http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2015v10n2p76

O Contributo da Discussão em Grupo para Superar Dificuldades Sentidas pelos Alunos na Aprendizagem da Geometria

The Contribution of Discussion Group to Overcome Difficulties Felt by Students in Learning Geometry

Maria Gorete Pires Branco
gorete.branco@sapo.pt

Maria Helena Martinho
mhm@ie.uminho.pt

Resumo

Neste artigo procura-se compreender quais os contributos da discussão em pequeno e em grande grupo, para superar dificuldades sentidas pelos alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade em Geometria. Optou-se por uma metodologia de natureza qualitativa tendo por base o paradigma descritivo e interpretativo, seguindo a modalidade de estudo de caso. Os participantes foram dois grupos de alunos de uma turma do 10.º ano (com uma média de idade de 15 anos). Os dados foram recolhidos através da observação participante ativa, da análise documental e de entrevistas de grupo. Os resultados da experiência sugerem que a discussão em pequeno grupo ajudou os alunos a superar dificuldades na aprendizagem da Geometria, em situações que envolviam conceitos e raciocínios matemáticos. Contudo, a discussão em grande grupo tornou-se fundamental na maior parte das situações, cujos raciocínios se revelavam mais complexos.

Palavras-chave: Dificuldades na aprendizagem da Geometria; Discussão em grupo.

Abstract

This article seeks to understand the contributions which the discussion in small or large group, to overcome difficulties experienced by students of 10th year of schooling in Geometry. We opted for a qualitative methodology based on the descriptive and interpretative paradigm, following the case study mode. The participants were two groups of students in a 10th grade class (on average 15 years old). The data was collected through participant observation, documentary analysis and group interviews. The results of the experiment suggest that the small group discussion helped students overcome difficulties in learning geometry in situations involving concepts and mathematical reasoning. However, the discussion in large group became instrumental in most situations, whose reasoning is revealed more complex.

Keywords: Difficulties in learning Geometry; Discussion in group.

Introdução

A motivação dos alunos e as suas atitudes face à Geometria, assim como as dificuldades e o insucesso dos mesmos na aprendizagem deste tema, continuam a preocupar professores e investigadores. A Geometria é, no entanto, uma área particularmente propícia para um ensino baseado na resolução de situações de natureza exploratória e investigativa e em atividades de construção, de manipulação e de resolução de problemas (Abrantes, 1999). Estas situações fornecem um bom contexto para que os alunos compreendam a necessidade de justificar as suas afirmações ao expressar o seu raciocínio junto do professor e dos colegas (Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira & Varandas, 1999).

A Associação de Professores de Matemática (APM, 1998, 2009) e o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1991, 2007) recomendam, que os alunos estejam envolvidos em atividades que promovam o desenvolvimento do pensamento matemático, que lhes permitam colocar e responder a questões como: "Porquê?"; "O que acontece se…"; "Não existe outro processo…?" e não apenas na aprendizagem mecânica de regras e procedimentos. E salientam que o recurso à resolução e formulação de problemas e a realização de tarefas de natureza exploratória e de investigação, pelo dinamismo que introduzem na aula, contribuem de forma positiva, para o desenvolvimento nos alunos de capacidades de raciocínio, de comunicação e argumentação e de iniciativa.

As tarefas de natureza exploratória e investigativa representam boas oportunidades para pôr os alunos a debater questões, a expor os seus raciocínios, a estabelecer conjeturas, a usar e aplicar a Matemática. O trabalho com este tipo de tarefas implica processos de descoberta que são, de acordo com alguns autores, potenciados pelo trabalho de grupo. A investigação tem sugerido que o trabalho de grupo pode ajudar a promover mais reflexão e mais discussão e que pode ter efeitos positivos na compreensão de conceitos, na comunicação e na motivação dos alunos (Matos & Serrazina, 1996).

Neste artigo, pretende-se compreender como é que os alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade, trabalhando em pequenos grupos e realizando atividades com tarefas de exploração e investigação superam dificuldades na aprendizagem da Geometria. Com este propósito estabeleceu-se a seguinte questão de investigação: Quais os contributos da discussão em pequeno grupo e em grande grupo para superar dificuldades sentidas pelos alunos de uma turma do 10.º ano, em Geometria?

A aprendizagem da Geometria e as dificuldades dos alunos

A Geometria é por excelência um tema formativo, que permite ao aluno trabalhar simultaneamente com números, calculando ou relacionando áreas e volumes, trabalhar com proporções na semelhança de figuras ou trabalhar com expressões algébricas.

Vários investigadores, como por exemplo, Afonso (2002), Hoffer (1981) e Junqueira (1995) consideram que a aprendizagem da Geometria, através da resolução de problemas não rotineiros, pode propiciar o desenvolvimento de múltiplas capacidades, apontadas como fundamentais para qualquer pessoa e, em particular, para todos os alunos, sendo a mais óbvia a visualização espacial. No entanto, o insucesso dos alunos na aprendizagem da Geometria é reconhecido em vários estudos avaliativos como o SIAEP (Second International Assessment of Educational Progress), o TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) e, mais recentemente, o PISA (Programme for International Student Assessment). A par do insucesso escolar, estão as inúmeras dificuldades que os alunos revelam na aprendizagem da Geometria, até mesmo na aprendizagem de noções geométricas básicas.

Diversos investigadores, como por exemplo, Fischbein (1993), Parzysz (1988, 1991) e Presmeg (1986, 1992), têm-se debruçado sobre a função das imagens mentais na forma como resolvemos problemas, nas dificuldades percetuais dos alunos na compreensão de desenhos e figuras tridimensionais e na interpretação de representações visuais de conceitos matemáticos.

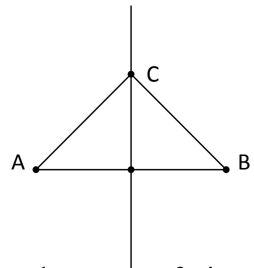
Quando expressamos ou comunicamos raciocínios matemáticos, geralmente, não o fazemos apresentando os objetos ou conceitos, utilizamos expressões, gráficos, desenhos ou símbolos, que de algum modo os representam, ou seja, servimo-nos de representações externas. Segundo Parzysz (1991) os desenhos desempenham funções importantes em Geometria: ilustram definições ou teoremas; resumem um complexo conjunto de informações e ajudam na formulação de conjeturas. Contudo, os alunos revelam dificuldades em entender o seu uso, quer sendo utilizados para representar classes de formas, quer para representar relações geométricas (Battista, 2007). Muitas vezes, atribuem características de um desenho ao objeto geométrico que representa (Parzysz, 1988), não conseguem perceber que os desenhos não representam necessariamente toda a informação que é conhecida sobre o objeto geométrico.

A utilização de um caso particular, de um desenho, pode prender a atenção dos alunos para detalhes irrelevantes ou até conduzir a dados que não são válidos (Presmeg, 1986). Os desenhos representam uma classe de objetos, servindo como modelos, no entanto cada desenho tem características próprias e não representativas da classe (Yerushalmy & Chazan, 1990). Presmeg (1986) sublinha que o recurso a um desenho padrão, na representação de um conceito, pode induzir a um pensamento inflexível nos alunos que dificulta o reconhecimento desse conceito num desenho não estandardizado. Os alunos podem ter dificuldades em identificar triângulos retângulos fora do padrão estabelecido nas orientações que lhe foram dadas, ou em reconhecer triângulos isósceles se a base não estiver na posição horizontal em relação à folha de papel. Presmeg (1992) salienta que os desenhos padrão, ou protótipos, podem ser essenciais para o raciocínio matemático na resolução de problemas, no entanto, a imagem mental de um protótipo pode acarretar dificuldades. A autora considera que as dificuldades associadas a imagens protótipos podem levar ao não reconhecimento de uma figura quando ela não se assemelha com um protótipo.

É de salientar que os termos desenho padrão e protótipo são usados neste trabalho, sem distinção de significado, por se entender que ambos são exemplos privilegiados que a investigação tem mostrado constituírem modelos de conceitos geométricos.

Junqueira (1995) no seu estudo com alunos do 9.º ano, sobre a aprendizagem da Geometria em Ambientes Geométricos Dinâmicos (AGD), verificou que uma das principais dificuldades dos alunos na justificação das construções foi de natureza visual. Refere que "por vezes, os alunos associavam as propriedades geométricas a exemplos protótipos das figuras, fixavam-se neles e não reconheciam a propriedade noutras situações" (p. 192). Por exemplo, os alunos associavam a propriedade da equidistância dos pontos da mediatriz de um segmento de reta aos seus extremos, à representação do triângulo isósceles na posição que mostra a figura 1.

