mente com o nome do conceito. Mesmo que usualmente não seja uma definição conceitual ou que o conceito tenha uma definição, a imagem conceitual existirá e será qualquer coisa não verbalizada que foi associada em nossa mente ao nome do conceito. Vinner (1991) afirma que esta pode ser uma representação visual, coleções de impressões e experiências. Todavia, todas estas imagens conceituais podem ser traduzidas em formas verbais. Quando tal acontece apenas pela verbalização, Vinner (1991) chama de definição conceitual, ou seja, "as representações visuais, as figuras mentais, as impressões e as experiências associadas ao nome do conceito podem ser traduzidas em formas verbais" (Vinner, 1991, p. 68). Assim, a definição conceitual passa a ser uma forma verbal de representar e definir um determinado conceito. O autor sugere o uso de certos significados associado a palavras. Por exemplo, alguns conceitos do cotidiano, como casa, laranja e gato, nada têm a ver diretamente com as definições, porém alguns desses e outros conceitos são introduzidos através do uso das definições.

Estendendo o conceito de imagem conceitual, Tall (1991) e Vinner (1991) definem a "imagem conceitual evocada" como aquela que é recordada de nossa mente em relação a certo conteúdo ou de noções deste, num determinado momento, e não de tudo que existe na mente de um indivíduo. Vinner (1991) afirma que, na aquisição de um conceito, o indivíduo cria uma imagem conceitual para ele e, mais ainda, para entender e compreender o significado deste conceito será necessário ter essa imagem conceitual em sua estrutura cognitiva.

Tal como foi antes referido, Ausubel et al. (1980) propõem quatro princípios programáticos com a finalidade de auxiliar o professor na construção da aprendizagem significativa dos seus alunos: Diferenciação progressiva; Reconciliação integradora; Organização sequencial e Consolidação.

Na aprendizagem significativa utilizamos os conhecimentos prévios dos alunos como ponto de partida para desenvolvermos um ensino que possa construir uma aprendizagem e esta seja significativa. Esses conhecimentos prévios estão associados aos conhecimentos do cotidiano e a significados idiossincráticos dos indivíduos.

Uma vez definidos e revistos os principais conceitos do PMA e da teoria da aprendizagem significativa (TAS), podemos nos questionar sobre quais as relações existentes entre a teoria da aprendizagem significativa e o pensamento matemático avançado, numa perspectiva pessoal e de intérprete da teoria da aprendizagem significativa e do PMA. Dentre elas, vimos que Vinner (1991) afirma que, para explicar e compreender a ocorrência do uso das definições em contextos não técnicos (fora da sala de aula), em resposta aos significados das palavras ou na resolução de problemas, as pessoas utilizam as experiências humanas e do cotidiano para atribuir significados e, muitas vezes, ignoram as definições formais, solicitando-as quando necessário; com isso, percebemos uma forte relação destas com o processo em que decorre a aprendizagem significativa por descoberta. Segundo Ausubel et al. (1980), esta aprendizagem se dá pelo uso de ferramentas utilizadas na resolução de problemas, seja essa oriunda de experiências do cotidiano, da vivência do indivíduo ou até das construídas no contexto escolar.

Assim, a imagem conceitual e a definição conceitual, na perspectiva do pensamento avançado, estabelecem relações feitas por um indivíduo ao ouvir palavras (gato, casa, florestas, etc.), ao ler o enunciado de um teorema matemático ou ao visualizar um vídeo. Através de associações aos conceitos e aos subsunçores existentes na estrutura cognitiva, nos remete a identificar, assim, alguns dos tipos e formas existentes na aprendizagem significativa (aprendizagem por recepção, descoberta, superordenada, combinatória e subordinada). Para compreender melhor como ocorrem essas relações da imagem conceitual com a definição conceitual em um indivíduo, Vinner (1991) construiu modelos esquemáticos, como vemos nas figuras abaixo.

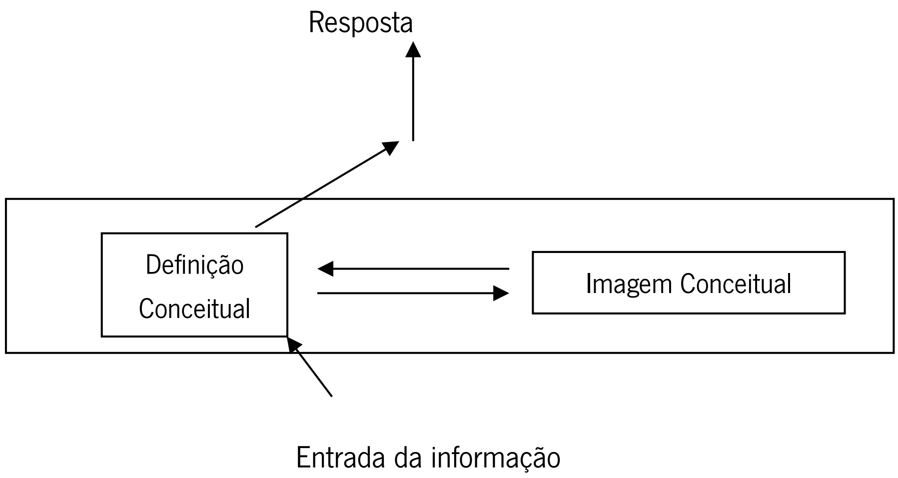



Figura 7 - Interação entre definição e imagem (Vinner, 1991, p. 71).

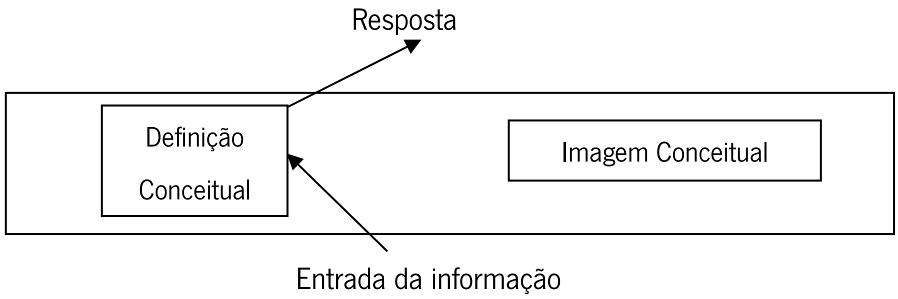



Figura 8 - Dedução puramente formal (Vinner, 1991, p. 72).

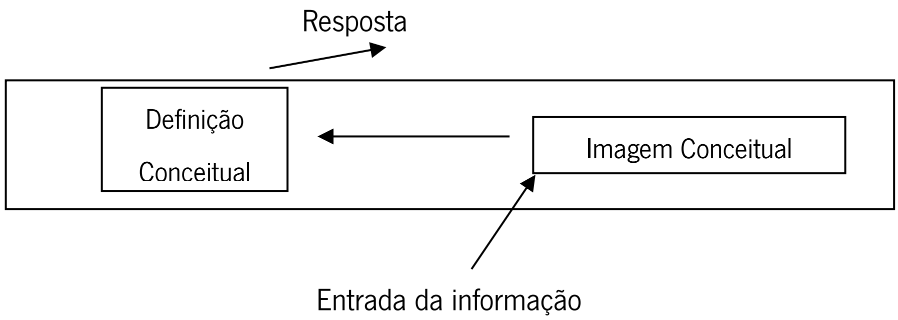



Figura 9 - Dedução seguindo o pensamento intuitivo (Vinner, 1991, p. 72).

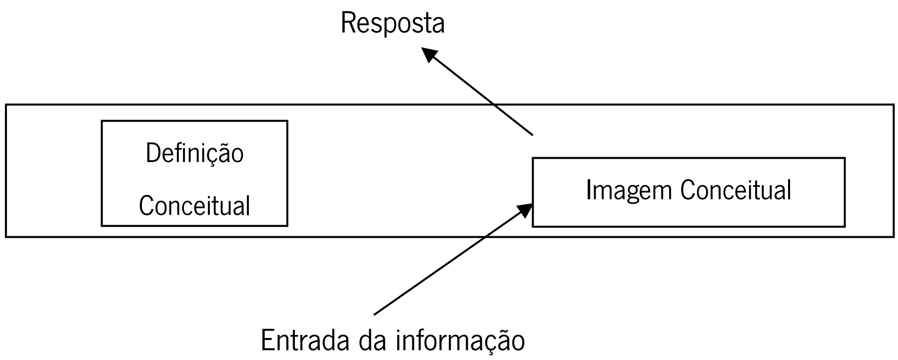



Figura 10 - Resposta Intuitiva (Vinner, 1991, p. 73).

Nas denominações citadas no parágrafo anterior, para as relações entre a imagem e a definição conceitual, Vinner (1991) cita uma relação de intercâmbio para as duas células (imagem conceitual e definição conceitual) e acredita que "quando uma tarefa cognitiva é colocada para um estudante, espera-se que as células da imagem conceitual e da definição conceitual sejam ativadas" (p. 71).

> Numa atividade matemática, noções matemáticas não são apenas usadas de acordo com suas definições formais, mas também o são por meio de representações mentais que podem divergir de pessoa para pessoa. Estes modelos individuais são elaborados a partir de modelos espontâneos (modelos que existem antes da aprendizagem da matemática, e que se originam, por exemplo, na experiência cotidiana) que interferem na definição matemática (Tall, 1992, p. 496).

Vejamos que a constituição de conceitos matemáticos ocorre de forma semelhante tanto no PMA quanto na TAS, pois ambos dependem das representações mentais dos conhecimentos prévios, que na TAS é chamado de "subsunçor" (Ausubel et al., 1980) e no PMA pode ser chamado de "concepções espontâneas" (Cornu, 1983).

> Em geral, a aprendizagem de uma ideia nova não destrói uma ideia anterior. O estudante, ao se deparar com uma questão ou tarefa, tem agora duas ideias, e pode reter a nova ou a velha. O que está na aposta não é o possuir ou não possuir uma ideia nova; e sim a seleção (na maioria das vezes inconsciente) de qual delas será retida. Combinações das duas ideias são sempre possíveis, frequentemente com resultados sem sentido. (Davis & Vinner, 1986, *apud* Tall, 1992, pp. 497-498)

Das relações entre os conceitos de imagem conceitual e de definição conceitual do PMA com a Aprendizagem Significativa destacamos o trabalho de Miranda (2010), que procurou características comuns entre os conceitos supracitados com os elementos da Teoria da Aprendizagem Significativa.

> Conhecimento novo contradiz frequentemente o velho, e a aprendizagem efetiva requer estratégias para lidar com tal conflito. Algumas vezes uma ou outra deve ser abandonada, e outras vezes as duas podem conviver a salvo, mantidas em compartimentos mentais separados. (Tall, 1992, pp. 497-498)

Com base nas citações anteriores, Miranda (2010, p. 65) afirma que há uma interação entre os conceitos do PMA com os elementos da aprendizagem significativa, gerando um enriquecimento para o ensino de Matemática, por meio de vínculos com questões referentes ao cognitivo dos aprendizes, a respeito de conteúdos e abordagens metodológicas utilizadas no que se pretende ensinar.

Este autor acrescenta, ainda, que:

A nossa proposta utiliza as interações entre a imagem conceitual e a definição conceitual, com a entrada da informação pela imagem conceitual, podendo existir interação desta com os subsunçores, localizados em seu interior, para depois com a definição conceitual, resultando, assim, em um produto interacional das relações obtidas entre as duas células. (Miranda, 2010, p. 71)

Com base na proposta de Miranda (2010), nas características da TAS, apoiadas nas ideias e modelos de Vinner (1991) e nas discussões decorridas entre teóricos, sugerimos uma proposta de interação da célula da imagem conceitual com a da definição conceitual. Esta proposta utiliza as interações entre a imagem conceitual e a definição conceitual, com a entrada da informação pela imagem conceitual, podendo existir interação desta com os subsunçores, localizados em seu interior, para depois correlacionar com a definição conceitual, resultando, assim, em um produto interacional das relações obtidas entre as duas células. Este produto, retido num quadro denominado "Fase de Assimilação", passa por um processo análogo ao do princípio de assimilação de Ausubel, por meio da diferenciação progressiva e da reconciliação integradora da teoria da aprendizagem significativa, para depois sair como resposta à entrada da informação. Na Figura abaixo ilustra-se, na forma esquemática, a nossa proposta corroborada por Miranda (2010, p. 72).

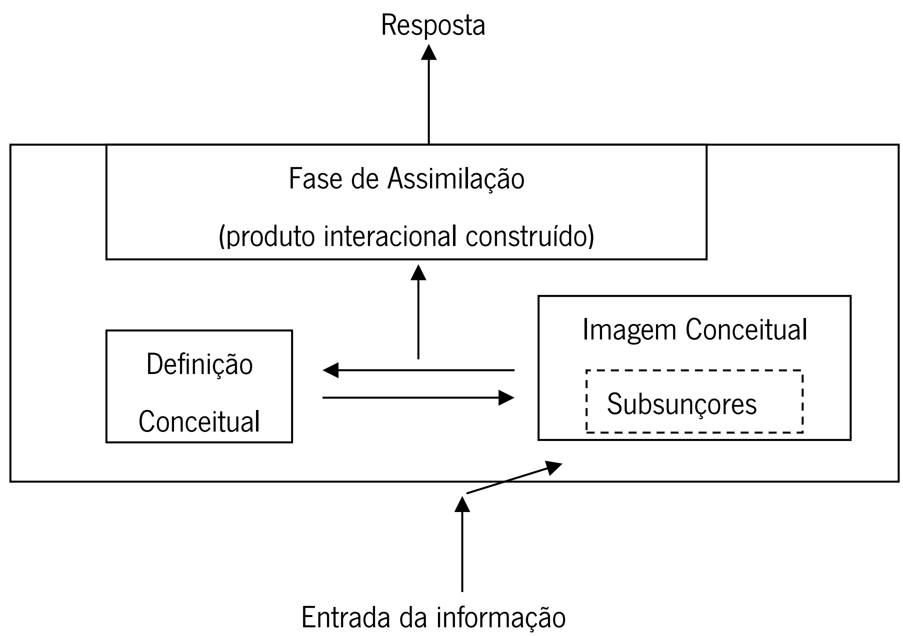



Figura 11 – Interação entre definição conceitual e imagem conceitual na perspectiva da aprendizagem significativa.

Através da Figura 11 observamos que os subsunçores, como parte da imagem conceitual, justificam-se devido ao fato de que a imagem conceitual constituiu a estrutura cognitiva total na mente de um aluno (Giraldo & Carvalho, 2002; Tall & Vinner, 1981). Nessa perspectiva, vemos os subsunçores como uma possível unidade cognitiva, ou seja, "cada uma das porções da estrutura cognitiva em que um indivíduo foca atenção para desenvolver uma ideia matemática" (Tall & Barnard, 1997, *apud* Giraldo & Carvalho, 2002, p. 103).

Para Giraldo e Carvalho (2002, p.103), "a mente humana é capaz de focar a atenção num pequeno número de unidades cognitivas ao mesmo tempo. A formação de uma imagem conceitual rica provém do estabelecimento do maior número possível de correlações dentro das unidades cognitivas e entre elas".

Ausubel et al. (1980) levantam um questionamento a respeito do princípio de assimilação constituir um processo indutivo ou dedutivo. Os próprios autores respondem, dizendo que esse princípio não corresponde a um processo indutivo, mas também, dessa negação, não o caracteriza como um processo dedutivo, afirmando que, "independentemente do fato de novas proposições serem adquiridas indutiva ou dedutivamente, suas incorporações na estrutura cognitiva ainda seguem, sempre que possível, o princípio de diferenciação progressiva" (Ausubel et al., 1980, p. 116).

> Os seres humanos raramente partem do zero ao enfrentarem novos problemas. Ou empregam princípios explicativos explícitos (hipóteses) sobre uma base provisória e tentam adaptar os dados a estas hipóteses, ou, pelo menos, são orientados implicitamente, desde o início, por um conjunto de suposições gerais derivadas das experiências passadas. Neste sentido, portanto, a solução indutiva de problema propriamente dita pode ser considerada como uma fase subsidiária dentro de uma abordagem geralmente dedutiva. (Ausubel et al., 1980, p. 116)

Com isso, percebemos as convergências das concepções de conceitos cognitivos do PMA com a teoria ausubeliana quanto à solução de problemas, partindo de um método indutivo-dedutivo e estendendo-o, posteriormente, para uma fase de generalizações, tentando formalizar (rigor) as concepções e conjecturas geradas nesse processo.

Com isso, os autores utilizaram a psicologia cognitiva para explicar como o aprendiz utilizou o pensamento avançado, através da imagem conceitual e das relações mentais imaginárias de abstração, para um refinamento e busca de uma solução para o conceito investigado; é partir daí que vemos outros pontos convergentes da aprendizagem significativa, quando os autores afirmam, na citação anterior, que o aprendiz utilizou o seu velho conhecimento (subsunçores), explorando o conceito, interagindo com a nova informação (princípio de assimilação) e fazendo uma reconstrução (reconciliação integradora) para compreender a definição do conceito, ou seja, o aprendiz utiliza os subsunçores (contidos na imagem conceitual) existentes na sua estrutura cognitiva e, por um processo de reconciliação integradora, consegue alcançar uma formalização para as interações entre a imagem conceitual e a definição conceitual.

Cabe ao educador a função de facilitador do processo de aprendizagem, assim como a liberdade oriunda da teoria da aprendizagem significativa, na qual o educador recorre aos meios de aprendizagem para desenvolver seu ensino. Contudo, quem tem o domínio e o interesse por aprender é apenas o indivíduo, pois de nada adiantará ter um ensino eficaz se o aprendiz não estiver predisposto a aprender (Ausubel et al., 1980).

Assim, concluímos a existência de relações entre a TAS e PMA, pois, tomando como exemplo a imagem conceitual e a definição conceitual, percebemos as suas similaridades com os subsunçores existentes na estrutura cognitiva dos aprendizes e o princípio da assimilação da teoria ausubeliana. Tanto no pensamento matemático avançado quanto na teoria da aprendizagem significativa a aprendizagem ocorre individualmente, ou seja, a imagem conceitual, no PMA, restringe apenas o indivíduo e as relações com os conceitos e proposições para a sua própria aprendizagem; na TAS, a aprendizagem se torna significativa quando o aprendiz estabelece por si próprio, de maneira não arbitrária e substantiva, os novos conceitos com os subsunçores existentes na sua estrutura cognitiva.

## 2.4. O ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral: o caso dos limites de funções

A preocupação com o ensino do Cálculo nas Instituições de Ensino Superior já é indicada há aproximadamente uns 40 anos, desde o surgimento do movimento conhecido por Reforma do Cálculo, no qual havia uma preocupação com o ensino desta disciplina. Professores e pesquisadores se debruçaram em estudar métodos e estratégias de ensino que pudessem potencializar o ensino da disciplina, tentando contextualizá-la e consequentemente diminuir a evasão e amenizar o número de repetências na disciplina. Daí surgiram pesquisas que se preocuparam com a aprendizagem dos seus conteúdos.

No Brasil, o início do ensino desta disciplina é descrito por Lima (2013) nos seguintes termos:

> A disciplina Cálculo Diferencial e Integral foi ministrada pela primeira vez no Brasil em 1810, no *Curso Mathematico* da então recém-criada Academia Real Militar do Rio de Janeiro. Nessa instituição, o ensino de tal conteúdo baseava-se em uma

> tradução para o português do livro *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral* do francês Sylvestre François Lacroix (1765-1843), principal autor de livros-texto de sua época. A tradução utilizada na Academia Real Militar foi feita em 1812 por Francisco Cordeiro da Silva Torres Alvin (1775-1856) e se tornou o primeiro livro-texto de Cálculo, em língua portuguesa, a ser adotado para o ensino da Matemática superior no Brasil, sendo durante décadas a principal referência teórica para o ensino desta disciplina no país. (p. 3)

No âmbito desta decisão histórica da Academia Real Militar, local no qual se formavam engenheiros e militares, Lima (2013) afirma que no século XIX se ensinava de forma expositiva e prática. O Cálculo servia como uma ferramenta para resolução de problemas na área de engenharia e de problemas que envolviam conhecimentos de técnicas do Cálculo. Por exemplo, a aprendizagem de derivadas e integrais se dava apenas pela memorização das suas regras de aplicação imediata, sem uma preocupação com os conceitos do Cálculo e os aspectos de formalização.

Talvez as grandes dificuldades com o ensino de Cálculo ainda sejam vistas como um problema menor em relação aos problemas enfrentados no ensino superior, ou seja, o ensino de Cálculo se torna um problema micro em relação aos problemas de uma esfera superior – "macro" –, quando falamos do ensino superior, especialmente na área da matemática. Por exemplo, a falta de bases dos estudantes que chegam ao ensino superior pode ser um dos fatores que contribui para o fracasso na aprendizagem dos conceitos do Cálculo, pois ao chegarem ao ensino superior eles se deparam ainda com um ensino bastante tradicional, com uma abordagem mais axiomática e que exige um maior formalismo.

> O Ensino Superior segue padrões tradicionais, de uma época em que havia uma continuidade bem sequenciada, em termos de conteúdo, entre o antigo Científico e o Ensino Superior. De lá para cá, o Ensino Médio sofreu muitas reformas, onde conteúdos de Matemática e de Física foram sendo automaticamente excluídos dos programas. No entanto, o Ensino Superior continuou adotando a mesma sistemática. Então, as dificuldades oriundas da falta de conhecimentos prévios são detectadas exatamente na fase transitória do ingresso na academia e, se não resolvidas ainda nesta etapa, comprometem a aprendizagem ao longo de toda a graduação. (Santarosa & Moreira, 2011 p. 6)

Santarosa e Moreira (2011) procuraram compreender como ocorria o ensino de Cálculo em um curso de Licenciatura em Física de uma universidade brasileira, estabelecendo uma relação dos conceitos matemáticos estudados no Cálculo com o ensino de física. Daí concluíram que,

> Em geral, os professores de Cálculo I não abordam o conteúdo de forma contextualizada com a área de formação dos estudantes. Costumam desenvolver o conteúdo no domínio exclusivo da Matemática, com o uso de linguagem e notações exclusivas desta área. Os alunos que se destacam nas disciplinas de Cálculo e de Física conseguem realizar mecanicamente todas as tarefas propostas. Alguns preferem que o ensino seja direcionado para a aprendizagem mecânica. (Santarosa & Moreira, 2011, p. 31)

Com isso, podemos dizer, com base em Santarosa e Moreira (2011), que o ensino do Cálculo continua ocorrendo de forma tradicional neste novo século, podendo se constituir em aulas cansativas, com muita teoria, sem levar em consideração o conhecimento prévio do estudante e, possivelmente, com esse conjunto de fatores interelacionados, poderá levar o estudante a ficar desestimulado com a disciplina e com o seu curso, resultando numa aprendizagem mecânica. Com o passar do tempo, de um semestre para o outro, aquela aprendizagem adquirida em um semestre anterior já não existe mais; por ser memorística, tenderá ao esquecimento. Com todos os fatos aqui elencados, podemos induzir que todos eles possam levar o estudante a desistir do curso ou até mesmo a não conseguir aprovação, impactando na continuidade do seu curso, uma vez que a disciplina de Cálculo é uma das disciplinas primárias nos cursos de matemática e das ciências exatas. Ainda nesta perspectiva, em relação aos estudantes, Silva (2009) nos diz que:

> Ao ingressarem no curso superior, os estudantes levam suas expectativas: como no ensino médio logravam sempre boas avaliações em matemática, esperam que o curso de Cálculo não represente problemas para o seu aprendizado. Entretanto ao se deparar com questões globais envolvendo os temas anteriormente estudados, em geral de modo departamentalizado, e com novas questões impactantes, como infinito, as aproximações, a continuidade, a incomensurabilidade, quase sempre vêem frustradas suas expectativas iniciais. (Silva, 2009, p. 1)

Em um estudo realizado por Rezende (2003) foi identificado um alto índice de reprovação nas disciplinas de Cálculo. Ele aponta como exemplo a Escola Politécnica da USP, no período de 1990 a 1995, no qual não se aprovava mais do que 55% de alunos em cada turma. Outros autores (e.g., Nasser, 2007; Borba & Penteado, 2007) coadunam destas ideias, pois acreditam que não se deve apenas valorizar o conhecimento dos alunos, mas levar também em consideração a prática docente, utilizando diversas metodologias e pedagogias para atingir a aprendizagem dos estudantes.

Segundo Rezende (2003), as dificuldades de aprendizagem do Cálculo vêm sendo estudadas apenas sobre a ótica da psicologia cognitiva, envolvendo um ou mais conceitos do Cálculo. O próprio autor destaca que de nada adiantaria ter na instituição toda uma infraestrutura de primeira qualidade se os olhos não estiverem voltados para metodologias pedagógicas bem estruturadas e metas que se pretende alcançar com o ensino do Cálculo. É que o ensino desta disciplina continua a ser tradicional, ou seja, os professores continuam utilizando metodologias e estratégias de ensino tradicionais em suas aulas, repetindo-as em diversas turmas ao longo da sua carreira docente (Rezende, 2003).

Sobre as reprovações dos estudantes em Cálculo, podemos dizer que é possível que tais reprovações sejam justificadas também pela forma como o ensino de matemática vem sendo ministrado no ensino médio, pois o que vemos é um ensino pautado em aulas tradicionais, com técnicas privilegiando a memorização de conteúdos, sem nenhuma preocupação com um aprendizado com significado para o estudante.

Em um estudo quantitativo de Barbosa (1994) com alunos da Universidade Federal do Ceará, concluiu-se que, no semestre de 92.1, apenas 30% dos alunos foram aprovados em Cálculo, tendo esse baixo rendimento levado o autor a estudar alguns possíveis fatores que influenciam diretamente na reprovação e evasão dos estudantes de Cálculo. O autor identificou diversos fatores, entre eles: com origem no aluno – falta de bases da educação básica, dificuldades de acompanhar conteúdos de nível superior; falta de interesse no professor – com o uso de metodologias não adequadas, explanações do conteúdo sem clareza e objetividade, falta de incentivo por parte professor com os alunos em participar em sala de aula, avaliações demasiadamente rigorosas; falta de relacionamento na interação professor-aluno e na Instituição – com definição de horários inadequados, choques de disciplina, forçando os alunos a permanecerem na Instituição por tempo integral e a insuficiência do número de vagas ofertadas. Ainda neste estudo, o autor traz algumas recomendações para o ensino do Cálculo. De forma geral, o mesmo recomenda que haja uma maior interação entre professor-aluno-instituição em prol de um ensino e aprendizagem do Cálculo de maneira satisfatória para todos.

Esta situação acaba sendo preocupante para o ensino do Cálculo, pois se torna uma formação acadêmica de "repetição", ou seja, o aprendiz aprende daquela forma e vai atuar como o professor e acaba repetindo em suas práticas as mesmas rotinas de como aprendeu quando ainda era estudante. Às vezes, acaba utilizando até as mesmas anotações do seu tempo de estudante na sua prática docente.

> a solução dos problemas do ensino de Cálculo não é técnica, pois exige, antes de mais nada, uma reconceptualização das idéias epistemológicas, isto é, que se trabalhe o Cálculo de maneira problematizadora, explorando os múltiplos significados e representações destas idéias. (Reis, 2001, p. 189)

Dos resultados obtidos numa pesquisa feita por Lacaz, Fernandes e Carvalho (2009), na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, ministrada nos cursos de engenharia da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá (FEG/UNESP), concluiu-se que o conteúdo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral deve "prever, de alguma forma, o resgate de conhecimentos anteriores, e que o conceito de limite não tem sido aprendido adequadamente" (p. 1079). Além disso, os autores acreditam que:

> as propostas significativas para a melhoria do ensino de Cálculo, considerando que os tópicos a serem abordados permanecerão essencialmente os mesmos, deverão estar centradas em ênfases, enfoques e estratégias (metodologia de trabalho na disciplina). A ênfase deve ser dada aos conceitos, os enfoques devem estar centrados nas aplicações – preferencialmente à engenharia – e as estratégias nas propostas de tarefas que envolvam os alunos em investigações, leituras, explorações, uso da linguagem matemática e uso de tecnologias. (Lacaz et al., 2009, p. 1079)

Para Miquelino e Resende (2013), a forma como é desenvolvido o ensino do Cálculo não tem favorecido ao aprendiz uma aprendizagem significativa, possibilitando a criação de obstáculos no seu avanço no curso e na sua própria formação. Os autores afirmam que, apesar de existirem muitas pesquisas voltadas para o ensino de Cálculo, para entender como ocorre a aprendizagem dos aprendizes, as dificuldades que o professor encontra para ensinar e as inovações metodológicas, temos um quadro com altos índices de reprovação e aprendizagens que não são significativas. Os autores apontam ainda que tiveram situações em que o problema se agravou com o acesso a Universidade de um número cada vez maior de alunos despreparados na educação básica, levando as dificuldades do ensino básico para o ensino superior, onde emergem e se destacam estas deficiências.

> Sabemos que as dificuldades com esta disciplina e o alto índice de reprovações se tornaram históricos e comuns. Acreditamos ainda que muitos esbarram nas dificuldades em decorrência da linguagem matemática. Afinal, dois séculos antes de Cristo, os gregos estiveram a um passo da construção do Cálculo e, talvez, não conseguiram pelo fato de não terem uma linguagem algébrica capaz de expressar com precisão suas ideias. Além disso, a abordagem compartimentada do Cálculo pode ter contribuído para que ele se tornasse, em algumas situações, um conjunto de regras desconexas. Temos que buscar maneiras de lidar com estas dificuldades. (Macedo, Bach, Lenardon & Ciani, 2013, p. 2)

Em relação às deficiências e dificuldades no ensino e aprendizagem de Cálculo com alunos ingressantes na primeira disciplina de Cálculo, Nasser, Souza e Torraca (2012) investigaram como se dá a transição destes alunos do Ensino Médio para o Superior. Os resultados obtidos por meio de relatos dos alunos evidenciaram que estes não sabiam calcular o valor de uma função num ponto dado e não tinham ideia de como traçar gráficos simples, nem de completar o quadrado de uma expressão. Com estas evidências, as autoras consideram "que as dificuldades enfrentadas, pelos alunos ingressantes nas universidades, na primeira disciplina de Cálculo sejam fruto da forma como os conhecimentos pertinentes ao Ensino Médio são ensinados e assimilados" (Nasser, Souza & Torraca, 2012, p. 14). Entretanto, as autoras fazem algumas recomendações por meio dos seguintes desdobramentos:

> O primeiro é desenvolver uma proposta alternativa para as aulas de Matemática no Ensino Médio, que antecipe situações e problemas do Cálculo, gerando o que chamamos de prontidão para o estudo de Cálculo. Tal proposta deve incluir um estudo mais aprofundado de domínio e imagem de funções, traçado de gráficos, inclusive com recursos tecnológicos, funções pares e ímpares, funções definidas por várias sentenças e translação de gráficos. Essa proposta não pretende introduzir mudanças no currículo de Matemática no Ensino Médio, mas apenas sugerir um outro enfoque. O segundo desdobramento é incentivar atividades de Matemática básica com os calouros das Universidades, visando preencher lacunas de aprendizagem e auxiliando na abstração necessária para o domínio do pensamento matemático avançado. (Nasser, Souza & Torraca, 2012, p. 17)

A pesquisa de Wrobel, Zeferino e Carneiro (2013) incidiu sobre o estado da arte do Cálculo na última década dos ENEM – Encontros Nacionais de Educação Matemática que ocorrem no Brasil a cada três anos, onde foram apresentados 49 estudos que falavam sobre o ensino de Cálculo. Estes estudos foram classificados nas seguintes categorias: dificuldades com a matemática básica em Questão de Reprovação e Licenciatura em Matemática; Natureza Epistemológica da Aprendizagem e Recursos Didáticos. Os autores concluíram que as pesquisas atuais sobre o ensino de Cálculo ainda são incipientes. Apesar de muitas delas apresentarem palavras e conceitos comuns, divergem quanto às abordagens teórico-conceituais, quanto ao público e soluções apresentadas. Os autores apontam que os trabalhos nos mostram que as reprovações na disciplina de Cálculo, em alguns casos, focam nos alunos e na sua forma de aprendizagem, trazendo questões de ordem da psicologia cognitiva e do pensamento matemático avançado e, noutros casos, o foco se situa no professor e na sua metodologia de ensino.

Pensando numa proposta para elucidar esta discussão em relação ao ensino de Cálculo, apresentamos o trabalho de Reis (2001), no qual o autor procurou compreender as tensões e o rigor no ensino de Cálculo em que não se admite que a intuição seja separada do rigor no ensino de qualquer conteúdo/conceito matemático, considerando-se que cada um, separadamente, não é suficiente; ou seja, não podemos ter um ensino de Cálculo apenas pautado nas intuições e nem um ensino de análise matemática baseado apenas no rigor.

> A intuição estaria relacionada, por exemplo, à representação visual ou àquilo que poderia ser considerado plausível, ainda que não tenhamos utilizado de nenhuma demonstração rigorosa não há, em nosso entendimento, uma relação dicotômica entre estas duas aproximações para a compreensão de um elemento matemático. Acreditamos fortemente numa relação de complementaridade entre esses conceitos. (Abreu & Reis, 2011, p. 10)

É importante que o rigor e a intuição estejam imbricados e que no ensino de qualquer conteúdo ou disciplina o professor saiba utilizar da melhor forma cada um deles, mas sempre usando os dois e não apenas polarizar (Reis, 2001; Domingos, 2003; Abreu & Reis, 2011).

Com o objetivo de ter um ensino de Cálculo menos dicotômico, entre a intuição e o rigor, Lima (2013) nos informa que no Brasil se executava um ensino de Cálculo influenciado pelo modelo dos Estados Unidos, no qual os conceitos do Cálculo eram trabalhados de

> maneira menos analítica, mais intuitiva, com um nível mais moderado de rigor e com maior ênfase nos significados do que nos fundamentos para, posteriormente, em um curso de Análise ou, conforme nomenclatura também bastante utilizada na época, de Cálculo Avançado, rever tais conteúdos de acordo com uma orientação mais crítica e mais voltada aos fundamentos do que a manipulação. (Lima, 2013, p. 7)

O autor nos conta ainda que aqui no Brasil, na década de 70, no curso de matemática da Universidade de São Paulo - USP, aconteceram duas situações interessantes, que foi a adoção de um livro de Cálculo – Cálculo, um curso universitário de Moise – e da implementação de uma metodologia com base em roteiros de estudo e grupos.

Isso nos fez lembrar o trabalho de Santarosa e Moreira (2011), que procuraram investigar e desenvolver uma nova abordagem de ensino para a disciplina de Cálculo I, específica para os Cursos de Física, que, por sua vez, pudesse promover a aprendizagem significativa dos conteúdos desta disciplina. A relevância deste estudo baseou-se na percepção dos pesquisadores em relação aos métodos tradicionais de ensino, os quais favorecem a uma aprendizagem mecânica, ou seja, "uma aprendizagem basicamente memorística, sem significado, e que serve apenas para aplicação em situações conhecidas, a curto prazo". (p. 2)

Quanto ao uso do livro, Lima (2013) diz que a ideia era que o aluno tivesse vários contatos com os conceitos do Cálculo e que a cada aparição destes conceitos no livro o estudante pudesse relacioná-los com um grau de rigor cada vez maior, seguindo a ideia de currículo em espiral sugerida no livro. Quanto à metodologia adotada, tinha-se como objetivo mudar o método tradicional com que era ensinada a disciplina, em que a transmissão de conteúdos e aprendizagem de conceitos era baseada apenas na memorização. Assim, a ideia era que "as atividades propostas, embora abrissem algum tipo de espaço para a intuição dos alunos, privilegiavam os aspectos formais dos conceitos abordados, ao invés de explorarem aspectos epistemológicos e cognitivos de seus entes fundamentais" (Lima, 2013, pp. 8-9)

### 2.4.1. Limites de funções

Atualmente, nas Instituições de Ensino Superior (IES), o ensino de limites de funções constitui-se como um dos primeiros conteúdos a ser ensinado na disciplina de Cálculo, seguido posteriormente das derivadas e integrais.

> Apesar de sua grande importância, o conceito de limite muitas vezes constitui-se o grande gargalo do ensino de Cálculo. Muitos alunos saem de um curso de Cálculo sem entendê-lo e nem sequer relacionar com derivada e integral, que são, geralmente, os conceitos adjacentes, apresentados nos livros didáticos e na grade curricular. (Zuchi, 2005, p. 19)

Barroso, Soares, Mota e Neto (2009) nos diz que o conceito de limite é ensinado nas primeiras aulas de Cálculo e que, após um primeiro contato com o conceito de maneira formal ou intuitiva, a noção de limite passa a ser utilizada de forma utilitária, como uma ferramenta para resolver problemas ou de forma operatória, algébrica ou gráfica.

> Ao longo do curso, o conceito de limite parece desaparecer pouco a pouco. No final, entre as aplicações e operações, perde-se quase completamente o seu elo com as novas definições, como no caso da derivada e da integral que são exemplos particulares de limites. Para o aluno, a derivada é, por exemplo, o coeficiente angular de uma reta tangente ou uma taxa de variação instantânea. Já o conceito de integral é, em geral, compreendido pelo aluno como a área de uma região plana limitada por curvas. (Barroso et al., 2009, p. 106)

Miranda (2010) afirma que, ainda de forma imatura, os aprendizes começam a ter contato com uma matemática mais "fina" e com conceitos importantes, que estão entrelaçados. Contudo, o nosso estudante não consegue ver este entrelace, tratando os conteúdos de limites, derivadas e integrais desassociados, ou seja, não consegue compreender que os conceitos de integral e derivada têm como fundamento o conceito de limite.

> acreditamos que o conceito de limite realmente é necessário para a construção de conceitos como derivada e integral, principalmente na forma como o Cálculo está hoje estruturado nos currículos públicos dos cursos de Ciências Exatas. Entretanto, há de se considerar que a própria História do Cálculo nos mostra que o surgimento

> desses conceitos se deu na ordem inversa: integral, derivada e limite. Talvez a formalização da estrutura matemática tenha contribuído para a ordem atual do ensino de Cálculo. (Amorim, 2011, p. 36)

Num contexto histórico, podemos dizer que o conceito de limite serviu para a construção do Cálculo integral primeiramente e depois para o Cálculo diferencial (derivadas). Contudo, há registros do conceito na Grécia antiga para Cálculo de área e volume, isto é, "foram os Gregos os primeiros a trabalhar com o conceito matemático que só cerca de dois mil anos depois foi definido: **limite**. Podemos inclusive argumentar que Arquimedes foi, porventura, um precursor exímio deste nosso conceito; usava-o, magistralmente" (Santos, 2010, p. 3, grifo do autor).

> Os matemáticos antigos lidaram com essa ideia de aproximações e "limites" de modo intuitivo por dois séculos. Percebiam a falta de uma linguagem para expressar suas ideias, pois intuitivamente, já sabiam que a área exata seria encontrada quando $n$ fosse infinitamente grande, mas não tinham ainda como se expressar de maneira precisa e rigorosa. A humanidade precisou esperar até o século XIX para que este rigor fosse finalmente encontrado por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), que criou uma definição formal de limite[6]. Talvez a demora de dois séculos sinalize para a sutileza e o cuidado na compreensão desse conceito. (Macedo et al., 2013, p. 5)

> Os principais conceitos de Cálculo: derivada, continuidade, integral, convergência, divergência, entre outros, são definidos em termos de limite. Limite é o conceito mais fundamental do Cálculo. De fato, limite é o que distingue, no nível mais básico, o Cálculo da álgebra, geometria e o resto da matemática. Portanto, em termos de desenvolvimento ordenado e lógico do Cálculo, limite deve vir primeiro. Entretanto, o registro histórico é justamente o oposto. Por vários séculos, as noções de limites eram confusas, com idéias vagas e algumas vezes filosóficas sobre o infinito e com intuição geométrica subjetiva e indefinida. O termo limite, que atualmente usamos, é decorrente do iluminismo na Europa no final do século XVIII e início do século XIX. (Zuchi, 2005, p. 37)

Cornu (1983) nos diz que o conceito de limite está no coração da análise, e este é um dos conceitos fundamentais em matemática. Segundo este autor, "o conceito matemático de limite é uma noção particularmente difícil, típico do tipo de pensamento necessário em matemática avançada" (Cornu, 2002, p. 155). Para o autor, os alunos têm grande dificuldade em aprender este conceito e estas dificuldades persistem no ensino superior, pois a forma como os alunos do ensino fundamental e médio veem os conceitos matemáticos é bastante elementar se

---

[6] Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de $x_0$, exceto talvez em $x_0$. Dizemos que $f(x)$ tem limite $L$ quando $x$ tende a $x_0$, e escrevemos $lim_{x \to x_0} f(x) = L$, se para cada número ε > 0 existir um número correspondente δ > 0 tal que, para todos os valores de $x$, $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ (Thomas, 2002, p. 90).

comparada aos conceitos matemáticos do ensino superior; o conceito de limites é um exemplo disso. Comparado com conceitos elementares da matemática, no seu estudo é necessário um rigor maior e uma capacidade de indução e abstração maior, em que "todo o conceito de limite está contido na sua definição" (Cornu, 1983, p. 23).

> Uma das maiores dificuldades no ensino e aprendizagem do conceito de limite não reside apenas na sua grandeza e complexidade, mas também na medida em que os aspectos cognitivos não podem ser generalizados por meio de uma definição puramente matemática. A distinção entre a definição e o próprio conceito é didaticamente muito importante. Lembrando que a definição de limite é uma coisa, a aquisição da concepção fundamental é outra. Uma faceta é a idéia de aproximação, geralmente encontrada primeiro através de uma noção dinâmica de limite, e a maneira pela qual o conceito de limite é posta a trabalhar para resolver problemas reais que não dependem da definição, mas de muitas propriedades diferentes do conceito intuitivo. A partir de tal ponto de vista, os alunos muitas vezes acreditam que eles "entendem" a definição de limite sem realmente adquirir todas as implicações do conceito formal. Os alunos são capazes de resolver muitos dos exercícios corretamente, sem compreender, de todo, o formalismo da definição. Enquanto isso, os quantificadores "para todo" e "não existe", que ocorrem nas definições de epsilon-delta, têm seus próprios significados na linguagem cotidiana, sutilmente diferentes daquelas encontradas na definição do conceito de limite. (Cornu, 2002, p. 153)

Cornu (1991) diz haver uma grande diferença entre compreender o conceito de limite e a compreensão da sua definição, pois para ele são duas coisas independentes, e exemplifica isso com alunos que assimilam a definição de limite e partem para resolver exercícios a partir dela, conseguindo certo êxito. Porém, eles não entendem o conceito de limite e, por outro lado, existem outros alunos que compreendem bem o conceito por meio de representações mentais, ideias com aproximações, mas não conseguem associá-las com a definição formal de limite.

> A definição formal de limite, tal qual se encontra hoje nos livros de análise real e em alguns livros de CDI (Cálculo Diferencial e Integral), usando épsilons e deltas, é consequência de mais de um século de tentativas e erros e expressa, em pouquíssimas palavras, o resultado de um esforço persistente para formular este conceito como uma base matemática aceitável. (Barroso et al., 2009, p. 99)

Nos estudos de Santos (2010), a autora questiona o porquê da definição de Heine[7], que surgiu anteriormente a definição de Cauchy, ser utilizada numa primeira abordagem para o

[7] Sendo $a$ e $b$ constantes (finitas ou infinitas), diz-se que a função $x \to f(x)$, real de variável real, tem por limite $b$, quando $x$ tende para $a$ – e escreve-se $lim_{x\to a} f(x) = b$ – se e só se toda a sucessão $x_1, x_{2,} \ldots \ldots x_n \ldots \ldots$ de valores de $x$ (distintos de $a$ e todos pertencentes ao domínio da função), tendente para $a$, corresponde uma sucessão $f(x_1), f(x_2) \ldots \ldots f(x_n) \ldots \ldots$ tendente para $b$. Simbolicamente : $lim_{x\to a} f(x) = b \iff \forall (x_n), x_n \in Dx_n \neq a, lim_n x_n = a \Rightarrow lim_n f(x_n) = b$. (Santos, 2010, p. 12).

aluno referente ao conceito de limite. A autora apresenta uma demonstração de equivalência entres as duas definições e conclui afirmando que os conceitos envolvidos nas duas definições são os mesmos, além do grau de dificuldade em termos teóricos ser o mesmo também.

Contudo, a definição de Heine sendo mais espontânea, vem sendo utilizada no ensino secundário, enquanto a definição de Cauchy vem sendo introduzida no ensino superior. A autora acredita que se deve começar por apresentar ideias do conceito de limite e só depois a definição formal, pois trabalhar diretamente com definição de forma rigorosa numa fase inicial pode gerar obstáculos à aprendizagem.

Com base nisso, Cornu (1983) referencia os “obstáculos epistemológicos” de Guy Brousseau, que o define como um

> conhecimento que funciona bem em certo domínio de atividade e, portanto, torna-se bem estabelecida, mas depois não funciona satisfatoriamente em outro contexto no qual ele funcionará mal e levará a contradições. Por conseguinte, torna-se necessário destruir o conhecimento original insuficiente, mal formado, para substituí-lo com o novo conceito que funcione de forma satisfatória no novo domínio. A rejeição e esclarecimento de tal obstáculo é uma parte essencial do próprio conhecimento; a transformação não pode ser realizada sem desestabilizar as idéias originais, colocando-os em um novo contexto onde eles são vistos claramente a falhar. Este, portanto, requer um grande esforço de reconstrução cognitiva. (Cornu, 2002, p. 159)

Os obstáculos são parte do conhecimento dos alunos e, frequentemente, foram satisfatórios e serviram para resolver problemas. Contudo, esses conhecimentos, depois de algumas interações com outros problemas, originam conflitos, passando a ser chamados de obstáculos epistemológicos.

> A importância do ensino do conceito de limite é inquestionável, pois ele é a fundamentação das aplicações do Cálculo, que surgem no contexto da derivada e integral. O grande avanço do Cálculo, historicamente, foi possível no momento da formalização do limite e após isso, várias aplicações surgiram. (Zuchi, 2005, p. 19)

Nas práticas docentes atuais é notável que o ensino de limite seja feito de forma expositiva e tradicional, ou seja, o professor, nessa perspectiva, enuncia verbalmente e ainda chega a escrever no quadro o conceito/definição de limite de função. Daí resulta “uma grande dificuldade na aprendizagem do conceito de limite quando ele se introduz, intuitivamente, pela cinemática e, após se apresenta a definição, formalmente, utilizando o ponto de vista de aproximação ($\varepsilon$, $\delta$)” (Zuchi, 2005, p. 20).

Zuchi (2005), na sua tese de doutorado, objetivou realizar um estudo sobre as dificuldades de ensino e aprendizagem do conceito de limite com a possibilidade de propor alternativas que pudessem minimizar tais dificuldades. Para isso, a autora delimitou os seguintes objetivos: 1) realizar um estudo sobre os obstáculos presentes na história do surgimento do conceito de limite; 2) analisar, nos livros didáticos, como o conceito de limite é apresentado; 3) observar, em classe, as principais dificuldades na construção do conceito de limite; 4) desenvolver uma sequência didática do conceito de limite e aplicá-la em uma classe; 5) desenvolver e aplicar uma sequência didática do conceito de limite em um ambiente informatizado. Metodologicamente, para atingir os objetivos supracitados, a autora utilizou-se da Didática da Matemática – Engenharia Didática a Inteligência Artificial. Em termos conclusivos, a autora confirmou a existência de obstáculos de ensino-aprendizagem no conceito de limite, por exemplo, dificuldades em trabalhar com grandezas infinitesimais e com a noção do infinito e relação entre $\varepsilon$ e $\delta$ sob o ponto de vista das suas aproximações.

Estas dificuldades de aprendizagem são geradas devido a alguns fatores como a linguagem matemática, falta de conteúdos prévios e básicos, passagem do conceito intuitivo para a definição de limite do ponto de vista da aproximação e para uma forma mais rigorosa. Segundo (Juter, 2006),

> O rigor e a noção de limite desenvolveram-se de formas diferentes, e em diferentes épocas com tradições e modos de representações diferenciadas. De fato muitos anos se passaram até que Weierstrass definiu limites de funções de forma rigorosa por meio de símbolos, este fato não implica que, anteriormente, o limite fora tratado de forma menos rigorosa ou alheia. A tradição de usar as palavras em vez de símbolos talvez seja tão complicado quanto as explicações, no entanto, estas poderiam ser completamente precisas e rigorosas, até mesmo antes de Newton e Leibniz estarem vivos. (Juter, 2006, p. 14)

Segundo Abreu e Reis (2011, p. 8), "quando apresentamos o conceito de limite, utilizando a definição formal com $\varepsilon$-$\delta$ (epsilons e deltas), não há como negar a complexidade que essa notação apresenta e, principalmente, o que o aluno necessita para compreendê-la". Num estudo feito pelos autores, foi pedido ao final de cada atividade que os estudantes definissem formalmente limite de funções em vez de descrevê-la por meio de conceitos, como era pedido no início das atividades. Com isso, apresentaram como um dos resultados:

> que a notação rigorosa para limites se revelou totalmente sem sentido para os alunos, já que praticamente todas as respostas ficaram em branco, sendo que nenhum participante apresentou uma resposta considerada correta. Assim, os alunos não conseguiram minimamente perceber nas definições formais, elementos

intuitivamente corriqueiros no estudo de limites que deveriam retomar imagens conceituais evocadas no início da atividade. (Abreu & Reis, 2011, p. 16)

Para os alunos, este registro analítico se concentra no mundo das abstrações e só passa a ter sentido quando o próprio professor utiliza argumentos geométricos e gráficos para explicar o conceito de limite de uma função. Miranda (2010) adverte que,

> para o ensino de Cálculo, a valorização de aspectos algébricos e gráficos deve ser complementar, nas questões e problemas da disciplina, entretanto, na prática dos professores, é dada maior ênfase para os de caráter algébrico. Tal fato poderá justificar a escolha de alguns estudantes em utilizar mais um aspecto do que o outro, em suas conjecturas. (p. 108)

Para Domingos (2003, p. 91), "A aprendizagem de um conceito como o de limite não é uma tarefa fácil, pois os alunos mesmo antes de este ser ensinado já têm certo número de ideias, intuições e imagens que lhes são proporcionadas pela sua experiência diária". Para isso, Juter (2006) diz ter uma visão construtivista em relação à aprendizagem, de forma que os estudantes aprendem por construções individuais e que o conhecimento de um conceito é influenciado pelo ambiente.

Para um aluno aprender o conceito de limite "é necessário que ele seja construído considerando-se a intuição, os erros, as dificuldades enfrentadas pelos matemáticos em sua elaboração. Ou seja, para encontrar significação em um conceito matemático, é preciso, em muitos casos, vivenciar as condições experimentais nas quais ele foi formulado." (Barroso et al., 2009, p. 102). Nos estudos destes autores, eles entregaram aos estudantes uma folha com a definição formal (de Cauchy) de limite e pediram aos mesmos que expressassem de alguma maneira, por gráficos, exemplos numéricos, por meio de linguagem natural etc., o que eles entendiam por essa definição. Depois de uma semana, as folhas foram recolhidas com respostas do tipo:

> • Quando $x \in x_0$, o $\delta$ fica menor e diminui também o $\varepsilon$. Quanto mais próximo de $x_0$ o $x$ estiver, o $\delta$ vai diminuindo e o $\varepsilon$ tende a zero;
> • Quanto menor for a diferença entre $x$ e $x_0$ $(0 < |x - x_0| < \delta)$, menor será a diferença entre $f(x)$ e $L$ $(0 < |f(x) - L| < \varepsilon)$;
> • Para cada variação no valor de $\delta$, existe uma variação no valor de $\varepsilon$ tal que...;
> • Para cada valor de $\delta$, mantendo o valor de $x$ no intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $x \neq x_0$, fazemos com que os valores de $f(x)$ se mantenham no intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. (Barroso et al., 2009, pp.105-106)

Com base nestas respostas, os autores concluíram que:

> Os alunos tentaram encontrar a definição intuitiva dentro da definição formal. Naturalmente, nenhum aluno foi capaz de perceber que entre a definição formal e a definição intuitiva existe uma inversão do processo de aproximação. Na definição formal, não é a variável independente que produz uma aproximação da imagem da função ao limite. De fato, é o grau de aproximação (ao limite) desejado que impõe à variável independente uma condição de limitação a um intervalo. (Barroso et al., 2009, p.106)

Nesta mesma perspectiva, apresentamos o trabalho de Guerra (2012) com estudantes do 12.º ano, numa pesquisa que investigou o conceito de limites de funções. Segundo os resultados da investigação de Guerra (2012), na aprendizagem do conceito de limite, os estudantes apresentavam dificuldades em relacionar a noção intuitiva de limite com a definição de limite de uma função. Nesta pesquisa a pergunta de investigação foi "Que dificuldades revelam os alunos sobre o conceito de limite de uma função?" (Guerra, 2012, p. 122). Para responder a esta pergunta a autora dividiu em categorias e subcategorias de concepções, sendo que uma destas foi chamada de "Noção intuitiva de limite de uma função", a qual foi subdividida nas seguintes subcategorias: 1. Considera o limite da função igual à imagem da função no ponto considerado; 2. Associa o conceito de limite à existência de assíntotas do gráfico da função; 3. Associa o conceito de limite à monotonia da função; 4. Considera como limite da função um valor aproximado do verdadeiro limite, quando a função não está definida no ponto considerado; 5. Considera o limite como algo intransponível; 6. Considera que o limite pode ou não ser atingido; 7. Considera o limite como algo que tem de ser atingido. Estas subcategorias foram criadas pela autora ou retiradas de outras pesquisas anteriores citadas pela autora.

> A conceção 1 foi identificada por Thabane (1998) e Laridon (1992), citados por Jordaan (2005); as conceções 5 e 6 foram identificadas por Cornu (1983); a conceção 4 poderá estar associada à ideia de limite como processo (Tall & Vinner, 1992, 1994). Por outro lado, esta última conceção também se poderá incluir numa das conclusões de Maurice (2005), que refere que os alunos veem, muitas vezes, o limite como uma aproximação. A conceção 7 está relacionada com a 6. No que diz respeito às conceções 2 e 3, não as identificámos em nenhum trabalho anterior. De facto, no que diz respeito à conceção 2, há trabalhos que falam das assíntotas do gráfico de uma função associadas às situações de indeterminação, mas neste momento do trabalho, ainda não tínhamos abordado o assunto das indeterminações. Quanto à concepção 3, também não a identificámos em nenhum estudo anterior. As respostas inseridas nesta concepção surgem de uma forma muito pontual, não se conseguindo encontrar um padrão entre elas. (Guerra, 2012, pp. 123-124)

Conforme as categorias definidas acima para análise dos dados coletados, a autora diz que a mais comum que apareceu nos dados coletados (entrevistas, diário de campo e atividades de intervenção) foi a 1. – Considera o limite da função igual à imagem da função no ponto considerado. Assim, a autora confirma resultados de pesquisas anteriores quanto a um possível conflito gerado pela concepção dos estudantes sobre o significado de limites de funções, quando estes possuem concepções em que o limite da função corresponde "à imagem da função no ponto onde queremos calcular o limite, surgindo assim situações em que os alunos referem que o limite não está definido quando o queremos calcular num ponto que não pertence ao domínio da função" (Guerra, 2012, p. 3).

A autora aponta ainda uma reflexão sobre o estudo desenvolvido, indicando os pontos positivos e negativos da pesquisa para a sua prática docente e servindo de reflexão para futuros pesquisadores e professores de Cálculo que venham a utilizá-la como referência. Por exemplo, a autora não utilizou muito de recursos tecnólogicos e reconhece que estes poderiam ter sido positivos como referência e fixação de aprendizagem do conteúdo tratado.

De forma semelhante a esta pesquisa, porém com participantes graduandos, temos o estudo de Neto (2006), no qual o autor cita um trabalho feito com centenas de alunos das licenciaturas de Ciências e Tecnologia da Universidade de Aveiro. Estes alunos foram questionados sobre a definição de limites e com base nas respostas dos alunos chegou a conclusões relevantes para o ensino e aprendizagem de limites de funções, tendo por origem a seguinte pergunta: "Diga em poucas palavras o que entende por limite, ou seja, explique o que significa para si a expressão "o limite de uma função $f$, quando $x \to t$ é um número $L$". (Neto, 2006, p. 13). Esta pergunta gerou dúvidas, questionamentos e obtiveram-se respostas dos alunos do tipo:

- Para mim a expressão referida diz-me o número para o qual a função se dirige (tende) sem o atingir; fiquei confuso!!! Se atinge ou não.
- Nunca ninguém me perguntou isto e nunca me tinha apercebido das dúvidas que poderia ter sobre limites. Realmente senti-me confuso (...).
- Quando o limite dá ∞, existe ou não o limite? O limite tem de ser um valor?
- Os $\varepsilon\varepsilon$ e $\delta\delta$ é que é uma complicação; só sei isto com as sucessões.
- Limite de uma função num ponto é o valor que essa função admite numa vizinhança desse ponto. [Muitas respostas deste tipo]
- Limite de uma função é um ponto extremo do seu contradomínio quando o $x$ tende para um extremo do seu domínio.
- Limite é o valor de $y$ mais alto ou mais baixo (sic) quando se vai tomando valores de $t$.
- Limite é o número máximo que uma função pode ter quando $x \to t$.
- Quando uma determinada função tende para um determinado domínio, essa função terá significado até ao número determinado. Atingindo aí o seu máximo. Por vezes uma determinada função nunca chega a ter limite, o caso quando $L = \infty$.

- Uma função tem por limite um número $L$, quando é limitada arbitrariamente por valores de $x$.
- Limite é o valor que uma função não pode ultrapassar.
- $lim_{x\to t}\left(f(x)\right) = L$ significa que a derivada da função $f(x)$ no ponto $t$ tem o valor de $L$.
- Limite é algo que é atingido no fim, algo propriamente definido pela função de $x \to t$.
- O limite é o número mais próximo de $t$ que está definido pela função $f$.
- O limite é uma vizinhança de um ponto. (Neto, 2006, pp. 13-14)

Além destas respostas, obtiveram-se outras respostas simbólicas. Com isso, Neto (2006) procurou em sua pesquisa alternativas para o ensino de limites utilizando os *softwares* Graphmatica, Cabri Géomètre e Excel como ferramentas auxiliares, de modo a procurar melhorar o envolvimento dos alunos na aprendizagem desse conceito. Foram feitas atividades para o uso dos *softwares* e numa aplicação inicial constataram que dos 12 alunos participantes, estes não tinham conhecimentos de limites, sabiam usar o computador e, entretanto, apenas dois deles já tinham tido contato com o *software* Graphmatica. O autor concluiu que os professores ainda preferem trabalhar com o ensino de limites de forma tradicional, baseando-se no formalismo da sua definição e na abordagem dos conceitos nos livros escolares. Em contrapartida, os alunos preferem que o conteúdo de limites seja trabalhado de forma mais aplicada e com o uso de tecnologias – computadores –, o que facilitaria os seus aprendizados. Nesta disputa em relação ao estudo de limites de funções, os alunos saem perdendo, pois o que vimos ainda é um ensino tradicional pautado nas considerações e recursos utilizados pelos professores, não levando em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes e o seu contexto social.

Na tentativa de compreender os conhecimentos prévios dos alunos, Cornu (1983, 1991) denominou o conhecimento anterior ao conceito formal de limites de concepções espontâneas, as quais não são esquecidas mesmo quando o indivíduo entra em contato com outros e novos conhecimentos, interagindo com os novos conceitos para gerar as idiossincrasias do indivíduo. Ou seja, para Cornu (1983), muitas noções ou conceitos matemáticos possuem imagens conceituais que não são vazias antes de serem explorados explicitamente no ensino, pois o estudante já possui uma série de ideias, imagens, processos, palavras formadas que podem não ser consistentes com o saber normativo, mas que funcionam em certas ocasiões.

Esse conjunto de experiências iniciais Bachelard (*apud*, Cornu, 1983) chama de primeiras experiências e Cornu de concepções espontâneas. Estas concepções podem vir de diversas situações da vida cotidiana ou ser induzidas por outras partes da matemática. Assim, os conceitos de infinito e de limite já podem existir em uma forma particular antes de serem ensinados.

Cornu (1983) apresenta os obstáculos epistemológicos que surgiram na evolução histórica do conceito de limite. Por exemplo, no campo conceitual ele diz que o conceito de infinito pode ser um obstáculo para a aprendizagem do conceito de limite, pois não é possível ter uma concepção deste último sem ter o conhecimento de infinito. De forma geral, o autor nos diz que não se pode falar do conceito de limite de maneira isolada, pois a noção de limite está intimamente relacionada com outros conceitos, como os conceitos de derivada, função e até mesmo com o conceito de número real, e não pode desenvolver um único elo com essas outras noções. Em relação aos problemas de tipo geométrico – Cálculo de áreas, grandezas geométricas e conceito de indivisibilidade, Cornu (1983) afirma a dificuldade em deixar de ver o conceito de limite na perspectiva geométrica e passar a ter uma interpretação numérica, o que gerou dificuldades de aprendizagem e possivelmente obstáculos epistemológicos.

É importante salientar os estudos feitos por Celestino (2008), em que são referenciados estudos de Cornu (1983), Santos (2005), Nunes (2001), dentre outros, sobre os obstáculos epistemológicos gerados na aprendizagem de limites de funções. O autor investigou as concepções de alunos do ensino superior sobre limites e possíveis imbricações entre obstáculos epistemológicos relacionados a essas concepções. Para isso, o autor desenvolveu sequências numéricas, abordando aspectos sobre a convergência e monotonicidade, relação entre termos, como “ter limite” e “ser limitada”, e utilizou um conjunto de atividades levando em consideração os resultados de pesquisas sobre o conceito de limite e os obstáculos epistemológicos identificados neste conceito. O autor faz uma abordagem teórica baseada em outras pesquisas sobre os obstáculos oriundos no processo de associar o limite ao movimento físico e a monotonicidade, questionamentos de alunos referentes aos conteúdos de limite, como alcançar e/ou ser alcançado, expressões do tipo “ter limites” e “ser limitado”, ou seja, como algo a ser alcançado de forma estática ou, por outro lado, algo que pode ser alcançado por vias de aproximações de forma dinâmica. Por exemplo:

> O símbolo $lim$, usado quando escrevemos $lim_{x \to x_0} f(x) = L,$ na própria leitura dessa sentença, traz aos alunos dificuldades em perceber que o “<u>limite é</u>” e a “<u>função se aproxima</u>”, em geral, lêem <u>o limite se aproxima</u>. Assim como, a semelhança com a álgebra, por exemplo: determinando $lim_{x \to 5} \frac{x^2-1}{x-3}$, o $x$ é

substituído por 5 e obtemos $lim_{x \to 5} \frac{5^2-1}{5-3} = 12$, o que não pode ser feito se a função não for contínua ou não for definida para $x = 5$. Muitas vezes, não há preocupação em se verificar se a função satisfaz essas condições; claramente o procedimento algébrico se sobrepõe e oculta as diferenças entre a operação de limite com a álgebra. (Celestino, 2008, p. 50, grifo do autor)

Quanto as questões referentes as concepções dos alunos a respeito de limites de sequências, Celestino (2008) afirma que

> limite é visto como um valor do qual os termos de uma seqüência "se aproximam cada vez mais" e esta aproximação deve ser obtida com valores (termos da seqüência) crescendo (ou decrescendo) até que estejam bem próximos de um certo número, o limite; no entanto, este não é atingido ou mesmo ultrapassado pelos termos da seqüência (embora esta possibilidade tenha sido considerada por poucos alunos). Isto descreve a própria noção intuitiva do limite (Celestino, 2008, pp. 169-170).

Com estas afirmações supracitadas, o autor concluiu que

> as expressões "converge" e "tende" podem ter seus significados mais relacionados que o termo "se aproxima" teria com cada uma delas, pois em diversos momentos, as duas primeiras expressões encontram-se em categorias associadas nas árvores de similaridade e coesiva e no grafo implicativo. A expressão "se aproxima" tem seu significado mais próximo de "tem limite", também pelo fato de, em diversos momentos, essas expressões se encontrarem em categorias associadas e pelo fato de os Modelos Primitivo e Dinâmico parecerem ser dominantes nas concepções dos alunos. (Celestino, 2008, p. 172, grifo do autor)

Conforme afirmado anteriormente, a pesquisa de Celestino (2008) tomou como referência os estudos feitos por Santos (2005) e Nunes (2001). No caso dos estudos de Santos (2005), o objetivo foi investigar as concepções de alunos de um curso de Matemática quanto a conceitos relacionados à convergência de sequências numéricas. Para isso, procurou compreender a resistência dos estudantes em desassociar a concepção de limite de um movimento físico de uma aproximação, já que sua definição é estática, segundo a autora. Com isso, discutiu-se também as concepções apresentadas pelos alunos quanto a "ter limite" e "ser limitado", assim como na pesquisa de Celestino (2008).

Os participantes foram alunos de uma classe de terceiro ano de Licenciatura em Matemática de uma universidade do interior de São Paulo, os quais já haviam estudado limite e que ainda não tinham tido contato com o conceito de sequências numéricas. Foi desenvolvida uma sequência de cinco atividades. Quanto à sequência convergente, a autora concluiu no seu estudo que a maioria dos participantes concebeu que o limite está relacionado com a ideia de aproximação; dessa forma, a concepção deles não está de acordo com a definição de limite, que é estática. Além disso, "percebeu-se que os alunos já não mais escreveram que "o limite tende", mas o "limite é". (Santos, 2005, p. 98, grifo do autor). Deste modo, constatou-se que "para a maioria dos alunos o "salto" significativo entre a noção intuitiva e a definição estática de limite representou uma fonte de discussões e constatações, que permitiram confirmar que na noção de limite estão presentes muitos dos obstáculos epistemológicos" (Santos, 2005, p. 99, grifo do autor).

Em Nunes (2001), a proposta de investigação foi feita com alunos que haviam estudado limites e aproximações. Com isso, a autora procurou saber se estes seriam capazes de construir conceitos relacionados à convergência de sequências e de estabelecer relações entre eles, recorrendo a dez atividades na forma de sequência didática. Interessante que a autora desenvolveu sua metodologia no ensino dos conceitos de forma diferente da que costumamos ver no ensino de matemática, ou seja, em vez de começar com a definição seguindo-se os exemplos, propriedades, teoremas e exercícios de aplicação, a autora inverteu esta ordem e trabalhou com as definições apenas no final.

Especificamente quanto ao tema de limite, a autora apresenta como resultado que muitos alunos continuavam com a concepção de que uma sequência pode ter limites diferentes, dando-se a entender que "o objetivo relacionado com a percepção da unicidade do limite não foi plenamente alcançado. Parece que os alunos concebem limite de sequência como qualquer limite de subsequência. Este é um obstáculo que precisa ser mais trabalhado". (Nunes, 2001, p. 93) Ao falarmos destes obstáculos epistemológicos no processo de aprendizagem de limites de funções não podemos esquecer as questões referentes ao ensino deste conteúdo. Neste viés, citamos Cornu (2002), que afirma que o ensino

> tende a enfatizar o processo de aproximação do limite em vez do conceito de limite em si mesmo. O conceito imagem associado com este processo contém factores que entram em conflito com a definição formal ("aproxima-se mas não pode atingir", "não pode passar", "tende para"). Desta forma os alunos desenvolvem imagens de limite e infinito que dizem respeito a concepções próprias relacionadas com o processo de "estar próximo", "crescer muito" ou "continuar sempre" (Cornu, 2002, *apud* , Domingos, 2003, p. 92).

Cornu (1983), Tall e Vinner (1991) e Abreu e Reis (2011) consideram complexo o ensino de limites de funções, pois o ensino apresenta um tipo de dificuldade epistemológica, ou seja, uma dificuldade em ensinar o conceito de limite independentemente da metodologia de ensino ou do público-alvo, sendo que a aprendizagem deste conceito requer certo grau de maturidade por partes dos aprendizes.

> Normalmente, o conceito de limite aparece no primeiro período nos cursos de Licenciatura em Matemática, em cursos de Engenharia e, invariavelmente, o tema é abordado como um pré-requisito necessário para a compreensão do Cálculo das derivadas e das integrais. Naquele primeiro momento, costuma-se trabalhar conceitos como "estar próximo de" ou "tender para" e a representação gráfica quase sempre é a mais utilizada. (Abreu & Reis, 2011, p. 7)

Conforme Fuente, Armenteros e Moll (2012), existem alguns significados de referência para se utilizarem no ensino de limites: gráfico (representação gráfica); geométrico (associado ao grego e envolve situações, linguagem, procedimentos e conceitos); infinitesimal (aproximação intuitiva e numérica); numérico (tabela de valores $x$ e $y$). Os autores citam o trabalho desenvolvido por David Tall e o seu grupo do pensamento matemático avançado em diversos países, no qual procurou-se analisar o ensino de Cálculo, especificamente, as dificuldades dos estudantes quanto a sua compreensão dos conceitos do Cálculo infinitesimal e buscando as causas de tais dificuldades. Segundo os autores, a conclusão do trabalho corrobora a ideia do pensamento matemático avançado, em que no ensino de limites é imprescindível uma tripla representação: numérica, gráfica e simbólica.

É importante que o professor proporcione ao aprendiz a oportunidade de contato com estas três representações, acreditando assim numa aprendizagem mais sólida do conceito de limite de uma função. Juter (2006) corrobora esta ideia quando refere que "os limites podem ser tratados por meio de uma abordagem exploratória, começando com tabelas e gráficos de valores da função e posteriormente como entidades expressas simbolicamente" (Juter, 2006, p. 17).

Num outro trabalho de Fuente e Armenteros (2011), baseado numa abordagem onto-semiótica da cognição e instrução matemática, buscou-se investigar o significado "pretendido, avaliado e pessoal" de um processo de estudo sobre o limite de uma função. Os resultados apontaram muitos conflitos semióticos[8] dos alunos ao interagirem com algumas atividades que envolviam limites numa perspectiva intuitiva, sem utilizar o $\varepsilon$ e $\delta$, "o que indica que o conceito de limite de uma função é dotado de uma complexidade ontosemiótica forte e, por conseguinte,

[8] Entende-se *conflicto semiótico* como "a disparidade ou desajuste entre os significados atribuídos a uma mesma expressão por dois sujeitos - pessoas ou instituições - em interação de comunicativa e que podem explicar as dificuldades e limitações das aprendizagens e do ensino implementado" (Godino, 2002, p. 258).

está longe de ser ele um objeto matemático claro para os alunos" (Fuente & Armenteros, 2011, p. 304).

Os autores codificaram as respostas dos alunos em três tipos de conflitos: semióticos argumentativos, conceituais e processuais. Estes conflitos foram baseados em várias entidades primárias definidas: Linguagem – expressões, notações e gráficos; Situações-problema da semi-realidade e semi-abertos, exercícios e aplicações extramatemáticas e intramatemáticas; Ações do sujeito perante as tarefas de matemática – operações, algoritmos, técnicas de Cálculo e procedimentos; Conceitos – definições e descrições de entes matemáticos e propriedades ou atributos de objetos mencionados –, enunciados e proposições. Por exemplo, nos conflitos argumentativos: se a função não estiver definida em um ponto não pode ter limite, sem considerar o potencial infinito; nos conflitos conceituais: interpretação incorreta de valores do limite, não reconhecer o valor dos limites laterais; e nos conflitos processuais: não saber calcular limites laterais por não saber traduzir linguagem gráfica e analítica, impor que o limite no ponto seja igual ao valor da função nesse ponto (Fuente & Armenteros 2008, 2011; Fuente, Armenteros & Gómez, 2006).

Quanto ao professor, numa das respostas as suas perguntas de pesquisa, Fuente e Armenteros (2011) indagaram sobre qual o significado de limite que o professor pretende implementar em sua sala de aula, obtendo como respostas que o

> professor implementa o significado gráfico, a qual está associada com a ideia de que se estude o limite de uma função com explicações gráficas. Em segundo lugar, aplica o significado de infinitesimal que corresponde à idéia de uma abordagem intuitiva numérica, onde o limite é obtido através da substituição da variável $x$ por um valor que se aproxima desta variável. Por fim, utiliza o significado numérico do limite, o qual se justifica por tabelas. (Fuente & Armenteros, 2011, p. 303)

Zuchi (2005) corrobora esta citação e nos diz que

> O professor, geralmente, usa o ponto de vista cinemático para introduzir o conceito de limite. A seguir formaliza o conceito usando o ponto de vista de aproximação ($\varepsilon$, $\delta$). Isso gera dificuldades no processo de ensino e aprendizagem desse conceito, pois muitos alunos não conseguem visualizar a relação entre ambos e não entendem o porquê de encontrar a relação entre $\varepsilon$ e $\delta$. (Zuchi, 2005, p. 207)

Na pesquisa de doutorado de Juter (2006), a autora questiona os professores que trabalham no ensino universitário quanto a uma preocupação: as situações de aprendizagem e os conhecimentos prévios necessários para esta aprendizagem são levados em conta pelo professor? E deste questionamento surge a sua pesquisa com a pergunta de investigação:

"Como é que os alunos lidam com o conceito de limites de funções, num nível básico universitário, na Suécia?" Metodologicamente a pesquisa foi dividida em duas partes: na primeira, com intuito de triangular os dados do fenômeno estudado, a autora optou pelo uso de questionários e entrevistas e das suas ações para o uso das imagens e dos conceitos utilizados no semestre. Nesta, 143 alunos de Cálculo e álgebra responderam a um questionário com intuito de levantar informações sobre cada participante, designadamente dos conhecimentos deles sobre limites, antes mesmo do curso de Cálculo. Já na segunda parte, subdividida em dois períodos, participaram 112 estudantes que responderam a mais questionários e entrevistas.

Com os dados conclusivos desta pesquisa, a autora nos diz que os alunos participantes não conseguiram chegar na definição formal de limite de funções e que esta não estava nas suas imagens conceituais ou nem existia. Consequentemente, não conseguiam lidar com níveis de abstração requeridos pela definição de limite. Os alunos resolviam as tarefas de rotina que lhes eram propostas, porém sem muito compromisso ou até mesmo sem confiança no que estavam fazendo, resultando em algumas confusões que geraram interpretações erradas do conceito e, consequentemente, respostas erradas.

Juter (2006) conseguiu estabelecer uma conexão entre a habilidade dos estudantes em resolver problemas e as suas crenças de autoconfiança em matemática, quando a autora identificou que alunos que possuíam níveis altos de autoconfiança conseguiam resolver problemas com maior facilidade, enquanto a recíproca não era verdadeira, pois a autora não conseguiu detectar nos estudantes que eram bons na resolução dos problemas a possibilidade de melhoria na sua confiança em matemática.

Assim, a autora concluiu que diversos estudantes terminam cursos básicos de Cálculo sem entenderem o conceito de limite ou nem sequer o motivo de não compreenderem o conceito. A falta de interação entre estudantes e professores pode ser um motivo para a deficiente aprendizagem dos alunos, assim como a ausência de relações de problemas do quotidiano com o conteúdo e a sua definição formal. A autora alerta ainda que os alunos precisam tomar consciência das suas imprecisões para ajustá-las de forma adequada. Para que isso aconteça, eles devem estar atentos a aspectos incoerentes das suas imagens conceituais, quando estas surgirem (Juter, 2006).

Nessa perspectiva do ensino de limites enquadram-se os resultados de pesquisa de Santos e Almouloud (2014), a qual tinha como objetivo avaliar o conceito de limite em livros didáticos, além de questões que associam limites as formas indeterminadas, limites infinitos e limites no infinito e se aquisição do conceito de limite possui alguma relação com o seu desenvolvimento histórico. As questões investigadas pelos autores foram:

> Como o conceito de limite ou sua definição são apresentados? Em que contexto, associado à derivada ou continuidade, ela surge? Como são explicadas as indeterminações? Os autores fazem alguma referência ao desenvolvimento desse conceito ao longo da história? Como são explicados os limites infinitos e os limites no infinito? Como os autores explicam que o infinito não é um número? (p. 540)

Em relação às respostas para as questões supracitadas, Santos e Almouloud (2014) dizem que os autores de livros tratam o conceito de limite de diferentes modos, alguns de forma mais intuitiva e outros de modo mais formal. Quanto à segunda pergunta, os autores afirmam que "é praticamente impossível dissociar o estudo do limite do estudo da derivada ou da continuidade. Mas, quando o enfoque é dado ao limite, em si, pode-se perder a ideia do todo" (Santos & Almouloud, 2014, p. 541). Em relação as indeterminações, os autores afirmam que há pouca preocupação dos autores de livros em explicar melhor o que seriam essas indeterminações e acabam recaindo num procedimento algébrico e técnico para o aluno resolver esses casos, isto é, "há a preocupação dos autores no sentido de que o aluno encontre uma maneira de sair dessas situações críticas, mas há pouco empenho tanto na explicação do por que ela é crítica quanto no porquê de certos procedimentos funcionarem" (Santos & Almouloud, 2014, p. 541).

> Com relação aos limites infinitos e limites no infinito, acreditamos que há uma série de dificuldades que podem estar relacionadas aos mesmos. A forma de ler a expressão que os caracteriza é diferente da estudada por intermédio apenas da ideia intuitiva de limite. É aqui que vai ocorrer a mudança de terminologia. Se inicialmente era dito, o "limite é", com o estudo dos limites infinitos, muda-se para o "limite tende". (Santos & Almouloud, 2014, p. 541, grifo do autor)

E por fim, sobre a questão histórica de limites, Santos e Almouloud (2014) dizem que ela não é valorizada pelos autores e quanto a explicação de que infinito não é um número, simplesmente os autores de livros não explicam, ficando a dúvida na mente dos estudantes, ocasionando possíveis obstáculos epistemológicos.

Quanto ao uso de recursos para o ensino de limites de funções, citamos Neto (2006), que constatou, em sua pesquisa com professores, que nenhum deles utilizava *softwares* para o ensino de limites, tendo apenas dois deles, de faculdades particulares, afirmado que seria complicado trabalhar com computadores, pois o conteúdo já era muito extenso e que precisaria de uma carga horária maior.

Não devemos nos apoiar apenas nos recursos de livros e *softwares* para o ensino de Cálculo, mas sim num conjunto de recursos informacionais e comunicacionais para o ensino de um conceito complexo como é o de limite. Entendemos como recursos informacionais e comunicacionais livros e tecnologias informáticas, como por exemplo: livros didáticos, livros de cunho educacional como os utilizados em nossa investigação, *softwares* (GeoGebra, Winplot, Excel, Maple, etc.) e aplicativos matemáticos para plotagem de gráficos, demonstrações geométricas e visuais de conceitos matemáticos, planilhas eletrônicas, editores de textos, computadores e calculadoras. Nesta pesquisa, o uso de tecnologias informáticas serviu como suporte, verificação e fixação do conteúdo de limites de funções.

Há uma grande crítica na literatura referente as aulas de Cálculo no que tange ao uso de recursos didáticos, audiovisuais e informáticos, pois a grande maioria dos estudiosos sobre o uso de tecnologias acredita que falta ao professor habilidades para o uso destes recursos e muitos ficam presos, muitas vezes, a uma metodologia de ensino tradicional, com aulas expositivas e exercícios extraídos de livros de texto. Nos estudos de Santarosa e Moreira (2011), os autores salientam práticas de professores de Física e Matemática referentes ao uso destes recursos, como vemos no seguinte trecho:

> As aulas de ambas as disciplinas, Cálculo e Física, são expositivas, sem a utilização de recursos audiovisuais ou computacionais e sem uma relação mais próxima com as atividades de laboratório. Particularmente nas salas de aula teóricas não há suporte para o uso de recursos audiovisuais e tecnológicos, tampouco espaço para desenvolvimento de atividades experimentais. Estas parecem ser atividades exclusivas dos laboratórios de ensino. Nas aulas de Física observadas não era adotada uma bibliografia específica, apesar de serem referenciadas no plano de ensino oficial da disciplina. As listas de exercícios, elaboradas por docentes do próprio Instituto de Física, ficavam disponíveis para os alunos na home-page do Curso. Já na disciplina de Cálculo I, adota-se um livro específico, com exercícios recomendados. (Santarosa & Moreira, 2011, p. 346)

Além da breve discussão anterior, sabendo da relevância do uso de recursos informacionais e comunicacionais para o ensino de Cálculo e, especialmente, de limites, dedicamos-lhe as duas subseções seguintes, a primeira centrada nos livros didáticos e a segunda nas tecnologias informáticas.

