# SITUAÇÕES CONTRAINTUITIVAS E APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADES

*José António Fernandes*
*Tânia Maria Lacaz*

## 1 Situações contraintuitivas em probabilidades

Durante muitos séculos, todo o conhecimento acerca de acontecimentos futuros era determinado pela omnisciência e omnipresença do Criador, o que tornava inconcebível toda especulação sobre tais acontecimentos. Contudo, a existência desta associação com o divino não impediu os jogadores de fazerem suas apostas em jogos de sorte e azar, controlando-as quantitativamente por meio da intuição.

O primeiro passo para conferir à teoria de probabilidades um caráter científico foi dado por Gerolamo Cardano no século XVI, ao ligar as apostas nos jogos à enumeração das combinações ganhadoras nesses jogos. Todavia, foi apenas no século XVII que se verificou o passo decisivo na evolução do pensamento probabilístico, estabelecido pela correspondência mantida entre Blaise Pascal e Pierre Fermat. Ignorando a posição metafísica, Pascal e Fermat quantificaram as chances de ganhar de dois jogadores num jogo de dados, quando o jogo foi interrompido sem que nenhum dos jogadores tivesse ganhado o prêmio e onde a atribuição de iguais probabilidades não era a decisão adequada.

Do que foi referido, conclui-se que, comparativamente com outros ramos da Matemática, as Probabilidades são uma área relativamente nova, estando seu desenvolvimento conceitual ligado a uma variedade de paradoxos que mostram a disparidade entre a intuição e o desenvolvimento conceitual deste domínio. Por exemplo: ainda hoje há pessoas que pensam que a probabilidade de “obter um 5 e um 6” é igual à probabilidade de “obter dois 6” no lançamento de dois dados.

Segundo Batanero, Henry e Parzyz (2005), apesar de Kolmogorov ter estabelecido um sistema axiomático satisfatório nos anos 1930, subsistem ainda controvérsias sobre a interpretação de conceitos básicos de probabilidades e sua aplicação à estatística. No centro dessas controvérsias encontra-se o próprio conceito de probabilidade, enquanto conceito multifacetado, que pode ser visto de diferentes perspectivas. Borovcnik, Bentz e Kapadia (1991) distinguem quatro conceitos de probabilidade: (1) o conceito clássico, (2) o conceito frequencista ou empírico, (3) o conceito subjetivista e (4) o conceito estrutural.

No conceito clássico, atribuem-se probabilidades a acontecimentos com base na definição clássica de probabilidade, devida a Laplace, sendo a probabilidade de um acontecimento composto da fração de acontecimentos elementares favoráveis a esse acontecimento. Esta definição constitui uma abordagem *a priori* da probabilidade e nela assume-se, implicitamente, a equiprobabilidade de todos os acontecimentos elementares do espaço amostral. Ora, o pressuposto de equiprobabilidade dos acontecimentos elementares revela o caráter circular desta definição, tendo Laplace instituído o "princípio da insuficiente razão", princípio algo obscuro, que permitiria afirmar a equiprobabilidade desde que não existissem razões para acreditar que um ou mais acontecimentos seriam mais prováveis de obter em relação aos demais. Em situações práticas, a simetria da experiência física e a adoção do "princípio da insuficiente razão" constituem orientações instáveis que nos podem ajudar a decidir sobre a equiprobabilidade.

No conceito frequencista ou empírico, a probabilidade de um acontecimento resulta da frequência relativa observada em experiências repetidas, o que destaca o caráter a posteriori desta abordagem da probabilidade. Este procedimento apenas permite determinar uma estimativa da probabilidade, sendo esta o limite para que tende a frequência relativa de um acontecimento individual inserido num coletivo, que é uma classe infinita de acontecimentos "semelhantes" que se assume terem certas propriedades "aleatórias". Tal como o conceito clássico, também a aplicação prática desta definição de probabilidade envolve dificuldades, designadamente por conta: da possibilidade de inserir um acontecimento em diferentes coletivos, não garantindo o mesmo limite para a frequência relativa; da dificuldade em definir o que se entende por "semelhante" e "aleatório"; da impossibilidade de aplicar o conceito a situações em que não se pode repetir a experiência; e das dificuldades inerentes ao infinito e de distinguir a probabilidade teórica da probabilidade prática.

Enquanto nos dois conceitos anteriores as probabilidades são propriedades do mundo real exterior, na perspectiva subjetivista, também designada por personalista, as probabilidades são avaliações de situações de incerteza inerentes à mente do sujeito. Neste sentido, as perspectivas clássica e frequencista são referidas como interpretações objetivistas de probabilidade.

Na perspectiva subjetivista, a atribuição de probabilidades baseia-se na assunção básica de que os sujeitos têm suas próprias probabilidades, que resultam de um padrão implícito de preferência entre decisões. Num contexto de jogos de sorte-azar, a probabilidade de um acontecimento pode ser determinada pelos riscos que uma pessoa está disposta a correr ao fazer uma aposta na sua ocorrência. Assim, para um ganho fixo, quanto mais elevada for a parada que o jogador está disposto a arriscar maior será sua confiança na realização do acontecimento. Muito embora as pessoas possam diferir nos riscos que aceitam correr, tal não constitui problema, dado que o sujeito segue regras básicas de coerência e consistência. As duas categorias de informação que um subjetivista considera – a informação prévia e os dados empíricos que equivalem a frequências em provas repetidas – são combinadas na fórmula de Bayes para obter uma nova probabilidade do acontecimento em questão, consubstanciando o conceito de "aprendizagem a partir da experiência" (STEINBRING; VON HARTEN, 1983).