Figura 1: A posição da representação do triângulo isósceles que os alunos associam à propriedade da equidistância dos pontos da mediatriz de um segmento de reta aos seus extremos.

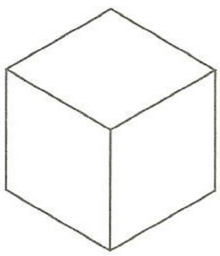


Fischbein (1993) salienta que quando nos referimos a objetos geométricos temos que considerar três categorias de entidades mentais: a definição, a imagem (com base na experiência percetiva-sensorial, como a imagem de um desenho) e o conceito figural. O conceito figural é uma entidade mental que possui simultaneamente componentes conceituais e figurais. A componente conceitual expressa propriedades que caracterizam uma determinada classe de objetos, com base nas suas características comuns. A componente figural corresponde à imagem mental que associamos ao conceito, que no caso da Geometria pode ser "controlada e manipulada", através de regras lógicas e procedimentos no âmbito de um determinado sistema axiomático. A harmonia entre estas duas componentes é que determina a noção correta do objeto geométrico. Vários estudos têm mostrado que as relações entre estas duas componentes não são fáceis de organizar na mente dos alunos (e.g., Fischbein, 1993; Mariotti, 1995).

Fischbein (1993) relata uma experiência em que é apresentado aos alunos o seguinte teorema: [ABCD] é um quadrilátero, P, Q, R e S os pontos médios dos seus lados, então [PQRS] é um paralelogramo. Foi feita a demonstração do teorema e com o objetivo de verificar se os alunos compreenderam que a prova garante a validade do teorema, foram colocadas várias questões. Uma delas era: “ V é um cético, ele acha que temos de verificar para pelo menos uma centena de quadriláteros, a fim de ter a certeza de que [PQRS] é um paralelogramo. Qual é a sua opinião? Justifique a sua resposta.” (p. 150). Só 10% dos alunos (N=396) rejeitou a necessidade de novas verificações empíricas. Alguns alunos referiram a necessidade de verificar para várias categorias de quadriláteros. O autor sublinha que embora os alunos conheçam a definição de paralelogramo, pode tornar-se difícil ver as várias formas correspondentes a essa definição. Um retângulo, um paralelogramo obliquângulo ou um quadrado, são figurativamente tão diferentes que o efeito do conceito simplesmente desaparece. A interpretação da componente figural de um objeto geométrico deve permanecer sujeita às restrições formais, e esta ideia é muitas vezes esquecida pelos alunos. Fischbein sublinha que a dificuldade em manipular conceitos figurais, isto é, a tendência em negligenciar a definição pela pressão de restrições das figuras é um dos maiores obstáculos na aprendizagem da Geometria.

French (2004) salienta a dificuldade na interpretação de desenhos bidimensionais de objetos tridimensionais. Um exemplo simples surge com a representação típica de um cubo como o da figura 2, que pode ser visto pelos alunos como uma imagem bidimensional de três losangos formando um hexágono.

Figura 2: Representação de um cubo.



Algumas das representações bidimensionais de sólidos, por exemplo representadas em perspetiva, mantêm a informação do aspeto visual, mas perdem a correspondente à parte oculta, o que muitas vezes, coloca dificuldades aos alunos em compreender a representação plana de objetos tridimensionais (Castro & Castro, 1997).

Junqueira (1995) aponta ainda as dificuldades dos alunos em produzir construções geométricas – conjunto de objetos ligados pelas suas relações que podem ser visualizados no ecrã do computador. Principalmente, em descobrir processos de construção resistente, ou seja, uma "construção em que a aparência da figura que se pretende representar resiste à manipulação dos seus objetos" (p. 70). A autora salienta que até ao fim da intervenção didática "um número significativo de alunos continuou a realizar construções que se desmanchavam" (p. 148). Essas dificuldades resultavam: (i) do facto de alguns alunos não compreenderem a necessidade de obter construções resistentes, baseando-se na aparência visual e não na análise das propriedades do objeto geométrico; (ii) da falta de disponibilidade que alguns alunos manifestavam para procurarem soluções resistentes e (iii) do privilégio que os alunos davam a casos particulares de uma construção. Junqueira salienta ainda, que muitas das construções apresentadas pelos alunos eram exemplos protótipos das figuras geométricas. Os alunos consideravam essas construções visivelmente mais agradáveis e para alguns significava estarem mais corretas.

O trabalho em grupo e as interações entre os alunos

A aprendizagem da Matemática é favorecida quando o ambiente em que é desenvolvida é construído por uma comunidade de pessoas que colaboram entre si, que respeitam e discutem as ideias dos outros, de modo a dar sentido àquilo que se faz e à Matemática. Assim, e de acordo com o NCTM (1994), os alunos devem ser encorajados a ouvir e a questionar as ideias dos colegas e a explicar e defender as suas, face ao desafio colocado pelos outros.

Também as recomendações da APM (1998) e do relatório *Mathematics Counts* (Cockcroft, 1982) sugerem que se diversifiquem as formas de interação em aula, proporcionando oportunidades de discussão em grupo. Uma vez que estas permitem aos alunos adquirir uma certa prática para enfrentar novos problemas ou ideias matemáticas, explicando e escrevendo os resultados e comunicando as suas observações e soluções, primeiro aos colegas em pequeno grupo e depois à turma e ao professor.

O trabalho em pequeno grupo. A investigação tem revelado que o trabalho em pequeno grupo pode promover mais reflexão e mais discussão entre os alunos, melhorar a comunicação, aumentar a compreensão matemática e a motivação dos alunos. Johnson e Johnson (1990, citados em Abrantes, 1994) com base na investigação, sobretudo na meta-análise de numerosos estudos que têm comparado os resultados de métodos cooperativos (métodos em que os alunos trabalham em pequeno grupo) com outros métodos de ensino, apontam seis razões para a promoção do trabalho de grupo nas aulas de Matemática: (i) obtêm-se melhores resultados na resolução de problemas, no uso de estratégias de raciocínio e na geração de novas ideias; (ii) fomenta a participação ativa dos alunos, ao estimular o desafio intelectual e a sua curiosidade através da discussão; (iii) a resolução de problemas em Matemática é uma atividade *interpessoal* que implica falar, explicar e discutir e, em pequeno grupo, os alunos sentem-se mais à vontade para o fazer do que perante a turma toda; (iv) promove a interação entre os alunos mais do que a simples recomendação de que devem discutir uns com os outros; (v) permite que os alunos adquiram maior confiança nas suas capacidades matemáticas individuais e (vi) estimula a motivação, uma vez que em situação de trabalho cooperativo, os alunos tendem a estar mais intrinsecamente motivados para a aprendizagem da Matemática.

Também Boaler (2006) destaca a importância do trabalho de grupo nas aulas de Matemática. Num estudo longitudinal (de 4 anos) comparou os resultados dos alunos de três escolas secundárias dos Estados Unidos da América. Numa foi implementada uma reforma, que a autora chama de abordagem mista, em que os alunos trabalhavam em grupos heterogéneos e nas outras duas foi usado um método de ensino tradicional. Na primeira havia um maior nível de diversidade cultural em termos étnicos e os alunos no início do estudo apresentavam níveis significativamente mais baixos em termos de realização matemática, do que os das outras duas escolas. A autora salienta que a abordagem mista proporcionou um elevado nível de aprendizagem para os alunos, ao fim de dois anos, obtinham um nível mais elevado de realização matemática comparativamente com os das outras duas escolas. Os alunos ficaram com uma visão mais positiva da Matemática e aprenderam a agir de forma mais equitativa na sala de aula.

Os alunos ao trabalharem em grupo têm mais oportunidade, de explicar e receber explicações, de discutir e resolver problemas, criar soluções, fornecer ideias e ajudar-se uns aos outros, e por isso, obter maior ‘conquista’ tanto em termos de realização matemática, como em termos de uma atitude mais positiva em relação à Matemática. Estas são razões apontadas por Zakaria, Chin e Dual (2010) para os resultados obtidos num estudo que comparou o desempenho matemático de 82 alunos, assim como a sua atitude face à Matemática, 44 dos quais trabalharam num ambiente de aprendizagem cooperativa e os restantes fizeram parte do grupo de controle. Os autores especificam que a aprendizagem cooperativa enfatiza a interação social e propicia um ambiente em que os alunos se sentem mais à vontade para participar e pedir ajuda.