### 2.4.2. Livros didáticos

Os livros didáticos, como recurso de ensino, constituem um dos elementos mais usuais em sala de aula, pois é por meio deles que muitos professores se orientam para elaborarem e planejarem as suas aulas. Independente da metodologia de ensino, a utilização de livros no ensino, em particular de matemática, constitui um referencial importante para o professor.

Percebemos que desde o ensino fundamental até o ensino superior o livro é considerado um dos recursos mais utilizados nas diversas disciplinas. A variedade de abordagens também apresenta grandes diferenças entre os livros.

> O livro didático é um suporte para o curso, seja para uma indicação de leitura prévia ou de uma pesquisa mais avançada por parte dos estudantes, ou como um apoio, às vezes, na íntegra, para as aulas ministradas em classe. O livro constitui-se num referencial sempre presente na pesquisa do professor e aluno. As diferenças entre os livros são notáveis e tornam-se significativas na escolha realizada pelo professor. Alguns livros são mais teóricos, outros são mais contextualizados, o que fica claro no prefácio de alguns livros onde os autores explicitam o público alvo a que se destinam. (Zuchi, 2005, p. 57)

Segundo Lima (2013), na década de 1980 alguns professores tentaram retomar o ensino de Cálculo utilizando como recurso didático o livro. Entretanto, parece que a tentativa não teve muito êxito, pois os professores reproduziam, superficialmente, os conteúdos dos livros e os alunos só saberiam realmente o conteúdo, com uma maior profundidade, se recorressem a leitura dos livros para saber mais sobre os conteúdos estudados em sala, como vimos neste trecho de um professor entrevistado pelo autor.

> o livro era praticamente reproduzido em sala de aula, sem qualquer consideração adicional; havia, inclusive, aspectos importantes do ponto de vista didático, como, por exemplo, o apelo à visualização gráfica e a discussão dos significados das notações empregadas, que estavam presentes no livro e que não eram levados para a sala de aula; o aluno só entraria em contato com estas discussões se fosse estudar pelo livro, o que não necessariamente ocorreria. (Lima, 2013, p. 10)

Numa das perguntas de investigação da tese de doutorado de Zuchi (2005, p. 25): "Como, nos livros didáticos, é introduzido o conceito de limite?", a autora, para lhe responder, utiliza outros questionamentos do tipo: "Levam-se em consideração os conhecimentos anteriores adquiridos pelos alunos? Há uma preocupação em apresentar a origem das ideias fundamentais presentes na história? A linguagem utilizada é mais natural ou matemática? É apresentado um problema motivador para o estudo do conteúdo?" (Zuchi, 2005, p. 59).

Com base nessas indagações e na sua revisão teórica, a autora apresenta à pergunta "Como, nos livros didáticos, é introduzido o conceito de limite?" a resposta, definindo dois pontos de vista para formalizar o conceito de limite: "o ponto de vista cinemático: a *medida que $x$ se aproxima de $a$, $f(x)$ se aproxima de $L$*, e o ponto de vista de aproximação: *podemos tornar $f(x)$ tão próximo de $L$ quanto desejarmos, desde que tomamos $x$ suficientemente próximo de $a$*". Assim, "observa-se que a grande maioria dos livros apresenta a definição de limite, inicialmente, utilizando-se do ponto de vista cinemático, trabalhando com a ideia intuitiva do limite e após coloca a definição formal do limite, utilizando-se do ponto de vista de aproximação" (Zuchi, 2005, p. 69). E ainda sobre a forma como o limite é apresentado em sala de aula, a autora nos diz que este

> se apóia na realidade encontrada nos livros didáticos. O professor geralmente utiliza o livro como referência básica na preparação de suas aulas. Na análise dos livros didáticos constatou-se que a grande maioria dos livros apresenta a definição de limite, inicialmente, utilizando-se do ponto de vista cinemático, trabalhando com a idéia intuitiva do limite e após explana a definição formal do limite, utilizando o ponto de vista de aproximação. Entretanto, a definição de limite por seqüência, que é a idéia mais compatível com o ponto de vista cinemático, é muito pouco explorado nos livros didáticos. (Zuchi, 2005, p. 207)

Considerando os resultados do estudo de Amorim (2011) sobre uma análise minuciosa dos livros didáticos de Cálculo[9] no conteúdo de limites de funções, conclui-se que cada um dos livros analisados possui características próprias que, se utilizadas em conjunto numa disciplina de Cálculo, provavelmente, proporcionarão uma ideia/aprendizagem do conceito de limite mais significativa.

> Devido a complexidade do conceito de limite, à dificuldade em aprendê-lo e, certamente, em ensiná-lo é que, em geral, os livros de CDI (Cálculo Diferencial e Integral) apoiam-se sobre abordagens intuitivas que utilizam uma linguagem natural para construir esse conceito. (Barroso et al., 2009, p. 100)

Barroso et al., (2009) acreditam que, apesar da construção desse conceito ocorrer em linguagem natural, existe uma oposição entre a ideia intuitiva e a linguagem formal e de uma possível explicação dos livros em utilizar apenas o tratamento intuitivo para o conceito de limite. Os autores ainda afirmam que é possivel que um aluno obtenha sucesso na disciplina de Cálculo resolvendo todos os exercícios do livro de texto de Cálculo sem entender o conceito de limite, de que derivam todas as principais definições do Cálculo (Barroso et al., 2009).

---

[9] No estudo foram analisados os livros: Leithold, L. (1994). *O Cálculo com Geometria Analítica* (Volume 1). São Paulo: Harbra; Thomas Jr., G. B. (2009). *Cálculo* (Volume 1). São Paulo: Addison Wesley; Stewart, J. (2009). *Cálculo* (Volume 1). São Paulo: Cengage Learning.

Conforme já foi citado anteriormente, nos estudos de Santos e Almouloud (2014), foi feita uma investigação nos livros didáticos a respeito da apresentação e abordagem do conceito de limite pelos autores de livros didáticos, ou seja, se estes tratam uma abordagem mais intuitiva ou trabalham de maneira mais direta e formal, tendo observado que:

> Os autores apresentam o limite de diferentes modos. Há aqueles que optam por falar sobre ele – de maneira sucinta - ao apresentarem a derivada (como é o caso de Ávila). Outros trabalham inicialmente com a noção de aproximação por intermédio de um exemplo concreto ou de gráficos (Boulos e Rogério, Silva e Badan). Há também aquele que já associa, desde o início, o estudo do limite com o de continuidade (Guidorizzi). (Santos & Almouloud, 2014, p. 541)

Quanto ao discurso usado nos livros, Santos e Almouloud (2014) salientam que se percebe no prefácio do livro que, apesar de alguns autores explicitarem que o seu texto é dirigido para alunos dos primeiros anos de universidade, os enunciados parecem mais destinados aos especialistas.

> Nos dias atuais há a utilização do termo "interface não amigável" para definir tecnologias ou sistemas nos quais os usuários encontram dificuldades em manipulá-los. Com o cuidado necessário, podemos nos utilizar dessa terminologia para refletirmos sobre os textos dos livros de Cálculo. O livro deveria servir, também, de estímulo ao estudo. Seu texto, apresentação, problemas – deveriam criar um "ambiente" que fosse fácil de ser lido pelo aluno. Mas, isso não acontece com frequência. Os livros acabam exercendo o papel de comunicadores de conhecimento pronto e acabado. (Santos & Almouloud, 2014, p. 542)

> Em alguns momentos o autor se dirige ao professor, em outros momentos ao aluno, por exemplo, o livro de Rogério, Silva e Badan (1992). No caso de Ávila (1999) há a referência explícita de que o livro foi feito para o aluno calouro, mas essa informação é para o professor. Ao longo do texto, há poucos indicativos de um discurso que se dirija ao aluno. Boulos (1999) é que o mais se aproxima do "leitor". Encontramos elementos textuais que indicam isso. Além da linguagem, em alguns momentos, ser mais coloquial. Guidorizzi (2001) se dirige ao leitor no prefácio, mas muito pouco ao longo dos capítulos. (Santos & Almouloud, 2014, p. 542)

Para além dos manuais convencionais, na nossa pesquisa procurou-se avaliar e utilizar outros livros, como o *Guia mangá de Cálculo Diferencial e Integral* e *Cálculo para Leigos*, que apresentam uma abordagem um pouco diferente da dos livros didáticos formais supracitados. Acreditamos que estes manuais possam trazer informações e características mais relevantes e talvez importantes para a ocorrência da aprendizagem significativa do conteúdo de limites de funções dos estudantes de Cálculo. No capítulo III descreveremos o uso destes livros no âmbito do presente estudo.

Como o livro Guia mangá de Cálculo Diferencial e Integral é escrito na forma de histórias em quadrinhos (HQs), podemos afirmar que estas têm suas raízes nos homens primitivos, quando estes representavam em cavernas desenhos pictográficos de animais de caça ou de referências ao clima e ao tempo. A evolução das HQs passou por muita turbulência, por muitos anos na história da humanidade. Acontecimentos mundiais as usavam para diversas formas de comunicação.

Segundo Vergueiro e Rama (2009), os pais e professores não olhavam com bons olhos as HQs e desconfiavam do seu potencial para o ensino, pois na década de 1940 pensava-se até que as histórias "desviavam" as atenções de crianças e adolescentes dos conhecimentos ensinados formalmente pelos livros e tutoriais da época. Por outro lado, acreditava-se que as HQs tinham um grande poder sobre as massas no sentido de construir um pensamento ou uma ideologia a favor tanto do bem quanto do mal. Foi quando começaram a surgir as HQs dos super-heróis que se assistiu a um aumento da imprensa tipográfica e a uma maior difusão desta forma de comunicação por todo o mundo.

Apesar do movimento contrário às HQs, com os EUA construindo um selo de autorização para a sua divulgação e com a criação de um Código de Ética dos Quadrinhos[10] no Brasil, tendo por propósito levá-las ao ostracismo e ao esquecimento no tempo, o que aconteceu foi justamente o contrário, ou seja, as HQs resistiram a todas essas pressões e de forma impertérrita, hoje de mãos dadas com a educação, ganharam espaço e estabeleceram uma metodologia diferenciada para diversas áreas do ensino.

> A inclusão efetiva das histórias em quadrinhos em materiais didáticos começou de forma tímida. Inicialmente, elas eram utilizadas para ilustrar aspectos específicos das matérias que antes eram explicados por um texto escrito. Nesse momento, as HQs apareciam nos livros didáticos em quantidade bastante restrita, pois ainda temia-se que sua inclusão pudesse ser objeto de resistência ao uso do material por parte das escolas. No entanto, constatando os resultados favoráveis de sua utilização, alguns autores de livros didáticos – muitas vezes, inclusive, por solicitação das próprias editoras – começaram a incluir os quadrinhos com mais frequência em suas obras, ampliando sua penetração no ambiente escolar. (Vergueiro & Rama, 2009, p. 20)

A evolução dos tempos funcionou a favor das HQs, evidenciando os seus benefícios para o ensino e garantindo a sua presença na escola formal. Muitos países vêm reconhecendo por meio

[10] Elaborado por um grupo de editores brasileiros de revistas de histórias em quadrinhos, que incluía a Editora Gráfica O Cruzeiro, Editora Brasil-América Ltda. Rio Gráfica e Editora e Editora Abril. Fonte: Silva, D. (1976). *Quadrinhos para quadrados* (pp. 102-104). Porto Alegre: Bels.

dos seus órgãos educacionais o valor e a relevância das HQs. No Brasil, o emprego das histórias em quadrinhos já é reconhecido pela LDB (Lei de Diretrizes e Bases) e pelos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) (Vergueiro & Rama, 2009).

A utilização HQs em sala de aula poderá ocorrer de diversas maneiras. Dependendo da criatividade do professor, poderá ser uma inspiração para introduzir um conteúdo, pode servir como fixação de algum tema discutido em sala, como uma ideia para aprofundar certo conceito, mas em nossos estudos será direcionado para o conteúdo de limites de funções.

Para que um professor esteja apto na utilização de HQs, em sala de aula, ele deverá dominar os elementos deste meio comunicacional como uma forma motivadora para o ensino de certos conteúdos, incorporando os quadrinhos de forma positiva na sua prática docente. Acreditamos que assim o professor conseguirá melhores resultados no processo de ensino e aprendizagem.

> A seleção dos materiais em quadrinhos a serem utilizados em aula deve levar em consideração essas características, de forma a atingir resultados mais satisfatórios. Fatores adicionais na escola são também: dispor de um texto que não traga erros gramaticais; um tema capaz de despertar e manter o interesse do grupo, que corresponda às necessidades da disciplina a ser ensinada; um material de qualidade gráfica adequada ao uso pretendido; outros aspectos que o professor considere relevantes para a sua disciplina. (Vergueiro & Rama, 2009, p. 29)

Corroboramos as ideias de Vergueiro e Rama (2009), pois pensando numa aprendizagem que seja significativa é necessário que tenhamos um material "potencialmente significativo", oriundo da teoria ausubeliana. Para tal, o professor de Cálculo, que irá planejar sua aula com base em recursos, como o livro, por exemplo, vai precisar conhecer uma gama de livros e selecioná-los de forma criteriosa, como sugere Vergueiro e Rama (2009), e construir seu material de ensino. É a partir da preparação deste material de ensino que vejo as HQ's como um elemento que irá fazer com que as relações de ensino e aprendizagem sejam mais proveitosas e significativas para quem ensina e quem aprende. Assim, acreditamos que livros que possuam uma abordagem menos formal podem oferecer um complemento aos livros didáticos mais formais, recursos informacionais e comunicacionais que tão utilizados são em nossas salas de aula.

### 2.4.3. Tecnologias informáticas

As tecnologias informáticas são mais um recurso informacional e comunicacional que tem relevância para o ensino da matemática e, em especial, do Cálculo. Corroboramos as ideias de Fernandes e Vaz (1998, p. 1) quando afirmam que "quando recorremos a tecnologia para ensinar/aprender certo conceito ou propriedade matemática, partimos do pressuposto de que conseguimos uma aprendizagem mais significativa e profunda. Portanto, usamos tecnologia, em primeiro lugar, para aprender melhor".

> No ensino de matemática, o uso de TIC tem sido recomendado pelos especialistas pelo fato delas ampliarem as possibilidades de atividades em que os alunos possam trabalhar com diferentes representações, tais como uma tabela, gráficos e expressões algébricas de forma rápida e articulada. Isso contribui para a exploração dos diferentes conceitos matemáticos. Em particular, no ensino superior, o uso de TIC tem sido especialmente recomendado para a disciplina de Cálculo. (Marin, 2013, p. 1)

No estudo feito por Marin (2013) foram entrevistados treze professores do ensino superior, que tinham usado, em algum momento da sua carreira docente, TIC no ensino de matemática. Neste estudo, procurou-se destacar as vantagens e desvantagens do uso de TIC no ensino de Cálculo. Das respostas às entrevistas, o autor concluiu que todos os professores constataram "que o uso de TIC no ensino de Cálculo apresenta muitas vantagens, tais como ganho em tempo com as contas, autonomia que o aluno ganha e a melhora da relação professor-aluno." (Marin, 2013, p. 4).

> Com o uso de TIC, os alunos alteram a forma de agir, pensar e questionar. Em outras palavras, são levados de uma maneira rápida a tentar coisas diferentes, a buscar novas descobertas, a observar propriedades, a testar parâmetros, a investigar de maneira diferente da qual estão habituados. (Marin, 2013, p. 7)

Quanto a desvantagens, constatou-se "que poucos professores se manifestaram em elencar ou mencionar aspectos desfavoráveis desse tipo de opção didática" (Marin, 2013, p. 5). Contudo, embora não tenham sido referidas desvantagens, com base no depoimento de uma professora entrevistada, o autor afirma que esta geração não foi educada para utilizar as TIC em sala de aula e que considerava isso como uma desvantagem se considerarmos os professores que estão se formando atualmente, pois estes exploram todo um aparato tecnológico na sua formação pronto para ser utilizado na sua prática docente. A entrevistada ainda afirma que muitos dos professores têm medo de utilizar as TIC por correrem riscos de ficarem numa situação difícil frente aos alunos. (Marin, 2013).

> O uso de softwares dá ao professor a oportunidade de testar inúmeras hipóteses e fazer generalizações, de maneira rápida e eficiente. O maior entrave ao uso desses recursos não é a falta de recursos físicos (como computadores, acesso a internet, entre outros...) é muitas vezes a resistência dos professores em sair da sua zona de conforto e buscar outros recursos que não o quadro. Daí fica evidente a importância de se formar professores que saibam usar esses recursos tecnológicos. (Alves, Correia, & Melo, 2013, p. 1)

Alves et al., (2013) fizeram uma pesquisa com quinze alunos universitários na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de uma universidade brasileira, a qual foi dividida em duas partes: a primeira decorreu em 40 horas de aula ministradas pelo professor regente, mas com a presença dos pesquisadores observando; e a segunda decorreu durante 20 horas de aula no laboratório, sob a orientação dos pesquisadores e com a presença do professor regente. Nestas 20 horas de aula foram elaboradas atividades e executadas pelos participantes no laboratório, utilizando-se o *software GeoGebra*. Em resposta à seguinte pergunta de investigação: "O uso de software facilita o aprendizado do ensino de Cálculo Diferencial e Integral?", conforme a análise das respostas dos participantes nas atividades e das observações dos pesquisadores nas aulas ministradas, os autores afirmam que o uso de softwares facilita o aprendizado de Cálculo Diferencial e Integral, uma vez que as visualizações de algumas propriedades, que geralmente e tradicionalmente são apresentadas apenas algebricamente, ganham movimento, permitindo também uma melhor interpretação dos conteúdos da disciplina e dando autonomia aos alunos para construírem por si próprios os seus conhecimentos.

No estudo de Neto (2006) todos os dez professores entrevistados disseram que utilizam o quadro e giz como recurso didático para o ensino de limites de funções. Destes professores, quatro disseram usar também o livro didático e dois já usaram apostilas e retroprojetor. Ainda sobre o uso de computadores pelos professores, o autor destaca que

> Não foi feita nenhuma referência a uso de computador e/ou software. A justificativa é a de que as instituições não disponibilizam esses recursos. Perguntados sobre os softwares que conhecem, todos indicam o Excel. Metade afirma conhecer o *Cabri Géomètre* e apenas três conheciam o *Graphmatica*. (Neto, 2006, p. 54)

Alguns destes professores argumentam o não uso do computador por falta de infraestrutura das faculdades e Universidades. Neto (2006) finaliza sua pesquisa reafirmando:

> em conformidade com outros trabalhos citados anteriormente, que o uso dos recursos da informática para o ensino e aprendizagem de Cálculo, em especial de limite e a aplicabilidade deste conhecimento em outras áreas afins, é totalmente viável e de grande aceitação, tanto pelo corpo docente como discente, pois facilita o

> entendimento da matéria pelos alunos e agiliza o trabalho dos professores. (Neto, 2006, p. 67)

Na pergunta de investigação da tese de doutorado de Zuchi (2005): “A utilização de um ambiente computacional poderá fornecer mecanismos com o intuito de minimizar as dificuldades de aprendizagem do conceito de limite do ponto de vista de aproximação e cinemática?”, a autora a responde constatando que

> através das experimentações realizadas que o uso de modelos computacionais que possam auxiliar o ensino de limite constitui-se em uma ferramenta motivadora no processo de aprendizagem. Os alunos, de uma maneira geral, se mostraram bastante motivados e assumiram com responsabilidade a tarefa proposta. (Zuchi, 2005, p. 211)
>
> Contatou-se também que a contextualização e o uso de recursos gráficos receberam índices marcantes em todas as turmas. Esses dois pontos estão relacionados ao limite de ponto de vista de aproximação e cinemático, respectivamente. A seqüência didática num ambiente computacional obteve um bom índice de aprovação das turmas em todos os aspectos considerados relevantes para uma ferramenta computacional. As turmas, de maneira geral, gostaram da interação com o ambiente e mostraram motivação e interesse na resolução das atividades propostas. (Zuchi, 2005, p. 211)

É possível, com o uso de tecnologia informática em conjunto a outros recursos informacionais e comunicacionais, por exemplo, o livro didático ou materiais como revistas tutoriais e apostilas, auxiliar o ensino e aprendizagem de um conteúdo matemático. Contudo, subsiste o problema: Como estes recursos podem estar associados/relacionados aos livros didáticos usados pelos professores em sala de aula? Miranda (2010) acredita que,

> Em adição aos livros de texto, instrumentos de abordagem estática do assunto, deve-se tentar uma abordagem mais dinâmica com o auxílio do computador, de modo que os aprendizes possam visualizar e manipular os seus gráficos e construções, arrastando e movendo, através de ferramentas que o *software* oferece; porém alguns livros didáticos, atuais, de Cálculo, trazem uma abordagem utilizando-se de TIC e apresentam uma revisão de seus conteúdos, em novo estilo, com ilustrações, gravuras e exercícios de simulação em *softwares,* para a construção e interpretação de gráficos. (p. 45)

Observando as pesquisas e produções de diferentes autores (e.g., Allevato, 2007; Borba & Penteado, 2007; Fernandes & Vaz, 1998; Miranda, 2010; Barufi, 1999; Miquelino & Resende, 2013) verificamos uma convergência de ideias ao longo de mais de duas décadas quanto ao uso e a integração de tecnologias no ensino da matemática. Estas tecnologias não têm por intuito substituir o lápis e o papel, mas sim se constituírem como recursos que favoreçam o uso de outras metodologias e experimentações em sala, potencializando a aprendizagem dos estudantes e respeitando, evidentemente, as suas limitações tecnológicas.

> Outra maneira de utilização dos recursos computacionais seria a de enriquecer o ambiente de aprendizagem do aluno, fazendo com que ele interaja com esse ambiente tecnológico, tendo a oportunidade de construir conhecimento. Neste caso, a ênfase está na aprendizagem e na troca de experiências que geram construção do conhecimento e não apenas instrução. (Miquelino & Resende, 2013, p. 2)

Todos os autores supracitados coadunam de ideias sobre os recursos tecnológicos, sejam eles a calculadora, o computador, instrumentos de medição, etc., como recursos potenciais para gerar a aprendizagem e, numa visão holística, para compreender a realidade, pois "a utilização de *softwares* permite por meio de construções, que os conceitos matemáticos sejam explorados e manipulados, deixando de ser estáticos e proporcionando uma nova visão da matemática". (Alves et al., 2013, p. 2)

> Sem dúvidas, novas possibilidades se abrem para o ensino e a aprendizagem com o uso das TIC, podendo ser as aulas mais dinâmicas e contextualizadas, permitindo colocar o aluno no centro do processo. Contudo, para que o computador e os recursos tecnológicos realizem o seu devido papel no ensino, certos cuidados devem ser tomados, principalmente para evitar que sejam cometidos os mesmos erros do ensino tradicional. (Miquelino & Resende, 2013, p. 2)

Na pesquisa de Miquelino e Resende (2013) a maioria dos participantes pesquisados concordou que a tecnologia deve ser uma aliada do professor, pois é inconcebível no ensino atual, em especial nos cursos da área de exatas, que se desconsidere o uso de tecnologias informáticas. Para estes autores, a tecnologia "é um elemento facilitador e que estimula a aprendizagem, levando o aluno a um raciocínio mais rápido, e ao desenvolvimento de habilidades, como a de associar, comparar e analisar" (Miquelino & Resende, 2013, p. 10).

Outra resposta preponderante na opinião dos participantes desta pesquisa quanto à questão das TIC foi que elas facilitam a visualização e a melhor captação do conteúdo por aspectos dinâmicos e geométricos.

> A utilização de recursos computacionais nas aulas possibilita a exploração dos conteúdos matemáticos a partir do campo visual do aluno. Partindo de uma imagem, pode-se explorar o conceito matemático envolvido em uma situação problema. (Alves et al., 2013, p. 2)

De forma geral, as TIC serviram para consolidar conceitos e auxiliar professores a explicitarem melhor os conteúdos em sala de aula, pois, por vezes, certos recursos utilizados, como o quadro e o giz, não são tão eficientes quanto uma tecnologia informática. "Para que a informática contribua para a obtenção de resultados positivos na sala de aula, é imprescindível que os professores adotem metodologias diferenciadas na utilização desses recursos" (Alves et al., 2013, p. 2). Sobre estas metodologias diferenciadas, citadas pelos autores, entendemos que são metodologias que favorecem o estudante na compreensão de um conceito por meio de um recurso de informática, seja por meio da visualização espacial de certos gráficos e sólidos ou através da criação de um espírito de curiosidade e investigativo da sua própria realidade.

Por fim, acreditamos que existe uma valorização das tecnologias informáticas com o uso da escrita, da comunicação e da oralidade, que elas podem se juntar aos conteúdos e conceitos que são apresentados nos livros e que destas relações nasça uma riqueza de recursos informacionais e comunicacionais para o ensino e aprendizagem da matemática, em especial no ensino de limites de funções.

## CAPÍTULO III

## PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

### 3.1. O caráter da pesquisa: Retomando as questões e o objetivo de investigação

Na realização de uma pesquisa é necessário confrontar os dados coletados com um conhecimento acumulado a respeito destes. Geralmente, isso acontece no estudo de um pesquisador por meio de um problema, do qual ele delimita parte do todo para compreender e buscar soluções para o problema de estudo. O pesquisador pode proceder à coleta sistemática de informações, utilizando instrumentos mais ou menos estruturados, técnicas mais ou menos variadas. Esta escolha é determinada pelas características próprias do objeto estudado. (Ludke & André, 1986, p. 22)

> Algumas características básicas identificam os estudos denominados “qualitativos". Segundo esta perspectiva, um fenômeno pode ser melhor compreendido no contexto em que ocorre e do qual é parte, devendo ser analisado numa perspectiva integrada. Para tanto, o pesquisador vai a campo buscando “captar" o fenômeno em estudo a partir da perspectiva das pessoas nele envolvidas, considerando todos os pontos de vista relevantes. Vários tipos de dados são coletados e analisados para que se entenda a dinâmica do fenômeno. (Godoy, 1995, p. 21, grifo do autor)

Identificar o caráter de uma pesquisa não é necessariamente uma tarefa difícil, pois temos duas metodologias principais: quantitativo e qualitativo, e ainda a pesquisa que mescla a quantitativa com a qualitativa – a qual é chamada de qualitativa-quantitativa. Pois, para falarmos do caráter da pesquisa devemos primeiramente situar cada tipo de pesquisa.

> Uma primeira distinção entre a pesquisa qualitativa e a pesquisa quantitativa refere-se ao fato de que na pesquisa qualitativa há aceitação explícita da influência de crenças e valores sobre a teoria, sobre a escolha de tópicos de pesquisa, sobre o método e sobre a interpretação de resultados. Já na pesquisa quantitativa, crenças e valores pessoais não são considerados fontes de influência no processo científico. (Günther, 2006, p. 203)

A pesquisa quantitativa é utilizada quando tem medidas quantificáveis de variáveis e inferências a partir de amostras de população, neste tipo de pesquisa, busca-se explicação para o comportamento dos fenômenos. Já a pesquisa qualitativa apresenta-se indutiva, isto é, o pesquisador desenvolve conceitos, ideias e entendimentos a partir de padrões encontrados nos dados, ao invés de coletar dados para confirmar teorias, modelos e modelos preconcebidos.

> A pesquisa qualitativa é definida como aquela que privilegia a análise de microprocessos, através do estudo das ações sociais individuais e grupais, realizando um exame intensivo dos dados, e caracterizada pela heterodoxia no momento da análise. (Martins, 2004, p. 289)

A escolha por uma metodologia ou pela outra ou até mesmo por ambas independe da vontade e do conhecimento do pesquisador, pois este tem um papel fundamental, todavia não decisivo pela escolha do método. O que se deve levar em conta para determinar qual o caráter ou a metodologia da pesquisa é estar atento às perguntas de investigação, ao foco do estudo, à natureza da forma como os dados serão coletados, aos métodos de coletas que serão utilizados, etc. Conforme este conjunto de fatores, eles serão determinantes na metodologia a utilizar e na definição do caráter da pesquisa.

> a questão não é colocar a pesquisa qualitativa *versus* a pesquisa quantitativa, não é decidir-se pela pesquisa qualitativa *ou* pela pesquisa quantitativa. A questão tem implicações de natureza prática, empírica e técnica. Considerando os recursos materiais, temporais e pessoais disponíveis para lidar com uma determinada pergunta científica colocam para o pesquisador e para a sua equipe a tarefa de encontrar e usar a abordagem teórico-metodológica que permita, num mínimo de tempo, chegar a um resultado que melhor contribua para a compreensão do fenômeno e para o avanço do bem-estar social. (Günther, 2006, p. 207)

Na própria metodologia da pesquisa qualitativa existe uma diversidade de formas de trabalhar, isto é, Bogdan e Biklen (1994) falam sobre os objetivos da pesquisa qualitativa e afirmam a existência de uma variedade de formas no trabalho feito sob este tipo de investigação e que depende dos investigadores qualitativos, pois nem todos utilizam os mesmos objetivos com este tipo de metodologia.

> Ainda que existam diferenças óbvias nas diferentes abordagens à investigação qualitativa, verifica-se algum acordo entre os investigadores no tocante aos objectivos do seu trabalho. Em contraste com os investigadores quantitativos, os qualitativos não entendem o seu trabalho como consistindo na recolha de "factos" sobre o comportamento humano, os quais, após serem articulados, proporcionariam um modo de verificar e elaborar uma teoria que permitisse aos cientistas estabelecer relações de causalidade e predizer o comportamento humano. (Bogdan e Biklen, 1994, p. 70)

Numa análise teórica e conceitual, Coutinho (2013) nos diz que a pesquisa qualitativa tem imbricações com o objeto de estudo, ou seja,

> o objeto de estudo na investigação não são os comportamentos, mas as intenções e situações, ou seja, trata-se de investigar *ideias*, de descobrir *significados* nas *ações individuais* e nas *interações sociais* a partir da perspetiva dos atores intervenientes no processo". (p. 28, grifo do autor)

Neste caso, o pesquisador assume um papel fundamental, ou seja, torna-se o instrumento principal da pesquisa e, por meio da interação com a realidade, coleta os dados (Esteban, 2010). Na perspectiva do papel de pesquisador em pesquisas qualitativas, Gerhardt, Ramos, Riquinho e Santos (2009) consideram alguns elementos importantes e que devam ter a atenção do pesquisador para alguns limites e riscos na pesquisa qualitativa, tais como

> excessiva confiança no investigador como instrumento de coleta de dados; risco de que a reflexão exaustiva acerca das notas de campo possa representar uma tentativa de dar conta da totalidade do objeto estudado, além de controlar a influência do observador sobre o objeto de estudo; falta de detalhes sobre os processos através dos quais as conclusões foram alcançadas; falta de observância de aspectos diferentes sob enfoques diferentes; certeza do próprio pesquisador com relação a seus dados; sensação de dominar profundamente seu objeto de estudo; envolvimento do pesquisador na situação pesquisada, ou com os sujeitos pesquisados. (Gerhardt et al., 2009, p. 32)

Nas pesquisas qualitativas "os contextos de pesquisa são <u>naturais</u> e não são construídos nem modificados. O pesquisador qualitativo <u>localiza</u> sua atenção em ambientes naturais. Procura respostas as suas questões no <u>mundo real</u>" (Esteban, 2010, p. 129).

No presente estudo, foram estabelecidas as três seguintes questões de investigação:

1. Quais os conhecimentos, impressões e expectativas dos estudantes ao iniciar o estudo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, em especial, limites de funções?
2. Quais recursos os professores utilizam para ensinar limites de funções? E qual a sua relevância para a aprendizagem dos estudantes de Cálculo Diferencial e Integral I?
3. Como o uso de recursos informacionais e comunicacionais pode contribuir para a aprendizagem significativa de limites de funções por estudantes de Cálculo Diferencial e Integral I?

Constituiu-se como objetivo da pesquisa investigar a contribuição dos livros *Guia Mangá de Cálculo Diferencial e Integral* e *Cálculos para Leigos,* usados concomitantemente com livros didáticos utilizados pelo professor regente auxiliados por recursos tecnológicos (*softwares*), para favorecer a aprendizagem significativa do conteúdo de limites de funções na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I em estudantes iniciantes nesta disciplina.

As questões de investigação se interligam dando um caráter qualitativo para a pesquisa, tornando algumas características determinantes nesta abordagem, como por exemplo: o contato direto do pesquisador com a situação ou o objeto de estudo; uma valorização maior no processo de pesquisa do que no produto final; uma descrição das perspectivas dos sujeitos de pesquisa (Lüdke & André, 1986).

Algumas características apontadas por Lüdke e André (1986) são idênticas as de Bogdan e Biklen (1994) e estes as complementam no sentido de que o contato direto do pesquisador com a situação ou objeto de estudo deva ser realizado num ambiente natural em que constitui a fonte direta dos dados, sendo o investigador o instrumento principal, tendo este o despendimento de tempo na ida a diversos locais como escolas, bairros, comunidades, etc. elucidando questões educativas. Em relação às outras duas características "quanto a uma maior valorização dada no processo de pesquisa do que do produto final e de uma descrição das perspectivas dos sujeitos de pesquisa", Bogdan e Biklen (1994) nos dizem que o pesquisador recolhe os dados de forma descritiva por meio de transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais e outros documentos oficiais e a análise de dados segue uma forma indutiva, ou seja, não recolhe dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos vão se agrupando.

Os autores defendem, ainda, outra característica semelhante à descrição dos sujeitos defendida por Ludke e André (1986), em que o significado é de importância vital na abordagem qualitativa. "Os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 50).

Corroborando as características apresentadas acima, Martins (2004) cita que uma particularidade da metodologia qualitativa consiste na heterodoxia no momento da análise dos dados, ou seja, não tem regras ou padrões estabelecidos para a realização da análise dos dados. Esta questão dependerá das peculiaridades do pesquisador, do seu olhar sobre os dados da pesquisa e da sua experiência como pesquisador.

> A variedade de material obtido qualitativamente exige do pesquisador uma capacidade integrativa e analítica que, por sua vez, depende do desenvolvimento de uma capacidade criadora e intuitiva. A maior dificuldade da disciplina de métodos e técnicas de pesquisa está na dificuldade de ensinar como se analisa os dados — isto é, como se atribui a eles significados — sendo mais fácil ensinar a coletá-los ou a realizar trabalho de campo. A intuição aqui mencionada não é um dom, mas uma resultante da formação teórica e dos exercícios práticos do pesquisador. (Martins, 2004, p. 292)

Baseado nas ideias dos autores supracitados e pela caracterização da pesquisa qualitativa feita por Lüdke e André (1986) e Bogdan e Biklen (1994), identificamos indícios e justificativas para qualificarmos esta pesquisa como qualitativa, pois as características desta perspectiva metodológica nos levam a entender e compreender que o estudo possui um caráter qualitativo, a exemplo da realização de um ciclo de estudos em horários predefinidos na Universidade, junto aos alunos, realizando atividades e tarefas de cunho investigativo. Não temos hipóteses a confirmar e nem expectativas sobre a investigação, pois os dados emergirão das perspectivas e respostas dos estudantes participantes nas atividades e tarefas realizadas no ciclo de estudos e das observações e entrevistas semiestruturadas. As ações decorrentes nas atividades do ciclo de estudos, por meio de perguntas e respostas, indagações verbais e tarefas em grupo garantirão uma maior valorização do processo em relação ao produto final da pesquisa.

> Considerando, no entanto, que a abordagem qualitativa, enquanto exercício de pesquisa, não se apresenta como uma proposta rigidamente estruturada, ela permite que a imaginação e a criatividade levem os investigadores a propor trabalhos que explorem novos enfoques. (Godoy, 1995, p. 21)

Em relação às características, apresentadas pelos autores, de uma pesquisa qualitativa não pretendemos utilizá-las como regras ou normas a serem seguidas na pesquisa, mas como uma analogia entre o que os autores se referem para caracterizar uma pesquisa qualitativa com os procedimentos adotados em nossa pesquisa na recolha dos dados, uma vez que a metodologia qualitativa possui formas e métodos subjetivos que podem ser sempre moldados conforme as particularidades de cada pesquisa.

### 3.2. As opções metodológicas e métodos de coleta de dados

Na maioria dos estudos qualitativos, o processo de coleta é semelhante a um funil, ou seja, a fase inicial é mais ampla (aberta), de forma que o pesquisador possa adquirir uma visão holística da situação, dos participantes, do contexto e das principais questões de estudo. Na fase seguinte, no entanto, há uma forma de delimitar a problemática focalizada, tornando a coleta de dados mais concentrada e mais produtiva (Ludke & André, 1986). Outros autores, como Bogdan e Biklen (1994), utilizam do mesmo símbolo – o funil – para explicitar o processo da coleta de dados na metodologia qualitativa como vimos no trecho abaixo:

> Num estudo qualitativo, o tipo adequado de perguntas nunca é muito específico. O início do estudo representado pela extremidade mais larga do funil: os investigadores procuram locais com pessoas que possam ser objecto do estudo ou fontes de dados e, ao encontrarem aquilo que pensam interessar-lhes, organizam

então uma malha larga, tentando avaliar o interesse do terreno ou das fontes de dados para os seus objectivos. (Bogdan & Biklen, 1994, p. 89)

A metáfora do funil supracitada pelos autores da uma ideia de como funciona o processo metodológico da pesquisa qualitativa. Em relação ao método, os autores afirmam que não existe apenas um específico que seja recomendado como o melhor ou mais efetivo, pois a escolha do(s) método(s) se faz a partir do problema estudado e, na maioria dos casos, deve-se combinar um método com o outro dependendo do grau de profundidade que se pretende alcançar. Para isso, o pesquisador deve estar atento para a quantidade de dados coletados, não podendo perder de vista o foco da pesquisa, ou seja, que os dados coletados sejam suficientes e necessários para responder às questões de investigação e atingir os objetivos propostos na pesquisa.

Conforme delineado na seção anterior, a pesquisa, de caráter qualitativo, teve como métodos de coleta de dados dois questionários, observações e entrevistas. Ainda na etapa do ciclo de estudos, teremos o método da observação-participante e da análise de documentos em atividades, mapas, tarefas e gráficos realizados pelos estudantes participantes.

Quanto à validade e fidelidade dos instrumentos, corroboro Coutinho (2013) ao afirmar que "um instrumento é fiável se, aplicado duas vezes ao mesmo fenômeno/situação, fornece os mesmos resultados, independentemente das circunstâncias de aplicação, do instrumento ou do investigador" (p. 119). A autora afirma que a fidelidade do instrumento tem relação com sua validade, pois ela se "refere a qualidade dos resultados da investigação no sentido de não podermos aceitar como "factos indiscutíveis" (empiricamente verdadeiros, com rigor preditivo ou consistentes com o conhecimento estabelecido)" (p. 116, grifo da autora).

Para Lüdke e André (1986), tanto a observação quanto as entrevistas constituem métodos de recolha de dados especialmente adequados em pesquisas qualitativas, possibilitando um contato pessoal e estreito do pesquisador com o seu objeto de estudo, e quando usados conjuntamente com outros métodos de coleta de dados permitem triangular a informação obtida (Bogdan & Biklen, 1994) e, consequentemente, a credibilidade dessa infomação. No caso da observação, destaca-se a obtenção de informação focada nas ações do observado (Coutinho, 2013), a perspectiva dos sujeitos (Lüdke & André, 1986) e sua não estruturação (Alves-Mazzotti & Gewandsznajder, 2002).

> Através da observação o investigador consegue documentar atividades, comportamentos e características físicas sem ter de depender da vontade e capacidade de terceiras pessoas. É uma técnica de recolha de dados fundamental

> em Ciências da Educação, Antropologia, Psicologia e outras CSH [Ciências Sociais e Humanas]. (Coutinho, 2013, p. 136)

> A observação direta permite também que o observador chegue mais perto da "perspectiva dos sujeitos", um importante alvo nas abordagens qualitativas. Na medida em que o observador acompanha *in loco* as experiências diárias dos sujeitos, pode tentar apreender a sua visão de mundo, isto é, o significado que eles atribuem à realidade que os cerca e às suas próprias ações. (Lüdke & André, 1986, p. 26, grifo do autor)

> O tipo de observação característico dos estudos qualitativos, porém, é a observação não-estruturada, na qual os comportamentos a serem observados não são predeterminados, eles são observados e relatados da forma como ocorrem, visando descrever e compreender o que está ocorrendo numa dada situação. (Alves-Mazzotti & Gewandsznajder, 2002, p. 166)

Fizemos uso de uma observação não estruturada na pesquisa, utilizando um diário de bordo para a descrição das narrativas observadas. "Neste tipo de observação o investigador observa o que acontece "naturalmente" e daí ser também designada observação <u>naturalista</u>, sendo um dos instrumentos preferencialmente usados na investigação qualitativa" (Coutinho, 2013, p. 138, grifo da autora).

> Planejar a observação significa determinar com antecedência 'o que' e 'o como' observar. A primeira tarefa, pois, no preparo das observações é a delimitação do objeto de estudo. Definindo-se claramente o foco da investigação e sua configuração espaço-temporal, ficam mais ou menos evidentes quais aspectos do problema serão cobertos pela observação e qual a melhor forma de captá-los. (Ludke & André, 1986, p. 25)

Utilizamos os questionários com intuito de obtermos respostas referentes aos conhecimentos prévios, informações pessoais e avaliação de aprendizagem dos estudantes, entendendo os questionários como um

> instrumento de coleta de dados constituído por uma série ordenada de perguntas que devem ser respondidas por escrito pelo informante, sem a presença do pesquisador. Objetiva levantar opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas. A linguagem utilizada no questionário deve ser simples e direta, para que quem vá responder compreenda com clareza o que está sendo perguntado. (Gerhardt et al., 2009, p. 69)

Os questionários coletaram informações pessoais, afetivas e de conhecimento em conteúdos matemáticos dos participantes por meio de perguntas de ordem atitudinal, sentimental, valores, opiniões e informações específicas de certos tópicos ou conteúdos. Tendo em vista avaliar a adequação dos questionários ao tipo de alunos aos quais se dirigiam e a sua validade de conteúdo, eles foram construídos e reelaborados com base numa aplicação piloto em uma turma do curso de Licenciatura em Física da mesma Universidade e foram avaliados por especialistas do ensino de Cálculo.

As sugestões dos especialistas indicaram alterações que foram realizadas no primeiro questionário, a começar pela reescrita dos enunciados, reformulações nas perguntas, a mudança de uma questão antepondo a outra, a necessidade de inserção de questões que levassem os estudantes a conjecturar e mostrar seu conhecimento e da divisão da atividade em três partes. Isto é, na primeira parte questionou questões de ordem pessoal; na segunda parte questões que tratavam sobre o conceito de função; e na terceira parte a abordagem do conteúdo de funções e limites de funções.

A inserção das 2ª e 6ª questões na segunda parte do 1° questionário foram contribuições sugeridas por professores especialistas no ensino de Cálculo. Segundo eles, os alunos demonstram dificuldades na representação gráfica e lei da função. Uma vez dada uma tabela de valores de $x$ e $y$, foi pedida a construção do gráfico da função e uma lei que associasse os valores de $x$ e $y$ (questão 2). Em relação à 6ª questão foi sugerido que colocássemos uma lei de função não elementar, na qual o estudante teria que usar algum tipo de fatoração que tivesse alguma descontinuidade na função. Com isso, foi pedido aos estudantes que fizessem o gráfico da função $g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ e determinasse o seu domínio e o conjunto imagem da função. Outra questão inserida após a avaliação dos especialistas tratava-se, especialmente, de limites de funções, na qual foi dada a lei da função $f(x) = \frac{1}{x}$, com $x \neq 0$ e $f$ definida de $IR^{*} \rightarrow IR$ e pedido que fizessem o gráfico da função e questionamentos sobre o valor de $y$ quando $x$ estava próximo e distante do zero.

O primeiro questionário, aplicado no início da coleta de dados, teve a função de diagnosticar elementos, características e conhecimentos prévios dos estudantes ao iniciarem o estudo de limites de funções. Seguidamente entrevistamos os professores e a partir das informações do questionário e das entrevistas coletadas demos início ao que chamamos de ciclo de estudos, que consistiu em atividades de sala de aula exploradas com os participantes da pesquisa. Com o segundo questionário, aplicado depois do ciclo de estudos e versando o conteúdo limites de funções, pretendeu-se avaliar as atividades desenvolvidas no ciclo de estudos, a utilização dos livros e das tecnologias informáticas utilizadas, culminando com a verificação da ocorrência de uma possível aprendizagem significativa no conteúdo de limites de funções.

Ao final da coleta de dados do ciclo de estudos realizamos entrevistas individuais aos alunos. “Tal como o questionário, a entrevista visa a obtenção de informação através de questões que são colocadas ao inquirido pelo investigador” (Coutinho, 2013, p. 141). As entrevistas destinaram-se a coletar mais dados e informações que não foram captados nas observações e questionários aplicados.

> A grande vantagem da entrevista sobre outras técnicas é que ela permite a captação imediata e corrente da informação desejada, praticamente com qualquer tipo de informante e sobre os mais variados tópicos. Uma entrevista bem feita pode permitir o tratamento de assuntos de natureza estritamente pessoal e íntima, assim como temas de natureza complexa e de escolhas nitidamente individuais. Pode permitir o aprofundamento de pontos levantados por outras técnicas de coleta de alcance mais superficial, como o questionário. (Lüdke & André, 1986, p. 34)

Ainda sobre as entrevistas, podemos dizer que elas serviram, também, como confirmação dos dados obtidos pelos outros métodos utilizados, como os questionários e observações, ou seja,

> na entrevista a relação que essa cria é de interação, havendo uma atmosfera de influência recíproca entre quem pergunta e quem responde. Especialmente nas entrevistas não totalmente estruturadas, onde não há a imposição de uma ordem rígida de questões, o entrevistado discorre sobre o tema proposto com base nas informações que ele detém e que no fundo são a verdadeira razão da entrevista. Na medida em que houver um clima de estímulo e de aceitação mútua, as informações fluirão de maneira notável e autêntica. (Ludke & André, 1986, pp. 33-34)

Bogdan e Biklen (1994) dizem que as boas entrevistas são caracterizadas pelo fato dos sujeitos estarem à vontade e falarem livremente sobre seus pontos de vista e, ainda, que estas “produzem uma riqueza de dados, recheados de palavras que revelam as perspectivas dos respondentes. As transcrições estão repletas de detalhes e de exemplos” (p. 136). Os autores complementam afirmando que “um bom entrevistador comunica ao sujeito o seu interesse pessoal, estando atento, acenando com a cabeça e utilizando expressões faciais apropriadas” (p. 136).

Enfim, concluímos que os métodos escolhidos na pesquisa foram determinantes na revelação dos dados necessários para respondermos às perguntas de investigação e atingirmos o objetivo proposto na pesquisa.

## 3.3. Vantagens e limitações dos métodos de recolha de dados escolhidos

Para Cervo, Bervian e Silva (2007), a coleta de dados constitui uma tarefa muito importante na pesquisa, que envolve um conjunto de procedimentos a serem cumpridos. Apesar de existirem inúmeras formas de coleta de dados, todas possuem vantagens e desvantagens. "Na decisão do uso de uma forma ou de outra, o pesquisador levará em conta a que menos desvantagens oferecer, respeitados os objetivos da pesquisa" (Cervo et al., 2007, p. 50).

Na escolha dos métodos de pesquisa houve a preocupação em avaliar as que tivessem menos desvantagens/limitações para o estudo proposto, de forma que satisfizessem as nossas perguntas de investigação e o objetivo da pesquisa. Por exemplo, do ponto de vista científico, Marconi e Lakatos (2007) nos dizem que "a observação oferece uma série de vantagens e limitações, como as outras técnicas de pesquisa, havendo, por isso, necessidade de se aplicar mais de uma técnica ao mesmo tempo (p. 88). Assim, para a observação, os autores apresentam as seguintes vantagens e limitações:

> *Vantagens:* A) Possibilita meios diretos e satisfatórios para estudar uma ampla variedade de fenômenos. B) Exige menos do observador do que as outras técnicas. C) Permite a coleta de dados sobre um conjunto de atitudes comportamentais típicas. D) Depende menos da introspecção ou da reflexão. E) Permite a evidência de dados não constantes do roteiro de entrevistas ou de questionários. (Marconi & Lakatos, 2007, p. 88, grifo dos autores)

> *Limitações:* A) O observado tende a criar impressões favoráveis ou desfavoráveis no observador. B) A ocorrência espontânea não pode ser prevista, o que impede, muitas vezes, o observador de presenciar o fato. C) Fatores imprevistos podem interferir na tarefa do pesquisador. D) A duração dos acontecimentos é variável: pode ser rápida ou demorada e os fatos podem ocorrer simultaneamente; nos dois casos, torna-se difícil a coleta dos dados. E) Vários aspectos da vida cotidiana, particular, podem não ser acessíveis ao pesquisador. (Marconi & Lakatos, 2007, p. 88-89, grifo dos autores)

Justificamos as limitações das observações em nosso trabalho com aplicação de mais técnicas de recolha de dados, ou seja, as entrevistas e os questionários, além do contato próximo com a turma, conhecendo as especificidades dos participantes e entendendo os diversos comportamentos e atitudes pessoais.

Quanto às entrevistas, as autoras apresentam como vantagens e limitações os seguintes aspectos:

> *Vantagens:* A) Pode ser utilizada com todos os segmentos da população: analfabetos ou alfabetizados. B) Fornece uma amostragem muito melhor da população geral: o entrevistado não precisa saber ler ou escrever. C) Há maior flexibilidade, podendo o entrevistador repetir ou esclarecer perguntas, formular de maneira diferente; especificar algum significado, como garantia de estar sendo

> compreendido. D) Oferece maior oportunidade para avaliar atitudes, condutas, podendo o entrevistado ser observado naquilo que diz e como diz: registro de reações, gestos etc. e) Dá oportunidade para a obtenção de dados que não se encontram em fontes documentais e que sejam relevantes e significativos. F) Há possibilidade de conseguir informações mais precisas, podendo ser comprovadas, de imediato, as discordâncias. G) Permite que os dados sejam quantificados e submetidos a tratamento estatístico. (Marconi & Lakatos, 2007, p. 95, grifo dos autores)

> *Limitações:* A) Dificuldade de expressão e comunicação de ambas as partes. B) Incompreensão, por parte do informante, do significado das perguntas da pesquisa, que pode levar a uma falsa interpretação. C) Possibilidade de o entrevistado ser influenciado, consciente ou inconscientemente, pelo questionador, pelo seu aspecto físico, suas atitudes, idéias, opiniões etc. d) Disposição do entrevistado em dar as informações necessárias. E) Retenção de alguns dados importantes, receando que sua identidade seja revelada. F) Pequeno grau de controle sobre uma situação de coleta de dados. G) Ocupa muito tempo e é difícil de ser realizada. (Marconi & Lakatos, 2007, p. 95, grifo dos autores)

Quanto às limitações das entrevistas, procuramos superá-las por meio da experiência com entrevistas em pesquisas passadas e seguindo a ideia sugestiva dos autores em ter um bom senso no ato de entrevistar.

Já em relação ao uso dos questionários, os autores apresentam as seguintes vantagens e desvantagens:

> *Vantagens:* A) Economiza tempo, viagens e obtém grande número de dados. B) Atinge maior número de pessoas simultaneamente. C) Abrange uma área geográfica mais ampla. D) Economiza pessoal, tanto em adestramento quanto em trabalho de campo. E) Obtém respostas mais rápidas e mais precisas. F) Há maior liberdade nas respostas, em razão do anonimato. G) Há mais segurança, pelo fato de as respostas não serem identificadas. H) Há menos risco de distorção, pela não influência do pesquisador. I) Há mais tempo para responder e em hora mais favorável. J) Há mais uniformidade na avaliação, em virtude da natureza impessoal do instrumento. I) Obtém respostas que materialmente seriam inacessíveis. (Marconi & Lakatos, 2007, pp. 98-99, grifo das autores)

> *Desvantagens:* A) Percentagem pequena dos questionários que voltam. B) Grande número de perguntas sem respostas. C) Não pode ser aplicado a pessoas analfabetas. D) Impossibilidade de ajudar o informante em questões mal compreendidas. E) A dificuldade de compreensão, por parte dos informantes, leva a uma uniformidade aparente. F) Na leitura de todas as perguntas, antes de respondê-las, pode uma questão influenciar a outra. G) A devolução tardia prejudica o calendário ou sua utilização. H) O desconhecimento das circunstâncias em que foram preenchidos torna difícil o controle e a verificação. I) Nem sempre é o escolhido quem responde ao questionário, invalidando, portanto, as questões. J) Exige um universo mais homogêneo. (Marconi & Lakatos, 2007, p. 99, grifo dos autores)

Atento às desvantagens identificadas pelas autoras em relação aos questionários, foram feitos esforços para eliminá-las ou pelo menos minimizá-las na pesquisa, pois a aplicação do questionário foi feita na presença do pesquisador com todos os informantes, de forma semelhante a um teste. Deste modo, o próprio pesquisador teve o cuidado de verificar tais desvantagens e foi precavido em orientar a todos os participantes sobre as possíveis ocorrências supracitadas pelas autoras. Em relação às desvantagens apontadas em e) e f), procuramos, por meio da realização de um piloto com estudantes de outra turma, produzir um instrumento de coleta fidedigno e o disponibilizamos para a crítica e avaliação de especialistas, com intuito de termos um instrumento com maior confiabilidade. Quanto ao universo mais homogêneo, citado em j), embora essa desvantagem não constitua um aspecto muito problemático, pois os alunos constituíam um universo consideravelmente homogêneo, procuramos superá-la com as observações feitas no momento de aplicação dos questionários e no acompanhamento do ciclo de estudos, uma vez que o pesquisador se fez presente em todos os instantes e pode informalmente obter mais dados. Ainda neste quesito, realizamos as entrevistas com o intuito de dizimar as possíveis dúvidas com os dados e obter informações mais precisas.

### 3.4. Contexto e desenvolvimento da pesquisa

No processo de recolha de dados numa investigação, Charles (1998, *apud*, Coutinho, 2013, p. 105-108) afirma que existem seis procedimentos distintos para realizá-la: notação – é um método que parte da observação e que são pequenos registros de pessoas, objetos e acontecimentos; descrição – são as observações da realidade observada transformadas em anotações sem muito rigor; análise – é mais minuciosa que a descrição, pois nela se procura investigar com foco no objetivo da pesquisa; inquérito – refere-se à obtenção de respostas dadas pelos participantes por meio de entrevistas ou questionários; e testagem/medição – diz respeito à obtenção de dados a partir da(s) resposta(s) dos participantes, podendo assumir a forma de provas e testes objetivos para testar os conhecimentos de forma subjetiva e discursiva.

Com base nestes procedimentos construímos as etapas e o desenvolvimento da pesquisa, levando em conta a maioria das características dos procedimentos supracitados. Descrevemos em ordem sequencial os diferentes passos em que se desenvolveu a pesquisa:

1.º passo: Escolha da turma de Introdução ao Cálculo (2014.1), do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Formação de Professores (CFP) da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), localizada na cidade de Amargosa/Ba. A escolha da turma se deu pelo fato do conteúdo de limites de funções não ter sido trabalhado na ementa desta disciplina; com isso, tivemos mais tempo para o estudo do conteúdo pretendido, ou seja, os discentes de Introdução ao Cálculo só tiveram contato com o conteúdo de limites, formalmente, no semestre seguinte, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

2.º passo: O convite foi feito aos estudantes da turma, tendo a seleção de um grupo de estudantes ocorrido de forma voluntária, conforme o interesse individual em participar da pesquisa. Neste processo, inicialmente, voluntariam-se 22 estudantes para participarem da pesquisa, e destes, 17 permaneceram até o final.

3.º passo: A aplicação do 1.º questionário aos participantes teve a finalidade de avaliar conhecimentos prévios, impressões e expectativas dos estudantes iniciantes na disciplina de Cálculo Diferencial Integral I, em especial sobre o conteúdo de limites de funções. No momento da aplicação do 1.º questionário, os estudantes frequentavam as aulas da disciplina de Introdução ao Cálculo, na qual era dada uma revisão de conteúdos do ensino médio sobre funções, construção de gráficos, trigonometria e outros.

4.º passo: Entrevistamos quatro professores de Cálculo da Universidade em que se realizou a pesquisa, que eram professores que ministravam aulas de Cálculo nessa instituição. Dois deles foram os professores regentes das disciplinas de Introdução ao Cálculo e Cálculo Diferencial e Integral I da turma a que pertenciam os estudantes participantes. Investigamos as estratégias e metodologias docentes utilizadas e relatadas pelos os professores entrevistados. Os dados das entrevistas serviram como meio para elaborarmos as atividades do ciclo de estudos.

5.º passo: Paralelamente, desenvolveram-se as aulas de Introdução ao Cálculo, num horário combinado com o grupo de estudantes participantes, mais especificamente o ciclo de estudos semanal, com a realização de leituras, discussões e tarefas. Neste ciclo de estudos apresentamos diversas atividades que pudessem levar os estudantes a compreender o conceito e a definição formal (Cauchy) de limites de funções, explorando, previamente, uma abordagem intuitiva por meio do paradoxo de Zenon (organizador prévio para o conteúdo de limites de funções), e estimulando, a partir deste, os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o conteúdo de limites de funções.

Num segundo momento, com base nos livros: *Guia Mangá de Cálculo Diferencial e Integral* e *Cálculos para Leigos*, debateu-se a apresentação dos conteúdos nos livros e, mais especificamente, o conteúdo de limite de funções neles apresentados, relacionando-os com os conhecimentos prévios dos estudantes e os conteúdos estudados em sala de aula. Ainda nesta etapa da coleta, pedimos aos estudantes que escrevessem numa folha de papel o que eles entendiam por limites de funções, mesmo que sem conhecimento da sua definição.

Posteriormente, apresentamos a definição formal de limites de funções e pedimos aos estudantes participantes que fizessem um mapa conceitual sobre o assunto. Durante todo o ciclo de estudos utilizamos tecnologias informáticas, como *softwares* e recursos de cunho construtivo e manipulativo, e mapas conceituais, com a finalidade de auxiliar os estudantes na aprendizagem do conteúdo de limites de funções. (Ver em Anexo 4 – Ciclo de estudos).

6.º passo: Após o ciclo de estudos, no final do semestre, aplicamos o 2.º questionário com a finalidade de coletar informações a respeito das contribuições dos livros utilizados, do desenvolvimento das atividades realizadas no ciclo de estudos, das expectativas dos estudantes e da aprendizagem em relação aos conteúdos de limites de funções. Além disso, foi pedido que eles construíssem outro mapa conceitual, que ocorreu no semestre seguinte, quando os estudantes cursavam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, tomando como referência os mapas construídos anteriormente na disciplina de Introdução ao Cálculo.

Posteriormente, foi entregue de volta aos estudantes a atividade em que eles escreveram o conceito de limite de funções, a qual eles tinham feito no início do ciclo de estudos, para que, com base nessa, fossem feitos os ajustes necessários ou construíssem uma nova definição do conceito de limites de funções, ignorando, no todo ou em parte, a versão inicial.

O objetivo dessas atividades foi confrontar o conceito de limites de funções definido pelos estudantes antes e depois das atividades do ciclo de estudos na expectativa de ter acontecido uma aprendizagem significativa do conteúdo de limites. Assim, comparamos os dois mapas conceituais e os dois conceitos estabelecidos pelos estudantes no início e final do ciclo de estudos, sendo os resultados obtidos apresentados no próximo capítulo – Resultados e análise dos dados.

7.º passo: Realizamos, com o grupo de estudantes participantes, entrevistas individuais para sabermos as contribuições da pesquisa no seu aprendizado sobre limites de funções e também para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral I. As entrevistas, especialmente a aplicada aos alunos, serviram para elucidar questões que não foram observadas nem clarificadas nas respostas aos questionários.

Enfim, esperamos que todo este processo metodológico descrito sirva como um roteiro para respondermos às questões de investigação e para que se atinja o objetivo proposto na pesquisa. No quadro abaixo apresentamos a relação dos métodos de coleta de dados (observação, questionário e entrevistas) com as questões de investigação.

Tabela 1 — Métodos de recolha de dados segundo as questões de investigação

| Métodos de coleta de dados / Questões de Investigação | Observação | Questionários | | Entrevistas | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1.º (aplicado aos discentes) | 2.º (aplicado aos discentes) | Discentes | Professores |
| Quais os conhecimentos, impressões e expectativas dos estudantes ao iniciar o estudo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, em especial, limites de funções? | X | X | | X | |
| Quais recursos os professores utilizam para ensinar limites de funções? E qual a sua relevância para a aprendizagem dos estudantes de Cálculo Diferencial e Integral I? | X | | | | X |
| Como o uso de recursos informacionais e comunicacionais pode contribuir para a aprendizagem significativa de limites de funções por estudantes de Cálculo | X | X | X | X | X |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Diferencial e Integral I? | | | | | |

## 3.5. Métodos de tratamento e análise de dados

Para falar sobre análise de dados, primeiramente devemos nos perguntar o que entendemos por dados, pois, segundo Bogdan e Biklen (1994), o termo dados

> refere-se aos materiais em bruto que os investigadores recolhem no mundo que se encontram a estudar; são os elementos que formam a base da análise. Os dados incluem materiais que os investigadores registram activamente, tais como transcrições de entrevistas e notas de campo referentes a observações participantes. Os dados também incluem aquilo que outros criaram e que o investigador encontra, tal como diários, fotografias, documentos oficiais e artigos de jornais. (Bogdan & Biklen, 1994, p. 149)

A análise de dados consiste numa sistematização e organização dos dados coletados por meio de padrões, conjuntos, analogias e divisão em unidades manipuláveis. “Analisar os dados qualitativos significa ‘trabalhar’ todo o material obtido durante a pesquisa, ou seja, os relatos de observação, as transcrições de entrevista, as análises de documentos e demais informações disponíveis”. (Ludke & André, 1986, p. 45). “A variedade de técnicas de análise de dados corresponde à variedade de coleta, embora não exista uma relação direta entre as duas” (Günther, 2006, p. 206).

É necessário interpretar e revelar o que os dados coletados nos informam, e esse processo não consiste numa tarefa fácil, acaba sendo um processo não linear, com idas e vindas e incorporação dos dados pelo pesquisador com a finalidade de extrair destes as informações mais próximas da realidade que foi coletada.

> Conforme o estudo vai-se desenvolvendo, podem surgir muitas idéias e sugestões sobre formas de analisar o que vai sendo captado. É importante, por isso, que o pesquisador não se limite apenas a fazer descrições detalhadas daquilo que observa, mas procure registrar também as suas observações, sentimentos e especulações ao longo de todo o processo de coleta. (Ludke & André, 1986, p. 47)

“A importância dos dados está não em si mesmos, mas em proporcionarem respostas às investigações” (Marconi & Lakatos, 2003, p. 167). Nesse sentido os autores orientam que

> É importante lembrar que a função de um relatório não é aliciar o leitor, mas demonstrar as evidências a que se chegou através da pesquisa. Portanto, na seleção do material a ser apresentado (e terá de haver uma seleção), o pesquisador não pode ser dirigido pelo desejo natural de ver confirmadas suas previsões à custa

> de dados que as refutam. Todos os dados pertinentes e significativos devem ser apresentados, e se algum resultado for inconclusivo tem de ser apontado. (Marconi & Lakatos, 2003, p. 231)

Não podemos deixar de lado questões de ordem sentimental e pessoal do pesquisador, pois a interpretação é construída com base na subjetividade deste, ou seja, crenças e valores que certamente influenciarão na forma de leitura dos dados. Com isso, a pesquisa traz consigo uma carga de juízos, conhecimentos, interesses e preferências do pesquisador.

> Assim, a sua visão do mundo, os pontos de partida, os fundamentos para compreensão e explicação desse mundo irão influenciar a maneira como ele propõe suas pesquisas ou, em outras palavras, os pressupostos que orientam seu pensamento vão também nortear sua abordagem de pesquisa. (Ludke & André, 1986, p. 3)

Ludke e André (1986) afirmam que, após a coleta de dados, a análise passa por uma fase de classificação e organização dos dados, utilizando-se de uma reiteração da fundamentação teórica e uma leitura mais criteriosa do material coletado. Em seguida é iniciada uma fase chamada pelos autores de teorização, a qual consiste num diálogo entre os dados coletados e a parte teórica defendida pelos autores da fundamentação teórica. É nesta fase que entra o jeito peculiar do investigador qualitativo, o qual concentrará um olhar voltado para a teoria, abstrações e reflexões a respeito das informações contidas nos dados coletados. Para isso, o pesquisador conta com o auxílio de categorias de dados como um facilitador nesse processo investigativo.

A análise de dados pode ser feita concomitantemente com a recolha de dados e/ou também poderá ser realizada após a coleta dos dados. Bogdan e Biklen (1994) dizem que é necessário que se faça alguma análise durante a recolha dos dados, pois sem isto "a recolha de dados não tem orientação; se assim não o fizer, os dados que recolher podem não ser suficientemente completos para realizar posteriormente a análise" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 206), mesmo sabendo que geralmente recolhem-se mais dados do que o necessário.

Nessa perspectiva, Bogdan e Biklen (1994) sugerem algumas orientações para que a análise faça parte integrante da coleta de dados e que esta seja uma decisão tomada para potencializar a análise final, depois da coleta de dados. Dentre as orientações temos:

*Obrigue-se a tomar decisões que estreitem o âmbito do estudo*. Nesta orientação os autores utilizam a mesma metáfora do funil, utilizada por Ludke e André (1986), para explicar que no início o estudo nasce ampliado e com o decorrer do tempo vai se reduzindo, assemelhando-se a um funil, ou seja, vai se estreitando em torno do foco do que está sendo pesquisado;

*Obrigue-se a tomar decisões relativas ao tipo de estudo que quer realizar.* Os autores exemplificam esta orientação com algum tipo de estudo qualitativo, dentre eles, estudo de caso de organizações, estudo de observações e histórias de vida;

*Desenvolva questões analíticas*. Os autores salientam que as questões devam ser feitas de forma que oriente o caminhar da investigação e, também, elas devem ser revistas criticamente ou até mesmo reformuladas ou abandonadas;

*Planifique as sessões de recolha de dados à luz daquilo que detectou em observações prévias.* O objetivo desta orientação é analisar criticamente os dados que já foram coletados, e os que ainda precisarão ser coletados para responder as perguntas de investigações. Esse planejamento deve ser constante e crítico a respeito das etapas de coletas de dados;

*Escreva uma grande quantidade de "comentários do observador" acerca das ideias que lhe vão surgindo.* Os autores alertam para descrever tudo que for conveniente, pois nestas notas de campo passam-se sempre questões relativas a sentimentos e pensamentos do observador e poderá ocorrer também certos *insights* que, se não anotar no momento, acabam se perdendo no decorrer da observação;

*Escreva para* si *próprio memorandos sobre o que vai aprendendo.* Os autores recomendam fazer pequenos resumos depois de cinco ou seis idas a campo e depois confrontar os dados obtidos com as notas de observação e questões teóricas;

*Ensaie ideias e temas junto dos sujeitos.* O autor informa que devemos levantar certos temas com alguns membros ou grupos de participantes, de forma que desenvolva uma discussão a respeito do tema levantado. Estes membros são denominados como informantes-chave;

*Comece a explorar a literatura existente enquanto se encontra no campo de investigação*;

*Brinque com metáforas, analogias e conceitos.* Para os autores esta orientação é uma maneira de enriquecer a forma de interpretação dos dados e dos problemas de investigação;

*Utilize auxiliares visuais.* O uso de figuras como diagramas, matrizes, tabelas e gráficos podem ser utilizadas em todas as fases da análise, desde o planejamento até os produtos finais. Podem variar no seu grau de sofisticação, indo desde gráficos desenhados à mão numa folha de rascunho até modelos profissionais cuidadosamente elaborados.

Miles e Huberman (1984) corroboram, em parte, estas sugestões e orientações de Bogdan e Biklen (1994), colocando três atividades para analisar os dados, as quais interagem e são contínuas. São elas: a minimização dos dados consiste numa fase anterior a sua coleta, no qual o pesquisador simplifica, abstrai e transforma os dados originais coletados das observações de campo; a apresentação dos dados, que consiste numa organização destes, do qual o pesquisador pode tirar algum proveito, podendo representá-los de várias maneiras como texto, gráficos, esquemas, mapas, etc.; esboço e comprovação da conclusão feita na investigação dos dados coletados com uma literatura pertinente e que possa lhe oferecer as respostas para objetivo da pesquisa ou a comparação de dados obtidos em dois contextos semelhantes.

Na pesquisa fizemos uma análise prévia dos dados obtidos nas respostas dos aprendizes no 1° questionário, das tarefas e atividades do ciclo de estudos, com o objetivo de elaborar o 2° questionário. O 1° questionário teve como finalidade detectar quais os conhecimentos prévios dos estudantes e verificar a necessidade da existência de reforços em conteúdos matemáticos para suprir o conteúdo de limites de funções – conceito estudado posteriormente. Tanto as observações na sala de aula do professor regente quanto as atividades desenvolvidas no ciclo de estudos foram analisadas e serviram para a elaboração do 2° questionário. Este último teve a finalidade de avaliar o que os aprendizes aprenderam no decorrer do ciclo de estudos.

Bogdan e Biklen (1994) apresentam orientações concretas para tornar a análise conceptualmente manipulável, bem como mecanicamente praticável, tanto para a análise de dados em conjunto com a coleta quanto para a análise após a recolha dos dados. Para os autores, o sistema de codificação envolve vários passos, sendo a partir da leitura dos dados que se repetem e destacam-se certas palavras ou frases que vão dar origem as categorias de códigos ou família de códigos. Ou seja,

> percorre os seus dados na procura de regularidades e padrões bem como de tópicos presentes nos dados e, em seguida escreve palavras e frases que representam estes mesmos tópicos e padrões. Estas palavras ou frases são *categorias de codificação.* As categorias constituem um meio de classificar os dados descritivos que recolheu, de que forma a que o material contido num determinado tópico possa ser fisicamente apartado do outros dados. Algumas das categorias de codificação surgir-lhe-ão à medida que for recolhendo os dados. Deve anotar estas categorias para as utilizar mais tarde. (Bogdan & Biklen, 1994, p. 221, grifo do autor)

Para os autores, um dos passos cruciais na análise de dados consiste na construção e organização de uma lista de categorias de codificação, após a coleta dos dados. Os autores indicam uma série de códigos e família de categorias e as exemplificam. Entretanto, eles alertam que não há uma regra para determiná-las, pois elas dependerão das particularidades e individualidades de cada pesquisa e do olhar pessoal do pesquisador.

> Para analisar, compreender e interpretar um material qualitativo, faz-se necessário superar a tendência ingênua a acreditar que a interpretação dos dados será mostrada espontaneamente ao pesquisador; é preciso penetrar nos significados que os atores sociais compartilham na vivência de sua realidade. (Gerhardt et al., 2009, p. 84)

Contudo, isto não implica que a análise seja exclusivamente definida a partir dos dados, pois há a possibilidade de as categorias emergirem das perspectivas e percepções do pesquisador, por meio de crenças, valores sociais, maneira de dar sentido ao mundo. Estes podem determinar quais os processos e atividades, acontecimentos e perspectivas que os investigadores consideram importantes para codificar e categorizar (Bogdan & Biklen, 1994, p. 229).

> Para que as informações possam ser adequadamente analisadas, faz-se necessário organizá-las, o que é feito mediante seu agrupamento em certo número de categorias. Em muitas situações, o estabelecimento de categorias é uma tarefa bastante simples, como no caso das investigações que tiveram os dados obtidos a partir de instrumentos padronizados. Por exemplo, numa pesquisa em que os entrevistados tinham 12, 17, 24, 32, 45, 62 e 74 anos de idade, o agrupamento dos indivíduos pode ser feito nas seguintes categorias por faixa etária: "menores de 18 anos", "entre 18 e 60 anos" e "maiores de 60 anos". (Gerhardt et al., 2009, p. 81, grifo do autor)

Para Marconi e Lakatos (2003) os dados devem seguir os seguintes passos: seleção, codificação e tabulação. A seleção consiste num exame minucioso dos dados. Após a coleta de dados, "o pesquisador deve submetê-lo a uma verificação crítica, a fim de detectar falhas ou erros, evitando informações confusas, distorcidas, incompletas, que podem prejudicar o resultado da pesquisa" (p. 166). A codificação "é a técnica operacional utilizada para categorizar os dados que se relacionam. Mediante a codificação, os dados são transformados em símbolos, podendo ser tabelados e contados" (p. 167). A codificação pode ser feita pela classificação dos dados, agrupando-os sob determinadas categorias e pela atribuição de códigos, números ou letras, tendo cada um deles um significado. "Codificar quer dizer transformar o que é qualitativo em quantitativo, para facilitar não só a tabulação dos dados, mas também sua comunicação" (p. 167). Já a tabulação "é a disposição dos dados em tabelas, possibilitando maior facilidade na verificação das inter-relações entre eles" (p. 167). Sendo esta última bem utilizada em estatística, ainda mais quando se tem um grande volume de dados a ser feito com o auxílio de um *software*.

Com base nas considerações feitas pelos autores, descreveremos como foi realizada a análise dos dados por métodos de coletas. Primeiramente, em relação aos questionários 1° e 2°, classificamos cada participante com um número e analisamos questão por questão, ou seja, avaliamos a primeira questão de todos os participantes, seguidamente, a segunda e assim por diante, até a última questão. É importante ressaltar, em algumas tabelas dos resultados e da análise de dados, que alguns estudantes deram mais de uma resposta por questão, totalizando um número de respostas maior que a quantidade de estudantes, ou seja, segundo as justificações apresentadas pelos estudantes aos questionários, algumas foram incluídas em uma ou mais categorias, que foram estabelecidas a partir da análise de conteúdo.

A este feito designamos uma análise de conteúdo, pois, segundo Godoy (1995), esta técnica de análise é bastante utilizada na análise de documentos, sendo documentos entendido de uma forma ampla, ou seja, incluindo os materiais escritos como, por exemplo, jornais, revistas, diários, obras literárias, científicas e técnicas, cartas, memorandos, relatórios e os elementos iconográficos – sinais, grafismos, imagens, fotografias, filmes. O autor diz que a análise de conteúdo "consiste em um instrumental metodológico que se pode aplicar a discursos diversos e a todas as formas de comunicação, seja qual for a natureza do seu suporte". (Godoy, 1995, p. 23)

> Qualquer comunicação que veicule um conjunto de significações de um emissor para um receptor pode, em princípio, ser decifrada pelas técnicas de análise de conteúdo. Ela parte do pressuposto de que, por trás do discurso aparente, simbólico e polissêmico, esconde-se um sentido que convém desvendar. (Godoy, 1995, p. 23)
>
> Do ponto de vista operacional, a análise de conteúdo inicia pela leitura das falas, realizada por meio das transcrições de entrevistas, depoimentos e documentos. Geralmente, todos os procedimentos levam a relacionar estruturas semânticas (significantes) com estruturas sociológicas (significados) dos enunciados e articular a superfície dos enunciados dos textos com os fatores que determinam suas características: variáveis psicossociais, contexto cultural e processos de produção de mensagem. (Gerhardt et al., 2009, p. 84)

Utilizando esta técnica de análise, procuramos por meio de palavras, frases e respostas dos participantes as categorias emergentes que serviram para reagrupar os dados, isto é, organizar os dados por categorias. Estas serviram para agrupar o conjunto de dados obtidos e por meio deste agrupamento interpretá-los e obter uma conclusão mais próxima da realidade estudada, sem perder de vista o foco do estudo, as questões de investigação e o objetivo da pesquisa.

Das ações desenvolvidas no ciclo de estudos utilizamos a observação participante e a técnica de análise de conteúdos nas respostas dos participantes às tarefas em que foram incumbidos de realizarem. Essas ações sofreram mudanças e adaptações no decorrer do processo, pois em alguns momentos houve a intervenção do pesquisador. Neste ponto, identificamos a participação do pesquisador no estudo, como ocorre na observação participante.

Dentre as ações desenvolvidas no ciclo de estudos, os participantes conceituaram limites de funções duas vezes (conceito inicial e conceito final) e construíram dois mapas conceituais (mapa inicial e mapa final) com o conceito de limites de funções. Fizemos uma análise dos conceitos respondidos e uma interpretação dos mapas conceituais elaborados na tentativa de categorizá-los e agrupá-los, comparando individualmente os conceitos e mapas conceituais iniciais – feitos anteriormente a apresentação do conteúdo de limites de funções – com os conceitos e mapas finais – feitos após a apresentação da definição formal e dos conteúdos de limites de funções apresentados aos participantes – visando uma possível resposta para as perguntas de investigação.

As entrevistas com os estudantes foram a última etapa da coleta de dados. A análise dos dados oriundos das entrevistas seguiu de forma análoga a análise realizada no ciclo de estudos, isto é, após a transcrição das entrevistas realizadas com os estudantes e professores que ministraram a disciplina de Cálculo na Universidade, construímos categorias para organizar os dados obtidos das entrevistas. Posteriormente, verificamos analogias entre as categorias construídas das entrevistas com as dos questionários, utilizando trechos de falas transcritas das entrevistas para justificar e confirmar as reflexões e abstrações que tivemos nos dados obtidos dos questionários e das observações feitas no ciclo de estudos. Ressaltamos que os dados obtidos nas entrevistas com os professores foram utilizadas para construção das atividades e estratégias metodológicas utilizadas no ciclo de estudos.

# CAPÍTULO IV

# ANÁLISE E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Este capítulo foi subdividido em três subcapítulos: 4.1. Aprendizagens prévias relacionadas com limites de funções; 4.2. Implementação do ciclo de estudos e 4.3. Avaliação do ciclo de estudos. No subcapítulo 4.1 analisamos os dados do 1° questionário, sobre os conhecimentos prévios dos alunos relacionados com limites de funções, e das entrevistas realizadas aos professores participantes, sobre o ensino de limites de funções. No subcapítulo 4.2 analisam-se as atividades que foram desenvolvidas no ciclo de estudos. Finalmente, no subcapítulo 4.3, avalia-se o ciclo de estudos com base nos dados obtidos do 2.° questionário e nas entrevistas com os estudantes.

## 4.1. Conhecimentos prévios e ensino de Cálculo

Este subcapítulo foi dividido em duas seções: 4.1.1. Aprendizagens prévias relacionadas com limites de funções e 4.1.2 O ensino de Cálculo. Na primeira, procurou-se diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes por meio das suas respostas ao 1.° questionário, com o intuito de construir atividades para o ciclo de estudos. Na segunda analisamos as entrevistas dos professores que têm trabalhado com o ensino de Cálculo, mais especificamente com limites de funções, e tiveram como propósito gerar informações para construção de estratégias e metodologias para o ensino deste conteúdo no ciclo de estudos.

### 4.1.1. Conhecimentos prévios relacionados com limites de funções

O 1.° questionário (Anexo 2) serviu para conhecermos os conhecimentos prévios e possíveis subsunçores existentes na estrutura cognitiva dos participantes da pesquisa, a fim de elaborarmos as tarefas do ciclo de estudos. Entendemos subsunçores como proposições, modelos mentais, construtos pessoais, concepções, ideias, invariantes operatórios, representações sociais e qualquer conceito existente na mente de quem aprende (Moreira, 2013a).

