

# Funções holomorfas com condições pré-definidas



Ana Maria da Costa Loureiro

# Funções holomorfas com condições pré-definidas

*Dissertação do Mestrado em Matemática - área de especialização em ensino  
apresentada para a obtenção do grau de Mestre*

*Orientada por Doutor Assis Azevedo*

Departamento de Matemática  
Universidade do Minho, Braga

2005



## Resumo

Neste trabalho, são estudadas funções holomorfas com condições pré-definidas.

Começa-se por estudar produtos infinitos numéricos e produtos infinitos de funções holomorfas. Os resultados que serão apresentados, terão sobretudo a ver com a sua utilização nos capítulos seguintes.

Depois, são estudadas funções analíticas com zeros pré-definidos, cuja existência é assegurada pelo Teorema de Weierstrass. Estudam-se também funções meromorfas com parte principal pré-definida. Neste caso, o Teorema de Mittag-Leffler, dá-nos a forma de definirmos essas funções.

No último capítulo, ver-se-á que sob certas condições relativas ao conjunto de pólos de uma função definida por uma série de Goursat e ao conjunto de zeros de uma função holomorfa, o domínio maximal de existência de uma função holomorfa é o seu domínio de holomorfia.



## Abstract

In this work, the holomorphic functions with pre-defined conditions will be studied. We can start by studying numerical infinite products and infinite products of holomorphic functions. Above all results that will be presented will have to do with its use in the following chapters.

Later, we will study analytical functions with pre-defined zeros, whose existence is assured by the Theorem of Weierstrass. The meromorphic functions with pre-defined main part will also be studied. In this case, the Theorem of Mittag-Leffler give us the way to define these functions.

In the last chapter, we will see that under certain conditions related to the set of poles of a defined function by a series of Goursat and to the set of zeros of a holomorphic function, the maximal domain of existence of a holomorphic function is its domain of holomorphy.





# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>iii</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Notações . . . . .	1
1.2 Definições e resultados preliminares . . . . .	2
<b>2 Produtos Infinitos</b>	<b>6</b>
2.1 Produtos infinitos numéricos . . . . .	6
2.2 Produtos infinitos de funções holomorfas . . . . .	13
2.3 Exemplos . . . . .	17
<b>3 Funções holomorfas com zeros pré-definidos</b>	<b>20</b>
3.1 Factores de Weierstrass . . . . .	21
3.2 Produtos de Blaschke . . . . .	28
<b>4 Funções meromorfas com parte principal pré-definida</b>	<b>31</b>
4.1 Teorema de Mittag-Leffler . . . . .	31
<b>5 Domínios de holomorfia</b>	<b>35</b>
5.1 Definições e exemplos . . . . .	35
5.2 Conjuntos fronteira bem distribuídos . . . . .	41
5.3 Conjuntos periféricos . . . . .	43



# Introdução

A teoria de funções de variáveis complexas, desde a sua criação, em fins do século XVIII, tem-se mostrado uma das mais profícuas no contexto global da Matemática. Através dela foi possível, por exemplo, compreender melhor as funções definidas por séries de potências e por produtos infinitos, entre muitas outras realizações igualmente importantes e que teremos oportunidade de conhecer no desenvolvimento deste trabalho.

Dentre os matemáticos importantes que contribuíram para o seu avanço citamos Euler, Cauchy, Weierstrass, Goursat, Mittag-Leffler, entre outros. Podemos afirmar que, com o objetivo de desenvolver a teoria foram introduzidos novos conceitos e teorias matemáticas inseridos no contexto da Teoria dos Números, da Topologia Algébrica, da Geometria Algébrica, etc..

Neste trabalho são estudadas funções holomorfas com condições pré-definidas, entre as quais funções holomorfas com zeros pré-definidos e funções meromorfas com parte principal pré-definida.

No capítulo 1, são apenas referidos alguns resultados e definições preliminares, bem como algumas notações utilizadas ao longo deste trabalho. Neste âmbito, este capítulo pode ser consultado, à medida que os outros forem sendo vistos.

No capítulo 2, são estudadas algumas noções e propriedades relativas a produtos infinitos numéricos e a produtos infinitos de funções holomorfas, estabelecendo-se as propriedades fundamentais para diversos tipos de convergência (pontual, uniforme, compacta e normal). Através de exemplos, procura-se aprofundar o significado e a força relativa de algumas proposições e teoremas, mostrando que certas hipóteses não podem ser dispensadas, e/ou, que o recíproco

não se verifica necessariamente. O final do capítulo é dedicado ao estudo de funções holomorfas definidas como produto infinito de funções holomorfas e meromorfas. Como exemplo de função meromorfa definida na forma de produto infinito temos a função Gama (de Euler).

O capítulo 3 é dedicado ao estudo de funções holomorfas com zeros pré-definidos. É demonstrado um teorema que garante a existência de uma função analítica, com determinados zeros. A expressão de tal função é baseada em produtos infinitos, aos quais usualmente chamamos produtos infinitos de Weierstrass. Terminamos o capítulo com o estudo de funções holomorfas com zeros pré-determinados na bola de centro na origem e raio igual a um, as quais são definidas através de produtos infinitos, conhecidos por produtos infinitos de Blaschke.

No capítulo 4, são estudadas funções definidas como produtos infinitos de funções meromorfas, cujos pólos estão pré-definidos. É demonstrado o Teorema de Mittag-Leffler, o qual garante a existência de funções analíticas com determinados pólos e parte principal.

O capítulo 5 é dedicado ao estudo de funções holomorfas de domínio um aberto conexo  $U$ , de  $\mathbb{C}$ , que não podem ser prolongadas holomorficamente a um aberto conexo de  $\mathbb{C}$  que contenha  $U$ . Este aberto conexo  $U$  diz-se domínio de holomorfia. Para este estudo introduzem-se os conceitos de conjunto fronteira bem distribuído e conjunto periférico.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo inicial, são referidas algumas notações que serão utilizadas e apresentamos algumas definições necessárias para o estudo que faremos ao longo deste trabalho.

Forneceremos igualmente alguns resultados, que serão utilizados nos próximos capítulos. Sempre que tal seja necessário, serão indicadas as respectivas referências bibliográficas.

A ordem pela qual serão apresentadas as definições e os resultados, procurará ser a mesma pela qual aparecerão nos diversos capítulos.

### 1.1 Notações

Começaremos por apresentar alguma terminologia e notação sobre a topologia do plano complexo

Para qualquer  $z_0 \in \mathbb{C}$  e  $r > 0$ , denotemos por:

- $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ , a bola de centro  $z_0$  e raio  $r$ ;
- $D(z_0, r) = \overline{B(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ , o disco de centro  $z_0$  e raio  $r$ ;
- $C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ , a circunferência de centro  $z_0$  e raio  $r$ ;
- $B(z_0, r) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ , a bola de centro  $z_0$  e raio  $r$ , sem o centro.

Ao longo deste trabalho, chamaremos *domínio* de  $\mathbb{C}$ , e representá-mo-lo por  $G$ , a um conjunto aberto conexo não vazio do plano complexo  $\mathbb{C}$ .

O interior de  $G$  denotá-lo-emos por  $\text{int}(G)$ , a aderência de  $G$  representá-la-emos por  $\overline{G}$  e a fronteira por  $\partial G$ .

Dados um domínio  $G$  e uma função  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , denotaremos o conjunto dos zeros de  $f$  por  $Z(f)$ .

A seguir apresentam-se algumas definições e resultados que serão referidos ao longo deste trabalho.

## 1.2 Definições e resultados preliminares

Começaremos por apresentar alguns resultados clássicos da análise complexa que funcionarão como pré-requisitos para o desenvolvimento do trabalho.

**Definição 1.1** *Sejam  $G$  um domínio e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  uma função. Diz-se que  $f$  é:*

- holomorfa num ponto de  $G$  se for diferenciável numa vizinhança do ponto;
- holomorfa se for diferenciável em  $G$ ;
- inteira se for diferenciável e  $G = \mathbb{C}$ ;
- analítica se para todo  $z_0 \in G$  existir uma vizinhança de  $z_0$  tal que, nessa vizinhança,  $f$  é igual a uma série de potências.

O seguinte resultado é um dos mais importantes teoremas da teoria das funções holomorfas.

**Teorema 1.2** *Uma função é holomorfa se e só se for analítica.*

**Definição 1.3** *Sejam  $G$  um domínio,  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$  e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa. Se existe  $r > 0$  tal que  $B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subseteq G$  (ou seja, se  $G \cup \{z_0\}$  é um aberto), diz-se que  $z_0$  é:*

- uma singularidade removível de  $f$  se existe e é finito  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ;
- um pólo de  $f$  se  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$ ;
- uma singularidade essencial de  $f$  se não for singularidade removível nem pólo de  $f$ .

**Teorema 1.4** *Sejam  $G$  um domínio,  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$  tal que  $G \cup \{z_0\}$  é um aberto. Nestas condições, existe  $s > 0$  e uma única série de funções do tipo  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z - z_0)^k$  convergindo uniformemente em compactos de  $B(z_0, s)$  para  $f$  e tal que:*

- i) *se  $z_0$  é uma singularidade removível de  $f$ , então  $a_k = 0$  para todo  $k < 0$ ;*
- ii) *se  $z_0$  é um pólo de  $f$ , então existe um e um só inteiro positivo  $n$  (dito a ordem do pólo) tal que  $a_k = 0$  para todo  $k < -n$  e  $a_{-n} \neq 0$ .*

**Definição 1.5** *Nas condições do teorema anterior, se  $z_0$  for um pólo de ordem  $n$  de uma função  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , a função (definida em  $\mathbb{C}$ )*

$$\frac{a_{-1}}{z - z_0} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

*chama-se parte principal de  $f$  em  $z_0$ .*

**Definição 1.6** *Sejam  $G$  e  $U$  abertos de  $\mathbb{C}$  com  $U \subseteq G$ . Diz-se que uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é meromorfa em  $G$  se for holomorfa e se  $G \setminus U$  for o conjunto formado pelos pólos de  $f$ .*

Uma função diz-se *meromorfa* (sem especificar o domínio) se é meromorfa em todo o plano complexo  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 1.7** (Liouville) *Uma função inteira limitada é uma função constante.*

**Teorema 1.8** (Teorema dos zeros isolados) *Seja  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica e  $z_0 \in G$  um zero de  $f$ . Então, se  $f$  não for identicamente nula numa vizinhança de  $z_0$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $z_0$  tal que*

$$\forall z \in V, f(z) = 0 \Leftrightarrow z = z_0.$$

*Por outras palavras, os zeros de  $f$  estão isolados.*

**Teorema 1.9** (Teorema do módulo máximo) *Sejam  $G$  um domínio limitado e  $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica em  $G$  e contínua em  $\overline{G}$ . Então  $|f(z)|$  atinge o valor máximo em  $\partial G$ . Além disso se o máximo também for atingido em  $G$ , a função é constante.*

**Teorema 1.10** (Teorema do módulo mínimo) *Sejam  $G$  um domínio limitado e  $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica em  $G$  e contínua em  $\overline{G}$ . Então, a função  $f$  tem zeros em  $G$  ou o valor mínimo de  $|f(z)|$  é atingido em  $\partial G$ . Além disso se a função não tiver zeros em  $G$  e o mínimo também for atingido em  $G$ , a função é constante.*

**Definição 1.11** *Sejam  $G$  um domínio de  $\mathbb{C}$  e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica não nula em  $G$ . A derivada logarítmica de  $f$  é definida por*

$$\frac{d}{dz}(\log f) = \frac{f'}{f} \quad \text{em } \{z \in G : f(z) \neq 0\}.$$

**Proposição 1.12** *Se  $G$  é um domínio,  $f_1, f_2, \dots : G \rightarrow \mathbb{C}$  são funções analíticas não nulas e  $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_n$  então*

$$\frac{d}{dz}(\log f) = \sum_{k=1}^n \frac{d}{dz}(\log f_k) \quad \text{em } \{z \in G : f_k(z) \neq 0, \forall k = 1, \dots, n\}.$$

**Definição 1.13** *Sejam  $G$  um domínio de  $\mathbb{C}$  e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa. A função  $f$  diz-se prolongável holomorficamente para um ponto  $p$  da fronteira de  $G$ , se existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  e uma função  $g$  holomorfa em  $U$  tal que  $f$  e  $g$  coincidem nas componentes conexas de  $U \cap G$  que contêm  $p$  na sua fronteira; caso contrário,  $p$  diz-se um ponto singular de  $f$ .*

**Proposição 1.14** *Seja  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de funções analíticas num domínio  $G$  que converge localmente uniformemente para uma função  $f$ . Então*

- i)  $f$  é analítica em  $G$ .
- ii) Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(f_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$  converge localmente uniformemente para  $f^{(n)}$ .