A investigação indica que o benefício das interações nas aulas de Matemática, não se verifica apenas para os alunos que interagem com colegas mais competentes, mas também estes beneficia pelo facto de interagirem com colegas menos competente, “pois o próprio processo interativo permite uma co construção de saberes” (César, 2000, p. 6). A ajuda aos colegas pode permitir, aos melhores alunos, observar processos conhecidos e refletir sobre eles e os alunos com dificuldades podem beneficiar com a ajuda e explicações recebidas, as quais poderão contribuir para a clarificação e compreensão das ideias matemáticas (Matos & Serrazina, 1996). Mas, para que a explicação recebida contribua para uma aprendizagem efetiva, Weeb (1989) aponta algumas condições: (i) se o aluno que recebe a explicação precisa de ajuda; (ii) se a explicação é relevante e está a um nível de elaboração que corresponda ao nível de ajuda necessária (iii) se é dada no momento em que é precisa; (iv) se a explicação é compreendida; (v) se o aluno tem oportunidade de usar a explicação para resolver o problema e (vi) se o aluno usa de facto essa oportunidade. A autora considera que os alunos quando trabalham em pequeno grupo estão em posição de satisfazer pelo menos algumas das condições mencionadas para fornecer ajuda satisfatória aos colegas e indica algumas razões: (1) estão a trabalhar uns com os outros na mesma tarefa e por isso podem entender melhor do que o professor o que os colegas não compreendem; (2) partilham o mesmo nível de linguagem, e assim podem traduzir o vocabulário mais difícil de modo a que os colegas o entendam; (3) podem fornecer ajuda no momento em que surge a dificuldade.

A discussão no grupo turma é um modo de trabalho indispensável para apresentar, discutir e refletir sobre os resultados de tarefas realizadas em pequeno grupo. A discussão constitui, segundo Ponte (2005), um aspeto da comunicação que surge na aula de Matemática. A sua característica mais relevante é pressupor a interação entre os diversos intervenientes na aula, que apresentam as suas ideias e se questionam uns aos outros. O controlo passa sucessivamente de um interveniente para outro e “o registo altera-se entre o afirmativo e o interrogativo” (Ponte & Serrazina, 2000, p. 121).

Num ambiente de aprendizagem baseado na discussão, os alunos devem envolver-se e participar ativamente em conversas produtivas que lhes permitam desenvolver cooperativamente as ideias e o pensamento matemático. Essa participação facilita-lhes a aprendizagem (Turner & Patrick, 2004) e proporciona-lhes oportunidades de conhecer novas estratégias para explicarem o seu raciocínio.

Vários estudos têm mostrado que a discussão no grupo turma, após o trabalho em pequeno grupo é muito vantajosa para a aprendizagem dos alunos. No seu estudo Junqueira (1995) concluiu que a procura de argumentos por parte dos alunos para esclarecer e convencer os colegas sobre as conclusões a que tinham chegado levou muitos deles a clarificar e aprofundar as suas ideias, e a apresentá-las de uma forma mais organizada. Conclusão semelhante é apontada por Carvalho (2001) numa investigação que se centrou no estudo das interações entre pares de alunos do 7.º ano, na aula de Matemática. A autora refere que a discussão entre os vários grupos permitiu aos alunos comparar pontos de vista diferentes daqueles que tinham e clarificar ou reformular argumentos que tinham utilizado em pequeno grupo. Carvalho específica, que "a reflexão conjunta originava momentos de conflito sociocognitivo e de dinâmica de co elaboração coletiva que obrigava os diferentes sujeitos, por vezes, a reconstruir uma determinada estratégia, a enriquecer um argumento, a descobrir ou mesmo a refinar uma solução" (p. 283).

Também Santos (2011) no seu estudo, com alunos de uma turma do 7.º ano, que pretendia analisar a forma como os mesmos apresentavam as suas resoluções e comentavam as dos colegas, salienta que a discussão no grupo turma proporcionou o confronto de ideias entre os alunos, serviu para ampliar os seus conhecimentos, para desenvolver a capacidade de argumentação, para completar os seus raciocínios e detetar a utilização de raciocínios errados.

Rodrigues, Menezes e Ponte (2014) sublinham que os momentos de discussão no grupo turma contribuem fortemente para a aprendizagem dos alunos, na medida em que colocam em jogo um conjunto de interações sociais e o processo de negociação de significados matemáticos. Estes momentos impõem uma maior formalização do raciocínio e incitam os alunos a uma postura mais madura na interação com os colegas e com o professor. Nestes momentos os alunos são incentivados a apresentar as suas soluções e as estratégias usadas para a resolução das tarefas, bem como a questionar as soluções e estratégias dos colegas, seja porque não as compreendem, ou porque não as consideram matematicamente válidas (Ponte, Mata-Pereira & Quaresma, 2013), promovendo, assim o desenvolvimento da capacidade de comunicação e argumentação, a autonomia e o espírito crítico.

Metodologia

Opções metodológicas. Atendendo ao objetivo da experiência, optou-se por uma metodologia de natureza qualitativa, pois tal como afirmam Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos através do contacto direto do investigador com o fenómeno no seu contexto natural. Como *design* de investigação, optou-se pelo estudo de caso interpretativo. A opção por estudos de caso prendeu-se com o facto de se tratar de uma investigação de natureza empírica, que se baseou fortemente no trabalho de campo, ocorrendo em contexto real e que se preocupou principalmente com as questões do "como" e do "porquê", procurando tirar partido de múltiplas fontes de evidência, como documentos, observação e entrevistas (Yin, 2009).

Participantes. A investigação envolveu uma turma do 10.º ano de escolaridade constituída por 20 alunos, com uma média de idade de 15 anos, incidindo de uma forma particular em dois grupos de alunos, cada um com três elementos. O grupo I formado por Diana, Francisca e Matilde e o grupo II constituído por Luís, Nelson e Pedro.

As três alunas do grupo I estudaram juntas desde o primeiro ciclo do ensino básico, no entanto, esta foi a primeira vez que trabalharam no mesmo grupo. Diana era uma aluna reservada e insegura, revelava algumas dificuldades em argumentar perante as refutações dos colegas e não gostava muito de participar na discussão com a turma, por não se sentir muito à vontade. Considerava a Geometria um tema difícil. Francisca era uma aluna empenhada, organizada e responsável. Era participativa, quer no trabalho em pequeno grupo, quer na discussão com a turma e tinha um poder de argumentação bastante razoável. Referiu ter algumas dificuldades na aprendizagem da Geometria, por envolver muitos conceitos. Matilde era uma aluna muito aplicada e com bons resultados escolares. Nas aulas, assumia uma atitude de interesse, tinha um bom poder de argumentação e era colaborativa e participativa nos trabalhos de grupo. A Geometria não era a matéria favorita de Matilde, no entanto, revelava não ter muitas dificuldades na sua aprendizagem.

Os alunos do grupo II nunca tinham trabalhado com tarefas de exploração e investigação. Luís era um aluno interessado e empenhado, perspicaz e participativo. Considerava a Geometria uma matéria importante e gostava de a estudar. Nelson era empenhado, mas um pouco distraído, era participativo nas discussões com a turma e colaborativo nos trabalhos de grupo e tinha um poder de argumentação razoável, embora apresentasse algumas dificuldades em termos de comunicação escrita. Gostava de estudar Geometria. Pedro era um aluno com grande sentido de humor, muito distraído, pouco organizado e com muita dificuldade em termos de comunicação escrita. Não gostava de estudar Geometria, por não ter jeito para desenhar.

Contexto pedagógico. A experiência de ensino decorreu em aulas de 90 minutos da disciplina da Matemática A. Os alunos realizaram, em grupo, várias tarefas de natureza exploratória e investigativa. Neste artigo, serão objeto de análise duas dessas tarefas: *Investigação com Quadriláteros* e *A Stella Octangula* (Anexo I). A primeira foi realizada com auxílio do programa de geometria dinâmica *Geometer's Sketchpad* (*GSP*) e tinha como objetivo que os alunos investigassem o tipo de quadrilátero que se obtém quando se unem os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero inicial qualquer e que estabelecessem relações entre os dois quadriláteros. Foi adaptada de Coxford, Burks, Giamati e Jonik (1993). Com a segunda tarefa pretendia-se que os alunos estabelecessem relações entre o cubo, a *stella* e um tetraedro pequeno que a compõe. Foi elaborada com base em propostas de Loureiro, Oliveira, Ralha e Bastos (1997) e de Veloso (1998).

As aulas em que foram realizadas as tarefas compreenderam três momentos distintos: (i) a apresentação da tarefa pela investigadora; (ii) desenvolvimento da tarefa pelos alunos em pequeno grupo e (iii) discussão de resultados no grupo turma.

Métodos de recolha de dados. A recolha de dados foi realizada através da observação, de entrevistas e da análise documental. Estas são segundo Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (2005) as técnicas que estão normalmente associadas à investigação qualitativa.