Faremos uma análise das respostas dos aprendizes, apresentando as questões do questionário, relacionando os objetivos das questões com os resultados encontrados nas respostas dos participantes por questão. Este primeiro questionário teve a participação de vinte e dois estudantes e encontrava-se estruturado em três partes: a Parte 1 destinada a obter informações pessoais sobre os estudantes, a Parte 2 focada no conceito de função e a Parte 3 dedicada ao estudo de funções e limites de funções, enquanto conteúdos matemáticos considerados propedêuticos à aprendizagem do conceito de limite. Nesta subseção ratificamos a diferença existente, em algumas tabelas, entre o total de estudantes participantes e a soma de frequência das categorias. Tal motivo se deu pelo fato de as respostas de alguns estudantes se classificarem em mais de uma categoria.

**Parte 1 – Caracterização dos estudantes**

**Questão 1**. Nesta questão incluíram-se itens de ordem pessoal, como nome fictício, idade, formação e pontuação de ingresso na Universidade.

*Objetivo da questão*. Conhecer características e elementos pessoais dos participantes da pesquisa.

*Resultados*. Na Tabela 2 apresentam-se os resultados obtidos nesta questão.

Tabela 2 – Caracterização dos estudantes segundo as várias variáveis pessoais consideradas – Parte 1 do 1.º questionário

| Nome | Idade | Ano de término E.M. | Formação superior | Pontução no ENEM |
|---|---|---|---|---|
| Lívia | 18 | 2012 | – | – |
| Lázaro | 23 | 2010 | Não possui | 560 |
| Riquelme | 21 | 2011 | Não possui | 520 |
| Nana | 19 | 2012 | Não possui | 500 |
| Augusto | 19 | 2013 | Não possui | 580 |
| Nelson | 30 | 2003 | Não possui | 465 |
| Saulo | 17 | 2013 | Não possui | 527 |
| Bella | 26 | 2008 | Não possui | 489,5 |
| Roberto | 35 | 1999 | Não possui | 585 |
| Aragão | 18 | 2013 | Não possui | 565 |
| João | 20 | 2011 | Não possui | 590 |
| Bruno | 19 | 2011 | Não possui | 523 |
| Mirosmar | 26 | 2012 | Não possui | 569 |
| Mickey | 22 | 2010 | Não possui | 460 |
| Aysha | 19 | 2012 | Não possui | 498,80 |
| Ilza | 17 | 2013 | Não possui | – |
| Cintia | 17 | 2013 | Não possui | 555,30 |
| Gustavo | 18 | 2013 | Não possui | 524 |
| Niul | 28 | 2005 | Não possui | 540 |
| Obama | 20 | 2013 | Não possui | 543 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Thamyres | 21 | 2011 | Não possui | 480 |
| Graziela | 21 | 2012 | Não possui | 440 |

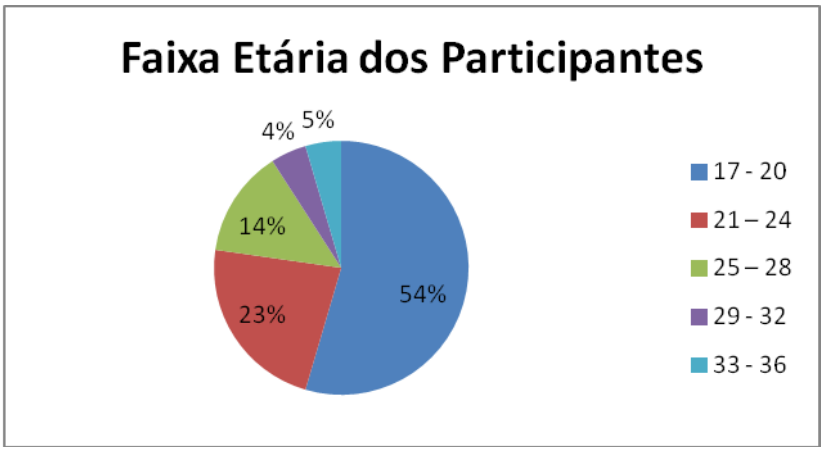



Figura 12 – Gráfico da faixa etária dos estudantes

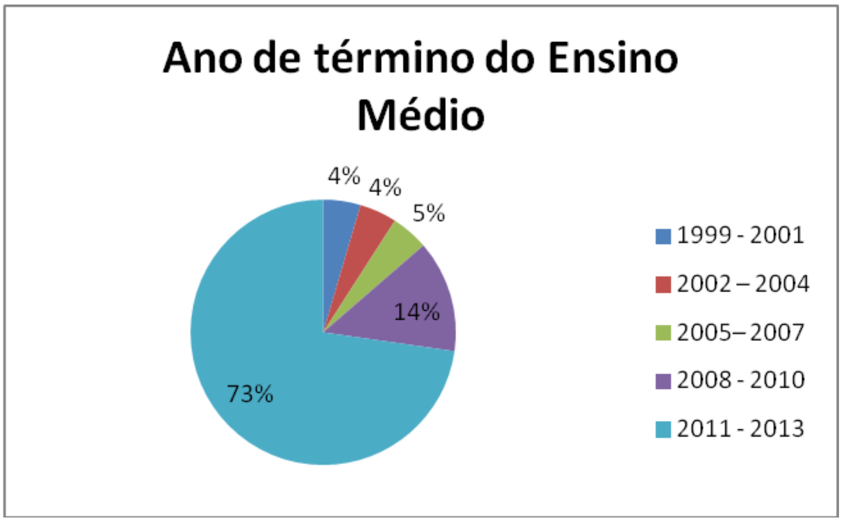



Figura 13 – Gráfico do Ano do término do Ensino Médio dos estudantes

*Análise*. Conforme os resultados apresentados na Tabela 2, verifica-se que as suas idades variam entre os 17 e os 36 anos de idade, com 54% dos estudantes com idades no intervalo 17-20 e 23% no intervalo 21-24. Sobre o ano de término do Ensino Médio, constata-se que ele ocorreu entre 1999 e 2013, tendo 73% dos estudantes terminado o curso entre 2011 e 2013 e 14% entre 2008 e 2010. Dos vinte e dois participantes, apenas Lívia não respondeu a pergunta relativa à formação superior, e os demais não possuíam outra formação de nível superior. Sobre a pontuação no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)[11] os valores variaram de 440 pontos a 590 pontos, num máximo possível de 1000 pontos.

Os participantes pertenciam a três gerações diferentes e o curso de matemática escolhido por eles na Universidade foi a primeira formação superior para todos. A pontuação do ENEM mostra que os estudantes que optaram pelo curso de Licenciatura em Matemática, geralmente, são alunos de desempenho mediano baixo, uma vez que a pontuação para ingresso nos cursos superiores no Brasil mais procurados pelos candidatos são os de medicina e direito com uma pontuação próxima dos 750 a 1000 pontos. Indiretamente, essa baixa pontuação de ingresso no curso de Licenciatura em Matemática na UFRB assinala o nível de conhecimento dos estudantes ingressos na universidade, pois as notas do ENEM para o curso de matemática apontam para alunos com diversas deficiências e dificuldades em disciplinas curriculares do sistema educacional brasileiro.

**Questão 2**. Nesta questão, foi perguntado aos estudantes os motivos que os levaram a escolher o curso de Licenciatura em Matemática da UFRB.

*Objetivo da questão*. Descobrir possíveis anseios e expectativas dos estudantes em relação a escolha pelo curso de Licenciatura em Matemática

*Resultados*. Conforme as respostas dos estudantes nesta questão, construímos uma síntese das categorias apresentadas na Tabela 3, levando-se em consideração que tiveram respostas de estudantes que se classificaram em mais de uma categoria.

Tabela 3 – Razões da escolha do curso de Licenciatura em Matemática – Parte 1 do 1.º questionário

| Categorias | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Identificação com a disciplina | 17 | 77,3% |
| Residência próxima a Universidade | 4 | 18,2% |
| Influência de parentes | 1 | 4,5% |
| Estudar na Universidade | 1 | 4,5% |
| Preocupação com o ensino de matemática | 2 | 9,1% |
| Formação e aprimoramento para outros cursos | 1 | 4,5% |
| Obtenção de conhecimentos | 5 | 22,7% |
| Devido a pontuação do ENEM | 1 | 4,5% |

[11] Exame Nacional do Ensino Médio, que visa avaliar o desempenho dos estudantes brasileiros egressos do ensino médio. Atualmente a pontuação e classificação no exame vêm sendo usadas por diversas Universidades brasileiras a fim de admitir os estudantes na Universidade.

*Análise*. Conforme as respostas dos estudantes, resumidas na Tabela 3, vemos que dezessete estudantes responderam que se identificavam com a disciplina de matemática, sendo este o motivo da escolha do curso. Lázaro, Mirosmar, Gustavo e Thamyres responderam que o fato de a Universidade se situar perto da sua residência contribuiu também para a escolha feita. Cinco estudantes informaram que pretendiam conhecer mais sobre a matemática a fim de obter mais conhecimentos nesta área.

Nana informou que a escolha pelo curso foi por indicação de parentes. Bella visava a frequência da Universidade como uma referência. Roberto e Aragão demonstraram certa preocupação com o ensino da matemática e pensavam que fazendo o curso poderiam contribuir com o ensino da disciplina. João pensou na sua formação e no aprimoramento de conhecimentos para a imigração em outros cursos. E por fim, Obama disse que a escolha do curso foi com base na nota (543) obtida no ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio.

Assim, a maioria dos estudantes escolheu o curso de Licenciatura em Matemática pela afinidade que eles possuíam com a disciplina de matemática. Alguns ainda informaram que a escolha do curso teve como objetivo obter mais conhecimentos na área da matemática.

**Questão 3**. Buscou-se nesta questão saber como os estudantes se autoavaliam diante do seu desempenho em matemática numa escala de qualificações denominadas de Muito Fraco, Fraco, Razoável, Bom e Muito Bom.

*Objetivo da questão*. Conhecer qualitativamente, por meio de uma escala de autoavaliação, o desempenho dos estudantes em matemática.

*Resultados*. Dos vinte e dois estudantes participantes, dezoito disseram que seu desempenho em matemática era "Razoável" e quatro deles afirmaram ser "Bom".

*Análise*. Foi um resultado esperado, uma vez que nas atividades foram confirmadas tais avaliações do desempenho dos estudantes no estudo de conteúdos e conceitos em matemática.

**Questão 4**. Perguntou-se aos estudantes sobre quais conteúdos de matemática eles consideravam mais difíceis de aprender.

*Objetivo da questão*. Avaliar os conhecimentos prévios dos alunos e identificar as possíveis deficiências existentes relativas aos conteúdos matemáticos a fim de elaborar e construir as atividades de intervenção do ciclo de estudos em que se visava a compreensão do conceito de limite de funções e do seu ensino.

*Resultados*. Conforme a Tabela 4, alguns conteúdos matemáticos foram mais citados que outros, levando em consideração que os participantes citaram, em alguns casos, mais de um conteúdo. Foram eles: trigonometria; limites; Cálculo; análise combinatória; lógica; conjuntos; conteúdos da disciplina de pré-Cálculo; álgebra; geometria; domínio e imagem; logaritmos; probabilidades; funções; escalas e equações biquadradas. Destes conteúdos, os mais citados foram geometria e trigonometria.

Tabela 4 – Conteúdos matemáticos considerados mais difíceis pelos estudantes – Parte 1 do 1.º questionário

| Conteúdos Matemáticos | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Trigonometria | 6 | 27,3% |
| Limites | 3 | 13,6% |
| Cálculo | 2 | 9,1% |
| Análise Combinatória | 1 | 4,5% |
| Lógica | 3 | 13,6% |
| Conjuntos | 3 | 13,6% |
| Pré-Cálculo | 1 | 4,5% |
| Álgebra | 3 | 13,6% |
| Geometria | 12 | 54,5% |
| Dominio e Imagem | 1 | 4,5% |
| Logaritmo | 4 | 18,2% |
| Probabilidades | 1 | 4,5% |
| Funções | 2 | 9,1% |
| Escalas | 1 | 4,5% |
| Equações Biquadradas | 1 | 4,5% |

*Análise*. Muitos dos conteúdos matemáticos citados pelos alunos são do ensino médio, talvez, por eles estarem mais próximos desse grau de ensino ou pela complexidade dos conteúdos nesse nível de ensino. Avaliamos que os conteúdos de geometria e trigonometria foram os mais citados, possivelmente, por causa da dificuldade dos participantes neles, pois conforme a matriz curricular brasileira esses conteúdos são vistos no final do ano ou do semestre e, às vezes, o professor não tem tempo para ministrá-los da melhor forma, sendo abordados de forma rápida e superficial.

**Parte 2 – Conceito de função**

**Questão 1**. Definição de função.

*Objetivo da questão*. Avaliar no participante o conhecimento sobre a definição de função.

*Resultados*. Classificamos as respostas em corretas, parcialmente corretas, incorretas e não resposta. Foram dois os estudantes que responderam corretamente: Riquelme definiu função usando a relação entre as variáveis $x$ e $y$ (dependentes e independentes). Utilizou ainda o termo equação e deu um exemplo; Nana definiu função usando os conceitos de relações e conjuntos. As respostas parcialmente corretas foram dez, tendo os estudantes definido função utilizando, de alguma forma, uma lei e/ou conceitos matemáticos relacionando-os. As respostas incorretas foram nove, e um estudante não respondeu a questão.

Tabela 5 – Respostas dos estudantes à questão 1 – Parte 2 do 1.º questionário

| Tipo de resposta | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Correta | 2 | 9% |
| Parcialmente Correta | 10 | 45% |
| Incorreta | 9 | 41% |
| Não resposta | 1 | 5% |

Nas respostas dos participantes apareceram conceitos e termos que definimos como subcategorias, designadamente; cinco estudantes utilizaram o conceito de números reais para definir função; dois estudantes fizeram referência a tabelas; sete estudantes referenciaram em suas respostas questões ligadas ao gráfico; um estudante utilizou o conceito de finito e onze estudantes referenciaram a utilização de letras, sendo que nove destes utilizaram as letras $x$ e $y$ e dois utilizaram outras letras.

*Análise*. Dos vinte e dois estudantes, apenas dois deles conseguiram definir função corretamente, um número pequeno para um conceito que é estudado no primeiro ano do ensino médio. Segundo Lima e Pontes (2009),

> A dificuldade na compreensão do conceito de função perpassa por todos os níveis que retratam a relação ensino-aprendizagem e em diferentes aspectos do conhecimento do conceito. Os matemáticos historicamente superaram obstáculos para alcançar, depois de séculos, a formalização do conceito de função. Os professores de Matemática, nos dias atuais, também apresentam dificuldades em compreender, interpretar e atribuir significados ao conceito. (p. 2)

O conceito de função é de grande relevância para os demais conceitos e conteúdos matemáticos estudados no ensino médio e superior, inclusive para limites de funções. Entretanto, dez estudantes apresentaram respostas parcialmente corretas e com base nestas respostas construímos as atividades do ciclo de estudos, pensando na perspectiva de uma aprendizagem significativa.

Em diversas respostas dos estudantes aparecem conceitos como números reais, letras ( $x$ e $y$), tabelas e gráficos, conforme vimos nos trechos seguintes: "É um conteúdo matemático onde se aprende a ler gráficos e tabelas sobre o eixo $x$ e $y$" (Augusto); "Função é uma conta onde podemos usar o $x$ e o $y$ ou qualquer letra, e assim, usaríamos representações gráficas" (Aysha); "É uma tabela onde um valor lógico tem associação direta com o outro" (Mirosmar); "A função em obter números positivos ao fim do resultado, onde na maioria das vezes é identificada por números reais" (Lívia); "É um conjunto de números, mas é dividido em partes" (Graziela).

Conforme as respostas dos estudantes, percebemos alguns dos seus conhecimentos prévios relacionados ao conceito de função. A palavra "associação" que aparece na resposta do estudante Mirosmar dá ideia de uma ação para explicar o conceito de função, ou seja, ao se falar em função o estudante relaciona seu significado com uma correspondência de valor lógico (entendemos que queira dizer numérico) com outro. Já Aysha e Augusto não usam o termo associação; em contrapartida eles usam as letras $x$ e $y$ para dar ideia dos eixos coordenados $x$ e $y$. E nas respostas de Lívia e Graziela aparecem relações com números, os quais classificamos como números reais.

**Questão 2**. Dada uma tabela de valores, os estudantes deviam determinar uma lei de função (expressão analítica) que estabelecesse a correspondência entre valores de $x$ e $y$ dados na tabela, além de representá-la graficamente.

*Objetivo da questão*. Avaliar as formas de representações dos estudantes, isto é, se eles conseguiriam, a partir de uma tabela com valores de $x$ e $f(x)$, determinar a lei da função e construir a sua representação gráfica, uma vez que, no ensino de construção de gráficos e tabelas, os estudantes estão habituados a construir uma tabela e representá-la graficamente a partir da lei, e poucas vezes no sentido contrário, ou seja, com base na tabela ou no gráfico determinar a lei da função que a representa.

*Resultados*. Nenhum estudante conseguiu achar a lei corretamente e dezesseis estudantes responderam erroneamente, uma vez dados os valores de $x$ e $y$ da tabela. Destes, seis estudantes apresentaram uma lei incorreta, que não condiz com os valores da tabela. Em relação à representação gráfica, apenas um estudante representou o gráfico correto, enquanto dezessete estudantes fizeram a representação gráfica errada e quatro estudantes não responderam à questão.

*Análise*. Foi confirmado o que previamos na construção da questão, isto é, no objetivo da questão tínhamos falado sobre as dificuldades dos estudantes nas diversas formas de representação de uma função, ou seja, as dificuldades dos estudantes em encontrar a lei de uma função e a sua representação gráfica, dada uma tabela de valores $x$ e $y$.

Foi observado, ainda, que na tentativa em responder a questão, foram deixados os rascunhos e deduções no questionário com a finalidade de analisar as pistas para desvendar alguns dos conhecimentos prévios dos estudantes. Por exemplo, a estudante Lívia, embora tenha conseguido representar corretamente o gráfico, não conseguiu achar a lei da função correspondente, deixando como rascunho o seguinte: "Temos que a $x$ foi atribuído um valor, logo substituiremos $x$ pelo valor que foi dado, pois iremos substituir na função de $f(x)$". Lívia repetiu ainda os dados fornecidos na tabela, ou seja, "$f(x),\ f(0) = 16,\ f(1) = 24,$ $f(2) = 36,\ f(3) = 54$ e $f(4) = 81$".

Sobre a representação gráfica, a maioria dos estudantes construiu retas e um deles ainda desenhou uma parábola, demonstrando que quando se fala em construção de gráficos os conhecimentos prévios dos estudantes remete-os para a função afim, linear e quadrática, pois estas funções são as mais utilizadas nas atividades escolares do ensino médio. Destaca-se o estudante Riquelme que fez algumas tentativas para obter a lei da função gerando três leis de funções e uma representação gráfica de uma reta. Contudo, o estudante demonstra certo conflito com as respostas encontradas, pois ele percebe que as leis das funções encontradas não satisfazem por completo aos valores que foram dados na tabela, conforme vimos nos trechos seguintes: "$f(x) = 8x + 16$ é uma função afim, porém não se encaixa nessa função" ; "$y = \frac{65}{4}x + 16$"; "$y = 13x + 16$ é uma função, mas não satisfaz toda a função pedida" (Riquelme).

Conforme as tentativas de Riquelme, ele efetuou os Cálculos e observou que para os valores dados na tabela as funções encontradas não satisfaziam a lei da função pedida — $f(x) = 16(\frac{3}{2})^x$ —, como é o caso da função $f(x) = 8x + 16$ que se verifica apenas para $f(0)$ e $f(1)$, mas não para os demais valores da tabela.

**Questão 3**. Dados quatro gráficos, é pedido aos estudantes que indicassem quais deles representavam ou não o gráfico de uma função e que justificassem as suas respostas.

*Objetivo da questão*. Avaliar o conhecimento dos estudantes sobre a identificação de funções representadas graficamente.

*Resultados*. Os gráficos assinalados pelas letras a) e c) eram funções, enquanto que os gráficos assinalados pelas letras b) e d) não representavam uma função. Analisaremos, em seguida, as respostas dos estudantes segundo cada gráfico separadamente.

No gráfico a) vinte estudantes responderam que o gráfico representa uma função, contra dois estudantes que responderam que o gráfico não representava uma função. Estes últimos justificaram as suas respostas da seguinte forma: “$x$ pertence aos reais, mas $y$ não” (Aysha) e “associar mais de um ponto” (Niul). Das justificativas dos estudantes que disseram ser função, separamo-las por categorias de acordo com o que consta da Tabela 6.

Tabela 6 – Justificações de função na questão 3a) – Parte 2 do 1.º questionário

| Categorias | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Ter cavidade voltada para cima | 2 | 9,1% |
| Interceptar o eixo do $x$ uma única vez | 6 | 27,3% |
| Apenas uma imagem para cada elemento do domínio | 6 | 27,3% |
| Interceptar o eixo $x$ em 0 | 2 | 9,1% |
| Associar pontos de $x$ e $y$ | 3 | 13,6% |
| Resposta ininteligível | 3 | 13,6% |

No gráfico b) seis estudantes responderam erroneamente que era função e justificaram suas respostas com as seguintes justificativas: números positivos (provavelmente referenciou aos valores de $x$ serem todos positivos), um estudante; possui apenas uma imagem, um estudante; possui pontos no eixo do $x$, dois estudantes; liga-se o ponto de $x$ e $y$, um estudante (nesta categoria teve a estudante Bella, que respondeu de forma análoga; porém, ela diz que o gráfico não representa uma função); resposta ininteligível, dois estudantes, sendo que um deles respondeu que o gráfico não representa uma função.

Os outros dezesseis estudantes responderam corretamente informando que o gráfico não representa uma função e justificaram sob as seguintes categorias: possuem duas imagens, dez estudantes; domínio sem imagem, dois estudantes; passam pelo positivo e negativo de $x$ e $y$, um estudante; admite valores reais em $x$ e $y$, um estudante, conforme vemos na Tabela 7.

Tabela 7 – Justificações dos estudantes na questão 3b) – Parte 2 do 1.º questionário

| Categorias | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Admitir valores reais em $x$ e $y$ | 1 | 4,5% |
| Duas imagens | 10 | 45,5% |
| Possuir domínio sem imagem | 2 | 9,1% |
| Passar pelo positivo e negativo de $x$ e $y$ | 3 | 13,6% |
| Ligar pontos de $x$ e $y$ | 2 | 9,1% |
| Resposta ininteligível | 2 | 9,1% |
| Números positivos | 1 | 4,5% |
| Possui apenas uma imagem | 1 | 4,5% |

No gráfico c) dezessete estudantes responderam corretamente que o gráfico representa uma função e justificaram as suas respostas da seguinte forma: possui apenas uma imagem para cada elemento do domínio, nove estudantes; intercepta o eixo $x$ uma única vez, dois estudantes; funções crescentes com descontinuidade em $x = 2$ (possivelmente a estudante devia estar associando as coordenadas do ponto (2,1) e do ponto (2,2), pertencente e não pertencente ao gráfico da função, respectivamente); no qual aparece uma descontinuidade no gráfico, um estudante; $x$ associado a $y$, dois estudantes; não toca os eixos, um estudante; resposta ininteligível, dois estudantes.

Os demais, cinco estudantes, responderam erroneamente, afirmando que o gráfico não representa uma função porque há pontos que não estão associados a $x$. Entendemos que tal resposta se deva ao fato de o ponto de coordenadas (2,2) não pertencer à função e, consequentemente, não pertencer à curva do gráfico.

Tabela 8 – Justificações dos estudantes na questão 3c) – Parte 2 do 1.º questionário

| Categorias | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Apenas uma imagem para cada elemento do domínio | 9 | 40,9% |
| Interceptar o eixo $x$ uma única vez | 2 | 9,1% |
| Funções crescentes com descontinuidades em $x = 2$ | 1 | 4,5% |
| $x$ associado a $y$ | 2 | 9,1% |
| Não tocar os eixos | 1 | 4,5% |
| Resposta ininteligível | 2 | 9,1% |
| O par ordenado (2,2) não pertence à função | 5 | 22,7 |

No gráfico d) quatorze estudantes responderam corretamente afirmando que o gráfico não representa uma função com diversas justificativas, das quais selecionamos por categorias: o gráfico possui duas imagens para $x = 1$, dez estudantes; o desenho não apresenta uma função, um estudante; não tem domínio, um estudante; nem todo $y$ tem valor em $x$, um estudante; dois pontos negativos (-1,-1), um estudante.

Por outro lado, oito estudantes responderam erroneamente afirmando que o gráfico representa uma função com diversas justificativas, das quais selecionamos pelas categorias: pontos que associam $x$ e $y$, dois estudantes; possui apenas uma imagem, dois estudantes; pontos reais positivos e negativos, um estudante; intercepta em algum ponto, um estudante; resposta ininteligível, dois estudantes, conforme vemos na Tabela 9.

Tabela 9 – Justificações dos estudantes na questão 3d) – Parte 2 do 1.º questionário

| Categorias | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| O gráfico com duas imagens para $x = 1$ | 10 | 45,5% |
| O desenho não apresenta uma função | 1 | 4,5% |
| Não tem domínio | 1 | 4,5% |
| Nem todo $y$ tem valor em $x$ | 1 | 4,5% |
| Dois pontos negativos (-1,-1) | 1 | 4,5% |
| Pontos que associam $x$ e $y$ | 2 | 9,1% |
| Possui apenas uma imagem | 2 | 9,1% |
| Pontos reais positivos e negativos | 1 | 4,5% |
| Intercepta em algum ponto | 1 | 4,5% |
| Resposta Ininteligível | 2 | 9,1% |

*Análise*. Em relação ao gráfico a) foram muitas as respostas corretas, mas, entretanto, as justificativas não foram tão satisfatórias. Destaca-se que seis estudantes responderam que o gráfico corresponde a uma função pelo motivo de possuir apenas uma imagem, ao mesmo tempo em que outros seis estudantes responderam que seria função porque o gráfico intercepta apenas uma vez o eixo $x$. Estas respostas revelam um conflito ou até mesmo um obstáculo epistemológico dos alunos referente ao conceito de função, que "é um conhecimento adquirido num determinado momento, mas que posteriormente se revela falso ou inadaptado, quando o portador desse conhecimento está, por exemplo, perante novas situações" (Guerra, 2012, p. 31).

Em relação ao conceito de função, os alunos já o conheciam, ou seja, já tinham o conhecimento de função oriundo do ensino médio talvez de uma forma falsa ou inapropriada, sendo que no momento de responder ao questionário este conhecimento se revelou. Neste sentido, Cornu (1983) diz que neste momento o conhecimento "falso" adquirido pode ser enraizado tornando-se um obstáculo. Entretanto, o autor nos diz que este deve ser ultrapassado a fim de que a aprendizagem possa ocorrer.

Em relação ao gráfico b), a maioria das respostas foi correta, ou seja, dezesseis estudantes responderam corretamente afirmando que o gráfico não representa uma função, contra seis respostas erradas. Destacam-se as justificativas de dez estudantes que acertaram, justificando que não seria uma função devido ao gráfico possuir duas imagens, como vemos nos trechos seguintes: "Pois, cada ponto do eixo $x$ está associado a dois pontos" (Nana); "Pois para cada $x$, há dois números de $y$, associados (Nelson); "Um elemento de $x$ está associado a mais de um em $y$. (João); "Ao traçarmos uma reta vertical obtêm-se dois pontos de $x$ correspondendo a dois pontos de $y$ (Obama).

As respostas evidenciam algumas estratégias utilizadas pelos estudantes para concluir se um gráfico representa uma função. É o caso do estudante Obama, que sugere passar uma reta vertical e verificar se a reta interceptará dois pontos do gráfico. Se isto acontecer, tal significa que o objeto possui duas imagens, fato que justifica o gráfico não representar uma função, como vimos nas respostas dos estudantes referentes às justificativas do gráfico a).

Em relação ao gráfico c), a maioria dos estudantes acertou a questão, justificando que existe apenas uma imagem para cada elemento do domínio. Destacamos algumas destas respostas dadas pelos estudantes, como por exemplo:

> Porque todos os valores de $x$ estão ligando em apenas um valor em $y$. Mesmo um ponto estando fora da reta (2,1), porém o ponto (2,2), não pertence a reta, com isso o $x$ só liga apenas um ponto em $y$. (Riquelme)

> Porque a cada ponto em $x$ existe um único ponto em $y$ correspondente. (Saulo)

Em relação ao gráfico d), a maioria dos estudantes acertou, informando que o gráfico apresentado não representa uma função, e quase que todos eles utilizaram justificativas semelhantes, observando que existe mais de uma imagem para cada valor do domínio, conforme vemos nas respostas seguintes: "Existe um valor de $x$, que é o 1, que liga diversos pontos no $y$, entre 1 e 2, então não é função" (Riquelme); "Não, porque tem vários pontos de ($y$) associados a um único ponto de $(x)$" (Aragão); "Cada ponto do domínio tem que estar ligado a um ponto da imagem, nesse caso o 1 está ligado a dois pontos, coisa que não pode" (Bruno).

De forma geral, observamos que a maioria dos estudantes acertou a questão e teve como uma das justificativas mais utilizadas o fato de que cada elemento do domínio deve ter apenas uma imagem correspondente, conforme vimos nas respostas supracitadas. Este conhecimento se constitui como um possível subsunçor para o conhecimento vindouro sobre limites de funções.

> Em termos simples, subsunçor é o nome que se dá a um conhecimento específico, existente na estrutura de conhecimentos do indivíduo, que permite dar significado a um novo conhecimento que lhe é apresentado ou por ele descoberto. Tanto por recepção como por descobrimento, a atribuição de significados a novos conhecimentos depende da existência de conhecimentos prévios especificamente relevantes e da interação com eles. (Moreira, 2013a, p. 6)

**Questão 4**. Foram dados sete gráficos de funções e sete leis de funções com a finalidade de que os participantes estabelecessem a correspondência entre eles e ainda determinassem o domínio e a imagem de cada função.

*Objetivo da questão*. Avaliar os conhecimentos dos estudantes a respeito das representações gráficas e analíticas de funções. Dadas representações gráficas e leis de funções, os estudantes teriam que associar cada representação gráfica a uma lei e, ainda, determinar o domínio e o conjunto imagem das funções correspondentes.

*Resultados*. Apresentamos abaixo, na Tabela 10, o total de acertos dos estudantes no estabelecimento da correspondência entre a lei de função dada e o gráfico.

Tabela 10 – Respostas corretas dos estudantes na questão 4 – Parte 2 do 1.º questionário

| Funções | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| $f(x) = x$ | 13 | 59,1% |
| $g(x) = -x^2$ | 18 | 81,8% |
| $h(x) = x^3$ | 8 | 36,4% |
| $i(x) = \|x\|$ | 8 | 36,4% |
| $j(x) = sen(x)$ | 15 | 68,2% |
| $k(x) = 0{,}5^x$ | 5 | 22,7% |
| $l(x) = 2log(x)$ | 8 | 36,4% |

Quanto ao domínio e conjunto imagem das funções, apenas um estudante, Riquelme, acertou os domínios e os conjuntos imagem de todas as funções dadas. Nana acertou o domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = x$; Cintia acertou o domínio das funções $f(x) = x$, $g(x) = -x^2$ e $i(x) = |x|$ e o conjunto imagem da função$f(x) = x$. Os demais estudantes deram respostas evasivas que não demonstravam conhecimento do que estavam fazendo. As respostas dos estudantes, em relação ao domínio, foram classificadas nas seguintes categorias, apresentadas na Tabela 11.

Tabela 11 – Respostas dos estudantes sobre o domínio, questão 4 – Parte 2 do 1.º questionário

| Categorias | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Uso de pares ordenados ou intervalos | 5 | 22,7% |
| Representação de valores numéricos que apareciam nos eixos | 3 | 13,6% |
| Indicar o eixo do $x$ | 1 | 4,5% |
| Representar os valores numéricos que apareciam nos eixos | 3 | 13,6% |
| Valores numéricos e/ou radianos | 4 | 18,2% |
| Repetir a lei da função | 3 | 13,6% |
| Não resposta | 3 | 13,6% |

Quanto às respostas dadas pelos estudantes nos conjuntos imagem, classificamo-las nas seguintes categorias, apresentadas na Tabela 12.

Tabela 12 – Respostas dos estudantes sobre o conjunto imagem, questão 4 – Parte 2 do 1.º questionário

| Categorias | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Uso de pares ordenados ou intervalos | 5 | 22,7% |
| Representar os valores numéricos que apareciam nos eixos | 3 | 13,6% |
| Valores numéricos e/ou radianos | 4 | 18,2% |
| Indicar o eixo do $y$ | 1 | 4,5% |
| Repetir a lei da função | 2 | 9,1% |
| Não resposta | 7 | 31,8% |

*Análise*. Dos participantes, apenas cinco conseguiram estabelecer a correspondência entre todos gráficos e as suas respectivas expressões algébricas (leis de funções). Em relação aos demais estudantes, foi observado que eles acertaram mais os gráficos relativos às funções quadrática, linear e trigonométrica. Uma das possíveis causas desta ocorrência pode ter sido o fato destas funções serem mais trabalhadas no ensino médio.

Em relação aos acertos do domínio e conjunto imagem das funções, apenas o estudante Riquelme acertou o domínio e conjunto imagem de todas as funções e duas estudantes acertaram em partes do domínio e conjunto imagem das funções linear, quadrática e modular, esta última não tão frequente nas respostas dos demais estudantes, tendo sido respondida apenas por um deles.

Foi observada uma tendência entre o domínio e conjunto imagem e as correspondências entre os gráficos de função e suas leis, consistindo num maior conhecimento dos estudantes em relação às funções lineares e quadráticas do que em relação aos outros tipos de funções, e neste último caso não aparece mais a função trigonométrica nas relações dos gráficos com suas respectivas leis.

Nas funções exponenciais, logarítmica, polinomiais de terceiro grau e trigonométricas os estudantes demonstraram desconhecimento de tais funções, gerando consequentemente muitos erros nas correspondências entre gráficos e leis de funções. Tal fato permitiu ver uma lacuna nos conteúdos ensinados no ensino médio, mais especificamente no ensino de funções, pois estes alunos provavelmente não tiveram contato com estas funções ou estudaram-nas de forma superficial, gerando consequentemente uma aprendizagem mecânica, não duradoura, sem que eles construíssem um conhecimento prévio sólido sobre funções.

Estes dados nos remetem à transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado, pois, segundo Nasser, Souza e Torraca (2012),

> o tópico de funções é abordado no Ensino Médio de modo pontual, não estimulando uma visão abrangente, necessária ao domínio do pensamento matemático avançado, inerente ao estudo de Cálculo. (...) as dificuldades na transição para o Ensino Superior, em especial na disciplina de Cálculo, podem ser amenizadas por abordagens adequadas de tópicos do Ensino Médio, tais como Funções e Geometria. (p. 1)

Corroboramos as autoras no sentido de termos uma base de conhecimento sólida em matemática para que o estudante chegue ao ensino superior com os conhecimentos prévios necessários para a construção e desenvolvimento de um conhecimento na perspectiva do pensamento matemático avançado. Tomando como referência o nosso estudo sobre limites de funções, é muito importante o estudante ter o conceito de função bem definido em sua mente, pois este será usado como um possível subsunçor na interação com novos conhecimentos, em especial, limites de funções.

**Questão 5**. Foi dada a representação gráfica da função $y = 3$ e pedido nas alíneas a), b) e c) qual o valor de $y$, quando $x = 2$; o domínio da função e o conjunto imagem, respectivamente.

*Objetivo da questão*. Observar como os estudantes percebem os valores de $x$ que estão implícitos na representação gráfica da função $y = 3$ e avaliar o conhecimento deles em relação ao domínio e conjunto imagem da função dada.

*Resultados*. Na Tabela 13, apresentam-se as frequências de respostas corretas e incorretas dos estudantes em cada uma das alíneas da questão 5.

Tabela 13 – Respostas dos estudantes na questão 5 – Parte 2 do 1.º questionário

| Alíneas | Frequência de respostas corretas | Percentagem de respostas corretas | Frequência de respostas incorretas | Percentagem de respostas incorretas |
|---|---|---|---|---|
| a) | 12 | 54,5% | 10 | 45,5% |
| b) | 8 | 36,4% | 14 | 63,6% |
| c) | 8 | 36,4% | 14 | 63,6% |

Nas respostas referentes à alínea a), um pouco mais da metade dos estudantes respondeu corretamente. Nas respostas referentes à alínea b), foram oito as respostas corretas, sendo que em três delas foi apresentado o intervalo do domínio no próprio gráfico. Uma estudante respondeu que o domínio da função é um ponto $(x, y)$. Nas respostas referentes à alínea c), foram oito as respostas corretas, contra quatorze respostas incorretas. Houve duas respostas evasivas que indicaram apenas os eixos, noutra apresentou-se o conjunto imagem no gráfico e dois estudantes deixaram sem resposta.

*Análise*. Conforme o número de acertos na alínea a), podemos dizer que os alunos perceberam satisfatoriamente os valores que $x$ assume numa função constante $y = 3$. Contudo, quando se trata do domínio e conjunto imagem, pouco mais da metade dos alunos que acertaram a alínea a) acertaram também as alíneas b) e c), revelando uma possível dificuldade dos estudantes na identificação do domínio e do conjunto imagem da função dada. Sendo assim, reforça-se a dificuldade dos estudantes no reconhecimento do domínio e conjunto imagem de uma função, como foi visto nas questões anteriores que requeriam tal conhecimento.

**Questão 6**. Foi pedido o domínio, conjunto imagem e a representação gráfica da função $g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$.

*Objetivo da questão*. Observar se os alunos conseguem esboçar o gráfico da função, uma vez que ela não está definida para $x = -1$, consequentemente não fazendo parte do seu domínio. Identificar conhecimentos prévios, em especial fatoração, representação gráfica, domínio e conjunto imagem.

*Resultados*. Analisaremos por partes, uma vez que nenhum estudante conseguiu responder corretamente ao domínio, ao conjunto imagem e à representação gráfica. Contudo, houve alunos que acertaram parcialmente ao que foi pedido. Em relação ao domínio, foram sete as respostas corretas contra quatorze incorretas e uma não resposta, conforme vemos na Tabela 14.

Tabela 14 – Respostas dos estudantes em relação ao domínio, questão 6 – Parte 2 do 1.º questionário

| Tipo de resposta | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Correta | 7 | 31,8% |
| Incorreta | 14 | 63,6% |
| Não Resposta | 1 | 4,5% |

Em relação ao conjunto imagem, apenas o estudante Riquelme respondeu corretamente, entretanto, este aluno errou a representação gráfica da função. Dezesseis estudantes responderam incorretamente ao conjunto imagem da função, dois apresentaram respostas parcialmente corretas e três não responderam, conforme vemos na Tabela 15.

Tabela 15 – Respostas dos estudantes em relação ao conjunto imagem, questão 6 – Parte 2 do 1.º questionário

| Tipo de resposta | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Correta | 1 | 4,5% |
| Incorreta | 16 | 72,7% |
| Parcialmente correta | 2 | 9,1% |
| Não Resposta | 3 | 13,6% |

Em relação a representação gráfica, apenas dois estudantes construíram corretamente o gráfico da função; entretanto, os demais responderam erradamente a esta questão e classificamos essas respostas segundo as categorias apresentadas na Tabela 16.

Tabela 16 – Respostas dos estudantes em relação às representações gráficas, questão 6 – Parte 2 do 1.º questionário

| Categorias | Frequência | Percentagens |
|---|---|---|
| Construíram parábolas | 8 | 36,4% |
| Fizeram o estudo do sinal da função | 6 | 27,3% |
| Construíram retas | 8 | 36,4% |
| Não resposta | 5 | 22,7% |

*Análise*. A partir das respostas dos estudantes, é evidente que os mesmos não estão habituados a construir gráficos de funções não elementares e alguns deles nem reconheceram a função dada. Segundo Lima e Pontes (2009), "as expressões algébricas, apesar de serem as mais valorizadas pelos professores no ensino do conceito de função, devem ser apresentadas aos alunos sem deixar de relacioná-las aos demais aspectos de representação e de significação do conceito" (p. 2).

Oito estudantes apresentaram o gráfico de uma parábola como resposta, pois talvez a expressão algébrica quadrática, que aparece no numerador da fração, tenha influenciado os estudantes nessa resposta. Seis estudantes fizeram o estudo do sinal da função, sendo que quatro deles tinham feito parábolas.

Em relação ao domínio e conjunto imagem da função, oito estudantes apresentaram para gráfico da função uma reta, sendo possível que tenham utilizado como subsunçor o conceito de função do 1.º grau e de fatoração, pois transformaram a função dada em outra representação algébrica por meio da fatoração, como referiram Graziela e Bella nas suas respostas.

Graziela usou a fatoração para escrever a expressão da função numa forma mais simplificada: $\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = (x-1)$, e ainda fez a representação gráfica da função

$f(x) = x - 1$ e da função $f(x) = -x - 1$. Já Bella respondeu: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} \Rightarrow x = 1$, e ainda colocou $x + 1 \neq 0$, contradizendo-se posteriormente ao dizer que $x = -1$. Em relação à representação gráfica, a estudante representou o gráfico da função $f(x) = -x + 1$ e da função $f(x) = x + 1$ separadamente, em dois referenciais cartesianos. Nesta perspectiva, Lima e Pontes (2009) salienta que:

> É importante também que diante dos conceitos apresentados com rigor matemático eles sejam discutidos de forma crítica para que o aluno possa fazer suas escolhas baseadas em parâmetros que lhe tragam significado. Acredita-se que o conceito de função ao se tornar explícito pode ser ressignificado a partir de um pensamento crítico diante do conhecimento que o aluno já apresenta sobre o assunto. (p. 3)

Corroboramos a autora quanto ao conceito de função poder ser ressignificado a partir dos conhecimentos que o aluno já possui sobre o assunto, pois acreditamos, no viés da aprendizagem significativa, que se basearmos o ensino nos conhecimentos prévios dos estudantes teremos uma aprendizagem significativa, e no caso citado por Lima e Pontes (2009) se constitui numa aprendizagem significativa crítica. Esta concepção, defendida por Moreira (2006), constitui-se não só na aprendizagem significativa de certo conceito ou conteúdo, mas também numa aprendizagem que procura criticamente entender como o sujeito aprende e quais critérios são levados em consideração num processo de aprendizagem.

**Parte 3 – Função e limite de funções**

**Questão 1**. Nesta questão foi pedido aos estudantes o significado de $|x|$ e um exemplo.

*Objetivo da questão*. Avaliar se os estudantes possuem o conhecimento do significado de módulo, pois o mesmo consta na definição de limites de funções, sendo assim um possível subsunçor para compreensão de limites de funções.

*Resultados*. Em relação ao significado de $|x|$, dividimos as respostas dos estudantes e as classificamos por semelhanças, conforme as categorias apresentadas na Tabela 17.

Tabela 17 – Respostas dos estudantes na questão 1 – Parte 3 do 1.º questionário

| Categorias | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Associação da palavra módulo ao símbolo dado | 14 | 63,6% |
| Transformação de um número positivo ou negativo em positivo | 5 | 22,7% |
| Transformação de um número real num número positivo | 2 | 9,1% |
| Nulidade do sinal | 2 | 9,1% |
| Representa uma distância | 1 | 4,5% |
| São valores de funções | 1 | 4,5% |
| É uma sentença fechada | 1 | 4,5% |

| | | |
|---|---|---|
| Pode ser um número positivo ou negativo | 1 | 4,5% |
| Resposta ininteligível | 2 | 9,1% |
| Não resposta | 2 | 9,1% |

Apenas Nelson, Graziela e Roberto exemplificaram como se pedia no enunciado. Nelson, equivocadamente, referiu que $x$, sendo positivo, implica $|x|$ ser negativo; $x$ sendo negativo, implica $|x|$ ser positivo, confundindo a noção de módulo com a noção de simético. Já Roberto e Graziela apresentaram que $|x| = x$ e $|x| = 1$.

*Análise*. A maioria dos estudantes referenciou corretamente o símbolo de módulo apresentado no enunciado, entretanto quanto ao significado houve alguns conflitos. Citamos como exemplo Nelson, que sabia que o símbolo apresentado no enunciado é o módulo de $x$, todavia apresentou um significado que não condiz com o verdadeiro significado de módulo de $x$, conforme foi referido antes. Bruno respondeu de forma semelhante a Nelson, porém de forma correta, pois para ele o módulo de um número é sempre um número positivo e este é resultado do módulo de um número negativo ou positivo. Nas respostas dos estudantes constatamos a presença de outros conhecimentos associados e dentre eles alguns mais relevantes e outros menos relevantes, evidenciando-se que os mais relevantes se constituem possivelmente como subsunçores.

A resposta de Roberto aponta para um possível subsunçor – o conceito módulo como uma distância, conforme vimos em sua resposta: "$x$ em módulo representa uma distância. Um exemplo é a distância de 0 até 1cm numa régua" (Roberto). Este conhecimento prévio de Roberto é relevante se pensarmos que aos valores de $x - \delta$ e $x + \delta$, no eixo do $x$, corresponderá à distância $\delta$ até $x$, assim como se pensarmos em $y + \varepsilon$ e $y - \varepsilon$, no eixo do $y$, corresponderá a distância $\varepsilon$ até $y$.

> Para além do uso dos quantificadores, também **o sinal de módulo** não está, e sabemo-lo igualmente por experiência profissional própria, na generalidade dos nossos alunos, interiorizado no sentido de representar uma distância, o que dificulta a visualização do significado de $|u_n - a| < \delta$. (Santos, 2010, p. 18, grifo do autor)

O conceito de distância para o estudante Roberto se caracterizou como um subsunçor na compreensão do conceito de módulo e consequentemente de limites de funções. Assim, esta questão cumpriu com seu objetivo ao ser possível identificar possíveis subsunçores para posteriormente ancorar novas informações a respeito do conceito de limites de funções.

**Questão 2**. Considerando, em $IR$, a desigualdade $|x-3|<1$, questionaram-se os estudantes, na alínea a), sobre quais os valores de $x$, reais, que satisfazem a esta desigualdade e, na alínea b), sobre se existe alguma relação entre os conjuntos solução das desigualdades $|x-3|<1$ e $-1<x-3<1$.

*Objetivo da questão*. Avaliar os conhecimentos dos estudantes em relação às inequações modulares, mais especificamente na alínea a), saber se os estudantes são capazes de determinar os valores de $x$ de modo que satisfaçam a desigualdade dada. A relevância desta questão prende-se com o fato de na definição de limites intervirem desigualdades, uma sobre o eixo $x(|x-a|<\delta)$ e outra sobre o eixo $y(|y-L|<\varepsilon)$.

O objetivo da alínea b) é compreender como os estudantes percebem as representações das desigualdades apresentadas, uma vez que os seus conjuntos solução coincidem. Assim, a questão serve para informar duas formas de escrita ou de representações para as desigualdades com o mesmo conjunto solução, uma vez que na definição formal de limites de funções aparecem os dois tipos de desigualdade, conforme citado acima, que, por vezes, faz-se necessário transformar uma na outra.

*Resultados*. Em relação às respostas dos estudantes, na alínea a) apenas o estudante Riquelme respondeu corretamente; Bella e Aragão deram uma resposta parcialmente correta; Aysha respondeu de forma ininteligível e os demais responderam incorretamente. Oito estudantes responderam valores numéricos em suas respostas e onze estudantes, incluindo Riquelme, que respondeu corretamente a questão, utilizaram intervalos em suas respostas. Destacam-se, ainda, as respostas de Lívia e Nelson ao afirmarem que qualquer número de $IR$ satisfazia a desigualdade.

Nas respostas dos estudantes referentes a alínea b), foram apenas Aragão e Riquelme que responderam corretamente. Entretanto, Riquelme relacionou a sua resposta com a dada na alínea a). Já Aragão afirmou que existe uma relação entre as desigualdades, mas não explicou qual seria a relação. Dez estudantes responderam incorretamente.

*Análise*. Apenas um estudante conseguiu responder à questão corretamente, demonstrando falta de conhecimento dos demais estudantes sobre o assunto, o que é problemático, uma vez que as inequações constituem um conteúdo que é ensinado desde a escola básica. Apesar disso, a questão serviu para nos orientar a respeito de alguns conhecimentos prévios dos participantes quando se trata de inequações, como o uso de números e intervalos que apareceram na maioria das respostas dos estudantes.

Em relação às respostas da alínea b), dois estudantes afirmaram existir uma relação entre as duas desigualdades apresentadas no enunciado. Contudo, eles não justificaram nem explicaram qual o tipo de relação. Riquelme resolveu a inequação $|x-3|<1$ e depois resolveu a inequação $-1<x-3<1$ e obteve respostas iguais, inclusive até as destacou; depois o estudante afirmou que existe uma relação, mas não a especificou. Conforme a resposta de Riquelme, percebemos que ele encontrou o mesmo conjunto solução para as duas inequações, todavia não identificou que as desigualdades também eram equivalentes.

Dessa experiência com o estudante Riquelme é possível identificar o uso de números e inequação como subsunçores, pois à medida que são utilizados eles ficam mais refinados e estruturados para uma aprendizagem significativa do conceito de módulo e, consequentemente, do conceito de limites de funções.

> Lembremos que a aprendizagem significativa decorre da interação não-arbitrária e não-literal de novos conhecimentos com conhecimentos prévios (subsunçores) especificamente relevantes. Através de sucessivas interações um dado subsunçor vai, progressivamente, adquirindo novos significados, vai ficando mais rico, mais refinado, mais diferenciado, e mais capaz de servir de ancoradouro para novas aprendizagens significativas. (Moreira, 2013a, p. 9)

Possivelmente estão atrelados ao conceito de limites de funções muitos conceitos, entretanto tentamos nesta atividade identificar alguns subsunçores relacionados ao conceito de módulo, entendendo este conceito de grande relevância para aprendizagem de limites de funções. Por meio da resposta de Riquelme identificamos dois conceitos – números e inequações – relacionados com o conceito módulo e, possivelmente por meio de uma diferenciação progressiva, estes conceitos vão sendo diferenciados e colocados de maneira hierarquizada em termos de relevância para as novas informações e construção de novos subsunçores para uma aprendizagem significativa do conceito de limites de funções.

**Questão 3**. Dadas as funções $g(x)=10^{x}$ e $h(x)=log(x)$, foi solicitado aos estudantes: na alínea a), os esboços gráficos destas funções; na alínea b), a determinação dos pontos de intersecção com os eixos coordenados de cada uma das funções; na alínea c), completar uma tabela com valores para $x$, $g(x)$ e $h(x)$; na alínea d), determinar e justificar, caso existam, $h(0)$ e $x$ em $g(x)=0$; na alínea e), identificar e justificar se existe uma relação entre as funções $g(x)$ e $h(x)$ e na alínea f), tendo como referência os esboços dos gráficos e a tabela, inquiriu-se a respeito do que se pode deduzir de $g(x)$ e de $h(x)$ quando $n$ se torna muito grande. Foi pedido que justificassem as respostas dadas.

*Objetivo da questão*. Avaliar os conhecimentos dos estudantes em relação às funções exponenciais e logarítmicas, às representações gráficas e tabelares destas funções e ao fato de uma função ser inversa da outra. E ainda, por meio dos gráficos e das tabelas, indiretamente, buscamos na alínea f) introduzir intuitivamente a ideia de infinito, sendo o propósito da questão fazer com que os participantes pensassem sobre o que acontece com o conjunto imagem das funções quando $x$ tende para o infinito – implicitamente estamos questionando sobre o limite das funções quando $x$ tende para o infinito.

*Resultados*. Em relação às respostas da alínea a) (ver Tabela 18), apenas Riquelme e Aragão esboçaram corretamente os gráficos das duas funções, embora Saulo tenha feito corretamente o gráfico da função $g(x)$ e Niul o gráfico da função $h(x)$, apesar de, para a $g(x)$, tenha feito o gráfico de uma função exponencial decrescente. Sete estudantes construíram erroneamente os gráficos das funções, sendo que três estudantes fizeram o gráfico de uma função logarítmica em vez da função exponencial e um estudante fez o gráfico da função exponencial em vez da função logarítmica. Três estudantes desenharam apenas o referencial do plano cartesiano, outros dois fizeram o estudo do sinal, três estudantes disseram que não sabiam responder e outros três deixaram sem resposta.

Tabela 18 – Respostas dos estudantes na questão 3a) – Parte 3 do 1.º questionário

| Tipo de resposta | | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|---|
| Esboço correto | $g(x)$ | 3 | 13,6% |
| | $h(x)$ | 3 | 13,6% |
| Esboço incorreto | $g(x)$ | 7 | 31,8% |
| | $h(x)$ | 7 | 31,8% |
| Estudo do sinal das funções | | 2 | 9,1% |
| Esboço do plano cartesiano | | 4 | 18,2% |
| Não sabe | | 3 | 13,6% |
| Não resposta | | 3 | 13,6% |

Quanto às respostas da alínea b), apenas Riquelme e Aragão responderam corretamente, contra seis respostas incorretas. Tivemos ainda quatro respostas "não resposta", um estudante respondeu que não sabia e nove respostas ininteligíveis, conforme a Tabela 19.

Tabela 19 – Respostas dos estudantes na questão 3b) – Parte 3 do 1.º questionário

| Tipo de resposta | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Correta | 2 | 9,1% |
| Incorreta | 6 | 27,3% |
| Não sabe/Não resposta | 5 | 22,7% |
| Ininteligível | 9 | 40,9% |

Nas respostas da alínea c) analisaremos os resultados separadamente por função, conforme as categorias de resposta apresentadas Tabelas 20 e 21.

Tabela 20 – Respostas dos estudantes na questão 3c) $g(x)$ – Parte 3 do 1.º questionário

| Tipo de resposta | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Correta | 17 | 77,3% |
| Ininteligível | 1 | 4,5% |
| Não resposta | 4 | 18,2% |

Tabela 21 – Respostas dos estudantes na questão 3c) $h(x)$ – Parte 3 do 1.º questionário

| Tipo de resposta | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Correta | 15 | 68,2% |
| Incorreta | 2 | 9,1% |
| Não resposta | 5 | 22,7% |

Nas respostas da alínea d) apenas Riquelme acertou a pergunta em relação a $h(0)$, enquanto que $x$ em $g(x) = 0$ ele não fez correto, como se mostra a seguir: "$h(x) = log\, x \rightarrow h(0) = log\, 0 \rightarrow 10^y = 0$ não existe nenhum valor de $IR$ que substituído em $y$ dê zero" (Riquelme), e para o valor de $x$ em $g(x) = 0$ o estudante equivocadamente respondeu "$g(x) = 10^x \rightarrow g(0) = 10^0 \rightarrow y = 1$" (Riquelme).

As respostas dos estudantes foram classificadas nas categorias apresentadas na Tabela 22. Dos onze estudantes que responderam incorretamente, sete deles disseram que a resposta era zero em ambas as funções.

Tabela 22 – Respostas dos estudantes na questão 3d) – Parte 3 do 1.º questionário

| Categorias | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Incorreta | 11 | 50,0% |
| Repetir as tabelas da alínea c) | 2 | 9,1% |
| Não sabe responder | 1 | 4,5% |
| Não existe | 4 | 18,2% |
| Resposta ininteligível | 3 | 13,6% |
| Não resposta | 3 | 13,6% |

Nas respostas da alínea e), Riquelme, Aragão e Aysha identificaram que uma função é inversa da outra, os demais estudantes responderam recorrendo à informação que foi apresentada na tabela da alínea c), designadamente nas categorias apresentadas na Tabela 23.

Tabela 23 – Respostas dos estudantes na questão 3e) – Parte 3 do 1.º questionário

| Categorias | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Valores das tabelas trocadas | 3 | 13,6% |
| Relação com os contradomínios das funções | 4 | 18,2% |
| Sem relação entre as funções | 2 | 9,1% |
| Resposta ininteligível | 4 | 18,2% |
| Não resposta | 4 | 18,2% |
| Funções positivas crescentes | 1 | 4,5% |
| Referência a zero | 1 | 4,5% |
| Cavidade para cima | 1 | 4,5% |
| Função de $x$ | 1 | 4,5% |
| Funções exponenciais | 1 | 4,5% |

Nas respostas da alínea f) não houve qualquer resposta correta, embora tivesse havido respostas parcialmente corretas. Por exemplo, Riquelme e Bruno afirmaram que quando $n \to \infty$ implica que $g(x)$ fica menor e $h(x)$ fica maior. Quatro estudantes deixaram a questão sem resposta, outros quatro estudantes responderam de forma ininteligível e os demais participantes responderam de maneira diferente, por exemplo: "$n \in IN$, $n$ vai para o infinito, enquanto $x$ também vai". Três estudantes afirmaram que a "casa decimal de $g(x)$ e $h(x)$ aumentará", "$g(x)$ implica em números negativos" e "$h(x)$ implicará em números irracionais, números positivos".

*Análise*. Numa análise inicial percebemos, pelos poucos acertos na construção gráfica das funções, as dificuldades dos estudantes em relação às funções exponenciais e logarítmicas, embora estes conteúdos devam ser estudados no ensino médio.

Dois estudantes conseguiram construir os gráficos das funções e outros dois estudantes construíram apenas um dos gráficos. Nas respostas incorretas houve estudantes que construíram gráficos de funções quadráticas, modular e linear, demonstrando, assim, conhecimentos prévios em relação à construção de gráficos de funções elementares.

Em relação à interseção com os eixos coordenados, apenas os estudantes Riquelme e Aragão conseguiram responder corretamente, os mesmos tinham acertado a construção dos gráficos referidos acima.

Em relação ao preenchimento das tabelas, a maioria dos estudantes conseguiu completar as tabelas das funções contradizendo os poucos acertos na construção do gráfico e nas respostas referentes às interseções com os eixos coordenados. Talvez numa próxima aplicação desta questão fosse interessante colocar as tabelas antes da construção dos gráficos. Desta forma, os estudantes poderiam utilizá-la na construção dos gráficos, servindo como um organizador prévio para ensinar a construção de gráficos de funções exponenciais e logarítmicas, uma vez que os organizadores prévios são

> materiais introdutórios apresentados antes do material de aprendizagem em si. Contrariamente a sumários que são, de um modo geral, apresentados ao mesmo nível de abstração, generalidade e abrangência simplesmente destacando certos aspectos do assunto, organizadores são apresentados em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade. (Moreira, 2013b, p. 31)

Para Ausubel et al. (1980), os organizadores prévios devem ser usados como "pontes cognitivas" para facilitar a interação entre o que o indivíduo já sabe e o que ele realmente precisa saber (nova informação). "Em outras palavras, organizadores prévios podem ser usados para suprir a deficiência de subsunçores ou para mostrar a relacionalidade e a discriminabilidade entre novos conhecimentos e conhecimentos já existentes, ou seja, subsunçores". (Moreira, 2013a, p. 15)

Em nosso caso, o uso das tabelas e a construção do gráfico seriam organizadores prévios que os estudantes já conhecem. E o que se pretende ensinar, ou seja, a nova informação seria a representação e análise do comportamento do gráfico das funções exponenciais e logarítmicas exigidas na questão. As tabelas também favoreceriam a identificação de funções inversas (as funções exponenciais e logarítmicas) e o estudo de limites de funções quando $x$ tende ao infinito.

Para os valores de $h(0)$ e $x$ em $g(x) = 0$, apenas o Riquelme acertou para o $h(0)$, conforme vimos nos resultados acima. Entretanto, houve algumas respostas que serviram para refletirmos, como por exemplo, das onze respostas incorretas, em sete delas os estudantes responderam que era zero. Possivelmente esta resposta mostra dois posicionamentos: a falta de conhecimento dos estudantes em relação aos conceitos de exponencial e logarítmico; ou a falta de base nas operações com potências, especialmente quando o zero é o expoente. Destacamos as respostas de Nelson e Bella:

"o valor de $h(0) = \{0; -1; -2; -3; -4; -5; 10^{-n}\}\ n \in IN$". (Nelson)

"O valor de $g(x) = \{1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001;\ 0{,}00001\}\ n \in IN$". (Nelson)

"$h(0) = \{-1, -2, -3, -4, -5\} - n^2 \in IN$" . (Bella)

"$g(x) = \{1, 0{,}1, 0{,}01, 0{,}001, 0{,}0001, 0{,}00001, 0{,}000001\} - n^2 \in IN$". (Bella)

Estes estudantes repetiram os dados das tabelas preenchidas na alínea c) da própria questão, mostrando que as tabelas serviram como referência para eles responderem as demais perguntas da questão.

Em relação às respostas da alínea e), três estudantes identificaram que as funções $h(x)$ e $g(x)$ eram inversas. Além destes, outros três estudantes mostraram em suas respostas a ideia de inversibilidade das funções, nelas ainda usaram como referência a tabela da alínea c), como vemos nos trechos: "Que a coluna de $g(x)$ e $h(x)$ são iguais" (Ilza); "valores opostos" (Niul); "Não existe muita diferença, pois só está ao contrário os valores obtidos na tabela. Os valores que estão em $x$ na tabela seguinte quem obtém é $h(x)$, e na seguinte os valores de $g(x)$ quem obtém é $x$" (Lívia).

Não houve respostas corretas na alínea f), de onde analisaremos as duas respostas parcialmente corretas que surgiram nas respostas dos estudantes Riquelme e Bruno, são elas: "$g(x)$, quando $n$ se torna muito grande a função $g(x)$ fica cada vez menor; $h(x)$, quando $n$ se torna muito grande o valor de $h(x)$ se torna cada vez maior" (Riquelme); "quando o valor de $g(x)$ for grande o de $h(x)$ será pequeno, ou quando $h(x)$ for grande o $g(x)$ será pequeno" (Bruno).

Riquelme respondeu corretamente em relação à função $g(x)$ – quando $n$ se torna muito grande –, porém ele utilizou a mesma justificativa para explicar a função $h(x)$, quando na verdade o valor da função $h(x)$ se tornará, também, cada vez menor quando $n$ se tornar muito grande.

Talvez o conflito na mente do estudante tenha resultado de pensar na ordem sequencial $-1, -2, -3, -4,$.... como uma ordenação crescente, quando na verdade seria uma ordenação decrescente, ou seja, cada vez menor.

A resposta de Bruno está muito mais alocada na relação inversa que existe entre as funções do que propriamente das relações das funções com o infinito e com limites. Entretanto, o estudante apresenta em suas respostas uma percepção referente ao crescimento e decrescimento das funções.

**Questão 4**. Nesta questão foi pedido aos estudantes que construíssem uma tabela com os dez primeiros termos da sequência numérica definida pela razão $\frac{1}{x}$, com $x \in IN$, e com base nesses termos fizessem um esboço do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, com $x \neq 0$ e $f$ definida de $IR^* \rightarrow IR$. Foram feitas, ainda, perguntas aos estudantes nas alíneas: a) Por que $x$ não pode ser igual a zero?; b) O que acontece com $f(x)$ para valores de $x$ bem próximos de zero? c) O que acontece com $f(x)$ para valores de $x$ bem distantes de zero?, respectivamente.

*Objetivo da questão*. Aproximar os conhecimentos prévios dos estudantes para uma função que pudesse representar e visualizar o conceito de limites de funções, pois, ao construir a tabela, os discentes poderiam notar a variação em $y$ para cada valor de $x$ dado. E também familiarizar os estudantes com gráficos que tendem ao infinito e utilizar a ideia de aproximação do traçado do gráfico em relação aos eixos coordenados.

*Resultados*. De todos os estudantes que responderam a este quesito, apenas Riquelme fez parte do gráfico corretamente, pois ele utilizou valores positivos da sua tabela gerando consequentemente um gráfico apenas para $x > 0$. Aragão, Thamyres e Graziela também fizeram uma tabela, mas não conseguiram fazer corretamente o gráfico com os valores correspondentes da tabela.

Nas respostas da alínea a), classificamo-las conforme as categorias apresentadas na Tabela 24.

Tabela 24 – Respostas dos estudantes na questão 4a) – Parte 3 do 1.º questionário

| Categorias | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Não existe um $x$ pertencente a $IR$, tal que tenha-se $\frac{x}{0}$ | 7 | 31,8% |
| $0 \notin IR^*$ | 3 | 13,6% |
| A equação fica nula | 3 | 13,6% |
| Não resposta | 3 | 13,6% |
| Resposta ininteligível | 1 | 4,5% |
| $x$ tem que ser maior que zero | 2 | 9,1% |
| $f$ tem que pertencer a $IR$ | 1 | 4,5% |
| $x$ não pertence a $IR$ | 1 | 4,5% |
| $x$ pertence a $IN$ | 1 | 4,5% |

Nas respostas da alínea b), classificamo-las conforme as categorias apresentadas na Tabela 25.

Tabela 25 – Respostas dos estudantes na questão 4b) – Parte 3 do 1.º questionário

| Categorias | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| $f(x)$ ficaria cada vez mais alto | 2 | 9,1% |
| $f(x) \leq 0$ | 7 | 31,8% |
| É possível dividir por 1 ou por $n$ | 2 | 9,1% |
| O resultado é distante de zero | 2 | 9,1% |
| A resposta ficaria em decimais ou inteiros | 2 | 9,1% |
| $f(x)$ passa a não existir | 1 | 4,5% |
| Resposta ininteligível | 3 | 13,6% |
| Não resposta | 3 | 13,6% |

Destacamos sete estudantes que disseram que $f(x) \leq 0$, sendo que dois deles, ainda, disseram que iria diminuir. A estudante Graziela respondeu $f(x) \leq 0$ e no complemento da sua resposta usou a palavra "tende".

O estudante Riquelme construiu o gráfico e a tabela de valores corretamente, contudo respondeu parcialmente correto informando que $f(x)$ ficaria cada vez mais alto, levando em consideração apenas os valores próximos de zero pela direita, ignorando os valores próximos de zero pela esquerda.

Nas respostas da alínea c) três estudantes responderam corretamente, afirmando que $f(x)$ se aproxima de zero: "O resultado fica mais próximo de zero" (Aragão); "Os resultados da função serão próximos de zero" (João); "Os resultados serão mais próximos de zero" (Bruno)

Seis estudantes responderam que $f(x)$ iria aumentar, sendo que um deles ainda acrescentou que seriam números reais crescentes e o outro disse que iria para o infinito. Na resposta desta estudante aparece mais uma vez a palavra "tender". Thamyres também respondeu que o valor de $f(x)$ iria para o infinito; três estudantes responderam que $f(x) > 0$, sendo que um deles ainda acrescentou que ficaria positivo; dois estudantes disseram que seriam números decimais ou fracionários positivos ou negativos; um estudante respondeu que $f(x)$ ficaria cada vez menor; um estudante afirmou que poderia variar conforme a lei da função; houve três respostas ininteligíveis e três não respostas, conforme vemos na Tabela 26.

Tabela 26 – Respostas dos estudantes na questão 4c) – Parte 3 do 1.º questionário

| Categorias | Ferquência | Percentagens |
|---|---|---|
| $f(x)$ se aproxima de zero | 3 | 13,6% |
| $f(x)$ aumentará | 6 | 22,7% |
| $f(x) > 0$ | 3 | 13,6% |
| Números decimais ou fracionários positivos ou negativos | 2 | 9,1% |
| $f(x)$ ficaria cada vez menor | 1 | 4,5% |
| Varia conforme a lei da função | 1 | 4,5% |
| Resposta ininteligível | 3 | 13,6% |
| Não resposta | 3 | 13,6% |

*Análise*. Como apenas um estudante fez o gráfico, ainda que parcialmente correto, podemos inferir que é grande a dificuldade dos estudantes na construção de gráficos de funções não elementares. Isso mostra que teremos mais dificuldades nas atividades a serem realizadas no ciclo de estudos, isto é, esses dados mostram que os estudantes não possuíam os subsunçores sobre construção de gráficos de funções, necessários para interagir com os novos conhecimentos de limites de funções.

> Outro aspecto que geralmente vem à tona quando se fala em facilitação da aprendizagem significativa são os *organizadores prévios.* Ausubel os propôs como recurso instrucional para o caso em que o aluno não tem os subsunçores adequados para dar significado ao novo conhecimento. (Moreira, 2013b, p. 23)

Face a estas dificuldades, foi preciso, no ciclo de estudos, construir organizadores prévios através de uma revisão da construção de gráficos de funções elementares e não elementares com auxílio de tecnologia informática, que permitissem aos estudantes conhecer e construir gráficos de funções, para posteriormente iniciarmos os estudos pretendidos sobre limites de funções.

Na perspectiva do pensamento matemático avançado foi necessária uma análise criteriosa e detalhada do comportamento dos gráficos de funções a fim de construir nos estudantes imagens conceituais sobre a construção de gráficos de funções, possibilitando-lhes a criação de ancoradouros necessários para interagir com o novo conhecimento – limites de funções – que seria posteriormente visto no ciclo de estudos. Esta perspectiva tem coerência com a teoria da aprendizagem significativa, na qual devemos sempre averiguar o conhecimento do educando e ensiná-lo de acordo (Ausubel et al., 1980).

Nas respostas da alínea a) cinco estudantes responderam corretamente, demonstrando conhecimento em relação à condição de existência para a função dada. Para além destes, houve mais cinco estudantes que também responderam corretamente, só que dois usaram linguagem escrita e três linguagem simbólica: "porque não existe uma fração com denominador igual a zero" (Riquelme); "porque $x$ é o denominador, por isso não pode ser 0" (Augusto); "porque na relação $IR^{*}\rightarrow IR$ o valor zero não entra em uma das relações" (Nelson); "porque na função pede $IR^{*}\rightarrow IR$ sem o zero" (Bella); "Porque $x \neq 0$, pois $f$ está relacionada $IR^{*}$.... " (Thamyres).

Pelas respostas de Nelson, Bella e Thamyres percebemos a influência do enunciado nas respostas dos estudantes, pois a definição do domínio da função no enunciado, diferente de zero $(IR^{*})$, levou os estudantes a utilizá-lo como referência para responder o quesito.

Nas respostas da alínea b) salientamos sete respostas informando que $f(x) \leq 0$, assim como os dois estudantes que responderam que o $f(x)$ ficaria cada vez maior. Entretanto, nenhum estudante conseguiu perceber que ambas as situações citadas ocorreriam nas proximidades do zero, ou seja, à direita do zero $f(x)$ ficaria cada vez maior e à esquerda do zero $f(x)$ ficaria cada vez menor à medida que fosse se aproximando do zero. Citamos como exemplo as respostas de quatros estudantes: "$f(x)$ ficará cada vez mais altos" (Riquelme); "Os valores vão ficando maiores" (Aragão); "$f(x) \leq 0$" (Nana); "tende ao $-\infty$" (Graziela).

Provavelmente, as duas primeiras respostas, de Riquelme e Aragão, basearam-se nos valores encontrados na tabela, pois foram pedidos apenas valores positivos, com $x \in IN$, e como os estudantes construíram o gráfico utilizando apenas estes valores, provavelmente isto os tenha influenciado nas respostas dadas. Quanto às respostas das estudantes Nana e Graziela nada se pode dizer, pois Nana não fez o gráfico e também não fez a tabela, e Graziela fez o gráfico e a tabela errada, não refletindo nenhuma interpretação adequada para a resposta dada neste quesito. Nesta última, deduzimos que pelo fato da estudante ser repetente na disciplina, isso a tenha influenciado no uso da palavra "tende/tender" em suas respostas.

Para a alínea c) destacamos as respostas corretas de três estudantes que responderam que $f(x)$ se aproxima de zero, conforme supracitado. Apesar destes estudantes não terem feito o gráfico e respondido corretamente, pelos quesitos da questão, percebemos que eles conseguiram imaginar corretamente, possivelmente por meio de imagens conceituais, o que aconteceria com a função para valores de $x$ bem distantes de zero. Talvez uma das possíveis justificativas para tal feito tenha sido "informações" dadas aos estudantes nas perguntas anteriores, ou seja, perguntas sobre limites de funções, limites laterais e construções de tabelas e gráficos e que favoreceram a construção de novos conhecimentos, gerando assim subsunçores que foram sendo modificados e diferenciados no decorrer da atividade, estabelecendo-se, então, como subsunçores "ancorados" para as perguntas posteriores (Moreira, 2006).

**Questão 5**. Nesta questão, dividida em duas alíneas, a) e b), procurou-se saber, na alínea a), qual o significado do termo limite de uma função e, na alínea b), se os estudantes já tinham estudado ou ouvido falar em limites de funções e que explicassem o seu significado a partir de exemplos.

*Objetivo da questão*. Identificar conhecimentos prévios dos estudantes a respeito de limites de funções, com a finalidade de ensinar posteriormente o próprio conceito formalmente. Verificar quantos alunos já estudaram limites de funções e quantos deles saberiam conceituar limites de funções.

*Resultados*. Conforme as respostas dos estudantes, formamos categorias de duas ou mais respostas combinadas. Para as respostas da alínea a) tivemos as seguintes categorias apresentadas na Tabela 27. Destaque para as categorias: referência a um valor aproximado e algo que tem um fim.

Tabela 27 – Respostas dos estudantes na questão 5a) – Parte 3 do 1.º questionário

| Categorias | Ferquência | Percentagem |
|---|---|---|
| Aludir a ideias matemáticas | 2 | 9,1% |
| Repetir em parte/todo o enunciado | 2 | 9,1% |
| Máximo de uma função | 3 | 13,6% |
| Referir conceitos matemáticos avançados (infinito, tendência e aproximação) | 2 | 9,1% |
| Não resposta | 3 | 13,6% |
| Resposta ininteligível | 3 | 13,6% |
| Não saber | 3 | 13,6% |
| Referência a um valor aproximado | 2 | 9,1% |
| Algo que tem um fim | 2 | 9,1% |

Na alínea b), conforme a apresentação da Tabela 28, a maioria dos estudantes respondeu que não estudou. Na categoria "Representações erradas de limites" um estudante apresentou um exemplo com o valor do limite errado; um estudante utilizou palavras da definição, porém erroneamente; outro estudante apresentou dois exemplos e ainda utilizou regras para desenvolver o limite; um estudante deu um exemplo, porém não indicou o valor do limite e ainda fez a representação gráfica de uma função sem usar a noção de limite.

Tabela 28 – Respostas dos estudantes na questão 5b) – Parte 3 do 1.º questionário

| Categorias | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Não estudou | 11 | 50,0% |
| Não resposta | 5 | 22,7% |
| Já ouviu falar | 2 | 9,1% |
| Representações erradas de limites | 4 | 18,2% |

*Análise*. Conforme as categorias apresentadas e baseadas nas respostas dos estudantes, percebemos fortes coincidências com resultados de pesquisas vistas na literatura. Por exemplo, na resposta de Nana ao conceito de limites de funções, "ao calcular o limite não importa o que aconteça no ponto x, mas sim o que acontece em torno desse ponto. Por isso, quando falamos que número "tende" a ser n, por exemplo, o número nunca vai ser n, mas se aproxima muito do número n" (Nana), vemos semelhanças com pesquisas de outros autores, principalmente Cornu (1983), quando se referencia a palavra "aproximação", que é apontada pela literatura como uma noção dinâmica do conceito, uma ideia de aproximação em relação a um determinado valor, sem alcançá-lo. Na pesquisa de Abreu (2011) foi constatado que 25% dos estudantes têm uma noção menos intuitiva de limites e relaciona a palavra limite a uma aproximação. Já Maurice (2005, *apud* Guerra, 2012) diz que os alunos veem, muitas vezes, o limite como uma aproximação. Enfim, autores como Cornu (2002), Santos (2005) e Santos e Almouloud (2014) também encontraram em suas pesquisas alunos que associaram a palavra aproximação ao conceito de limites de funções.

Outra ideia foi o limite representar um valor máximo ou mínimo, algo que não poderia ser ultrapassado: "o máximo que uma função pode atingir" (Augusto); "É o máximo da função" (Aragão); "Limite se refere a um valor máximo ou mínimo da função" (Roberto); "Até onde uma função pode chegar, para continuar sendo função" (Cintia); "É algo que tem um fim, ou seja, não é algo indefinido" (Graziela).

Nas respostas dos estudantes supracitadas, as quais se referem a limites de funções, são identificadas analogias com as pesquisas estudadas na literatura, como em Neto (2006), que cita exemplos de concepções de estudantes em relação a limites com base em outras pesquisas, em que alguns estudantes entendem que "Limite é o número máximo que uma função pode ter quando $x \to t$" (p. 13). E ainda, "quando uma determinada função tende para um determinado domínio, essa função terá significado até ao número determinado" (p. 14). Atingindo assim o seu máximo, segundo os participantes desta pesquisa, "Por vezes uma determinada função nunca chega a ter limite, o caso quando $L = \infty$" (p. 14). A resposta da estudante Graziela assemelha-se à resposta de estudantes citados por Neto (2006), que entendem limite como algo que é atingido no fim, algo propriamente definido pela função de $x \to t$.

Das respostas dos participantes na alínea b), metade deles disse que nunca estudou limites de funções, e, dos demais, apenas dois estudantes responderam ter estudado limites de funções, sendo que um deu um exemplo não convencional sobre limites de funções, ou seja, "$IR \to IR$, $lim\, x + 1$, onde $x \to 1$" (Nana) e o outro deu os exemplos: $lim_{x \to 2}\, x + 2 = 4$, $lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ (Riquelme). Neste último exemplo, o estudante fatorizou a expressão, porém não explicou o significado de limites de funções.

**Questão 6**. Nesta questão, questionaram-se aos estudantes sobre as expectativas que eles tinham para o estudo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

*Objetivo da questão*. Identificar questões afetivas e emocionais dos estudantes relativas ao estudo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

*Resultados*. A maioria das respostas relacionou a resposta com algum conteúdo que eles esperavam estudar na disciplina de Cálculo, embora a pergunta tivesse uma abrangência maior, indo além dos conteúdos. Assim, cinco estudantes informaram que estudariam o conteúdo de limites de funções, talvez influenciados por ter sido este o conteúdo desenvolvido na pesquisa. Três estudantes disseram que seriam Cálculos; outros três estudantes disseram limites e derivadas, sendo que um deles acrescentou o conteúdo de integral; um estudante respondeu continuação de pré-Cálculo; outro estudante informou que seria funções com novas formas e metodologias, diferentes das estudadas no ensino médio; três estudantes deixaram sem resposta; e um não soube responder.

Além dessas respostas, houve conteúdos citados, como por exemplo, Álgebra e gráficos de funções e uma resposta que insinuava a aquisição de novos conhecimentos. Quanto às expectativas dos estudantes ao iniciar a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, foram as seguintes: aprender sobre Cálculo Diferencial e Integral; assunto complexo; boas e grandes expectativas; fazer um bom curso; dedicação; explorar conhecimentos.

*Análise*. Conforme as respostas dos estudantes, o estudo de um conteúdo matemático foi a resposta da maioria deles, enquanto expectativa para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, especialmente, limites de funções. Contudo, em relação aos aspectos afetivos, podemos classificá-los como positivos e otimistas, pois a maioria deles referiu esperar fazer um bom curso de Cálculo Diferencial e Integral e que pudesse aprender com maior dedicação os novos conhecimentos oferecidos pela disciplina. Apresentam-se, em seguida, algumas respostas dos estudantes: "Acho que vou precisar de muita base de limites e derivadas para fazer um bom curso de Cálculo Diferencial e Integral" (Riquelme); "Tenho grande expectativa porque estou aqui para conhecer e aprender coisas novas" (Bruno); "Limite, Álgebra, Aprender é minha expectativa" (Niul); "espero estudar os assuntos mais aprofundados e aprender mais" (Thamyres).

Nas respostas dos estudantes apareceu a palavra "aprender" com frequência e a relacionamos com expectativas otimistas dos participantes para uma aprendizagem significativa, pois, segundo Ausubel et al. (1980), uma das condições para a existência da aprendizagem significativa é a predisposição dos alunos para aprender. Com base nas citações supracitadas, podemos perceber claramente esta predisposição em Bruno, Niul e Thamyres, assim como nos demais participantes.

**Questão 7**. Nesta questão interrogaram-se os estudantes sobre se eles já usaram tecnologias no estudo de funções, e em caso afirmativo, quais delas e a opinião deles sobre o uso.