**Proposição 1.15** *Consideremos funções  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tais que  $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)}$ , para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0 \text{ ou } g(z) = 0\}$ . Então, existe  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $f(z) = cg(z)$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ .*

**Proposição 1.16** *Se  $G$  é um domínio simplesmente conexo e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa que nunca se anula então existe  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que  $f = \exp(g)$ .*



**Teorema 1.17** *Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  uma série de funções meromorfas num domínio  $G$  de  $\mathbb{C}$ , tal que sendo  $\Gamma(f_n)$  o conjunto dos pólos de  $f_n$ ,  $\Gamma(f_m) \cap \Gamma(f_n) = \emptyset$  para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$  tais que  $m \neq n$ . Se  $\Gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma(f_n)$  então:*

- i) *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge uniformemente em subconjuntos compactos de  $G$  para uma função  $S$  meromorfa em  $G$ , então  $\Gamma$  é discreto e  $\Gamma = \Gamma(S)$ , isto é,  $\Gamma$  é o conjunto de pólos de  $S$ . Além disto, se  $z_0 \in \Gamma(f_n)$  então as partes principais de  $S$  e de  $f_n$  em  $z_0$  coincidem.*
- ii) *Se  $\Gamma$  é discreto, então a série converge uniformemente em subconjuntos compactos de  $G$  para uma função meromorfa em  $G$  se e só se, ela converge para uma função holomorfa em  $G \setminus \Gamma$ .*

**Teorema 1.18** *Sejam  $G$  um domínio de  $\mathbb{C}$  e  $f$  uma função analítica, em que  $G \not\subseteq \mathbb{C}$ . Dados  $\varepsilon > 0$  e um compacto  $K \subseteq G$ , existe uma função racional  $h$ , sem pólos em  $G$ , tal que*

$$|f(z) - h(z)| < \varepsilon, \text{ para todo } z \in K.$$

As demonstrações dos resultados enunciados neste capítulo, assim como outros resultados implicitamente utilizados ao longo do trabalho, podem ser encontradas em [3], [5], [9] e [12].

## Capítulo 2

# Produtos Infinitos

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades gerais dos produtos infinitos numéricos e dos produtos infinitos de funções holomorfas que utilizaremos nos capítulos seguintes.

### 2.1 Produtos infinitos numéricos

Nesta secção trataremos da convergência de produtos infinitos numéricos chamando a atenção para alguma analogia com o estudo das séries.

**Definição 2.1** *Seja  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de números complexos.*

*O produto infinito  $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$  diz-se convergente se:*

- i) *no máximo existe um número finito de elementos da sucessão iguais a zero;*
- ii) *os produtos parciais  $p_n = \prod_{k=1}^n a_k$ , depois de removidos os factores iguais a zero (se existirem), tendem para um limite finito diferente de zero.*

*Se nenhum elemento da sucessão é igual a zero, o limite*

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n a_k$$

diz-se o valor do produto e escreve-se

$$p = \prod_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Se algum elemento da sucessão é igual a zero, o valor do produto infinito é zero.

O produto infinito diz-se divergente se não é convergente.

**Exemplo 2.2** Vejamos alguns exemplos.

1. O produto infinito  $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$  em que  $a_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ ímpar} \\ 1 & \text{se } k \text{ par} \end{cases}$  é divergente uma vez que não satisfaz a condição i) da definição de convergência de produtos infinitos.
2. O produto infinito  $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$  com  $a_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \leq 5 \\ 1 & \text{se } k > 5 \end{cases}$  converge para zero.
3. Para os produtos infinitos  $\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$  e  $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$  temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Logo, ambos os produtos são divergentes.

4. O produto  $\prod_{k=2}^{\infty} \frac{k^2-1}{k^2}$  tem produtos parciais

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdots \left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}\right) \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{2}$ , ou seja, o produto converge para  $\frac{1}{2}$ .

5. O produto infinito  $\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^k}{k}\right)$  tem produtos parciais

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \frac{n+2}{2n+2} & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$

Portanto, o produto converge para  $\frac{1}{2}$ .

6. O produto infinito  $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$  tem produtos parciais

$$p_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{n+1}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Logo, o produto converge para 1.

Da definição resulta que:

- se um produto é convergente, então um número finito de factores pode ser removido e o produto resultante ainda será convergente;
- se um produto converge para zero, então pelo menos um dos factores é igual a zero;
- um produto infinito  $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$  converge se e só se existe um inteiro  $N$  tal que a sucessão  $\left(\prod_{k=N}^m a_k\right)_{m \geq N}$  converge para um limite finito diferente de zero.

Tal como o conhecemos para sucessões e séries, também enunciaremos o critério de Cauchy para a convergência de produtos infinitos numéricos.

**Proposição 2.3** [Critério de Cauchy] *Uma condição necessária e suficiente para que um produto infinito  $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$  seja convergente é que para qualquer  $\varepsilon > 0$ , exista um inteiro  $N \in \mathbb{N}$  tal que se  $n, m \in \mathbb{N}$ ,*

$$\left| \left( \prod_{k=n+1}^m a_k \right) - 1 \right| < \varepsilon \text{ quando } m > n \geq N.$$

**Demonstração.**

*Condição necessária:* Suponhamos que o produto  $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$  converge. Como um número finito de factores nulos pode ser removido, podemos assumir que nenhum dos factores é igual a zero. Então,

$$p_n = \prod_{k=1}^n a_k \rightarrow p \neq 0 \text{ (quando } n \rightarrow \infty \text{)}.$$

Pelo Critério de Cauchy para sucessões, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$|p_n| > \frac{|p|}{2}, \quad |p_m - p_n| < \varepsilon \cdot \frac{|p|}{2} \quad \text{quando } m > n \geq N$$

e, portanto,

$$\left| \left( \prod_{k=n+1}^m a_k \right) - 1 \right| = \left| \frac{p_m}{p_n} - 1 \right| = \frac{|p_m - p_n|}{|p_n|} < \frac{\varepsilon \cdot \frac{|p|}{2}}{\frac{|p|}{2}} = \varepsilon \quad (m > n \geq N).$$

*Condição suficiente:* Assumamos agora que para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left| \left( \prod_{k=n+1}^m a_k \right) - 1 \right| < \varepsilon \quad \text{para todo } m > n \geq N.$$

Então a condição i) da definição de convergência dum produto infinito é claramente satisfeita.

Seja  $N' \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left| \left( \prod_{k=n+1}^m a_k \right) - 1 \right| < \frac{1}{2} \quad \text{quando } m > n \geq N';$$

donde resulta,

$$\frac{1}{2} < \left| \prod_{k=n+1}^m a_k \right| < \frac{3}{2} \quad (m > n \geq N'). \quad (2.1)$$

De seguida, consideremos  $\varepsilon > 0$  arbitrário. Para este  $\varepsilon$ , existe um inteiro  $N > N'$  tal que

$$\left| \left( \prod_{k=n+1}^m a_k \right) - 1 \right| < \varepsilon \quad \text{quando } m > n \geq N.$$

$$\therefore \left| \prod_{k=N}^m a_k - \prod_{k=N}^n a_k \right| = \left| \prod_{k=N}^n a_k \right| \cdot \left| \left( \prod_{k=n+1}^m a_k \right) - 1 \right| < \frac{3}{2} \varepsilon, \text{ porque } m > n \geq N.$$

Assim, pelo Critério de Cauchy para sucessões, a sucessão  $\left( \prod_{k=N}^m a_k \right)_{m \geq N}$  é convergente para um número diferente de zero, por (2.1), o que completa a demonstração. ■

Tomando  $m = n + 1$ , na proposição anterior, obtém-se o corolário seguinte:

**Corolário 2.4** *Uma condição necessária para que um produto infinito  $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$  seja convergente é que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 1. \blacksquare$$

A divergência de  $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$  ou  $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$  mostra que a condição do corolário não é suficiente.

Devido a este corolário, as sucessões geradoras dos produtos infinitos que possam vir a ser convergentes devem escrever-se na forma

$$a_k = 1 + c_k, \text{ em que } c_k \rightarrow 0 \text{ (} k \rightarrow \infty \text{),}$$

escrevendo-se então

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_k).$$

**Definição 2.5** *Seja  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de números complexos.*

*Se o produto infinito*

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + |c_k|)$$

*converge, então diz-se que o produto  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_k)$  converge absolutamente.*

**Exemplo 2.6** *O produto  $\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^k}{k}\right) = \frac{1}{2}$  não converge absolutamente porque  $\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$  diverge (ver exemplos 5. e 3. do Exemplo 2.2).*

**Proposição 2.7** *Um produto infinito absolutamente convergente é convergente.*

**Demonstração.** Esta proposição resulta do Critério de Cauchy (Proposição 2.3) e da desigualdade

$$\left| \left( \prod_{k=n+1}^m (1 + c_k) \right) - 1 \right| \leq \left( \prod_{k=n+1}^m (1 + |c_k|) \right) - 1. \blacksquare$$

**Proposição 2.8** *O produto infinito  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_k)$  converge absolutamente se e só se a série  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  converge absolutamente.*

**Demonstração.** Assumamos que  $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty$ . Seja

$$p_n = \prod_{k=1}^n (1 + |c_k|) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Então,  $p_n \geq 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e a sucessão  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é monótona não decrescente, assim é suficiente mostrar que  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada. Temos

$$p_n = \prod_{k=1}^n (1 + |c_k|) \leq \prod_{k=1}^n \exp(|c_k|) = \exp\left(\sum_{k=1}^n |c_k|\right) \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\right) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

usando a desigualdade  $1 + x \leq e^x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

O recíproco resulta da desigualdade

$$\sum_{k=n+1}^m |c_k| \leq \prod_{k=n+1}^m (1 + |c_k|) - 1$$

e do Critério de Cauchy para séries e produtos infinitos.  $\blacksquare$

**Nota 2.9** *Nenhuma das implicações da proposição anterior continua verdadeira se supirmos a expressão “absolutamente”, como mostram os exemplos seguintes.*

1. Seja  $c_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ ,  $c_{2k} = -\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

*Facilmente se vê que o produto infinito  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_n)$  diverge, mas a série  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  converge.*

2. Seja  $d_{2k-1} = -\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ ,  $d_{2k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k+1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

A série  $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$  é divergente uma vez que, se  $N \in \mathbb{N}$  então

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{2N} d_k = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k} \\ \sum_{k=1}^{2N+1} d_k = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{\sqrt{N+2}} \end{array} \right.$$

No entanto, o produto infinito  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + d_k)$  converge, uma vez que, se  $k \in \mathbb{N}$  a sucessão dos produtos parciais dos termos de ordem par,  $p_{2k}$ ,

$$p_{2k} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2^3}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3^3}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(k+1)^3}}\right)$$

converge para um número,  $p$ , diferente de zero, porque aplicando logaritmos a  $p_{2k}$ , a série  $\sum_{k=1}^{\infty} \log p_{2k}$  é convergente. A convergência desta série, advém da aplicação do critério de comparação a  $a_k = \frac{1}{\sqrt{k^3}}$  e do facto do  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(1-a_k)}{a_k} = -1$ .