A observação foi participante ativa, uma vez que o papel de observador foi desempenhado pela investigadora que interagiu com os indivíduos sujeitos a observação com a finalidade de recolher dados sobre as suas ações, opiniões e perspetivas. Ocorreu no contexto natural onde se desenvolveu a investigação e foi efetuada sobre a forma de registo escrito de notas pela investigadora, após a interação com os alunos ou a observação da interação entre os alunos e complementada com o registo áudio e vídeo, de modo a obter informações mais reais e completas da dinâmica da sala de aula.

No final da experiência, realizou-se uma entrevista semiestruturada a cada um dos dois grupos que são objeto de estudo de caso, com o objetivo de esclarecer alguns pontos do trabalho realizado e obter informações mais detalhadas sobre a opinião dos alunos em relação à experiência. Esta entrevista, embora obedecendo a um guião (Anexo II) previamente preparado, de perguntas abertas, foi flexível permitindo uma recolha de dados num ambiente natural de conversa, deixando os participantes falar livremente sobre os seus pontos de vista.

Recorreu-se, ainda, à análise de documentos escritos produzidos pelos alunos. Este foi um meio para obter dados mais significativos, sobre a mobilização de conhecimentos, a compreensão de processos usados pelos alunos na realização das tarefas e sobre as dificuldades sentidas pelos mesmos. Assim, foi pedido a um responsável de cada grupo para no fim de cada tarefa entregar a resolução à investigadora. No final de cada tarefa foi, ainda, solicitado aos alunos para preencherem um ficha de reflexão individual sobre a mesma

(Anexo III), a fim de se obterem dados mais concretos sobre a opinião de cada aluno relativamente às dificuldades sentidas na realização da tarefa e ao modo como as ultrapassou.

Análise de dados. A análise de dados foi realizada em duas fases. A primeira ocorreu ainda durante a recolha dos dados, foi realizada a partir do visionamento das gravações vídeo de cada aula, compatibilizando-as com as gravações áudio e da transcrição integral das mesmas. Durante a transcrição, foram registados alguns comentários sobre o que foi observado e tomadas notas que referenciavam episódios mais importantes. Na segunda fase, procedeu-se a uma nova leitura de todo o material existente referente aos grupos-caso e procuraram-se regularidades e padrões para se elaborar uma lista de codificação/categorização, que fosse ao encontro do objetivo de investigação.

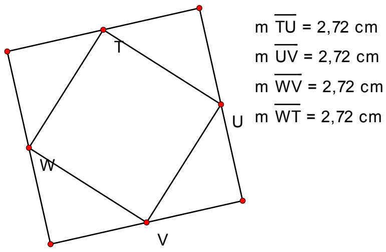
A apresentação dos dados foi, assim, efetuada através de um sistema de categorias que emergiu dos próprios dados e teve por base o referencial teórico. A estrutura adotada compreende três categorias: Uso de desenhos; Construção de polígonos; Visualização. Tendo sido consideradas, para além das notas de registo da investigadora, as transcrições das gravações das aulas e das entrevistas e as produções dos alunos relativas ao trabalho desenvolvido, às dificuldades sentidas e à forma como foram superadas.

Resultados

Uso de desenhos

A particularidade dos desenhos e os exemplos protótipos de figuras geométricas levantaram algumas dificuldades às alunas do grupo I, aquando da identificação de determinados polígonos que construíram. Por exemplo, na tarefa *Investigação com Quadriláteros* as alunas construíram um quadrado inicial com o auxílio do GSP e, em seguida, o quadrilátero que se obtém unindo os pontos médios dos lados consecutivos desse quadrado. Tendo a construção ficado representada como mostra a figura 3.

Figura 3: Construção feita pelo grupo e as medidas dos lados do quadrado [WTUV].



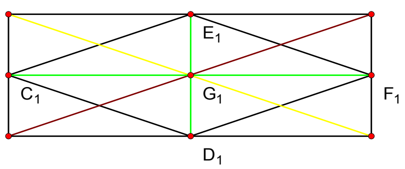
Depois de feita a construção, Diana não identificou o quadrilátero inscrito como um quadrado, como se pode observar pela transcrição seguinte:

> Diana: Parece um losango.
>
> Francisca: Vamos tirar as medidas.
>
> Diana: É, são iguais.
>
> Matilde: Por serem iguais também pode ser um quadrado.
>
> Diana: Sim, mas olha para a posição, olhem mesmo arrastando.
>
> Matilde: Não é. Então tira as medidas dos ângulos.
>
> Diana: São todos de 90º, é um quadrado.
>
> Matilde: E vê-se também se traçares as diagonais, vão ser iguais. Não podes pensar que os quadrados são sempre assim direitinhos.
>
> Francisca: Se o imaginarmos direito vê-se que é um quadrado.
>
> Diana: Tens razão, mas parecia-me. Agora traçamos as diagonais, não é?

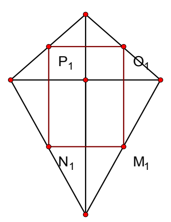
Diana estava com dificuldade em reconhecer o quadrado por este não se assemelhar a um exemplo protótipo, como aliás aconteceu com alunos de outros grupos. A aluna apesar de evidenciar conhecer as propriedades do quadrado, identificou o quadrilátero através do seu aspeto figural. Verificando-se um desequilíbrio entre a componente conceitual e figural do objeto geométrico. A sugestão de Matilde para tirar "as medidas dos ângulos" ajudou Diana a entender que se tratava de um quadrado, foi importante verificar que a amplitude dos ângulos internos era de 90º.

Ainda na mesma tarefa, as alunas ao investigarem os quadriláteros que se obtêm unindo os pontos médios dos lados consecutivos, para os casos particulares de quadriláteros, depois da construção e da identificação do quadrilátero inscrito no quadrilátero inicial verificaram se o mesmo era um paralelogramo. Por exemplo, para o caso do quadrilátero inicial ser um retângulo ou um papagaio como mostra a figura 4.

Figura 4: Construções e conjeturas apresentadas pelo grupo para o caso do retângulo e do papagaio.



Dentro do rectângulo formou-se um losango, que verificamos pelo método da última aula que é um paralelogramo.



Dentro do papagaio formou-se um rectângulo, que também vimos que é um paralelogramo.

Apesar de ter sido provado, na primeira questão, que o tipo de quadrilátero que se obtém quando se unem os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero qualquer é um paralelogramo, as alunas sentiram necessidade de confirmar, seguindo o método usado para a prova, que os quadriláteros que obtiveram eram paralelogramos, como se pode observar pelo registo apresentado na figura acima.

A investigadora ao se aperceber dessa verificação interpelou as alunas:

> Investigadora (Inv): Porque estão a fazer essa verificação?
>
> Francisca: Para vermos se são paralelogramos.
>
> Inv: Não tínhamos provado na primeira questão que se obtinha um paralelogramo?
>
> Francisca: Este é um retângulo…, é um paralelogramo.
>
> Matilde: Pois é, já não precisávamos de ver, bastava ver as propriedades.
>
> Diana: São diferentes, mas são paralelogramos.
>
> Matilde: Sim, são todos paralelogramos, porque já tínhamos visto que qualquer um ia ser, não era preciso verificar.
>
> Francisca: Ah, sim.

As alunas só depois desta conversa é que se aperceberam que pelo facto de se ter realizado a prova, não havia necessidade de mais verificações empíricas. Embora as alunas tivessem presente a definição de paralelogramo, o facto dos casos particulares de paralelogramos serem figurativamente diferentes, levou-as a sentir a necessidade da verificação.

O mesmo aconteceu com os alunos do grupo II, como se pode observar no episódio seguinte em que discutem acerca do paralelogramo que se obtém quando o quadrilátero inicial é um retângulo:

> Nelson: Marca os pontos médios.
>
> Luís: Está bem feito. Agora é um losango.
>
> Pedro: Vou tirar as medidas… É as medidas dos lados são todas iguais.
>
> Luís: E os ângulos?
>
> Pedro: São estes dois iguais e aqueles também.
>
> Luís: Arrasta. É um paralelogramo?
>
> Nelson: Os ângulos são iguais dois a dois e os lados são paralelos.
>
> Luís: Tens a certeza que são paralelos?
>
> Nelson: São porque este lado tem a mesma medida que o outro e os outros dois também por isso têm que ser paralelos.

Só na discussão em grande grupo é que os alunos se aperceberam que não havia necessidade de verificar que os diferentes quadriláteros que obtinham para os casos particulares de quadriláteros eram paralelogramos:

> Diana: Já tínhamos visto na primeira questão que dava sempre um paralelogramo, tinham que dar todos. São todos paralelogramos, o retângulo é, o quadrado e os outros também.
>
> Nelson: O quadrado é, o losango…
>
> Luís: Pois ela tem razão, já tínhamos provado.
>
> Diana: Todos têm lados paralelos e iguais dois a dois e ângulos também iguais dois a dois.