*Objetivo da questão*. Verificar se os estudantes já tiveram algum contato com as tecnologias informáticas e quantos deles já tinham usado. Em caso de resposta afirmativa, eles deveriam justificar e/ou opinar sobre o uso. Esta informação seria útil para preparar o ciclo de estudos, pois algumas atividades desta nova etapa envolveriam o uso de tecnologias informáticas.

*Resultados*. A maioria dos estudantes disse nunca ter usado tecnologia para estudar funções, contra três estudantes que já tinham utilizado algum tipo de tecnologia no estudo de funções e obtiveram-se três "não resposta". A tecnologia mais usada foi o computador e o aplicativo da disciplina de Lógica de Programação, um programa denominado *Scratch,* que faz programações. Sobre o uso de tecnologias, os estudantes afirmaram que era muito importante para os estudos, servindo para aprender e tornar os assuntos mais práticos e fáceis de serem compreendidos. Segundo os estudantes, as tecnologias valorizam o livro didático, no caso dos livros que trazem uma abordagem que sugere o uso das tecnologias, e ainda são úteis para a construção de gráficos de funções, especialmente de parábolas.

*Análise*. Com base nas respostas dos estudantes percebemos que, mesmo sabendo que a maioria não usou tecnologias, eles demonstraram conhecimento sobre a praticidade e benefícios que o uso das tecnologias traz para ensino e aprendizagem. Analisando as respostas dos estudantes que disseram já ter utilizado tecnologias, constata-se que: "Sim. Computadores é de utilidade razoável porque não tem, você encontra... é necessário os livros didáticos" (Bella); "Scratch utilizamos para fazer um movimento em forma de parábola, o programa respondeu bem a função que fizemos" (João); "Sim, torna o assunto mais prático e fácil de ser compreendido" (Mickey).

Os três estudantes supracitados afirmaram usar as tecnologias, em particular, o computador, livros didáticos e certo aplicativo usado no curso, com exceção de Mickey, que não informou a tecnologia usada. Contudo percebemos, em suas respostas que o uso de tecnologias informáticas ainda está longe das práticas de estudo dos nossos estudantes participantes da pesquisa, apesar de demonstrarem conhecimento sobre os seus benefícios.

### 4.1.2. O ensino de Cálculo

Neste subcapítulo trataremos das questões referentes ao ensino de limites de funções e os dados coletados para análise deste tópico foram extraídos das entrevistas com os professores entrevistados.

As entrevistas ocorreram com quatro professores da Universidade – Reinan, Jonas, Alan e Eduardo – que costumeiramente ministram aulas de Cálculo Diferencial e Integral. Esta entrevista com os professores surgiu da necessidade de uma das questões de investigação: Quais recursos os professores utilizam para ensinar limites de funções? E qual a sua relevância para a aprendizagem dos estudantes de Cálculo Diferencial e Integral I?

Assim, com base nas entrevistas, faremos uma análise análoga à dos estudantes participantes. As entrevistas com os professores, semiestruturadas, seguiram um guião de entrevista com onze perguntas. Porém, quando necessário, durante a entrevista acrescentamos perguntas fora do guião, com intuito de esclarecer as ideias apresentadas pelos professores.

Observamos diferenças no tempo de experiência profissional dos professores, ou seja, o professor Reinan tinha dois anos consecutivos de experiência, o professor Jonas, professor fundador do curso, tinha quarenta e seis anos de experiência e os professores Alan e Eduardo, ambos, com dez anos de experiência no ensino superior.

Em relação à experiência dos professores no ensino de limites de funções, Jonas não sabia dizer, mas informou que foram muitas vezes e que se considerasse o tempo dele no ensino superior (quase cinco décadas), seria, provavelmente, o dobro dos considerados. Alan disse que umas oito vezes e Eduardo aproximadamente umas quatro ou cinco vezes.

Destacamos a resposta de Reinan que, mesmo com uma experiência menor em relação aos outros professores, ensinou três vezes consecutivas limites de funções em turmas de Cálculo. O professor informou que ensina, ainda, limites de funções na disciplina de Análise Real para o curso de matemática. Quando questionado sobre qual a diferença entre ensinar limites de funções para turmas de Cálculo e turmas de análise, o professor nos respondeu que na disciplina de análise ele trata com maior rigor do que para as turmas de Cálculo, pois, segundo ele, a disciplina de análise exige este maior rigor, conforme vemos pelo trecho seguinte da entrevista:

> Entrevistador: Tem alguma diferença entre ensinar limite de funções em Cálculo e em análise?
>
> Reinan: Sim, eu considero o rigor. No caso do Cálculo se trabalha um pouco com $\varepsilon$ e $\delta$, pelo menos nas turmas que trabalhei só a parte mais intuitiva, intuitivamente, no caso de física [turmas do curso de Licenciatura em Física] tendo mais cuidado, e

> para matemática [turmas do curso de Licenciatura em Matemática] fui um pouco mais rigoroso, mais aí, no caso de análise, já foi um pouco mais de rigor.

O professor quis dizer que, para o ensino de Cálculo, ele ensina de forma mais intuitiva, principalmente para turmas do curso de Física, enquanto no ensino de análise, para turmas do curso de Matemática, ele é mais rigoroso, ou seja, exige mais rigor dos estudantes nos conteúdos de análise.

O professor apresenta uma postura semelhante às metodologias dos livros didáticos de Cálculo e análise, pois esta sua concepção é percebida nos livros didáticos que apresentam o conteúdo de limites de funções com um rigor maior para o ensino de análise do que para o de Cálculo. Contudo, os estudos de Reis (2001) mostram que existe uma relação dicotômica e desigual entre rigor e intuição nas abordagens de manuais didáticos e que, conforme os autores de livros, entrevistados em sua pesquisa, existe uma "necessidade de um rompimento com o ensino formalista atual, tendo em vista, principalmente, a formação de um professor de matemática com multiplicidade e flexibilidade de conhecimentos específicos, pedagógicos e curriculares" (Reis, 2001, p. 5).

A respeito das dificuldades que os estudantes sentem ao estudar limites de funções, os professores entrevistados afirmaram que estão ligadas a falta de conhecimentos prévios para estudar este conceito, até porque é considerado por Jonas como um dos conceitos mais difíceis de se estudar: "o conceito no Cálculo propriamente dito, o conceito mais difícil do aluno entender é o conceito de limite" (Trecho da entrevista de Jonas).

Com base nisso, questionamos quais os conhecimentos prévios que seriam necessários para aprender limites de funções. Eduardo respondeu que seria o conteúdo de funções, pois segundo o entrevistado os discentes chegam à Universidade sem conhecimentos suficientes sobre funções. Alan afirma que os alunos sentem dificuldades com limites por não saberem conteúdos da educação básica, como fatorações e simplificações.

Reinan percebe que os estudantes de Cálculo fazem muita confusão para compreender o conceito de limites, sendo uma das possíveis razões para isso acontecer os quantificadores que aparecem na definição de limites, do tipo: $\forall$ (qualquer que seja), $\exists$ (existe), $\nexists$ (não existe), $\exists|$ (existe um único). Além destes, os estudantes, segundo o entrevistado, encontram o limite de uma função no ponto pela substituição do valor do $x$ no ponto em que se pretende achar o limite, determinando o seu $f(x)$ correspondente.

Para Reinan, esta é uma questão crucial no ensino de limite que às vezes é alvo de certos conflitos na aprendizagem do discente. Apesar de o professor entrevistado não aceitar esta forma de calcular limites, substituindo o valor de $x$ na função dada, o professor Alan já diz que ao fazer este processo ele está fazendo de forma intuitiva, ou seja:

> Eu faço uma abordagem intuitiva de limites, eu não dou ênfase na abordagem formal... no Cálculo do limite. Eu apresento a parte formal, mas não dou ênfase, porque ao longo do curso de Cálculo a gente não dá muita ênfase na parte formal de limites. (Trecho da entrevista com Alan)
>
> Mesmo porque a gente sabe que pra [para] calcular o limite pela definição a gente precisa conhecer o valor do limite. E como você conhece o valor do limite pra [para] calcular ele formalmente? Você parte do intuitivo pra [para] depois usar a definição rigorosa. Que aquela definição rigorosa, pra [para] mim, serve mais como uma certificação de que aquele intuitivo tá(está) correto, percebeu? Por exemplo, está lá: limite quando $x$ tende a 3 de $x + 1$ $(lim_{x \to 3} x + 1)$. Intuitivamente dá 4. Aí você pega aquele quatro e vai lá para o formal e mostra o limite que... você já está dizendo que é quatro, mas antes...Intuitivamente acabou fazendo e dizendo que é quatro. (Trecho da entrevista com Alan)

Conforme as falas de Alan, o professor admite que este processo de calcular o limite substituindo o valor de $x$ na função é um processo intuitivo e que foi discutido em outras pesquisas, como a de Cornu (2002) e Juter (2006).

Para suprir essas dificuldades, os professores entrevistados, unanimemente, disseram que utilizam meios "intuitivos" primeiramente, antes de definir limites de funções, com intuito de que os alunos compreendam melhor o conceito. Destacamos, neste momento, a entrevista com Jonas, pois nela ele apresenta uma forma de ensinar limites de funções, em que, segundo ele, o aprendiz consegue aprender o conteúdo de forma intuitiva, para posteriormente passar a uma fase mais rigorosa. Observamos também, na entrevista com Jonas, a questão da substituição do valor de $x$ na função dada.

> Jonas: muitos deles pensam que quando fala limite quando $x$ tende pra [para] 1, pensa que é pegar o $x$ no lugar dele botar 1 e não é isso. Então eu costumo colocar um exemplo que eu acredito ser um exemplo padrão, que é a sequência $\frac{1}{n}$, que é 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. Eu acho que essa dá mais um pouco a noção de que não é simplesmente jogar e colocar 1, e aí eu digo: observe o que é que vai acontecendo com a seqüência, 1, depois $\frac{1}{2}$, vai diminuindo, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ , $\frac{1}{5}$, então como esse denominador aí vai crescendo, crescendo, crescendo cada vez mais, ele vai chegar em zero. Agora, pergunto eu: vai dar zero? Não professor, não vai dar não. Porquê? Porque o numerador é 1. Constante 1, então nunca vai dar zero. Mas ele tá caminhando pra [para] onde? Aí ele tá caminhando cada vez mais, né? Vai se aproximando de zero,

então nesse vai se aproximando de zero, então qual é o limite aí? A gente pergunta: qual é o limite que essa seqüência vai ter? Se ela nunca vai ser zero, mas ela sempre vai se aproximando cada vez mais de zero e você não consegue botar um anteparo entre ela e o zero de modo que ela não passe desse anteparo, se você colocar entre o zero e ela um anteparo ela vai ultrapassar esse anteparo.

Entrevistador: Mas você não acha isso contraditório? O fato de chegar perto e no final não atingir, chegar perto e não atingir e o limite, no caso, ser zero?

Jonas: Mas é exatamente porque o limite não quer dizer que ele vai ser igual, aí é que tá [está] a questão da dificuldade porque quando a gente diz o limite é tal coisa não tá [está] dizendo que ela vai chegar lá.

Entrevistador: Certo...

Jonas: Essa é que é a grande questão, não é chegar lá Então quando acontece, por exemplo: o caso que a gente fala depois em continuidade, em que o $x$ tá [está] caminhando pra [para] 1, mas nada impede que ele chegue no 1, então o limite dele é 1 porque ele tá [está] indo pra [para] 1...

Jonas: Então, no caso da sequência que tá [está] indo pra [para] o zero nada vai impedir que ela pare no caminho. Então, ela vai chegar no zero. Quer dizer, o limite é zero, no caso do $x$.

Corroboramos a ideia da aproximação da sequência $\frac{1}{n}$ para mostrar aos estudantes o conceito de limites de forma intuitiva, pois neste caso desmistifica a ideia do limite "ser igual a" e dá uma verdadeira ideia da dinâmica do conceito em que os alunos podem ver por meio das sucessivas aproximações feitas para o valor determinado, não precisando assim fazer a substituição do $x$ na expressão dada, o que acaba gerando conflitos ou até mesmo obstáculos epistemológicos do conceito de limites.

Em relação às metodologias utilizadas pelos professores, podemos dizer que todos reconhecem a dificuldade do ensino deste conceito, principalmente quando se trata da parte mais formal. Alan e Eduardo utilizam ferramentas informáticas – *softwares* – para subsidiar e apoiar no ensino de limites de funções, especialmente nas visualizações gráficas. Reinan afirma que utiliza meios e situações reais quando possível, e tenta, às vezes, contextualizar seu ensino com questões cotidianas dos estudantes. Já Jonas aplica a ideia intuitiva da sequência de $\frac{1}{n}$, conforme supracitado. Entretanto, este professor salienta aos estudantes a dificuldade em estudar limites de funções, que exige deles muita determinação e vontade em querer aprender verdadeiramente o conceito.

Conforme as respostas dos professores em relação às técnicas usadas para ensinar limites, eles ainda demonstram uma ideia mecânica do ensino deste conceito, pois sempre estão pautados em exercícios de livros, exemplos semelhantes que são mostrados em sala de aula e depois cobrados em avaliações do tipo teste e prova. Esta concepção de ensino leva a uma aprendizagem mecânica, na qual o estudante "aprende" momentaneamente o conceito de limites ou partes do conceito para aplicar nas avaliações e testes e que, passado pouco tempo, tende a esquecer por completo a definição mais formal do conceito de limites.

Em relação ao uso de livros didáticos, todos os professores entrevistados assumiram que utilizam livros para planejar suas aulas. Entretanto, o professor Jonas afirma que a ideia metodológica do uso de uma sequência para ensinar o conceito de limites de funções ele não encontrou em nenhum livro e que isso nasceu das suas experiências com o ensino de limites, reafirmando que considera o conceito de limite como um dos conceitos mais difíceis para ensinar.

A respeito do uso de tecnologias informáticas, apenas Reinan e Alan assumiram que as utilizavam, geralmente, como meio de visualizar e motivar os estudantes a aprender. Diferentemente, o professor Jonas salientou que às vezes o computador pode prejudicar, favorecendo uma aprendizagem mecânica, conforme vimos no seguinte trecho de sua entrevista:

> Eu não tenho utilizado não [referenciando-se ao computador], até porque senão vai ficar muito mecânico e eu acho que vai ao invés de fazer com... a não ser que você tenha um exemplo muito bem, bem adaptado pra fazer isso porque quando você joga no computador, o computador faz as contas, você não sabe nem o que é que tá [está] acontecendo. (Trecho da entrevista de Jonas)

Sobre o uso de outros recursos, o professor Alan informa que já utilizou uma figura – barra de chocolate – para mostrar que uma constante sobre "algo" que cresce indefinidamente terá como limite zero, ou seja:

> Às vezes eu utilizo algumas figuras, como se fossem algumas brincadeiras para que eles possam compreender alguns conceitos. Por exemplo, uma situação que já comentei com eles, que eles conseguem compreender que constante sobre infinito vai pra [para] zero, independente do valor da constante. Então eles conseguem compreender, eu dou um exemplo, faço uma brincadeira, e eles dizem: Ah, por isso que vai pra [para] zero. Por exemplo, uma vez eu contei a eles que um aluno levou uma barra de chocolate e um colega do lado viu e pediu um pedaço, pediu metade. Ele ia dividir, mas se ele dividisse ficaria metade pra [para] cada um. E um terceiro colega também ouviu e queria também, e ele ia dividir por três e já ia ficar uma quantidade menor pra [para] cada um, 1/3, e aí 1/4, 1/5,... Depois a turma inteira queria dividir aquela barra de chocolate, entendeu? Então você está com uma

> unidade no numerador e o denominador não para de crescer. Aí um aluno, que ia passando, ficou sabendo que ali estão distribuindo chocolate. Então já seriam outras salas, duas salas, o CFP (referência ao Centro de Formação de Professores da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia) inteiro, então quando o denominador cresce o que vai dar pra [para] cada um? "Ah! Professor, vai dar um "atomosinho" para cada um". Então, essa figura simbólica faz eles compreenderem que quando o numerador é constante e o denominador vai pra [para] infinito, quando falei em infinito questionei, imagine se você pegar essa barra e dividir pra [para] todos os habitantes de Amargosa, Salvador e Bahia, quanto vai ficar pra [para] cada um? 'Ah! Professor, a gente não vai nem sentir o cheiro!'. Vai ficar quanto para cada um? Ah! Vai ficar zero pra [para] cada um. Então eles conseguem compreender que sempre que vão resolver uma questão que tem a constante sobre infinito, eles sabem que é zero. Então é uma alternativa, não usei um recurso formal, não usei um computador, usei uma ilustração de uma coisa para que eles possam entender. (Trecho da entrevista com Alan)

A ideia proposta pelo professor Alan gera possivelmente a construção de imagens conceituais por parte dos seus estudantes, uma vez que os estudantes irão configurar em suas mentes o chocolate e a sua divisão infinita, chegando à ideia de uma quantidade tão ínfima, que se aproxima do zero. Podemos ainda afirmar, com base em Ausubel et al. (1980) e Moreira (2006), que esta atividade traz elementos de um recurso que pode ser considerado como potencialmente significativo, pois ela tem a possibilidade de fazer com que o estudante possa interagir o novo conhecimento – a nova informação – com subsunçores em sua estrutura cognitiva.

Também, conforme o pensamento matemático avançado, é necessária certa maturidade dos estudantes para compreenderem conceitos complexos em matemática, como limites, por exemplo (Cornu, 2002). Nesta perspectiva, analisamos a resposta do Reinan quando o mesmo se refere ao tratamento que se deve dar à análise e à importância da maturidade matemática dos estudantes no ensino de limites em Cálculo.

> Não, eu acho que maturidade no sentido assim, eu acho que os de Cálculo, por exemplo, tive aluno que veio a entender, a perceber mais um pouco o que é limite. Agora em análise, quer dizer, você espera que pelo menos a definição e a noção intuitiva ele [refere-se ao estudante em geral] tivesse, mas aí ele reproduz e não sabe o que é, não entende de fato o que vem a ser o limite. Eu acho que é preciso uma maturidade pra [para] trabalhar com a definição, mas a noção de limites não, ela pode ser trabalhada tranquilamente. Aí é uma coisa que depende do professor, como ele vai trabalhar. (Trecho da entrevista de Reinan)

Todos os professores entrevistados disseram que se sentem capacitados para ensinar limites de funções, entretanto, Reinan respondeu que num primeiro momento ele percebeu que o conhecimento que ele tinha sobre limites não estava servindo didaticamente para ensinar aquele conteúdo. Assim, buscou se aperfeiçoar e ler a respeito de formas e métodos didáticos para ensinar limites e verificou que em cada nova turma melhorava a sua prática docente. Ainda, segundo o entrevistado, o professor deve procurar sempre a melhor forma de trabalhar um conteúdo em sala e para isso ele deve estar capacitado, conforme refere no seguinte trecho da sua entrevista.

> Sempre você percebe que tem alguma coisa pra [para] você aprender e dar uma melhorada nas suas aulas. Neste sentido.... assim...., preparado na definição e trabalhar com épsilons e deltas tá [está] tranquilo, mas é a forma, eu acho, que a gente nunca tá [está] preparado e eu acho que é uma coisa que nunca deve haver é o professor tá [está] satisfeito com o que faz, a insatisfação ela gera que o professor busque sua melhora, se capacitar, entender o novo, porque aí tem algum aluno, um problema novo, porque aquele aluno não tá [está] compreendendo? E buscar estratégias pra [para] fazer com que isso eu acho que faz parte da formação, eu acho que eu tô [estou] buscando isso, definição tranquilo, mas a forma de abordar sempre eu tô [estou] buscando formas que possam me ajudar e auxiliar a passar isso, esse conteúdo. (Trecho da entrevista de Reinan)

Na perspectiva da aprendizagem significativa é importante termos educadores, como Reinan, preocupados com as suas metodologias e práticas docentes, pois é importante que o professor prepare um material potencialmente significativo para dar condições para a ocorrência da aprendizagem significativa em seus estudantes.

Quando perguntado aos entrevistados sobre os materiais de ensino que eles precisariam para ensinar limites ou quais deles sentem necessidade de utilizar, todos os entrevistados responderam que não sentem falta de nenhum material, utilizando meios tradicionais de ensino, isto é, livros didáticos, quadro e giz e problemas intuitivos sobre limites. O professor Reinan salienta que, sempre que possível, ele tenta utilizar algum material manipulável ou levar os estudantes para o laboratório de matemática e informática. É importante salientar que a formação do professor Reinan é a mais atual em relação aos demais professores e nela o professor pode ter contato com estes tipos de materiais e experiências, enquanto os demais tiveram uma formação mais tradicional, em que usavam apenas livros e manuais didáticos.

Por fim, questionamos os professores sobre o que poderia ser melhorado no ensino de limites de forma que pudesse melhorar a aprendizagem dos estudantes neste conteúdo, perguntando quais as possíveis alterações que deveríamos fazer. Desse questionamento surgiram muitas sugestões. Segundo Reinan, seria possível tratar limites de uma maneira mais intuitiva primeiramente e depois estudar derivada e integral e, por fim, voltar ao estudo de limites de uma forma mais rigorosa.

O professor Jonas explanou um pouco da sua experiência de quando era aluno de Cálculo. Nela, o tratamento do professor era bastante autoritário e longe do universo dos seus alunos, sem falar no nível de rigor que era exigido, muitos momentos na disciplina mais pareciam de análise do que propriamente de Cálculo. Entretanto, o professor salientou que em sua prática docente ele utiliza várias maneiras para auxiliar o estudante a aprender: dialogando; sugerindo e aconselhando. Para Jonas, o professor deve assumir diversos papéis: educador, profissional, psicólogo, palhaço, etc. para fazer com que seu aluno aprenda.

Segundo o professor Alan, é importante resgatarmos aspectos históricos e utilizá-los no ensino de limites

> Sim, seria resgatar episódios históricos, como o método da exaustão de Eudóxo, Arquimedes vai e aprimora, já pelo século XVIII, então o pessoal já começa a usar o conceito de limites. Então trazer esses elementos históricos é importante pra [para] ele compreender que não surgiu de uma hora pra [para] outra. (Trecho da entrevista de Alan).

Além disso, o professor sugere, tratando-se de limites, algumas questões que podem proporcionar um ensino mais motivador e eficaz para os estudantes de Cálculo:

> dá pra [para] alterar o ensino de limites no seguinte: não massificar tanto, porque às vezes a gente massifica com muitos problemas, muito exercício de limite. Diminuir essa quantidade, tem sete limites, sete casos de determinações, é importante que os alunos vejam todos esses casos? Você medir a relevância daquilo ali, por exemplo, o aluno da química, o aluno da física, o aluno da matemática, é o mesmo Cálculo? É a mesma necessidade? Então eu acho que dá pra [para] trazer mais elementos de motivação, reduzir os exercícios que às vezes fica muito repetitivo, então você pode reduzir, você pode utilizar tecnologia pra [para] que ele faça problemas assim, investigativos, pra [para] que ele possa esboçar um gráfico, uma situação, visualizar as coisas dinamicamente. Então são elementos que você pode levar pra [para] disciplina e tornar ela mais prazerosa, tornar ela mais atraente, são elementos motivacionais. Tornar ela mais interessante, para que o aluno a passe a ver com outros olhos. (Trecho da entrevista com Alan)

Corroboramos os cuidados informados pelo professor Alan na tentativa de criar um ambiente propício à aprendizagem. Com estes critérios sendo seguidos, estaremos dando a possibilidade dos nossos estudantes aprenderem de forma gradativa e obviamente com significado.

> Então, eu exigia responsabilidade, então, quando você traz elementos diferenciados que melhorem o aprendizado, não pode perder de vista isso, sem reduzir qualidade, tem que ter qualidade, mas que melhore o aprendizado, sem massificar, sem resolver às vezes uma lista inteira e depois um livro inteiro, fica exaurindo aquilo, repetitivo, então bota uma determinação, uns três, quatro probleminhas daquilo ali

pra [para] ele entender, dá ênfase ao que é importante. (Trecho da entrevista com Alan)

O Professor Eduardo sugeriu o uso de *softwares* e citou o nome do colega – o professor Alan – no uso deste recurso para o ensino de Cálculo, informando que o colega tem tido um melhor aproveitamento em suas aulas com uso destes recursos. Entretanto, ele salienta a dificuldade em se trabalhar com uma turma de Cálculo com trinta a quarenta alunos num laboratório de informática, sem falar na predisposição e vontade do professor em preparar aulas específicas para este tipo de ambiente.

As entrevistas com os professores foram exitosas e revelaram informações cruciais e necessárias para os objetivos desta pesquisa. A seguir trataremos da análise referente à implementação das atividades e tarefas do ciclo de estudos.

## 4.2. Implementação do Ciclo de Estudos

Nesta etapa desenvolvemos uma intervenção de ensino, denominada de ciclo de estudos, com os estudantes participantes. Neste ciclo foram desenvolvidas algumas práticas e atividades que levassem os estudantes a aprender o conceito de limites de funções. A elaboração das atividades baseou-se nos dados obtidos nas respostas dos estudantes no 1.º questionário. Conforme os dados coletados, estruturamos esta seção em três subseções para explicitar e analisar os dados, conforme apresentado a seguir.

Na subseção 4.2.1 apresentamos, resumidamente, as atividades realizadas no ciclo de estudos, conforme a data e o tempo de execução, acrescido de alguns comentários a respeito de cada atividade.

Na subseção 4.2.2 apresentamos as respostas dos estudantes sobre o conceito de limites de funções em dois momentos: no primeiro apresentamos os conceitos iniciais e no segundo os conceitos finais. Os dados foram divididos por categorias extraídas das respostas dos estudantes. Salientamos que esta tarefa do ciclo foi feita com base nas respostas dos estudantes à 5.ª questão da Parte 3 – Função e Limites de funções, do 1.º questionário, no qual foi pedido o significado de limite de uma função. Nas respostas dos estudantes detectamos muitas informações corroboradas na literatura sobre assunto, fato que levou a repetirmos a pergunta no ciclo de estudos.

De modo semelhante à subseção anterior, também a subseção 4.2.3 foi dividida em dois momentos: no primeiro, os estudantes fizeram mapas conceituais sobre o tema limites de funções, os quais denominamos de mapas conceituais iniciais e, no segundo, refizeram o mapa conceitual inicial ou construíram outro mapa conceitual, o qual denominamos de mapa conceitual final. Seguidamente, a partir de cada mapa conceitual final construído, fizemos grupos e construímos o que chamamos de mapa conceitual coletivo, com todos os participantes opinando, construindo e discutindo sobre a construção de um mapa único e feito coletivamente pela turma.

#### 4.2.1. Atividades desenvolvidas no ciclo de estudos

O ciclo de estudos foi realizado em 13 dias, com duração de 4 horas por dia, durante um período de três meses consecutivos – setembro de 2014 a novembro de 2014 – acrescido de uma atividade realizada, seis meses depois – Construção dos conceitos e mapas conceituais finais sobre limites de funções. A necessidade deste intervalo de tempo ocorreu devido ao recesso do término do semestre e período de férias dos estudantes, além da proposta de uma das atividades da pesquisa que buscava coletar informações dos alunos após um período de maturação com as atividades desenvolvidas no ciclo e dos novos conteúdos que viriam a estudar na disciplina do semestre seguinte.

No período de três meses supracitado, os estudantes desenvolveram paralelamente as aulas da disciplina de Introdução ao Cálculo – disciplina exigida obrigatoriamente na matriz curricular do curso. As atividades do ciclo de estudos se desenvolveram em turnos diferentes, ou seja, as atividades do ciclo ocorreram no turno matutino numa sala da Universidade reservada para esse propósito, enquanto as aulas de Introdução ao Cálculo ocorreram no turno vespertino no prédio do pavilhão de aulas da Universidade.

A partir da análise das respostas do 1.º questionário, que teve um caráter diagnóstico, sentimos a necessidade de efetuar uma revisão de conteúdos matemáticos relacionados ao ensino básico, como funções e suas construções gráficas, módulo, equações, inequações, além do uso de *softwares* de matemática, pois, conforme os resultados anteriores, eram pouquíssimos os alunos que tiveram contato com esta tecnologia.

Apresentamos resumidamente na Tabela 29 as atividades desenvolvidas no ciclo de estudos, juntamente com o dia, a carga horária utilizada e alguns breves comentários. (Ver a previsão das atividades em Anexo 4 – Ciclo de estudos).

Tabela 29 – Cronograma das atividaddes do ciclo de estudos

| Atividades do ciclo | Dia e Tempo de execução | Objetivos ou Comentários |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| Correção do 1.º questionário e Revisão de conteúdos matemáticos do ensino básico conforme apareciam nas questões do questionário. | 10/09/2014, 4 horas | À medida que corrigíamos as questões coletivamente com os participantes, apresentamos e exploramos os conteúdos matemáticos em que os estudantes demonstaram mais dificuldades. Para isto, utilizamos como auxílio *softwares* para a construção de gráficos. |
| Apresentação do paradoxo de Zenon, utilização dos livros: Guia mangá/Cálculo Diferencial e Integral e Cálculos para leigos. Uso de tecnologias informáticas. | 17/09/2014, 4 horas | Com o intutito de estimular uma aprendizagem intuitiva de limites de funções, utilizamos a ideia do paradoxo, as abordagens de tais livros e a utilização de *softwares* na construção e simulação gráfica de limites de funções. |
| Construir o conceito (inicial) de limite de funções | 24/09/2014 e 08/10/2014, 4 horas em cada dia | Os alunos construíram o conceito de limite de função, primeiramente, individualmente e posteriormente socializaram-se nos grupos com o intuito de construir um mapa conceitual do grupo. Esta atividade será relatada com maiores detalhes na subseção 4.2.2. |
| Elaborar um mapa conceitual (inicial) sobre limites de funções | 15/10/2014, 4 horas | Primieramente apresentamos um recurso tecnológico de informática para a construção de mapas conceituais – *software CMaptools* – e posteriormente, individualmente, cada estudante construiu seu mapa conceitual. A atividade será relatada com maiores detalhes na subseção 4.2.3. |
| Estudar em livros didáticos a definição formal de limites de funções | 22/10/2014, 4 horas | Buscar nos livros de Cálculo Diferencial e Integral (5 livros no máximo) a definição formal de limites de funções e associar com o conceito criado pelo grupo, observando as possíveis analogias; Discutir e compreender a definição de limites de funções de forma analítica e geométrica procurando associá-las. |
| Apresentação de uma lista de questões sobre limites de funções (ver em Anexo 4) | 29/10/2014, 4 horas | Ver alguns exemplos de resolução de limites de funções; Achar o limite de uma função por meio da definição, procurando associá-la sempre a uma representação gráfica. (Utilizar recursos de tecnologia informática) |
| Resolução das questões de uma lista de questões em conjunto com os estudantes | 05/11/2014, 4 horas | A resolução foi feita em sala com os estudantes e dirimindo as possíveis dúvidas |
| Correção da lista de questões | 10/11/2014, 4 horas | A resolução foi feita em sala com os estudantes e dirimindo as dúvidas |
| Aplicação do 2.º questionário | 11/11/2014, 4 horas | Avaliar as atividades desenvolvidas no ciclo de estudos |
| Elaboração dos mapas conceituais finais e do | 07/05/2015 e 15/05/2015, 4 horas em cada dia | Realizado após o retorno e finalização do semestre, altura em que os estudantes já |

| | |
|---|---|
| conceito de limites de funções (finais) | haviam cursado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Esta atividade será relatada com maiores detalhes nas subseções 4.2.2. e 4.2.3. |

Embora os dados evidenciem informações importantes para o estudo de limites de funções, focaremos em momentos que foram proeminentes para o objetivo desta pesquisa.

A primeira atividade do ciclo de estudos consistiu na correção do 1.º questionário. Os estudantes participaram atentos, destacando-se a correção da questão 2, da Parte 2, pois nesta questão foi observado que nenhum estudante conseguiu achar a lei da função e apenas um estudante conseguiu fazer o gráfico a partir dos valores de $x$ e $f(x)$ de uma tabela dada. Na questão, pedia-se para encontrar uma lei $-\ f(x) = 16\left(\frac{3}{2}\right)^x -$ de associação para a função e que fizessem a representação gráfica dessa função. Como a lei da função é uma exponencial, os estudantes disseram que tinham estudado as funções exponencial, logarítmica e modular recentemente na disciplina de Introdução ao Cálculo e que, ao responderem o questionário, eles não tinham, ainda, o conhecimento destas funções, o que explica o insucesso dos estudantes neste quesito do questionário.

Com base nas revisões de conteúdos e no tratamento sobre os conceitos matemáticos revisados na disciplina de Introdução ao Cálculo, pedimos aos estudantes que revissem a questão e tentassem encontrar a lei, uma vez que agora eles já tinham conhecimento a respeito da função exponencial. Eles sentiram muita dificuldade para encontrar o valor de "$a$" correspondente à função exponencial elementar $f(x) = a^x$, pois só tinham visto na disciplina valores inteiros para o "$a$". Entretanto, este não era o caso da questão, uma vez que seus valores se tornavam crescentes à medida que o $x$ também crescia. Por um tempo os estudantes ficaram pensativos e reflexivos a respeito da questão, até que o estudante Mirosmar deduziu de forma eficiente que a variação, nos valores de $f(x)$ da tabela, de um termo para o outro consecutivamente, era o valor inteiro mais 50% desse valor, ou seja, o primeiro valor de $f(x)$ é 16, o segundo 24, o terceiro 36 e assim sucessivamente. Porém, ele não conseguiu encontrar a lei. Já o estudante Lázaro identificou que a lei era uma progressão geométrica de razão 1,5 ou $\frac{3}{2}$, Albert confirmou o resultado de Lázaro e afirmou que a progressão geométrica justifica o crescimento da função indicado na tabela, e assim encontraram a lei da função procurada.

Numa outra questão sobre o limite de uma função, o estudante Riquelme confirmou o seu bom desempenho no 1° questionário respondendo à questão e resolvendo uma inequação modular no quadro para os demais colegas participantes. Salientamos que em todas as questões que envolviam construções gráficas fizemos uso dos *softwares Winplot* e *GeoGebra*.

Em outro momento, estudamos a construção de gráficos de funções elementares auxiliados pelos *softwares Winplot* e *GeoGebra*. Por exemplo, nas funções lineares utilizamos funções do tipo $f(x) = x, f(x) = x + 3, f(x) = x - 3$ e $f(x) = ax + b$, modificando os parâmetros $a$ e $b$ e verificando as mudanças nas representações gráficas conforme os valores desses parâmetros. Nas funções quadráticas procedemos de forma análoga às funções lineares, porém usando a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e acrescentando o parâmetro "$c$". Para as funções modulares tomamos como modelo a função $f(x) = |x|$ e construímos e analisamos os gráficos das funções $f(x) = |x + 2|, f(x) = |x - 2|, f(x) = |x \pm 2| \pm 3, f(x) = \big||x \pm 2| \pm 3\big|$. Finalmente, para as funções exponenciais partimos da função exponencial elementar $f(x) = a^x$ e continuamos com as funções $f(x) = a^{x \pm 2} \pm 3, f(x) = a^{|x \pm 2|} \pm 3$ e $f(x) = \left|a^{|x \pm 2|} \pm 3\right|$.

Observamos que na atividade de construção gráficos, também apoiado nos *softwares Winplot* e *GeoGebra*, os alunos visualizavam alguns resultados e construções que sem o uso de tecnologia, provavelmente, eles não seriam capazes de imaginar ou até mesmo de abstrair a representação gráfica destas funções com tamanha qualidade e características como foram apresentadas nos *softwares*. Dos resultados observados, podemos destacar Riquelme, que conjecturou a construção de diversos gráficos. Aragão conseguiu visualizar os gráficos com maior facilidade, ainda mais quando era definida uma função a partir do gráfico da outra, e Saulo demonstrou facilidade nas visualizações gráficas das funções.

Posteriormente, apresentamos o paradoxo de Zenon com o objetivo que os estudantes pudessem compreender a existência de uma quantidade de números infinita num intervalo numérico e indiretamente queríamos passar a noção intuitiva de limites. Ainda, para esta atividade, fizemos construções e simulações nos *softwares Winplot* e *GeoGebra* e utilizamos os livros – guia mangá/Cálculo Diferencial e Integral e Cálculos para leigos — como referência.

Discutimos o significado das palavras "tender", infinito, aproximar e limite. Nesta atividade tiveram destaque os estudantes Nana e Martins, pois ambos demonstraram conhecimentos sobre limites: Martins demonstrou conhecimento sobre limites laterais e Nana sobre o conceito de limites de funções.

Num outro dia do ciclo de estudos começamos com uma revisão sobre o conceito de limites de sequências e de limites de funções. Utilizamos, para tal, o gráfico da função $f(x) =$

$\frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)}$ (Iezzi, Murakami, & Machado, 2004, p. 21), definida para todo o real $x \neq 1$. No livro constavam as tabelas, apresentadas abaixo, para mostrar de forma intuitiva o limite desta função, nas aproximações de $x$ tendendo para 1. Utilizamos o *GeoGebra* para mostrar, por meio da simulação, a ideia intuitiva do conceito de limite revisamos, também, a ideia dos limites laterais, no caso à direita e à esquerda de $x = 1$.

| $\boldsymbol{x}$ | 0 | 0,5 | 0,75 | 0,9 | 0,99 | 0,999 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 2 | 2,5 | 2,8 | 2,98 | 2,998 |

| $\boldsymbol{x}$ | 2 | 1,5 | 1,25 | 1,1 | 1,01 | 1,001 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | 4 | 3,5 | 3,2 | 3,02 | 3,002 |

Nas resoluções de limites de funções, pela definição, merece destaque os questionamentos e dúvidas de alguns estudantes, como Aragão, por exemplo, que perguntou se sempre o $\delta$ será metade de $\varepsilon$, pois na resolução dos limites de funções, feitas como exemplo e retiradas de livros, geralmente acontecia isso, ou seja, para o valor de $\varepsilon$ dado, achava-se o valor $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, pois a estratégia de resolução das questões sempre envolvia esta relação.

Já o estudante Albert confundiu o coeficiente angular das funções com a relação entre os valores de $\varepsilon$ e $\delta$, pois como a função tinha um coeficiente angular igual a 2 e $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, ele pensou numa possível relação. A este respeito, foi salientado que aquilo aconteceu naquele momento em particular, pois em outros casos a situação seria diferente e que o ocorrido não se caracteriza como uma regra ou padrão. Tendo consciência das percepções dos estudantes em relação a resolução dos limites por definição, tivemos o cuidado de resolver outros limites de funções através da definição em que a relação de $\delta$ e $\varepsilon$ fosse diferente de $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, caso contrário, isso poderia resultar numa aprendizagem mecânica ou até mesmo num obstáculo epistemológico.

Em relação à implementação das atividades, ocorreram observações de forma participante, ou seja, o pesquisador mediava a condução das atividades no ciclo de estudos e ao mesmo tempo observava os acontecimentos em torno do desenvolvimento das atividades executadas pelos estudantes participantes.

Quanto ao que foi planejado no ciclo de estudos, desenvolvemos quase todas as atividades previstas, entretanto, não tivemos tempo para estudar algumas das propriedades de limites, limites infinitos e no infinito e assíntotas. Entendemos a importância destes conteúdos, mas aproveitamos o tempo que seria destinado a estes conteúdos para estudar com maior profundidade o conceito de limites de funções e as suas particularidades, tanto na compreensão da sua definição quanto na resolução de limites de funções.

Apresentaremos na próxima subseção os dados obtidos das respostas dos aprendizes quanto ao conceito de limites de funções.

### 4.2.2. Conceitos dos participantes sobre limites de funções

Conforme a questão 5, da Parte 3 do 1.º questionário, foi perguntado aos estudantes o significado de limites de funções, tendo-se obtido diversas respostas, algumas próximas das obtidas em outras pesquisas. Resolvemos, então, como atividade do ciclo de estudos, repetir a pergunta. Assim, foi pedido aos estudantes que reescrevessem o conceito de limite de uma função numa folha de papel, que denominamos de "conceitos iniciais", e a entregassem ao pesquisador. A ideia desta tarefa teve em vista uma aprendizagem significativa da definição de limites de funções, associada às imagens mentais e representações pessoais dos participantes num primeiro contato com a definição formal deste conteúdo.

No início da tarefa, muitos estudantes alegaram que não se lembravam do que tinham escrito no 1.º questionário ao serem indagados sobre o significado de limites de funções. Todavia, o pesquisador tranquilizou os estudantes e falou que não precisava ser igual ao que tinham escrito no questionário, pois quando eles o fizeram, havia muitas questões no questionário para responder e que, possivelmente, poderiam ter respondido a esta questão de forma alheia, dando pouca atenção. Por outro lado, naquela ocasião eles só teriam uma pergunta com que se preocupar em responder – a do conceito de limites de funções –, acreditando-se que os estudantes apresentariam uma resposta mais bem elaborada e mais focada no conceito pedido.

Nas aulas seguintes expusemos a definição de limites de funções e explicitamos, de forma detalhada, o enunciado da definição, uma vez que os estudantes, no 1.º questionário, demonstraram dificuldades na compreensão de conteúdos matemáticos que antecedem e são pré-requisitos para o estudo de limites de funções.

Ao final do ciclo de estudos devolvemos os "conceitos iniciais" estabelecidos pelos estudantes a afim de que eles pudessem reavaliá-los ou reescrevê-los, mais uma vez com suas palavras, apresentando, assim, o conceito de limites de funções — "conceitos finais". Com isso era esperado que, após terem estudado limites de funções no ciclo de estudos, eles reavaliassem os seus conceitos iniciais, complementando-os, corrigindo-os ou ignorando-os e assim pudessem construir com base nos seus possíveis subsunçores uma aprendizagem significativa sobre limites de funções.

Seguidamente fizemos uma análise por meio da comparação dos conceitos iniciais com os conceitos finais dos estudantes referentes a limites de funções. Daí, apresentaremos na forma de categorias, emergentes dos dados, uma discussão com a literatura pertinente ao assunto. Para isso, dividimos esta subseção em dois momentos: conceitos iniciais e conceitos finais.

**Conceitos iniciais**

No primeiro momento, ao qual chamarmos de conceitos iniciais, os participantes escreveram numa folha de papel o conceito do que eles achavam que eram limites de funções. Analisando as respostas dos estudantes em relação ao conceito de limites de funções, verificamos a presença de outros conceitos e palavras associados a ele, que talvez representem os subsunçores dos estudantes referentes ao conceito estudado.

Os conceitos matemáticos encontrados nas respostas dos estudantes foram função – $f(x)$, números, eixo $x$ e eixo $y$, valor de $x$, gráfico, $\varepsilon$, $\delta$, intervalos, limites laterais e $lim\, f(x)$. Quanto às palavras mais encontradas nas respostas dos estudantes, verificou-se que foram: tender (tende, tendendo, tenderá); esquerda; direita; relação; grau; máximo; menor valor; por cima; por baixo e valor.

Podemos dizer que muitos estudantes fizeram uso do termo aproximar e dos seus sinônimos e derivados para explicar o conceito de limites de funções, como vemos na resposta de Aragão:

> De acordo com o que já estudamos, quanto mais perto vamos chegando de um certo número no eixo $x$, mais próximo também será a distância do seu limite no eixo $y$, ou seja, fica mais próximo de um certo número em $y$. (Aragão).

Da mesma forma, as respostas de alguns estudantes dão a ideia de que o limite representa algo que se atinge, para e não ultrapassa, ou até mesmo a ideia do que se vai atingir sem ultrapassar, como vemos nas respostas seguintes: "É quando ele aproxima do número, mas não chega. Aonde também podemos utilizar o gráfico demonstrando os intervalos de $\varepsilon$ e $\delta$". (Lívia); "É delimitado um campo de ação para essa função e impor um ponto específico onde a função deve parar". (Saulo); "É a relação que ligam pontos de um gráfico, dando assim um limite de parada sem que se toca ao ponto principal" (Bella).

As respostas destes estudantes corroboram resultados análogos da literatura, apresentados pelos autores Tall e Vinner (1981) e Messias e Brandemberg (2012), que em suas pesquisas apresentam as mesmas ideias sobre o significado do conceito de limite de funções. Por exemplo, nos estudos de Tall e Vinner (1981), ao se perguntar aos estudantes do primeiro ano de um curso de matemática uma definição para $lim_{x \to a} f(x) = c$, eles apresentaram uma definição com características dinâmicas, ou seja, que os valores de $f(x)$ se aproximam de $c$ à medida que os valores de $x$ se aproximam de $a$. Os estudantes ainda fizeram uso nas respostas de palavras do tipo: “se aproxima”; “chega perto” e “tende para”, bastante semelhantes às respostas supracitadas em nossa pesquisa.

Cerca de trinta anos depois, Messias e Brandemberg (2012) repetiram a pergunta para um grupo de estudantes e, baseados em Tall e Vinner (1981), procuraram “verificar a *imagem conceitual* e *definição conceitual pessoal* dos mesmos, suas relações com a *definição conceitual formal* de limite de função e, sobretudo, se a *evocação* de um limite inalcançável faria parte das *imagens conceituais* desses indivíduos” (Messias & Brandemberg, 2012, p. 202, grifo dos autores). Analisando as respostas dos estudantes em relação ao conceito e definição de limites de funções, os autores concluíram em forma de duas evocações:

> [E1] A ideia de limite como sendo um valor a ser alcançado pela função por meio de constantes aproximações. Desse modo, o limite em determinado ponto é tido como um valor que *deve* coincidir com o valor da função nesse ponto, ou seja, $lim_{x \to p} f(x) = f(p)$;
>
> [E2] O limite é um valor, do qual a função se aproxima tanto quanto queiramos sem, no entanto, alcançá-lo. Isto é, $f(x) \neq L$. (Messias & Brandemberg, 2012, p. 207, grifo dos autores)

Já em nossa pesquisa, em relação aos conceitos mais citados, verificou-se que foram números, eixo do $x$ e eixo do $y$, gráfico e função. Já em relação às palavras mais citadas, estas foram esquerda, direita, valor e relação, como já vimos nas falas de Aragão, Lívia, Saulo e Bella, supracitadas. Além destas, destacamos as respostas de Lázaro e Riquelme:

> Pertencer a um limite de uma função quando um número qualquer no eixo $y$ e outro número no eixo $x$ com a condição por exemplo: no eixo $y$ tenho 1 e no eixo $x$ tenho um número entre 1 e 2. Todos os números que estiverem entre 1 e 2, ou seja, se aproximando de 2 pela esquerda saindo de 1 e se aproximando de 2 pela direita saindo de 3 fazem a relação com o número 1 no eixo $y$. (Lázaro)
>
> Se escolher um valor no eixo $x$ do gráfico dado e pegar qualquer valor tendendo a esse valor, tanto pela esquerda como pela direita, vou ter um valor no eixo $y$, tanto

por baixo como por cima. E esse valor se aproxima do limite estabelecido da função dada. (Riquelme)

Nas respostas de Lázaro e Riquelme percebemos a ideia intuitiva de limites na compreensão deste conceito, pois os estudantes se referiram à ideia de aproximação tanto no eixo $x$ como no eixo $y$, por meio de uma relação que, de fato, sabemos que é uma função e que esta estabelece valores correspondentes em $y$, dado certo $x$. Assim, podemos interpretar que existe uma analogia entre os resultados supracitados nesta pesquisa com os resultados encontrados por Tall e Vinner (1981) e Messias e Brandemberg (2012) em suas pesquisas.

Salientamos que alguns estudantes consultaram livros a fim de saber a resposta sobre o significado de limites e em alguns momentos discutiamos informalmente, em sala de aula, a ideia intuitiva de limites de funções. É possível que muitas destas respostas dos estudantes apresentem características desta informalidade e das discussões ocorridas em sala de aula durante as atividades do ciclo de estudos.

A resposta de Thamyres já demonstra uma ideia mais formal. Apesar de estar incorreta, a estudante apresenta elementos da definição formal de limite de funções:

> É dado através de uma função, tal que $lim\, f(x) \neq 0$ , para todo $\varepsilon > \delta$, e usada para definir o valor do limite quando $lim_{x \to 1} f(x) = 3$, entre outros valores do $lim\, f(x)$ e é também usada $\varepsilon > \delta$ para resolver a solução do $lim\, f(x)$.

Com este exemplo de Thamyres, corrobora-se Vinner (1991), quando o mesmo diz que:

> Para cada indivíduo uma definição conceitual gera a sua própria imagem conceitual (o que poderia, em noutro nome ser chamado de "imagem conceitual da definição"). Isto é, é claro, uma parte da imagem conceitual. Em alguns indivíduos, pode ser vazio ou praticamente inexistente. Em outros, pode, ou não, ser coerente relacionada com outras partes da imagem conceitual. (Tall & Vinner, 1981, pp. 2-3, grifo dos autores)

O autor ainda nos refere que, em alguns casos, o indivíduo passa a ter contato com a definição conceitual depois da construção da imagem conceitual, e seguidamente tem-se como consequência a construção de uma definição conceitual pessoal, diferente da definição conceitual formal do conceito, como ocorreu com a definição formal de limites de funções nas conclusões da pesquisa de Messias e Brandemberg (2012), em que os estudantes evocaram uma construção de definição conceitual pessoal de limites de funções, diferentemente da definição formal deste conceito. E de forma análoga, associamos estes resultados à resposta de Thamyres. Conforme Tall e Vinner (1981), é possível que esta estudante se tenha identificado *a* *priori* com a definição formal para depois construir sua "imagem conceitual da definição", a respeito de limites de funções.

**Conceitos finais**

No segundo momento tratamos da construção do que chamamos de conceitos finais. Nestes esperavamos dos estudantes um desempenho melhor, pois eles já tinham passado por diversas atividades no ciclo de estudos, inclusive um maior contato com a definição de limites de funções em várias representações, sejam elas numéricas, analíticas ou geométricas. Contudo, os dados obtidos não indicaram o desenvolvimento esperado, antes um aprimoramento dos dados iniciais e com pouca evolução em relação a estes.

Foi observado nas respostas dos estudantes a atenção deles ao limite de uma função quando $x$ tende para "a" ser igual ou não ao valor da função em "a", ou seja, $lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ou $lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$. Como podemos ver nos seguintes trechos abaixo.

> Se temos $x$ e queremos saber o limite dela, temos que estudar tudo o que acontece em volta dela. Porém, o valor de $x$ não nos interessa. Daí temos que observar todos os valores que se aproximam de $x$ pela esquerda e se distanciam do zero, no eixo $y$ e os que se aproximam de $x$ pela direita e ficam mais próximo do zero. Mas somente um valor dentro desse intervalo pode nos interessar. Deve se estudar o gráfico da função para achar o intervalo e perceber quais valores existem nos intervalos. (Lázaro)

> Lembrando que ao calcular o limite não importa o que aconteça no ponto $x$, mas sim o que acontece em torno desse ponto. Por isso, quando falamos que número "tende" a ser $n$, por exemplo, o número nunca vai ser $n$, mas se aproxima muito do número $n$. (Nana)

> Pude perceber depois de iniciada a pesquisa que o limite de uma função não está voltado para o ponto em si, mas sim em o que está em sua volta (números bem próximos e pequenos). (Saulo)

Conforme as respostas que estes três estudantes evidenciaram, de fato, não necessariamente deve acontecer sempre que o $lim_{x \to a} f(x)$ seja igual a $f(a\ )$. Embora a literatura indique (e.g., Tall & Vinner, 1981; Messias & Brandemberg, 2012; Juter, 2006; Cornu, 2002) que há várias situações em que os alunos fazem certa confusão entre o valor do limite no ponto com o valor da função nesse mesmo ponto, ou seja, $lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, tal não se confirmou nesta pesquisa.

Dos dados coletados podemos dizer que muitos dos conceitos iniciais foram repetidos nos conceitos finais, como por exemplo: números, eixo $x$ e eixo $y$, $\varepsilon$, $\delta$, função, gráficos, valor de $x$, intervalos e ponto. Além destes, houve outros conceitos citados como módulo, infinito, equação, imagem e plano cartesiano. Estes últimos apareceram nas respostas dos estudantes em resultado das atividades realizadas no ciclo de estudos, pois nestas ocorreram revisões de conteúdos matemáticos em que foram estudados estes conceitos.

Esse processo de resgatar prováveis conhecimentos que estejam "adormecidos" e que são facilmente relembrados, caracteriza uma das propostas para uma aprendizagem significativa. No caso dos conceitos que são relembrados, eles caracterizam-se como subsunçores, ou seja, ancoradouros para os novos conhecimentos interagirem com eles gerando um produto modificado desta interação e consequentemente uma aprendizagem com significado (Ausubel et al., 1980).

As palavras encontradas nas respostas dos estudantes foram as mesmas referidas nos conceitos iniciais. Entretanto, houve mais respostas com as palavras: esquerda, direita, valores e derivações do termo aproximar, como por exemplo: mais próximo; em volta; próximo; se aproxima e bem próximos, como vimos nas respostas de Lázaro, Nana e Saulo supracitadas.

Podemos ainda ver os termos aproxima e próximos nas respostas dos estudantes Aysha e Niul: "É tudo aquilo que se aproxima de um determinado ponto, tanto pela direita quanto pela esquerda" (Aysha); "Dado um ponto, encontrar valores próximos a este por ambos os lados (direita e esquerda)" (Niul).

Tendo em vista que nenhum estudante conseguiu conceituar limites de funções corretamente, podemos afirmar que dentre as respostas mais próximas do conceito de limite de funções encontramos as de Nana e Saulo, que foram citadas acima, e ainda as de Albert, Lívia, Nelson e Thamyres, que também estiveram mais próximas do conceito solicitado, conforme vemos abaixo:

> Dado um ponto, o limite define os valores de $f(x)$ quando $x$ tende a algum número tanto pela esquerda, quanto pela direita. Onde $\delta$ está no eixo $y$ e $\varepsilon$ está relacionado ao eixo $x$. (Albert)

> Tendo que o limite de uma função quando $x$ tende para "$a$" é um numero real $L$, logo os números reais da imagem $f(x)$ permanecerem próximos de $L$, para vários valores de $x$ próximos de $a$. Sendo que o módulo de uma função menos o limite tem que ser maior que $\varepsilon$ e o módulo de $x - a$ maior que $\delta$. (Lívia)

> O limite de uma função é quando o intervalo no eixo "$x$" definida por $\delta$ se aproxima tanto pela direita quanto pela esquerda dos intervalos do eixo "$y$" definidos por $\varepsilon$, tanto de cima para baixo quanto de baixo para cima. (Nelson)

> Dada uma função, podemos dizer que esta função possui um limite $L$ quando $x$ tende para um valor, tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| <$

> $\varepsilon$, sendo $lim f(x) \neq 0$. De modo que o valor do $lim\, f(x)$ é também usado $\varepsilon > \delta$ para resolver a solução do $lim f(x)$." (Thamyres)

Albert equivocou-se, trocando $\delta$ por $\varepsilon$. Além disso, enganou-se quando disse que o limite define os valores de $f(x)$. Lívia tenta usar elementos da definição formal, entretanto, cria uma sentença falsa e ininteligível matematicamente. Nelson afirma erroneamente que o limite de uma função é um intervalo no eixo $x$ correspondente a um intervalo no eixo $y$. E, por fim, Thamyres, que chegou mais próximo do conceito de limites utilizando elementos da definição formal de limites, na parte final se engana ao afirmar que "De modo que o valor do $lim f(x)$ é também usado $\varepsilon > \delta$ para resolver a solução do $lim f(x)$". Ressaltamos que esta estudante, desde os conceitos iniciais, utilizou parte da definição para estabelecer o conceito de limites de funções.

> A exploração dos conceitos é posta como uma condição essencial para o ensino quando se espera uma aprendizagem significativa dos estudantes, pois, a aprendizagem da Matemática acontece, efetivamente, quando o estudante consegue atribuir significado aos conceitos ou idéias matemáticas e passa a usar e compartilhar esses significados. (Almeida, Borssoi & Fatori, 2005, p. 243)

Os dados obtidos nos conceitos finais serviram também para analisar a aprendizagem dos estudantes, pois longe de diagnosticarmos uma aprendizagem significativa, embora tivesse havido uma pequena evolução dos estudantes em relação aos conceitos iniciais, acreditamos que atividades com esta característica de estudar um conceito específico proporcionou aos estudantes diversas descobertas matemáticas e a fixação de conteúdos que se encontravam esquecidos. Desta forma, alguns significados foram reavaliados ou reconstruídos com o intuito de obter uma aprendizagem significativa do conceito de limites de funções.

Na comparação dos conceitos iniciais com os finais nas respostas dos participantes, buscamos identificar avanços e compreensões do conceito de limites de funções pelos participantes. Entendemos que as atividades do ciclo de estudos tenham favorecido a ocorrência de uma aprendizagem significativa. Para isso, procuramos evidenciar nas respostas dos aprendizes traços que a caracterize como uma aprendizagem significativa para os estudantes participantes.

Analisamos as respostas de alguns participantes individualmente, especialmente dos que apresentaram certa evolução e desenvolvimento na aprendizagem do conceito de limites de funções, lembrando o que eles fizeram, individualmente, no início do ciclo de estudos, o que chamamos de conceito inicial, e no final do ciclo de estudos devolvemos o conceito inicial que eles tinham feito anteriormente, a fim de que eles pudessem acrescentar, reformular ou conceituar de modo diferente do conceito inicial, e que denominamos de conceito final.

Em relação aos conceitos apresentados por Albert temos:

> Dado um ponto, o limite define os valores de $f(x)$ quando $x$ tende a algum número tanto pela esquerda, quanto pela direita. (Conceito inicial)

> Dado um ponto, o limite define os valores de $f(x)$ quando $x$ tende a algum número tanto pela esquerda, quanto pela direita. Onde $\delta$ está no eixo $y$ e $\varepsilon$ está relacionado ao eixo $x$. Dizemos que $x$ tende a número tanto pela esquerda quanto pela direita.(Conceito final)

Nos conceitos de Albert fica claro que ele utilizou o conceito inicial e acrescentou o $\delta$ e o $\varepsilon$ no conceito para construção do conceito final. Entretanto, como já foi dito antes, ele trocou a relação do $\delta$ e do $\varepsilon$ com os eixos coordenados. Mas, analisando do ponto de vista de desenvolvimento, percebemos a inclusão de um novo conhecimento no conceito de limites de funções estruturado na mente do estudante. Podemos dizer que, possivelmente, ele tenha utilizado dois processos: diferenciação progressiva e reconciliação integradora (Ausubel et al. 1980), quando apresentou um acréscimo no conceito solicitado, sendo que a diferenciação surge na relação do $\delta$ e do $\varepsilon$ com os eixos coordenados e a reconciliação integradora intervém quando ele junta esta nova informação com a que ele tinha escrito anteriormente no conceito inicial.

Em relação aos conceitos apresentados por Aragão, temos:

> De acordo com o que já estudamos, quanto mais perto vamos chegando de um certo número no eixo $x$, mais próximo também será a distância do seu limite no eixo $y$, ou seja, fica mais próximo de um certo número em $y$. (Conceito inicial)

> Em um plano cartesiano, representando uma função para qualquer valor que pegarmos no eixo $x$, encontraremos um correspondente no eixo $y$, ou seja, para cada $\varepsilon$ temos um $\delta$ e que este $\delta$ será sempre menor que o $\varepsilon$. (Conceito final)

Nos conceitos apresentados pelo estudante Aragão, vemos a presença dos conceitos de $\delta$ e $\varepsilon$ acrescentados também ao conceito final analogamente à ideia apresentada por Albert. Entretanto, no conceito final, o estudante não explicitou como seria a relação do $\delta$ e $\varepsilon$ com os eixos coordenados. Todavia, ele afirma que da relação entre $\delta$ e $\varepsilon$, "o $\delta$ será sempre menor que o $\varepsilon$". Talvez esta resposta tenha sido influenciada pelas atividades resolvidas em sala de aula, nas quais o valor de $\delta$ foi sempre menor do que o valor de $\varepsilon$.

Em relação aos conceitos apresentados por Lívia temos:

É quando ele aproxima do número, mas não chega. Aonde também podemos utilizar o gráfico demonstrando os intervalos de $\varepsilon$ e $\delta$. O conceito de limites é quando a $f(x)$ de limites tende a aproximação do número natural, em que também pode ser representado no gráfico, demonstrando as funções e o intervalo que existe em $\varepsilon$ tendendo a $\delta$. Se caso tivermos uma função de limites laterais. É quando ele aproxima do número, mas não chega. Aonde também podemos utilizar o gráfico demonstrando os intervalos de $\varepsilon$ e $\delta$. (Conceito inicial)

Tendo que o limite de uma função quando $x$ tende para "$a$" é um número real $L$, logo os números reais da imagem $f(x)$ permanecerem próximos de $L$, para vários valores de $x$ próximos de $a$. Sendo que o módulo de uma função menos o limite tem que ser maior que $\varepsilon$ e o módulo de $x - a$ maior que $\delta$. (Conceito Final)

Comparando o conceito inicial com o final da estudante Lívia, percebemos uma evolução conceitual, pois no conceito inicial a estudante coloca um emaranhado de frases na tentativa de conceituar limites de funções, embora em algumas passagens a estudante cite elementos da definição de limites de funções. Já no conceito final a estudante apresenta a ideia da definição de limites de funções, embora seja em linguagem corrente e não em linguagem matemática. Mas é evidente um desenvolvimento conceitual da estudante em relação ao conceito de limites de funções, uma vez que o seu conceito final se aproxima da definição de limites.

Ainda na entrevista com a estudante Lívia, a mesma afirma sempre colocar a definição de limites de funções escrita no papel e que a partir dela resolvia as questões sobre limites de funções nas tarefas desenvolvidas no ciclo de estudos, conforme vimos neste trecho da sua fala: "acho que em questão daquela definição porque na questão das atividades, primeiro eu colocava ela (definição) para mim [eu] saber responder as atividades em questão" (Trechos da fala de Lívia na entrevista).

É nessa perspectiva que verificamos um desenvolvimento na construção do conceito, uma vez que o conceito final é bem diferente daquele que a estudante escrevera no conceito inicial. Podemos dizer que ela soube utilizar as informações existentes em sua estrutura cognitiva e por meio de uma interação com as novas informações, obtidas durante o ciclo de estudos, com os seus subsunçores construiu um novo conceito – o conceito final – que se aproxima da definição formal de limites de funções, conforme vimos na sua resposta supracitada.

Provavelmente, as atividades do ciclo de estudos tenham sido potencialmente significativas, de modo que fizeram com que a estudante Lívia pudesse incorporar novos conhecimentos e interagisse com os conhecimentos prévios relevantes em sua estrutura cognitiva. Não podemos esquecer também da predisposição da participante em querer aprender o conteúdo. Na entrevista feita com a estudante, quando lhe foi perguntado o que ela aprendeu, ela informou que aprendeu sobre o conceito e a definição de limites, como vimos no trecho de sua fala: “Assim, o importante foi o conceito, definição e o conceito com as ferramentas como o *Winplot*, *GeoGebra*, também a tabela no *Excel* foi muito importante, foi isso.” (Trechos da entrevista com Lívia).

Em relação aos conceitos apresentados por Riquelme, temos:

> Dado um gráfico, no qual esse gráfico seja de uma função, e fixando um valor no eixo $x$, sempre esse valor $x$ estará em função de um valor no eixo $y$. Ou seja, qualquer valor escolhido no eixo $x$, eu vou ter um valor associado no eixo $y$. Se escolher um valor no eixo $x$ do gráfico dado, e pegar qualquer valor tendendo a esse valor tanto pela esquerda como pela direita, vou ter um valor no eixo $y$, tanto por baixo como por cima. E esse valor se aproxima do limite estabelecido da função dada. (Conceito inicial)

> O limite de uma função pode ser representado pela forma analítica $lim_{x \to 1} f(x) = L,$ isso quer dizer quando $x$ tende há um valor de $y$ e cada vez mais próximo de “$L$”, no qual o “$L$” é o limite da função. Existe, também, algo que pode ser ressaltado, que para ter um limite quando $x$ tende há um valor “$a$” na função $f(x)$ o limite seja “$L$”, tem que acontecer duas coisas: O limite quando $x$ tende há um valor “$a$” pela direita e pela esquerda tem que ser igual, sendo igual vai existir limite, caso contrário, não há limite. (Conceito final)

O estudante Riquelme apresentou uma ideia intuitiva sobre o conceito de limites de funções no seu conceito inicial. Já no conceito final o estudante procurou formalizar a ideia que tinha exposto no conceito inicial, utilizando uma simbologia matemática formal com os elementos da definição de limites de funções. Apesar de a resposta se apresentar um pouco confusa, podemos perceber a associação que o estudante fez com a existência ou não do limite à igualdade dos limites laterais. Entretanto, o estudante não utilizou os conceitos $\varepsilon$ e $\delta$. É importante salientar que o estudante fez uma representação gráfica no conceito final para explicitar melhor o que tinha escrito, conforme vimos abaixo na Figura 14.

$f(x) = x + 1,$ $\quad lim_{x \to a} f(x) = L$ $\quad$ e $\quad lim_{x \to 1} x + 1 = 2.$

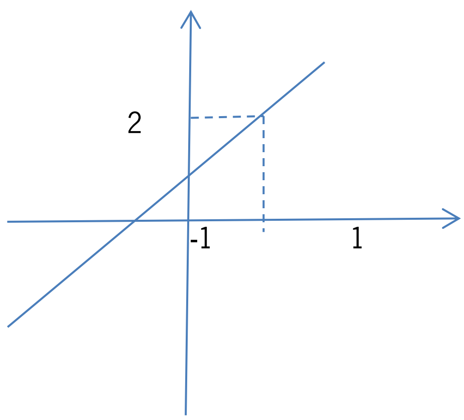


Figura 14 – Uma representação gráfica do conceito de limites de funções (Riquelme)

> Acredita-se que quando o estudante é estimulado a pensar sobre um determinado objeto surgem várias representações mentais como imagens de representações visuais, impressões, experiências e propriedades, as quais podem ser elaboradas, pelos alunos, por intermédio de processos de pensamento sobre representações mentais (Rosa & Costa, 2013, p. 3)

A ideia apresentada pelos autores vem determinar o que é a imagem conceitual segundo Tall e Vinner (1981). Conforme o conceito escrito pelo estudante Riquelme e a sua representação gráfica para explicitar o conceito de limite de uma função, percebemos elementos da imagem conceitual existente na estrutura cognitiva do estudante, pois a necessidade de outra representação diferente da analítica, exposta por ele, se fez necessário para compreendermos como o estudante concebe o conceito de limites de funções.

> Estes processos, quando aplicados ao pensamento matemático avançado, são, muitas vezes, processos matemáticos e psicológicos em simultâneo. Por exemplo se considerarmos a construção de um gráfico de uma função, executamos um conjunto de processos que seguem certas regras que podem ser expressas em linguagem matemática, mas em simultâneo estamos a criar uma imagem mental do gráfico da função. Ambas as imagens criadas (mental e matemática) estão relacionadas e uma não pode aparecer sem a outra, pelo que elas representam os aspectos matemático e psicológico deste processo. (Domingos, 2006, p. 56)

É evidente no conceito apresentado por Riquelme a ideia apresentada nos esquemas de células imagem conceitual com a definição conceitual de Vinner (1991), no qual o estudante estabelece uma relação entre as duas células para conceituar o limite de uma função. Além da tentativa de apresentar uma ideia dinâmica na apresentação do conceito de limites, ou seja, as aproximações dos $\varepsilon's$ e dos $\delta's$ no plano cartesiano, conforme vimos nos estudos de Tall e Vinner (1981), Messias e Brandemberg (2012) e Cornu (1983).

Em relação aos conceitos apresentados por Saulo, temos:

> É delimitado um campo de ação para essa função e impor um ponto específico onde a função deve parar. (Conceito inicial)

> Pude perceber depois de iniciada a pesquisa que o limite de uma função não está voltado para o ponto em si, mas sim em o que está em sua volta (números bem próximos e pequenos). (Conceito final)

Apesar dos breves conceitos sobre limites em termo de palavras, alguns trechos merecem destaque na resposta do estudante Saulo, como por exemplo: o estudante apresentou, inicialmente, a ideia de limite como "um ponto específico onde a função deve parar". Esta percepção nos remete aos estudos de outros pesquisadores já indicados na fundamentação teórica, como o de Messias e Brandemberg (2012), Juter (2006) e Cornu (1983; 2002), pois o fato de que a "função deve parar" significa que o estudante entende a palavra limite como algo que não pode ser ultrapassado ou até mesmo pela terminologia da palavra limite, segundo o estudante, indica o limite como "algo" que chega a certo valor e não o ultrapassa. Em relação ao conceito final, é visto que a percepção do estudante mudou, que o estudo do limite de uma função não está centrado num ponto específico, e sim na vizinhança deste ponto e não mais a ideia do ponto em que a função deve parar e/ou ultrapassá-lo.

Em relação aos conceitos apresentados por Thamyres, temos:

> É dado através de uma função, tal que $limf(x) \neq 0$, para todo $\varepsilon > \delta$, e usada para definir o valor do limite quando $lim_{x \to 1} f(x) = 3$, entre outros valores do $lim\, f(x)$ e é também usada $\varepsilon > \delta$ para resolver a solução do $limf(x)$. (Conceito inicial)

> Dada uma função, podemos dizer que esta função possui um limite $L$ quando $x$ tende para um valor, tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, sendo $limf(x) \neq 0$. De modo que o valor do $lim\, f(x)$ é também usado $\varepsilon > \delta$ para resolver a solução do $lim\, f(x)$. (Conceito Final)

A estudante utiliza outros conceitos para definir limites de funções no conceito inicial, entretanto, sem coerência com o significado da própria definição de limites de funções. Ressaltamos que a estudante repetia a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, portanto, ela já tinha estudado o conteúdo e possivelmente este tenha sido o motivo pelo qual utilizou partes da definição de limites, só que sem coerência.

Por outro lado, no conceito final a estudante já conceituou de forma "melhorada" e com mais coerência com a definição formal de limites de funções. Ainda na parte final do seu conceito de limites de funções, a estudante repete parte do conceito inicial, talvez porque não tinha clara a definição de limites de funções em sua estrutura cognitiva ou não aprendeu com significado a definição de limites de funções quando estudou a disciplina pela primeira vez, ocasionando numa aprendizagem mecânica, memorizando partes e elementos da definição sobre limites de funções, o que a fez os repetir erroneamente no conceito final.

A análise dos dados da estudante Thamyres, no conceito de limites de funções, tem semelhança ao que Vinner (1991) diz quando o indivíduo aprende com base apenas na definição conceitual, ou seja, a nova informação estabelece relação apenas com a definição conceitual, não se relacionando com a imagem conceitual e posteriormente resultando numa resposta memorizada que só tinha passado pela célula da definição conceitual. Além disso, as respostas da estudante nos remete à teoria da aprendizagem significativa, na qual uma aprendizagem mecânica acontece arbitrariamente, literalmente e sem significado, apenas por memorizações. E este tipo de aprendizagem fica evidente nas respostas da estudante Thamyres, que ao estudar a disciplina pela primeira vez, possivelmente, aprendeu o conteúdo de limites de funções só pela definição.

Assim, as atividades do ciclo de estudos permitiram-lhe rever este conteúdo e remodelar os subsunçores necessários para relacionar com o conceito que estava sendo estudado pela segunda vez. Este fato que favoreceu a sua resposta no conceito final, no qual o significado de limites de funções aparece com maior clareza e coerência.

Num momento de socialização os estudantes leram em sala de aula, uns para os outros, os conceitos que escreveram sobre limites de funções, com o intuito de socializarem entre si os diferentes saberes e conhecerem, por meio dos colegas, novos conceitos ou até mesmo a construção de subsunçores relevantes. Desta socialização foram eleitos pelos participantes os conceitos dos estudantes Riquelme e Aragão, por estarem mais estruturados e apresentarem mais coerência com a definição de limites de funções.

Assim, as atividades do ciclo de estudos contribuíram positivamente para o desenvolvimento e a aprendizagem significativa dos estudantes referente ao conceito de limites de funções, tendo os conceitos finais sido comparados aos conceitos iniciais, pois, na maioria dos casos, os estudantes apresentaram conceitos finais mais consolidados e coerentes com a definição de limites de uma função.

### 4.2.3. Mapas conceituais dos participantes sobre limites de funções

Conforme abordado na fundamentação teórica, os mapas conceituais "são diagramas conceituais hierárquicos destacando conceitos de certo campo conceitual e relações (proposições) entre eles. São muito úteis na diferenciação progressiva e na reconciliação integrativa de conceitos e na própria conceitualização" (Moreira, 2013a, p. 23).

Com isso em mente, pensamos numa atividade em que os estudantes construíssem dois mapas conceituais – mapa conceitual inicial e mapa conceitual final – sobre o conceito de limites de funções, analogamente ao que fizeram em relação aos conceitos iniciais e finais deste conteúdo.

Para a construção dos mapas foi necessário o uso de uma tecnologia informática e uma explanação do que é um mapa mental e conceitual, apresentando suas diferenças, características e aplicabilidade. Discutimos sobre mapas conceituais e mentais, foram apresentados exemplos no quadro e com base no aplicativo *Cmaptools*[12] cada estudante manipulou o programa e passamos algumas informações a respeito do uso e formatação do programa *Cmaptools*.

No início do ciclo de estudos foi pedido aos estudantes que construíssem um mapa conceitual sobre limites de funções e alguns dos participantes consultaram livros em busca da definição formal de limites de funções. Com isso, percebemos alguns termos e elementos matemáticos simbólicos da definição formal de limites nos mapas conceituais dos participantes.

É importante salientar que a construção de um mapa conceitual é algo pessoal, de modo que só terá significado se o autor explicitar como foi construído e o que representa, não existindo um modelo padrão, nem um melhor ou pior mapa conceitual, são características pessoais e idiossincráticas dos participantes que são relevantes. Respeitando este quesito, achamos melhor que os estudantes tivessem certa tranquilidade e tempo para construí-los, fosse em casa ou em outro local que achassem convenientes. Assim, em seguida, fizemos uma análise geral dos mapas conceituais, destacando aqueles que fossem necessários para responder às questões de investigação da pesquisa.

**Mapas conceituais iniciais**

Em relação aos mapas conceituais iniciais, foi pedido aos participantes que eles fizessem, individualmente, a construção de um mapa conceitual do conceito de limites de funções utilizando o programa *Cmaptools*. Esta tarefa ocorreu logo após eles terem estabelecido o conceito de limites de funções. Sendo assim, como já foi salientado, alguns estudantes buscaram em livros a definição formal do conceito de limites de função, sendo possível realizar esta atividade em outro local, fora da Universidade.

Uma semana depois, alguns estudantes trouxeram o mapa pronto, outros sentiram dificuldades com o programa e construíram o mapa utilizando outra tecnologia ou até mesmo o lápis e papel. Fizemos um debate sobre as dificuldades e problemas enfrentados para a construção do mapa, seguido das apresentações individuais, sendo que, de início, os participantes se sentiram inibidos de apresentarem seus mapas individuais. Neste processo

[12] Programa computacional que serve para a construção de mapas conceituais e mentais, o qual pode ser obtido no seguinte endereço: cmap.ihmc.us/.

fizemos o papel de mediador, pois a troca de informações foi bastante motivadora para alguns estudantes que alegavam não conhecer o assunto e se mostraram preocupados com os seus mapas e se estes estavam coerentes com o conteúdo de limites de funções.

Dos treze mapas construídos e entregues, identificamos que os conceitos neles mais frequentes foram:

Funções – dez estudantes utilizaram este conceito em seu mapa conceitual;

Gráficos; $\varepsilon$ e $\delta$ – nove estudantes utilizaram estes conceitos em seu mapa conceitual;

Infinito $(\pm\infty)$ – sete estudantes utilizaram este conceito em seu mapa conceitual;

Eixos $x$ e $y$; Função e equação do 2.º grau – seis estudantes utilizaram estes conceitos em seus mapas conceituais.

Além dos conceitos supracitados, houve outros, menos usados, do tipo: intervalo; retas; limites laterais; direita e esquerda; a nomenclatura de limites ($lim_{x\to a} f(x) = L$); função afim; fórmula; propriedades; módulo; derivadas; integral; trigonometria; exponencial; equação do 1.º grau; logaritmos; domínio; contradomínio; conjunto imagem; plano cartesiano; definição de limites; propriedades de limites e indeterminações.

Percebemos nos mapas conceituais dos estudantes a presença da formação de imagens conceituais evocadas, pois, conforme Vinner (1991), estas fazem parte da definição conceitual. Segundo este autor, a imagem conceitual que o estudante constrói sobre determinado conceito traz aspectos e elementos da definição conceitual desse conceito, ou seja, partes da definição formal, lógica e matemática do conceito estudado.

> Quando evocamos um conceito qualquer ou quando vamos nos apropriar de uma nova informação, e aqui podemos incluir os conceitos e as informações matemáticas, o fazemos de maneira complexa e acionamos diferentes partes de nosso cérebro ao mesmo tempo. Existe toda uma estrutura cognitiva extremamente complexa para a apropriação desta nova informação. Nosso cérebro evoca diferentes imagens para se apropriarem deste novo conceito, acionando toda uma rede complexa de imagens, definições pré-estabelecidas e saberes prévios para compreendermos esta nova informação. (Abreu, 2011, p. 56)

No mapa conceitual, apresentado abaixo na Figura 15, o estudante Riquelme centraliza o seu conhecimento sobre limites no conceito de função e com ligações a outros conceitos que adiante se reencontram com o conceito de gráficos. Conforme o mapa do estudante, os conceitos de funções e gráficos apresentam-se como dois conceitos evocados na mente do estudante e que demonstra o conhecimento dele em relação a limites de funções, apesar de ter colocado apenas limites no conceito superior e principal.

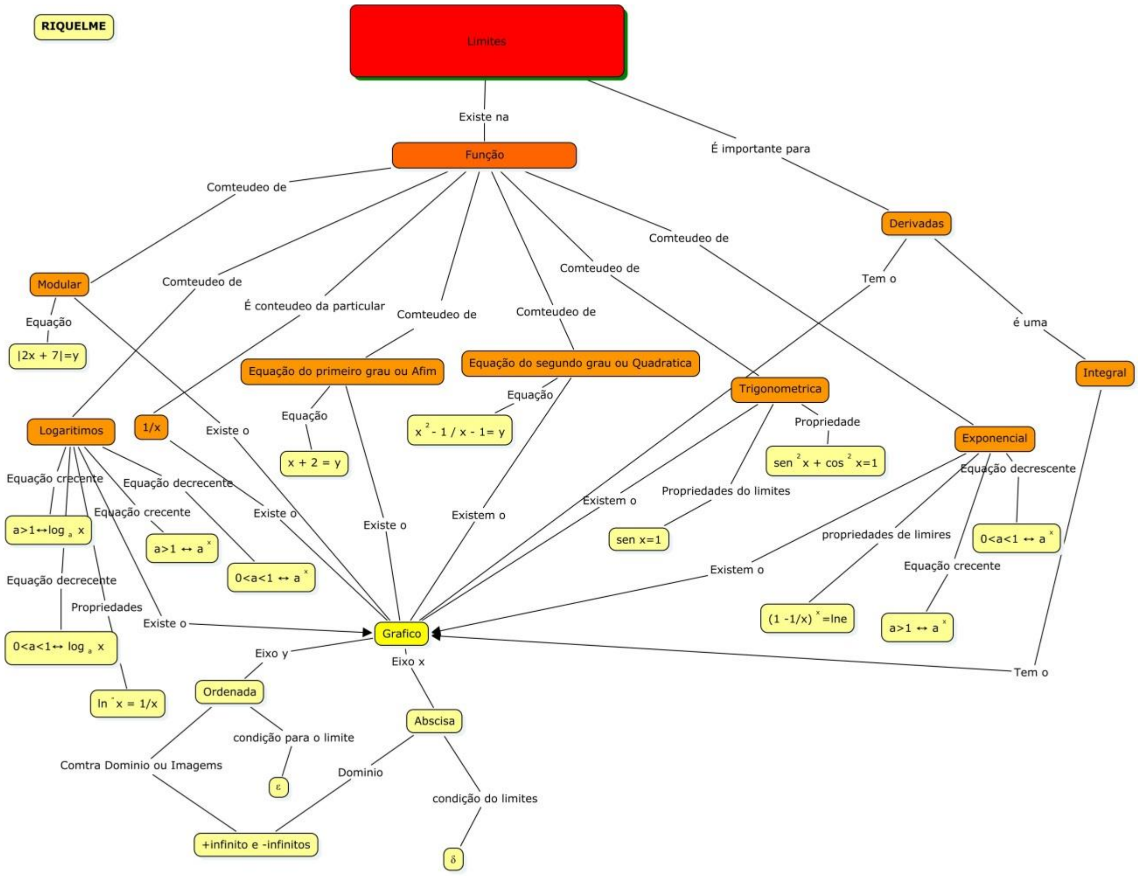



Figura 15 – Mapa conceitual inicial elaborado por Riquelme utilizando o programa *Cmaptools.*

Sendo assim, podemos associar que o conceito de limite de função evocado pelo estudante deu surgimento ao conceito de função e, por sua vez, ligando este a outros conceitos. Elementos e aspectos da definição formal de limites de funções o influenciaram na construção do mapa quase todo a partir do conceito de funções, enquanto o conceito de gráfico é representado como um dos conceitos no centro do mapa e, possivelmente, de maior relevância na estrutura cognitiva do estudante, influenciando a sua imagem conceitual em relação ao conceito de limites de funções.