Por outro lado, se  $k \in \mathbb{N}$  a sucessão dos produtos parciais dos termos de ordem ímpar,  $p_{2k+1}$ ,

$$p_{2k+1} = p_{2k} \left(1 - \frac{1}{(k+2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

também converge para  $p$ .

A proposição anterior permite-nos concluir que os factores de um produto infinito absolutamente convergente podem ser reordenados sem afectar o valor do produto.

**Corolário 2.10** *A convergência e o valor dum produto infinito absolutamente convergente são independentes da ordem dos factores.*

**Demonstração.** Suponhamos que  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_k)$  converge absolutamente. Seja  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma bijecção,  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_{\varphi(k)})$  e  $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\varphi(k)}$  uma reordenação qualquer de  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_k)$  e de  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ , respectivamente. Então pela proposição anterior  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  converge absolutamente. Sabemos também



que a série  $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\varphi(k)}$  converge absolutamente, por um resultado conhecido das séries. Assim, aplicando novamente a proposição anterior conclui-se que o produto infinito  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_{\varphi(k)})$  converge absolutamente. ■

## 2.2 Produtos infinitos de funções holomorfas

Veamos agora alguns tipos de convergência de produtos infinitos de funções holomorfas que serão importantes para a demonstração de alguns resultados.

**Definição 2.11** *Seja  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de funções definida num subconjunto  $X$  de  $\mathbb{C}$ .*

*O produto infinito  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + f_k)$  diz-se:*

- pontualmente convergente se  $\forall z \in X \quad \prod_{k=1}^{\infty} (1 + f_k(z))$  converge.
- uniformemente convergente se  $\exists N \in \mathbb{N} \quad \left( \prod_{k=N}^n (1 + f_k) \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente para uma função  $f$  que nunca se anula;

*Neste caso, escreve-se  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + f_k) = \left( \prod_{k=1}^{N-1} (1 + f_k) \right) \cdot f$ ;*

- localmente uniformemente convergente ou compactamente convergente se  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + f_k)$  converge uniformemente em qualquer compacto contido em  $X$ .

**Nota 2.12** *Nas condições da definição precedente, resulta imediatamente que a convergência uniforme implica a convergência compacta, que por sua vez, implica a convergência pontual.*

O exemplo seguinte mostra, em particular, que as implicações recíprocas das referidas nesta nota não são verdadeiras.

**Exemplo 2.13** *Consideremos o produto  $\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{2^k})$ .*

*Para  $|z| \geq 1$ ,  $1 + z^{2^k} \not\rightarrow 1$ , logo pelo Corolário 2.4, o produto infinito não converge para estes valores de  $z$ .*

Para este produto infinito, obtêm-se os produtos parciais

$$p_n(z) = \prod_{k=0}^n (1 + z^{2^k}) = \frac{1 - z^{2^{n+1}}}{1 - z}, \quad z \neq 1.$$

Para  $|z| < 1$ ,  $p_n$  converge para  $\frac{1}{1-z}$  e assim o produto infinito  $\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{2^k})$  converge pontualmente para a função  $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = \frac{1}{1-z}$ ; mas não converge uniformemente, pois

$$\exists \varepsilon = 1 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \exists n = p \quad \exists z_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \quad \left| p_n(z_n) - \frac{1}{1-z_n} \right| = 2^{n+1} \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right)^{2^{n+1}} > 1.$$

Contudo, se tomarmos um disco  $D(0, \delta)$  qualquer, em que  $0 < \delta < 1$ , o produto infinito  $\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{2^k})$  converge uniformemente em  $D(0, \delta)$ . De facto, se  $\varepsilon > 0$ , podemos escolher  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{\delta^{2^{N+1}}}{1-\delta} < \varepsilon$  vindo para todo  $n > N$  e  $z \in D(0, \delta)$ ,  $\left| p_n(z) - \frac{1}{1-z} \right| \leq \frac{\delta^{2^{n+1}}}{1-\delta} < \frac{\delta^{2^{N+1}}}{1-\delta} < \varepsilon$ .

Um conceito de convergência particularmente importante é o que se apresenta na definição a seguir.

**Definição 2.14** Seja  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de funções contínuas definida num subconjunto  $X$  de  $\mathbb{C}$ . O produto infinito  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + f_k)$  diz-se normalmente convergente em  $X$  se a série  $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$  converge uniformemente em qualquer compacto contido em  $X$ .

Como veremos na alínea i) do Teorema 2.17, a convergência normal de um produto infinito de funções contínuas implica a sua convergência compacta. No entanto, o recíproco desta afirmação não é verdadeiro, como mostra o exemplo que se segue.

**Exemplo 2.15** O produto infinito  $\prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$  converge uniformemente em  $\mathbb{C}$  para 1 (conforme podemos ver no exemplo 6. do Exemplo 2.2) e não é normalmente convergente em  $\mathbb{C}$ , uma vez que  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  diverge.

O Exemplo 2.13 (com  $X = B(0, 1)$ ), mostra também que um produto infinito normalmente convergente não é necessariamente uniformemente convergente.

Analogamente à Proposição 2.3, temos o resultado

**Proposição 2.16** (*Critério de Cauchy*) Seja  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de funções definida num subconjunto  $X$  de  $\mathbb{C}$ .

Uma condição necessária e suficiente para que um produto infinito

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + f_k(z))$$

converja localmente uniformemente em  $X$  é que, dado qualquer  $\varepsilon > 0$  e um subconjunto compacto  $K$  contido em  $X$ , exista um  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\forall z \in K \left| \left[ \prod_{k=n+1}^m (1 + f_k(z)) \right] - 1 \right| < \varepsilon \text{ para } m > n \geq N. \blacksquare$$

**Teorema 2.17** Seja  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de funções num domínio  $G$ . Se a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$$

converge localmente uniformemente em  $G$ , então

i) O produto infinito

$$p(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + f_k(z))$$

converge localmente uniformemente para uma função que se anula somente onde pelo menos um dos factores do produto se anular.

Além disso, se  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  for uma sucessão de funções contínuas (respectivamente analíticas), então  $p(z)$  é uma função contínua (respectivamente analítica) e, para todo  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + f_k(z)) = \prod_{k=1}^{\infty} \left[ \lim_{z \rightarrow z_0} (1 + f_k(z)) \right].$$

ii) Se  $(f_k(z))_{k \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão de funções analíticas, então a derivada logarítmica definida em  $G \setminus \{z \in G : p(z) = 0\}$ , do produto  $p(z)$  é a soma das derivadas logarítmicas de

cada factor do produto, isto é,

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f'_k(z)}{1 + f_k(z)},$$

sendo a convergência localmente uniforme.

**Demonstração.**

i) Seja  $K$  um subconjunto compacto arbitrário de  $G$ , e  $\{p_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$  a sucessão dos produtos parciais. Por causa da convergência uniforme em  $K$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$  define uma função contínua; seja  $\sigma$  o seu valor máximo em  $K$ . Então, para cada  $n \in \mathbb{N}$  e  $z \in K$ ,

$$\begin{aligned} |p_n(z)| &= \left| \prod_{k=1}^n (1 + f_k(z)) \right| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |f_k(z)|) \\ &\leq \prod_{k=1}^n \exp |f_k(z)| = \exp \left( \sum_{k=1}^n |f_k(z)| \right) \leq e^\sigma. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|p_n(z) - p_{n-1}(z)| = |p_{n-1}(z) \cdot f_n(z)| \leq e^\sigma |f_n(z)| \quad (z \in K).$$

Agora, pela convergência uniforme da série em  $K$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe um inteiro  $N$  tal que

$$\sum_{k>N} |f_k(z)| < \varepsilon \quad \text{para todo } z \in K.$$

Então, para  $m > n \geq N$  e  $z \in K$ , temos

$$\begin{aligned} |p_n(z) - p_m(z)| &\leq |p_n(z) - p_{n+1}(z)| + |p_{n+1}(z) - p_{n+2}(z)| + \cdots + |p_{m-1}(z) - p_m(z)| \\ &\leq e^\sigma (|f_{n+1}(z)| + |f_{n+2}(z)| + \cdots + |f_m(z)|) < e^\sigma \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, pelo Critério de Cauchy para sucessões de funções, temos a convergência local uniforme do produto, logo  $p(z)$  é contínua em  $G$ .

A analiticidade é uma consequência da Proposição 1.14, e a asserção sobre os zeros resulta da definição de convergência de produtos infinitos.

ii) Como  $p_n(z) \rightarrow p(z)$  localmente uniformemente em  $G$ , pela Proposição 1.14, também  $p'_n(z) \rightarrow p'(z)$  localmente uniformemente em  $G$ .

Assim,

$$\frac{p'_n(z)}{p_n(z)} \rightarrow \frac{p'(z)}{p(z)} \text{ localmente uniformemente em } G \setminus \{z \in G : p(z) = 0\}.$$

Contudo, um cálculo simples dá

$$\frac{p'_n(z)}{p_n(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{f'_k(z)}{1 + f_k(z)}$$

e assim

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_k(z)}{1 + f_k(z)} \text{ com } p(z) \neq 0. \blacksquare$$

## 2.3 Exemplos

Como aplicação dos resultados vistos anteriormente apresentam-se a função seno e a função Gama escritas na forma de produtos infinitos.

1. Consideremos

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Fixemos  $R > 0$ . Se  $z \in D(0, R)$ , então temos  $\left|\frac{z^2}{n^2}\right| < \frac{R^2}{n^2}$ ; e como  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^2}{n^2} < \infty$ , o produto converge uniformemente no disco  $D(0, R)$ . Como  $R$  é arbitrário, pelo Teorema 2.17, concluímos que  $f$  é uma função inteira.

2. Consideremos a função inteira  $\text{sen}\pi z$ .

Vamos mostrar que

$$\text{sen}\pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \text{ (Produto de Euler)}$$

Consideremos a função inteira (que está bem definida por 1.)

$$f(z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

A derivada logarítmica de  $f(z)$  é,

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z}{n^2 - z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \\ &= \pi \cotg \pi z \quad \text{ver, por exemplo, [9]} \end{aligned}$$

Então, pela Proposição 1.15, uma vez que  $f(z)$  e  $\text{sen} \pi z$  têm a mesma derivada logarítmica

$$\exists c \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = c \text{sen} \pi z.$$

Como  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{\pi z} = 1 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \pi z}{\pi z}$ , vem que  $c = 1$ , o que conclui a demonstração.

### 3. Consideremos

$$\varphi(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

Queremos mostrar que  $\varphi(z)$  define uma função inteira. Para tal basta mostrar que o  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$  converge uniformemente em  $D(0, R)$  para todo  $R > 0$ .

Fixemos então  $R > 0$  e seja  $z \in D(0, R)$ .

Usando a expansão da função exponencial,  $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ ,  $\forall w \in \mathbb{C}$ , temos

$$1 - (1 - w)e^w = w^2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)w + \cdots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right)w^{n-1} + \cdots \right\},$$

e como as expressões entre parênteses curvos no segundo membro são positivas,

$$\begin{aligned} |1 - (1 - w)e^w| &\leq |w|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) |w|^{n-1} \\ &\leq |w|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right), \text{ se } |w| \leq 1 \\ &= |w|^2. \end{aligned}$$

Em particular, se  $n \geq R$  e  $z \in D(0, R)$ , obtemos fazendo  $w = -\frac{z}{n}$ ,

$$\sum_{n \geq R} \left| 1 - \left( 1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}} \right| \leq \sum_{n \geq R} \frac{|z|^2}{n^2} \leq R^2 \sum_{n \geq R} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Logo, o produto infinito  $\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}}$  converge uniformemente no disco  $D(0, R)$ .