Apesar de ter sido provado que qualquer quadrilátero obtido tendo em conta as condições indicadas no enunciado da tarefa era um paralelogramo, os alunos tendiam a negligenciar a definição de paralelogramo, pela pressão das figuras. A intervenção de Diana ajudou os colegas a entenderem que não era preciso fazer novas verificações.

Construção de polígonos

A construção geométrica de quadriláteros no ecrã do computador foi um trabalho que acarretou alguma dificuldade para os alunos. Na tarefa *Investigação com Quadriláteros*, as alunas do grupo I para estudarem os casos particulares de quadriláteros construíram cada um deles. O paralelogramo obliquângulo foi construído sem grande dificuldade. Para o quadrado quando se arrastavam dois dos seus vértices, a construção desmanchava-se, mas as alunas não atribuíram muita importância a esse facto, uma vez que quando movimentavam cada um dos restantes vértices a construção parecia manter-se resistente. Passaram então para o losango e acabou por acontecer a mesma situação.

As alunas tinham tentado construir os quadriláteros com base nalgumas propriedades dos mesmos, mas depois colocaram pontos um pouco *ad hoc*, dando à construção no ecrã a aparência da figura geométrica que pretendiam. Após terem verificado que as construções se desmanchavam tentaram procurar qual seria a origem, ao fim de algum tempo, aperceberam-se que de facto não tinham construído os quadriláteros com muito rigor e decidiram então construí-los novamente atendendo às suas propriedades. Por exemplo, para a construção do losango:

> Francisca: Traça um segmento, direito. Agora é melhor marcar o ponto médio, porque senão acontece a mesma coisa. Agora uma linha maior.

Matilde: Tem que ser perpendicular não é?

Diana: É. Mas isso não vai ser um papagaio?

Matilde: Não.

Diana: Eu acho que é.

Francisca: Não é nada, está bem, porque marcando ali no ponto médio, os lados [do polígono] vão ser iguais e no papagaio não são todos iguais.

Diana: Ah! É isso do ponto médio das diagonais.

Matilde: Agora uma rotação de 180º.

Diana: Temos que deixar esta construção do meio senão apaga a figura.

As alunas começaram por construir o losango partindo da representação das diagonais, considerando uma delas com maior comprimento. Observou-se que todas as construções feitas pelas alunas, à exceção do quadrado eram exemplos protótipos dos diferentes quadriláteros, como se pode verificar, por exemplo, pela figura 4. As alunas consideravam essas construções “mais fáceis de fazer e vê-se melhor qual é [o quadrilátero] ”.

No grupo II, Pedro começou por construir o quadrado dando à construção no ecrã a aparência visual de um quadrado, sem se preocupar em produzir uma construção resistente. Mesmo depois de verificar que a construção se desmanchava e de os colegas lhe darem algumas indicações, continuava a tentar marcar pontos *ad hoc*, mostrando pouca disponibilidade para procurar soluções resistentes.

Para construírem o papagaio revelaram dificuldades por não terem presente as suas propriedades:

Nelson: Podemos fazer agora o papagaio.

Luís: Neste como vamos fazer?

Nelson: Aqui não podemos fazer aquilo das rotações pois não?

Luís: Não sei. Não tem ângulos de 90º, acho eu.

Pedro: Fazemos batota. Marca aí dois pontos para um lado e depois fazemos o outro mais ou menos.

Luís: A stôra não quer assim à sorte.

(…)

Luís: É quase como o losango.

Nelson: As diagonais são perpendiculares não são?

Pedro: Mas, não podemos fazer igual. Chamamos a stôra.

Luís: Podemos começar pelas diagonais.

(…)

Nelson: Agora o trapézio. Como se constrói o trapézio. Já não me lembro como se faz.

Pedro: Começamos por traçar dois lados paralelos. Traça uma e depois pede outra paralela.

Luís: Podemos marcar um ponto na linha.

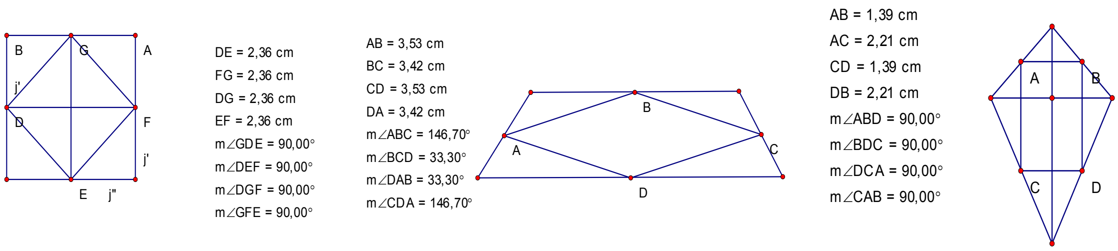
Pedro: Tens que o marcar sobre a reta.

Nelson: Agora definimos o segmento. E para o outro lado não tem que ser igual?

Pedro: Arrasta para vermos. Está bem.

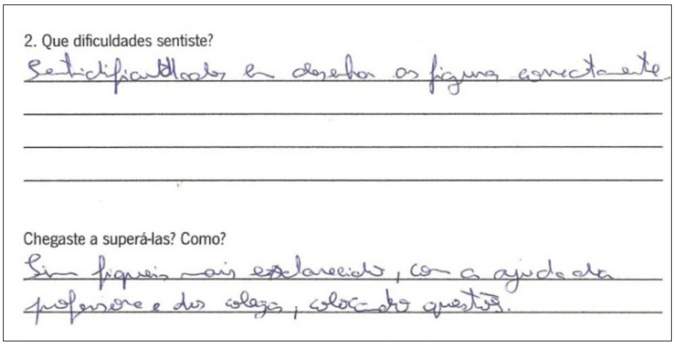
Os alunos com esta discussão e com algum questionamento por parte da investigadora conseguiram construir os quadriláteros. Na última construção (trapézio), Pedro mostrou-se mais responsável e procurou produzir uma construção resistente, atendendo às propriedades específicas do quadrilátero. Para isso foi importante a contribuição dos colegas. Observou-se tal como no caso do grupo I, que os alunos construíram exemplos protótipos dos quadriláteros, como se pode verificar, por exemplo para o quadrado, o trapézio e o papagaio na figura 5.

Figura 5: Algumas das construções feitas pelo grupo II.



Os três alunos na ficha de reflexão individual sobre a tarefa mencionaram ter sentido dificuldades na construção dos quadriláteros. Por exemplo, Nelson escreveu o que mostra a figura 6.

Figura 6: Respostas a questões da ficha de reflexão sobre a tarefa, pelo Nelson.



2. Que dificuldades sentiste?

Senti dificuldades em desenhar as figuras correctamente

Chegaste a superá-las? Como?

Sim fiquei mais esclarecido, com a ajuda da professora e dos colegas, colocando questões.

A ajuda dos colegas de grupo e algum questionamento por parte da investigadora contribuíram, na opinião de Nelson, para superar dificuldades na construção dos quadriláteros.

Visualização

Algumas das conjeturas formuladas e das justificações apresentadas pelos alunos basearam-se na intuição e perceção visual. Mas, nalgumas situações não foi fácil, devido a dificuldades associadas à visualização. Na tarefa *A Stella Octangula*, as alunas do grupo I tiveram muitas dificuldades para identificar o poliedro que resulta da intersecção dos dois tetraedros grandes. Principalmente, porque não conseguiam percecionar e interpretar a representação bidimensional da *stella*. Inicialmente Francisca conjeturou que o poliedro resultante da intersecção seria o sólido ABCD (um dos tetraedros pequenos), mas Diana não concordou argumentando "então o debaixo [outro tetraedro pequeno] também é". Matilde considerou ser "o que dá no meio" e as colegas acabaram por concordar com ela. Mas, após este consenso, o problema estava em conseguirem imaginar o que daria "no meio", como se pode observar pela transcrição:

> Francisca: Vai ficar um prisma e a secção vai ser um pentágono.
>
> Matilde: Um prisma como?
>
> Francisca: Porque se fizéssemos o corte de cima e o corte de baixo e depois estes, ficava tipo um tronco, que parece um prisma.
>
> Matilde: Mas não dá um tronco isso era se cortássemos só um, por exemplo.
>
> Francisca: Se cortarmos as partes que ficam de fora [os tetraedros pequenos], tanto de um como do outro [tetraedros grandes], aqui assim nesta parte podíamos ver qual era a figura.
>
> Matilde: Se tirássemos esta parte aqui [sólido ABCD]. Se cortarmos, a figura onde se intersetam os dois, vai ficar um biquinho [vértice] para baixo e outro biquinho para cima.
>
> Diana: E biquinhos para o lado, por isso vai ficar um losango.