Todavia, ratificamos a grafia errada do estudante em relação a alguns conceitos apresentados no mapa, por exemplo: no canto esquerdo: logaritmo está escrito com “ti” ao invés de “t”. Abaixo: crescente e decrescente, sem os ss indicados. Da esquerda para a direita, o terceiro termo conteúdo tem n ao invés de m no local. A palavra quadrática está sem acento; trigonométrica e gráfico também. Propriedades de limites – um dos termos à direita, abaixo, está escrito “limires”. Tal fato nos faz compreender que não houve um cuidado do estudante com a escrita e sim com o significado dos conceitos e das suas relações. De forma análoga aconteceu com os demais estudantes, pois a maioria deles se preocupou com o significado dos conceitos e das suas relações para a construção do mapa, ignorando a grafia dos termos usados.

Numa perspectiva diferente do mapa conceitual de Riquelme, apresentamos o mapa conceitual feito por Nelson (ver Figura 16), no qual ele centrou a construção dos demais conceitos de limite de uma função na definição formal de limites e nos aspectos derivados destes. Sendo assim, certamente, fica difícil entendermos a construção da imagem conceitual do estudante, uma vez que a definição de limites foi copiada de livros. Inclusive, o estudante não cita o conceito de gráfico em seu mapa, apesar de termos estudado o limite de uma função de forma intuitiva através de gráficos para conceituar limite de funções. Entretanto, o estudante nos revelou em entrevista que os mapas conceituais foram fundamentais para a compreensão do conceito de limites e de outros que estejam ligados a este, como vimos neste trecho abaixo:

> para falar a verdade não tinha noção nenhuma sobre limite e no decorrer do estudo comecei a conhecer, estudar e tudo ficou mais claro a partir do mapa conceitual, que foi fundamental para o saber dos conceitos. (Trechos da fala de Nelson na entrevista).

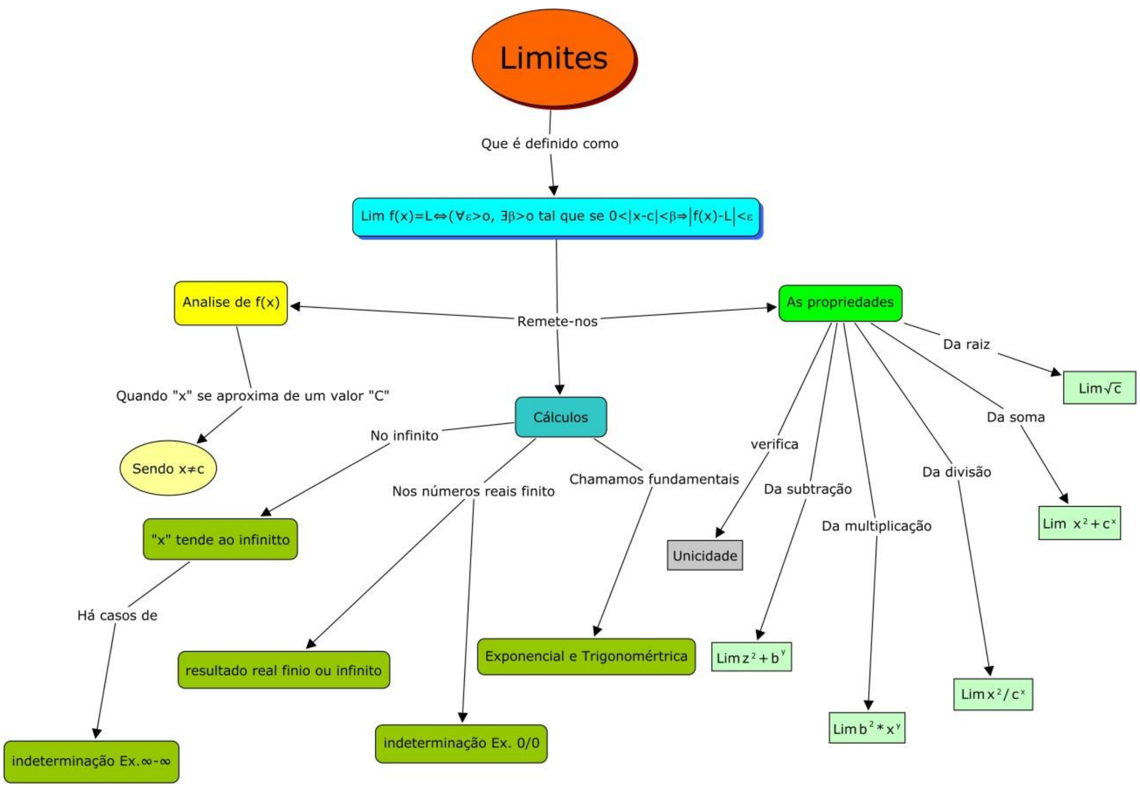



Figura 16 – Mapa conceitual inicial elaborado por Nelson utilizando o programa *Cmaptools.*

Já o estudante Augusto apresentou um mapa conceitual que mostra apenas relação com conceitos extraídos de gráficos de funções, dando a entender que o estudante não conhece nem consultou a definição formal de limites de funções, construindo o mapa com base nos seus conhecimentos prévios e dos gráficos construídos nas atividades do ciclo de estudos, conforme vemos na Figura 17.

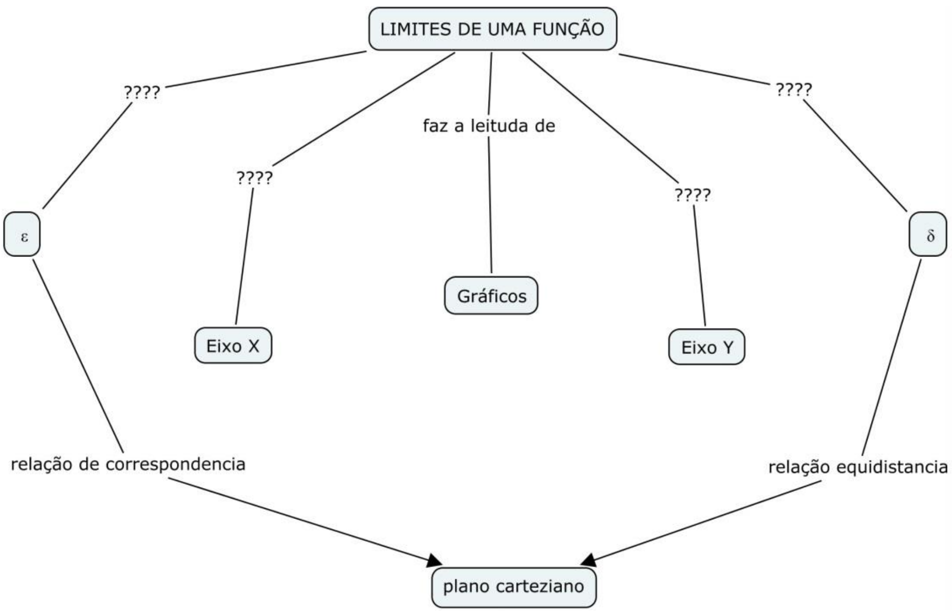



Figura 17 – Mapa conceitual inicial elaborado por Augusto utilizando o programa *Cmaptools.*

A pesquisa de Juter (2006) apontou semelhanças com o que ocorreu no mapa de Augusto, pois a pesquisadora identificou na realização de tarefas matemáticas que os estudantes não tinham incorporado nas suas imagens conceituais a definição formal de limite de função e, evidentemente, não a utilizaram. Além disso, a pesquisa da autora apontou para alguns problemas referentes à aprendizagem deste conceito, relacionados com as questões de concepções estáticas e dinâmicas, infinito e finito, conflitos entre o conceito intuitivo e o formal, etc.

Destacamos os três mapas conceituais iniciais supracitados (ver Figuras 15, 16 e 17) por entender que eles revelam, de forma concisa, o que foi feito nos demais mapas e porque mostram aspectos relevantes do estudo realizado no ciclo de estudos. Por último, o estudante Mirosmar não compreendeu o conceito de mapa conceitual e elaborou de forma equivocada um organograma sequencial de ideias referentes ao que ele achava sobre o estudo que estávamos desenvolvendo no ciclo de estudos, conforme vemos na Figura 18, abaixo.

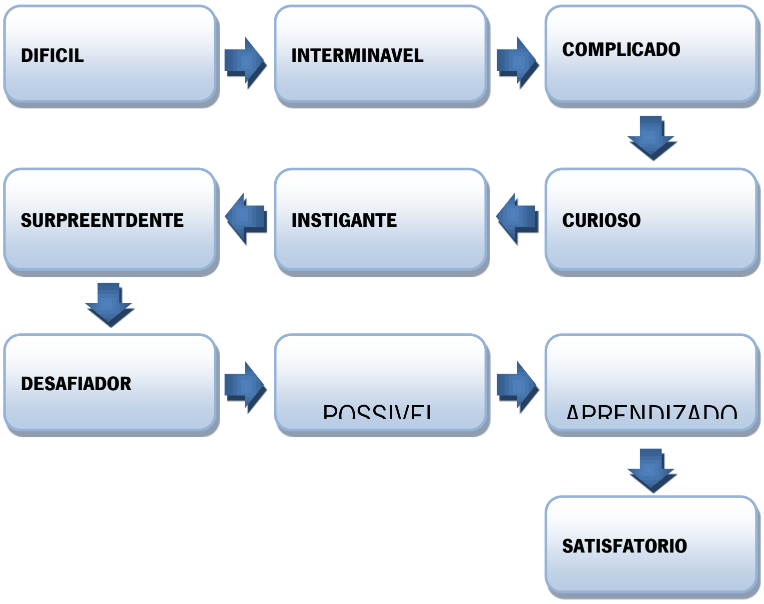



Figura 18 – Mapa conceitual inicial, errado, elaborado por Mirosmar

**Mapas conceituais finais**

A construção dos mapas conceituais finais ocorreu no final do ciclo de estudos, altura em que os estudantes já haviam estudado limites de funções e pesquisado e debatido a respeito da definição deste conceito.

Analogamente à tarefa sobre os conceitos, a construção dos mapas conceituais finais desenvolveu-se a partir dos mapas conceituais iniciais, nos quais os estudantes poderiam aprimorar o mapa conceitual inicial, acrescentando novos conceitos e termos de ligações ou construir outro mapa, ignorando o inicial. Apesar das várias opções oferecidas, a maioria dos estudantes optou em aprimorar o mapa conceitual inicial.

Os conceitos que apareceram nos mapas conceituais finais foram, sensivelmente, os mesmos que apareceram no mapa conceitual inicial, uma vez que a maioria dos mapas finais foram os mapas iniciais aprimorados e modificados. Dos treze mapas conceituais finais, podemos observar que os conceitos mais citados foram:

Gráficos – onze estudantes utilizaram este conceito em seu mapa conceitual final;

Funções; tipos de funções; $\varepsilon$ e $\delta$; infinito $(\pm\infty)$ – oito estudantes utilizaram estes conceitos em seu mapa conceitual final;

Indeterminações – sete estudantes utilizaram este conceito em seu mapa conceitual final;

Definição de limites – cinco estudantes utilizaram este conceito em seu mapa conceitual final;

Eixos $x$ e $y$; propriedades; limites laterais; direita e esquerda; – quatro estudantes utilizaram estes conceitos em seu mapa conceitual final.

Diferentemente dos mapas conceituais iniciais, nestes novos mapas reformulados evidenciam-se os novos conceitos relativos a indeterminações e definição de limites.

Além dos conceitos supracitados houve outros, menos usados, do tipo: intervalo; nomenclatura de limites; fórmula; reta; derivadas e integrais; domínio, contradomínio e conjunto imagem; propriedades de limites e pontos.

É notório um crescimento da utilização do conceito gráfico nos mapas conceituais finais. Uma justificativa para este aumento se deve ao fato de utilizarmos muitos gráficos de funções para analisar o comportamento da função e identificar o seu limite em um ponto determinado.

Outro conceito que aparece com maior frequência nos mapas conceituais finais é a definição de limites. Justificamos este aumento com as tarefas realizadas no ciclo de estudos, pois se exigiu o uso da definição de limites nas suas resoluções. No conceito de indeterminações também houve um aumento comparado aos mapas conceituais iniciais. A justificativa para este aumento é análoga à justificativa do conceito de limites.

A ideia da palavra aproximação foi utilizada por dois estudantes, Albert e Nana. No caso de Albert, o estudante utilizou como sinônimo de aproximação – “nas proximidades de um”, como ligação entre dois conceitos, conforme vemos no mapa conceitual abaixo da Figura 19. Nana utilizou a palavra aproximação como conceito mesmo, conforme vemos na Figura 20.

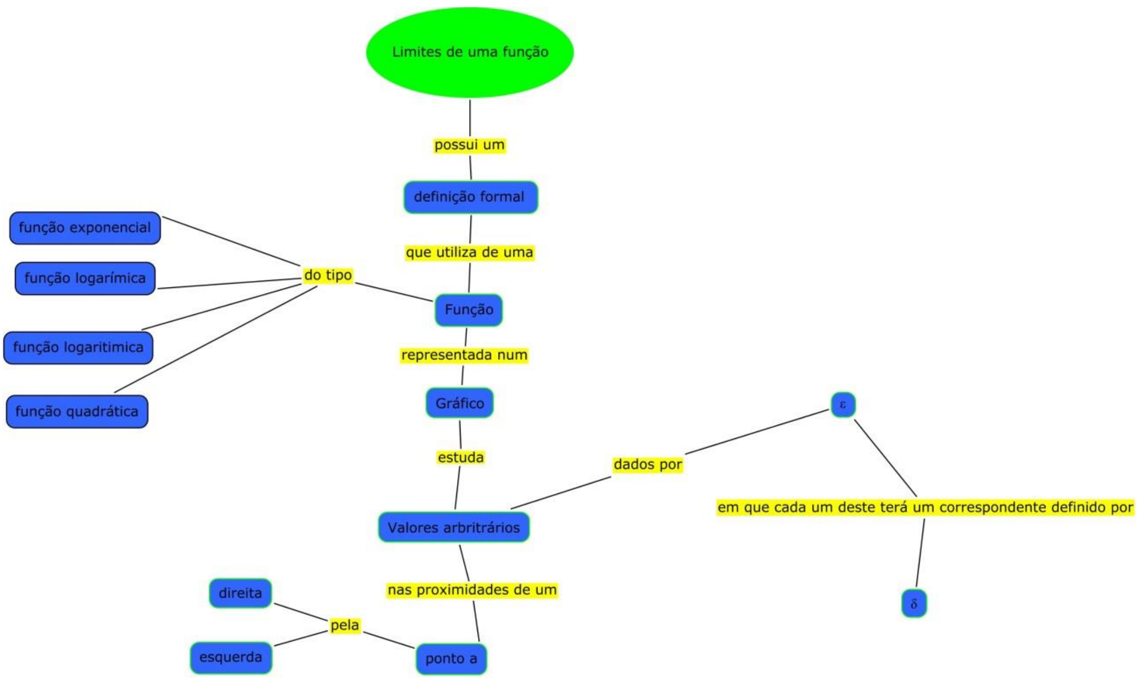



Figura 19 – Mapa conceitual final elaborado por Albert utilizando o programa *Cmaptools.*

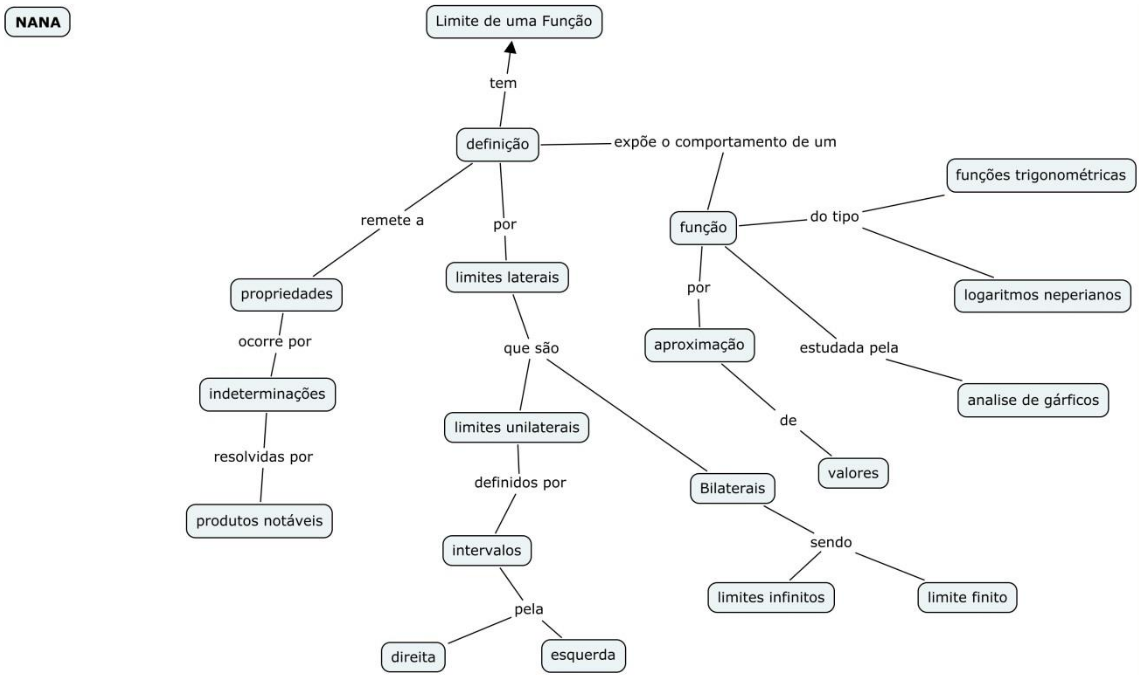



Figura 20 – Mapa conceitual final elaborado por Nana utilizando o programa *Cmaptools.*

Conforme a literatura, as palavras "aproximação", "proximidade" e "tão perto quanto" revelam a ideia intuitiva que os estudantes possuem a respeito do estudo de limites de funções numa visão dinâmica do estudo, na qual utilizam gráficos de funções para desenvolverem tal percepção. Diversos autores, como Tall e Vinner (1991), Cornu (1983), Zuchi (2005), Juter (2006) e Messias e Brandemberg (2012), confirmaram em suas pesquisas o uso da ideia de aproximação ou dinamismo na definição de limites e que isto foi resultado da existência desta ideia na imagem conceitual do individuo. Conforme afirmam Messias e Brandemberg (2012), eles "foram unânimes em destacar que as *Imagens Conceituais* dos estudantes no que se refere ao conceito de limite permeiam a ideia de aproximação, dinamismo, na qual a função jamais poderá alcançar seu limite" (p. 17). O mesmo também é destacado por Abreu (2011), quando afirma:

> Cabe destacar que a imagem conceitual é individual e dinâmica e vai sendo modificada com o tempo. A forma como cada um de nós constrói sua imagem para um dado conceito é muito particularizada e está sempre impregnada de valores e referências que são pessoais. Por outro lado, ela é também dinâmica e varia com o tempo. Novas imagens vão sendo agregadas às anteriores modificando-as e revestindo-as de um caráter dinâmico. (p. 57)

O autor sintetiza perfeitamente o que ocorreu com Albert, Nana e os demais estudantes participantes da pesquisa, pois, ao fazerem o mapa conceitual inicial e depois, com base neste, terem desenvolvido o mapa conceitual final os alunos incorporaram novos conhecimentos. A questão do tempo, como afirma Abreu (2011), foi importante para ocorrer esta alteração e consequentemente uma maturação sobre o conceito de limites, fazendo com que eles modificassem os seus mapas.

A citação de Abreu (2011) traz semelhanças ao princípio da assimilação da teoria da aprendizagem significativa, o qual consiste na interação entre uma nova informação e um subsunçor ancorado na estrutura cognitiva do indivíduo, pois o produto interacional entre os dois acarretará modificações tanto na nova informação como no subsunçor, e ao resultado deste processo dá-se o nome de produto interacional. Podemos dizer que as imagens conceituais citadas por Abreu (2011) assumem o papel dos subsunçores na teoria da aprendizagem significativa.

Os participantes apresentaram os seus mapas finais e individuais em sala de aula e, após uma discussão sobre os mesmos, elegeram os mapas de Albert, Aragão e Riquelme (ver mapas nas Figuras 19, 21 e 22), sendo que este último ainda foi considerado o melhor dos três, ou seja, segundo os participantes, o mapa conceitual final de Riquelme estava mais completo e todos se identificaram muito com o seu mapa e com a explanação do estudante sobre o mesmo. Ainda numa das falas do estudante, na entrevista, ele reforça a relevância do conceito gráfico no mapa conceitual por elaborado:

> o momento mais significativo foi o momento dos gráficos, quando a gente começou a visualizar os gráficos de funções super complexas, a gente começou a visualizar e percebemos que ajudou muito na nossa aprendizagem, a gente começou a aprender. (Trechos da fala de Riquelme se referenciando à parte gráfica de limites de funções).

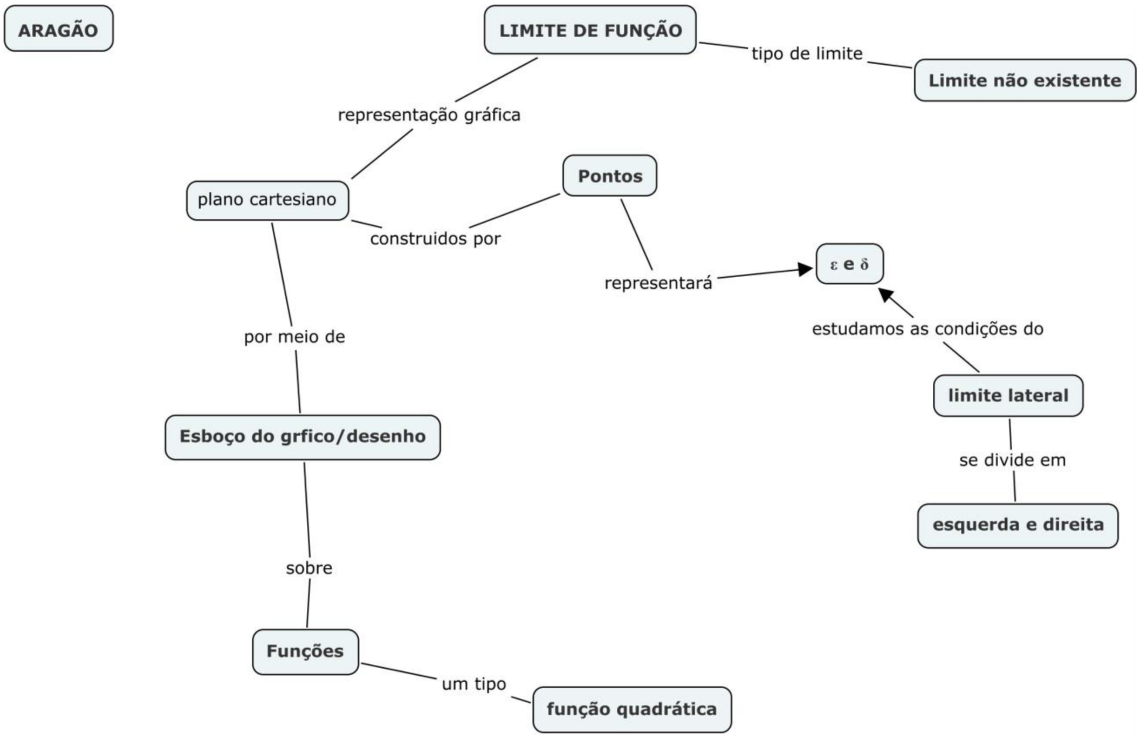



Figura 21 – Mapa conceitual final elaborado por Aragão utilizando o programa *Cmaptools*

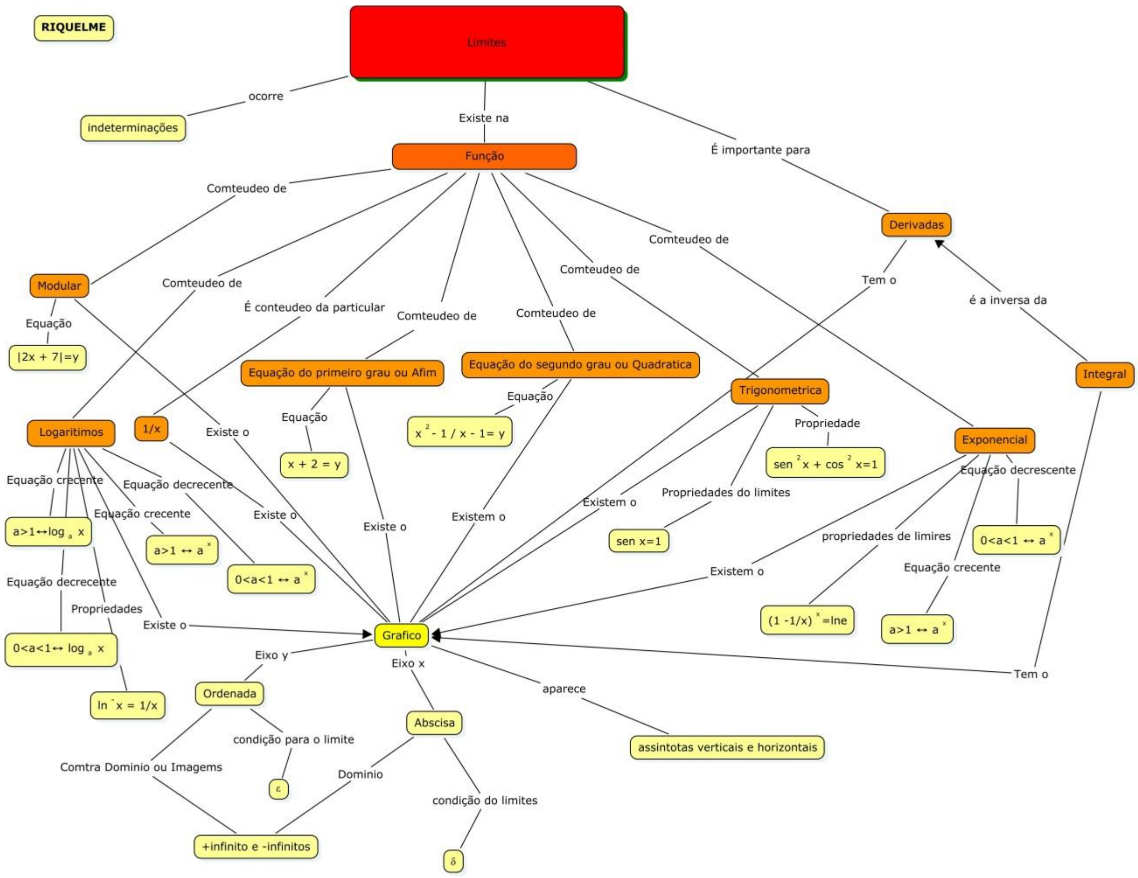



Figura 22 – Mapa conceitual final elaborado por Riquelme utilizando o programa *Cmaptools.*

Ainda em sala de aula, discutíamos a ideia original de construirmos um mapa conceitual coletivamente, ou seja, com base nos mapas conceituais que foram apresentados, os estudantes se reuniram em grupo e tentaram construir um mapa coletivamente.

Ao retornarem a aula seguinte, as estudantes Thamyres, Lívia e Graziela apresentaram um mapa conceitual sobre limites de funções que fora construído por elas três. (ver Figura 23) Segundo as estudantes, uma ajudou a outra nas construções dos mapas individuais e daí veio a ideia de construir apenas um mapa, porém em trio, o qual denominamos de Mapa Thaligra (iniciais dos nomes das participantes).

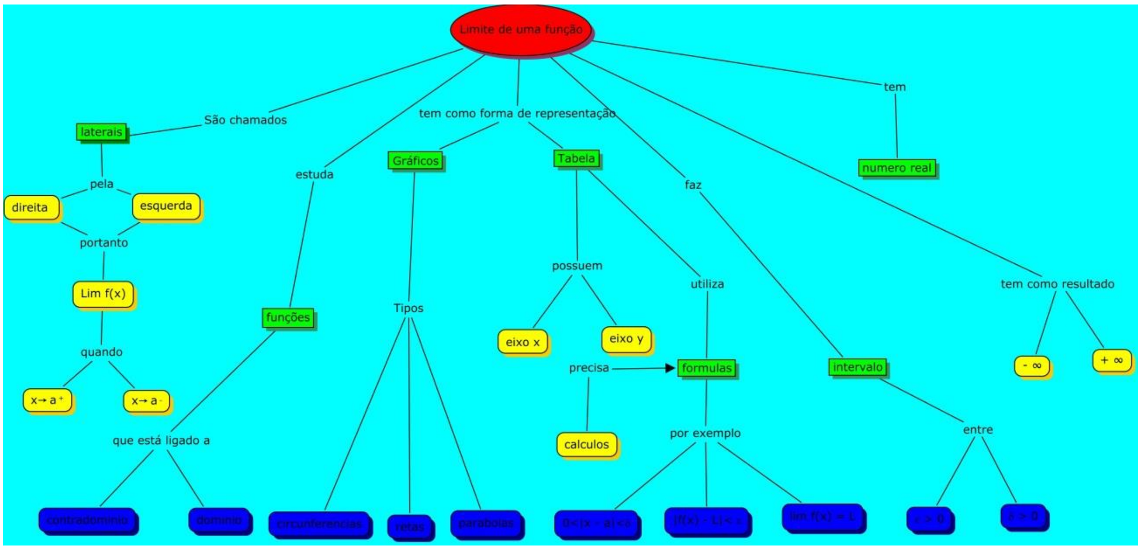


Figura 23 – Mapa Thaligra construído por Thamyres, Lívia e Graziela utilizando o programa *Cmaptools.*

Analisando o mapa da Figura 23, podemos perceber que as estudantes colocaram os conceitos hierarquizados, do mais geral para os mais específicos e todos eles com cores diferentes. Trata-se aqui de uma diferenciação progressiva, pois os conceitos mais gerais, mais inclusivos, ficam no topo do mapa e à medida que vai descendo os conceitos se tornam menos inclusivos e mais específicos até chegar aos conceitos em azul na base do mapa, que são exemplos dos conceitos que estão acima deles.

Após um breve período de apresentação, retomamos a atividade dando voz aos estudantes sobre os mapas e a experiência vivida. O professor apresentou o mapa construído por Thamyres, Lívia e Graziela – o Mapa Thaligra – aos demais participantes e, com base neste, o pesquisador mediou a construção coletiva dos grupos, ou seja, a construção de um mapa coletivo da turma, a que demos o nome de "Mapa da Turma".

A dinâmica para esta atividade desenvolveu-se da seguinte forma: os grupos informavam os conceitos que eles achavam que estariam ligados à definição de limites de funções e o pesquisador os colocava no quadro. Após se esgotarem os conceitos sugeridos, de posse do programa *Cmaptools*, organizamos os conceitos num mapa conceitual e demos forma ao mapa que denominamos de Mapa da Turma, conforme vemos abaixo na Figura 24.

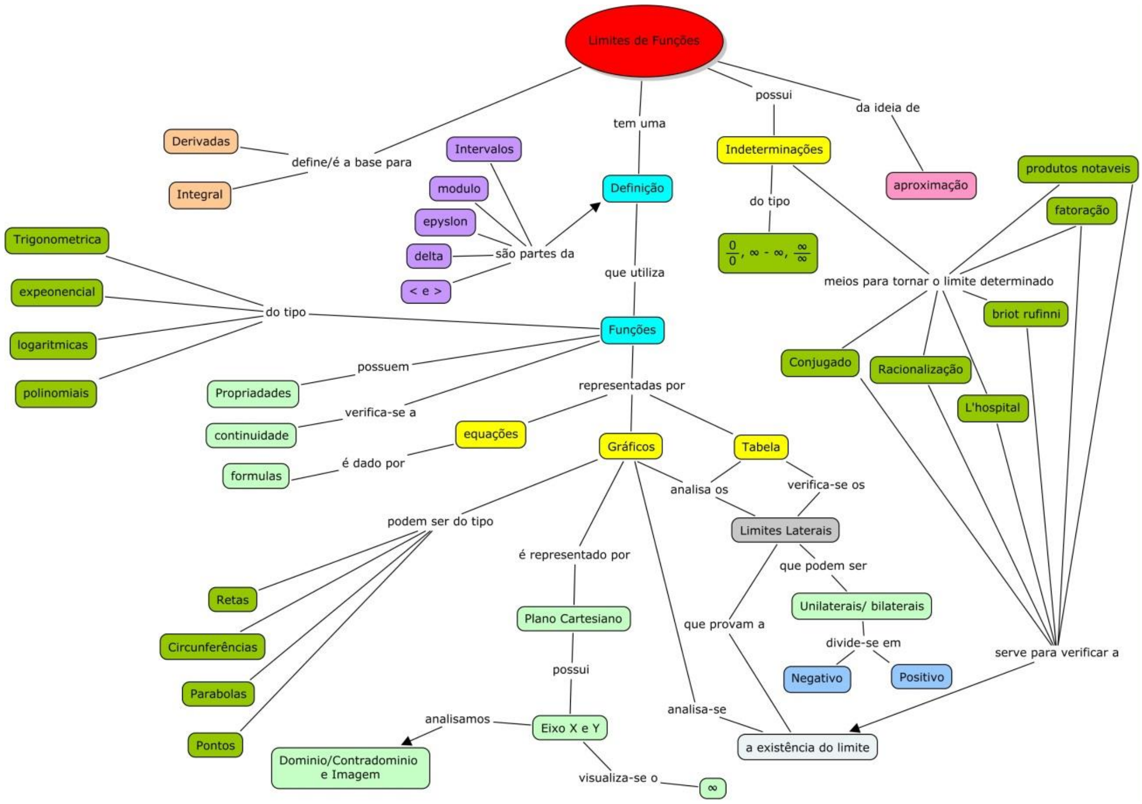



Figura 24 – Mapa da Turma elaborado coletivamente utilizando o programa *Cmaptools.*

Depois de terminada a construção do Mapa da Turma, fizemos a discussão, em conjunto, do mesmo. Muitos alunos disseram que assim em conjunto foi bem melhor, pois aquele mapa correspondia ao conhecimento que eles tinham sobre limites de funções. Os alunos ficaram maravilhados com o resultado e apresentação do Mapa da Turma. Acreditamos que o mapa coletivo deu a oportunidade aos estudantes que não se sentiram muito motivados na execução da tarefa e que, por algum motivo, não chegaram a realizar o mapa conceitual final, permitindo-lhes conhecer um pouco mais sobre limites de funções. Além disso, esse mapa serviu para os participantes revisarem possíveis subsunçores para o conteúdo de limites de funções, esclarecerem dúvidas e obterem novas informações.

Analisando na perspectiva da aprendizagem significativa, não podemos definir que houve aprendizagem, até mesmo pela subjetividade do processo que o estudo qualitativo exigiu.

Todavia, podemos dizer que o material utilizado e produzido pelos alunos foi potencialmente significativo. Pela observação e produção dos estudantes, pudemos notar o seu interesse em querer aprender mais no ciclo de estudos. As entrevistas revelaram muito deste interesse e aprendizado dos alunos, como vemos abaixo num trecho da fala da entrevista com Aragão:

> Eu acho que no ciclo não teve uma parte menos significativa, porque é uma coisa nova que você está aprendendo, tudo é significativo, mas uma parte que mais... é... tocou assim... e foi mais significativa, foi a parte do...dos... que tinham feito o mapa conceitual em grupo. E... era... estavam fazendo novas ideias, vendo ideias de colegas e... assim vendo a ideia de colega, conseguia aprender mais um pouco, aprender também com o colega. (Trecho da entrevista com Aragão)

Assim, trabalhamos num contínuo entre a aprendizagem mecânica e significativa, defendida por Ausubel et al. (1980), em direção a uma aprendizagem significativa, ou melhor, na zona cinzenta definida por Moreira (2006), entretanto, tendendo mais para aprendizagem significativa do que para a aprendizagem mecânica, pois o material potencialmente significativo e a predisposição do aprendiz em querer aprender constituem-se como dois fatores condicionantes da existência de aprendizagem significativa (Ausubel et al., 1980).

Da comparação dos mapas conceituais iniciais com os finais, podemos dizer que conceitos como gráficos, funções, $\varepsilon$ e $\delta$, infinito, eixos $x$ e $y$, limites laterais, direita e esquerda, propriedades de limites e tipos de funções foram os mais citados em ambos os mapas. Evidentemente que estes conceitos têm relações com o estudo de limites de funções.

Constatamos, ainda, que todos os mapas conceituais finais foram modificados. A maioria utilizou o mapa conceitual inicial e o aprimorou, exceto a Nana, que modificou completamente o seu mapa conceitual final em relação ao inicial. (Ver em Anexo 4).

Bella, que tinha feito seu mapa conceitual inicial numa folha de papel, no mapa conceitual final modificou poucas coisas, colocando alguns conceitos que apareciam nos termos de ligações, passando a considerá-los como conceitos e o fez utilizando o programa *CmapTools*.

Lívia corrigiu o valor de $\delta > 0$ no mapa conceitual final, pois ela tinha colocado $\delta < 0$ no mapa conceitual inicial e acrescentou alguns conceitos neste último. Lázaro acrescentou alguns conceitos e colocou os termos de ligação entre os conceitos, que não tinha feito no mapa conceitual inicial (Ver em Anexo 4). Destacamos os mapas conceituais do participante Lázaro por apresentar uma perspectiva de mapa que revela a sua imagem conceitual, pois o estudante apresenta o gráfico como um conceito central no seu mapa e ainda informa que este é o meio pelo qual representa o limite de uma função, como vemos abaixo na Figura 25.

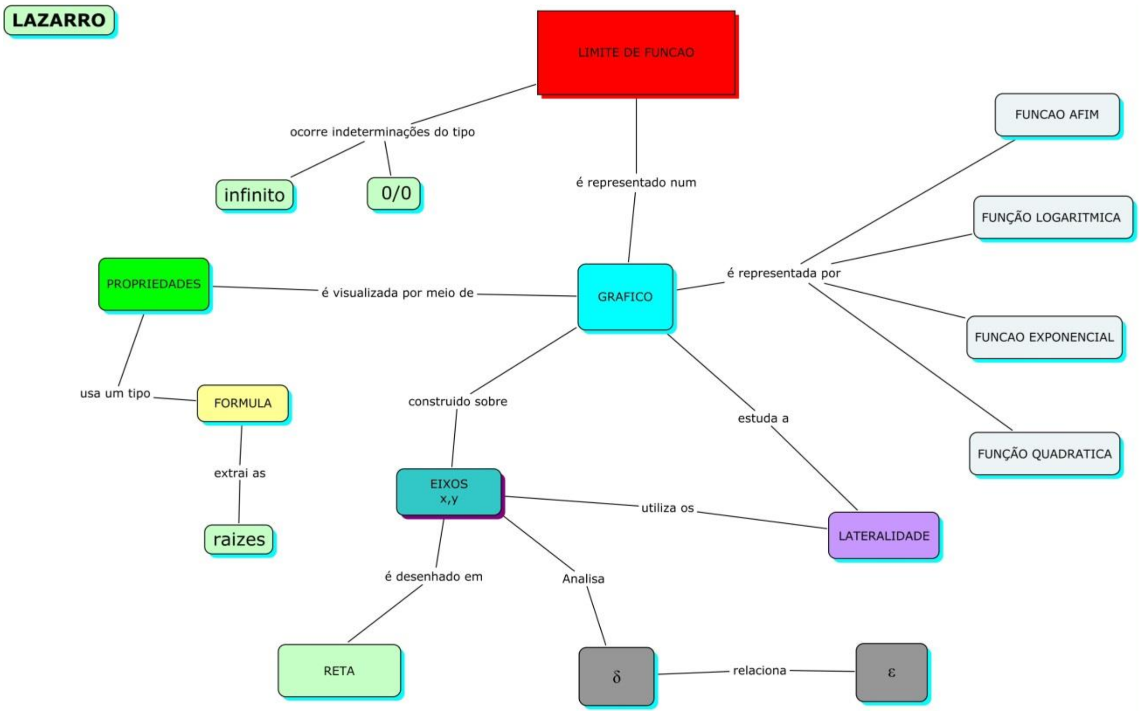



Figura 25 – Mapa conceitual final elaborado por Lázaro utilizando o programa *Cmaptools.*

Segundo Vinner (1991), existe a possibilidade de o aluno dar resposta a certa atividade consultando a célula da imagem conceitual, seguidamente da célula da definição conceitual. Baseado nesta ideia de Vinner (1991), Domingos (2006) fez um experimento com alunos por meio de atividades, no qual ele afirma que

> Ao colocarmos ao aluno uma tarefa cognitiva as células do conceito imagem e do conceito definição devem ser activadas para proporcionar uma resposta a essa tarefa. Esta actividade pode desencadear várias acções entre as células. Uma dessas acções pode traduzir-se por uma consulta da célula do conceito definição seguida de uma acção recíproca entre ambas com o objectivo de proporcionar uma resposta à tarefa. Outra acção pode resultar apenas numa consulta da célula do conceito definição. Neste caso o conceito imagem não tem qualquer interferência na resposta e podemos considerar que se trata de um processo cognitivo que assenta numa dedução formal pura. Uma terceira acção que pode ser desencadeada está relacionada com uma consulta da célula do conceito imagem seguida da do conceito definição. Neste caso estamos perante uma dedução que segue um pensamento intuitivo. Em nenhum dos casos anteriores é tomada uma decisão sem antes ser consultado o conceito definição. (p. 11)

É com base nesta terceira ação apontada por Domingos (2006) – "uma consulta da célula do conceito imagem seguida do conceito definição", que corresponde a uma dedução seguindo um pensamento intuitivo, que enquadramos o mapa conceitual do participante Lázaro como um mapa construído com a célula da imagem conceitual, assim como o de Riquelme, que mistura um pouco a definição com a parte geométrica, mais de representação (ver Figuras 22, 25), e dos outros participantes, uma vez que eles construíram o mapa conceitual com o conceito de gráfico como conceito central para a definição de limites de funções. Entretanto, a participante Graziela apresenta em seus mapas conceituais a representação do limite de uma função pela definição, mas não a utiliza corretamente e, também, pela representação de gráficos e tabelas (este último conceito foi acrescentado no mapa conceitual final), conforme vemos na Figura 26, abaixo.

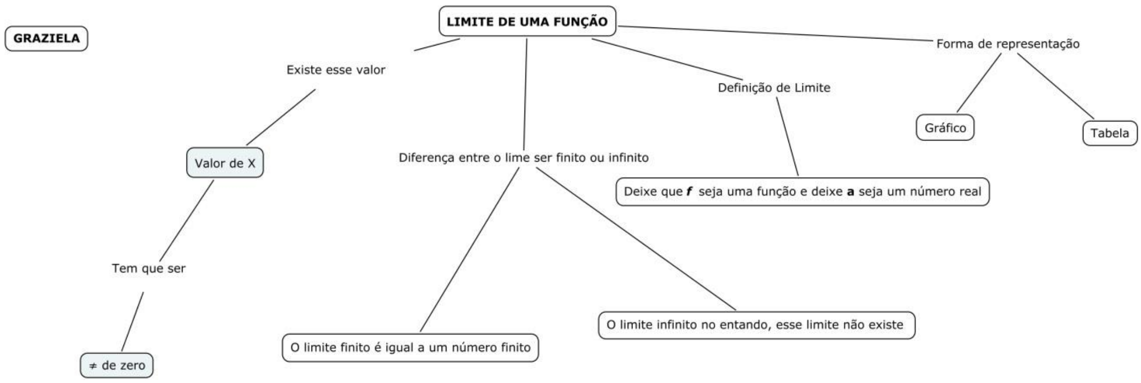



Figura 26 – Mapa conceitual final elaborado por Graziela utilizando o programa *Cmaptools.*

Conforme o mapa apresentado por Graziela, vemos claramente que a estudante procurou evidenciar a definição conceitual assim como a imagem conceitual, conforme o pensamento matemático avançado (Vinner, 1991). Quando a estudante utiliza como termo de ligação “definição de limite” e tenta definir limite num quadro de conceitos, ela estaria utilizando da definição conceitual; por outro lado, quando a mesma utiliza gráfico e tabela como forma de representação do limite de uma função, podemos considerar que a estudante está associando a sua imagem conceitual.

Na entrevista, a participante nos revelou com mais clareza o que ela pensava sobre o conceito de limites de funções, como podemos ver nos trechos das falas de entrevista e no diálogo com a mesma, apresentados a seguir.

> a visão que a gente tem do gráfico pode gerar a função dentro de um gráfico e também a questão da tabela, que do gráfico a gente gera uma coisa, mais na tabela apresentam-se os valores e as tentativas e consegue-se chegar ao resultado, a gente descobre se o valor do limite é zero, se é um, tanto de um lado como do outro. (Trecho da entrevista com Graziela)

> Graziela: Na hora de construir limites, eu primeiro li o Mangá (livro) de novo, novamente em casa, o livro Cálculo para leigos que peguei na biblioteca, que foi Iezzi (autor do livro Fundamento da Matemática Elementar, vol. 8), nisso eu pude ver primeiro o que era para daí tirar minhas conclusões e meus pensamentos daquilo, mesmo eu não estava sabendo realmente como calcular, como fazer,

como foi o primeiro conceito, já aí depois que tivemos a primeira convivência (contato com a definição de limites de funções no ciclo de estudos) de fazer as questões, tudo..., tive outra conclusão, porque meu primeiro conceito eu copiei algumas coisas do livro por não saber, já nesse acrescentei uma coisa que achei interessante, quando o gráfico e os limites não são iguais... (se referia aos limites laterais serem diferentes), pra [para] mim foi interessante.

Pesquisador: Fale mais dessa questão do gráfico.

Graziela: No gráfico quando a gente vê que o limite pela esquerda vai tender para um valor e pela direita para outro, logo o limite terá dois valores e esses limites não existem, pois tem que ter o mesmo valor tanto pela esquerda e pela direita (referenciando o fato dos limites laterais serem diferentes).

Quando questionada sobre os mapas inicial e final, a estudante afirmou que o primeiro foi elaborado com base nos livros, enquanto no segundo foi influenciada pelas atividades desenvolvidas no ciclo de estudos e que este, na opinião dela, estava mais completo. Daí, o pesquisador perguntou-lhe se os conceitos do segundo eram muitos diferentes dos do primeiro, ao que ela respondeu:

O que eu tirei foi a parte da fórmula que eu copiei do livro, que achei sem nexo, a gente deu aqui (referenciando o ciclo de estudos), mas eu aprendi pelo modo que peguei aqui, foi muito mais amplo do que do livro.

Por fim, destacamos o mapa conceitual final de Albert, o mapa apresentado na Figura 19. Nele, o estudante apresentou uma considerável evolução em relação ao mapa conceitual inicial apresentado anteriormente (Ver Anexo 4). No mapa final, o estudante colocou muitos conceitos que aparecem na definição de limites e organizou-os de forma sequenciada e diferenciada, conforme sugere a teoria da aprendizagem significativa, demonstrando, assim, o contato tido com estes conceitos durante o ciclo de estudos.

### 4.3. Avaliação do Ciclo de Estudos

Avaliaremos o ciclo de estudos, primeiramente, com base nas respostas dos estudantes ao 2.º questionário. Seguidamente analisaremos os dados obtidos nas entrevistas, e, quando possível, integraremos estes com as respostas dos estudantes, dadas às questões do questionário, em especial na subseção 4.3.2. PARTE 2.

O 2.º questionário serviu para avaliarmos a aprendizagem dos estudantes participantes quanto ao conteúdo de limites de funções estudados nas atividades desenvolvidas no ciclo de estudos. Relativamente a este questionário, análogo ao 1.º questionário, será feita a apresentação dos resultados obtidos em cada questão, relacionando os objetivos pretendidos com os resultados encontrados nas respostas dos participantes. Dos vinte e dois estudantes que iniciaram a pesquisa, dezessete deles responderam a este questionário. Além disso, simultaneamente, na análise dos resultados faremos um diálogo com o aporte teórico.

#### 4.3.1. Aprendizagens dos alunos sobre limites de funções

**Questão 1**. Foi dada uma função com várias sentenças e pedido na alínea a) o esboço do gráfico da função. Na alínea b) foi pedido o limite e os limites laterais da função em $x = -2$ e $x = 2$.

*Objetivo da questão*. Avaliar os conhecimentos dos participantes em relação à construção de gráficos, em particular de funções definidas por várias sentenças, e à determinação de limites de funções, incluindo limites laterais.

*Resultados*. Na alínea a) apenas Riquelme, Graziela e Bella fizeram a representação gráfica da função corretamente (Figuras 27, 28 e 29). Entretanto, sete estudantes responderam de forma parcialmente correta, contra cinco estudantes que fizeram o gráfico incorretamente e dois que não o fizeram.

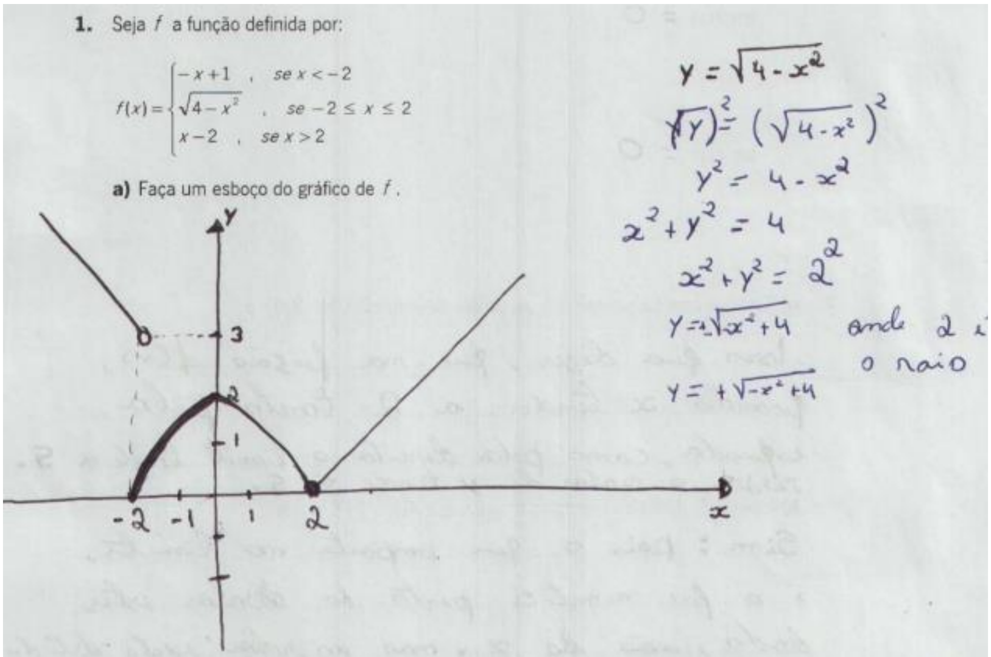



Figura 27 – Esboço gráfico de Riquelme

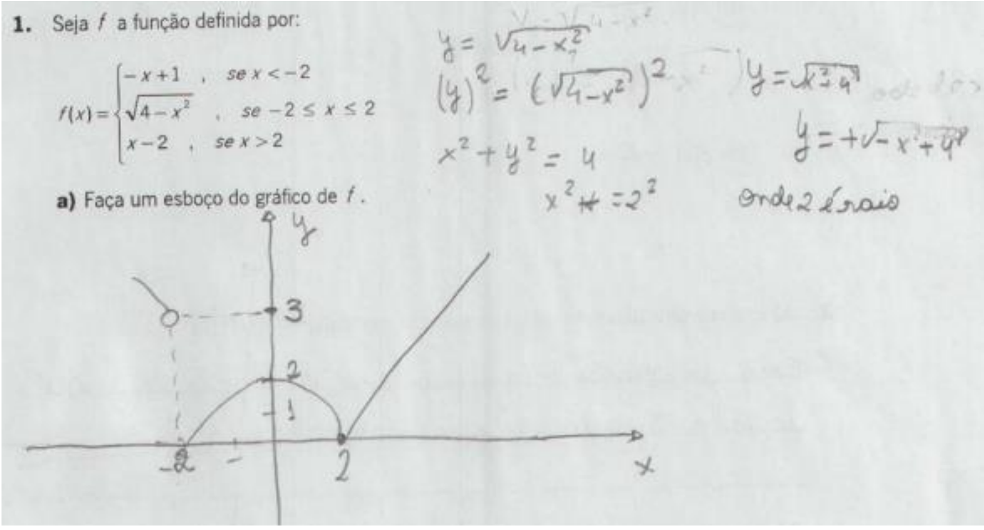



Figura 28 – Esboço gráfico de Graziela

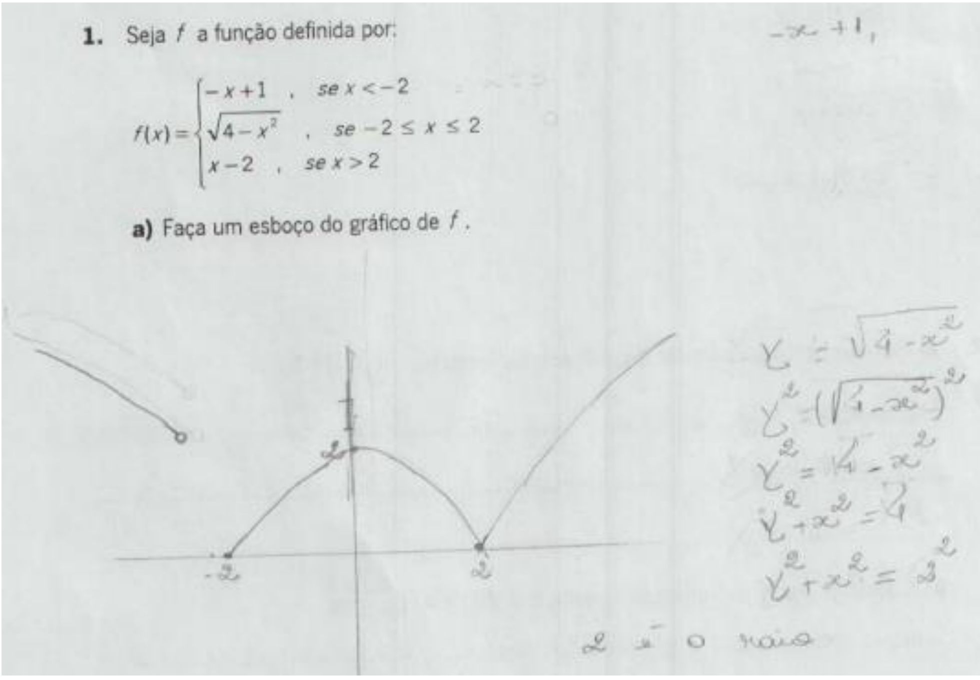



Figura 29 – Esboço gráfico de Bella

Para as respostas da alínea b), classificámo-las em correta, incorreta, ininteligível e não resposta, conforme vemos nas Tabelas 30 e 31.

Tabela 30 – Respostas dos estudantes na questão 1b) quando $x \to -2$ – Parte 1 do 2.º questionário

| Tipo de resposta | | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|---|
| Correta | $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ | 5 | 29,4% |
| | $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ | 5 | 29,4% |
| | $\lim_{x\to -2} f(x)$ | 8 | 47,1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Incorreta | $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ | 6 | 35,3% |
| | $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ | 4 | 23,5% |
| | $\lim_{x\to -2} f(x)$ | 3 | 17,6% |
| Ininteligível | $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ | 4 | 23,5% |
| | $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ | 5 | 29,4% |
| | $\lim_{x\to -2} f(x)$ | 4 | 23,5% |
| Não resposta | $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ | 2 | 11,8% |
| | $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ | 3 | 17,6% |
| | $\lim_{x\to -2} f(x)$ | 2 | 11,8% |

Tabela 31 - Respostas dos estudantes na questão 1b) – quando $x \to 2$, Parte 1 do 2.º questionário

| Tipo de resposta | | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|---|
| Correta | $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ | 7 | 41,2% |
| | $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ | 5 | 29,4% |
| | $\lim_{x\to 2} f(x)$ | 6 | 35,3% |
| Incorreta | $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ | 4 | 23,5% |
| | $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ | 7 | 41,2% |
| | $\lim_{x\to 2} f(x)$ | 5 | 29,4% |
| Ininteligível | $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ | 4 | 23,5% |
| | $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ | 4 | 23,5% |
| | $\lim_{x\to 2} f(x)$ | 4 | 23,5% |
| Não resposta | $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ | 2 | 11,8% |
| | $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ | 1 | 5,9% |
| | $\lim_{x\to 2} f(x)$ | 2 | 11,8% |

Destaque para as respostas de Mirosmar e Thamyres, em que eles responderam incorretamente os limites laterais, porém responderam corretamente o limite da função. Por exemplo, Thamyres respondeu "$lim_{x\to 2^-} f(x) = \nexists$, $lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$" e "$lim_{x\to 2} f(x) = 0$". Já Mirosmar respondeu que o $lim_{x\to -2^-} f(x)$ existia e tendia a zero, já para o $lim_{x\to -2^+} f(x)$ o estudante disse que não existia, e depois respondeu que tendia a 3. E por fim, Mirosmar respondeu que o $lim_{x\to -2} f(x)$ não existia.

*Análise*. Nesta questão levamos em consideração o que foi apontado por Santos e Almouloud (2014).

> E mais uma vez defendemos que, sem as mudanças de quadros, sem o trabalho de conversão de representações em diferentes registros de representação semiótica, o aluno corre o risco de "aprender" a teoria que envolve o estudo de limite de uma função de forma compartimentada e nada significativa. Ter o domínio de um registro não implica no domínio de outro, principalmente se não há o trabalho com essas mudanças. (p. 542)

Nesta questão, a análise do limite de uma função por meio de gráficos muda a ideia de determinar o limite de uma função sempre por meio de uma única representação, no caso a algébrica, que é a mais usual nos livros de ensino de Cálculo. Além disso, esta questão envolve também dificuldades dos estudantes na construção de gráficos, que diagnosticamos no 1.º questionário.

Neste caso, comparando com 1.º questionário, observamos uma melhoria na construção de gráficos pelos estudantes. Três deles acertaram o esboço do gráfico, conforme as Figura 27, 28 e 29, e sete responderam de forma parcialmente correta, sendo que os erros dos estudantes se concentraram nas imagens de alguns intervalos do domínio da função dada, já que em relação ao esboço gráfico eles fizeram corretamente. Ou seja, eles tinham noção da curva de cada sentença da função dada, errando apenas na determinação dos pontos no plano cartesiano para o traçado do gráfico, conforme vemos nas resoluções de Nana, Lívia e Albert (Figuras 30, 31 e 32).

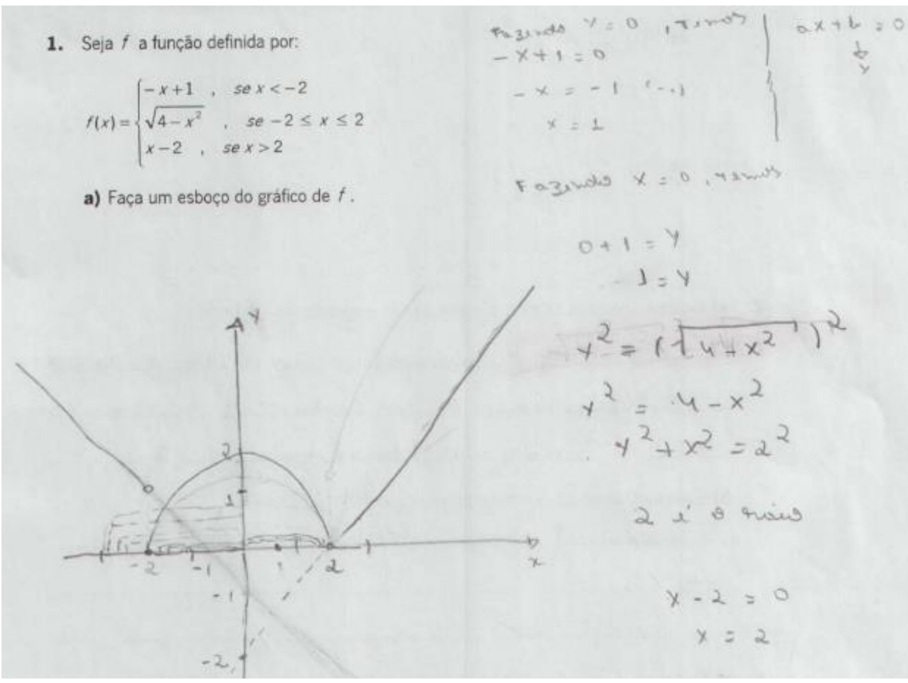



Figura 30 – Esboço gráfico de Nana

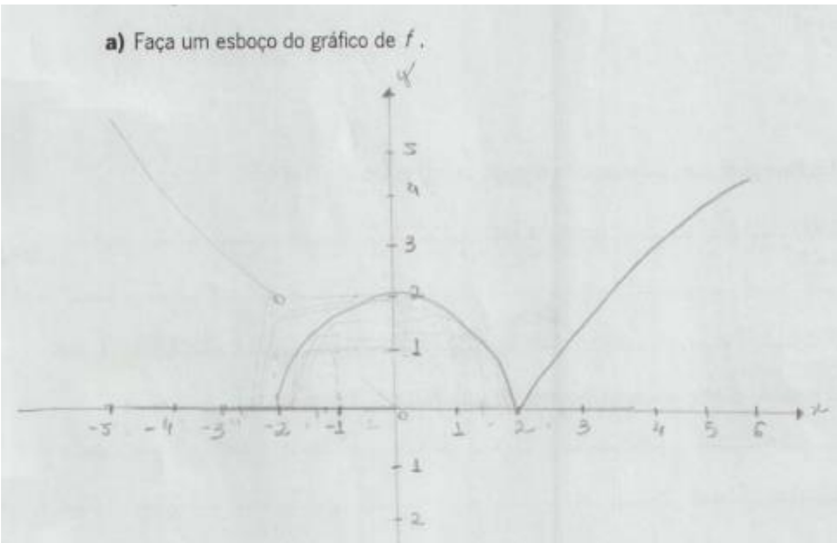



Figura 31 – Esboço gráfico de Lívia

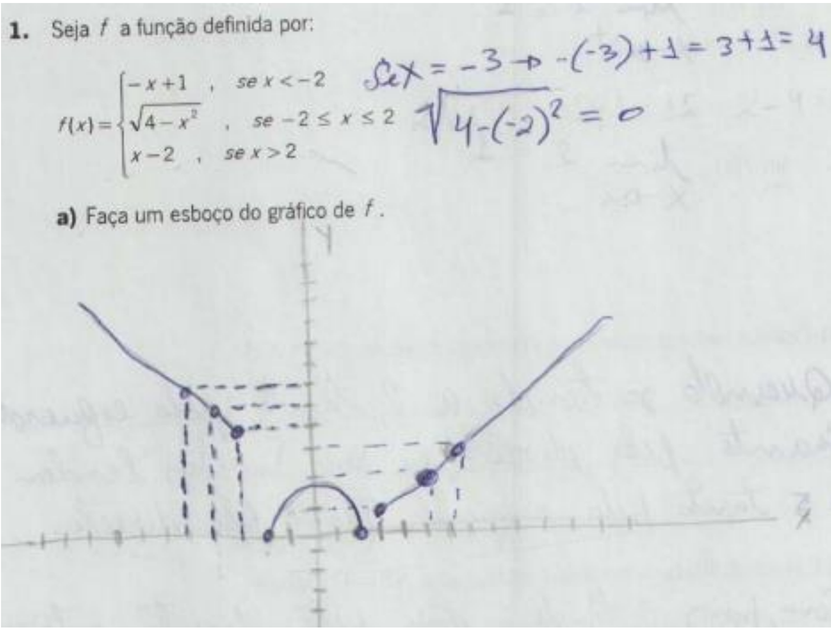



Figura 32 – Esboço gráfico de Albert

De um total de dezessete estudantes participantes, podemos ver que mais da metade conseguiu pensar no processo de construção do gráfico, o que traduz uma evolução positiva, uma vez que no primeiro questionário a maioria não tinha nem sequer tentado fazer o gráfico. É possível que a tecnologia informática, a que tiveram acesso, também tenha contribuído para esse aumento de interesse e desempenho dos estudantes.

Nas respostas da alínea b) observamos um número de estudantes relativamente semelhante em cada um dos três tipos de respostas consideradas. Excluindo os estudantes que não responderam, uma vez que nestes não é possível efetuar qualquer análise, pode-se afirmar que os demais acertaram ou erraram, especialmente estes últimos tentaram responder e pelas respostas constata-se que eles já passaram a refinar os subsunçores construídos no ciclo de estudos.

**Questão 2**. Foi pedido na alínea a) o significado da expressão $lim_{x \to 2} f(x) = 5$. Na alínea b) foi perguntado se era possível, diante da expressão citada na alínea a), $f(2) = 3$. Para esta última alínea foi pedida uma explicação.

*Objetivo da questão*. Analisar se os estudantes sabiam o significado de limite de uma função e se eles percebiam que a função dada pode tomar em $x = 2$ um valor diferente do limite, ou seja, o limite da função, quando $x$ tende a 2 existe e esse valor pode ser diferente do valor numérico de $f(2)$.

*Resultados*. Em relação às respostas da alínea a), classificámo-las em corretas, incorretas, parcialmente corretas e em "não resposta", conforme a Tabela 32.

Tabela 32 – Respostas dos estudantes na questão 2a) – Parte 1 do 2.º questionário

| Tipo de resposta | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Correta | 11 | 64,7% |
| Parcialmente Correta | 4 | 23,5% |
| Incorreta | 1 | 5,9% |
| Não resposta | 1 | 5,9% |

Nas respostas corretas e parcialmente corretas, os estudantes utilizaram argumentos e explicações para justificar as suas respostas, conforme verificamos na Tabela 33.

Tabela 33 – Justificação dos estudantes na questão 2a) – Parte 1 do 2.º questionário

| Justificações | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Limites laterais iguais a 5 | 6 | 35,3% |
| Aproximação para determinar o limite da função | 4 | 23,5% |
| Repetir a escrita do enunciado e a escrita simbólica de limite | 5 | 29,4% |
| Limite da função $f$ representa um conjunto de valores num intervalo | 2 | 11,8% |

Destacamos as respostas de Lívia e Nelson, classificadas na categoria limites laterais iguais a 5: "$lim_{x \to 2^-} f(x) = lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$, temos que os limites de $f(x)$ tendendo a 2 são iguais"(Lívia); "Que o limite da função é quando $x$ tende a dois tanto pela direita quanto pela esquerda se aproximam de 5" (Nelson).

Em relação às respostas da alínea b), classificámo-las também em corretas, incorretas e parcialmente corretas, conforme a Tabela 34.

Tabela 34 –Respostas dos estudantes na questão 2b) – Parte 1 do 2.º questionário

| Tipo de resposta | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Correta | 8 | 47,1% |
| Parcialmente Correta | 5 | 29,4% |
| Incorretas | 4 | 23,5% |

Quanto à explicação exigida na alínea b), verificamos que das oito respostas corretas, quatro delas estavam sem justificação, apenas referiram que seria possível sem nenhuma justificativa; entretanto, os demais justificaram de forma correta: "Sim, pois no estudo de limites estudamos os termos (valores) ao redor, não o ponto da função. Pode ocorrer do ponto está aberto (Referencia-se ao fato da função não precisar estar definida no ponto)" (Saulo). Obtiveram-se, ainda, cinco respostas parcialmente corretas, sendo que três destas responderam que sim, todavia com uma justificação ininteligível.

*Análise*. Quase todos os estudantes souberam identificar a expressão simbólica do limite de uma função. Consideramos que isto foi satisfatório, uma vez que na questão 1 os alunos, ainda, apresentaram dificuldades na representação gráfica do limite de uma função, mais especialmente na construção dos gráficos.

No ciclo de estudos utilizamos várias representações para conceituar limites, pois Guerra (2012), apoiado em vários autores e conselhos de professores de matemática, sugere utilizar diferentes representações deste conceito, pois a utilização destas diversas representações irá favorecer a sua aprendizagem. Segundo Blázquez e Ortega (2001), citados por Guerra (2012), as quatro formas de representação para o conceito de limite são a verbal, numérica, gráfica e algébrica.

Em relação às respostas da alínea b), vimos que a maioria dos estudantes respondeu corretamente, entretanto, alguns destes não conseguiram justificar a sua resposta. Esta questão comprovou o que estudamos na fundamentação teórica, ou seja, do limite de uma função num determinando ponto e o valor da função nesse mesmo ponto poderem ser diferentes. Conforme Cornu (2002), Guerra (2012) e Juter (2006), os estudantes tendem a criar conflitos em relação a esta questão, ou seja, consideram o limite como sendo a imagem da função no ponto onde se deseja calcular o limite. "Deste modo, surgem situações em que os alunos referem não existir limite, porque a função não está definida no ponto considerado. Por outro lado, é referido o facto de os alunos apenas terem em conta os aspetos de manipulação algébrica" (Guerra, 2012, p. 42).

**Questão 3**. Na alínea a) foram dados os dois limites laterais de uma função $f(x)$ num ponto, com valores diferentes, e pediu-se os seus significados. Na alínea b) utilizou-se, ainda, a situação apresentada na alínea a) e perguntou-se se, neste caso, o limite da função $f(x)$ existe e uma justificativa para a resposta dada.

*Objetivo da questão*. Análoga à 2.ª questão, ela reforça a avaliação do significado de limite de uma função, mas também analisa o conhecimento dos estudantes em relação aos limites laterais de uma função. A questão buscou identificar o conhecimento dos estudantes referente à existência de um limite, tomando como referência seus limites laterais.

*Resultados*. Nas Tabelas 35 e 36 apresentam-se as respostas referentes às alíneas a) e b), respectivamente.

Tabela 35 – Respostas dos estudantes na questão 3a) – Parte 1 do 2.º questionário

| Tipo de resposta | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Correta | 8 | 47,1% |
| Parcialmente correta | 3 | 17,6% |
| Incorreta | 2 | 11,8% |
| Ininteligível | 1 | 5,9% |
| Não saber responder | 1 | 5,9% |
| Não resposta | 2 | 11,8% |

Tabela 36 – Respostas dos estudantes na questão 3b) – Parte 1 do 2.º questionário

| Tipo de resposta | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Correta | 9 | 52,9% |
| Parcialmente correta | 1 | 5,9% |
| Incorreta | 4 | 23,5% |
| Não saber responder | 1 | 5,9% |
| Não resposta | 2 | 11,8% |

*Análise*. Observamos que a maioria dos estudantes soube identificar que quando os limites laterais são iguais, o limite existe e terá o valor igual ao valor dos limites laterais. Acreditamos que o trabalho desenvolvido no ciclo de estudos tenha contribuído de forma positiva para este aprendizado sobre limites de funções, conforme demonstrado nas respostas dos estudantes Augusto e Graziela à questão. Em relação à alínea a) os estudantes responderam: "O limite da função é igual a três, quando $x$ tende a um pela esquerda. Limite da função é igual a sete, quando $x$ tende a um pela direita" (Augusto); "Quer dizer que o limite quando se aproxima do 1 pela esquerda tem o valor de 3 e quando o limite se aproxima de 1 pela direita, o limite tem o valor de 7. Logo esse limite não existe, pois os valores dos limites laterais são diferentes" (Graziela).

Em relação à alínea b) os estudantes responderam: "Não, pois os limites laterais são diferentes" (Augusto); "Não" [A estudante já havia respondido e explicado na alínea a), supracitada] (Graziela).

Análogas à resposta de Graziela, na alínea a), destacamos as respostas de Nelson e Bella a esta alínea, pois estes estudantes utilizaram termos como "aproximar" e "tender" para explicitar a situação mostrada nos limites laterais desta alínea: "Isso quer dizer quando $x$ tende a 1 pela esquerda o limite é 3 e quando $x$ tende a 1 pela direita o limite tende a 7". (Bella, grifo nosso); "Que o limite da função quando $x$ tende a 1 pela esquerda se aproxima de 3 e o limite da função quando $x$ tende a 1 pela direita se aproxima de 7" (Neslon, grifo nosso)

É observado na resposta da estudante Bella que, num limite lateral, ela entende o valor do limite como um valor definido (o limite é 3); noutro ela entende como um valor que está se aproximando (o limite tende a 7). Assim como nas respostas de Nelson, o qual utiliza o termo "aproxima" para responder ao limite da função, em ambos os casos é dada a ideia de uma noção intuitiva e dinâmica na concepção de limites de funções, confirmadas nas pesquisas de Cornu (2002) e Juter (2006).

Ratificamos que utilizamos de exemplos e diferentes formas de representações no ciclo de estudos para mostrar aos estudantes a relação do limite de uma função num ponto com os limites laterais em volta deste ponto.

**Questão 4**. Nesta questão foi pedido aos alunos para estimarem os valores dos limites: a) $lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}$ e b) $lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$. Para tal, os estudantes deveriam construir uma tabela de valores $x$ e $y$ e esboçar os gráficos das funções para confirmar os resultados dos limites encontrados por estimativa na tabela de valores.

*Objetivo da questão*. Estimar o resultado de limites de funções por meio da construção de tabelas e da representação gráfica de funções. Favorecer o uso de outras representações na determinação de limites de funções.

*Resultados*. Em relação ao $lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}$, não teve nenhuma resposta correta; entretanto, cinco estudantes a fizeram parcialmente correta: Riquelme, Cintia, Nana e Nelson construíram corretamente as tabelas e o gráfico da função, mas não estimaram o valor do limite da função; e Graziela fez corretamente o gráfico e preencheu a tabela coerentemente, mas estimou o valor do limite da função erroneamente (ver Figura 33). Cinco estudantes responderam incorretamente e sete responderam de forma ininteligível ou sem resposta, conforme vemos na Tabela 37.

Tabela 37 – Respostas dos estudantes na questão 4a) – Parte 1 do 2.º questionário

| Tipo de resposta | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Correta | 0 | 0,0% |
| Parcialmente correta | 5 | 29,4% |
| Incorreta | 5 | 29,4% |
| Ininteligível | 5 | 29,4% |
| Não resposta | 2 | 11,8% |

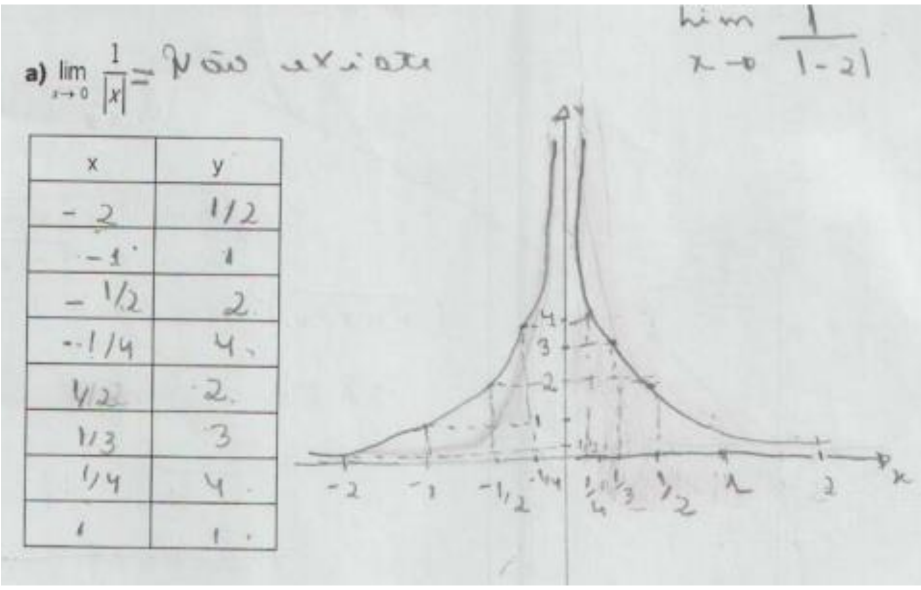



Figura 33 – Resposta de Graziela na questão 4a) – Parte 1 do 2.º questionário

Em relação ao $lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$, Nana e Graziela fizeram corretamente tanto o gráfico quanto a construção da tabela e responderam corretamente informando que o limite da função não existe (ver Figuras 34 e 35). Riquelme e Cintia responderam parcialmente correto, seis estudantes responderam incorretamente e sete estudantes responderam de forma ininteligível ou sem resposta, conforme vemos na Tabela 38.