À custa da função  $\varphi$ , deste último exemplo, podemos definir a função Gama, na forma de produto infinito, que é uma extensão meromorfa da função factorial,  $\Gamma(n) = (n-1)!$ , se  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definição 2.18** A função Gama é a função de domínio  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ , definida por  $\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{\varphi(z)}$ , em que  $\gamma$  é a constante de Euler, isto é,  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) \right)$ .

## Capítulo 3

# Funções holomorfas com zeros pré-definidos

No capítulo anterior vimos que a função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi}$  admite uma representação na forma de produto infinito, e além disso, os factores do produto contém toda a informação sobre os zeros de  $f$ . Dois problemas que surgem naturalmente, são os seguintes:

I) Seja  $\Gamma$  um subconjunto de  $\mathbb{C}$ , numerável e sem pontos de acumulação. Fixemos uma função  $d : \Gamma \rightarrow \mathbb{N}$ . O problema é se existe uma função inteira  $f$ , tal que  $Z(f) = \Gamma$  e além disto, a multiplicidade de um ponto  $z_0 \in \Gamma$  como zero de  $f$  é  $d(z_0)$ .

II) Seja  $f$  uma função inteira não constante tal que  $Z(f) = \Gamma$ . É possível representar  $f(z)$  por um produto  $f(z) = \prod_{w \in \Gamma} f_w(z)$  de tal forma que para todo  $w \in \Gamma$ ,  $w$  é o único zero de  $f_w(z)$ ?

Se  $\Gamma$  é finito, a solução de ambos os problemas é simples. Suponhamos que  $\Gamma = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ .

- Uma solução do primeiro problema é

$$f(z) = (z - z_1)^{d(z_1)} (z - z_2)^{d(z_2)} \dots (z - z_n)^{d(z_n)}.$$

- Vejamos a solução do segundo problema. Seja  $f$  uma função inteira tal que  $Z(f) = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ . Suponhamos que para cada  $j = 1, \dots, n$ ,  $z_j$  é um zero de multiplicidade



$d_j \geq 1$  de  $f$ . Seja

$$h(z) = \frac{f(z)}{(z - z_1)^{d_1} (z - z_2)^{d_2} \dots (z - z_n)^{d_n}}.$$

Como  $z_j$  é um zero de multiplicidade  $d_j$  de  $f$ , os pontos  $z_1, \dots, z_n$  são singularidades removíveis de  $h$ , logo a função  $h$  estende-se a uma função inteira que não se anula. Vemos então que  $g(z) = f_1(z) \cdots f_n(z)$  em que

$$f_1(z) = h(z) (z - z_1)^{d_1}, \quad f_i(z) = (z - z_i)^{d_i} \quad \text{se } 2 \leq i \leq n.$$

Se  $\Gamma$  é infinito, também ambos os problemas têm resposta positiva. A solução envolve os chamados factores de Weierstrass, que passamos a definir.

### 3.1 Factores de Weierstrass

Com vista à demonstração do teorema que garante a existência de uma função analítica, com determinados zeros, começamos por definir um tipo especial de funções inteiras, os chamados factores de Weierstrass.

**Definição 3.1** *As funções inteiras definidas por*

$$E_0(z) = 1 - z \quad \text{e} \quad E_n(z) = (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n}\right), \quad n \geq 1$$

*chamam-se factores de Weierstrass.*

Observe-se que, se  $a \neq 0$ , então  $E_n\left(\frac{z}{a}\right)$  possui um único zero em  $z = a$ , o qual tem multiplicidade 1.

Da definição resulta também o seguinte lema, que será usado na demonstração do teorema que resolve o primeiro problema proposto.

**Lema 3.2** *Para  $|z| \leq 1$  e  $n \geq 0$ , temos  $|E_n(z) - 1| \leq |z|^{n+1}$ .*

**Demonstração.** Para  $n = 0$ ,  $|E_0(z) - 1| = |z|$ . Por outro lado, se  $n \geq 1$  então,

$$\begin{aligned} E'_n(z) &= [(1 + z + \dots + z^{n-1})(1 - z) - 1] \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n}\right) \\ &= -z^n \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n}\right). \end{aligned}$$

Além disto, se  $0 \leq t \leq 1$  e  $|z| \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} |E'_n(tz)| &= |z|^n |t|^n \left| \exp\left((tz) + \frac{(tz)^2}{2} + \dots + \frac{(tz)^n}{n}\right) \right| \\ &\leq |z|^n |t|^n \exp\left(\left| (tz) + \frac{(tz)^2}{2} + \dots + \frac{(tz)^n}{n} \right|\right), \text{ pois } |e^w| \leq e^{|w|}, \forall w \in \mathbb{C} \\ &\leq |z|^n |t|^n \exp\left(|tz| + \frac{|tz|^2}{2} + \dots + \frac{|tz|^n}{n}\right), \\ &\leq |z|^n t^n \exp\left(t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n}\right) \\ &= -|z|^n E'_n(t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Portanto, para todo  $z \in D(0, 1)$  temos

$$\begin{aligned} |E_n(z) - 1| &= |E_n(z) - E_n(0)| = \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} [E_n(tz)] dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 z E'_n(tz) dt \right| \\ &\leq |z| \int_0^1 |E'_n(tz)| dt \\ &\leq -|z|^{n+1} \int_0^1 E'_n(t) dt, \quad \text{por (3.1)} \\ &= |z|^{n+1}, \text{ pois } \int_0^1 E'_n(t) dt = -1, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ■

Vamos então enunciar o teorema que nos fornece a solução do primeiro problema, no caso de  $\Gamma$  ser infinito.

**Teorema 3.3** *Seja  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  divergente em módulo para  $+\infty$ .*

Se  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão de números naturais tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n+1} < \infty, \text{ para todo } r > 0,$$

então o produto infinito,

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left( \frac{z}{a_n} \right),$$

converge normalmente em subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ .

**Demonstração.** Basta-nos mostrar que o produto converge uniformemente em  $D(0, r)$ , para todo  $r > 0$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq n_0$  então  $|a_n| \geq r$ . Portanto, se  $|z| \leq r$  e  $n \geq n_0$ , então  $\left| \frac{z}{a_n} \right| \leq 1$ . Daqui e do lema anterior resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| E_{p_n} \left( \frac{z}{a_n} \right) - 1 \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z}{a_n} \right|^{p_n+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n+1} < \infty$$

Concluimos assim que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( E_{p_n} \left( \frac{z}{a_n} \right) - 1 \right)$  converge normalmente em  $D(0, r)$  e, portanto, o produto converge normalmente em  $D(0, r)$ . ■

Como consequência do Teorema 3.3 e do Teorema 2.17 temos o corolário seguinte.

**Corolário 3.4** *Seja  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão injectiva sem pontos de acumulação em  $\mathbb{C}$  e  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de números naturais. Então existe uma sucessão  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números naturais tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n+1} < \infty, \text{ para todo } r > 0.$$

Além disso, para uma tal sucessão  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$P(z) = z^m \prod_{\substack{n=1 \\ a_n \neq 0}}^{\infty} \left( E_{p_n} \left( \frac{z}{a_n} \right) \right)^{d_n} \text{ em que } m = \begin{cases} d_{n_0} & \text{se } \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

define uma função analítica com zeros em cada ponto  $a_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) e de multiplicidade  $d_n$ .

**Demonstração.** Seja  $P: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  em que

$$z \mapsto z^m \prod_{\substack{n=1 \\ c_n \neq 0}}^{\infty} \left( E_{p_n} \left( \frac{z}{c_n} \right) \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_n = d_1 + \dots + d_k - 1 & \text{se } d_1 + \dots + d_{k-1} + 1 \leq n \leq d_1 + \dots + d_k \\ c_n = a_k & \text{se } d_1 + \dots + d_{k-1} + 1 \leq n \leq d_1 + \dots + d_k \\ m = \begin{cases} d_{n_0} & \text{se } \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \end{array} \right.$$

Para concluir a demonstração basta usar o teorema anterior, o Teorema 2.17 e mostrar que, qualquer que seja  $r > 0$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n+1} < \infty.$$

Como, dado  $r > 0$ , a partir de certa ordem,  $\frac{r}{|c_n|} \leq \frac{1}{2}$ , basta mostrar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{p_n+1}.$$

Mas

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{p_n+1} &= d_1 \left( \frac{1}{2} \right)^{d_1} + d_2 \left( \frac{1}{2} \right)^{d_1+d_2} + \dots + d_i \left( \frac{1}{2} \right)^{d_1+d_2+\dots+d_i} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left( \frac{1}{2} \right)^{d_1+d_2+\dots+d_n} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{d_1+d_2+\dots+\frac{d_n}{2}-1} \quad \text{pois } k \left( \frac{1}{2} \right)^{k+1} \leq \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{k}{2}}, \text{ se } k \in \mathbb{N} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-\frac{3}{2}} \quad \text{pois } d_i \geq 1, \text{ para todo } i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

e deste modo conclui-se a demonstração. ■

Agora como consequência deste último resultado temos a solução do segundo problema, que é apresentada no corolário a seguir.

**Corolário 3.5** *Seja  $f$  uma função inteira, cujo conjunto de zeros é da forma  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ , onde  $a_m \neq a_n$  se  $m \neq n$ . Suponhamos que a multiplicidade de  $a_n$  como zero de  $f$  é  $d_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Então existem  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de números naturais e uma função inteira  $g$  tais que*

$$f(z) = \exp(g(z)) z^m \prod_{\substack{n=1 \\ a_n \neq 0}}^{\infty} \left( E_{p_n} \left( \frac{z}{a_n} \right) \right)^{d_n} \quad \text{em que } m = \begin{cases} d_{n_0} & \text{se } \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} = 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Demonstração.** Pelo corolário anterior existe uma sucessão  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números naturais tal que  $P(z) = z^m \prod_{\substack{n=1 \\ a_n \neq 0}}^{\infty} \left( E_{p_n} \left( \frac{z}{a_n} \right) \right)^{d_n}$  define uma função analítica cujos zeros e respectivas multiplicidades são os mesmos de  $f$ . Isto implica que a função  $h(z) = \frac{f(z)}{P(z)}$  se estende a uma função inteira que não se anula. Como  $\mathbb{C}$  é simplesmente conexo, podemos escrever, usando a Proposição 1.16,  $h(z) = \exp(g(z))$ , para alguma função inteira  $g$ . Resulta daí que  $f(z) = \exp(g(z)) P(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . ■

De seguida, veremos uma generalização do Corolário 3.4 para um domínio qualquer de  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 3.6 (Teorema de Weierstrass)** *Suponhamos que  $G$  é um domínio de  $\mathbb{C}$  diferente de  $\mathbb{C}$ ,  $\Gamma = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  é um subconjunto numerável, sem pontos de acumulação em  $G$  e  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão de números naturais. Então existe uma função analítica  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $Z(f) = \Gamma$  e a multiplicidade de cada  $a_n \in \Gamma$ , como zero de  $f$ , é  $d_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Demonstração.** Por uma questão de simplificação de notação vamos supor que todos os zeros são simples.

Se  $\Gamma$  é finito, basta tomar a função  $f$  definida por um polinómio.

Se  $\Gamma$  é infinito, observemos em primeiro lugar que o conjunto de pontos de acumulação de  $\Gamma$ ,  $\Gamma' = \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ , está contido na fronteira de  $G$ . A ideia é construir uma função analítica  $g : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{C}$  com as propriedades requeridas e tomar  $f = g|_G$ . Vamos dividir a demonstração em dois casos.