Francisca defendia que cortando os tetraedros pequenos obtinha um "tronco" que para ela era "um sólido parecido com um prisma", por "ter duas bases iguais e depois as faces", e a secção resultante do corte era identificada como um pentágono porque considerou o sólido ABCD como uma pirâmide pentagonal como se pode observar pela justificação apresentada mais tarde à investigadora: "Estava a contar estes lados [duas arestas do cubo], assim via aqui [no sólido ABCD] 4 faces, mais uma do outro lado e assim ao cortar dava um pentágono". As outras colegas identificavam a secção resultante do corte do sólido ABCD como um quadrilátero. Não conseguiam visualizar o sólido ABCD como um tetraedro. Neste episódio, pode-se verificar que as alunas na sua discussão utilizam uma linguagem que abrange um tipo de vocabulário pouco convencional, mas que é compreendido por elas. No entanto, na discussão com a turma procuravam usar linguagem matemática, mais adequada.

A investigadora apercebendo-se da dificuldade das alunas decidiu questioná-las, no sentido de saírem deste impasse:

> Inv: O vértice A será um vértice do cubo?
>
> Matilde: Ah! É vértice do cubo, é.
>
> Inv: Então, que sólido é o ABCD?
>
> Matilde: Esta parte aqui [face] é um triângulo, mas a parte de baixo não é.
>
> Inv: Não é?
>
> Matilde: Não sei.
>
> Diana: Não, porque vai ter este vértice, depois este aqui ao lado, o de trás e este deste lado.
>
> Francisca: É, é porque vai ter este vértice, este e este [os vértices B, C e D].
>
> Matilde: É, é outro tetraedro.
>
> Inv: Por quantos tetraedros pequenos azuis é composta a *stella*?
>
> Matilde: Por 3.
>
> Diana: E o do meio é outro.
>
> Inv: O do meio? Não percebi.
>
> (As alunas ficaram em silêncio durante 8 segundos).
>
> Francisca: Este azul tem que ter outro do outro lado. Tem 4.
>
> Matilde: E o vermelho outros 4.
>
> (…)
>
> Matilde: Este é um tetraedro, vai ter aqui um triângulo, daqui outro triângulo, a figura vai ter um triângulo daqui, outro daqui, vai ter muitos triângulos. Quantos triângulos vai ter?
>
> Diana: 4 cada um.

As alunas para além de revelarem dificuldades em visualizarem o tetraedro ABCD manifestavam também, dificuldades em compreender as partes ocultas da representação plana da *stella*. O questionamento e sobretudo as contribuições de Francisca ajudaram a conceber uma imagem tridimensional da *stella*. No entanto, ainda persistiram algumas dificuldades relacionadas com a perceção visual, principalmente quando as alunas tentavam procurar relações entre os volumes dos sólidos, nomeadamente entre o cubo e a *stella*. Francisca na ficha de reflexão sobre a tarefa referiu ter superado essas dificuldades na discussão com a turma e ter ficado a conhecer outras relações entre os sólidos, uma vez que em pequeno grupo não tinham conseguido, como se pode observar pela figura 7.

Figura 7: Resposta dada por Francisca na ficha de reflexão sobre a tarefa.

Chegaste a superá-las? Como?

Sim, depois na discussão-turma fiquei a perceber e chegar a conclusões e relações como o volume e a área de alguns sólidos que não tínhamos conseguido em grupo.

Na entrevista, Francisca recorda esta situação em que a discussão em grande grupo a ajudou a superar dificuldades, quando lhes é pedido para darem a sua opinião sobre a fase de discussão na turma:

> Inv: Lembram-se de alguma situação em que a discussão em grande grupo vos tenha ajudado a superar dificuldades?
>
> Francisca: Lembro-me daquela que foi difícil para encontrar relações, a da *stella*.
>
> (…)
>
> Diana: Ah, lembro-me naquela da *stella* por causa da visualização, eu não conseguia ver o que tinha assim no meio e elas explicaram-me e também noutras.

As alunas referiram que a discussão em grande grupo, para além de lhes permitir ficar a conhecer outras formas de pensar, ajudou-as a superar dificuldades e Diana recordou algumas situações em que as colegas a ajudaram a ultrapassar dificuldades.

Os alunos do grupo II também revelaram dificuldades associadas à visualização espacial. Por exemplo, quando procuraram estabelecer relações entre o volume do cubo e dos tetraedros pequenos, consideraram que o volume do octaedro correspondia ao volume de dois tetraedros pequenos e os espaços entre o cubo e a *stella* correspondiam a seis desses tetraedros:

> Luís: São 8 dos pequenos e agora, o do meio não dá dois tetraedros? O octaedro não se forma a partir de dois tetraedros?
>
> Nelson: O octaedro sim. Mas temos que saber estes espaços brancos.
>
> Luís: Aqui olha, assim não dava para pôr outro, aqui assim é outro. Acho que aqui é outro, aqui outro…
>
> Nelson: Cada espaço branco é um? Então 1,2,3, ..., 6. São mais 6 e agora contar os de dentro.
>
> Luís: Os de dentro são 8. Mas olha aqui forma dois. Tem 10.

Nelson: 10 não. Se tem aqui 6 mais 8 são catorze.

Luís: Catorze, catorze. Não é. E o de dentro, e o octaedro?

Nelson: Se já o contaste!

Luís: Não contei.

Nelson: No octaedro são mais dois.

Luís: Pequeninos?

Nelson: Sim.

Luís: Então são 16. Vamos registar esta conjetura.

Os alunos primeiro consideraram que pelo facto do octaedro resultar da intersecção de dois tetraedros, o seu volume correspondia ao volume de dois tetraedros pequenos. Depois e apesar de saberem que a *stella* é composta por 8 tetraedros pequenos e pelo octaedro, parecem não ter formado na sua mente uma imagem tridimensional correta da *stella*, uma vez que consideram apenas um "espaço em branco" por cada face do cubo. Após uma análise mais pormenorizada, os alunos reformularam a conjetura. Na discussão com a turma, os alunos referiram:

Nelson: Nós primeiro tínhamos visto que o cubo era igual a 16 tetraedros pequenos e depois a 22.

Lúcia: 22 porquê?

Nelson: Eram os 16 dos tetraedros grandes, mais os espaços em branco.

Pedro: Mas, tínhamos que tirar os comuns. O octaedro só tem 4. Por isso, depois tínhamos 18.

Diana: O cubo é constituído pela *stella*, mais pelos espacinhos vazios.

Inv: E esses espacinhos vazios correspondem a que sólidos?

Matilde: A tetraedros.

Inv: E quantos tetraedros desses que correspondem aos espaços vazios temos?

Rosa: 6.

Luís: Sim 6, um por cada face.

Francisca: Não são 6, são 7.

Carlos: São 8.

Inv: Já disseram 6, 7 e agora 8.

Joaquim: São 8 stôra, porque temos 2 em cada face.

Inv: Vejam bem quantos têm na face da frente.

Joana: Na da frente temos 1, 2, …Temos 4.

(…)

Joaquim: Sim, 4 na frente.

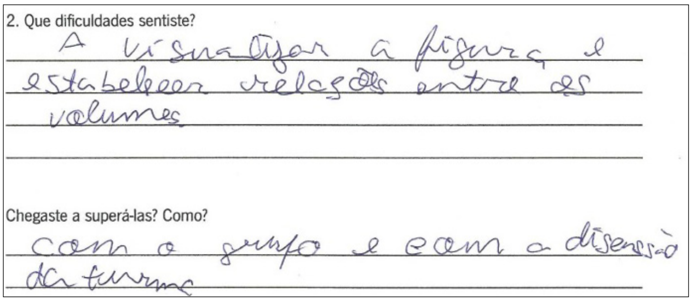
Luís: 4 atrás, 8.

Nelson: Aqui deste lado só já podemos contar 2 e do outro, outros 2, faz 12.

Foi através desta discussão que os alunos ficaram a saber que os espaços entre o cubo e a *stella* correspondiam a 12 tetraedros irregulares e a partir daí estabeleceu-se a relação entre o volume do cubo e dos tetraedros pequenos.

Pedro na ficha de reflexão sobre a tarefa mencionou que o grupo e a discussão com a turma contribuíram para superar dificuldades em visualizar os sólidos e em estabelecer relações entre os volumes dos mesmos, como mostra a figura 8.

Figura 8: Respostas dadas por Pedro a questões da ficha de reflexão sobre a tarefa.