Tabela 38 – Respostas dos estudantes na questão 4b) – Parte 1 do 2.º questionário

| Tipo de resposta | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| Correta | 2 | 11,8% |
| Parcialmente correta | 2 | 11,8% |
| Incorreta | 6 | 35,3% |
| Ininteligível | 5 | 29,4% |
| Não resposta | 2 | 11,8% |

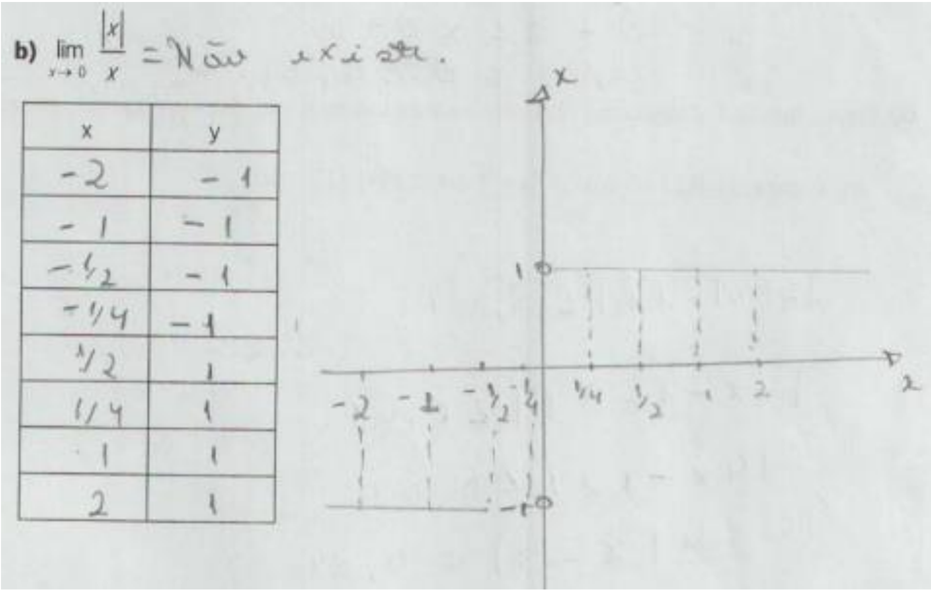



Figura 34 – Resposta de Graziela na questão 4b) – Parte 1 do 2.º questionário

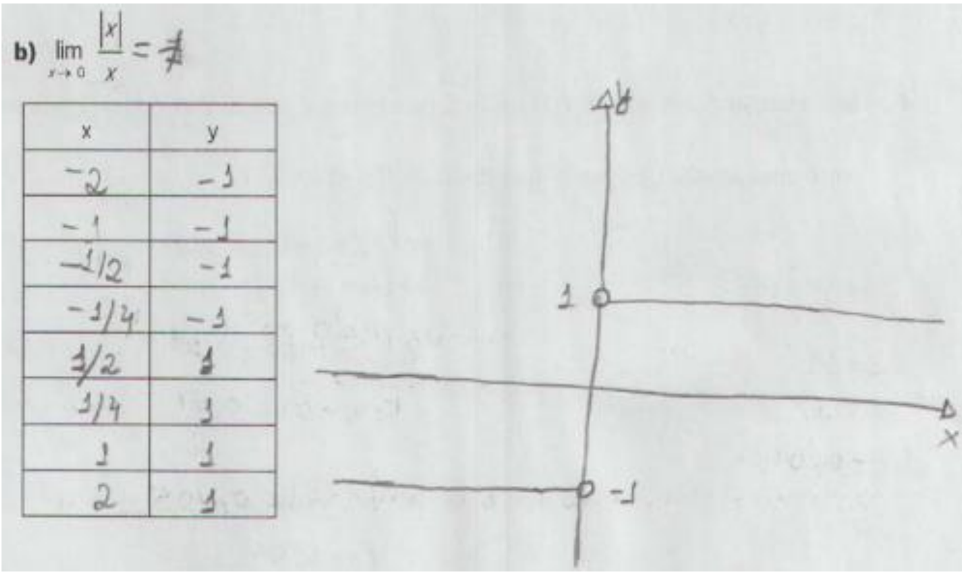



Figura 35 – Resposta de Nana na questão 4b) – Parte 1 do 2.º questionário

*Análise*. A questão serviu para confirmar a dificuldade dos estudantes em relação à representação gráfica, pois sem a elaboração do gráfico fica difícil determinar o limite da função, embora a questão ainda pedisse a construção de uma tabela na qual eles estimassem o valor do limite da função. Conforme a pesquisa de Santos (2010), na qual a autora compara exercícios de manuais antigos portugueses com atuais em relação ao ensino de Cálculo, mais especificamente de limites, a autora concluiu que houve uma evolução positiva em relação aos manuais atuais, pois estes já procuram abordar o ensino de limites por meio de representações gráficas mais completas, conforme vemos no trecho abaixo referente à conclusão do seu estudo.

> O resultado não terá sido o que se esperava, pois recentemente houve necessidade de reformular o estudo dos limites das funções. Por um lado, a introdução deste conceito, passou a ser feito a partir das propriedades das funções racionais fraccionárias de forma intuitiva, e por outro lado, o estudo do conceito, foi alargado em termos temporais – estudo intuitivo num ano e formalização do conceito no ano seguinte. Com estas alterações, podemos supor que os estudantes passaram a conhecer melhor este conceito? Provavelmente, sim. Na verdade, fazendo a comparação entre os exercícios propostos nos manuais mais recentes e nos mais antigos, facilmente nos apercebemos da grande diferença, no sentido de existir uma evolução positiva. Actualmente, só pelo facto de fazermos uma exploração gráfica mais completa, acreditamos que o estudante formule uma imagem mais próxima daquela que se pretende e, neste sentido, é compreensível o estudo das assimptotas, neste momento. Os exercícios dos manuais mais antigos restringem-se, basicamente, ao Cálculo de limites, com aplicação no estudo da continuidade. (Santos, 2010, p. 117)

A autora aborda fundamentos cruciais como o processo do estudante em formular uma "imagem mais próxima daquela que se pretende". Isso teria imbricações numa aprendizagem significativa relacionando aspectos do pensamento matemático avançado, pois fica claro que os exercícios atuais, não só dos manuais de Portugal, mas num contexto maior, já buscam meios para se tornar em um material potencialmente significativo e, uma vez conseguido isto, dependerá apenas de mais dois aspectos para oportunizar a aprendizagem significativa, que é a mediação do professor trabalhando com múltiplas representações, como foi o caso de nosso estudo e da predisposição do estudante em querer aprender de forma significativa.

Conforme o objetivo da questão e na perspectiva de construção de múltiplas representações, corroborando as ideias de Santos (2010), apresentamos a quinta pergunta das entrevistas: Que relação ou relações existem entre a definição verbal do limite de uma função e a sua representação na forma geométrica e gráfica? Se possível, exemplifique e justifique a resposta – em que se questionaram as relações entre duas representações para limites de funções: a geométrica e a analítica.

As respostas dos estudantes às entrevistas não apresentaram relações entre as representações geométrica e analítica de limites de funções; entretanto, elas indicaram ideias e pensamentos dos estudantes ao conceberem a definição de limites de funções, ou seja, os alunos optaram pelos tipos de representação em vez de mostrar as suas relações, e isso está diretamente ligado, segundo Vinner (1991), às suas imagens conceituais e à definição conceitual do pensamento matemático.

Alguns estudantes entendem que a definição de limites de funções na perspectiva geométrica ajuda-os a visualizar ou clarificar a definição, como podemos ver nas respostas de Nelson, Albert e Lázaro, abaixo:

> Vai... vai... pode dar uma noção de como você vai trabalhar, de como trabalha com limite, já o gráfico você tem uma visão mais ampla da parte escrita. Eu acho que na parte gráfica você vai tá [está] vendo cada parte daquele escrito, vai analisar através do gráfico, acho que através do gráfico você já tem uma visão melhor do que vê na parte escrita, algebricamente. (Trecho da fala de Nelson)
>
> Na parte verbal, porque graficamente vai-me ajudar a visualizar melhor a definição. (Trecho da fala de Albert)
>
> Acho que é...em relação à forma verbal, no começo, eu tinha um pouco de dificuldade e ainda tenho em relação a essa forma analítica e o gráfico já mostra um pouco mais, é mais detalhado, e mais visível para identificar a questão dos intervalos, a questão do ponto sim. (Trecho da fala de Lázaro)

Conforme as respostas, percebemos que estes estudantes utilizam os gráficos de funções como meio fundamental para construção das suas imagens conceituais e na apreensão do conteúdo de limites de funções. Já nos diálogos com Martins e Aysha podemos ver que eles optam pela parte geométrica, revelando a apreensão do conteúdo por meio da sua imagem conceitual e, possivelmente, a utilizam na construção de uma definição conceitual pessoal (Tall & Vinner, 1981).

> Martins: A visualização na parte gráfica, porque acho que a compreensão é completamente diferente e muito mais ampla... (ininteligível).... deu problema na forma gráfica, pra [para] quem não tem muito costume, frequência ou familiaridade com limites. É complicada a forma de álgebra.
>
> Pesquisador: A gráfica é muito mais fácil?
>
> Martins: É..., facilita a visualização de épsilon e delta.
>
> Aysha: Eu acredito que é bastante diferente.
>
> Pesquisador: E o que você diferencia assim..., me diga um ponto?
>
> Aysha: No gráfico é mais fácil a gente compreender do que pela definição, ali pela escrita, pelos símbolos e tudo.

> Pesquisador: Então a representação geométrica é mais fácil?
>
> Aysha: Tem momentos que fica mais complicado, mas a definição escrita em si é mais fácil de compreender (referenciando a representação geométrica).

Apesar de a maioria dos estudantes ter preferido a representação geométrica, não podemos generalizar que aprendizagem de um conteúdo deva se basear sempre na imagem conceitual, pois Tall e Vinner (1981) definem diversos tipos de relação entre a imagem conceitual e a definição conceitual, em que a informação ou o novo conteúdo chega ao indivíduo pela imagem conceitual ou definição conceitual, podendo haver ou não interação entre estas duas células, e a resposta deste indivíduo tem por base uma das duas células.

Ainda, os dados indicaram que têm estudantes que preferem aprender o conteúdo por meio da definição, como é o caso de Lívia, quando diz: "No meu ver, ou se é minha dificuldade com os gráficos, prefiro na forma verbal, porque é mais explicado e entendo melhor do que realizar um gráfico, eu acho melhor verbal. Acho primeiro a definição para depois ir para o gráfico" (Trecho da fala de Lívia).

Por outro lado, tivemos opiniões divergentes das apresentadas, em que devia haver uma interação entre as células da imagem conceitual e da definição conceitual, na qual a informação deve entrar por qualquer uma delas, mas elas precisam dialogar entre si (Vinner, 1991). Este é o caso de Riquelme: que diz:

> O épsilon e delta a gente vai pegar mais na prática, pra [para] pegar uma definição já feita e vai seguir aquela regra e a gente usando gráfico vai ver o que acontece, o ideal é que fosse os dois, a gente usava no papel, né... fazendo teoricamente e também usando... vendo no gráfico como se fosse na prática, pra [para] ver o que acontece sobre funções usando o gráfico, então os dois eu acho que foi. (Trecho da fala de Riquelme)

Os estudantes não conseguiram ver nenhuma relação entre as duas representações, porém, pelas respostas dos estudantes, infere-se que a maioria deles entende que a representação geométrica de limites de funções está ligada a gráficos e que esta é mais fácil para visualização. Entretanto houve estudantes, como Lívia, por exemplo, que afirmaram que a analítica é a melhor forma, que a preferem à geométrica, conforme vimos nas falas dos entrevistados acima. Finalmente, o estudante Riquelme defendeu que as duas representações são importantes para aprendizagem da definição do conceito de limites.

Em relação à questão do questionário e às entrevistas aqui apresentadas, podemos concluir que a tabela e o gráfico apresentaram-se em nosso estudo como mais duas representações na tentativa de promover a aprendizagem do conteúdo de limites pelos participantes. Buscamos junto a elas dinamizar e facilitar a construção de subsunçores bem estruturados e a formação de imagens conceituais bem definidas na mente dos estudantes sobre o conteúdo de limites.

**Questão 5**. Dado o gráfico da função $f(x) = \sqrt{4x+1}$, com destaque do ponto (2,3), foi pedida aos estudantes a localização de todos os possíveis números reais de $\delta$ tais que $\left|\sqrt{4x+1} - 3\right| < 0{,}5$, sempre que $|x-2| < \delta$.

*Objetivo da questão*. Analisar se os estudantes conseguiriam associar o enunciado da questão com a definição formal de limites de funções e se eles conseguiriam resolver geometricamente o limite da função $f(x) = \sqrt{4x+1}$ nas proximidades de $x = 2$ e o valor de $\delta$ que satisfizesse as inequações do enunciado.

*Resultados*. Na Tabela 39 apresentam-se os diferentes tipos de resposta dos estudantes nesta questão.

Tabela 39 – Respostas dos estudantes na questão 5 – Parte 1 do 2.º questionário

| Tipo de resposta | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Correta | 5 | 29,4% |
| Parcialmente correta | 1 | 5,9% |
| Incorreta | 6 | 35,3% |
| Ininteligível | 3 | 17,6 % |
| Não resposta | 2 | 11,8% |

Nas Figuras 36 e 37, abaixo, vemos a resposta correta de Riquelme e a resposta parcialmente correta da estudante Lívia, que errou no uso de um sinal e consequentemente numa operação matemática.

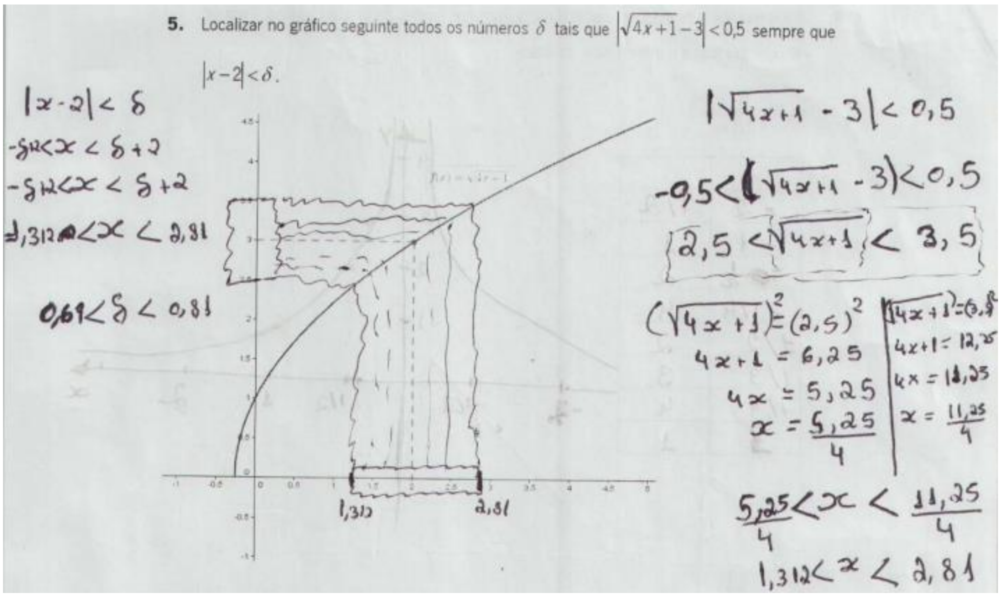



Figura 36 – Resposta de Riquelme na questão 5 – Parte 1 do 2.° questionário

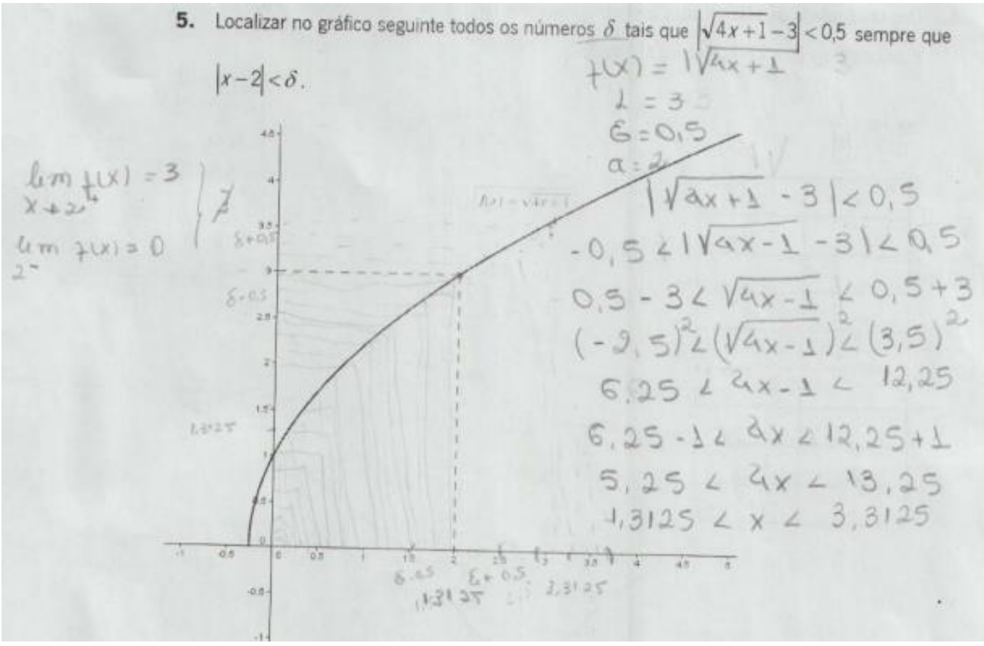



Figura 37 – Resposta de Lívia na questão 5 – Parte 1 do 2.° questionário

*Análise*. Pela complexidade da questão, acreditamos que o resultado tenha sido positivo, pois cinco estudantes, de dezessete, conseguiram entender e resolver a questão corretamente. Isto mostra que a ideia intuitiva de limites de funções pode funcionar muito bem com a resolução de exercícios que a exige, principalmente para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado nestes estudantes.

**Questão 6**. Dada a função $f(x) = 4x - 1$ e o $lim_{x \to 3} f(x) = 11$, foi pedido para encontrar um $\delta$ para $\varepsilon = 0{,}01$, tal que $0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 11| < 0{,}01$.

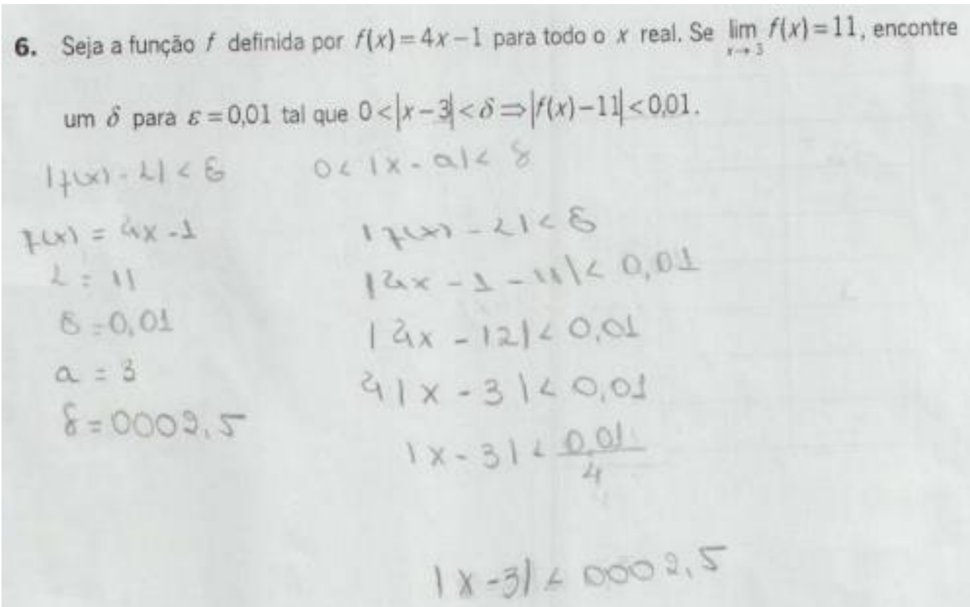
*Objetivo da questão*. Avaliar o uso da definição de limites numa questão particular com valores numéricos, ou seja, aferir se os estudantes utilizam a definição de limites de funções para resolver a questão e conseguem encontrar um valor para o $\delta$.

*Resultados*. Na Tabela 40 apresentam-se os diferentes tipos de respostas dos estudantes nesta questão.

Tabela 40 – Respostas dos estudantes na questão 6 – Parte 1 do 2.º questionário

| Tipo de resposta | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Correta | 7 | 41,2% |
| Parcialmente correta | 3 | 17,6% |
| Incorreta | 5 | 29,4% |
| Não resposta | 2 | 11,8% |

Destaque para os três estudantes que responderam parcialmente correto, sendo que dois deles erraram em operações matemáticas e o outro errou na fatoração, conforme vemos nas respostas das Figuras 38, 39 e 40.


**6.** Seja a função $f$ definida por $f(x)=4x-1$ para todo o $x$ real. Se $\lim_{x\to 3} f(x)=11$, encontre um $\delta$ para $\varepsilon=0{,}01$ tal que $0<|x-3|<\delta \Rightarrow |f(x)-11|<0{,}01$.

$|f(x)-L|<\varepsilon$ $\quad 0<|x-a|<\delta$

$f(x)=4x-1$

$L=11$

$\varepsilon=0{,}01$

$a=3$

$\delta=0002{,}5$

$|f(x)-L|<\varepsilon$

$|4x-1-11|<0{,}01$

$|4x-12|<0{,}01$

$4|x-3|<0{,}01$

$|x-3|<\frac{0{,}01}{4}$

$|x-3|<0002{,}5$

Figura 38 – Resposta de Lívia na questão 6 – Parte 1 do 2.º questionário

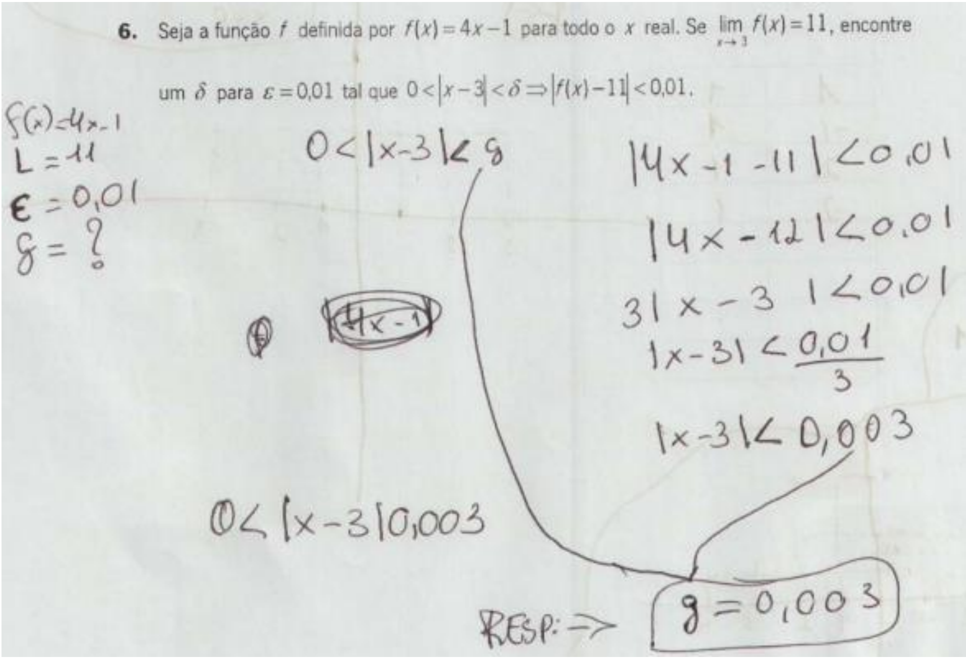



Figura 39 – Resposta de Aragão na questão 6 – Parte 1 do 2.º questionário

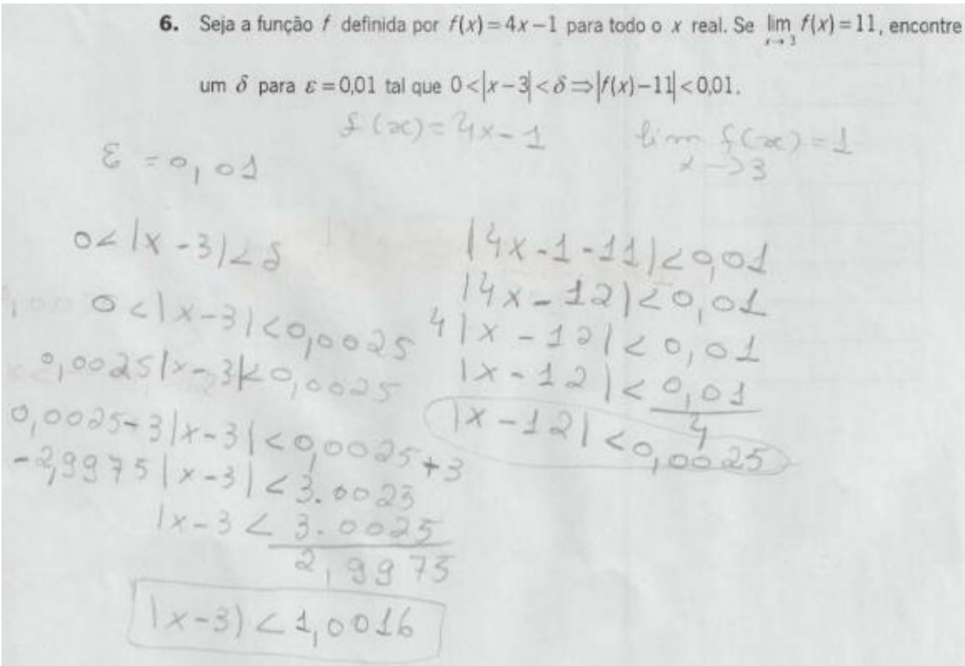



Figura 40 – Resposta de Thamyres na questão 6 – Parte 1 do 2.º questionário

*Análise*. Esta questão reforça a ideia do que foi pedido na questão anterior e ratifica, com base nos resultados encontrados, um significativo desenvolvimento dos estudantes com questões que trabalham com um nível de complexidade maior. Segundo Tall e Vinner (1981), é necessária para o pensamento matemático avançado a exploração de problemas e exercícios com um nível de exigência e rigor matemático maior, pois, segundo os autores, o fato de os estudantes pensarem a respeito de questões complexas favorece o seu desenvolvimento em questões mais simples e consequentemente aprimora o seu pensamento matemático avançado e a aprendizagem de conteúdos matemáticos mais complexos.

E foi nesta perspectiva que a questão foi proposta, pois mesmo os estudantes que não conseguiram êxito com a questão criaram subsunçores suficientes e necessários para posteriormente, num contato maior com o conteúdo, poderem aprender de forma significativa o conceito de limites de funções. Por ora, podemos dizer que a questão foi criada de forma potencialmente significativa para a resolução de problemas que exigem o conhecimento e significado da definição de limites de funções.

### 4.3.2. Perspectivas dos alunos

Apresentaremos nesta subseção as respostas dos estudantes referentes às questões da Parte 2 do 2.º questionário. Utilizaremos também trechos das entrevistas, como citações e acréscimos aos dados obtidos nos questionários, numa perspectiva de integração de informação proveniente de diferentes fontes.

As entrevistas foram feitas com base num roteiro de entrevista com oito perguntas – ver em Anexo 6. Salientamos que em algumas entrevistas foi necessário inserir perguntas que não constavam do roteiro de entrevista, com o intuito de esclarecer e evidenciar o objetivo determinado. Portanto, as entrevistas de tipo semiestruturada serviram para acrescentar informações às questões de pesquisa, uma vez que entendemos que elas poderiam evidenciar dados que não foram observados nem respondidos nas tarefas executadas no ciclo de estudos.

**Questão 1.** Salientamos que esta questão não aparece na análise, pois a mesma se trata da identificação dos nomes dos estudantes participantes.

**Questão 2**. Foi perguntado aos estudantes, numa escala de cinco opções – Muito fraco, fraco, razoável, bom e muito bom –, qual seria a opção que traduziria o desempenho de cada um nas atividades desenvolvidas na pesquisa.

*Objetivo da questão*. Analisar qualitativamente como os estudantes se autoavaliaram perante as atividades desenvolvidas na pesquisa.

*Resultados*. Dentre as opções assinaladas, obtiveram-se os seguintes cômputos registrados na Tabela 41.

Tabela 41 – Respostas dos estudantes na questão 2 – Parte 2 do 2.º questionário

| Tipo de resposta | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Muito Fraco | 2 | 11,8% |
| Fraco | 2 | 11,8% |
| Razoável | 7 | 41,2% |
| Bom | 4 | 23,5% |
| Muito Bom | 2 | 11,8% |

*Análise*. Os dados apontam para certo receio existente nos estudantes quanto ao estudo de conteúdos matemáticos, especialmente em limites de funções, pois dos dezessete estudantes que responderam a esta questão sete se autoavaliaram em razoável, mesmo sendo graduandos em matemática.

Ainda, quatro deles disseram ter um bom desempenho nas atividades desenvolvidas na pesquisa. Este dado é importante, pois ele caracteriza uma predisposição dos estudantes em aprender o conteúdo de limites de funções. Segundo Ausubel et al. (1980) e conforme a teoria da aprendizagem significativa, a predisposição em querer aprender é algo de extrema relevância para a ocorrência da aprendizagem significativa: "o aprendiz deve querer relacionar os novos conhecimentos, de forma não-arbitrária e não literal, a seus conhecimentos prévios. É isso que significa predisposição para aprender" (Moreira, 2013a, p. 12).

Na visão de Moreira, a predisposição para aprender não se refere exatamente à motivação ou a gostar do conteúdo. O autor refere que,

> Por alguma razão, o sujeito que aprende deve se predispor a relacionar (diferenciando e integrando) interativamente os novos conhecimentos na sua estrutura cognitiva prévia, modificando-a, enriquecendo-a, elaborando-a e dando significados a esses conhecimentos. Pode ser simplesmente porque ela ou ele sabe que sem compreensão não terá bons resultados nas avaliações. Aliás, muita da aprendizagem memorística é sem significado (a chamada aprendizagem mecânica) que usualmente ocorre na escola resulta das avaliações e procedimentos de ensino que estimulam esse tipo de aprendizagem. (Moreira, 2013a, p. 12).

Neste sentido, voltando aos resultados obtidos nesta questão, podemos identificar dentre as respostas dos estudantes uma predisposição em querer aprender, pois de todos os dezessete estudantes tivemos apenas quatro respostas em que os estudantes se autoavaliaram com um desempenho fraco ou muito fraco. Entretanto, com base na observação das atividades executadas no ciclo de estudos, podemos dizer que a predisposição em querer aprender foi unânime entre os participantes.

Associada a esta questão do questionário, destacamos a pergunta da entrevista: Qual o momento do ciclo de estudos mais significativo para você? E o menos significativo? Por quê? Conforme as respostas dos estudantes, observamos que eles responderam, por unanimidade, que a parte mais significativa foi as tarefas realizadas no ciclo de estudos, principalmente as que fizeram uso de *softwares* e da construção do mapa conceitual, comprovando esta predisposição em querer aprender. Abaixo apresentamos um trecho da fala de Albert, que corrobora a nossa análise sobre esta questão.

> Bom [...], o mais significativo foi o momento ali das atividades, algumas atividades que resolvemos juntos no ciclo de estudos, e [...] os mapas também, o mapa conceitual que foi significativo, que fez, fazer assim, um resumo de tudo aquilo que entendíamos sobre limites da função. (Trecho da fala de Albert)

Em relação à parte menos positiva, Nelson diz que:

> Olha, o ciclo de estudos foi significativo porque é... a gente trabalhou o assunto que ia pegar no semestre seguinte, então isso foi um ponto positivo. Como ponto negativo sinceramente não vejo. Eu vejo mais ponto positivo justamente por isso, é um assunto teoricamente novo para nós, então fez com que chegasse no segundo semestre tendo uma noção do que é limite. (Trecho da fala de Nelson)

Conforme a fala de Nelson supracitada, percebemos que, também por unanimidade, os estudantes afirmaram não existir esta parte menos positiva e que todas as tarefas executadas na pesquisa foram válidas para o seu desenvolvimento intelectual, inclusive para a aprendizagem de limites de funções, conforme vemos na fala de Riquelme, abaixo.

> E o momento menos significativo acho que não teve esse momento, acho que não existe em nossos estudos, porque qualquer coisa que a gente adquiriu lá [referenciando ao ciclo de estudos] foi proveitoso para nosso estudo, proveitoso para nossa carreira. (Trecho da fala de Riquelme na entrevista)

**Questão 3**. Foi perguntado aos estudantes o que eles aprenderam com as atividades desenvolvidas na pesquisa.

*Objetivo da questão*. Obter informações dos participantes a respeito das aprendizagens que eles realizaram no estudo.

*Resultados*. Sete estudantes informaram que foi o conceito e a definição de limites de funções. Houve ainda seis estudantes que responderam limites, sendo que um deles afirmou que a aprendizagem de gráficos foi o conteúdo principal, e um estudante que respondeu noção do conceito de limites. Dois estudantes afirmaram que aprenderam o conceito de função. Um estudante respondeu que aprendeu a noção de mapa conceitual, conforme vemos na Tabela 42.

Tabela 42 – Respostas dos estudantes na questão 3 – Parte 2 do 2.º questionário

| Categorias | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| O conceito e a definição de limites de funções | 7 | 41,2% |
| Limites | 6 | 35,3% |
| Conceito de função | 2 | 11,8% |
| Gráficos | 1 | 5,9% |
| Mapa conceitual | 1 | 5,9% |

Ainda sobre estas respostas, algumas delas acrescentaram mais conteúdos e conhecimentos. Por exemplo, quatro estudantes responderam que aprenderam a utilizar *softwares* e tecnologias informáticas, três estudantes responderam gráficos, um estudante respondeu continuidade, um estudante respondeu revisão de conteúdos do ensino médio e, finalmente, outro estudante respondeu que aprendeu a fazer pesquisa.

*Análise*. Segundo as respostas dos participantes, em sua maioria, foi dito que o conteúdo de limites de funções ou apenas limites foi o conteúdo mais estudado e aprendido. Este dado nos mostra que o objetivo do ciclo de estudos cumpriu com o planejado, que era aprender o conceito e a definição de limites de funções. A credibilidade e confiabilidade destes resultados foram comprovadas nas entrevistas feitas com os estudantes, nas quais eles voltaram a afirmar que as atividades desenvolvidas no ciclo de estudos contribuíram para uma "melhor" aprendizagem do conteúdo de limites de funções. Sendo assim, acreditamos que este "melhor" seja no sentido de uma aprendizagem significativa do conteúdo proposto.

A primeira pergunta das entrevistas – O que você aprendeu com as atividades realizadas no ciclo de estudos? – auxiliou na análise dos dados desta questão, pois, em relação às respostas dos entrevistados, foi confirmado o resultado das respostas obtidas nesta questão do questionário, ou seja, pudemos verificar que quase todas as respostas incidiram no conteúdo de limites de funções, sendo que alguns estudantes complementaram informando a importância do auxilio de aplicativos, como o *GeoGebra*, *Winplot* e *Excel*, para a aprendizagem de limites. Todavia, alguns estudantes disseram que aprenderam o uso e a manipulação desses aplicativos, enquanto outros participantes responderam que aprenderam como fazer mapas conceituais e a construção de gráficos, como podemos ver nos trechos de entrevistas seguintes.

> É… eu aprendi uma noção sobre limite, tive uma aprendizagem boa, porque é um assunto que eu ainda não conhecia e ele me abriu uma porta, pra [para]… é… entender melhor este assunto. É… me dar uma ferramenta pra [para] estudar sobre o assunto. (Trechos da entrevista de Aragão)

> Bom! É... foi possível aprender sobre conceito de limite, sobre as variáveis, sobre, como posso dizer... sobre como se fazer um mapa conceitual, isso o professor tirando as dúvidas, dando assim sentido para que pudessemos responder de acordo com o trabalho feito. (Trechos da entrevista de Bella)

> Aprendi a fazer mapa conceitual e sobre os assuntos de limites. (Trechos da entrevista de Obama)

**Questão 4**. Nesta questão, os estudantes foram interrogados sobre a utilidade dos livros Guia mangá Cálculo Diferencial e Integral e Cálculo para Leigos no estudo de limites de funções.

*Objetivo da questão*. Analisar, através da opinião dos estudantes, o uso de dois livros não convencionais no estudo de limites de funções.

*Resultados*. Todos os estudantes participantes afirmaram que os livros foram úteis para o estudo de limites de funções, sendo que, nas suas justificativas, as respostas se assemelharam e as classificamos nas seguintes categorias apresentadas na Tabela 43.

Tabela 43 – Respostas dos estudantes na questão 4 – Parte 2 do 2.º questionário

| Categorias | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Serviram para o estudo de limites de funções | 9 | 52,9% |
| Linguagem fácil, clara e objetiva para compreensão do conteúdo estudado | 7 | 41,2% |
| Transmitiram conhecimentos | 2 | 11,8% |
| Mau desempenho pessoal | 1 | 5,9% |

Destacamos a categoria mau desempenho pessoal, em que o estudante justificou que não usou o livro devido ao seu mau desempenho e interesse nos estudos da pesquisa.

*Análise*. Estes resultados reforçam a análise feita nas duas questões anteriores (questões 2 e 3), isto é, a predisposição dos alunos se constituiu em um elemento importante para a ocorrência da aprendizagem significativa, os materiais que eles utilizaram passaram a ser um segundo elemento relevante para a ocorrência da aprendizagem significativa.

Considerados por Ausubel et al. (1980), estes materiais devem ser "potencialmente significativos" e acreditamos que os livros utilizados na pesquisa, por terem uma abordagem diferenciada dos livros de texto usuais e mais próxima da linguagem e entendimento dos estudantes, foram materiais potencialmente significativos para a aprendizagem do conteúdo de limites de funções. Isso pode ser comprovado em trechos de entrevistas com os estudantes Albert e Riquelme.

> Sim[...], foi bem interessante porque, além de fazer com que o aluno visualize o problema, visualize a questão, ele [o livro] dá um estímulo também, porque, inclusive, nós fizemos um grupo de estudo, aí [...] eu mostrei aquele material e o pessoal xerocou [fizeram fotocópias]. Pessoal gostou bastante do material, porque o autor interage com o leitor. (Trechos da entrevista de Albert)

> o livro, eu achei interessante que eles além de mostrar os conceitos dos limites, eles também dão exemplos e exemplos muito presentes no dia a dia e exemplos muito significantes nos limites. Eu achei interessante pelo que adquiri naqueles livros, eu acho que sim juntamente com os outros colegas foi muito significante. (Trechos da entrevista de Riquelme)

Dos trechos das falas dos estudantes é perceptível que os livros utilizados no ciclo de estudos poderiam ser considerados potencialmente significativos, pois "é importante enfatizar aqui que o material só pode ser *potencialmente significativo, não significativo*: não existe livro significativo, nem aula significativa, nem problema significativo..., pois o significado está nas pessoas, não nos materiais" (Moreira, 2013a, p. 12, grifo do autor).

Nas entrevistas, a maioria dos estudantes viu o uso dos dois livros positivamente, afirmando que os mesmos possuem uma linguagem de fácil entendimento e que os ajudava a aprender o conceito de limites de funções, como podemos comprovar no seguinte diálogo, entre o pesquisador e a estudante Thamyres:

> Thamyres: Muito interessante o livro, e vai ajudar né, ajudou a estudar sobre limites.
>
> Pesquisador: Como a ajudou?
>
> Thamyres: É... a saber a definição de limites, a resolver e eu gostei muito dos livros.
>
> Pesquisador: O que achou da abordagem do livro? Muito distante ou parecida com os livros de texto? Ou não?
>
> Thamyres: Algumas coisas sim.
>
> Pesquisador: Mais fácil ou mais difícil?
>
> Thamyres: Eu acho o livro de Cálculo para leigos (referenciou este livro como se fosse o mais fácil).
>
> Pesquisador: Você recomendaria esses livros para outros estudantes de Cálculo? Por quê?
>
> Thamyres: Sim, porque é uma ajuda né. Porque a gente estuda aqui, o que pega na faculdade e o de cá, que o senhor deu o Cálculo para leigos. Eu acho que ajuda mais a desenvolver.

Pesquisador: Ajuda a aprender?

Thamyres: Isso.

**Questão 5**. Foi perguntado aos estudantes como eles avaliavam os materiais (livros, material impresso, tecnologias informáticas, etc.) utilizados nas atividades desenvolvidas no ciclo de estudos.

*Objetivo da questão*. Analisar, com base nas opiniões dos estudantes, o uso dos materiais supracitados e utilizados no desenvolvimento da pesquisa.

*Resultados*. Doze estudantes qualificaram como excelentes, ótimos e muito bons os materiais utilizados na pesquisa. Houve ainda um estudante que respondeu que os materiais são indispensáveis para o estudo e outro estudante afirmou que foi interessante e diferente do comum.

Em relação às respostas destes estudantes, elas foram acrescidas de algumas considerações, como por exemplo, os estudantes informaram que os materiais utilizados fortaleceram os conhecimentos e a aprendizagem de limites, principalmente os *softwares* para a construção de gráficos, e também que os materiais os auxiliaram na realização das atividades propostas, conforme a tabela 44.

Tabela 44 – Respostas dos estudantes na questão 5 – Parte 2 do 2.° questionário

| Categorias | Frequência | Percentagem |
|---|---|---|
| Os materiais utilizados fortaleceram os conhecimentos e a aprendizagem de limites | 8 | 47,1% |
| *Softwares* para a construção de gráficos | 2 | 11,8% |
| Auxiliaram na realização das atividades propostas | 3 | 17,6% |
| Indispensável para o estudo | 1 | 5.9% |
| Razoável o uso dos materiais | 1 | 5.9% |
| Achou complicado | 1 | 5.9% |
| Linguagem substancial e a presença do professor são indispensáveis | 1 | 5.9% |

Em contrapartida, também houve algumas avaliações menos positivas. Especificamente, um estudante considerou ser razoável o uso dos materiais, outro estudante achou complicado e outro ainda respondeu que a linguagem era substancial e que a presença do professor era muito mais significativa.

*Análise*. A maioria dos estudantes considerou os livros, os mapas e as tecnologias informáticas utilizada como um material que favoreceu o conhecimento de limites de funções.

Nesta perspectiva, podemos afirmar que estes materiais foram potencialmente significativos e isso enfatiza a resposta dada na questão anterior (questão 4). Com um material potencialmente significativo os estudantes conseguiram dar significados aos conteúdos estudados e representados por esse material. No nosso caso, nos estamos referenciando aos livros, mapas e tecnologias informáticas utilizadas no ciclo de estudos.

Para Ausubel et al. (1980), um material potencialmente significativo trará significados lógicos de um determinado conteúdo para os estudantes, transformando-o em significados psicológicos e idiossincráticos, e a aprendizagem só ocorrerá se o indivíduo conseguir, por meio de um material potencialmente significativo, relacionar os conhecimentos novos, adquiridos com o material, com subsunçores relevantes em sua estrutura cognitiva.

Quando perguntado nas entrevistas se os estudantes recomendariam os livros utilizados no ciclo de estudos, quase todos disseram que sim, como podemos ver nas falas de Nelson e Aysha, abaixo.

> Sim...o que eu achei que é um livro de fácil entendimento, dava para entender facilmente e com certeza recomendaria. (Trecho da entrevista de Nelson)

> Recomendaria, porque eu vejo que na utilização do livro, principalmente o de histórias em quadrinhos, faz a gente se interessar mais pelo assunto a aprender, não é aquela aula normal que é só em quadro, então modifica um pouco e faz com que o aluno tenha interesse em aprender. (Trecho da entrevista de Aysha)

Na fala da estudante Aysha é enfatizada a ideia de uma aprendizagem significativa em substituição a uma aprendizagem mecânica, que frequentemente observamos nas práticas de ensino.

Ainda sobre o uso de outros materiais e recursos utilizados no ciclo de estudos, as respostas às perguntas da entrevista: As atividades realizadas com o uso de *softwares* contribuíram para a aprendizagem de limite de funções? De que forma? (6.ª pergunta da entrevista) e As atividades desenvolvidas e os recursos utilizados contribuíram para um “melhor” aprendizado de limite de funções? Justifique a sua resposta (7.ª pergunta da entrevista) – revelaram mais informações dos estudantes a respeito deste assunto. Por exemplo, em relação à 6.ª pergunta da entrevista pudemos perceber que a maioria das respostas dos estudantes mostrou que eles utilizaram os *softwares* como meio para visualizar os gráficos das funções e consequentemente o limite delas em certos pontos do plano cartesiano, conforme verificamos nos diálogos abaixo:

> Nana: Sim... sim.

Pesquisador: De que forma?

Nana: De forma a entender o que seja limites, ver como é o ponto na vizinhança deste ponto, vamos tá [está] no eixo $x$, aproximando deste ponto e o que está acontecendo, aí você consegue visualizar quando o limite não existe, aí demora a gente perceber isso sem o uso da tecnologia, e com o uso da tecnologia você observa ali e rapidamente, você consegue entender a função.

Pesquisador: Sem o uso da tecnologia, qual é a dificuldade?

Nana: Captar rapidamente o conteúdo que está sendo trabalhado ali.

Pesquisador: De que forma elas contribuíram?

Nana: Da forma de entender o que seja limites, o que é limites.

Pesquisador: No início falou que tinha a ver com a visualização...

Nana: Visualizar propriamente e tal, a gente desapega mais, saber o ponto, a vizinhança deste ponto, não é isso como tá [está] no eixo $x$, aproximando deste ponto o que tá [está] acontecendo pra [para] ver e consegue visualizar e demora pra [para] perceber sem o uso da tecnologia. Já com o uso da tecnologia você observa ali e rapidamente consegue entender porque o limite não existe e porque os valores são diferentes.

Já na entrevista com Riquelme, desenvolveu-se o seguinte diálogo:

Riquelme: É, principalmente como tava dizendo, o gráfico foi muito bom pra [para] visualizar o que acontece entre as funções, o que acontece quando a gente se aproxima cada vez mais de um valor que a gente quer no limite, então o gráfico foi importante, por causa disso.

Pesquisador: E o *software* facilitou?

Riquelme: Facilitou muito, porque né....

Já na entrevista com Aysha foi registado o seguinte diálogo:

Aysha: Contribuíram bastante, tanto que assim... foi bom a gente ter aprendido junto com o senhor sobre o uso do *Winplot* e o *GeoGebra*, também... que a gente utilizou tanto nas atividades com o professor agora, ou seja, isto ajuda bastante porque na verdade a gente coloca ali o computador, não que ele vai dar a resposta inteira, mas ele já ajuda a ver o gráfico, a observar geralmente tudo.

Pesquisador: Então visualização é um ponto importante?

Aysha: Importante...

Na sétima questão da entrevista, semelhante à anterior, procurou-se identificar quais os recursos, além dos *softwares*, que foram úteis para o aprendizado de limites de funções. Pela análise das respostas dos estudantes, podemos dizer que os estudantes afirmaram unanimemente uma contribuição positiva das atividades e dos recursos utilizados. A seguir, seguem declarações de alguns estudantes que comprovam a nossa análise.

> Sim, porque é...assim como falou no começo, ainda não tinha conhecimento sobre o que era limite e além da pesquisa tá [está] trazendo o que é limite ainda trouxe ferramentas que ajudavam a gente a identificar ou visualizar os processos que aconteciam ali, naquele, nas funções, para melhor expressar. (Trecho da fala de Lázaro)

> Contribuíram, porque o alvo desse estudo foi mostrar tudo sobre limite e mostrando o que acontece né... o alvo que eu percebi do projeto foi mostrar tudo sobre funções, tudo o que acontece, o limite dessa função, o que acontece quando se aproxima de um valor, então isso aí foi... (Trecho da fala de Riquelme)

Em relação às atividades, alguns estudantes compararam as atividades desenvolvidas no ciclo de estudos com as atividades que estavam cursando em Cálculo I. Em relação aos recursos, muitos deles ainda ratificaram que o uso de *softwares* serviram para visualizar as atividades do ciclo, outros informaram que o uso de mapas conceituais contribuiu para o aprendizado de limites de funções, conforme vemos nos diálogos com os estudantes Bella, Nelson e Obama.

> Bella: Quando foi feita esta pesquisa, a gente não tinha noção do que seria Cálculo, o que seria limite em Cálculo, uma vez que a gente não estudava Cálculo 1 ainda, logo agora que a gente faz Cálculo 1, a gente viu que tem sim e tanto que teve trabalhos que a gente fez no laboratório com um *software* de gráficos e nos ajudou a entender realmente o que foi aprendido. Então essa pesquisa nos ajudou também a ter esse aprendizado prévio, que seria limites. Então foi um trabalho bem feito, tanto nas questões das atividades como na questão dos *softwares*, como no geral, foi uma boa bagagem.
>
> Pesquisador: O grupo que participou da pesquisa teve algum diferencial em relação aos outros colegas da sala?
>
> Bella. Sim.
>
> Pesquisador: Como você vê isso?
>
> Bella: Na questão do desenvolvimento, porque assim na nossa sala hoje tem vários colegas que repetem a matéria, é... então assim pra [para] gente não foi tão difícil, apesar que é difícil, mas se tornou até um pouco mais fácil na questão da compreensão que a gente teve nesse trabalho, entrou na verdade para fazer Cálculo 1 o que seria limites, conceito de limites, como deveria ser trabalhado, apesar que a gente trabalhou uma parte que a gente viu a partir da segunda unidade, mas mesmo assim logo no início, o que seria trabalhado na questão de limite, a gente tinha alguns *conceitos já formados* (Possíveis subsunçores).

Na entrevista de Nelson tivemos o seguinte diálogo entre o entrevistador e entrevistado:

Nelson: Sim... sim... claro, todas as atividades foram legais, agora eu destacaria a questão do mapa conceitual de todas as atividades que a gente fez.

Pesquisador: Você acha que o mapa feito individualmente e depois apresentado coletivamente ajudou na sua compreensão?

Nelson: Sim... sim... com certeza.

Já na entrevista com Obama, desenvolveu-se o seguinte diálogo:

Obama: Eu diria que sim, porque o uso da tecnologia informática facilita muito e mapas conceituais.

Pesquisador: Você falou dos mapas conceituais. Acha que eles ajudaram a ter uma melhor visão sobre o conteúdo?

Obama: No caso, quando eu fiz coletivamente, em sala.

Pesquisador: Você acha que o coletivo favoreceu em quê com relação ao individual?

Obama: Conceitos que eu não tinha visto, ponto de vista diferente.

Nas respostas de Nelson e Obama podemos ver claramente que os mapas conceituais serviram como um organizador prévio (Ausubel et al., 1980) para aprendizagem de limites de funções, principalmente quando Obama responde: "conceitos que eu não tinha visto, ponto de vista diferente". Isso mostra, conforme a teoria ausubeliana, a inexistência de conhecimentos prévios e a formação de subsunçores por meio de mapas conceituais que serviram como uma ponte para ele conhecer conceitos que posteriormente se constituirão em subsunçores para o próprio conhecimento de limites de funções.

Por fim, destaca-se a resposta de Albert, pois o mesmo utiliza a palavra internalizar, como sinônimo de fixar e aprender, para dizer que aprendeu o conteúdo de limites de funções, como vemos na citação abaixo:

> É (...) na verdade um aprendizado, porque, internalizar eu deixei de complementar, internalizar é fixar. Porque quando você tem o contato e resolve algumas questões e (...) visualiza graficamente, você tem uma visão melhor do conteúdo, dar pra enxergar realmente o que tá [está] dizendo." (Trecho da fala de Albert)

**Questão 6**. Esta questão consistiu num espaço aberto, onde os estudantes participantes podiam relatar suas críticas, sugestões, comentários, opiniões, etc. sobre o estudo desenvolvido.

*Objetivo da questão*. Identificar os anseios, expectativas e questões de ordem afetiva e emocional dos participantes em relação ao processo desenvolvido na pesquisa, ao mesmo tempo em que servirá como avaliação do nosso trabalho de pesquisa.

*Resultados e Análise*. Houve muita convergência entre as respostas dos estudantes, sendo que não iremos quantificar estudantes por respostas, e sim assinalaremos as categorias em ordem de maior incidência. Dentre elas, temos: a relevância para futuros conteúdos que irão estudar em semestres posteriores; pesquisas proveitosas; aprender algo novo (limite); importante para alunos iniciantes; gostou do ciclo de estudos; gostou do *GeoGebra* e adquirir mais experiências. Dentre as respostas com um teor mais crítico tivemos: tempo curto e rápido; elevada carga horária; ênfase na preferência para estudar conteúdos do semestre atual e autocrítica.

De forma análoga a esta questão do questionário, na última pergunta da entrevista – Em relação às atividades desenvolvidas na pesquisa, o que você acrescentaria? O que retiraria? Explique exemplificando. – os participantes puderam opinar a respeito do que tinham vivenciado na pesquisa, informando e sugerindo pontos a serem acrescentados ou retirados de futuras pesquisas em que se venha a trabalhar com esta temática.

Com base nas respostas dos estudantes, concluímos que eles foram unânimes em dizer que não retirariam nada. Entretanto, sugeriram acrescentar certos conteúdos e conceitos em futuros projetos em que se venha a estudar esta temática. Destaca-se, posteriormente, o diálogo estabelecido com o estudante Albert:

> Albert: Não [...] retirar acredito que não, porque foram bastante produtivas, ajudou bastante no aprendizado, internalizar o assunto e [...] foram todas satisfatórias.
>
> Pesquisador: Dê exemplo de uma atividade que você acha que mais acrescentou e que mais ajudou.
>
> Albert: Por exemplo, (...) a representação gráfica e as resoluções. A partir do momento que foram feitas as resoluções em sala e ao mesmo tempo mostrando a representação gráfica, aquilo criou um vínculo que realmente teve como internalizar e fixar o conteúdo.

Nesta última pergunta do pesquisador, o estudante Albert deu um exemplo que se considera relevante, quando ele afirma que "criou um vínculo que realmente teve como internalizar e fixar o conteúdo". Este internalizar já fora discutido nas questões anteriores e está ligado à aprendizagem significativa, pois o fato de internalizar é construir para dentro de si e dá uma ideia de solidez, ou seja, um conhecimento sólido e duradouro.

Essa internalização referida pelo estudante e vivenciada por ele, na resolução de um limite a partir da representação gráfica, ao mesmo tempo nos remete a uma ligação da imagem conceitual com a definição conceitual, pois, conforme Vinner (1991), é possível uma interação entre as duas células do pensamento matemático avançado e, como foi dito pelo próprio aluno, este momento foi para ele de grande valia, demonstrando interesse e predisposição juntamente com uma atividade que no seu olhar foi potencialmente significativa. Assim, podemos dizer que as condições para a ocorrência da aprendizagem significativa foi colocada em evidência pelas respostas do estudante e, possivelmente, este "internalizar" se caracterize como uma forma de aprendizagem significativa.

Na resposta de Graziela, a estudante oferece uma sugestão de acrescentar desafios e questões com níveis de abstração maiores, ou seja,

> Eu... o que eu acrescento... a gente poderia treinar mais as questões, assim... com um pouquinho mais de dificuldade como se fosse um desafio, puxar mais pela mente e... assim... podia ter outros livros também, sem ser esses dois, o outro já reforça mais. E retirar não retiro nada, porque o que fiz aqui eu aprendi. Se uma pessoa perguntar o que é limite eu vou lá e faço direitinho, gostei do projeto [referência de projeto ao ciclo de estudos].

Esta estudante nos mostra um dos princípios de Dreyfus (1991), utilizado por teóricos do pensamento matemático avançado, que é trabalhar com questões com níveis de abstrações maiores, pois isso fará com que conhecimentos mais elementares se tornem ainda mais simples e permite a compreensão de conteúdos mais avançados em matemática.

Outros estudantes, como Lázaro e Nelson, sugerem utilizar mais recursos informáticos, como podemos ver neste trecho de suas falas:

> Eu acho que eu não retiraria nada e se você acrescentar, poderia acrescentar em relação à pesquisa, mais especificamente, é... o uso mais frequentes dos *softwares*, porque eles ajudam muito. (Trecho da fala de Lázaro);
>
> Na verdade não retiraria nada, agora assim é...acho que focaria mais na parte de trabalhar com o *software*, dava mais ênfase nos *softwares*. (Trecho da fala de Nelson).

Obama acha que deveria utiliza/explorar mais o livro: Cálculos para Leigos, e não só para o conteúdo de limites. Por outro lado, Aysha vê que os livros utilizados na pesquisa deveriam ser mais ilustrados e que se eles assim fossem, provavelmente, estimulariam o interesse dos estudantes, como vimos no trecho abaixo:

> Aysha: Eu acho que não retiraria nada.

> Pesquisador: E acrescentaria o quê?
>
> Aysha: Possa ser que mais alguns livros que sejam no caso ilustrados que... como falei dar um interesse maior ao aluno, procurar mais pelo assunto, na verdade, agora... pra [para] mim foi ótimo.
>
> Pesquisador: De que livros você fala? São os livros que usamos ou livros comuns, livros de Cálculos?
>
> Aysha: Não... livro no caso que o senhor usou.

E, por fim, Martins sugere trabalhar mais a parte escrita e analítica do conceito de limites, conforme vemos no diálogo abaixo:

> Martins: Cobrança na parte analítica, porque a parte algébrica ajuda a enxergar o que está vendo e consegue identificar tudo aquilo ali.
>
> Pesquisador: Trabalhar mais com a definição?
>
> Martins: Com a parte escrita e analítica.

Por fim, além dos dados apresentados com as respostas dos estudantes às questões dos questionários e complementados com trechos e informações das entrevistas, houve, ainda, algumas perguntas das entrevistas que forneceram mais dados a respeito das percepções dos estudantes em relação ao ciclo de estudos e à pesquisa, como por exemplo, a 4.ª pergunta da entrevista: Quais as ideias, pensamentos, conhecimentos prévios, associações que você teve e utilizou para construir o conceito de limite de funções? Como você analisa o conceito construído por você comparado à definição formal de limite de funções? Eram muitos diferentes? Justifique a sua resposta. Esta pergunta assume-se como essencial para a nossa pesquisa, pois uma das questões de investigação eram os conhecimentos prévios e subsunçores dos estudantes participantes e, por meio destes, elaborar uma intervenção que viesse evidenciar fatos e comprovar indícios de uma aprendizagem significativa referente ao conceito de limites de funções.

> O que veio na minha cabeça foi funções, porque para existir um limite a gente tem que ter um estudo de funções, então acho que a primeira coisa que veio foi funções, depois as propriedades, na verdade como se dá as funções. (Trecho da fala de Riquelme)

Sendo assim, pelas respostas dos estudantes participantes, podemos dizer que os conceitos de funções, gráficos, plano cartesiano, coordenadas cartesianas e intervalos foram os conceitos mais evidentes nas respostas deles. Contudo, para os conceitos construídos pelos estudantes em comparação com a definição formal de limites de funções, a maioria dos estudantes afirmou que eram diferentes, pois eles não tinham noção do que seria o limite de uma função e muitos deles tentaram imaginar o limite como algo inatingível ou que não pode ser ultrapassado, confirmando os estudos de Cornu (1983; 2002), Juter (2006) e outros, especialmente, em relação às concepções espontâneas defendidas por Cornu (1983; 2002) e dos obstáculos epistemológicos estudados por Juter (2006).

Por exemplo, num diálogo entre o pesquisador e o participante Albert, podemos perceber claramente evidências de um possível conflito ou até mesmo de obstáculos epistemológicos a respeito do conteúdo de limites de funções, como vemos no seguinte diálogo.

> Albert: É (...) antes[...] antes de chegar à definição formal, eu (...) achava que teria que supor um (...) delta para encontrar um épsilon, aí depois eu pude ver que eu tenho que supor um épsilon. Daí, eu botei um correspondente em delta e eu acreditei que deverei calcular, que deveria dar uma função, deveria calcular o limite daquele ponto, mas na verdade, depois pude ver, que não deu para calcular, considerar aquele ponto, devo considerar os valores próximos para executar próximo do ponto.
>
> Pesquisador: Agora, porque você pensou dar o valor de delta para depois achar o épsilon, já que é o contrário. Porque você pensou assim?
>
> Albert: Porque função assim (...) não tem sempre o eixo das abcissas relacionado com o eixo das ordenadas. Você dá um valor para "$x$" para encontrar em "$y$", como delta estar em "$x$" e épsilon estar em "$y$".
>
> Pesquisador: Quais foram as ideias e os pensamentos quando você começou a escrever, ainda bem no começo, sobre o conceito de limite, quando escreveu seu conceito, o que veio em sua cabeça quando fez isso?
>
> Albert: Veio em minha cabeça que dado um ponto, eu deveria calcular o limite daquele ponto e não os valores próximos dele.
>
> Pesquisador: Do ponto mesmo?
>
> Albert: Do ponto mesmo!

O diálogo acima evidencia a ideia encontrada nos estudos de Barroso et al. (2009), quando a definição intuitiva se encontra dentro da definição formal, ou seja, que entre a definição formal e a definição intuitiva existe uma inversão do processo de aproximação, isto é, na definição formal não é a variável independente que produz uma aproximação da imagem da função ao limite, muito pelo contrário, é pelo grau de aproximação ao limite que se deseja impor à variável independente uma condição de limitação a um intervalo. Assim, percebemos muita semelhança no conflito revelado por Albert em relação à escolha primeiramente do delta em relação ao épsilon. O estudante ainda justificou o delta por ser na abscissa e o épsilon na ordenada, seguindo o processo utilizado para determinar o valor da imagem da função dado um valor no domínio da função.

A outra questão referente ao diálogo com Albert está associada ao pensamento do estudante em relação à função que está definida no ponto e ao valor do limite da função quando $x$ está próximo deste ponto serem iguais ou diferentes, pois o estudante pensava em estudar o limite de uma função sempre partindo de um ponto específico, só depois vindo a perceber que o estudo do limite se dá não num ponto específico ou num intervalo em torno deste ponto.

Na resposta dada pelo estudante Aragão, percebemos a ideia do limite como algo que é uma “aproximação” de algum número máximo ou mínimo inalcançável ou inatingível, como vemos a seguir:

> Limite de uma função logo quando eu pensei que seria a... é... a... aproximação da função. Tipo... é o máximo e o mínimo de que essa função se pode aproximar de tal número. (Trecho da fala de Aragão)

Já o estudante Obama nos revela que ao se pensar no que seria o limite de uma função haveria certo valor que não seria ultrapassado, como podemos ver neste trecho da sua fala: “eu pensava que era assim... um Cálculo que a gente ia fazer que só ia até um valor e que não passava, achava interessante” (Trecho da fala de Obama). Posteriormente, o estudante nos diz que o conceito construído por ele não tinha nada a ver com a definição de limite de uma função.

Trataremos no capítulo seguinte às considerações finais desta pesquisa, na qual procuraremos, com base no construto teórico desenvolvido na pesquisa, juntamente com os dados revelados e analisados, responder às questões de investigação formuladas neste estudo.

# CAPÍTULO V

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo foi subdividido em quatro subcapítulos: 5.1. Síntese do Estudo; 5.2. Quais os conhecimentos, impressões e expectativas dos estudantes ao iniciar o estudo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, em especial, limites de funções; 5.3. Quais recursos os professores utilizam para ensinar limites de funções? E qual a sua relevância para a aprendizagem dos estudantes de Cálculo Diferencial e Integral I; 5.4. Como o uso de recursos informacionais e comunicacionais pode contribuir para a aprendizagem significativa de limites de funções por estudantes de Cálculo Diferencial e Integral I e 5.5. Recomendações para futuras pesquisas. Os três subcapítulos – 5.2. 5.3. e 5.4. – correspondem às questões de investigação da pesquisa, das quais, serão respondidas individualmente.

## 5.1. Síntese do Estudo

Neste capítulo apresentamos as ideias conclusivas sobre a investigação realizada nesta pesquisa, ciente da subjetividade inerente ao processo metodológico adotado e do “olhar” do pesquisador sobre os dados revelados.

Para dar subsídio às questões de investigações nos reportamos a um aporte teórico com o objetivo de fornecer informações necessárias para uma análise coerente e reveladora dos dados coletados. Na construção dos aportes teóricos ressaltamos as possíveis imbricações entre a teoria da aprendizagem significativa (TAS) com o pensamento matemático avançado (PMA), pois é factível uma percepção de coerências entre a teoria escolhida e as ideias do pensamento matemático avançado. Os autores citados na fundamentação teórica, tanto da TAS quanto do PMA demonstraram em vários estudos que existem relações entre eles. Assim, podemos dizer que a construção da subseção 2.3. – A teoria da aprendizagem significativa e o pensamento matemático avançado: possíveis relações – mostra alguns conceitos e definições que retratam sobre as mesmas questões se interacionando, ora apresentando semelhanças ora diferenças.

É o caso de relacionarmos a imagem conceitual e definição conceitual de Vinner (1991) com a teoria da aprendizagem significativa, sendo esta última vista, especialmente, como uma aprendizagem de conceitos por descoberta e por recepção, na qual o aluno irá desenvolver aprendizagens de conceitos novos através das suas imagens conceituais ou da própria definição conceitual. Este contato, segundo a TAS, pode ser feito por recepção, no qual o professor oferece ao estudante o conhecimento pronto e acabado, ou por meio da descoberta, no qual o estudante irá buscar por si próprio aprender o novo conceito. (Ausubel et al., 1980).

O estudo aqui apresentado focou-se nas três questões seguintes de investigação:

5.2. Quais os conhecimentos, impressões e expectativas dos estudantes ao iniciar o estudo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, em especial, limites de funções?

5.3. Quais recursos os professores utilizam para ensinar limites de funções? E qual a sua relevância para a aprendizagem dos estudantes de Cálculo Diferencial e Integral I?

5.4. Como o uso de recursos informacionais e comunicacionais pode contribuir para a aprendizagem significativa de limites de funções por estudantes de Cálculo Diferencial e Integral I?

A investigação realizada se enquadrou, fundamentalmente, num paradigma qualitativo, assumida por uma natureza interpretativa e desenvolvida ao longo de três momentos distintos: no 1.º momento, com o propósito de diagnosticar os conhecimentos dos estudantes sobre conteúdos relacionados com o conceito de limites de funções, foi aplicado um questionário aos estudantes; no 2.º momento, com o propósito de desenvolver a aprendizagem dos estudantes sobre limites de funções, implementou-se um ciclo de estudos construído com atividades a partir das respostas dos estudantes ao questionário aplicado no 1.º momento e de entrevistas aos professores com o propósito de aprofundar o conhecimento sobre a realidade do ensino do tema limites de funções; e no 3.º momento, com o propósito de verificar a aprendizagem dos estudantes sobre limites de funções e as suas percepções sobre o ciclo de estudos, aplicou-se um questionário sobre limites de funções e efetuaram-se entrevistas aos estudantes, respectivamente.

Nas três seções seguintes são apresentadas e discutidas as respostas às questões de investigação da pesquisa, utilizando como referência a análise dos dados desenvolvidos no capítulo IV e os aportes teóricos do capítulo II.

## 5.2. Quais os conhecimentos, impressões e expectativas dos estudantes ao iniciar o estudo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, em especial, limites de funções?

Os estudantes participantes do ciclo de estudos se mostraram a princípio apreensivos em estudar o conteúdo de limites de funções. Entretanto, a predisposição em querer aprender e participar do estudo foi mútua. A interação entre pesquisador e participantes foi harmoniosa e com respeito a uma dialogicidade, sem existência de uma hierarquia entre quem aprende e quem ensina, tendo sido em vários momentos trocados os papéis entre si.

> Em um episódio de ensino e aprendizagem, a professora ou professor apresenta aos alunos os significados que são aceitos no contexto da matéria de ensino e que ela ou ele já domina. Apresentar aqui não significa aula expositiva, nem passividade de parte dos alunos os quais devem “devolver” ao docente os significados que estão captando. Se estes significados não forem aqueles contextualmente aceitos na matéria de ensino, cabe ao professor ou professora apresentá-los novamente, provavelmente de outra maneira, aos alunos. Estes devem outra vez “devolvê-los” ao docente. Quer dizer, a captação de significados implica diálogo, negociação de significados. O aluno tem que externalizar os significados que está captando. Esse processo pode ser longo e só termina quando o aluno capta os significados que são aceitos no contexto da matéria de ensino. (Moreira, 2013a, p. 24-25)

Nesta perspectiva, Moreira (2013a) considera que só há ensino se houver aprendizagem e evidentemente corroboramos desta concepção, pois na relação de ensino e aprendizagem acreditamos que deva existir este diálogo e troca de conhecimentos entre docentes e discentes. O autor ressalta que para haver esta interação é importante utilizar-se do poder da linguagem e não somente da linguagem científica ou matemática, mas também da linguagem verbal. Muitos dos problemas tidos como complexos em matemática, quando expostos primeiramente pela oralidade, têm a possibilidade de ativar nos estudantes imagens mentais a respeito de conceitos que existem em sua estrutura cognitiva (Vinner, 1991), gerando, consequentemente, muitas vezes, uma aprendizagem significativa de conceitos matemáticos avançados.

Acreditamos, assim, que desta forma tivemos um ambiente propício à aprendizagem significativa e que os atores deste cenário educacional mantiveram uma relação de proximidade, com diálogos e aprendizagens entre si. Se pretendemos ter uma aprendizagem significativa é importante esta aproximação do professor com os discentes por meio de uma linguagem clara e de fácil compreensão, possibilitando uma troca de conhecimentos entre quem ensina e quem aprende. É importante salientar a utilização de um material potencialmente significativo (Ausubel et al., 1980) – atividades e materiais utilizados no ciclo de estudos –, pois com este material o professor poderá desenvolver aulas mais interessantes e motivadoras e possivelmente, em conseqüência, alcançar uma aprendizagem significativa dos conteúdos desenvolvidos.

Quanto aos conhecimentos prévios dos estudantes, estes demonstraram dificuldades com conteúdos da educação básica e do ensino médio, principalmente relacionado com funções e construções de gráficos. Como já discutido na análise das respostas dos participantes ao 1.º questionário, a maioria destes veio de uma educação básica e ensino médio com muitas dificuldades e lacunas a respeito de conteúdos de matemática elementar, como por exemplo: resolução de equações do 1.º e 2.º grau, inequações, produtos notáveis, fatoração, proporção, razão, geometria, trigonometria, funções exponenciais, logarítmicas e modulares. Uma vez estes estudantes em contato com um conteúdo como limites de funções, que exige uma maior abstração para a compreensão do seu conceito, se viram numa situação de incapacidade para aprender este conteúdo, embora muitos deles se julgavam "bons" quanto aos conteúdos da disciplina de matemática.

Conforme visto na revisão teórica, o pensamento matemático avançado exige do estudante uma maior reflexão para a abstração de problemas matemáticos mais complexos e a ideia de se trabalhar com questões que requerem este tipo de pensamento favorecerá aos estudantes uma ampliação da sua capacidade cognitiva e consequentemente melhorar a sua aprendizagem sobre os conteúdos matemáticos estudados (Tall, 1991). No caso desta pesquisa, o estudo de limites de funções se constituiu como um conteúdo matemático com alto nível de complexidade, como defende Cornu (2002), tanto para ensinar quanto para aprender. Entretanto, ressaltamos o cuidado na formulação das atividades desenvolvidas e na preparação e realização das etapas do ciclo de estudos, levando em consideração a complexidade do conteúdo.

Com base nas respostas dos aprendizes ao primeiro questionário, ficou claro a necessidade da construção de uma base de conhecimentos sólidos em matemática elementar para dar início ao estudo de conteúdos mais avançados e abstratos como limites de funções. Neste caso, vimos uma forte influência da construção de atividades que pudessem construir estes alicerces – subsunçores – para o estudo de limites de funções. Para isso fizemos uso de organizadores prévios, conforme sugerido pela TAS (Ausubel et al., 1980), como os mapas conceituais, para que os alunos pudessem criar os subsunçores necessários para a construção do conceito de limites de funções.

No âmbito da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, a estrutura cognitiva é um conjunto hierárquico de subsunçores dinamicamente inter-relacionados. Há subsunçores que são hierarquicamente subordinados a outros, mas essa hierarquia pode mudar se, por exemplo, houver uma aprendizagem superordenada, na qual um novo subsunçor passa a incorporar outros (Moreira, 2013a, p. 9).

Ratificamos a necessidade dos estudantes em saber conceituar uma função e as suas formas de representação para compreender o conteúdo de limites de funções, pois o conceito de função neste caso seria um subsunçor subordinado ao conhecimento de limites de funções. Assim, por meio de diversas interações entre o subsunçor funções com o novo conceito de limites de funções, este subsunçor vai ganhando forma na estrutura cognitiva dos estudantes, modifica-se, fica mais estruturado e fica cada vez mais elaborado e refinado para aprendizagem significativa do próprio conceito e de novos conceitos, como seja em especial o de limites de funções. Ausubel et al. (1980) afirmam que é importante que a matéria de ensino esteja organizada, de forma que os novos tópicos devem ser vistos um após o outro, sucessivamente, construindo um crescimento organizado de subsunçores e consequentemente uma diferenciação progressiva e uma aprendizagem significativa.

Quanto às expectativas e anseios dos estudantes participantes, podemos dizer que foram positivas e muitas delas traziam a expectativa de aprender os conteúdos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, pois a palavra “aprender” apareceu em muitas das respostas dos participantes. Entendemos que as atividades preparadas para o ciclo de estudos direcionaram o estudo, em particular de limites de funções. Estas atividades tiveram influência na grande quantidade de respostas dos estudantes, os quais informaram que desejavam aprender sobre limites de funções. Além da análise das respostas dos participantes à 6.ª questão da parte 3 do 1° questionário (ver na página 142), tivemos trechos de entrevistas dos estudantes que confirmaram tais fatos conclusivos. Por exemplo, quando perguntado sobre o que eles tinham achado em participar desta pesquisa ou o que eles aprenderam nas atividades desenvolvidas no ciclo de estudos, observamos opiniões favoráveis, como se verifica nos trechos abaixo:

> Contribuiu. Porque através de tudo que foi abordado no projeto acho que a gente teve foi bem mais amplo e coerente com a questão de limite. Foi uma coisa meio rápida passageira e foi uma coisa muito relevante, aprender mais bem significativa. (Lívia)

> Aprender mais, aprender a definição corretamente, e aprender a forma para poder desenvolver o Cálculo e negativo acho que não tem, não.....para aprender um pouco mais de limites, ajudou a tirar minhas dúvidas e a desenvolver sobre limites que eu não tinha aprendido. (Thamyres)

> Bom! É... Foi possível aprender sobre conceito de limite, sobre as variáveis, sobre, como posso dizer, sobre como se fazer um mapa conceitual, isso o professor tirando as dúvidas dando assim sentido para que pudéssemos responder de acordo com o trabalho feito. (Bella)

De modo geral, concluímos que em relação aos conhecimentos de conteúdos matemáticos os estudantes apresentaram diversas lacunas e dúvidas, como por exemplo: a falta de conhecimento em conteúdos matemáticos elementares, conforme supracitado; dificuldade de leitura e interpretação dos enunciados apresentados nas atividades e problemas relativos ao entendimento ao conceito de função, principalmente quando se tratava de construção, elaboração e análise de gráficos de funções, gerando consequentemente dificuldades na compreensão do conceito de limites de funções, conforme vimos na resposta da estudante Nana:

> Como sugestão que a gente trabalhasse mais com atividades que tenham textos e faça evoluir bastante interpretação, porque é uma dificuldade imensa nessa parte para a gente entender. Por exemplo, é... quando a gente vai montar quem é $x$? e quem é $y$?. A gente tentar ler e ver quem é quem, então é uma sugestão para se trabalhar bastante e alguma.......o próprio aluno interpretar a equação. (Nana)

Já em relação às impressões e expectativas dos estudantes, podemos afirmar com base nas respostas dos estudantes a 8.ª pergunta da entrevista – Em relação às atividades desenvolvidas na pesquisa, o que você acrescentaria? O que retiraria? Explique exemplificando? – que elas foram positivas e otimistas, conforme apresentado nos trechos abaixo:

> Não[...] retirar acredito que não, porque foram bastante produtivas, ajudou bastante no aprendizado, internalizar o assunto e[...] foram todas satisfatórias. (Albert)

> Eu acho que eu não retiraria nada e se fosse de acrescentar, poderia acrescentar em relação a pesquisa, mais especificamente, é... o uso mais frequentes dos *softwares*, porque eles ajudam muito. (Lázaro)

> Eu acho que tudo que foi abordado falado e explicado, todas as formas que podemos resolver o limite e acho que foi tudo coerente......, ou seja, não tem muito o que criticar ou falar.

> Na verdade não retiraria nada, agora assim é......acho que focaria mais na parte de trabalhar com o *software*, dava mais ênfase nos software. (Nelson)

> Acho que para o meu ponto de vista foi bom, acho que não tem uma coisa que deveria tirar, as atividades sempre foram revisando o que a gente fazia, acho que foi bom aquilo ali, a demonstração com *softwares* foi bom também e não tem o que retirar, não. (Saulo)

Apesar dos trechos de entrevista, acima, apresentarem opiniões otimistas dos estudantes, alguns deles se mostraram dispersos, gerando consequentemente dificuldades na aprendizagem do conceito de limites de funções. Uma possível causa para esta ocorrência foi a falta de comprometimento de alguns deles em participar da pesquisa de forma voluntária. Segundo Ausubel et al. (1980) a ocorrência da aprendizagem significativa requer uma predisposição dos estudantes em querer aprender, e isto foi percebido não só nas entrevistas, mas também nas atividades desenvolvidas no ciclo de estudos, nas respostas ao 1.º questionário e no comportamento e interação da maioria dos participantes com o estudo.

### 5.3. Quais recursos os professores utilizam para ensinar limites de funções? E qual a sua relevância para a aprendizagem dos estudantes de Cálculo Diferencial e Integral I?

Além do uso frequente do quadro e giz, o recurso mais utilizado pelos professores entrevistados foi o livro didático, servindo para o planejamento das aulas e para a seleção e consulta de exercícios a explorar na sala. A resolução de exercícios de fixação é uma estratégia que os professores usam para os alunos aprenderem o conteúdo desenvolvido.

> Porque você tem que resolver problemas que às vezes são muito complicados pra chegar a um resultado que é simples demais, então dá pra alterar o ensino de limites no seguinte não massificar tanto, porque às vezes a gente massifica com muitos problemas, muito exercício de limite. (Trechos da entrevista de Alan)

> Geralmente eu uso os mesmo, quadro e piloto, e algumas poucas vezes utilizando algum tipo de *software*.......Geralmente é assim...eu dou algumas referências bibliográficas a alguns alunos, mas eu me baseio nas minhas notas de aula mesmo. (Trechos da entrevista de Eduardo)

Conforme as citações supracitadas, vimos forte presença, nas entrevistas com os professores, de um ensino tradicional e centrado no professor como um transmissor do conhecimento, conforme vimos nas pesquisas de autores como Lima (2013), Santarosa e Moreira (2011), Rezende (2003), Barbosa (1994), Miquelino e Resende (2013) e Neto (2006).

Não queremos dizer que um ensino tradicional e mecânico não possa gerar uma aprendizagem significativa, isso dependerá, para este tipo de aprendizagem, da forma como o indivíduo atribui os significados aos novos conhecimentos e como estes se relacionam com os subsunçores existentes em sua estrutura cognitiva (Ausubel et al., 1980).

Os professores Alan e Reinan utilizam s*oftwares* para o ensino de Cálculo. No caso especial de limites de funções, os professores Eduardo e Alan afirmaram que estes servem como meio de visualização e confirmação dos Cálculos algébricos.

Foi observada uma preocupação dos professores entrevistados quanto às estratégias de ensino para fazer com que os estudantes aprendam. Para isso, os professores afirmaram que utilizam diversas metodologias. Por exemplo, o professor Jonas – mais experiente – utiliza situações didáticas de forma intuitiva, favorecendo os estudantes a construírem o conceito individualmente, conforme vimos no trecho abaixo:

> Olha só, o conceito no Cálculo propriamente dito, o conceito mais difícil do aluno entender é o conceito de limite muitos deles pensam que quando fala limite quando $x$ tende pra um, pensa que é pegar o $x$ no lugar dele botar um e não é isso, então eu costumo colocar um exemplo que eu acredito que esse exemplo eu tomo ele como padrão que é a sequência um sobre n, que é um, um meio, um terço que eu acho que essa da mais um pouco a noção mais perto de que não é simplesmente jogar e colocar um.....e ai eu digo observe o que é que vai acontecendo com a sequência, um, depois um meio, vai diminuindo, um terço, um quarto um quinto, então como esse denominador ai vai crescendo, crescendo, crescendo cada vez mais. (Trechos da entrevista de Jonas)

Já os professores Reinan e Alan tentam contextualizar os conteúdos com situações do cotidiano dos estudantes, criando situações e problemas da semirealidade (Skovsmose, 2008; Moreira, 2006). Em relação à parte pedagógica, o professor Reinan demonstrou preocupação com a maturidade e o rigor adotado no ensino de limites de funções, pois o professor atua também nos cursos de análise real e nestes afirma ser importante um rigor maior para a definição de limites de funções conforme as ideias de Abreu (2011) e Reis (2001). É possível que, pela formação mais contemporânea deste professor, em relação aos demais, ele tenha um olhar mais preocupado em relação às questões de ensino; entretanto as práticas de ensino adotadas por Reinan, igualmente aos demais professores entrevistados, seguem os princípios dos livros didáticos.

Todos os professores comentaram sobre a dificuldade em ensinar limites de funções e que uma das possíveis causas destas dificuldades está associada à defasagem de conteúdos dos estudantes relacionadas à educação básica e ao ensino médio conforme Nasser, Souza, e Torraca (2012). Isso contribui de forma negativa para a promoção de uma aprendizagem significativa, uma vez que para esta é necessária a existência de subsunçores na estrutura cognitiva dos estudantes.