1º Caso: a sucessão  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada e, portanto  $\Gamma'$  é um conjunto compacto e não vazio.

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  fixemos  $w_n \in \Gamma'$  tal que

$$|a_n - w_n| = d(a_n, \Gamma') = \inf \{|a_n - z| : z \in \Gamma'\} > 0.$$

Para  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos a função

$$f_n(z) = E_n\left(\frac{a_n - w_n}{z - w_n}\right) = \left(\frac{z - a_n}{z - w_n}\right) \exp\left(w + \frac{w^2}{2} + \dots + \frac{w^n}{n}\right) \text{ com } w = \frac{a_n - w_n}{z - w_n} \text{ e } z \neq w_n.$$

Valem as seguintes propriedades:

- Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  possui um único zero de multiplicidade 1 em  $z = a_n$ .
- Se  $\left|\frac{a_n - w_n}{z - w_n}\right| \leq \frac{1}{2}$ , então pelo Lema 3.2

$$|f_n(z) - 1| \leq \left|\frac{a_n - w_n}{z - w_n}\right|^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Vamos mostrar que  $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  define uma função nas condições requeridas. Utilizando o Teorema 2.17 basta mostrar a convergência normal da série  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z) - 1|$  em compactos. Como qualquer compacto está contido em  $V_m = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma' : d(z, \Gamma') \geq \frac{1}{m}\}$  para algum  $m \in \mathbb{N}$ , basta provar a convergência normal em  $V_m$ .

Fixemos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $V_m \neq \emptyset$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, \Gamma') = 0$ , seja  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq n_0$  então

$$d(a_n, \Gamma') = |a_n - w_n| < \frac{1}{2m}.$$

Se  $z \in V_m$  e  $n \geq n_0$ , temos  $\frac{|a_n - w_n|}{|z - w_n|} < \frac{1}{2}$ , pois  $|z - w_n| \geq \frac{1}{m}$ . Portanto, se  $z \in V_m$  e  $n \geq n_0$ , temos:

$$|f_n(z) - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ pelo Lema 3.2}$$

Isto implica que a série  $\sum_{n \geq n_0} |f_n(z) - 1|$  converge normalmente em  $V_m$ .

2<sup>o</sup> Caso: a sucessão  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é ilimitada.

A ideia é reduzir este caso ao anterior.

Fixemos  $z_0 \in G \setminus \{a_1, a_2, \dots\}$  e a função  $T : G \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  definida por  $T(z) = \frac{1}{z - z_0}$ .

Observemos os seguintes factos:

- $T(G \setminus \{z_0\})$  é um aberto pois  $T^{-1}$  é contínua e  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  é um aberto de  $\mathbb{C}$ .

- $T(\{a_1, a_2, \dots\})$  é limitado. Com efeito, como  $G \setminus \{a_1, a_2, \dots\}$  é aberto, existe  $r > 0$  tal que  $B(z_0, r) \subseteq G \setminus \{a_1, a_2, \dots\}$ . Isto implica que se  $z \in \{a_1, a_2, \dots\}$ , então  $|z - z_0| > r$ , donde  $|T(z)| = \frac{1}{|z - z_0|} < \frac{1}{r}$ .

Pelo primeiro caso, existe uma função analítica  $f$  tal que  $Z(f) = T(\{a_1, a_2, \dots\})$ .

Vemos então que:

- $Z(f \circ T) = \{a_1, a_2, \dots\}$ .
- $z_0$  é uma singularidade removível de  $f \circ T$  e  $\lim_{z \rightarrow z_0} (f \circ T)(z) = 1$ . Para provar isto calculemos os limites seguintes:

$$\lim_{w \rightarrow \infty} f_n(w) = \lim_{w \rightarrow \infty} E_n \left( \frac{a_n - w_n}{w - w_n} \right) = E_n(0) = 1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (f \circ T)(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} f \left( \frac{1}{z - z_0} \right) = \lim_{w \rightarrow \infty} f(w) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \lim_{w \rightarrow \infty} f_n(w), \text{ pelo Teorema 2.17} \\ &= 1. \blacksquare \end{aligned}$$

De seguida veremos que uma função meromorfa é o quociente de duas funções holomorfas.

**Corolário 3.7** *Se  $f$  é uma função meromorfa num domínio  $G \subseteq \mathbb{C}$ , então existem funções  $g$  e  $h$ , holomorfas em  $G$ , tais que  $f = \frac{g}{h}$  em  $G \setminus \Gamma$ , onde  $\Gamma$  é o conjunto de pólos de  $f$ .*

**Demonstração.** O conjunto  $\Gamma$ , de pólos de  $f$  é discreto em  $G$ . Para cada  $z \in \Gamma$ , seja  $d(z)$  a ordem de  $z$  como pólo de  $f$ . Pelo Teorema 3.6, existe uma função holomorfa  $h : G \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $Z(h) = \Gamma$  e para cada  $z \in \Gamma$ , a ordem de  $z$  como zero de  $h$  é  $d(z)$ . Consideremos  $g(z) = h(z)f(z)$ . Queremos mostrar que  $g$  se estende a uma função holomorfa em  $G$ . Para demonstrar isto, basta provar que os pontos de  $\Gamma$  são singularidades removíveis de  $g$ . Fixemos  $z_0 \in \Gamma$ . Como  $z_0$  é pólo de ordem  $d = d(z_0)$  de  $f$  e zero de ordem  $d$  de  $h$ , podemos escrever que  $f(z) = \frac{\varphi_1(z)}{(z - z_0)^d}$  e  $h(z) = (z - z_0)^d \varphi_2(z)$ , em que  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são funções holomorfas numa vizinhança de  $z_0$  e  $\varphi_1(z_0) \neq 0 \neq \varphi_2(z_0)$ . Portanto,  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \varphi_1(z_0) \varphi_2(z_0)$ . ■

De seguida, utilizaremos o Teorema 3.3 para mostrar que determinados produtos infinitos convergem normalmente em subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ .

**Exemplo 3.8** *Os produtos infinitos*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n z) \quad (\text{se } 0 < |q| < 1) \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

convergem normalmente em subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ .

Para mostrar esta convergência comecemos por notar que

$$\left\{ \begin{array}{l} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_0(-q^n z) \\ \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} = \prod_{n=1}^{\infty} E_1\left(-\frac{z}{n}\right) \\ \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} [E_1\left(\frac{z}{n}\right) E_1\left(-\frac{z}{n}\right)]. \end{array} \right.$$

A conclusão segue do Teorema 3.3 uma vez que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|q|^n}\right) = r \sum_{n=1}^{\infty} q^n < +\infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{n}\right)^2 = r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty. \end{array} \right.$$

## 3.2 Produtos de Blaschke

Nesta secção veremos que existem funções limitadas definidas em  $B(0, 1)$  cujos zeros estão pré-definidos. É claro que basta considerar o caso em que essas funções são funções de  $B(0, 1)$  em  $B(0, 1)$ .

**Definição 3.9** *Seja  $a \in B(0, 1) \setminus \{0\}$ . À função  $B_a : \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\bar{a}}\} \rightarrow \mathbb{C}$*

$$z \mapsto \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}$$

*chamamos um factor de Blaschke.*

Observe-se que,  $B_a(z)$  possui um único zero em  $z = a$ , o qual tem multiplicidade 1.



Um resultado importante acerca dos factores de Blaschke é dado pela proposição seguinte.

**Proposição 3.10** *Se  $a \in B(0,1) \setminus \{0\}$  e  $|z| < 1$  então  $|B_a(z)| < 1$ .*

**Demonstração.** Usando o teorema do módulo máximo (Teorema 1.9) basta mostrar que  $|B_a(z)| = 1$  para  $|z| = 1$ .

Suponhamos que  $|z| = 1$ . Uma vez que,  $|w|^2 = w\bar{w}$ , para todo  $w \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} |B_a(z)|^2 &= \left| \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \right|^2 = \left| \frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(\bar{a}z-1)(a\bar{z}-1)} \right| \\ &= \frac{1-a\bar{z}-\bar{a}z+|a|^2}{|a|^2-\bar{a}z-a\bar{z}+1} \text{ pois } |z|=1 \\ &= 1. \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorema 3.11** *Seja  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de elementos de  $B(0,1) \setminus \{0\}$  tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|a_n|) < \infty.$$

*Então existe uma função analítica  $f : B(0,1) \rightarrow B(0,1)$  cujo conjunto dos zeros é formado pelos pontos da sucessão  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .*

**Demonstração.** Atendendo ao que vimos sobre as funções de Blaschke e ao Teorema 2.17 basta mostrar que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{|a_n|}{a_n} B_{a_n}(z) - 1 \right)$  converge normalmente em  $D(0,r)$  para todo  $r \in ]0,1[$ .

Deste modo  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} B_{a_n}(z)$  define uma função nas condições pedidas.

Fixemos então  $r \in ]0,1[$ . Para  $z \in D(0,r)$  tem-se

$$\begin{aligned} \left| \frac{|a_n|}{a_n} B_{a_n}(z) - 1 \right| &= \left| \frac{(1-|a_n|)(a_n+|a_n|z)}{a_n(\bar{a}_n z - 1)} \right| \leq \frac{|a_n|+|a_n||z|}{|a_n||\bar{a}_n z - 1|} (1-|a_n|) \\ &= \frac{1+|z|}{|\bar{a}_n z - 1|} (1-|a_n|) \\ &\leq \frac{1+|z|}{1-|z|} (1-|a_n|) \text{ pois } |1-\bar{a}_n z| \geq 1-|\bar{a}_n z| \geq 1-|z| \\ &\leq \frac{1+r}{1-r} (1-|a_n|) \text{ porque } |z| \leq r < 1. \end{aligned}$$

A conclusão segue da hipótese sobre a sucessão  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  $\blacksquare$

Note-se que, no teorema anterior, cada número complexo “aparece um número finito de vezes na sucessão  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ” devido à condição posta sobre a sucessão.

A restrição posta no teorema anterior de a sucessão  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  não poder tomar o valor 0 pode ser retirada. Por exemplo se  $a_1 = \dots = a_k = 0$ , para algum  $k$  e  $a_n \neq 0$  para  $n \geq k$  então  $z^k \prod_{n=k+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} B_{a_n}(z)$  está nas condições pretendidas.

## Capítulo 4

# Funções meromorfas com parte principal pré-definida

O objectivo deste capítulo é mostrar que, dados  $G \subseteq \mathbb{C}$ , um domínio de  $\mathbb{C}$ , e  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , uma sucessão de pontos em  $G$  sem pontos de acumulação em  $G$ , é possível construir uma função meromorfa em  $G$  cujos pólos são os pontos da sucessão, sendo a parte principal de  $f$  em  $z_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) pré-definida. Além disso, se duas funções meromorfas satisfizerem estas condições então a sua diferença prolonga-se a uma função analítica definida em  $G$ .

### 4.1 Teorema de Mittag-Leffler

Estudaremos o teorema que nos garante a existência de uma função meromorfa cujos pólos e parte principal, à partida, são conhecidos.

**Teorema 4.1** (*Mittag-Leffler*). *Sejam  $G$  um domínio de  $\mathbb{C}$ ,  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de pontos em  $G$  distintos dois a dois, sem pontos de acumulação em  $G$  e  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de funções racionais tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$*

$$P_n(z) = \frac{A_{n1}}{z - z_n} + \frac{A_{n2}}{(z - z_n)^2} + \cdots + \frac{A_{nk_n}}{(z - z_n)^{k_n}}$$

em que  $A_{n1}, \dots, A_{nk_n} \in \mathbb{C}$ ,  $k_n \in \mathbb{N}$  e  $A_{nk_n} \neq 0$ . Então existe uma função meromorfa  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  cujos pólos são  $z_1, z_2, \dots$  e tal que a parte principal de  $f$  em  $z_n$  é  $P_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração.** Vamos dividir esta demonstração em dois casos.