2. Que dificuldades sentiste?

A visualizar a figura e estabelecer relações entre os volumes

Chegaste a superá-las? Como?

com o grupo e com a disenssão da turma

Os alunos na entrevista mencionaram que o trabalho em pequeno grupo e a discussão na turma ajudaram a superar dificuldades e a conhecer outras estratégias de resolução e formas de pensar:

Pedro: [O trabalho em grupo] ajudou. O que um não sabia, o outro dava uma ideia e discutimos essa ideia e depois vão surgindo outras, que nos vão ajudar a perceber melhor as coisas. Em grupo se um percebe menos uma coisa o outro ajuda e explica. Naquela tarefa que era para fazer o quadrado e os outros [tarefa *Investigação com Quadriláteros*], eu não sabia construir um quadrado no programa [GSP], fazia à sorte e depois o Luís disse, temos que fazer uma rotação de 90º para o outro lado ficar perpendicular e isso já me ajudou.

(…)

Inv: E a discussão na turma?

Luís: A discussão com a turma ajuda sempre, porque uns desenvolvem uma coisa, outros outra e depois nós ficamos a saber mais.

Nelson: E também quando nós apresentamos as nossas ideias, os outros podem não concordar e assim ficamos a saber se está certo ou não. Porque no nosso grupo podemos pensar que está certo o que fizemos e depois com a discussão vemos que não está e eles explicam porque está mal.

> Pedro: Na discussão tínhamos as ideias de 20 pessoas e isso fez com que ficássemos a conhecer maneiras de pensar diferentes e aprendemos sempre coisas novas e também esclarecemos dúvidas.

A opinião dos alunos acerca do trabalho de grupo é bastante positiva, o facto de cada um apresentar a sua ideia e esta ser discutida em grupo e de uns apoiarem e explicarem aos outros quando tinham dúvidas contribuiu, segundo eles, para ultrapassar dificuldades. Consideraram que a discussão na turma lhes permitiu aprender coisas novas e esclarecer dúvidas.

Conclusões

Os alunos apresentaram dificuldades na realização das tarefas propostas que se prendiam com a aprendizagem da Geometria. O uso e compreensão de desenhos, a construção e interpretação de representações visuais de conceitos matemáticos e visualização de objetos tridimensionais foram algumas das dificuldades sentidas pelos alunos.

Vários autores salientam que os desenhos são fundamentais para a compreensão de conceitos e ideias geométricas (Battista, 2007; Parzysz, 1991), porém a particularidade dos desenhos e os exemplos protótipos de figuras geométricas originaram algumas dificuldades aos alunos. Diana e outros alunos revelaram dificuldades em reconhecer um quadrado quando ele não se assemelhava a um exemplo protótipo desse polígono. Apesar de Diana evidenciar conhecer as propriedades do quadrado, a imagem mental associada a um exemplo protótipo gerou-lhe dificuldades em o reconhecer noutra posição. Verificando-se um desequilíbrio entre a componente conceitual e figural do objeto geométrico. Estes dados confirmam o que é salientado por Presmeg (1992) ao afirmar que a imagem mental associada a imagens protótipos pode conduzir ao não reconhecimento de uma figura quando ela não se assemelha com um protótipo. Para a superação desta dificuldade contribuiu a intervenção das colegas de grupo no sentido de Diana identificar o quadrado através das suas propriedades.

Fischbein (1993) salienta que a harmonia entre a componente conceitual e figural de um objeto geométrico é que determina a noção correta desse objeto. Os dados sugerem, à semelhança de outras investigações (Fischebein, 1993; Mariotti, 1995), que as relações entre estas duas componentes não são fáceis de organizar na mente dos alunos. Depois de provado que o quadrilátero que se obtém unindo os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero qualquer é um paralelogramo, os alunos de ambos os grupos quando estudaram os casos particulares de quadriláteros evidenciaram a necessidade de novas verificações empíricas. Apesar de terem presente a definição de paralelogramo, o facto dos vários paralelogramos serem figurativamente tão diferentes, o efeito do conceito simplesmente desaparece. Tal como é referido por Fischbein (1993) os alunos tendem a esquecer que a interpretação da componente figural deve permanecer sujeita às restrições formais. As alunas do grupo I só se aperceberam de que não havia necessidade da verificação para cada subclasse de paralelogramos quando interpeladas pela investigadora e os alunos do grupo II através da discussão em grande grupo. A intervenção de Diana contribuiu para que os colegas percebessem as várias formas correspondentes à definição de paralelogramo.

A construção de polígonos com auxílio do GSP revestiu-se de alguma dificuldade para os alunos de ambos os grupos. As alunas do grupo I, numa fase inicial da construção dos casos particulares de quadriláteros, produziam construções com base numa ou duas propriedades específicas dos quadriláteros e na marcação de alguns pontos *ad hoc*, dando à construção no ecrã do computador a aparência visual do quadrilátero que pretendiam construir. Mas, depois de construírem dois dos quadriláteros e terem verificado que as construções se desmanchavam, não conservando as características dos quadriláteros pretendidos, procuraram, através da discussão em pequeno grupo, encontrar soluções resistentes, utilizando propriedades e relações de cada quadrilátero que iam construindo.

No grupo II a dificuldade em procurar soluções resistentes foi maior. Isto por não terem presentes as propriedades específicas de alguns dos quadriláteros que desejavam construir e também por alguma falta de disponibilidade, sobretudo de Pedro, em procurar encontrar soluções que permitissem produzir construções resistentes. Estes dados confirmam resultados do estudo de Junqueira (1995) que refere a falta de disponibilidade de alguns alunos para procurarem soluções resistentes. No início, as construções eram produzidas dando-lhe a aparência visual do quadrilátero que pretendiam construir e depois de verificarem que as construções não resistiam à manipulação e de serem alertados para procurarem produzir construções resistentes, Pedro à menor dificuldade tinha a tendência para fazer construções *ad hoc*. Contudo, na última construção já procurava soluções resistentes, para tal contribuiu a ajuda e a insistência dos colegas de grupo para ter em atenção as propriedades do polígono a construir. A discussão em pequeno grupo e algum questionamento por parte da investigadora, visando que os alunos recordassem as propriedades específicas de alguns quadriláteros contribuíram para que os mesmos superassem as dificuldades sentidas na construção dos mesmos. Observou-se tal como no estudo de Junqueira que a maior parte das construções feitas pelos alunos eram exemplos protótipos dos casos particulares de quadriláteros. Os alunos consideravam essas construções mais fáceis de representar e de identificar.

French (2004) salienta a dificuldade na interpretação de desenhos bidimensionais de objetos tridimensionais. Os dados analisados no presente trabalho confirmam esta ideia, indicando que a perceção e interpretação de representações planas de objetos tridimensionais se revestem de dificuldade para os alunos. As alunas do grupo I não conseguiam formar na sua mente uma imagem tridimensional da *stella*, através da observação da sua representação plana. Isto pela dificuldade em: (i) percecionar o tipo de sólidos que compõem a *stella* e (ii) compreender as partes ocultas da representação plana. O primeiro ponto envolveu momentos de muita discussão entre as alunas, várias ideias foram defendidas e vários argumentos apresentados. Esta discussão e algum questionamento por parte da investigadora contribuíram para que as alunas conseguissem ultrapassar esta dificuldade. A dificuldade em compreender as partes ocultas da representação plana da *stella* foi mais fácil de ultrapassar, as contribuições, sobretudo de Francisca ajudaram as colegas a entender a informação do aspeto visual correspondente à parte oculta da representação bidimensional da *stella* e desta forma, formar uma imagem tridimensional deste sólido.

A perceção visual e interpretação dos sólidos correspondentes ao espaço compreendido entre o cubo e a *stella* também levantaram dificuldades aos alunos de ambos os grupos. Estas dificuldades estavam relacionadas com o facto da representação plana de objetos tridimensionais implicar, tal como é salientado por Castro e Castro (1997), a perda de informação correspondente à parte oculta.

A discussão em grupo e naturalmente algum questionamento por parte da investigadora concorreram para que estas e outras dificuldades fossem superadas, como de resto é evidenciado pelas opiniões dos alunos, quer na entrevista, quer nas fichas de reflexão individual sobre as tarefas. Para tal, foi importante: (1) os alunos durante as discussões em grupo sentirem à vontade para pedir ajuda aos colegas; (2) os colegas fornecerem explicação que estava a um nível de elaboração que correspondia ao nível da ajuda necessária e (3) a ajuda ser fornecida no momento em que surgia a dificuldade. Os dados recolhidos confirmam resultados de outras investigações que referem que uma metodologia de trabalho em pequeno grupo propicia um ambiente em que os alunos se sentem mais à vontade para pedir e fornecer ajuda (Zakaria, Chin & Dual, 2010), podendo assim, concorrer para ultrapassar dificuldades. E a discussão no grupo turma após o trabalho em pequeno grupo é muito vantajosa para a aprendizagem dos alunos (Carvalho, 2001; Junqueira, 1995, Santos, 2011) proporcionando a possibilidade de clarificação e esclarecimento de dúvidas.