Cornu (2002) nos diz que há obstáculos cognitivos no ensino do conceito de limite e estes se tornam extremamente difíceis devido a uma diversidade de concepções, à riqueza e complexidade das noções do conceito. Segundo o autor, o professor deve ter consciência desta complexidade em ensinar este conceito que ocasionará nos estudantes obstáculos epistemológicos e estes, por sua vez, são importantes para eles saberem das dificuldades em lidar com um conceito complexo, como é o caso de limite.

Ainda, é importante que na relação de ensino e aprendizagem deste conceito se leve em consideração ideias espontâneas, imagens, intuições e experiências que os alunos desenvolverão no processo de construção de conhecimento sobre limites de funções. Os estudantes revelaram, quando apresentados ao conteúdo de limites de funções, ideias, concepções a respeito do mesmo e os dados mostraram possíveis imagens e intuições dos estudantes geradas na aprendizagem deste conteúdo, como por exemplo, a ideia da palavra limite como algo inatingível e/ou inalcançável, a compreensão da palavra limite como sinônimo ou derivado de palavras como valores máximo e/ou mínimo, tender, aproximar, chegar perto, etc (concepção espontânea).

O trecho – Limite de uma função logo quando eu pensei que, seria a.. é.. a.. aproximação da função. Tipo é.. o máximo e o mínimo que essa função pode se aproximar de tal número de tal...” (Trecho da entrevista com Aragão) – apresenta uma associação a palavra limite ao valor máximo ou mínimo que a função teria ao mesmo tempo que esta se aproxima de um valor.

A ideia de aproximação constitui uma possível ideia espontânea do estudante e a associação da palavra limite ao valor máximo e mínimo pode ser entendida como uma imagem conceitual do estudante em relação ao conceito de limites de funções ou da sua própria definição.

Outra questão que está relacionada com a aprendizagem é quando o autor se refere ao contexto onde esta ocorre, pois para Cornu (2002) uma aprendizagem efetiva deve ter lugar num contexto de resolução de problemas.

> A noção de limite tem de ser usada para resolver problemas específicos. Por conseguinte, é necessário apresentar situações nas quais o aluno pode ver que o limite é uma ferramenta útil, em que o limite é visto como parte da resposta a questões que o estudante poderá ter feito a si mesmo. (Cornu, 2002, p. 165)

O autor nos diz que esta concepção é muitas vezes inexistente no ensino contemporâneo e que uma definição da noção de limite é apresentada pelo professor, seguida por uma sequência de problemas e exercícios, geralmente consistindo unicamente na manipulação algébrica e em restringir o ensino de limite apenas as suas propriedades ou parte especificas do conteúdo.

Das opções metodológicas referidas pelos professores entrevistados não se conclui uma grande ênfase no uso de recursos para ensinar limites, inclusive o professor Jonas afirma que o computador poderia prejudicar em vez de contribuir. Segundo este professor, o computador dá resposta do limite já calculado ou o gráfico já feito e isso faz com que os estudantes não tenham de calcular os limites algebricamente. O professor ratificou, ainda, que a sua estratégia em usar a sequência $\frac{1}{n}$ (ver em Análise dos Resultados, na página 147), para introduzir a noção de limite de uma sucessão, ele não viu em nenhum livro, antes teve origem na sua experiência e que, segundo ele, apresenta grandes potencialidades intuitivas para os estudantes aprenderem o conceito de limite, que segundo o professor é um dos conceitos mais complexos no ensino de Cálculo.

O professor Alan menciona a utilização de figuras do tipo "barra de chocolate" para contextualizar os conteúdos de Cálculo ensinados, e por meio destas elabora problemas e situações didáticas da semirealidade (Skovsmose, 2008), especialmente quando se trata de limites de funções. Esta estratégia do professor Alan favorece a construção de imagens conceituais defendidas por Vinner (1991), pois o estudante, ao pensar no conteúdo por meio de alguma figura ou material concreto, é forçado a abstrair ideias referentes ao novo conteúdo que está sendo desenvolvido em sala de aula.

Por fim, pelo número reduzido de recursos utilizados pelos professores no ensino de limites podemos concluir, em relação a esta questão de investigação, que os professores entrevistados recorrem mais a outras estratégias metodológicas, sequências didáticas e experiência de ensino do que propriamente a recursos materiais. Entretanto, referente à relevância dos recursos utilizados pelos professores, podemos dizer que foi pouco significativo e expressivo, ou seja, basicamente todos os professores entrevistados baseavam seus ensinamentos em estratégias e metodologias pessoais e no uso de livros didáticos como o principal recurso de referência para sua prática em sala de aula, embora o professor Jonas tenha afirmado que se sente apto a trabalhar sem livros e que estes seriam apenas um complemento para a sua aula. O uso do quadro e giz também se caracterizou como um recurso bastante utilizado por todos os entrevistados, de modo que destacamos a ênfase dada por Alan e Reinan ao uso de *softwares* no ensino de limites de funções, pois para estes professores este recurso serve para visualizar e confirmar Cálculos numéricos ou algébricos envolvidos na determinação de limites.

Os recursos e estratégias metodológicas, informados pelos professores entrevistados, foram levados em consideração na construção do ciclo de estudos. Entretanto, a ênfase dado ao conteúdo de limites de funções e o tempo de exposição do conteúdo foi maior na execução do ciclo de estudos comparado ao que normalmente é utilizado na prática dos professores entrevistados. As atividades como conceituar limites de funções a partir de ideias intuitivas, confecção de mapas conceituais e o uso de tecnologias informáticas se constituiu em um acréscimo desta pesquisa, no ciclo de estudos, para o ensino de limites de funções. Além disso, o uso dos livros: guia mangá de Cálculo Diferencial e Integral e Cálculo para Leigos com uma linguagem mais coloquial e próxima da compreensão e entendimento dos estudantes, favoreceram a uma melhor aprendizagem sobre o conteúdo de limites de funções, complementando o conteúdo abordado nos livros didáticos já utilizados no ensino de Cálculo pelos professores entrevistados.

## 5.4. Como o uso de recursos informacionais e comunicacionais pode contribuir para a aprendizagem significativa de limites de funções por estudantes de Cálculo Diferencial e Integral I?

É inquestionável que o uso de recursos informacionais e comunicacionais contribui para a aprendizagem de conteúdos matemáticos, pois conforme inúmeras pesquisas (Alves et al., 2013; Marin, 2013; Miquelino & Resende, 2013; Nasser, Souza, & Torraca, 2012; Neto, 2006; Zuchi, 2005) são diversos os recursos que favorecem o ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos, ou seja, *softwares*, materiais manipulativos e estratégias de ensino são vistos, pelos autores, como recursos que favorecem ou estimulam a aprendizagem destes conteúdos. Entretanto, questionar se esses recursos podem contribuir para uma aprendizagem significativa no conteúdo de limites de funções acaba sendo uma singularidade desta pesquisa, que busca descobrir meios destes recursos que favoreçam a aprendizagem significativa de limites de funções.

> Em um contexto em que são estudados limites, é vital que o *software* seja projetado dentro de uma estratégia de ensino baseada no cuidado e análise do conceito que deverá ser aprendido. Concepções espontâneas, imagens do conceito, obstáculos, abstracção reflexiva e decomposição genética, são todas ferramentas conceituais concebidas para ajudar na implementação de tais estratégias pedagógicas. (Cornu, 2002, p. 166)

Assim, no presente estudo, propusemos desenvolver uma estratégia pedagógica de ensino que favorecesse a ocorrência da aprendizagem significativa, tendo em consideração as questões mencionadas por Cornu (2002). Levamos em consideração a dificuldade em se mencionar e quantificar este tipo de aprendizagem, que necessariamente não constitui o foco da pesquisa.

Contudo, elaboramos atividades que incentivaram a construção de imagens conceituais por parte dos estudantes, entendendo que este seria o caminho ideal para uma aprendizagem significativa. Por exemplo, a internalização do conceito de limite afirmado pelo estudante Albert, quando neste processo o estudante utiliza a imagem conceitual de uma representação gráfica para resolver um limite, utilizando como recurso um *software* para visualização gráfica do limite de uma função.

É importante salientar que os estudantes tiveram como referência, em outras disciplinas, os professores que entrevistamos e estes, conforme os dados das entrevistas abordados na subseção 5.3., mostraram que os professores utilizavam poucos recursos materiais, metodologias e estratégias pedagógicas baseadas num ensino tradicional.

Assim, procuramos diagnosticar, conforme os dados apresentados e as atividades desenvolvidas no ciclo de estudos, quais os recursos informacionais e comunicacionais que contribuíram para a aprendizagem significativa de limites de funções por estudantes universitários na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Percebemos que a utilização dos *softwares*, como recursos para visualização e confirmação das respostas nas questões exploradas, favoreceram positivamente uma aprendizagem significativa, pois a maioria dos estudantes afirmou que a utilização destes contribuiu para o entendimento e compreensão do que acontecia com o limite de uma função, quando o $x$ tende para certo valor.

Dos recursos utilizados, podemos afirmar que os *softwares* favoreceram a construção de imagens conceituais e consequentemente a definição conceitual de limites de funções. Nas entrevistas os estudantes ratificaram a importância dos *softwares* como um recurso para visualizar o que acontecia com o conceito de limites de funções de forma dinâmica, ou seja, concepções e ideias que o limite de uma função assume dois papéis: o primeiro relativo a um conceito estático, derivado da definição formal; e outro um conceito dinâmico que está associado a representação geométrica do limite no plano cartesiano, quando utilizam a ideia de aproximação, nos eixos $x$ e $y$, do épsilon e do delta. Os *softwares*, ainda, foram úteis no desenvolvimento e construção de imagens conceituais pelos estudantes quando estes não as possuíam. Em alguns momentos serviram como organizadores prévios, principalmente quando os estudantes não tinham os subsunçores necessários para fazer a “ancoragem” com os novos conhecimentos sobre limites de funções.

Os mapas conceituais se constituíram em outro recurso que contribuiu para aprendizagem significativa de limites de funções, pois a partir da construção de mapas conceituais individuais, coletivos até o mapa conceitual coletivo da Turma (Ver em Anexo 4) pudemos concluir, por meio das entrevistas aos estudantes, que o uso desta ferramenta como um recurso informacional e comunicacional serviu para os alunos socializarem os conhecimentos prévios e adquiridos nas atividades do ciclo de estudos sobre limites de funções, se estabelecendo como um possível recurso relevante para o ensino e a aprendizagem significativa do conceito de limites de funções, por exemplo, na confecção dos mapas conceituais, muitos alunos colocaram os conceitos de funções e gráfico como conceitos subsunçores para a compreensão de limites de funções, que posteriormente foram aceitos pelos demais estudantes como conceitos relevantes para o conteúdo de limites, além dos próprios mapas serem construídos por meio de um recurso tecnológico – o *software Cmaptools.*

Salientamos que o uso dos dois livros Guia de Mangá: Cálculo Diferencial e Integral e Cálculo para Leigos favoreceram a aquisição de significados na medida em que apresentavam uma leitura fácil, com uma linguagem mais coloquial e próxima do estudante de Cálculo – As evidências para esta conclusão foram apresentadas em trechos de entrevistas dos estudantes e em respostas as questões dos questionários, conforme analisadas no capítulo IV.– proporcionando aos estudantes uma compreensão do significado de limites e das suas propriedades e, com isso acreditamos, em uma aprendizagem mais significativa.

Em entrevista com estudantes, eles ratificaram o uso destes livros como essenciais para a aprendizagem de Cálculo, em especial de limites de funções, pois a forma como são escritos os livros, segundo os estudantes, favorece e desperta o interesse em querer aprender um conteúdo que geralmente não é visto com a mesma linguagem em outros livros didáticos sobre o tema. A definição de limites nestes últimos livros se apresenta de uma forma rigorosa e consequentemente sem uma preocupação com a noção intuitiva de limites, não oportunizando a compreensão do estudante sobre o conceito.

Outra questão fundamental para tratamento, pelo professor, de um conteúdo matemático avançado, como é caso de limites de funções, é o docente preparar estratégias e aulas que motivem os estudantes a abstrair e compreender conceitos fundamentais e que estão incluídos na definição e conceito de limites de funções. Para isso, é importante que os docentes de Cálculo façam uma análise nos livros didáticos dos exercícios e das propostas de ensino e aprendizagem, pois estes devem ser materiais potencialmente significativos – questão que faltou nas estratégias desenvolvidas pelos professores entrevistados. Para isso se fazem necessárias algumas adaptações e mudanças nos exercícios dos livros didáticos, o que vai depender também da formação e experiência docente do professor que irá ensinar Cálculo. Salientamos que é necessário que se consulte livros mais modernos e se que ofereça e incentive os estudantes a utilizarem tecnologias informáticas para representar e confirmar as explorações das atividades propostas.

Assim, a aprendizagem deste conteúdo pode se tornar algo prazeroso e com significado, e não simplesmente mais um conteúdo de matemática que os alunos aprendem de forma mecânica por um determinado tempo, que utiliza na prova de avaliação e depois naturalmente entra na fase obliterativa de aprendizagem até sumir definitivamente da sua memória e esquecer um conteúdo de tão grande relevância para Cálculo Diferencial e Integral, como é o caso de limites funções (Ausubel et al., 1980).

Acreditamos que o tempo disponibilizado nas atividades e o nível de dificuldade exigido nas questões propostas no ciclo de estudos favoreceram uma aprendizagem significativa, pois compartilhamos das ideias defendidas por Tall e Vinner (1991), quando afirmam que na compreensão de conceitos avançados é necessário iniciar atividades com os alunos por meio de modelos mais complexos, ou seja, com um grau de dificuldade mais elevado. Assim, as questões com o grau de dificuldade menor ficariam mais fáceis de serem aprendidas pelos alunos.

Nesta perspectiva, descortinamos a possibilidade de uma aprendizagem significativa, pois estes conceitos mais simples, ou melhor, com um menor grau de dificuldade, se tornariam como subsunçores e possíveis "ancoradouros" (Moreira, 2013b) para a aprendizagem de conceitos e conteúdos mais complexos, como é o caso de limites de funções.

Ratificamos o uso da linguagem verbal nos processos de ensino, uma vez que, segundo Moreira (2013a), a linguagem é de extrema importância para aprendizagem significativa de um conteúdo ou conceito.

> O homem vive na linguagem. Portanto, a linguagem é essencial na facilitação da aprendizagem significativa. As palavras são signos lingüísticos e delas dependemos para ensinar qualquer corpo organizado de conhecimentos em situação formal de ensino, que é a proposta subjacente à teoria da aprendizagem significativa. (Moreira, 2013a, p. 25)

No pensamento matemático avançado, Cornu (2002) afirma que, no caso do conceito de limite, as palavras "tende a" e "limite" têm um significado particular para os estudantes antes mesmo de qualquer contato deles com o conteúdo de limites de funções. Além disso, os alunos continuam a contar com esses significados mesmo depois de ter sido dada uma definição formal do conceito. As investigações revelaram muitos significados diferentes para a expressão 'tende em direção':

> • aproximar-se (eventualmente, ficar longe dele);
> • aproximar-se ... sem alcançá-lo;
> • aproximar-se ... apenas alcançá-lo;
> • para assemelhar-se (sem qualquer variação, tais como "esta tende para azul violeta"). (Cornu, 2002, p. 154)

Conforme a citação acima e dos dados obtidos na pesquisa é possível que a própria palavra limite pudesse ter significados distintos para diversos indivíduos e em diferentes ocasiões. Na maioria das vezes, ela é considerada como um "impassible limit" (limite intransponível, tradução nossa), mas também pode ser:

> • um limite intransponível que é acessível;
> • um limite intransponível que é impossível de alcançar;
> • um ponto que se aproxima, sem alcançá-lo;
> • um ponto de que alguém se aproxima e atinge;
> • um limite superior (ou inferior);
> • um máximo ou mínimo;
> • um intervalo;
> • o que vem "imediatamente após", o que pode ser alcançado;
> • uma restrição, uma proibição, uma regra;
> • final, acabamento. (Cornu, 2002, pp. 154-155)

Os dados da pesquisa confirmaram a veracidade destas questões levantadas nos estudos de Cornu e em termos conclusivos do estudo da noção de limite confirmamos a relevância da linguagem no uso de palavras como aproximar, tender, chegar perto, mas não atingir, ultrapassar, máximo, mínimo, etc., obtidas nos dados da pesquisa realizada, já relatadas e analisadas no capítulo IV, quando os estudantes se envolviam na compreensão de questões referentes a limites de funções e na aprendizagem significativa deste conceito.

Confirmamos a ideia apresentada no modelo original abordado na pesquisa de Miranda (2010) (ver Figura 41). A interação da imagem conceitual com a definição conceitual no modelo do autor teve como fundamento os modelos de Vinner (1991), no qual os mesmos evidenciam a relação entre as células da imagem conceitual com a definição conceitual. No modelo de Miranda (2010) buscou-se relacionar conceitos da teoria da aprendizagem significativa com ideias e elementos do pensamento matemático avançado, fazendo adaptações aos modelos apresentados por Vinner (1991) (ver Figuras 7, 8, 9 e 10).

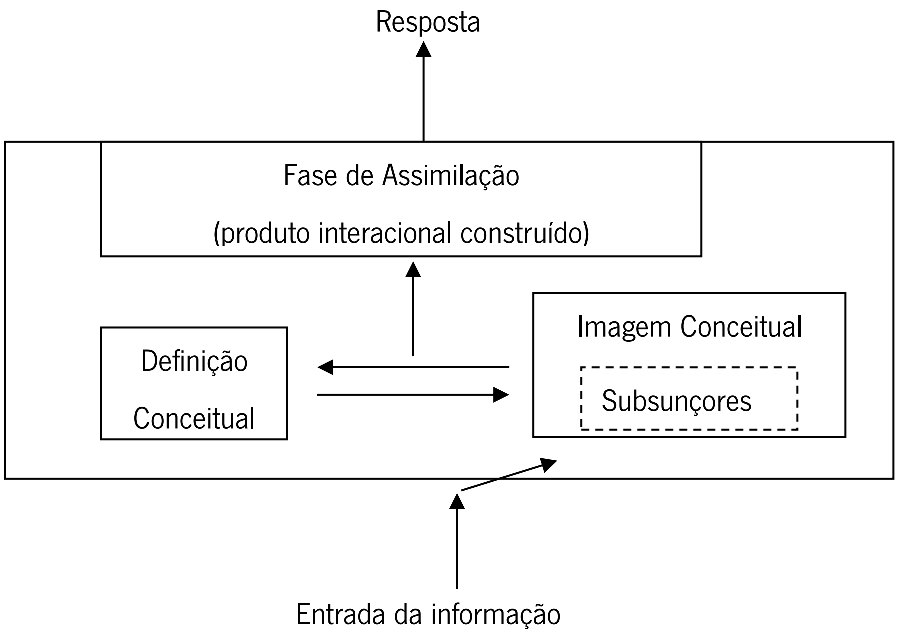



Figura 41 – Interação entre definição conceitual e imagem conceitual na perspectiva da aprendizagem significativa.

O processo interativo apresentado no modelo da Figura 41 nos traz reflexões importantes sobre elementos da teoria da aprendizagem significativa, como a existência dos subsunçores como parte da imagem conceitual e do processo de assimilação antes da saída da resposta dos estudantes, principalmente quando falamos da aprendizagem de um conceito matemático avançado, como é o caso em especial de limites de funções.

Podemos dizer que a construção de todas as atividades do ciclo de estudos, assim como as atividades de confecção, análise e socialização dos mapas conceituais individuais e coletivos construídos pelos estudantes, favoreceram a construção de imagens conceituais por parte dos estudantes, ao mesmo tempo em que contribuiu, também, na formação e aprendizagem da definição conceitual de limites de funções.

De forma análoga, as atividades desenvolvidas com os estudantes, nas quais foi exigido por escrito, em dois momentos, que eles conceituassem limites de funções – conceito inicial e conceito final – favoreceram a construção e consolidação da definição conceitual sobre limites de funções.

Por fim, acreditamos que o conjunto de recursos e metodologias utilizados na pesquisa, aliados a uma estratégia de ensino intencional no sentido de se preocupar com a aprendizagem do aluno, levando em consideração seus conhecimentos prévios, imagens conceituais e definições conceituais pessoais, possam se estabelecer como um meio para que os professores de Cálculo venham a utilizá-las em suas aulas e obtenham possivelmente uma melhor motivação dos seus educandos, além de uma aprendizagem mais significativa. Mais, que se faça uso de um material potencialmente significativo, desenvolvido com elementos da teoria da aprendizagem significativa mesclado com ideias e elementos do pensamento matemático avançado.

### 5.5. Recomendações para futuras pesquisas

O estudo desenvolvido nesta pesquisa não se esgota nela, pois é possível estendê-la para o estudo de limites de funções em disciplinas que exigem um maior rigor, como por exemplo, a disciplina de análise. Para isso, seriam necessárias algumas adaptações e, além disso, é importante salientar que as práticas desenvolvidas no ciclo de estudos deverão ser alteradas de forma mais conveniente para cada tipo de público, pois o processo de diagnóstico e análise dos conhecimentos prévios dos estudantes é muito pessoal e se modificará de pessoa para pessoa ou de uma turma para a outra.

É importante que os resultados desta pesquisa permitam aos professores de Cálculo uma reflexão sobre sua prática docente de forma que possam servir de referência e para implementação em sua sala de aula, com o propósito de desencadear uma aprendizagem que traga mais significado para os estudantes de Cálculo e, consequentemente, produza uma redução no número de repetências nas disciplinas de Cálculo e diminua a evasão dos estudantes dos cursos que a possuem como disciplina da estrutura curricular.

Em relação a possibilidade de trabalhar com outros conteúdos, além de limites de funções, são diversas as possibilidades. Tratando-se do ensino de Cálculo, temos outros conteúdos, como derivadas e integral, em que é igualmente pertinente elaborar atividades e usar recursos que possam favorecer a aprendizagem significativa desses conteúdos, uma vez que eles pertencem aos conteúdos do pensamento matemático avançado.

Enfim, pensamos que os resultados obtidos com o estudo de limites de funções nesta pesquisa possam servir como referência para futuras pesquisas que procurem relacionar a teoria da aprendizagem significativa com o pensamento matemático avançado ou com outra teoria de ensino e/ou aprendizagem. A perspectiva é de se pensar numa relação de proximidade entre o ensino e aprendizagem e de um diálogo mais harmonioso entre professores e alunos.

# REFERÊNCIAS


Abreu, O. H. (2011). *Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de limites e continuidade em cálculo I.* (Disserteção de Mestrado), ICEB, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG.

Abreu, O. H., & Reis, F. S. (2011). Uma discussão sobre o papel das definições formais no ensino e aprendizagem de limites e continuidade em Cálculo I. *Educação Matemática e Pesquisa, 13*(3), 439-459.

Allevato, N. S. (2007). As Concepções dos alunos sobre resolução de problemas ao utilizarem o computador no estudo de funções. *Paradigma, XXVIII*(1), 131-156.

Almeida, L. M., Borssoi, A. H., & Fatori, L. H. (2005). Modelagem matemática no ensino de cálculo: visando uma aprendizagem significativa. In *1 ENAS - Encontro Nacional de Aprendizagem Significativa* (pp. 241-252). Campo Grande, MS: UNIDERP.

Almeida, M. V., & Igliori, S. B. (2013). Um estudo sobre a aprendizagem do cálculo diferencial e integral na perspectiva de David Tall. In *Encontro Nacional de Educação Matemática: Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas*, (p. 14). Curitiba, PR.

Alves, A. D., Correia, L. M., & Melo, E. R. (2013). Explorando os conceitos iniciais da disciplina de cálculo diferencial e integral: utiulizando o software geogebra. In *XI Encontro Nacional de Educação Matemática*, (p. 8). Curitiba, PR.

Alves-Mazzotti, A. J., & Gewandsznajder, F. (2002). *O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa* (2 ed.). São Paulo, SP: Pioneira Thompson Learning.

Amorim, L. I. (2011). *A (re) construção do conceito de limite do cálculo para a análise: um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática.* (Dissertação de Mestrado), ICEB, Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP, Ouro Preto.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1980). *Psicologia Educacional* (2 ed.). (E. Nick, Trad.), Rio de Janeiro, RJ: Interamericana-RJ.

Barbosa, G. O. (1994). *Raciocínio lógico formal e aprendizagem em cálculo diferencial e integral : o caso da Universidade Federal do Ceará.* (Dissertação de Mestrado), Matemática, Universidade Federal do Ceará - UFC, Ceará.

Barroso, N. M., Soares, J. M., Mota, J. C., & Neto, H. B. (2009). Limite: definição intuitiva versus definição formal. In M. C. Frota, & L. Nasser (Org.), *Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates* (pp. 99-109). Recife, Pe: Coleção SBEM.

Barufi, M. C. (1999). *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.* (Tese de Doutorado em Educação Matemática), Universidade de São Paulo - USP, Faculdade de Educação, São Paulo.

Blázquez, S., & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del. *RELIME, 4*(3), 219-236.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* M. J. Alvarez, & S. B. Baptista, (Trads.), Porto, Portugal: Porto.

Borba, M. C., & Penteado, M. G. (2007). *Informática e Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica.

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais.* MEC, Ministério da Educação. Brasília, DF: Secretaria de Educação Fundamental.

Celestino, M. R. (2008). *Concepções sobre limite: imbricações entre obstásculos manifestos por alunos do Ensino Superior.* (Doutorado em Educação Matemática), Pontíficia Universidade Católica - SP, São Paulo.

Cervo, A. L., Bervian, P. A., & Silva, R. D. (2007). *Metodologia Científica* (6 ed.). São Paulo, Brasil: Pearson Prentice Hall.

Cornu, B. (1983). *Aprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles.* (Tese de doutorado), Universite Scientifique et Medicale de Grenoble, Grenoble.

Cornu, B. (2002). Limits. In D. Tall (Org.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). USA: Kluwer Academic Publishers/New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow.

Costa, C. (2002). Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. In *XI Encontro de Investigação em Educação Matemática - SPCE - Grupo de trabalho 4 - O desenvolvimento do raciocínio matemático avançado.* , (pp. 257 - 273). Coimbra, Portugal.

Coutinho, C. P. (2013). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática* (2 ed.). (S. Edições ALMEDINA, Ed.) Coimbra, Portugal: ALMEDINA.

Domingos, A. M. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados - a matemática no início do superior.* (Tese de Doutordo em Ciências da Educação), Universidade de Nova Lisboa, Lisboa.

Domingos, A. M. (2006). Teorias cognitivas e aprendizagem de conceitos matemáticos avançados. In *Seminários de Investigação em Educação Matemática 17* (pp. 51-81). Setúbal, Portugal: Associação de Professores de Matemática - APM.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. In D. Tall (Org.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). USA: Kluwer Academic Publishers/New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow.

Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, M., Muller, D., & Gregorini, M. I. (Setembro de 2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. *Revista Iberoamericana de Educaçion matemática, 11*, 113-132.

Esteban, M. P. (2010). *Pesquisa Qualitativa em Educação - Fundamentos e Tradições.* (M. Cabrera, Trad.) Porto Alegre: AMGH.

Fernandes, J. A., & Vaz, O. (1998). Porquê usar tecnologia nas aulas de matemática? *Boletim da SPM*, pp. 43-55.

Fuente, Á. C., & Armenteros, M. G. (2008). La trayectoria instruccional de un proceso de estudio sobre el límite de una función. In B. G. R. Luengo (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XII SEIEM*, (pp. 391 - 402).

Fuente, Á. C., & Armenteros, M. G. (2011). Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. *Relime, 14(3)*, 278 - 310.

Fuente, Á. C., Armenteros, M. G., & Gómez, C. S. (2006). Análisis de una experiencia d eenseñanza de la noción de límite funcional con herraminetas del enfoque ontosemiótico. *ISBN 84-8127-156-X*. Huesca, Espanha.

Fuente, Á. C., Armenteros, M. G., & Moll, V. F. (2012). Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanzadel límite de una función. *Bolema, 26*(42B), 667-690.

Gerhardt, T. E., Ramos, I. C., Riquinho, D. L., & Santos, D. L. (2009). Estrutura do Projeto de Pesquisa. In T. E. Gerhardt, & D. T. Silveira (Org.), *Métodos de pesquisa* (pp. 65-88). Porto Alegre, Brasil: Editora da UFRGS.

Giraldo, V., & Carvalho, L. M. (2002). Magnificação e Linearidade Local: Novas Tecnologias no Ensino de Conceito de Derivada. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional. *Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional*, *3*, pp. 101-110.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*/3, 237-284.

Godoy, A. S. (1995). Pesquisa qualitativa tipos fundamentais. *RAE - Revista de Administração de Empresas, 35*(3), 20-29.

Guerra, R. C. (2012). *Aprendizagem do conceito de limite: um estudo de caso no 12º ano.* (Relatório de Mestrado), Universidade de Aveiro, Educação, Aveiro, Portugal.

Günther, H. (2006). Pesquisa Qualitativa Versus Pesquisa Quantitativa: Esta É a Questão? *Psicologia: Teoria e Pesquisa, 22*(2), pp. 201-210.

Henriques, A. C. (2010). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação.* (Tese de Doutorado), Universidade de Lisboa, Isntituto de Educação, Lisboa.

Iezzi, G., Murakami, C., & Machado, N. J. (2004). *Fundamentos de Matemática Elementar: Limites, derivadas e noções de integral* (Vol. 8). (8, Ed.) São Paulo: Atual.

Juter, K. (2006). *Limits of Functions University Student's Concept Development.* (Tese de Doutorado), Lulea University of Technology, Departament of Mathematics , Lulea.

Kojima, H. (2010). *Guia Mangá de Cálculo Diferencial e Integral* (Vol. 1). São Paulo, SP: NOVATEC, Becom Co. Ltd.

Lacaz, T. M., Fernandes, J. A., & Carvalho, M. T. (2009). Contribuições da Educação Matemática para a análise das dificuldades dos alunos na aprendizagem da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I. In *Anais do Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC*, (pp. 1073-1079).

Lima, G. L. (2013). O ensino do cálculo no Brasil: breve retrospectiva e perspectivas atuais. In *XI ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática*, (p. 15). Curitiba, PR.

Lima, L. d., & Pontes, M. G. (2009). A aprendizagem significativa do conceito de função na formação do professor de matemática. *Reunião 32 da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação - ANPED* (p. 15). Caxambú, MG: ANPED.

Ludke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas.* São Paulo, SP: Pedagógica e Universitária.

Macedo, A. d., Bach, R. T., Lenardon, S. Z., & Ciani, A. B. (2013). Idéias Fundamentais do Cálculo Integral. In *XI ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática*, (p. 8). Curitiba, PR.

Machado, S. D., & Biachini, B. L. (2013). Aportes dos processos do Pensamento Matemático Avançado para a reflexão do professor sobre sua “forma” de pensar a Matemática. *Educação Matemática Pesquisa, 15*(3), 590-605.

Marconi, M. d., & Lakatos, E. M. (2003). *Fundamentos de metodologia científica* (5 ed.). São Paulo, SP: Atlas.

Marconi, M. d., & Lakatos, E. M. (2007). *Técnicas de Pesquisa: planejamento e execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisas, elaboração, análise e interpretação de dados.* São Paulo, Brasil: Atlas - 6. ed. - 3. reimpr.

Marin, D. (2013). O uso de tecnologia de informação e comunicação nas aulas de cálculo: vantagens e desvantagens. In *XI Encontro Nacional de Eudcação Matemática*, (p. 8). Curitiba, PR.

Martins, H. H. (2004). Metodologia qualitativa de pesquisa. *Educação e Pesquisa, 30*, p. 289-300.

Masini, E. F., & Moreira, M. A. (2008). *Aprendizagem significativa: Condições para a ocorrência e lacunas que levam a comprometimentos* (1 ed.). São Paulo, SP: Vetor.

Messias, M. A., & Brandemberg, J. C. (2012). Um estudo sobre as imagens conceituais de universitários relativas ao conceito de limite de função. *EM TEIA - Revista Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, 3*(1), 1 - 27.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1984). *Qualitative data analysis: a source book of new methods.* Beverly Hills, USA: CA: Sage,.

Miquelino, L. H., & Resende, M. R. (2013). As tecnologias de informação e comunicação e o desenvolvimento profissional do professor de cálculo. In *XI ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática*, (p. 16). Curitiba, PR.

Miranda, A. M. (2010). *As Tecnologias da Informação no Estudo do Cálculo na Perspectiva da Aprendizagem Significativa.* (Dissertação de Mestrado). ICEB, Univerisidade Federal de Ouro Preto, Matemática, Ouro Preto, MG.

Moreira, M. A. (2006). *A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula.* Brasília, DF: Editora da UNB.

Moreira, M. A. (2013a). O que é afinal aprendizagem significativa? *Revista Qurriculum, La Laguna, 25. Aprendizagem significativa, organizadores prévios, mapas conceituais, diagramas V e unidades de ensino potencialmente significativas.* Recuperado de http://paginas.uepa.br/erasnorte2013/images/sampledata/figuras/aprend_%20signif_%20org_prev_mapas_conc_diagr_v_e_ueps.pdf, pp. 5-29.

Moreira, M. A. (2013b). Organizadores prévios e aprendizagem significativa. *Revista Chilena de Educación Científica.* In *Aprendizagem Significativa, organizadores prévios, mapas conceituais, diagramas V e unidades de ensino potencialmente significativas. 7*(2), 30-41.

Nasser, L. (2007). Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de cálculo. In *IX Encontro Nacional de Educação Matemática.* Belo Horizonte, MG: SBEM.

Nasser, L., Souza, G. A., & Torraca, M. A. (2012). Transição do ensino médio para o superior: como minimizar as dificuldades em cálculo? In *V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.* Petropólis, RJ.

Neto, J. P. (2006). *Um estudosobre o ensino de limite: Um tratamento computacional com aplicações.* (Dissertação de Mestrado), Pontíficia Universidade Católica - PUC/SP São Paulo, SP.

Nunes, M. d. (2001). *Sequências Numéricas: um estudo da convergência através de atividades.* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática), Pontíficia Universidade Católica - PUC/SP São Paulo, SP.

Reis, F. d. (2001). *A tensão entre o rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.* (Tese de Doutorado), Universidade de Campina - UNICAMP, Campinas, SP.

Rezende, W. M. (2003). O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. In N. Machado, & M. Cunha (Org.), *Linguagem, Conhecimento, Ação-ensaios de epistemologia e didática.* São Paulo, SP: Escrituras.

Rosa, H. A., & Costa, P. G. (2013). Conceito imagem e conceito definição no estudo de limites de funções reais de uma variável. In *Encontro Nacional de Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas.* Curitiba, PR.

Rosken, B., & Rolka, K. (2007). *Integrating intuition: The role of concept image and concept definition for studens' learning of integral calculus.* Scottsdale, USA: ©The Montana Council of Teachers of Mathematics, ISSN 1551-3440.

Ryan, M. (2012). *Cálculo para Leigos.* Rio de Janeiro, RJ: Alta Books.

Santarosa, M. C., & Moreira, M. A. (2011). O cálculo nas aulas de física da UFRGS: um estudo exploratório. *Investigações em Ensino de Ciências, 16(2)*, 317-351.

Santos, A. T., & Bianchini, B. L. (2011). O Pensamento Matemático Avançado e o ensino de logaritmos. In *CIAEM-IACME Comitê Interamericano de Educação Matemática*, (p. 12). Recife, PE.

Santos, H. M. C. (2010). *"Limite": um estudo sobre manuais escolares e exames, em Portugal.* (Dissertação de Mestrado). Universidade do Minho, Braga, Portugal. Recuperado de http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/18927

Santos, M. B., & Almouloud, S. A. (2014). O Conceito de Limite: estudo das organizações matemáticas e didáticas em livros didáticos. *Revista do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), 7*. Campo Grande, MS: Editora da UFMS

Santos, M. G. (2005). *Um estudo sobre a convergência de sequências numéricas com alunos que já tiveram contato com a noção de limite.* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática), Pontíficia Universidade Católica - PUC/SP São Paulo, SP.

Silva, B. A. (2009). Componentes do processo de ensino e aprendizagem do cálculo: saber, aluno e professor. In *IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, (p. 19). Brasilia, DF.

Skovsmose, O. (2008). *Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica.* Belo Horizonte, MG: Papirus.

Tall, D. O. (1991). *Advanced Mathematical Thinking.* New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, England e USA: kluwer Academic Publishers.

Tall, D. O. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking. *Grouws D. A. (Ed). Handbook of Research on MathematicsTeaching and Learning*, pp. 495-511.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, pp. 151-169.

Tavares, R., & Carvalho, C. (2010). O mapa conceitual hierárquico e a taxonomia de Bloom modificada. In *VI Econtro Internacional da Aprendizagem Significativa*, *Painel 009.* São Paulo.

Thomas, G. B. (2002). *Cálculo* (Vol. 1). São Paulo, SP: Pearson Addison Wesley.

Vergueiro, W., & Rama, Â. (2009). *Como usar as histórias em quadrinhos na sala de aula* (3 ed.). São Paulo, SP: Contexto.

Vinner, S. (1991). The Role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Org.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Wrobel, J. S., Zeferino, M. V., & Carneiro, T. C. (2013). Ensino de cálculo diferencial e integral na última década do ENEM: uma análise usando o alceste. In *XI Encontro Nacional de Educação Matemática*, *Anais*, p. 15. Curitiba, PR.

Zuchi, I. (2005). *A Abordagem do Conceito de Limite via Sequência Didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional.* (Tese de Doutorado), Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Florianópolis, SC.

# ANEXOS

## Anexo 1: Termo Livre Esclarecido (docentes e discentes)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB

**Centro de Formação de Professores - CFP**

**Doutoramento em Ciência da Educação**

**CONVÊNIO – UFRB/UMinho**

# Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Pesquisa Educacional

*"A aprendizagem significativa de limites de funções por estudantes universitários"*

Estamos realizando uma pesquisa sobre ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral do curso de Matemática – Licenciatura – da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), no Centro de Formação de Professores localizado na cidade de Amargosa/Bahia/Brasil. Esta pesquisa de doutoramento é conveniada entre as Instituições UFRB e Uminho - localizada em Portugal no *campus* de Braga. O estudo envolve o desenvolvimento e realização de atividades de ensino elaboradas com o objetivo de permitir que o aluno potencialize a sua compreensão e aprendizagem a respeito desses conteúdos na referida disciplina. As atividades do estudo consistem em entrevistas, participar de ciclo de estudos e debates, responder às perguntas de um instrumento de coleta, na forma de questionários, seguido de tarefas realizadas em laboratórios de Informática com uso de computadores e *softwares* educacionais matemáticos.

A referida pesquisa, a ser desenvolvida pelo pesquisador Anderon Melhor Miranda, conta com o apoio da direção do Centro de Formação de Professores – CFP/UFRB, sob o nome de diretor deste centro profª. Dr. Clarivaldo Santos de Sousa, e também com a participação voluntária de vinte e cinco (25) alunos do curso de Licenciatura em Matemática, matriculados no componente de Introdução ao Cálculo e de quatro (4) professores, com experiência no ensino de Cálculo, do CFP/UFRB.

O período para a coleta de dados será de seis meses e envolverá: (i) observações, (ii) ciclos de discussão e debates, (iii) atividades no Laboratório de Matemática e (iv) aplicação dos instrumentos de coletas juntamente com entrevistas.

Os alunos e professores serão convidados a participar da pesquisa de forma voluntária, tendo o direito de desistir em qualquer etapa ou momento dela. Eles serão esclarecidos sobre os objetivos e justificativas da pesquisa.

Os alunos, bem como os professores e a própria instituição, terão suas identidades omitidas, garantindo privacidade e confidencialidade. Todas as informações obtidas na pesquisa a respeito dos alunos, do professor e da instituição terão caráter estritamente confidencial, e os participantes não serão identificados em nenhum documento escrito, artigos ou relatórios que resultem da pesquisa.

Esperando contar com sua compreensão nos colocamos ao seu inteiro dispor para esclarecer o que for necessário.

Atenciosamente.

Anderon Melhor Miranda

Anderon Melhor Miranda
Pesquisador Responsável
profanderon@hotmail.com

**Prezado Discente**

Estamos através deste termo, convidando-lhe à participar da pesquisa *"A aprendizagem significativa de limites de funções por estudantes universitários."*. Esta pesquisa tem por objetivo geral: Elaborar atividades de ensino e aprendizagem, com o uso de um software e de recursos didáticos, buscando, através dele, as suas contribuições e relações com a aprendizagem significativa, na compreensão de conceitos matemáticos.

A participação na pesquisa ocorrerá através das realizações de atividades matemáticas. A colaboração para o desenvolvimento desta pesquisa é totalmente voluntária, ou seja, o(a) discente poderá escolher, a qualquer momento, desistir de participar da pesquisa. Ele(a) terá seu anonimato garantido e as informações que fornecer não serão associadas ao seu nome em nenhum documento, relatório e/ou artigo que resulte desta pesquisa. Vocês terão em mãos uma cópia deste termo e poderão tirar dúvidas, quando necessário, juntamente ao pesquisador responsável.

Ao aceitar esse **Termo de Consentimento Livre e Esclarecido,** com as informações abaixo preenchidas, uma cópia será encaminhada ao Centro de Formação de Professores.

**Para ser preenchido pelo(a) discente**

Eu,__________________________________________________dou meu consentimento para participar da pesquisa intitulada *"A aprendizagem significativa de limites de funções por estudantes universitários."* Conforme as informações descritas no **Termo de Consentimento Livre e Esclarecido**.

Assinatura do(a) discente:__________________________________________________

______________________________, _____ de _________________ de 2014.

Cidade/Local

Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (CEP/UFRB)

**Prezado Docente**

Estamos através deste termo, convidando-lhe à participar da pesquisa *"A aprendizagem significativa de limites de funções por estudantes universitários."*. Esta pesquisa tem por objetivo geral: Elaborar atividades de ensino e aprendizagem, com o uso de um software e de recursos didáticos, buscando, através dele, as suas contribuições e relações com a aprendizagem significativa, na compreensão de conceitos matemáticos.

A participação na pesquisa ocorrerá através das realizações de entrevistas. A colaboração para o desenvolvimento desta pesquisa é totalmente voluntária. Ele(a) terá seu anonimato garantido e as informações que fornecer não serão associadas ao seu nome em nenhum documento, relatório e/ou artigo que resulte desta pesquisa. Vocês terão em mãos uma cópia deste termo e poderão tirar dúvidas, quando necessário, juntamente ao pesquisador responsável.

Ao aceitar esse **Termo de Consentimento Livre e Esclarecido,** com as informações abaixo preenchidas, uma cópia será encaminhada ao Centro de Formação de Professores.

**Para ser preenchido pelo(a) docente**

Eu,____________________________________________________dou meu consentimento para participar da pesquisa intitulada *"A aprendizagem significativa de limites de funções por estudantes universitários."* Conforme as informações descritas no **Termo de Consentimento Livre e Esclarecido**.

Assinatura do(a) docente:____________________________________________________

______________________________, _____ de __________________ de 2014.

Cidade/Local

Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (CEP/UFRB)

## Anexo 2: Questionário 1 — Avaliação Diagnóstica

Este questionário faz parte da primeira fase de coleta de dados de uma pesquisa de doutoramento em Ciências da Educação da Universidade do Minho, Braga/Portugal. O questionário visa um levantamento de informações pessoais e de conhecimentos prévios para o estudo do conceito de limite de funções – conteúdo do Cálculo Diferencial e Integral. Assim, espera-se com ele os subsídios necessários para a elaboração de atividades de ensino e aprendizagem, auxiliados por *softwares* e recursos didáticos.

A participação e colaboração para o desenvolvimento desta pesquisa é totalmente voluntária, ou seja, o(a) discente poderá escolher, a qualquer momento, desistir de participar da pesquisa. Ele(a) terá seu anonimato garantido e as informações que fornecer não serão associadas ao seu nome em nenhum documento, relatório e/ou artigo que resulte desta pesquisa.

Esperando contar com sua compreensão, nos colocamos ao seu inteiro dispor para esclarecer o que for necessário.

Atenciosamente.

Anderon Melhor Miranda
Pesquisador Responsável
profanderon@hotmail.com

## PARTE 1 – INFORMAÇÕES PESSOAIS

**1.** Nome:________________________________________Nome fictício:______________

Sexo: ☐ Masculino ☐ Feminino Idade: ___________

Ano em que terminou o Ensino Médio: ___________

Possui formação superior? ☐ Não ☐ Sim. Em caso afirmativo, indique-a e refira se é completa ou incompleta:

______________________________________________________________

Classificação (pontuação obtida no ENEM) no ingresso ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia – UFRB: ___________

**2.** Quais os motivos que o levaram a escolher o Curso de Licenciatura em Matemática da UFRB, *campus* de Amargosa/Ba?

.............................................................................................................................

.............................................................................................................................

.............................................................................................................................

**3.** Na escala seguinte, de cinco opções, assinale aquela que melhor traduz o seu desempenho em matemática.

| Muito Fraco | Fraco | Razoável | Bom | Muito Bom |
|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

**4.** Quais conteúdos de matemática que considera mais difíceis de aprender?

.............................................................................................................................

.............................................................................................................................

.............................................................................................................................

## PARTE 2 – CONCEITO DE FUNÇÃO

**1.** O que é uma função?

.............................................................................................................................................

.............................................................................................................................................

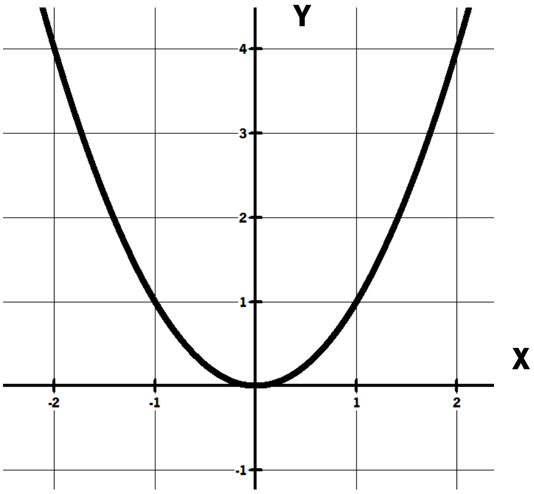
.............................................................................................................................................

**2.** Identifique uma lei de associação para a função representada pelos dados da tabela abaixo. Depois represente-a graficamente.Considere $f: IR \rightarrow IR_{+}^{*}$ .

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 16 |
| 1 | 24 |
| 2 | 36 |
| 3 | 54 |
| 4 | 81 |

**3.** Relativamente a cada gráfico seguinte, diga, justificando, se representa ou não uma função. Admita que $x \in IR$ e $y \in IR$.

**a)**




☐ É função ☐ Não é função

Porquê? ____________________________________

____________________________________________

____________________________________________

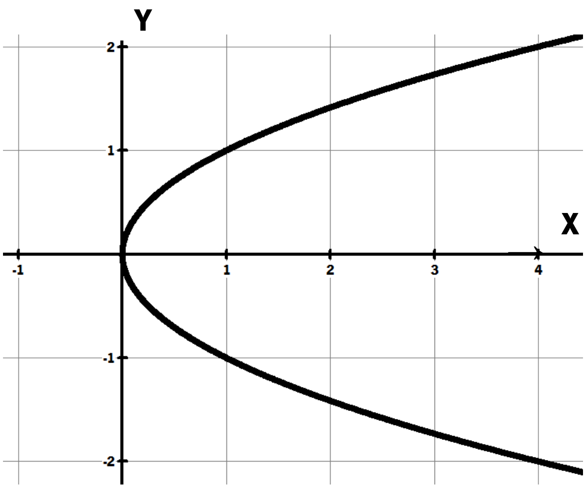
____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

**b)**




☐ É função ☐ Não é função

Porquê? ____________________________________

____________________________________________

____________________________________________

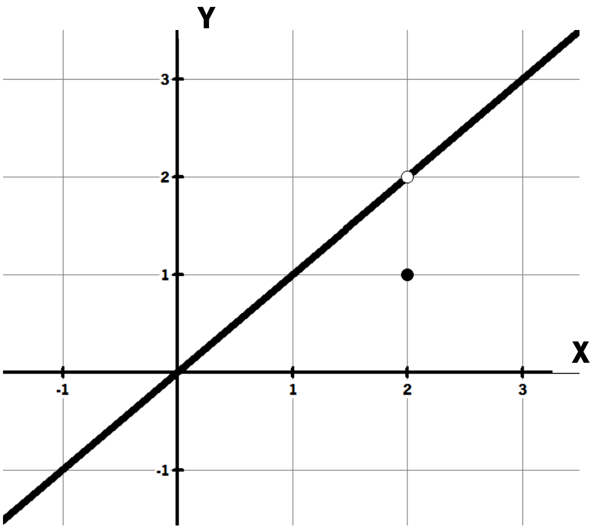
____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

**c)**




☐ É função ☐ Não é função

Porquê? ______________________________

______________________________

______________________________

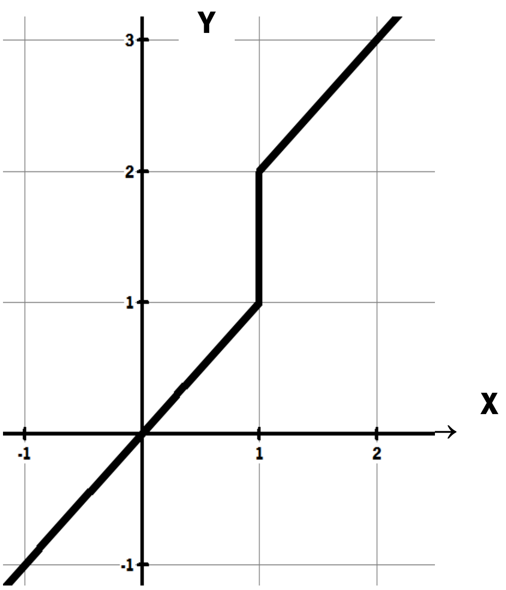
______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

**d)**




☐ É função ☐ Não é função

Porquê?

______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

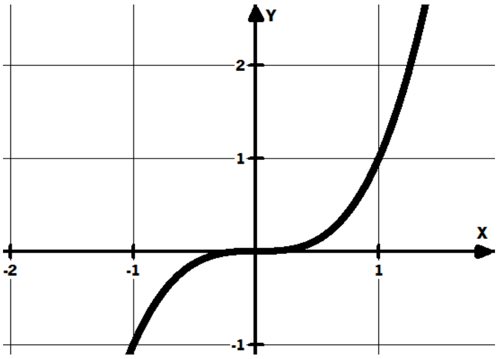
______________________________

______________________________

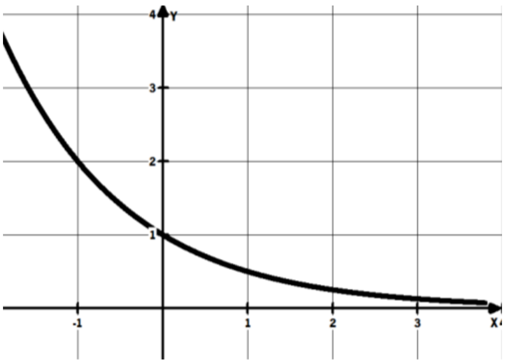
______________________________

**4.** Observe atentamente cada uma das seguintes representações gráficas, cada uma correspondendo a uma função.

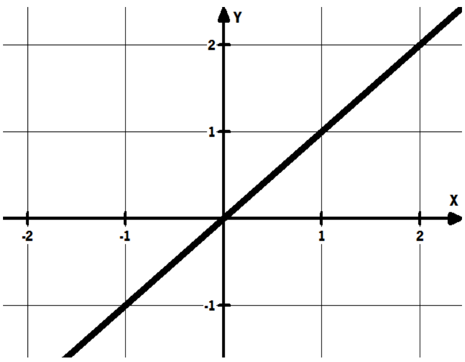
**a)**



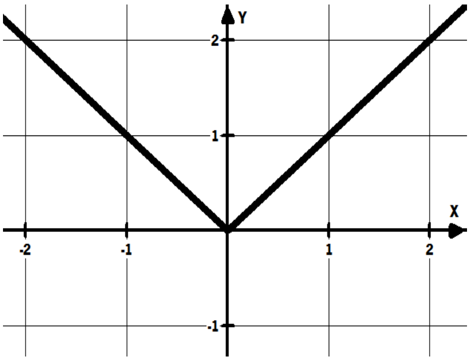

**c)**



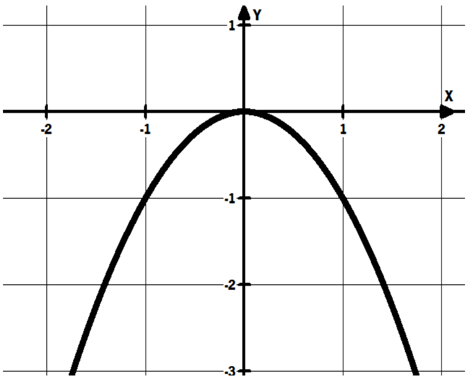

**e)**



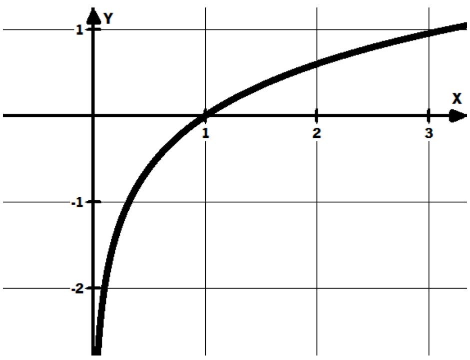

**b)**



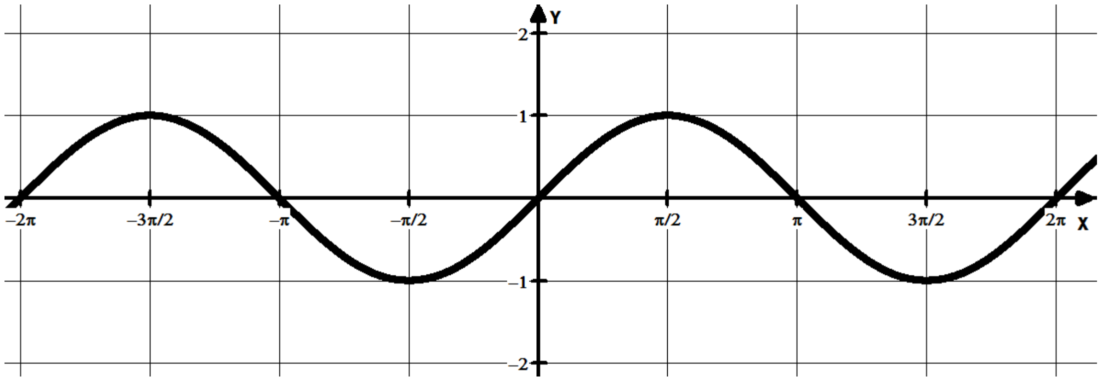

**d)**




**f)**



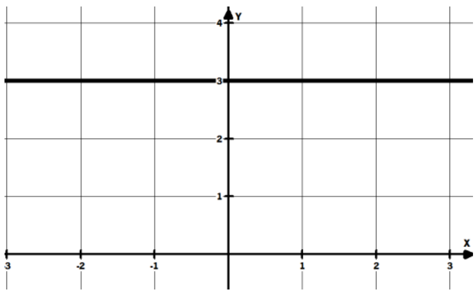
**g)**




Complete a tabela seguinte, fazendo corresponder a cada expressão analítica a respectiva representação gráfica (identificada pela alínea que lhe corresponde).

| Expressão analítica (função) | Representação gráfica correspondente (letra) | Domínio | Conjunto Imagem |
|---|---|---|---|
| $f(x) = x$ | | | |
| $g(x) = -x^2$ | | | |
| $h(x) = x^3$ | | | |
| $i(x) = \|x\|$ | | | |
| $j(x) = sen(x)$ | | | |
| $k(x) = 0{,}5^x$ | | | |
| $l(x) = 2\log(x)$ | | | |

**5.** Seja $f(x) = y$, com $f$ definida de $IR$ em $IR$. Observe atentamente a representação gráfica da função $y = 3$.



**a)** Quando $x = 2$, qual é o valor de $y$? ____________________________

**b)** Indique o domínio da função dada. ______________________________

**c)** Indique o conjunto imagem da função dada. __________________________

**6.** Qual o domínio, o conjunto imagem e a representação gráfica da função $g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ ?

Domínio ___________________

Conjunto Imagem____________

Representação gráfica

## PARTE 3 – FUNÇÃO E LIMITE DE FUNÇÕES

**1.** Qual o significado de $|x|$? Exemplifique.

...............................................................................................................................

...............................................................................................................................

...............................................................................................................................

**2.** Considere, em $IR$, a desigualdade $|x-3| < 1$.

**a)** Quais valores de $x$, reais, que satisfazem a desigualdade?

...............................................................................................................................

...............................................................................................................................

...............................................................................................................................

**b)** Existe alguma relação entre os conjuntos solução das desigualdades $|x-3| < 1$ e $-1 < x-3 < 1$?

...............................................................................................................................

...............................................................................................................................

...............................................................................................................................

**3.** Considere as funções $g(x) = 10^x$ e $h(x) = \log(x)$.

**a)** Esboce os gráficos das funções $g(x)$ e $h(x)$.

$g(x)$ $h(x)$

**b)** Determine os pontos de interseção dos gráficos de cada uma das funções $g(x)$ e $h(x)$ com os eixos coordenados do plano cartesiano.

| Função | Intersecção com o eixo dos $xx$ | Intersecção com o eixo dos $yy$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | | |
| $h(x)$ | | |

**c)** Complete as tabelas abaixo:

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| – 1 | 0,1 |
| – 2 | 0,01 |
| – 3 | ? |
| – 4 | ? |
| – 5 | ? |
| ... | ... |
| $-n(n \in IN)$ | ? |
| ... | ... |

| $x$ | $h(x)$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0,1 | – 1 |
| 0,01 | – 2 |
| ? | – 3 |

| | |
|---|---|
| ? | – 4 |
| ? | – 5 |
| ... | ... |
| $10^{-n}(n \in IN)$ | ? |
| ... | ... |

**d)** Caso existam, determine, justificando convenientemente, $h(0)$ e $x$ em $g(x) = 0$.

.....................................................................................................................................

.....................................................................................................................................

.....................................................................................................................................

**e)** Existe uma relação entre as funções $g(x)$ e $h(x)$. Identifique-a e justifique.

.....................................................................................................................................

.....................................................................................................................................

.....................................................................................................................................

**f)** Observando os esboços dos gráficos e as tabelas acima, o que podemos deduzir de $g(x)$, quando $n$ se torna muito grande? E de $h(x)$ quando $n$ se torna muito grande? Justifique a sua resposta.

.....................................................................................................................................

.....................................................................................................................................

.....................................................................................................................................

**4.** Defina, através de uma tabela de valores, os dez primeiros termos da sequência numérica $\frac{1}{x}, x \in IN$, e, posteriormente, esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, com $x \neq 0$ e $f$ definida de $IR^* \to IR$.

a) Por que $x$ não pode ser igual a zero?

.....................................................................................................................................

.....................................................................................................................................

b) O que acontece com $f(x)$ para valores de $x$ bem próximos de zero?

.....................................................................................................................................

.........................................................................................................................................

c) O que acontece com $f(x)$ para valores de $x$ bem distantes de zero?

.........................................................................................................................................

.........................................................................................................................................

**5.** A noção de *limite* desempenha um papel muito importante no estudo das funções.

**a)** Para você, qual o significado do termo *limite* de uma função?

.........................................................................................................................................

.........................................................................................................................................

.........................................................................................................................................

**b)** Se já estudou ou ouviu falar em *limites de funções*, explique o seu significado a partir de um exemplo.

.........................................................................................................................................

.........................................................................................................................................

.........................................................................................................................................

**6.** O que espera estudar na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral? Quais são as suas expectativas?

.........................................................................................................................................

.........................................................................................................................................

**7.** Já utilizou tecnologia (calculadora gráfica, computadores, aplicativos/ *softwares* gráficos, etc.) no estudo de funções? Em caso afirmativo, indique essa tecnologia e a sua opinião em relação ao seu uso.

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

# Anexo 3: Guião da entrevista aos professores

1. Quanto tempo de experiência de ensino tem no ensino superior?

2. Encontra-se a ensinar o tema limites de funções? Quantas vezes já ensinou o tema limites de funções ao longo da sua carreira profissional?

3. Na sua experiência de ensino, como percebe a aprendizagem dos alunos sobre limites de funções? Sentem dificuldades? Qual a origem dessas dificuldades?

4. A que metodologias têm recorrido no ensino de limites de funções, ou seja, descreva como ocorre as suas aulas sobre limites de funções?

5. Utiliza livros como referência para o ensino de limites de funções? Quais? Por quê?

6. Utiliza tecnologias informáticas (computadores, *softwares*, calculadoras, simuladores, objetos de aprendizagem, etc.) para ensinar limites de funções? Em caso afirmativo, quais são essas tecnologias? Quais as vantagens que atribui ao uso das tecnologias informáticas?

7. A que outros recursos recorre no ensino de limites de funções?

8. Qual a relevância do uso dos recursos, utilizados por você, para o ensino e aprendizagem de limites de funções?

9. Enquanto professor que tem de ensinar limites de funções, sente-se bem preparado para o fazer ou sente dificuldades? Quais?

10. Tem tido à sua disposição os materiais de ensino de que necessita para ensinar limites de funções? Em caso negativo, refira os materiais de que tem sentido falta.

11. Em sua opinião, podem ser introduzidas alterações no ensino do tema limites de funções para melhorar a aprendizagem dos alunos? Quais?

## Anexo 4: Ciclo de estudos

**Ações a serem desenvolvidas no ciclo de estudos:**

- A partir da análise das respostas do questionário/avaliação diagnóstica veremos a necessidade de uma revisão de conteúdos matemáticos relacionados ao ensino básico (funções, módulo, equações, inequações, gráficos etc. – utilizar tecnologias informáticas para facilitar o estudo); (10/09/2014)

- Apresentar o paradoxo de Zenon com o objetivo de compreender a existência de uma quantidade de números infinita num intervalo numérico e discutir o significado das palavras "tender", infinito, aproximar e limite; Estudar a noção intuitiva de limites de funções por meio de construções e simulações nos *softwares* Winplot e Geogebra e utilizando os livros guia de mangá – Cálculo Diferencial e Integral e Cálculos para leigos como referência; (17/09/2014)

- Construir o conceito de limite de funções a partir das leituras e discussões com o grupo. No primeiro momento faremos individualmente e depois socializaremos com intuito de uma construção única criada e aceita pelo grupo; (24/09/2014 a 08/10/2014)

- Elaborar mapas conceituais (versão inicial) individualmente e depois socializarmos no grupo. (15/10/2014)

- Buscar nos livros de Cálculo Diferencial e Integral (5 livros no máximo) a definição formal de limites de funções e associar com o conceito criado pelo grupo, observando as possíveis analogias; Discutir e compreender a definição de limites de funções de forma analítica e geométrica procurando associá-las. (22/10/2014)

- Ver alguns exemplos de resolução de limites de funções; Achar o limite de uma função por meio da definição, procurando associá-la sempre a uma representação gráfica. (Utilizar recursos de tecnologia informática). (29/10/2014)

- Estudar algumas particularidades em limites de funções, como propriedades, limites laterais, limites infinitos e no infinito, assíntotas, etc. (Utilizar recursos de tecnologia informática). (05/11/2014)

- Correção das listas de questões sobre limites de funções. Aplicação do 2° questionário. (10 e 11/11/2014)

- Elaborar mapas conceituais (versão Final) individualmente e depois socializarmos no grupo com intuito de criarmos um mapa conceitual coletivamente (12/11/2014, 07/05/2015 e 15/05/2015)

**Lista de Questões – Limites de funções**

*O conceito de "limite" é o alicerce sobre o qual estão baseados todos os demais conceitos de Cálculo. (ANTON, p.101)*

**1.** Seja a função $f$ definida por $f(x) = 5x - 2$ para todo x real. Se $\lim_{x \to 2} f(x) = 8$, encontre um $\delta$ para $\varepsilon = 0{,}01$ tal que $0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 8| < 0{,}01$ (resp. $\delta = 0{,}002$) (Iezzi, p.26)

**2.** Seja $f$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & se\ x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & se\ -3 \le x \le 3 \\ 3 - x & se\ 3 < x \end{cases}$$

**a)** Faça um esboço do gráfico de $f$.

**b)** Ache, se existirem, cada um dos seguintes limites: $\lim_{x \to -3^-} f(x)$, $\lim_{x \to -3^+} f(x)$, $\lim_{x \to -3} f(x)$, $\lim_{x \to 3^-} f(x)$, $\lim_{x \to 3^+} f(x)$, $\lim_{x \to 3} f(x)$ (resp: 2,0, não existe, 0, 0, 0 respectivamente)

(Leithold, p.76)

**3.** Explique com sua palavras o significado da equação $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$. É possível, diante da equação anterior, que $f(2) = 3$? Explique. (Stewart, p.101)

**4.** Explique o que significa para você dizer que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$. Nessa situação é possível que $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista? Explique. (Stewart, p.101)

**5.** Use uma tabela de valores para estimar o valor do limite. Se você tiver algum mecanismo que faça gráficos, use-o para confirmar seu resultado. (Stewart, p.103)

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$ resp(1/4)

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{tg\, 3x}{tg\, 5x}$

c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^6-1}{x^{10}-1}$ resp(3/5)  d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{9^x-5^x}{x}$

**6.** Faça o gráfico da função $f(x)=sen(\pi/x)$. Dê um zoom em direção a origem por várias vezes. Comente o comportamento dessa função. (Stewart, p.104)

**7.** a) Estime o valor de $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$ fazendo o gráfico da função $f(x)=x/\left(\sqrt{1+3x}-1\right)$.

b) Faça uma tabela dos valores de $f(x)$ para $x$ próximo de 0 e conjecture qual será o valor do limite. (Stewart, p.112) (resp. 2/3)

**8.** Use um gráfico para encontrar um numero $\delta$ tal que $\left|\sqrt{4x+1}-3\right|<0{,}5$ sempre que $|x-2|<\delta$ (resp. 0,6875 ou qualquer numero menor positivo) (Stewart, p.122)

**9.** São dados os números positivos $\varepsilon$ e o limite $L$ de uma função $f$ no ponto $a$. Encontre uma número $\delta$, tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ se $0<|x-a|<\delta$.(Anton, p.141)

a) $\lim_{x\to 4} 2x=8; \quad \varepsilon=0{,}1$ (resp. 0,05)  b) $\lim_{x\to 3}(5x-2)=13; \quad \varepsilon=0{,}01$

c) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}=6; \quad \varepsilon=0{,}05$ (resp. 0,05)  d) $\lim_{x\to -1/2} \dfrac{4x^2-1}{2x+1}=-2; \quad \varepsilon=0{,}05$

e) $\lim_{x\to 2} x^3=8; \quad \varepsilon=0{,}001$ (resp. 8,33 x $10^{-5}$)  f) $\lim_{x\to 4}\sqrt{x}=2; \quad \varepsilon=0{,}001$

g) $\lim_{x\to 5} \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{5}; \quad \varepsilon=0{,}05$ (resp. 1/505)  h) $\lim_{x\to 0}|x|=0; \quad \varepsilon=0{,}05$

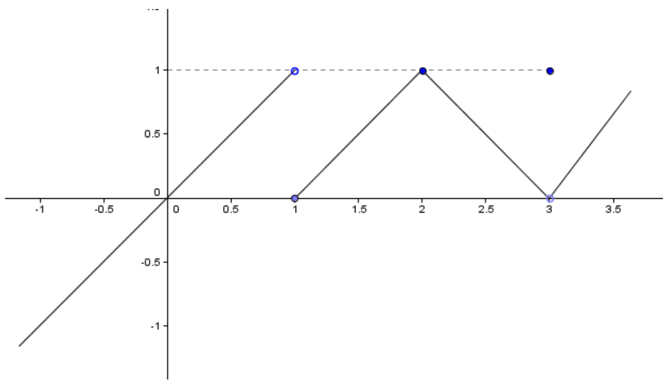
**10.** Fazer o gráfico das funções $y=f(x)$ dadas, explorando diversas escalas para visualizar melhor o gráfico numa vizinhança da origem. Observando o gráfico, qual a sua conjectura sobre o $\lim_{x\to 0} f(x)$? Comprove analiticamente se a sua conjectura é verdadeira. (Diva, p.74-75 )

a) $f(x) = sen\,\dfrac{1}{x}$ (resp. não existe)    b) $f(x) = x\,sen\,\dfrac{1}{x}$ (resp. 0)

c) $f(x) = x^2\,sen\,\dfrac{1}{x}$ (resp. 0)    d) $f(x) = x^3 sen\,\dfrac{1}{x}$ (resp. 0)

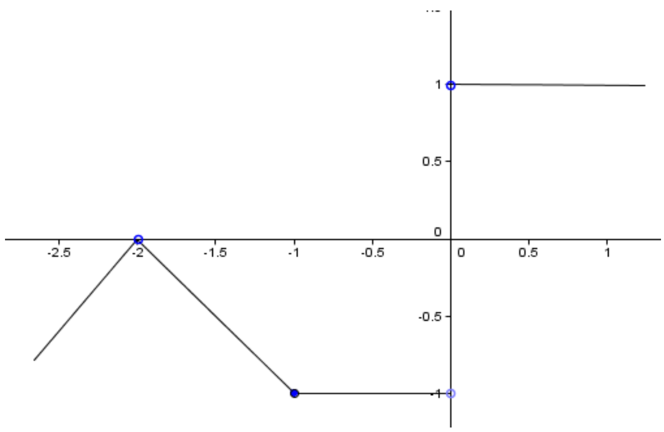
**11.** Para a função $g(x)$ aqui ilustrada, encontre os seguintes limites ou explique por que eles não existem. (Thomas, p. 93)

$$\lim_{x\to 1} g(x),\quad \lim_{x\to 2} g(x),\quad \lim_{x\to 3} g(x)$$




**12.** Para a função $f(t)$ aqui ilustrada, encontre os seguintes limites ou explique por que eles não existem. (Thomas, p. 93)

$$\lim_{t\to -2} f(t),\quad \lim_{t\to -1} f(t),\quad \lim_{t\to 0} f(t)$$




**13.** Cada um dos exercícios de "a" a "f" dá uma função $f(x)$ e os números $L, x_0$ e $\varepsilon > 0$. Em cada caso, encontre um intervalo aberto em torno de $x_0$ no qual a desigualdade

$|f(x)-L|<\varepsilon$ valha. Dê então um valor para $\delta>0$ tal que para todo $x$ satisfazendo $0<|x-x_0|<\delta$ a desigualdade $|f(x)-L|<\varepsilon$ seja verdadeira. (Thomas, p.95)

a) $f(x)=x+1, \quad L=5, \quad x_0=4, \quad \varepsilon=0{,}01$

b) $f(x)=2x-2, \quad L=-6, \quad x_0=-2, \quad \varepsilon=0{,}02$

c) $f(x)=\sqrt{x+1}, \quad L=1, \quad x_0=0, \quad \varepsilon=0{,}1$

d) $f(x)=\sqrt{19-x}, \quad L=3, \quad x_0=10, \quad \varepsilon=1$

e) $f(x)=\dfrac{1}{x}, \quad L=\dfrac{1}{4}, \quad x_0=4, \quad \varepsilon=0{,}05$

f) $f(x)=x^2, \quad L=3, \quad x_0=\sqrt{3}, \quad \varepsilon=0{,}1$

**14.** Usando os exercícios da letra “a” a “d”, complete as seguintes tabelas e diga quanto acha que é $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. (Thomas, p.96)

a) $f(x)=x\,sen\dfrac{1}{x}$, (resp. parece ser 0), b) $f(x)=sen\dfrac{1}{x}$, c) $f(x)=\dfrac{10^x-1}{x}$, (resp. parece ser 2/3), d) $f(x)=x\,sen\left(\ln|x|\right)$

| $x$ | - 0,1 | - 0,01 | - 0,001 | - 0,0001 | ....... |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ? | ? | ? | ? | |

| $x$ | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 | ....... |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ? | ? | ? | ? | |

**15.** Usando o computador – A) Represente graficamente $g(x)=x\,sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$ para estimar $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, ampliando na origem se necessário.

B) Agora represente graficamente $k(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$. Compare o comportamento de $g$ e $k$ próximo da origem. O que é igual? O que é diferente? (Thomas, p. 108)

**16.** Usando o computador – Esboce os gráficos das funções abaixo e responda as seguintes perguntas. (Thomas, p.120)

a) $y = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2/3}$ e b) $y = \frac{3}{2}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{2/3}$

- Como o gráfico se comporta quando $x \to 0^+$?
- Como o gráfico se comporta quando $x \to \pm\infty$?
- Como o gráfico se comporta quando $x = 1$ e $x = -1$?

**Conceitos Iniciais**

Dado um ponto, o limite define os valores de f(x) quando x tende a algum número tanto pela esquerda, quanto pela direita. (Albert)

De acordo com o que já estudamos quanto mais perto vamos chegando de um certo numero no eixo x, mais próximo também será a distância do seu limite no eixo y, ou seja, fica mais próximo de um certo número em y. (Aragão)

O limite tem como objetivo mostrar qual valor de x, desde que ele seja $\neq 1$, pois x não pode ser igual a zero. (Graziela)

É a relação que ligam pontos de um gráfico, dando assim um limite de parada sem que si toca ao ponto principal. (Bella)

Penso que limite é uma condição criada para colocar controle de onde partir e até onde se quer chegar, ou seja, você estabelecer uma relação. Por exemplo: o numero 1 ele continua sendo 1 até 1,999......Depois de 2 já não posso afirmar que é 1 mais. Então penso que seja por esse caminho!

Pertencer a um limite de uma função quando um numero qualquer no eixo (y) e outro numero no eixo (x) com a condição por exemplo: No eixo (y) tenho 1e no eixo (x) tenho um numero entre 1 e 2. Todos os números que estiverem entre 1 e 2, ou seja, se aproximando de 2 pela esquerda saindo de 1 e se aproximando de 2 pela direita saindo de 3 fazem a relação com o numero 1 no eixo (y). (Lázaro)

Qualquer o valor próximo 1 no intervalo $\varepsilon$.

Sempre vai existir $\varepsilon$ menor que 1 para qualquer intervalo do $\delta$ existe um intervalo do $\varepsilon$

Função de limites É quando ele aproxima, mas não chega

O conceito de limites

É quando a f(x) de limites tende a aproximação do numero natural, em que também pode ser representado no gráfico, demonstrando as funções e o intervalo que existe em $\varepsilon$ tendendo a $\delta$.

Se caso tivermos uma função de limites laterais.

É quando ele aproxima do número, mas não chega. Aonde também podemos utilizar o gráfico demonstrando os intervalos de $\varepsilon$ e $\delta$. (Lívia)

Limite de uma função é o grau mais alto de uma função provavelmente é o ultimo nível de resolução da função apresentada por gráficos.(Mirosmar)

É definida quando os intervalos do eixo "x" e "y" se aproxima ao máximo do valor dado sendo $x \neq 1$. (Nelson)

Limite de uma função

dado um valor para x e y, encontrar o menor valor possível equivalente a aproximação desse número, de modo que sejam como pela esquerda tanto pela direita, ou seja, valores que estejam antes e depois deste.