1.º Caso:  $G = \mathbb{C}$ .

Podemos supor que  $z_n \neq 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como a sucessão  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  não tem pontos de acumulação em  $\mathbb{C}$ ,  $|z_n| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Por outro lado, a série de Mac-Laurin da função  $P_n$  converge uniformemente para  $P_n$  em  $B\left(0, \frac{|z_n|}{2}\right)$  (pois o raio de convergência da série é  $|z_n|$ ). Dado  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $m_n \in \mathbb{N}$  tal que, se  $Q_n$  é o polinómio que representa a soma dos primeiros  $m_n$  termos da série de Mac-Laurin de  $P_n$ , então  $|P_n(z) - Q_n(z)| < \frac{1}{2^n}$  para todo  $z \in B\left(0, \frac{|z_n|}{2}\right)$ .

Consideremos a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (P_n(z) - Q_n(z))$ . Vamos mostrar que esta série satisfaz as condições requeridas no teorema. Para isso basta mostrar que a série converge uniformemente em subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ .

Consideremos  $B(0, r)$ , em que  $r > 0$ . Como  $|z_n| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|z_n| > 2r$  para todo  $n \geq n_0$ . Daqui resulta que  $|P_n(z) - Q_n(z)| < \frac{1}{2^n}$  para todo  $z \in B(0, r)$ . Assim, aplicando o critério de comparação da convergência de séries, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (P_n(z) - Q_n(z))$  converge uniformemente em  $B(0, r)$ . Pelo facto de  $P_n - Q_n$  admitir apenas  $z_n$  como pólo, pelo Teorema 1.17 a série  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (P_n - Q_n)$  define uma função meromorfa em  $\mathbb{C}$ , cujos pólos são  $z_1, z_2, \dots$  e tal que a parte principal de  $f$  em  $z_n$  é  $P_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

2.º Caso:  $G \neq \mathbb{C}$ .

Seja  $\widehat{G} = G \setminus \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Como  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  não possui nenhum ponto de acumulação em  $G$ ,  $\widehat{G}$  é um aberto. Fixemos uma sucessão  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos compactos de  $\widehat{G}$  tal que  $K_n \subseteq \text{int}(K_{n+1})$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{int}(K_n) = \widehat{G}$ . Pelo Teorema 1.18, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe uma função racional  $h_n$ , sem pólos em  $G$  e tal que

$$|P_n(z) - h_n(z)| \leq \frac{1}{2^n}, \text{ para todo } z \in K_n. \quad (4.1)$$

Consideremos a série  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (P_n(z) - h_n(z))$ . Pela hipótese sobre  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , qualquer compacto de  $\mathbb{C}$  contido em  $\widehat{G}$  está contido em algum  $K_n$ . Para mostrar que  $f$  é analítica basta

então usar (4.1) para concluir que  $\sum_{n=n_0}^{\infty} |P_n - h_n|$  converge normalmente em  $K_{n_0}$ . Uma vez que,  $P_n - h_n$  admite apenas  $z_n$  como pólo, pelo Teorema 1.17 a série  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (P_n - h_n)$  define uma função meromorfa em  $G$ , cujos pólos são  $z_1, z_2, \dots$  e tal que a parte principal de  $f$  em  $z_n$  é  $P_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . ■

É claro que se uma função satisfaz a conclusão do teorema anterior então a soma dessa função com uma função analítica em  $G$  também a satisfaz. O resultado “inverso” também é verdadeiro.

**Proposição 4.2** *Se  $f$  e  $g$  são funções com as propriedades enunciadas no teorema anterior  $f - g$  pode ser prolongada a uma função analítica em  $G$ .*

**Demonstração.** Como  $f$  e  $g$  têm exactamente os mesmos pólos e correspondente parte principal e são holomorfas em todos os pontos de  $\mathbb{C}$  excepto nos que são seus pólos, resulta que  $g - f$  tem uma singularidade removível em cada um dos seus pólos. Logo,  $g - f$  pode ser estendida a uma função analítica em  $G$ . ■

Vejamos um exemplo que é essencialmente de aplicação do Teorema de Mittag-Leffler.

**Exemplo 4.3** *Vejamos que a função definida por*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n} + \frac{z}{z_n^2} + \dots + \frac{z^{p-1}}{z_n^p} \right)$$

em que  $p \in \mathbb{N}$  e  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão de pontos em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  distintos dois a dois tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}} \quad \text{é convergente}$$

é uma função holomorfa em  $\mathbb{C} \setminus \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$  cuja parte principal em  $z_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é  $\frac{1}{z - z_n}$ .

Usando as notações do Teorema de Mittag-Leffler temos

$$Q_n = - \left( \frac{1}{z_n} + \frac{z}{z_n^2} + \dots + \frac{z^{p-1}}{z_n^p} \right) = - \frac{z_n^p - z^p}{z_n^p (z_n - z)}.$$

Seguindo a demonstração do teorema, dado  $r > 0$  seja  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|z_n| > 2r$  para todo  $n \geq n_0$ . Deste modo

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - z_n} - Q_n \right) = \sum_{n=1}^{n_0} \left( \frac{1}{z - z_n} - Q_n \right) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - z_n} - Q_n \right).$$

Resta agora mostrar a convergência uniforme da série em  $B(0, r)$ . Para todo  $z \in B(0, r)$  e todo  $n > n_0$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z - z_n} - Q_n \right| &= \frac{|z|^p}{|z_n|^p |z_n - z|} \\ &\leq \frac{r^p}{|z_n|^p |z_n - z|} \\ &\leq \frac{r^p}{|z_n|^p \left| |z_n| - \frac{|z_n|}{2} \right|}, \quad |z_n| > 2r, \text{ para todo } n \geq n_0 \text{ e } |z_n - z| \geq ||z_n| - |z|| \\ &\leq \frac{2r^p}{|z_n|^{p+1}}. \end{aligned}$$

A conclusão segue do facto, por hipótese, de a série  $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}}$  ser convergente.

## Capítulo 5

# Domínios de holomorfia

O objectivo deste capítulo é provar que dado um domínio  $G$  de  $\mathbb{C}$ , existe uma função  $f$  holomorfa em  $G$  tal que  $G$  é domínio de holomorfia de  $f$ . Veremos isto em dois resultados.

- Na demonstração do primeiro, construiremos uma função holomorfa em  $G$  a tender para infinito quando os objectos se aproximam da fronteira de  $G$  e introduziremos o conceito de conjunto fronteira bem distribuído. Esta função será definida com base nas chamadas “séries de Goursat”.
- Para demonstrar o segundo resultado a função será construída de tal maneira que os pontos da fronteira de  $G$  são pontos de acumulação dos zeros da função. Para esta construção utilizaremos o Teorema de Weierstrass. Introduziremos ainda o conceito de conjunto periférico.

### 5.1 Definições e exemplos

Nesta secção veremos a diferença entre domínio maximal de existência e domínio de holomorfia de uma função holomorfa.

**Definição 5.1** *Sejam  $G, G'$  domínios de  $\mathbb{C}$ ,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : G' \rightarrow \mathbb{C}$  funções holomorfas. A função  $f$  diz-se um prolongamento da função  $g$  se  $G'$  está contido em  $G$  e  $f(z) = g(z)$ , para todo  $z \in G'$ .*

**Definição 5.2** *Sejam  $G$  domínio de  $\mathbb{C}$  e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa. Um domínio  $G'$  diz-se:*

- domínio maximal de existência de  $f$  se  $f$  se pode prolongar, de maneira holomorfa a  $G'$  e a nenhum outro domínio contendo propriamente  $G'$ ;
- domínio de holomorfia de  $f$  se for domínio maximal de existência de  $f$  e para todo o ponto  $c$  de  $G'$ , o disco de convergência da série de Taylor de  $f$  em  $c$  está contido em  $G'$ .

Pode-se dizer que, o domínio maximal de existência existe sempre e é igual à união de todos os domínios de prolongamentos de  $f$ . No entanto, nem sempre existe domínio de holomorfia de uma função, como se verá no Exemplo 5.4. Além disso, veremos mais adiante (Proposição 5.6) que há condições topológicas sobre os domínios que obrigam a que estas duas noções sejam equivalentes. Começamos com um caso particular.

**Proposição 5.3** *Se o domínio maximal de existência de uma função holomorfa é um conjunto convexo então ele é domínio de holomorfia da função.*

**Demonstração.** Seja  $G$  um domínio convexo que é o domínio maximal de uma função holomorfa  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  e suponhamos que  $G$  não é o domínio de holomorfia de  $f$ .

Então, existe  $c \in G$  tal que a bola de convergência da série de Taylor de  $f$  em  $c$  não está contida em  $G$ . Sejam  $B$  a bola referida e  $g : B \rightarrow \mathbb{C}$  a série de Taylor de  $f$  em  $c$ . Note-se que:

- $B \cap G$  é um convexo pois é a intersecção de dois convexos. Em particular,  $B \cap G$  é conexo;
- $B \cup G$  é um conexo pois é a união de dois conexos que se intersectam;
- $f$  e  $g$  são iguais no conexo  $B \cap G$ , pois são analíticas e iguais num seu subconjunto não discreto, a saber,  $B(c, r)$  em que  $r$  é a distância de  $c$  à fronteira de  $G$ .

Deste modo tem sentido falar na função

$$F : G \cup B \longrightarrow \mathbb{C}.$$

$$z \longmapsto \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in G \\ g(z) & \text{se } z \in B \end{cases}$$



Para concluir a demonstração basta-nos mostrar que  $F$  é holomorfa, uma vez que  $G$  é o domínio maximal de  $f$ .

Se  $a$  é um ponto da fronteira de  $G$  que está em  $B$  e  $r > 0$  é tal que  $B(a, r) \subseteq B$  então  $F$  e  $g$  são iguais em  $B(a, r)$ . Em particular  $F$  é analítica em  $a$ . ■

Vejamos alguns exemplos de domínios de holomorfia.

#### Exemplo 5.4

1. Facilmente se vê que, se  $A$  é um subconjunto finito de  $\mathbb{C}$  então o domínio de holomorfia de uma função analítica definida em  $\mathbb{C} \setminus A$  admitindo cada um dos elementos de  $A$  como pólos é  $\mathbb{C} \setminus A$ .

2. O domínio de holomorfia da função  $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  é  $B(0, 1)$ .

$$z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$$

Para tal, basta mostrar que se  $n \in \mathbb{N}$  e  $\alpha$  é uma raiz índice  $2^n$  da unidade então

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} |f(t\alpha)| = \infty.$$

Notemos que, para  $z \in B(0, 1)$  e  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f(z^{2^n}) = f(z) - (z + z^2 + \dots + z^{2^n - 1})$$

donde resulta

$$|f(z^{2^n})| \leq |f(z)| + |z| + |z^2| + \dots + |z^{2^n - 1}| \leq |f(z)| + n.$$

Por outro lado, se  $m \in \mathbb{N}$  e  $0 < t < 1$ ,

$$\begin{aligned} f(t) &> \sum_{k=0}^m t^{2^k} \\ &> (m+1)t^{2^m} \quad \text{porque } t^{2^k} \geq t^{2^m}, \text{ se } k \leq m \\ &\geq \frac{1}{2}(m+1), \text{ se } m = \text{característica} \left( \log_2 \left[ \frac{\log \frac{1}{2}}{\log t} \right] \right) \end{aligned}$$

Como  $\lim_{t \rightarrow 1^-} \log_2 \left[ \frac{\log \frac{1}{2}}{\log t} \right] = +\infty$  concluímos que  $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = +\infty$ .