Os resultados sugerem que a discussão em pequeno grupo contribui para a superação de dificuldades em situações que envolvem noções geométricas básicas e raciocínios mais simples para os alunos e que a discussão em grande grupo se torna fundamental na maior parte das situações, cujos raciocínios se revelam mais complexos.

Referências

Abrantes, P. *O trabalho de projeto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do Projeto Mat789*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM, 1994.

Abrantes, P. Investigações em Geometria na sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 153-167). Lisboa: Projeto MPT e APM, 1999.

Afonso, C. *As fases de aprendizagem do modelo de van Hiele: Uma experiência no ensino da Geometria com futuros professores do 1.º ciclo*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga, 2002.

APM. Matemática 2001: Recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática. Consultado em 11 de outubro de 2013, em http://www.apm.pt/apm/2001/2001_m.htm, 1998.

APM. *Renovação do currículo de Matemática. Seminário de Vila Nova de Mil Fontes 1988: Edição Comemorativa*. Lisboa: Autor, 2009.

Battista, M. T. The development of geometry and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on Mathematics teaching and learning* (pp. 843-905). Charlotte: NCTM e Information AGE Publishing, 2007.

Boaler, J. "Opening our ideas": How a detracked mathematics approach promoted respect, responsibility, and high achievement. *Theory into Practice*, *45*(1), 1-11, 2006.

Bogdan, R., & Biklen, S. *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora, 1994.

Carvalho, C. *Interação entre pares: Contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7.º ano de escolaridade*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2001.

Castro, E., & Castro, E. Representaciones y modelización. In L. Rico (Cood.), *La educación matemática en la ensenãnza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Editorial Horsori, 1997.

César, M. Interações sociais e apreensão de conhecimentos matemáticos: A investigação contextualizada. In J. P. Ponte & L. Serrazina (Orgs.), *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália - Atas da Escola de Verão em Educação Matemática - 1999* (pp. 5-46). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE, 2000.

Cockcroft, W. H. Mathematics counts. London: HMSO. Consultado em 12 de fevereiro de 2013, em http://www.educationengland.org.uk/documents/cockcroft/, 1982.

Coxford, A., Burks, L., Giamati, C., & Jonik, J. *Geometria a partir de múltiplas perspetivas. Normas para o currículo e a avaliação em Matemática Escolar, coleção de adendas, anos de escolaridade 9-12*. Lisboa: APM, 1993.

Fischbein, E. The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 139-162, 1993.

French, D. *Teaching and learning Geometry*. London: Continuum, 2004.

Hoffer, A. Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher*, *74*, 11-18, 1981.

Junqueira, M. *Aprendizagem da Geometria em ambientes computacionais dinâmicos: Um estudo no 9.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa. Lisboa: APM, 1995.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. *Investigação Qualitativa: Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 2005.

Loureiro, C., Oliveira, A., Ralha, E., & Bastos, R. *Geometria: Matemática – 10.º ano de escolaridade*. Lisboa: ME e DES, 1997.

Mariotti, M. A. Images and concepts in geometrical rasoning. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in Mathematics Edication*, (pp. 79-116). New York: Springer, 1995.

Matos, J. M., & Serrazina, M. L. *Didática da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

NCTM. *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE, 1991.

NCTM. *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE, 1994.

NCTM. *Princípios e normas profissionais para a Matemática escolar*. Lisboa: APM, 2007.

Parzysz, B. Knowing vs seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, *19*, 79-92, 1988.

Parzysz, B. Representation of space and students' conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(6), 575-593, 1991.

Ponte, J. P. Gestão curricular em Matemática. In Grupo de trabalho de investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM, 2005.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H., & Varandas, J. Investigando as aulas de investigações matemáticas. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira

(Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 133- 151). Lisboa: Projeto MPT e APM, 1999.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, *22*(2), 55-81, 2013.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. *Didática da Matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

Presmeg, N. C. Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(3), 297-311, 1986.

Presmeg, N. C. Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(6), 595-610, 1992.

Rodrigues, C., Menezes, L., & Ponte, J. P. Práticas de discussão matemática no ensino da Álgebra. In M. H. Martinho, R. A. Tomás Ferreira, A. M. Boavida, & L. Menezes (Eds.) *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM, pp. 65–78, 2014.

Santos, E. *Discussões na aula de Matemática com recurso à tecnologia: o caso de uma turma do 7.º ano*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho. Braga. Consultado em 21 de agosto de 2014, em http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/19085, 2011.

Turner, J., & Patrick, H. Motivational Influences on student participation in classroom learning activities. *Teachers College Record*, *106*(9), 1759-1785, 2004.

Veloso, E. *Geometria. Temas atuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

Weeb, N. M. Peer interaction and learning in small groups. *International Journal of Education Research*, *13*, 21-39, 1989.

Yerushalmy, M. & Chazan, D. Overcoming visual obstacles with the aid of the supposer. *Education studies in Mathematics*, *21*(3), 199-219, 1990.

Yin, R. *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks: Sage, 2009.

Zakaria, E., Chin, L. C., & Daud, M. Y. The effects of cooperative learning on students' mathematics achievement and attitude towards mathematics. *Journal of Social Sciences*, *6*(2), 272-275, 2010.

Anexo I- Tarefas

Investigação com Quadriláteros

Com auxílio do *software* "*The Geometer's Sketchpad*", construam um quadrilátero à vossa escolha. Marquem o ponto médio de cada um dos lados do quadrilátero que construíram e, em seguida, unam os pontos médios de lados consecutivos de modo a obter outro quadrilátero.

1. Que tipo de quadrilátero obtiveram? Provem a vossa conjetura.

2. Estabeleçam relações entre o quadrilátero inicial e o quadrilátero que obtiveram unindo os pontos médios dos lados consecutivos do quadrilátero inicial.

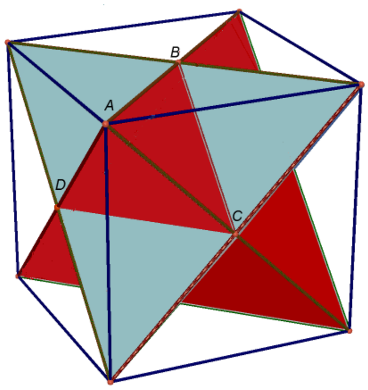
3. Investiguem agora o que acontece se o quadrilátero inicial for um paralelogramo obliquângulo? Um quadrado? Um losango? Um retângulo? Um trapézio? Um papagaio? Formulem e validem as vossas conjeturas.

A *Stella octangula*

1. Num cubo podemos considerar uma diagonal em cada face, de modo que as 6 diagonais representadas concorram só em 4 vértices do cubo. Esses segmentos são as arestas de um novo poliedro. De que poliedro se trata? Justifiquem a vossa conjetura.

Sugestão: Construam o novo poliedro com auxílio do *software Cabri 3D*.

2. Se na mesma construção representarmos da mesma forma as restantes diagonais faciais do cubo obtemos a *stella octangula*, como mostra a figura seguinte.



2.1. Observem a figura e identifiquem o poliedro que se obtém pela intersecção dos dois sólidos que podem ser construídos a partir das diagonais faciais do cubo nas condições da questão 1. Justifiquem.

2.2. Estabeleçam relações entre o sólido ABCD da figura, a *stella octangula* e o cubo

Anexo II - Guião da entrevista aos alunos

Sendo uma entrevista semiestruturada, não se elabora um conjunto muito preciso de questões, são definidos alguns tópicos a abordar:

Opinião sobre a experiência e sobre as aulas de Matemática em que foram trabalhadas as tarefas de exploração e investigação.

Esclarecimento de alguns pontos que suscitaram o interesse da investigadora na resolução das tarefas.

Mais especificamente as questões a colocar são:

O que acharam das aulas em que foram trabalhadas as tarefas de exploração e investigação?

Que tipo de dificuldades sentiram no trabalho com tarefas de natureza exploratória e investigativa?

Gostaram de trabalhar em grupo? Porquê? O facto de trabalharem em grupo ajudou-vos de alguma forma a superar as dificuldades sentidas?

O trabalho desenvolvido ajudou-vos a comunicar e a argumentar os vossos raciocínios? Como?

A discussão no grupo turma ajudou-vos a superar dificuldades?

Anexo III - Ficha de reflexão individual sobre a tarefa

Responde individualmente a cada uma das seguintes questões:

1. O que aprendeste ao realizares a tarefa?

____

____

2. Que dificuldades sentiste?

____

____

Chegaste a superá-las? Como?

____

____

3. Qual foi o teu contributo para o trabalho de grupo?

____

____

Nome: ____ Grupo n.º ____________

Obrigada pela tua colaboração!