*tanto pela direita como pela esquerda. (Niul)

Dado um grafico,na qual esse grafico seja uma de uma função, e fixando um valor no eixo X ,sempre esse valor X estará em funçao de um valor no eixo Y. Ou seja qualquer valor escolido no eixo X, eu vou ter um valor associado no eixo Y.Se escolher um valor no eixo X do grafico dado, e pegar qualquer valor tendendo a esse valor tanto pela esquerda como pela direita, vou ter um valor no eixo Y, tanto por baixo como por cima. E esse valor se aproxima do limite estabelecido da funçao dada. (Riquelme)

É delimitada um campo de ação para essa função e impor um ponto especifico onde a função deve parar. (Saulo)

É se dado através de uma função, tal que $lim f(x) \neq 0$, para todo $\varepsilon > \delta$, e usada para definir o valor do limite quando $lim_{x \to 1} f(x) = 3$, entre outros valores do $lim f(x)$ e é também usada ε > δ para resolver a solução do $lim f(x)$. (Thamyres)

**Conceitos Finais**

Dado um ponto, o limite define os valores de f(x) quando x tende a algum número tanto pela esquerda, quanto pela direita. Onde $\delta$ está no eixo y e $\varepsilon$ está relacionado ao eixo x. Dizemos que x tende a número tanto pela esquerda quanto pela direita. (Albert)

Em um plano cartesiano, representando uma função para qualquer valor que pegarmos no eixo x encontraremos um correspondente no eixo y, ou seja, para cada $\varepsilon$ temos um $\delta$ e que este $\delta$ será sempre menor que o $\varepsilon$. (Aragão)

É tudo aquilo que se aproxima de um determinado ponto, tanto pela direita quanto pela esquerda. (Aysha)

Valores encontrados pela direita e pela esquerda para um ponto dado. (Bella)

O limite nos permite ver em forma de gráficos e tabelas se numa determinada função do qual o valor do limite lateral está se aproximando tanto pela direita quanto pela esquerda. O objetivo é mostrar qual o valor de x , desde que ele seja $\neq 1$, pois x não pode ser igual a zero. (Graziela)

Se temos x e queremos saber o limite dela temos que estudar tudo o que acontece envolta dela. Porém o valor de x não nos interessa. Daí temos que observar todos os valores que se aproximam de x pela esquerda e se distanciam do zero, no eixo (y) e os que se aproximam de x pela direita e ficam mais próximo do zero. Mas somente um valor dentro desse intervalo pode nos interessar. Deve se estudar o gráfico da função para achar o intervalo e perceber quais valores existem nos intervalos. (Lázaro)

Tendo que o limite de uma função quando x tende a "a" de um numero real L, logo os números reais da imagem f(x) permanecerem próximos de L, para vários valores de x próximo de a. Sendo que o módulo de uma função menos o limite tem que ser maior que $\varepsilon$ e o módulo de x – a é maior que $\delta$. (Lívia)

É uma função formulada que existe certo valor limite a função, ou seja, dada a equação $\frac{2x+1(x-1)}{(x-1)}$ onde o valor final dessa função é igual a 3. Sendo assim os valores próximos de três, serão o limite final dessa função os valores que assumem serão diferente de 1, os valores referentes a 0,1, 0,01, 0,001......serão os valores aproximados referentes ao limite. Levando a qualquer numero, sendo a esquerda e a direita diferente de 1. (Mickey)

Entender que o Limite da função sempre existe com valores correspondentes tanto para direita quanto para a esquerda, caso esses valores sejam diferentes o limite não existe. (Mirosmar)

Limite é usado para descrever o comportamento de uma função a medida que o seu argumento se aproxima de um determinado valor, quando falamos do processo de limite, falamos de uma incógnita que "tende" a ser um determinado número, ou seja, no limite, esta incógnita, nunca vai ser o número, mas vai se aproximar muito de tal maneira que não se consiga estabelecer uma distância que vai superar o número da incógnita. Lembrando que ao calcular o limite não importa o que aconteça no ponto x, mas sim o que acontece em torno desse ponto. Por isso, quando falamos que número “tende”a ser n, por exemplo, o número nunca vai ser n, mas se aproxima muito do número n. (Nana)

O limite de uma função é quando o intervalo no eixo “x” definida por δ, se aproxima tanto pela direita quanto pela esquerda dos intervalos do eixo “y” definida por ε, tanto de cima para baixo quanto de baixo para cima. (Nelson)

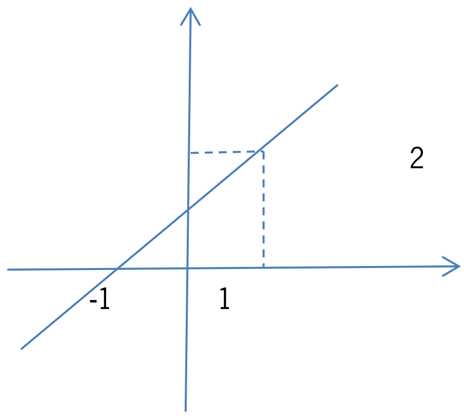
Dado um ponto, encontrar valores próximos a este por ambos os lados (direita e esquerda). (Niul)

Encontrar valores infinitos, os quais, nunca zeram a função e que “y” seja sempre maior que “x”. (Obama)

O limite de uma função podem ser representada pela forma analítica $lim_{x \to 1} f(x) = L$, isso quer dizer quando x tende há um valor de y e cada vez próxima de “L”, na qual o “L” é o limite da função. Existem também algo que pode ser ressaltado, que para ter um limite quando x tende há 0 um valor “a” na função f(x) o limite seja “L”, tem que acontecer duas coisas: O limite quando x tende há um valor “a” pela direita e pela esquerda tem que ser igual, sendo igual vai existir limite, caso contrário , não há limite

Ex. Uma representação gráfica

$f(x) = x + 1,$ $\quad lim_{x \to a} f(x) = L \quad lim_{x \to 1} x + 1 = 2$



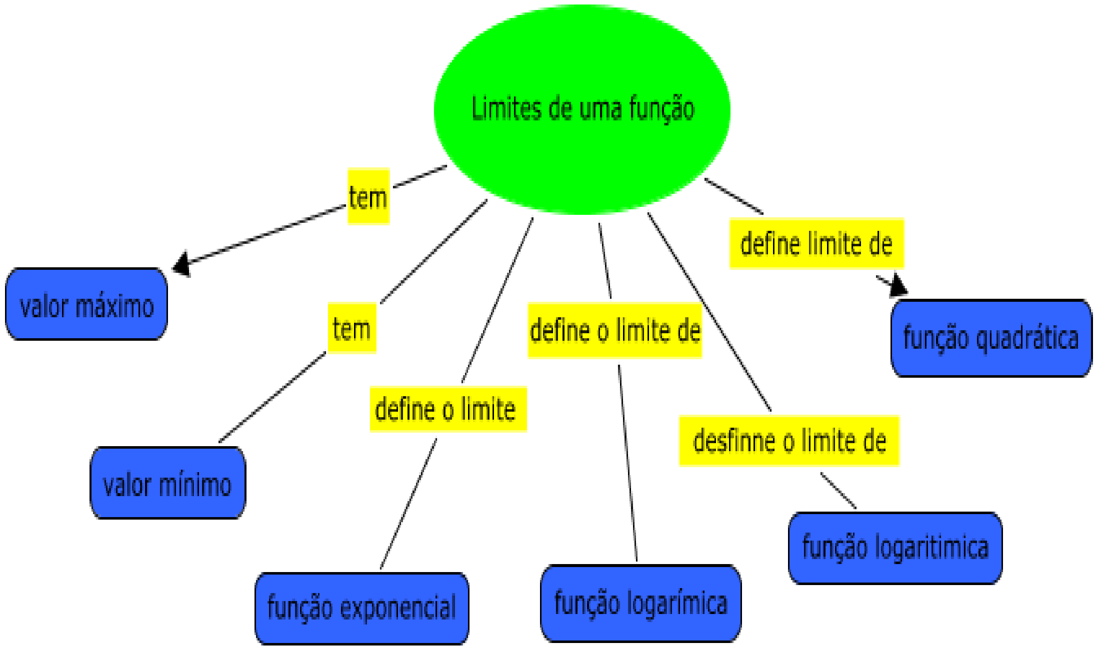

(Riquelme)

Limite é algo que utiliza função. Os valores de limite se aproximam de uma valor no eixo x pela esquerda e pela direita e o mesmo acontece no eixo y (eixo das ordenadas). (Roberto)

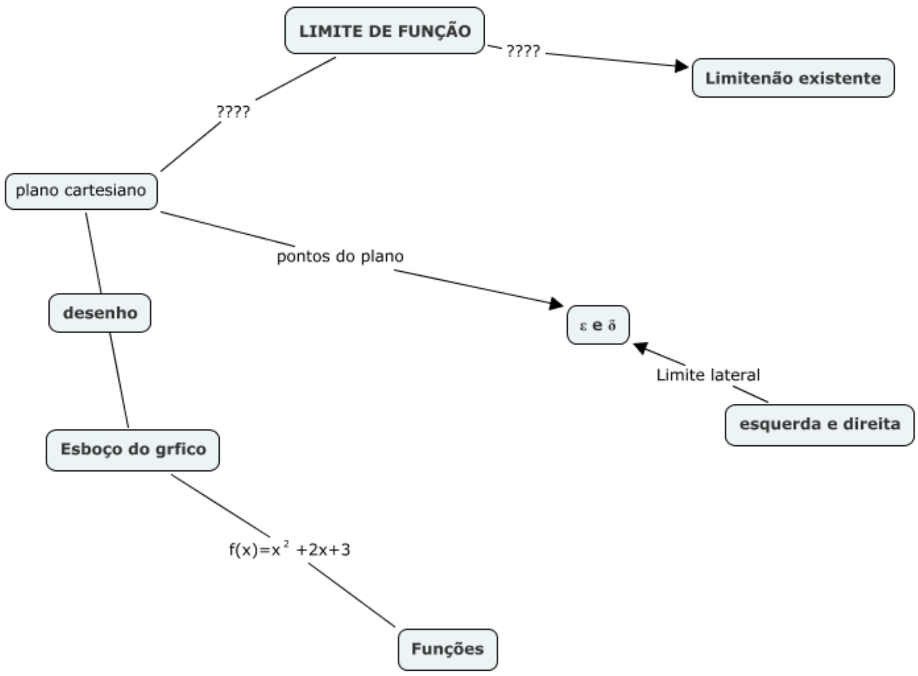
Pude perceber depois de iniciado a pesquisa que o limite de uma função não está voltado para o ponto em si, mas sim em o que está em sua volta (números bem próximos e pequenos). (Saulo)

Dada uma função, podemos dizer que esta função possui um limite L quando x tende para um valor, tal que para cada ε > 0 existe δ > 0, tal que |f(x) – L|<ε, Sendo $lim\, f(x) \neq 0$. De modo que o valor do $lim\, f(x)$ é também usado ε > δ para resolver a solução do $lim\, f(x)$. (Thamyres)

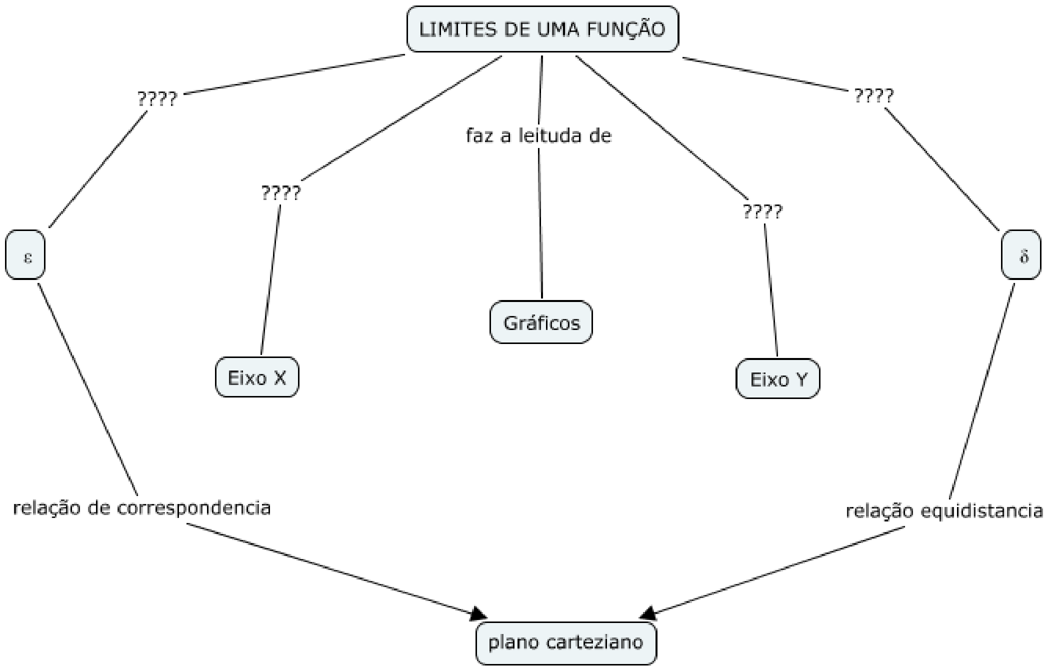
**Mapas Conceituais Iniciais**



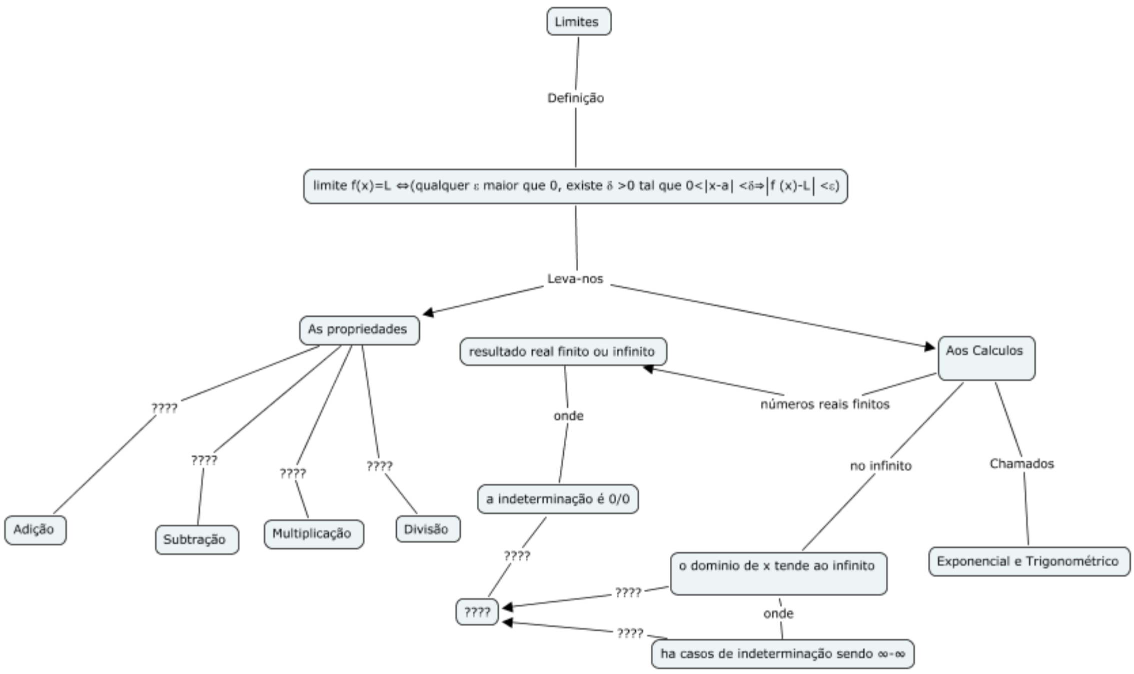

(Mapa de Albert)



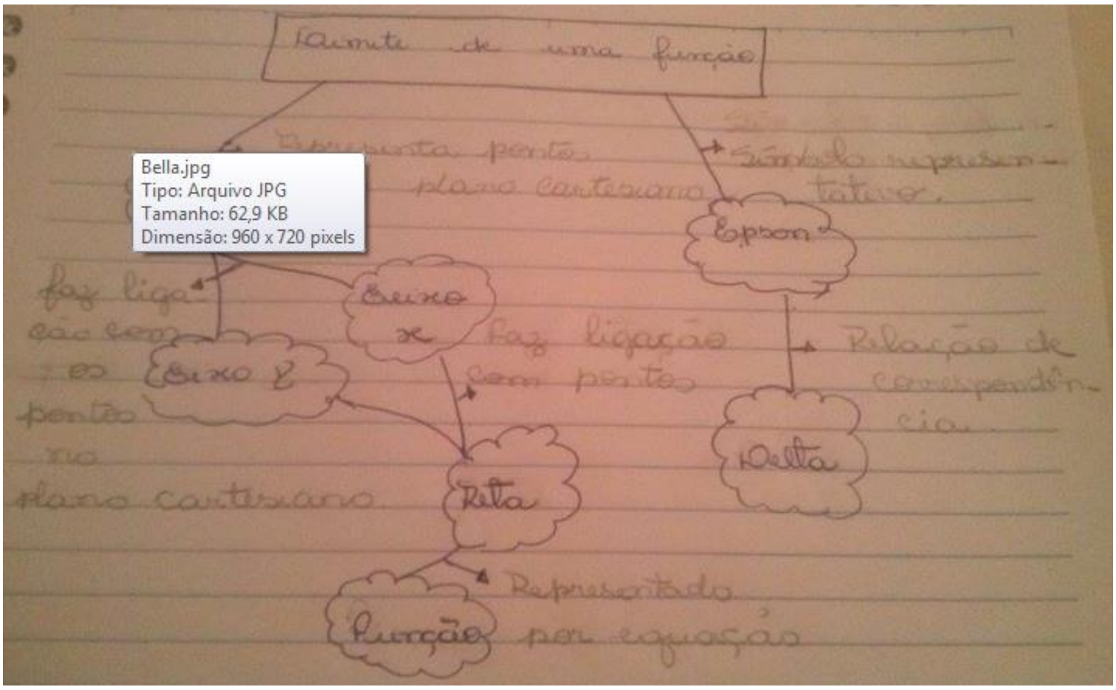

(Mapa de Aragão)



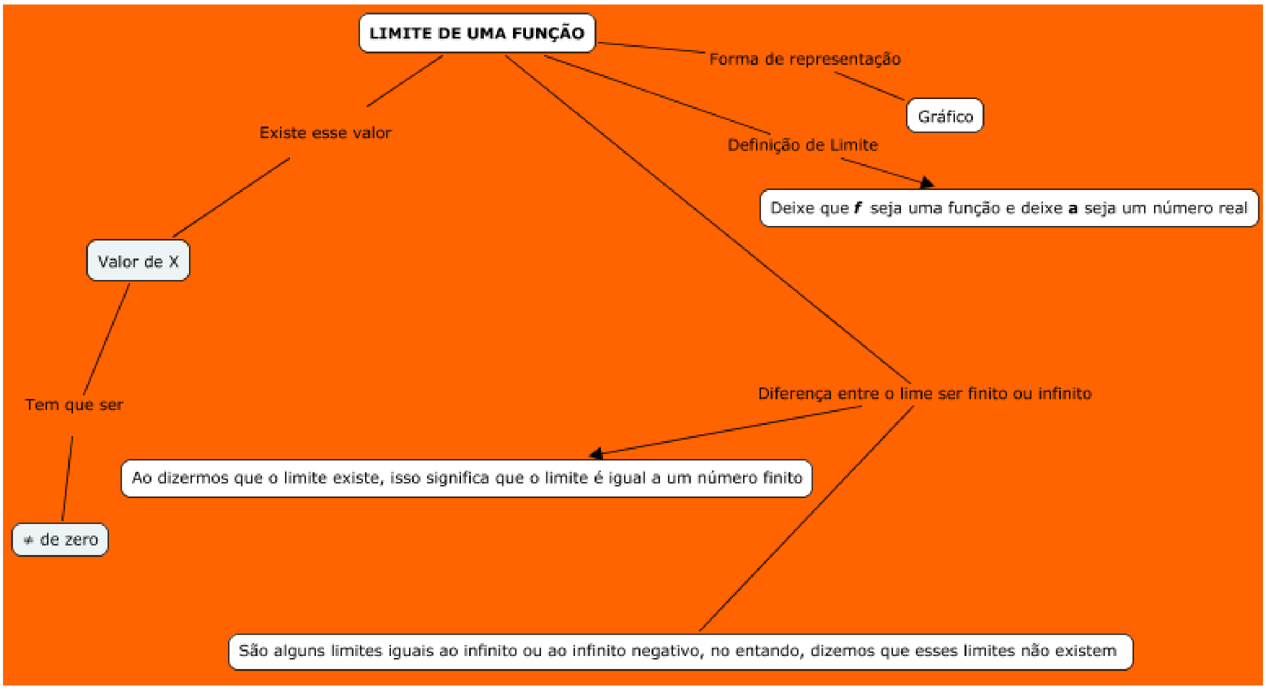

(Mapa de Augusto)



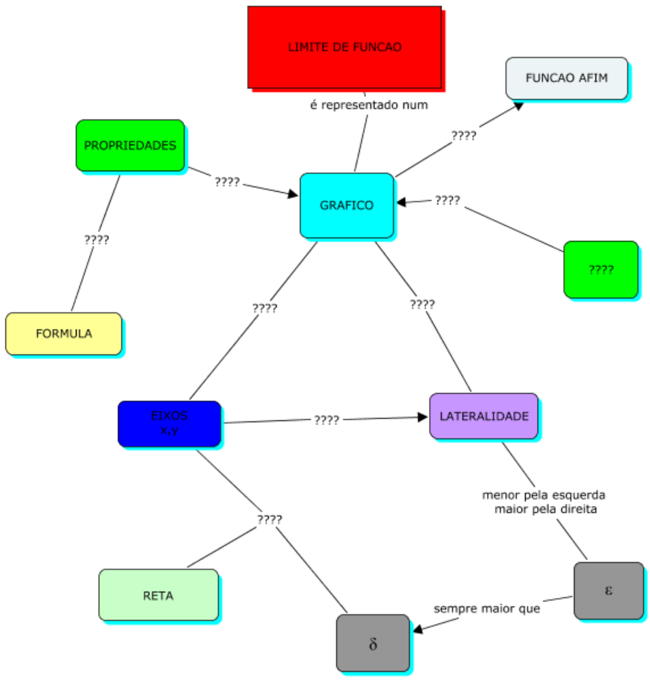

(Mapa de Aysha)



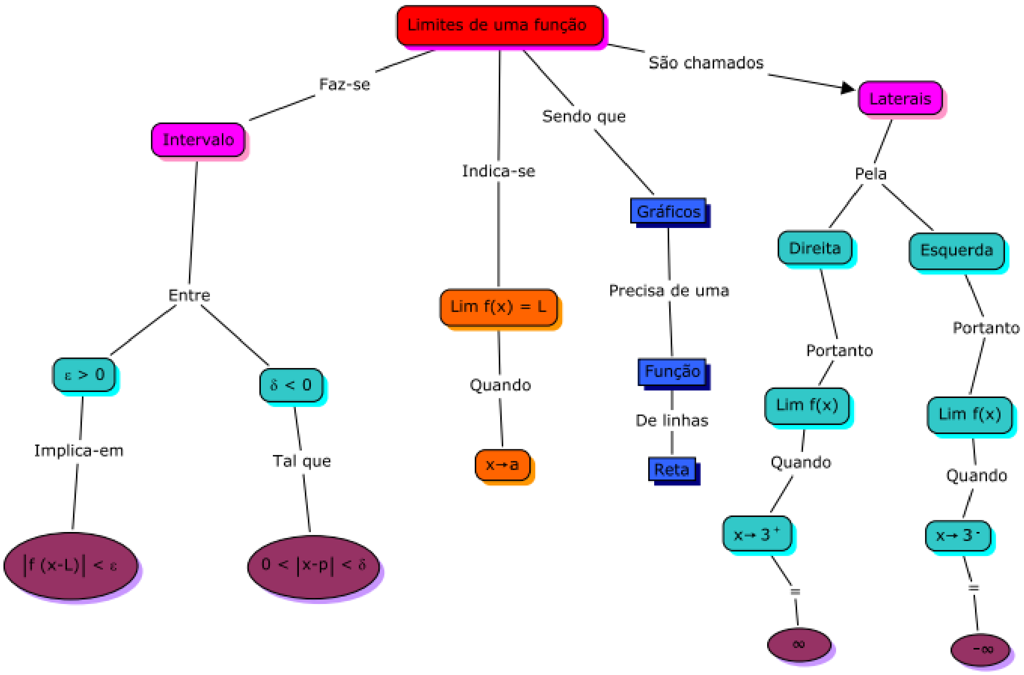

(Mapa de Bella)



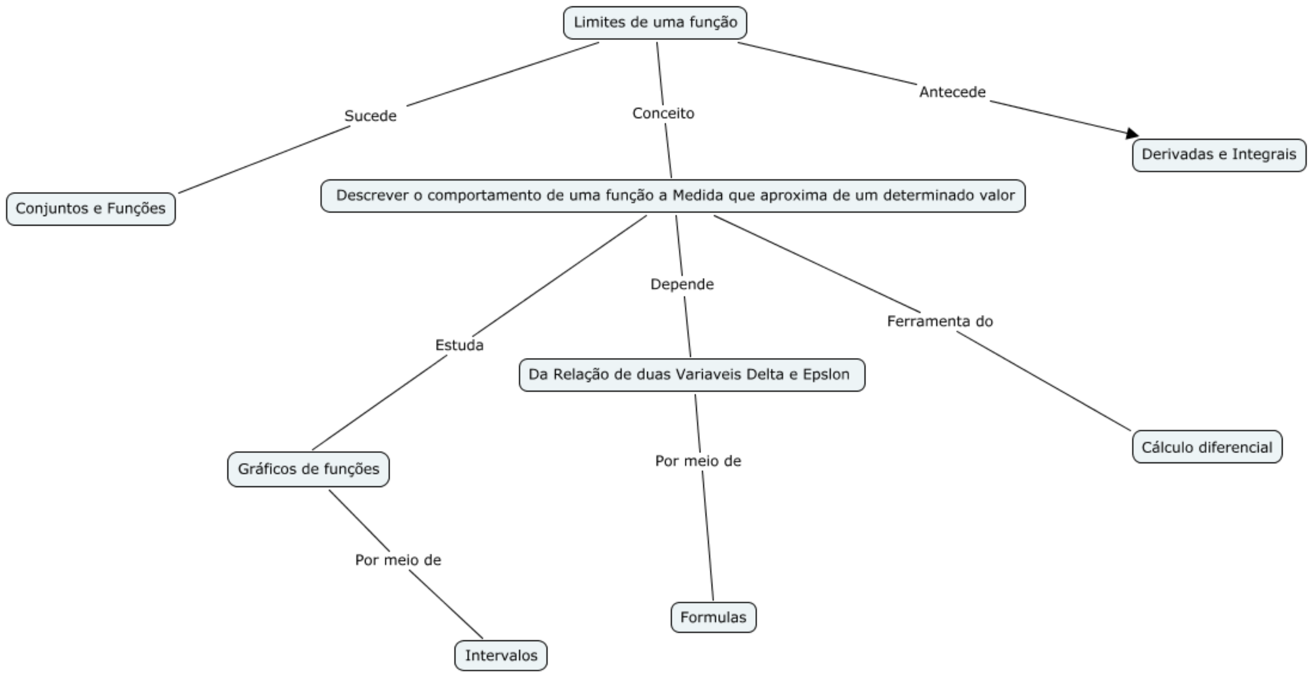

(Mapa de Graziela)



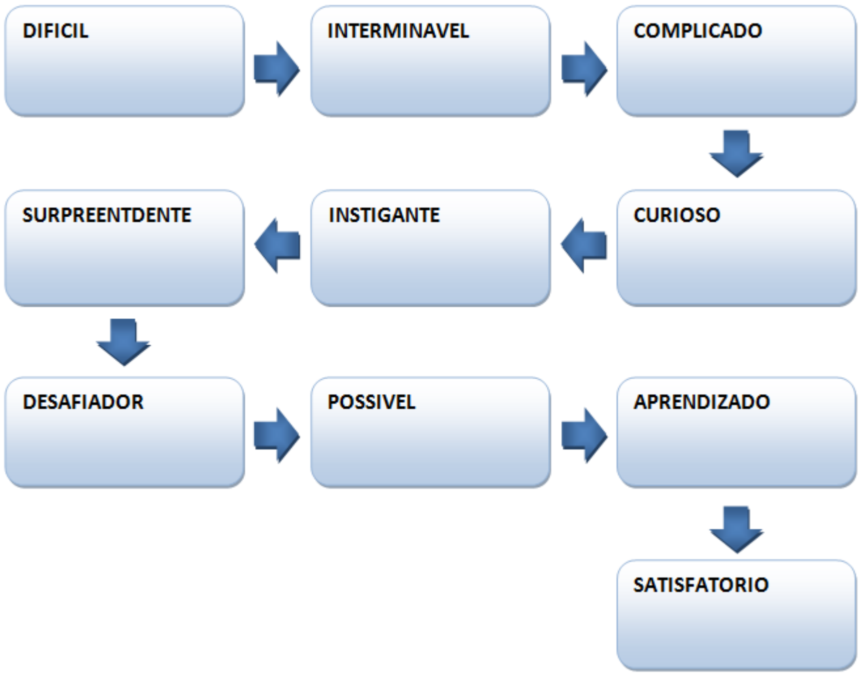

(Mapa de Lázaro)



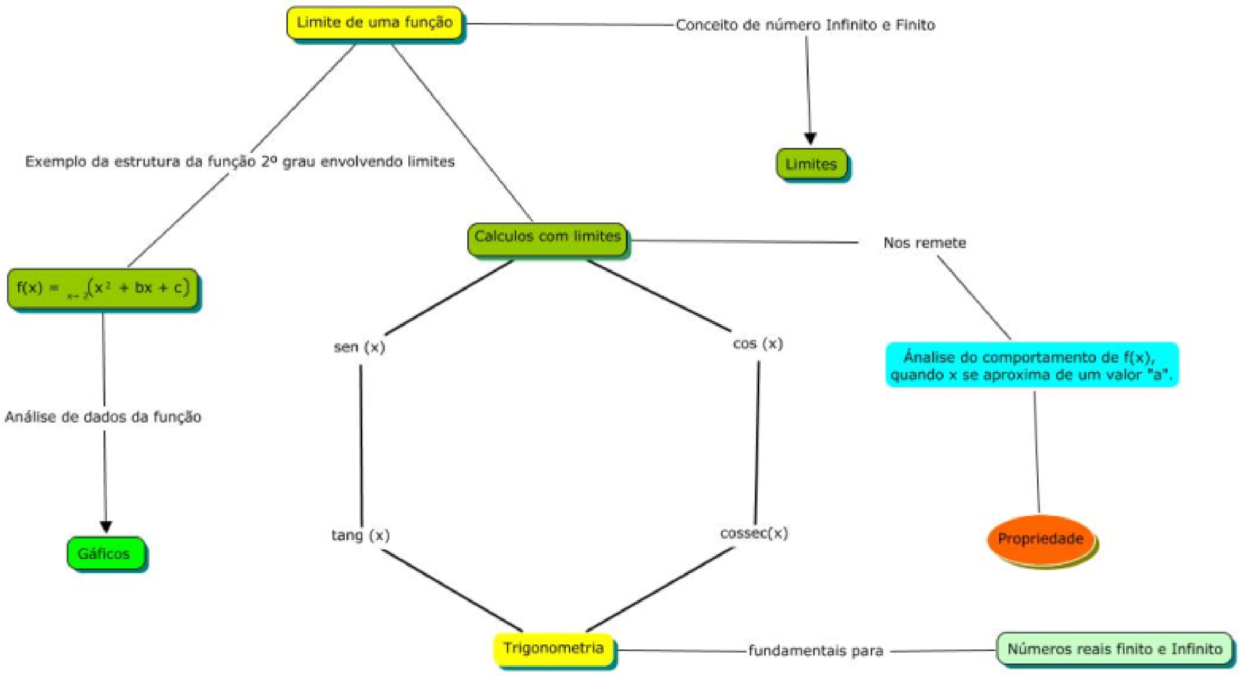

(Mapa de Lívia)



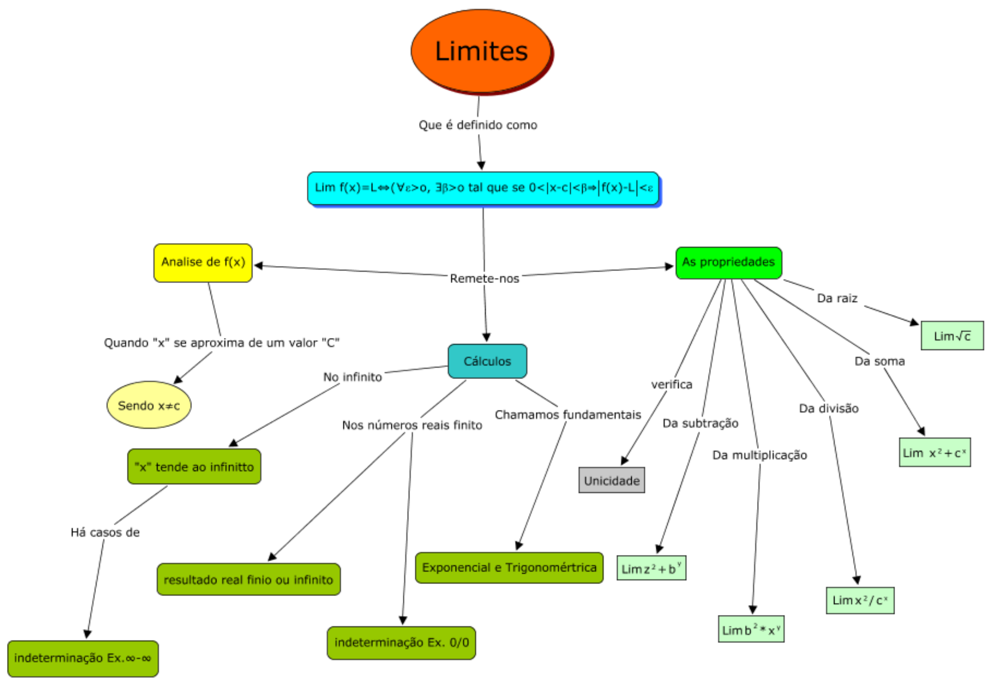

(Mapa de Martins)



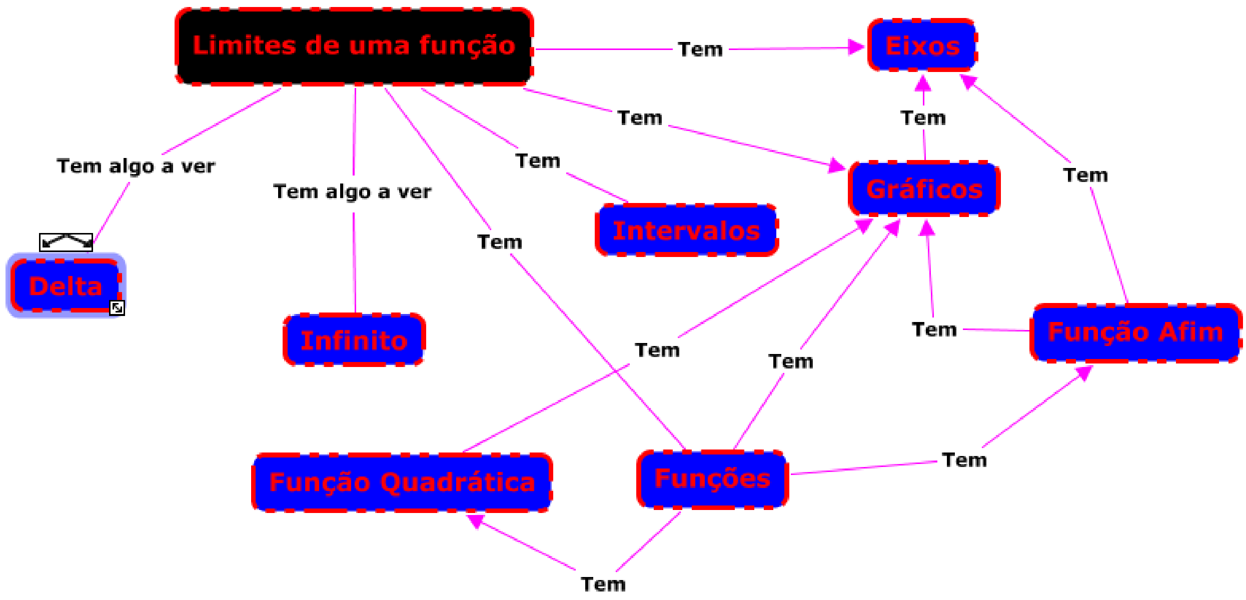

(Mapa de Mirosmar)



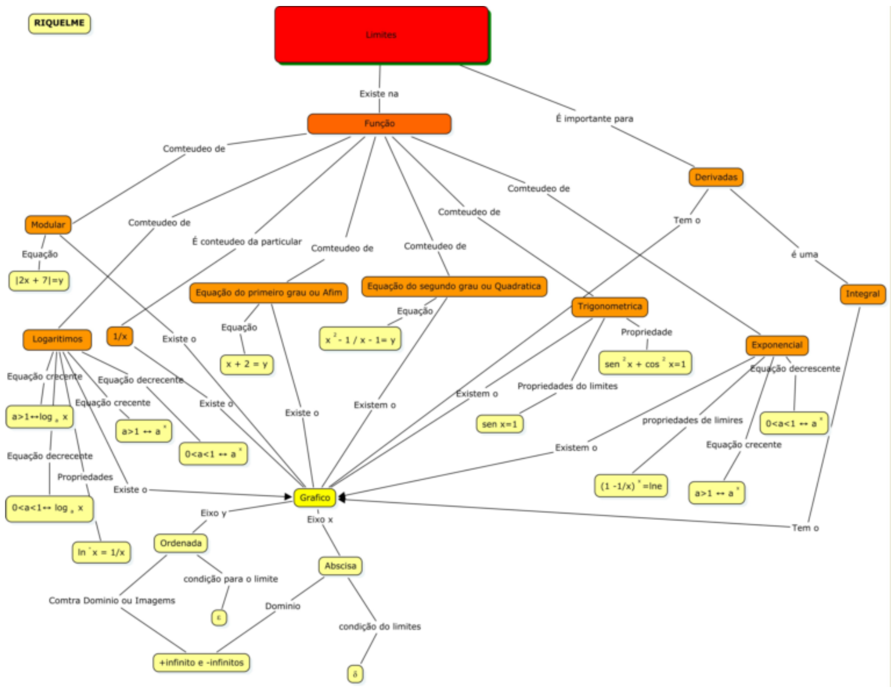

(Mapa de Nana)



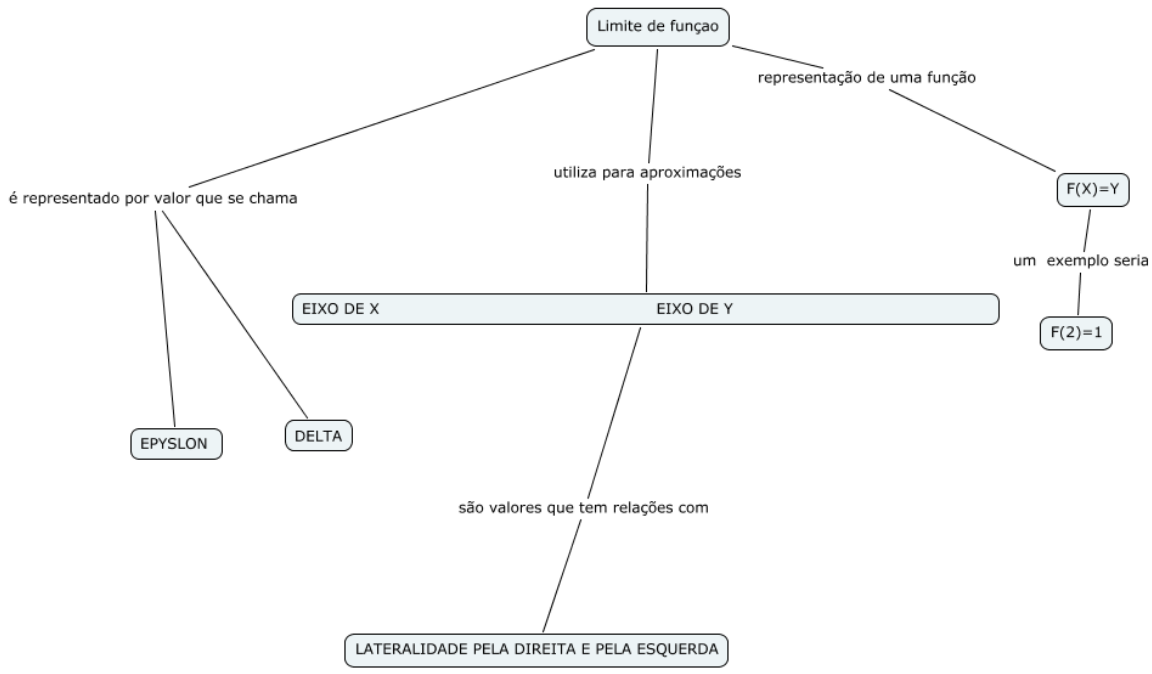

(Mapa de Nelson)



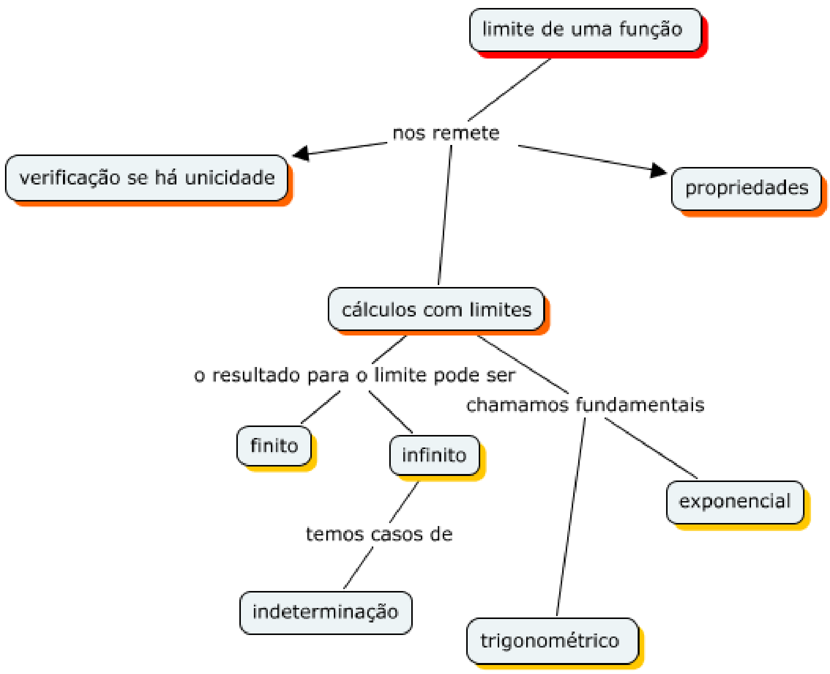

(Mapa de Obama)



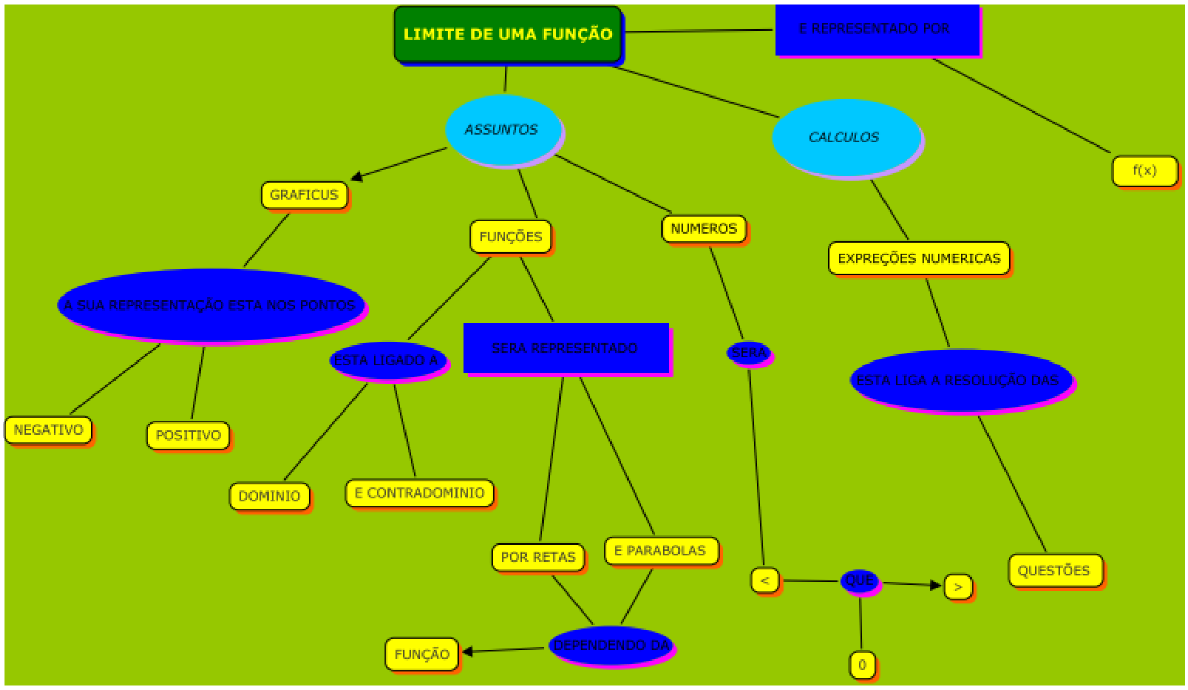

(Mapa de Riquelme)




(Mapa de Roberto)

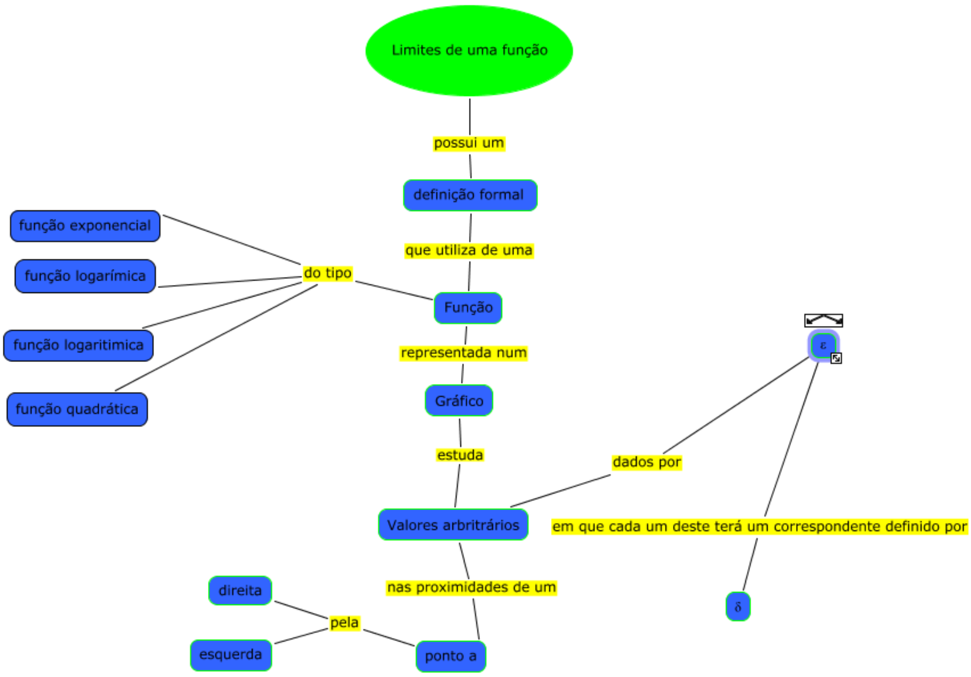



(Mapa de Saulo)

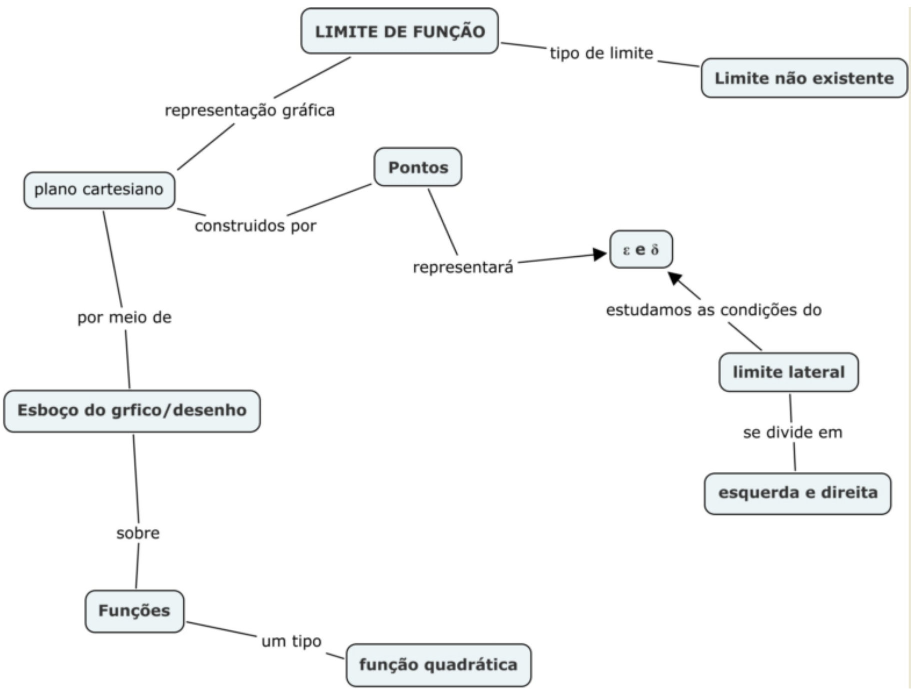



(Mapa de Thamyres)

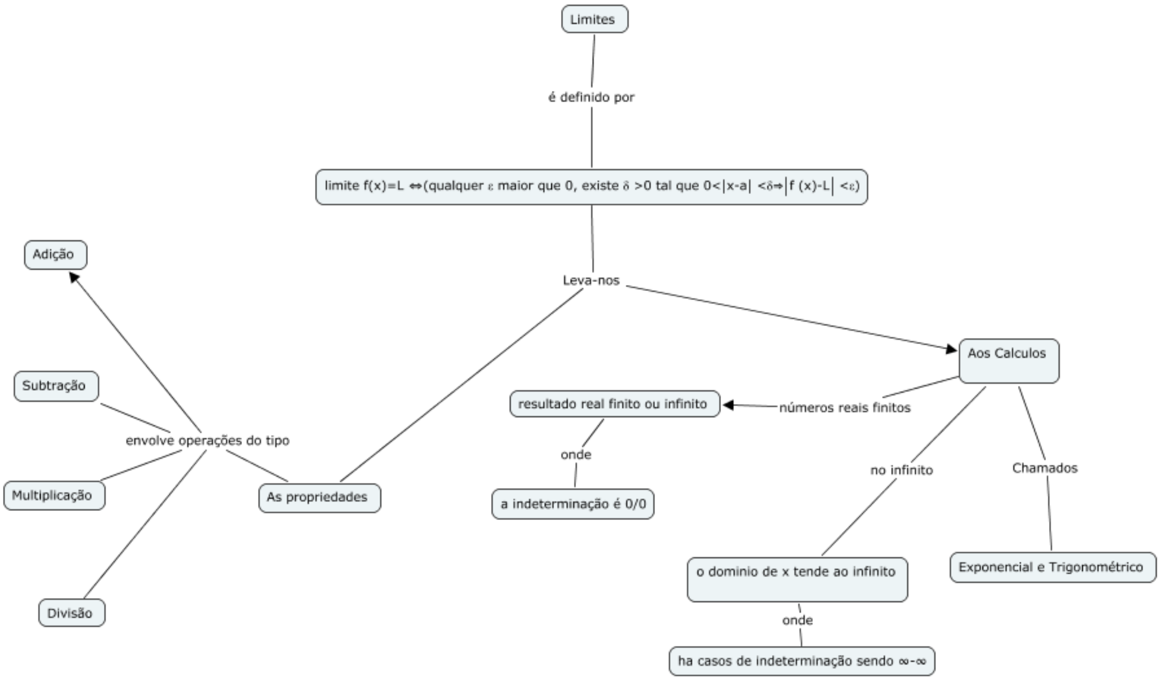
**Mapas Conceituais Finais**



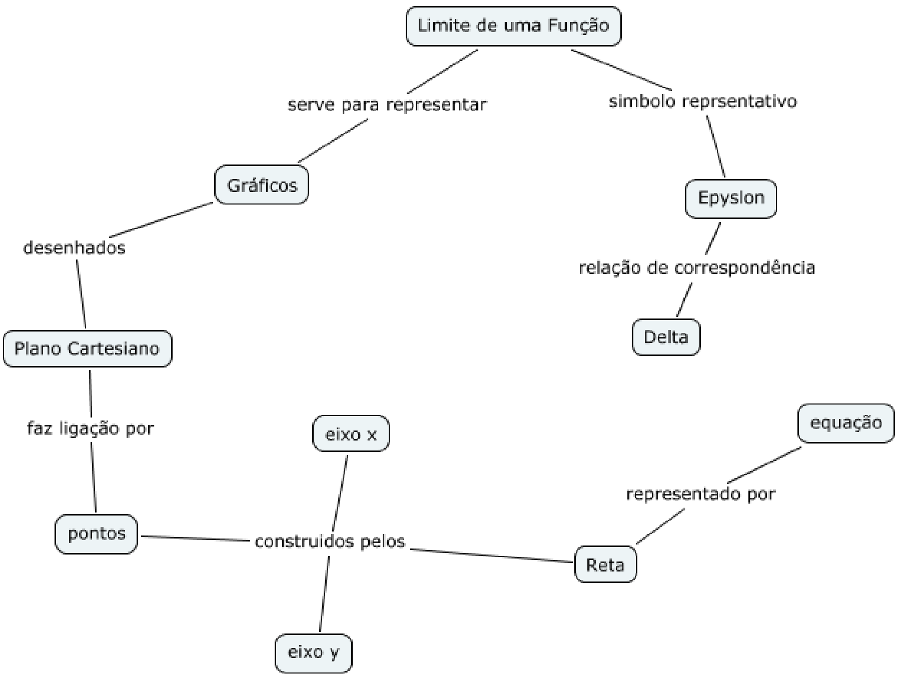

(Mapa de Albert)



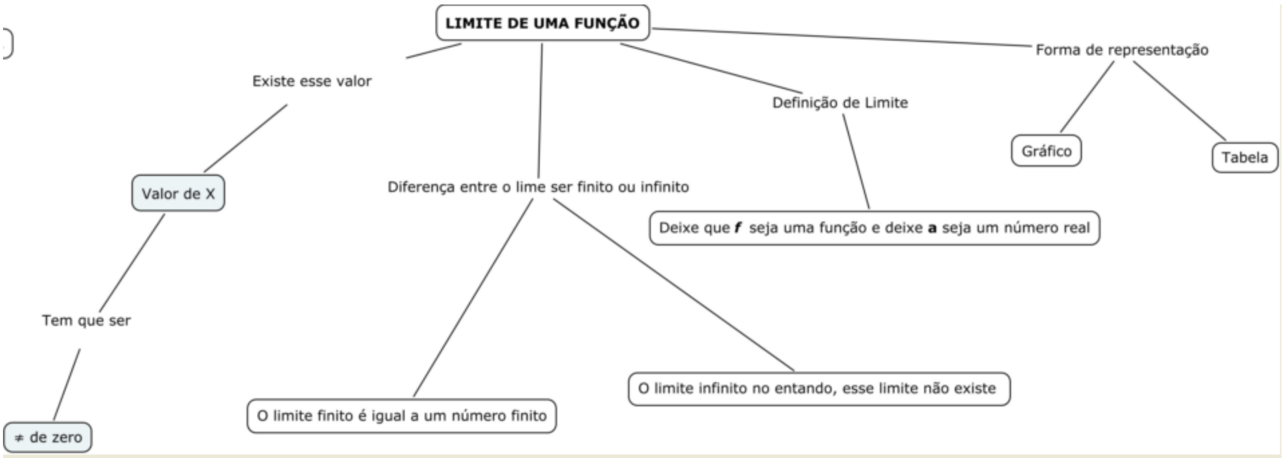

(Mapa de Aragão)



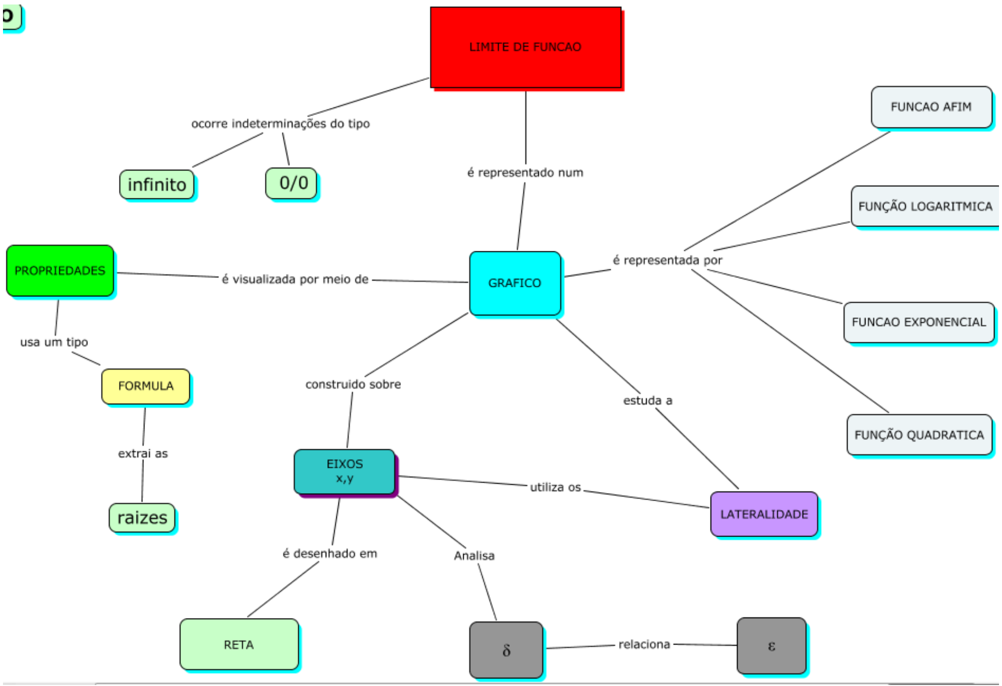

(Mapa de Aysha)



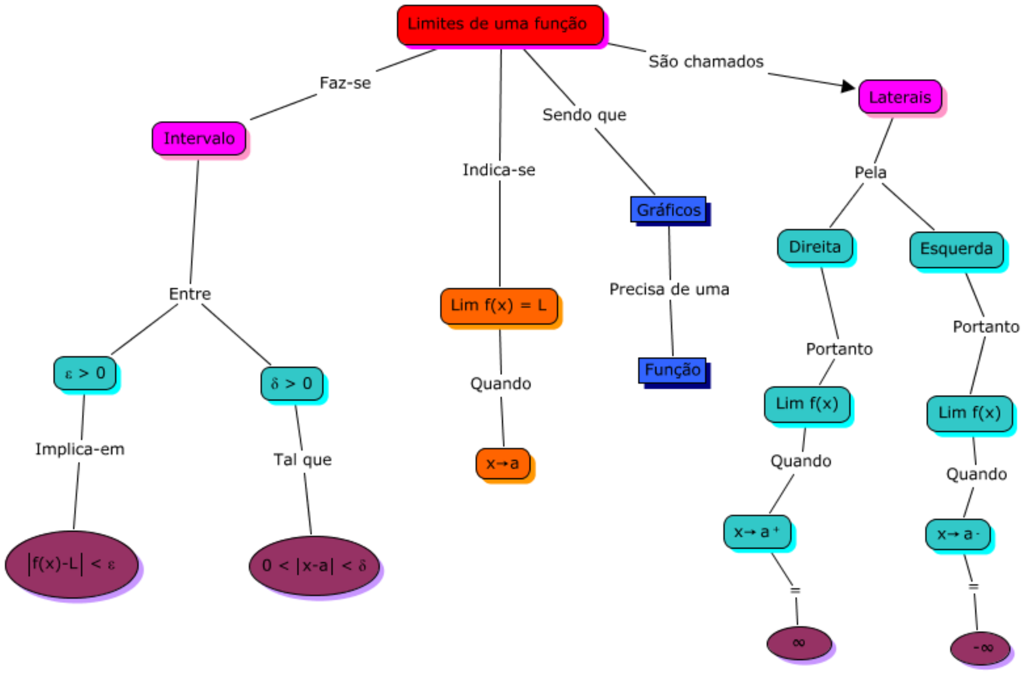

(Mapa de Bella)



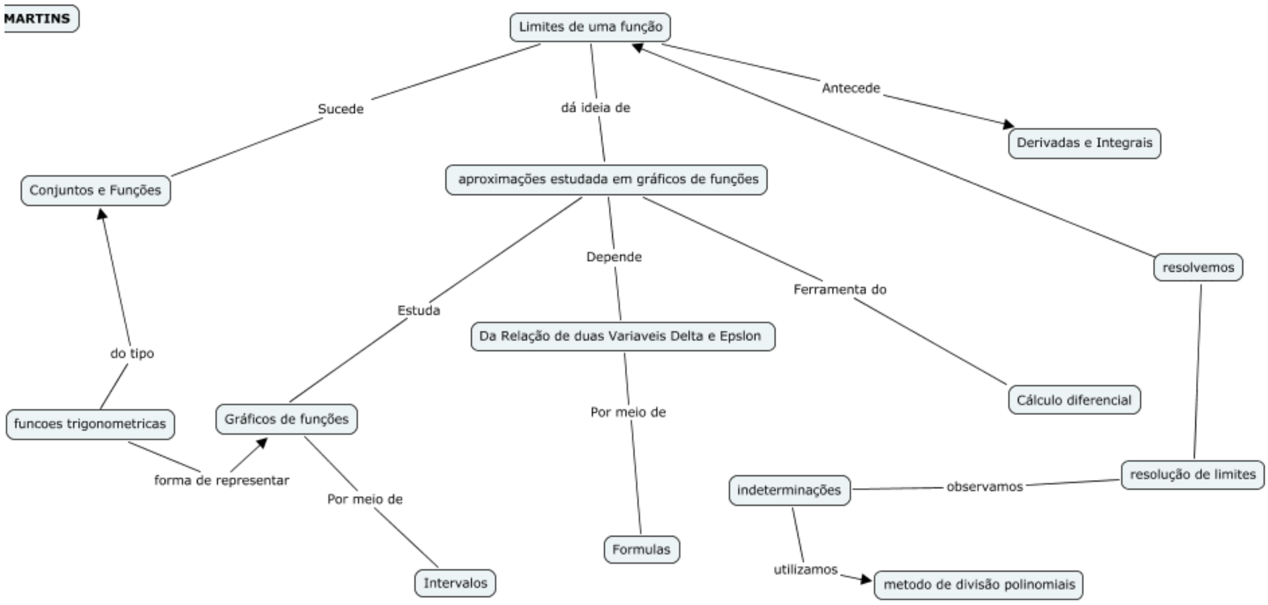

(Mapa de Graziela)



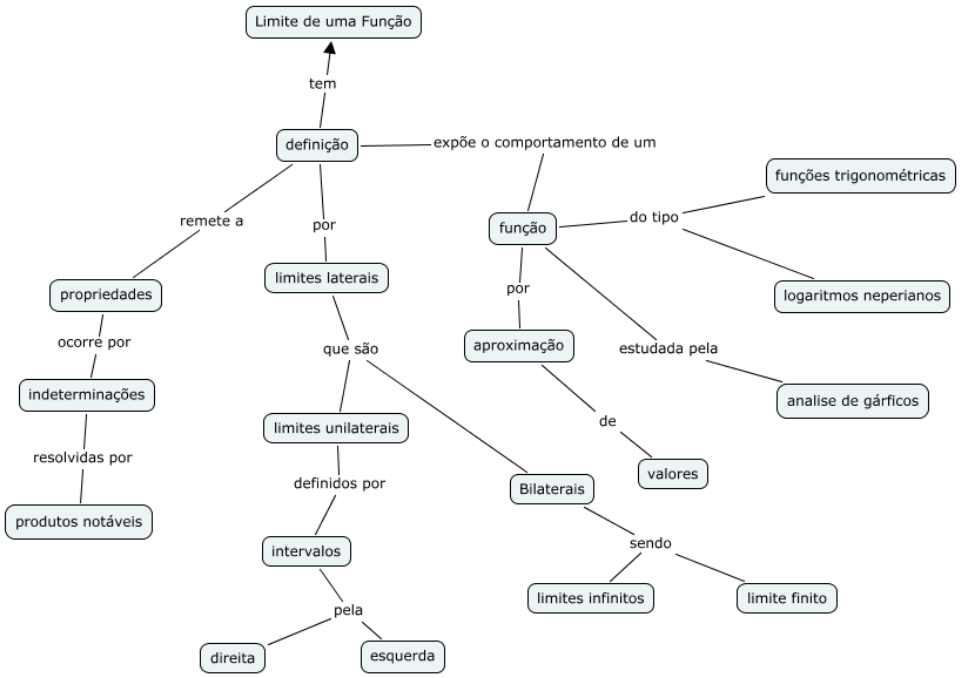

(Mapa de Lázaro)



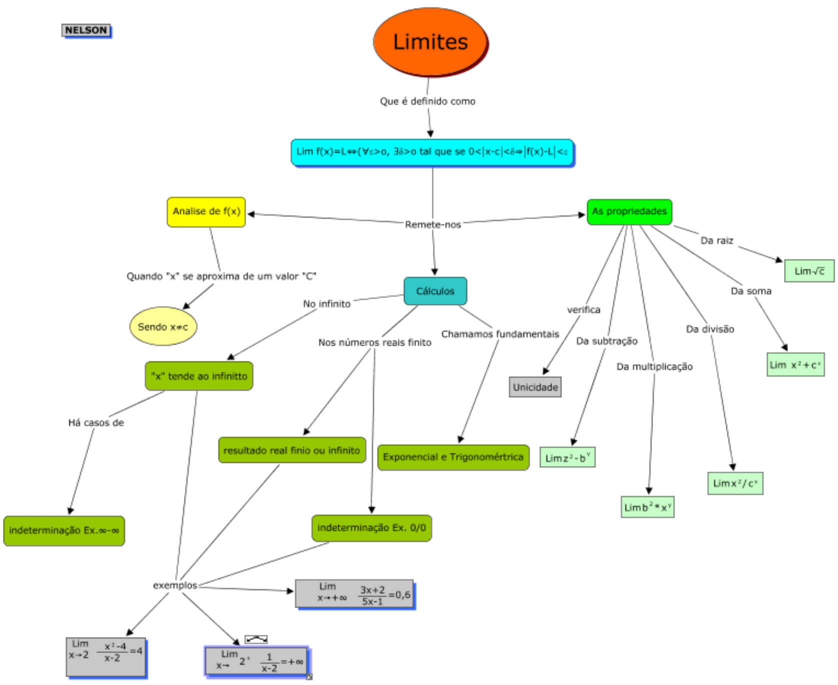

(Mapa de Lívia)



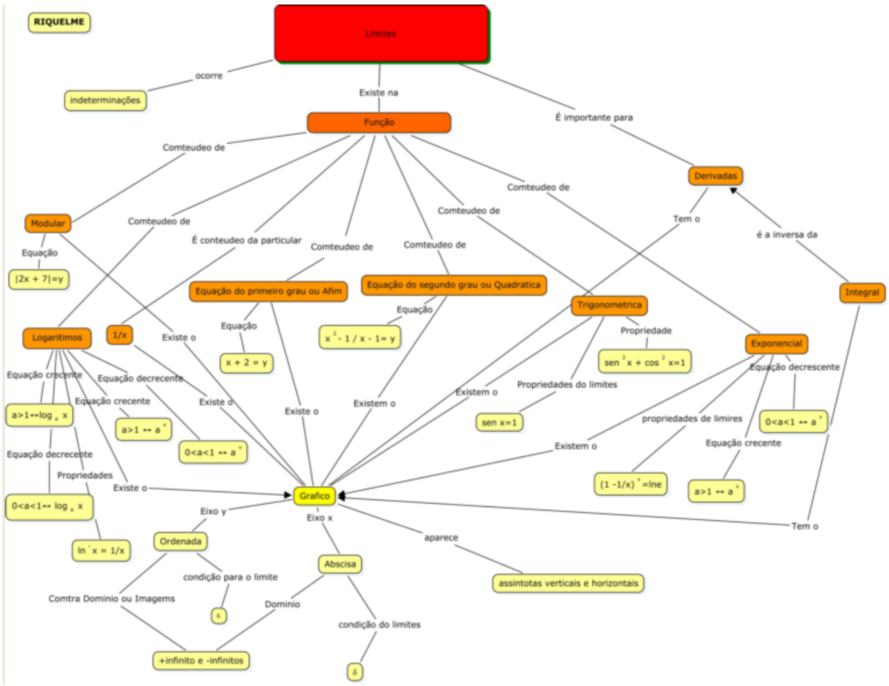

(Mapa de Martins)



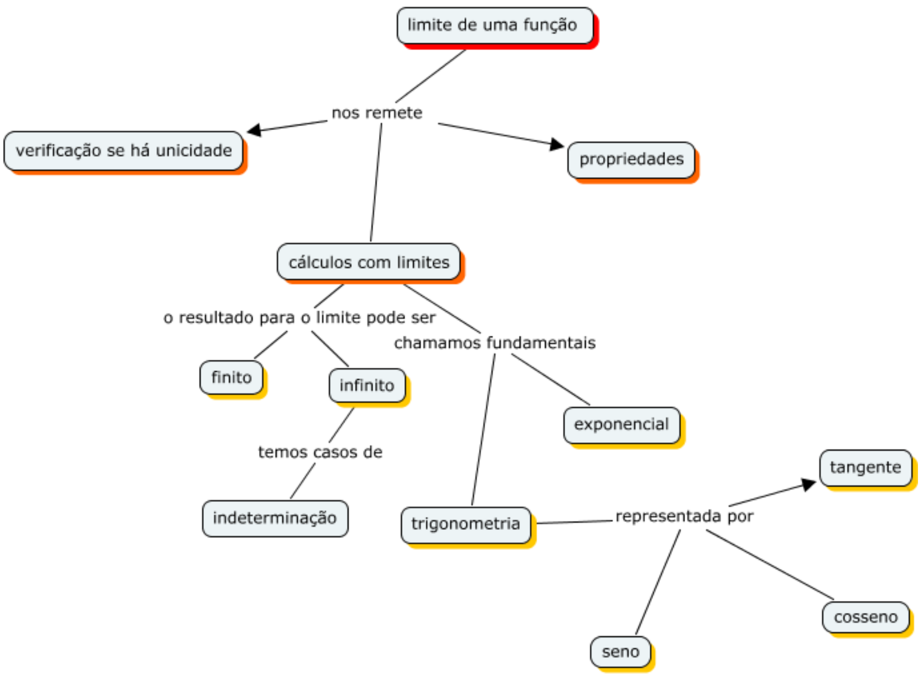

(Mapa de Nana)



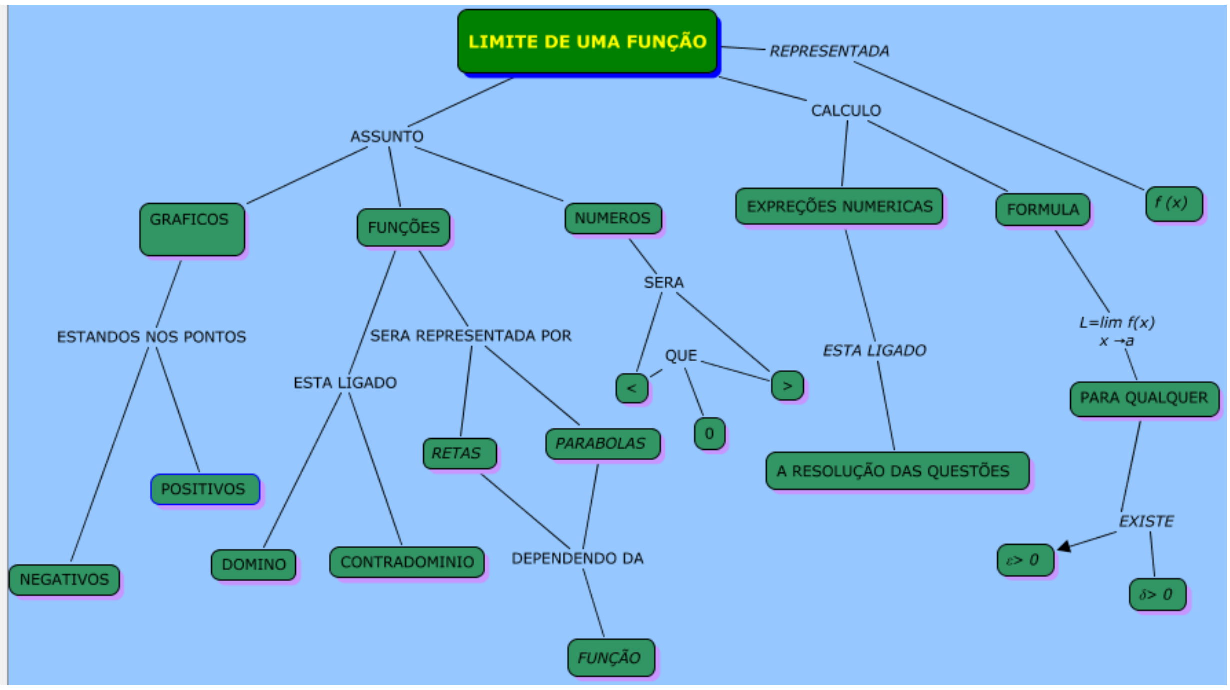

(Mapa de Nelson)



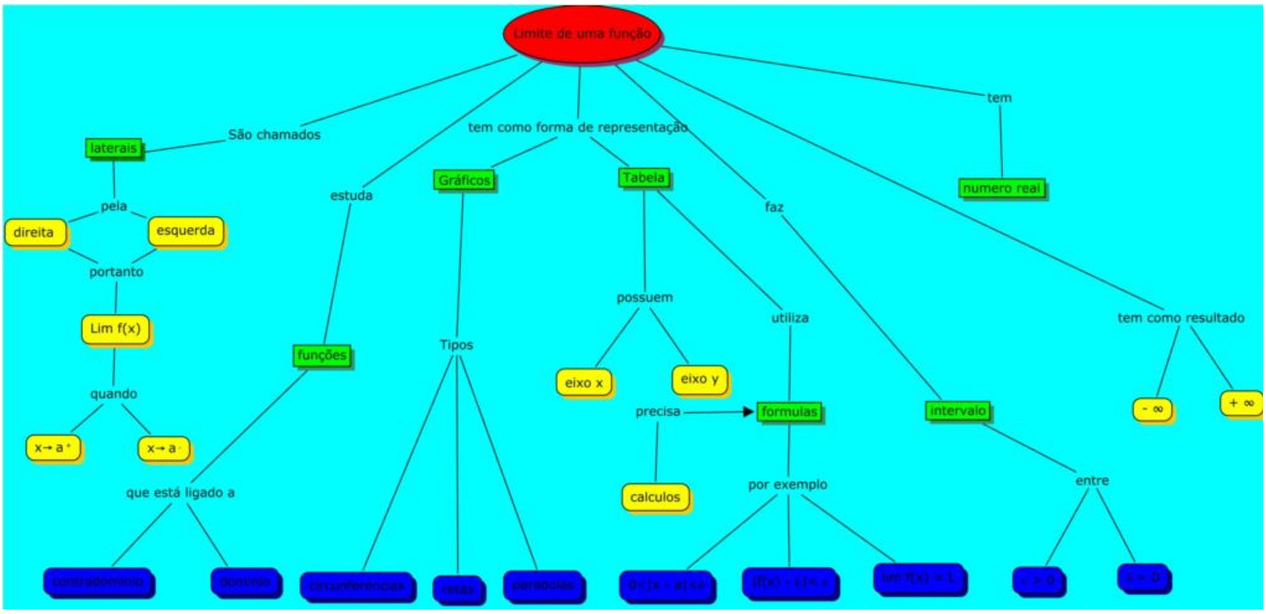

(Mapa de Riquelme)



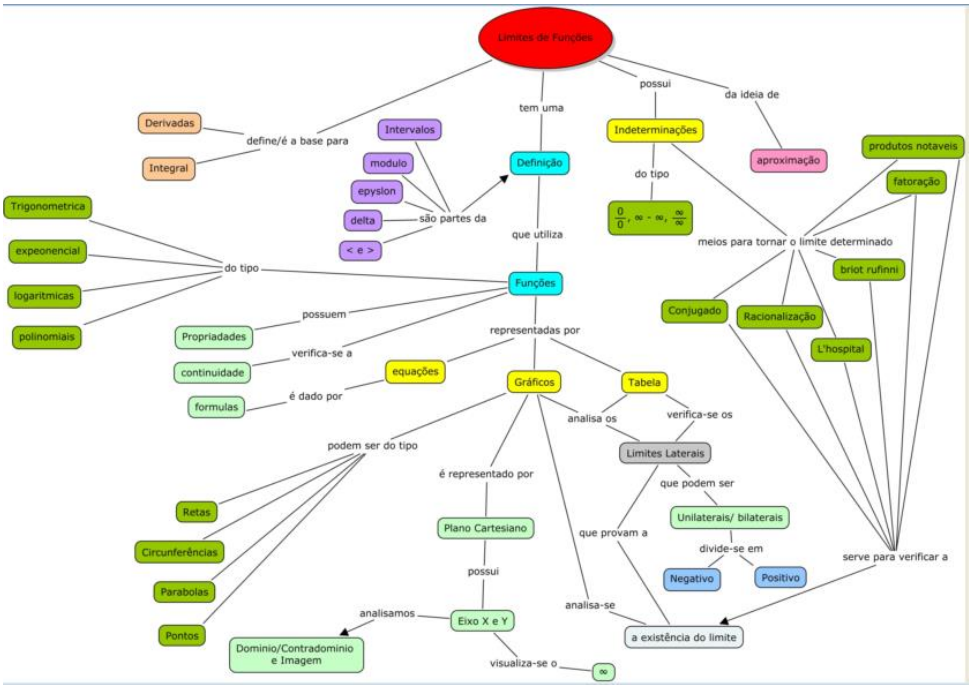

(Mapa de Saulo)




(Mapa de Thamyres)




(Mapa de THALIGRA – Thamyres, Lívia e Graziela)




(Mapa da Turma)

## Anexo 5: Questionário 2 — Avaliação de Aprendizagem

## PARTE 1 – LIMITES DE FUNÇÕES

**1.** Seja $f$ a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & se\ x < -2 \\ \sqrt{4-x^2}, & se -2 \leq x \leq 2 \\ x-2, & se\ x > 2 \end{cases}$$

**c)** Faça um esboço do gráfico de $f$.

**d)** Determine, se existir, cada um dos seguintes limites:

$lim_{x\to -2^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

**2.** **a)** Explique com suas palavras o significado da expressão $lim_{x\to 2}\, f(x) = 5$.

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

**b)** É possível, diante da expressão anterior, que $f(2) = 3$? Explique.

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

**3.** **a)** Explique o que significa para você dizer que $lim_{x\to 1^-}\, f(x) = 3$ e $lim_{x\to 1^+}\, f(x) = 7$.

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

**b)** Na situação anterior é possível que $lim_{x\to 1}\, f(x)$ exista? Explique.

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

**4.** Use uma tabela de valores para estimar o valor dos limites de funções abaixo. Faça os esboços gráficos e confirme seu resultado.

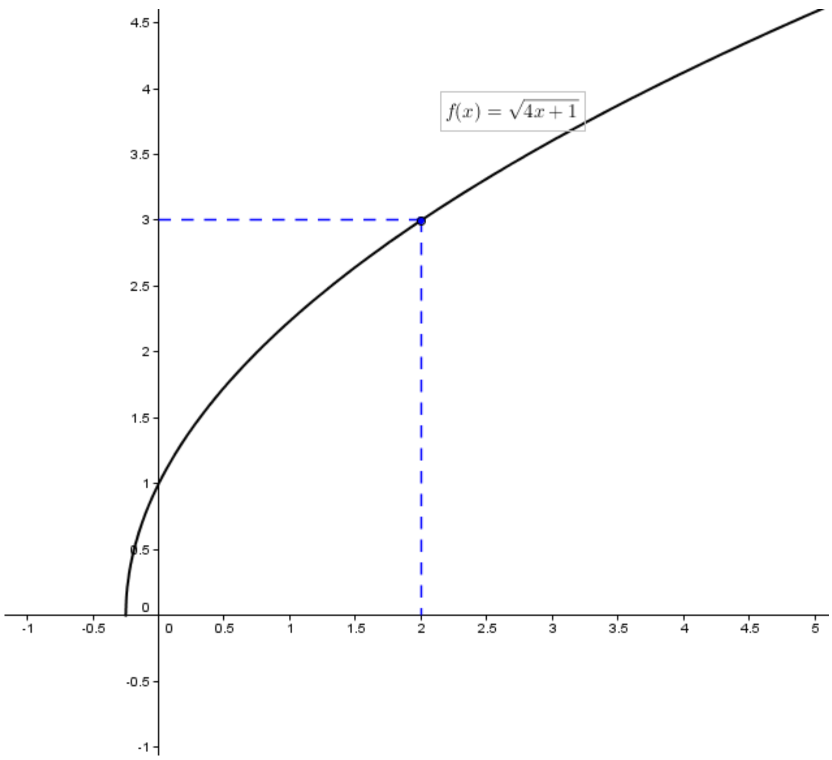
**a)** $lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|}$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**b)** $lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**5.** Localizar no gráfico seguinte todos os números $\delta$ tais que $\left|\sqrt{4x+1} - 3\right| < 0{,}5$ sempre que $|x - 2| < \delta$.




**6.** Seja a função $f$ definida por $f(x) = 4x - 1$ para todo o $x$ real. Se $lim_{x \to 3} f(x) = 11$, encontre um $\delta$ para $\varepsilon = 0{,}01$ tal que $0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 11| < 0{,}01$.

## PARTE 2 – AVALIAÇÃO DO CICLO DE ESTUDOS

**1.** Nome:________________________________________Nome fictício:_______________

**2.** Na escala seguinte, de cinco opções, assinale aquela que melhor traduz o seu desempenho nas atividades desenvolvidas na pesquisa.

| Muito Fraco | Fraco | Razoável | Bom | Muito Bom |
|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

**3.** O que você aprendeu com as atividades desenvolvidas nesta pesquisa?

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

**4.** Qual a sua avaliação sobre os livros utilizados – Guia mangá Cálculo Diferencial e Integral e Cálculo para Leigos – no estudo de limites de funções? Eles foram úteis para o estudo de limites de funções? Justifique a sua resposta.

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

**5.** Como você avalia os materiais usados (livros, material impresso, tecnologias informáticas, etc.) nas atividades desenvolvidas no ciclo de estudos?

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

**6.** Sinta-se fortemente convidado para expor o que pensas neste espaço, pois ele foi criado para você relatar suas críticas, sugestões, comentários, opiniões, etc.

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

Muito obrigado pela colaboração

## Anexo 6: Guião da entrevista aos alunos

1) O que você aprendeu com as atividades realizadas no ciclo de estudos?

2) Qual o momento do ciclo de estudos mais significativo para você? E o menos significativo? Por quê?

3) O que achou dos livros Guia de Mangá – Cálculo Diferencial e Integral e Cálculos para Leigos? Explique exemplificando a sua resposta. Você os recomendaria para estudantes de Cálculo?

4) Quais as ideias, pensamentos, conhecimentos prévios, associações que você teve e utilizou para construir o conceito de limite de funções? Como você analisa o conceito construído por você comparado a definição formal de limite de funções? Eram muitos diferentes? Justifique a sua resposta.

5) Que relação ou relações existem entre a definição verbal do limite de uma função e a sua representação na forma geométrica e gráfica? Se possível, exemplifique e justifique a resposta.

6) As atividades realizadas com o uso de softwares contribuíram para a aprendizagem de limite de funções? De que forma?

7) As atividades desenvolvidas e os recursos utilizados contribuíram para um "melhor" aprendizado de limite de funções? Justifique a sua resposta.

8) Em relação as atividades desenvolvidas na pesquisa, o que você acrescentaria? O que retiraria? Explique exemplificando?