Sendo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\alpha$  uma raiz índice  $2^n$  da unidade, temos

$$|f(t\alpha)| \geq |f((t\alpha)^{2^n})| - n = |f(t^{2^n})| - n,$$

logo,  $\lim_{t \rightarrow 1^-} |f(t\alpha)| = \infty$ .

3. O conjunto  $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$  é o domínio maximal de existência das funções (considerando o argumento de  $z$ , para  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , no intervalo  $] -\pi, \pi[$ )

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{C}^- & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sqrt{z} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g: \mathbb{C}^- & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \log z \end{array}$$

mas não é o seu domínio de holomorfia, pois para cada ponto  $c \in \mathbb{C}^-$  e  $z \in B(c, |c|)$  a série de Taylor de  $f$  e  $g$  é respectivamente,

$$\sqrt{c} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n! \sqrt{c^{2n-1}}} \prod_{k=1}^n (2k-3) (z-c)^n \quad \text{e} \quad \log c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nc^n} (z-c)^n$$

e  $B(c, |c|) \not\subseteq \mathbb{C}^-$  se  $\operatorname{Re} c < 0$ .

Com este exemplo, concluímos que nem sempre existe domínio de holomorfia de uma função holomorfa.

**Proposição 5.5** Dado um domínio  $G$  existe uma função  $f$  holomorfa cujo domínio maximal de existência de  $f$  é  $G$ .

**Demonstração.** Seja  $A$  um subconjunto numerável de  $G$  cujo conjunto dos pontos de acumulação é a fronteira de  $G$ . Pelo Teorema de Weierstrass, existe uma função  $f$  holomorfa definida em  $G$  cujo conjunto dos zeros de  $f$  é  $A$ .

Suponhamos que  $\widehat{f}: \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$  é um prolongamento de  $f$ . Então  $A$  tem pontos de acumulação em  $\widehat{G}$ . Assim,  $f \equiv 0$ , o que é uma contradição. ■

O resultado seguinte generaliza a Proposição 5.3.

**Proposição 5.6** *Se  $G$  é um domínio de  $\mathbb{C}$  tal que se  $x \in \partial G$  então existem bolas tão pequenas quanto se queira tal que a sua intersecção com  $G$  seja conexa e  $G$  é o domínio maximal de existência de uma função holomorfa  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , então  $G$  é domínio de holomorfia de  $f$ .*

**Demonstração.** Seguindo as notações usadas na demonstração da Proposição 5.3 e depois de definir  $B$ , seja  $W$  a componente conexa de  $B \cap G$  que contém  $c$  e  $B'$  uma bola centrada num ponto da fronteira de  $G$ , que esteja contida em  $W$  e tal que  $B' \cap G$  seja conexo. A partir daqui a demonstração segue os passos da demonstração da Proposição 5.3, substituindo  $B$  por  $B'$ . ■

Com vista à demonstração do primeiro teorema, que nos garante que todo o domínio é domínio de holomorfia de alguma função holomorfa, apresentamos a construção das chamadas séries de Goursat e a definição de conjuntos fronteira bem distribuídos.

**Proposição 5.7** (*Série de Goursat*) *Sejam  $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  com  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$  e  $b_1, b_2, \dots$  pontos distintos em  $\mathbb{C}$ . Então a série*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z - b_k} \quad (\text{Série de Goursat})$$

*converge localmente uniformemente em  $\mathbb{C} \setminus A$ , em que  $A = \overline{\{b_1, b_2, \dots\}}$  em  $\mathbb{C}$ .*

**Demonstração.** Seja  $K \subset \mathbb{C} \setminus A$  um compacto. Então  $r = d(K, A) > 0$ . Como  $|z - b_k| \geq r$  para  $z \in K$ , vem que

$$\frac{|a_k|}{|z - b_k|} \leq \frac{|a_k|}{r}.$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{a_k}{z - b_k} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{r} < \infty.$$

Portanto,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z - b_k}$  converge localmente uniformemente em  $\mathbb{C} \setminus A$ . ■

**Lema 5.8** (*Goursat*) *Nas condições da proposição anterior, sejam  $B$  uma bola em  $\mathbb{C} \setminus A$  tal que  $b_n$  pertence à fronteira de  $B$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$  e  $f : \mathbb{C} \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$  a função definida por  $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z - b_k}$ . Então,  $f(w)$  converge para infinito quando  $w$  tende para  $b_n$  ao longo de um raio de  $B$ .*

**Demonstração.** Nas condições referidas,

$$|w - b_n| < |w - b_k|, \text{ para todo } k \neq n. \quad (5.1)$$

Seja  $p > n$  escolhido de modo que

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| \leq \frac{1}{2} |a_n|. \quad (5.2)$$

Reescrevamos a série de Goursat na forma

$$f(z) = \frac{a_n}{z - b_n} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{a_k}{z - b_k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^p \frac{a_k}{z - b_k}$$

donde

$$\begin{aligned} |f(w)| &\geq \left| \frac{a_n}{w - b_n} \right| - \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{a_k}{w - b_k} \right| - \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^p \frac{a_k}{w - b_k} \right| \\ &\geq \left| \frac{a_n}{w - b_n} \right| - \sum_{k=p+1}^{\infty} \left| \frac{a_k}{w - b_k} \right| - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^p \left| \frac{a_k}{w - b_k} \right| \\ &\geq \left| \frac{a_n}{w - b_n} \right| - \sum_{k=p+1}^{\infty} \left| \frac{a_k}{w - b_n} \right| - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^p \left| \frac{a_k}{w - b_k} \right|, \text{ por } \quad (5.1) \end{aligned}$$

$$\geq \left| \frac{a_n}{w - b_n} \right| - \frac{1}{2} \left| \frac{a_n}{w - b_n} \right| - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^p \left| \frac{a_k}{w - b_k} \right|, \text{ por } \quad (5.2).$$

Deste modo

$$|f(w)| = \frac{1}{2} \left| \frac{a_n}{w - b_n} \right| - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^p \left| \frac{a_k}{w - b_k} \right|.$$

Aplicando limites, concluímos o pretendido. ■

## 5.2 Conjuntos fronteira bem distribuídos

Definiremos conjuntos fronteira bem distribuídos a fim de com o seu auxílio e das séries de Goursat demonstrarmos um critério de holomorfia.

**Definição 5.9** *Seja  $G$  um domínio e  $b$  um ponto da fronteira de  $G$ . O ponto  $b$  diz-se um ponto visível de  $G$  se existir uma bola  $B$  contida em  $G$  tal que  $b$  pertence à fronteira de  $B$ . Neste caso,  $B$  diz-se uma bola visível de  $b$ .*

**Nota 5.10** *Em geral, um domínio tem pontos da fronteira que não são visíveis. Por exemplo, num quadrado, os vértices são pontos da fronteira que não são visíveis.*

**Definição 5.11** *Seja  $M$  um conjunto de pontos visíveis da fronteira de um domínio  $G$ . O conjunto  $M$  diz-se bem distribuído se: dados  $c \in G$  e  $B'$  uma bola de centro  $c$  que intersecta  $\partial G$ , então na componente de  $B' \cap G$  contendo  $c$  está uma bola visível  $B$  para algum ponto  $b \in M \cap B'$ .*

É imediato a partir desta definição que se  $M$  é um conjunto bem distribuído então  $M$  é um conjunto denso. No entanto, o recíproco desta afirmação não é verdadeiro, conforme mostra o exemplo seguinte.

**Exemplo 5.12** *Consideremos*

$$\begin{aligned} G &= B(0, 2) \setminus \left\{ x + iy \in \mathbb{C} : x \in [-1, 1], y = \frac{1}{n} \vee y = 0, n \in \mathbb{N} \right\} \\ M &= \partial G \setminus \{x + iy \in \mathbb{C} : x \in [-1, 1], y = 0\} \end{aligned}$$

*Note-se que  $\overline{M} = \partial G$ , todos os pontos de  $M$  são visíveis e no entanto, o conjunto  $M$  não é bem distribuído.*

Da definição anterior resulta que se considerarmos  $G$  um domínio tal que se  $x \in \partial G$  então existem bolas tão pequenas quanto se queira tal que a sua intersecção com  $G$  seja conexa e  $M$  um conjunto de pontos visíveis da fronteira de  $G$ , então  $M$  é bem distribuído se e só se  $M$  é denso na fronteira de  $G$ .

**Proposição 5.13** *Qualquer domínio  $G \neq \mathbb{C}$  tem um conjunto contido na fronteira que é contável e bem distribuído.*

**Demonstração.** Seja  $R$  um conjunto contável e denso em  $G$ . Para cada  $a \in R$ , consideremos  $b$  pertencente às fronteiras de  $G$  e da maior bola contida em  $G$  e de centro  $a$ . Assim, cada ponto da fronteira de  $G$  obtido desta forma é um ponto visível. Sendo  $R$  um conjunto contável, o conjunto  $M$  formado por estes pontos visíveis também é contável. Vejamos que  $M$  é bem distribuído. Sejam  $c \in G$  e  $B'$  uma bola de centro  $c$  e raio  $r$ ,  $r > 0$ , que intersecta a fronteira de  $G$ .

Note-se que, se  $\alpha \in \partial G \cap B'$ ,  $s = \frac{1}{2}(r - d(\alpha, c))$  e  $\beta \in B(\alpha, s) \cap G \cap R$  então,

$$B(\beta, d(\beta, \partial G)) \subseteq B(\beta, s) \subseteq B(\alpha, 2s) \subseteq B'$$

e portanto  $B(\beta, d(\beta, \partial G))$  é uma bola visível para algum ponto pertencente a  $M \cap B'$ . ■

Neste momento, já podemos enunciar o primeiro critério para domínios de holomorfia.

**Proposição 5.14** *(Critério de holomorfia) Seja  $G$  um domínio. Se  $\{b_1, b_2, \dots\} \subseteq \partial G$  é um conjunto contável bem distribuído, então  $G$  é domínio de holomorfia de qualquer função da forma*

$$\begin{aligned} f &: G \rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z-b_k} \end{aligned}$$

com  $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ .

**Demonstração.** A função  $f$ , pela Proposição 5.7, tem domínio maximal de existência  $G$ , uma vez que  $\overline{\{b_1, b_2, \dots\}} = \partial G$ . Sejam  $c \in G$  e  $B'$  a bola de convergência da série de Taylor  $h$  de  $f$  no ponto  $c$  e suponhamos que  $B' \cap \partial G \neq \emptyset$ . Então, pela definição anterior, na componente  $W$  de  $B' \cap G$  contendo  $c$  está uma bola visível  $B$  para algum ponto  $b_n \in B'$ . Como  $h|_W = f|_W$ , o lema de Goursat implica que  $h(w)$  tende para infinito quando  $w$  tende para  $b_n$ , ao longo de um raio de  $B$ . Então  $b_n \notin B'$ , o que é absurdo. ■

Um exemplo de aplicação deste critério de holomorfia é o seguinte:

Seja  $a \in \mathbb{C}$ ,  $|a| > 1$ ; seja  $w \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Q}$ . Consideremos, usando a Proposição 5.7, a função  $f$ , holomorfa em  $B(0, 1)$ , definida por

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{-k}}{z - e^{ikw}}.$$

Uma vez que o conjunto  $\{e^{ikw}, k \geq 1\}$  é um conjunto fronteira bem distribuído de  $B(0, 1)$ , pois  $w \notin \pi\mathbb{Q}$ , pela Proposição 5.3, concluímos que  $B(0, 1)$  é domínio de holomorfia da função  $f$ .

Da Proposição 5.13 e do critério de holomorfia resulta imediatamente o:

**Teorema 5.15** (*Teorema da Existência*) *Para cada domínio  $G$  de  $\mathbb{C}$ , existe uma função  $f$  holomorfa em  $G$  tal que  $G$  é domínio de holomorfia de  $f$ . ■*

### 5.3 Conjuntos periféricos

Nesta secção definimos conjuntos periféricos, com vista à demonstração do resultado que estabelece que qualquer conjunto periférico de um domínio é o conjunto dos zeros de uma função holomorfa definida nesse domínio sendo este o domínio de holomorfia da função.

**Definição 5.16** *Um conjunto  $A$  localmente finito num domínio  $G$ , diz-se periférico em  $G$  se satisfaz o seguinte: se  $\widehat{G} \subset \mathbb{C}$  é um domínio e  $W$  é uma componente de  $G \cap \widehat{G}$ , então todo o ponto de  $\widehat{G} \cap \partial W$  é um ponto de acumulação de  $A \cap W$ .*

Resulta imediatamente da definição que se  $A$  é um conjunto periférico então o conjunto dos pontos de acumulação de  $A$  é a fronteira de  $G$ . No entanto, a afirmação recíproca não é verdadeira, conforme vemos no exemplo seguinte.

**Exemplo 5.17** *Consideremos novamente*

$$G = B(0, 2) \setminus \left\{ x + iy \in \mathbb{C} : x \in [-1, 1], y = \frac{1}{n} \vee y = 0, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Seja  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , em que  $A_n$  é uma sucessão de pontos de  $G$  com segunda coordenada maior que  $\frac{1}{n}$  e cujo conjunto de pontos de acumulação seja  $\{\frac{1}{n}\} \times [-1, 1]$ .

Assim,

$\forall q \in A_n$  com primeira coordenada racional e  $\forall k$  consideremos  $x_{n,q,k} \in G \cap B(q, \frac{1}{k}) \cap [-2, 2] \times ]\frac{1}{n}, 2[$ . Agora, podemos redefinir o conjunto  $A$  do seguinte modo:  $A = \{x_{n,q,k} : n, q, k \in \mathbb{N}\} \cup G'$ .

Donde resulta,  $A' = \partial G$  e  $A$  não é periférico.

Para mostrar que  $A$  não é periférico, basta considerar  $\widehat{G} = ]-1, 1[ \times ]-1, 1[$  e  $W = ]-1, 1[ \times ]-1, 0[$ .

Temos  $\widehat{G} \cap \partial W = ]-1, 1[ \times \{0\}$  e  $A \cap W = \emptyset$ , pelo que  $A$  não é periférico.

Da definição anterior resulta que se considerarmos  $G$  um domínio de  $\mathbb{C}$  tal que se  $x \in \partial G$  então existem bolas tão pequenas quanto se queira tal que a sua intersecção com  $G$  seja conexa e  $A$  um subconjunto de  $G$  cujos pontos de acumulação estão contidos na fronteira de  $G$ , então  $A$  é periférico se e só se o seu conjunto de pontos de acumulação é a fronteira de  $G$ .

Analogamente ao que acontece com os conjuntos fronteira bem distribuídos vamos mostrar que todo o domínio diferente de  $\mathbb{C}$  admite conjuntos periféricos. Começamos com um lema auxiliar.

**Lema 5.18** *Sejam  $G$  e  $\widehat{G}$  domínios de  $\mathbb{C}$ , e  $W$  uma componente de  $G \cap \widehat{G}$ . Então  $\widehat{G} \cap \partial W \subseteq \partial G$ . Se  $\widehat{G} \not\subseteq G$ , então  $\widehat{G} \cap \partial W$  é não vazio.*

**Demonstração.** Para a primeira parte do lema, seja  $q \in \widehat{G} \cap \partial W$ . Como  $\partial W \subset \overline{W} \subset \overline{G}$  temos que  $q \in \overline{G}$ . Se  $q \in G$  então  $q \in W$  pois  $q \in \widehat{G}$ . Mas, como  $W$  é aberto e, por hipótese,  $q \in \partial W$ , resulta que  $q \notin W$ . Logo,  $q \notin G$ . Assim,  $q \in \overline{G} \setminus G = \partial G$ .

Para a segunda parte, suponhamos que  $\widehat{G} \not\subseteq G$ . Se  $\widehat{G} \setminus W = \emptyset$ , então  $\widehat{G} = W$ . Como  $W \subseteq G$ , teríamos  $\widehat{G} \subseteq G$ , o que contraria a hipótese. Logo,  $\widehat{G} \setminus W \neq \emptyset$ . Por outro lado,  $\widehat{G} = W \cup (\widehat{G} \setminus W)$ . Como  $W$  é aberto e  $\widehat{G}$  é conexo,  $\widehat{G} \setminus W$  não é aberto em  $\mathbb{C}$ . Seja  $p \in \widehat{G} \setminus W$  tal que  $p \notin \text{int}(\widehat{G} \setminus W)$ . Então existe  $r > 0$  tal que  $B(p, r) \not\subseteq \widehat{G} \setminus W$ . Assim,  $B(p, r) \cap W \neq \emptyset$  e  $B(p, r) \cap (\widehat{G} \setminus W) \neq \emptyset$ . Daqui e do facto de  $p \in \widehat{G} \setminus W$ , vem  $p \in \partial W$ . Portanto  $p \in \widehat{G} \cap \partial W$ . ■



**Proposição 5.19** *Seja  $G$  um domínio. Se  $G \neq \mathbb{C}$ , então existem conjuntos periféricos em  $G$ .*

**Demonstração.** Consideremos uma sucessão  $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\{\zeta_n : n \in \mathbb{N}\} = (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \cap G$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  escolhamos, no maior disco centrado em  $\zeta_n$  e contido em  $G$ , um ponto  $a_n$  tal que  $d(a_n, \partial G) < \frac{1}{n}$  e seja  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ .

Como para cada conjunto compacto  $K \subset G$ ,  $d(K, \partial G) > 0$ , o conjunto  $A \cap K$  é finito; portanto  $A$  é localmente finito em  $G$ .

Seja  $\widehat{G} \subset \mathbb{C}$  um domínio,  $W$  uma componente de  $G \cap \widehat{G}$  e  $p \in \widehat{G} \cap \partial W$ . Pelo lema anterior,  $p \notin G$ . Então, para cada  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(p, \varepsilon) \subset \widehat{G}$ , existe um ponto  $\zeta_k \in B(p, \frac{1}{2}\varepsilon) \cap W$ . A maior bola  $B(\zeta_k, \delta)$ ,  $0 < \delta < \varepsilon$ , está contida em  $B(p, \varepsilon)$ , pois  $p \notin G$ .

Por outro lado,  $B(\zeta_k, \delta)$  é um conjunto conexo contido em  $G \cap \widehat{G}$ . Então  $B(\zeta_k, \delta) \subseteq W$ , por definição de  $W$ .

Como  $\zeta_k \in B(\zeta_k, \delta) \subseteq G \cap \widehat{G}$ , resulta que a bola  $B(\zeta_k, \delta)$  está contida na componente conexa de  $G \cap \widehat{G}$  que contém  $\zeta_k$ .

Para o ponto  $a_k \in B(\zeta_k, \delta)$ ,  $a_k \in B(p, \varepsilon) \cap A \cap W$ . Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário conclui-se que o conjunto  $A$  é periférico em  $G$ . ■

O conceito de conjunto periférico permite-nos obter o segundo critério para domínios de holomorfia.

**Proposição 5.20** (*Critério de holomorfia*) *Seja  $G$  um domínio e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa. Se o conjunto dos zeros de  $f$  é periférico em  $G$ , então  $G$  é domínio de holomorfia de  $f$ .*

**Demonstração.** Vamos mostrar que cada ponto da fronteira de  $G$  é um ponto singular de  $f$ . Por absurdo, suponhamos que existe um ponto  $p \in \partial G$ , uma bola  $U$  de centro  $p$ , e uma função  $g$  holomorfa em  $U$  tal que  $f|_W = g|_W$  na componente  $W$  de  $G \cap U$  com  $p \in \partial W$ . Como o conjunto dos zeros de  $f$ ,  $Z(f)$ , é periférico em  $G$ ,  $p$  é um ponto de acumulação de  $Z(f) \cap W$ . Como  $Z(f) \cap W = Z(g) \cap W$ , o teorema dos zeros isolados implica que  $g \equiv 0$ . Logo também  $f \equiv 0$ , o que é impossível, pois  $Z(f)$  é um conjunto periférico, portanto localmente finito em  $G$ . ■

**Teorema 5.21** (Teorema da Existência) Para cada domínio  $G$  em  $\mathbb{C}$  e cada conjunto periférico  $A$  em  $G$ , existe uma função  $f$  holomorfa em  $G$  tal que  $Z(f) = A$ . Além disso,  $G$  é domínio de holomorfia de qualquer função  $f$  nessas condições.

**Demonstração.** Imediata a partir das duas últimas proposições e do teorema de Weierstrass. ■

Terminamos este capítulo apresentando exemplos de aplicação dos resultados anteriores mostrando que  $B(0, 1)$  é domínio de holomorfia de certas funções.

**Exemplo 5.22**

1. O conjunto dos zeros da função  $f: B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  é um conjunto periférico de  $B(0, 1)$ . Em particular,  $B(0, 1)$  é domínio de holomorfia da função  $f$ .

$$z \mapsto \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{n+1}{n}\right)z\right)^n$$

2. A bola  $B(0, 1)$  é domínio de holomorfia de  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ , conforme provámos no início deste capítulo.

3. O domínio de holomorfia da função  $f: B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  é a bola  $B(0, 1)$ .

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^{1+in}-1}$$

Para o demonstrar basta usar o primeiro critério de holomorfia, notando que, se  $a_k = -e^{-k}b_k$ ,  $b_k = e^{ik}$ ,  $z \in B(0, 1)$  então

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z - b_k} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{b_k}\right)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k^{n+1}}\right) z^n = f(z).$$

4. Consideremos a função  $f$  holomorfa em  $B(0, 1)$  definida por

$$f(z) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - z^{2^k}).$$

Para mostrar que  $B(0, 1)$  é domínio de holomorfia, basta mostrar que se  $n \in \mathbb{N}$  e  $\alpha$  é uma raiz índice  $2^n$  da unidade então  $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t\alpha) = 0$ .

Como

$$\begin{aligned} |f(t\alpha)| &= \left| \prod_{k=0}^{n-1} (1 - (t\alpha)^{2^k}) \right| |f((t\alpha)^{2^n})| \\ &\leq 2^n |f(t^{2^n})| \\ &\leq 2^n (1 - t^{2^n}) \end{aligned}$$

concluimos que  $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t\alpha) = 0$ .

## Bibliografia

- [1] Dettman, John W., “*Applied Complex Variables*”, Dover Publications, Inc., New York, 1984.
- [2] Gamelin, Theodore W., “*Complex Analysis*”, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [3] González, Mario O., “*Complex Analysis: selected topics*”, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.
- [4] González, Mario O., “*Classical Complex Analysis*”, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.
- [5] Hahn, Liang-Shin e Epstein, Bernard, “*Classical Complex Analysis*”, Jones and Bartlet Publishers, Boston, 1996.
- [6] Jones, Gareth A. e Singerman, David, “*Complex Functions: An algebraic and geometric viewpoint*”, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [7] Moore, Theral O. e Hadlock, Edwin H. “*Complex Analysis*”, Series in Pure Mathematics, 9. World Scientific Publishing Co., New York, 1991.
- [8] Parreau, Michel, “*Fonction d’une Variable Complexe*”, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1993.
- [9] Remmert, Reinhold, “*Theory of Complex Functions*”, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [10] Remmert, Reinhold, “*Classical Topics in Complex Functions Theory*”, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [11] Rudin, Walter, “*Real and complex analysis*”, McGraw-Hill, New York, 3.<sup>a</sup> edição, 1987.
- [12] Stewart, Ian e Tall, David, “*Complex Analysis*”, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.