Segundo Borovcnik, Bentz e Kapadia (1991), as duas maiores dificuldades inerentes à abordagem subjetivista resultam da pretensão em traduzir qualquer situação de incerteza por uma probabilidade e da falta de orientação para medir as probabilidades prévias. Além disso, Hawkins e Kapadia (1984) salientam as dificuldades pedagógicas no ensino da fórmula de Bayes, particularmente a crianças muito novas.

O conceito estrutural é definido implicitamente por um sistema de axiomas e um conjunto de definições e teoremas deduzidos daqueles axiomas. Esta abordagem não esclarece a própria natureza da probabilidade, apesar de os teoremas deduzidos constituírem um indicador de possíveis interpretações. A perspectiva estrutural pode ser vista como constituindo uma estrutura teórica para as duas principais concepções de probabilidade: a posição objetivista e a posição subjetivista. Para Borovcnik, Bentz e Kapadia (1991), a perspectiva estrutural não é útil na determinação de um valor da probabilidade. Em consequência, em qualquer caso de aplicação prática temos de escolher uma interpretação subjetiva ou objetiva para determinar o modelo e a probabilidade inerentes à situação.

Borovcnik e Peard (1996) destacam que o raciocino probabilístico é diferente do raciocínio lógico ou causal e que os resultados contraintuitivos em probabilidades surgem em níveis muito elementares, enquanto em outros ramos da Matemática tais resultados surgem apenas em níveis de abstração elevados. Borovcnik, Bentz e Kapadia (1991), socorrendo-se de três roletas ($R_1$: apenas com o número 3; $R_2$: com os números 1 e 5, sendo 0,52 a probabilidade de obter o 1; $R_3$: com os números 0 e 4, sendo 0,25 a probabilidade de obter o 0), concluem que $R_1$ vence[1] $R_2$ e $R_2$ vence $R_3$, mas $R_1$ não vence $R_3$. Este resultado contraintuitivo mostra que em probabilidades a propriedade transitiva não se verifica.

No caso do raciocínio causal, Tversky e Kahneman (1982b) constataram que as pessoas tendem a fazer julgamentos probabilísticos assimétricos, inferindo com maior confiança das causas para os efeitos do que o inverso (por exemplo, da cor dos olhos da mãe para a cor dos olhos da filha do que o inverso), das variáveis que parecem explicar melhor outras variáveis (por exemplo, a altura pode ser vista como melhor explicação do peso relativamente à relação inversa) e das variáveis que são vistas como indicações mais fortes de outras variáveis (por exemplo, o resultado num teste longo constitui uma indicação mais forte do que o resultado num teste curto).

## 2 Exploração de situações contraintuitivas no ensino de probabilidades

Tomando por referência as situações contraintuitivas, relativamente às quais as pessoas possuem intuições resistentes à perspectiva normativa, Lesser

[1] De dois jogadores, cada um com a sua roleta, vence aquele que obtiver o maior número.

(1995) distingue dois paradigmas de ensino da estocástica: (1) o paradigma tradicional, em que os exemplos contraintuitivos não são explorados (pelo menos de forma sistemática); e (2) o paradigma alternativo, baseado em exemplos contraintuitivos.

Dentre as dez recomendações para o ensino das probabilidades e estatística, na perspectiva da implementação das *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar* (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1991), Burrill (1990, p. 113, tradução nossa) afirma na quinta recomendação: "A ênfase no ensino da estatística deve ser colocada em bons exemplos e na construção de intuições, e não em paradoxos de probabilidades ou na utilização da estatística para enganar". Para Lesser (1995), esta abordagem ao ensino da estocástica traduz a posição tradicional por duas ordens de razões: a primeira reside no fato de ela parecer predominante entre os professores e entre os livros de texto; a segunda resulta do fato de as recomendações de Burrill terem sido assumidas institucionalmente pela American Statistical Association (1994).

Mostrar como mentir com a estatística e salientar paradoxos em probabilidades tem como consequência a destruição da confiança do aluno (WATKINS et al., 1992). Este ponto de vista é também partilhado por Falk e Konold (1992). Referindo-se aos paradoxos em probabilidades, estes autores afirmam:

> Eles parecem desafiar os estudantes e captar o seu interesse. É tentador trazer para a sala de aula alguns dos problemas mais contraintuitivos para demonstrar aos estudantes suas tendências erradas e talvez esclarecê-las. Contudo, se um professor persiste em chamar a atenção dos estudantes para o quão predispostos estão a cometer erros inferenciais, eles podem tornar-se tão convencidos das suas incapacidades ao ponto de jamais acreditarem que alguma vez dominarão técnicas mais apropriadas. (FALK; KONOLD, 1992, p. 161, tradução nossa)

No sentido de evitar a perda de confiança em suas capacidades, Falk e Konold (1992) advogam um equilíbrio entre situações que ilustrem concepções erradas e enviesamentos e situações que afirmem a capacidade dos estudantes. As intuições válidas, cuja existência tem sido demonstrada pelos mais variados estudos (FISCHBEIN; NELLO; MARINO, 1991; GREEN, 1983), constituem para estes autores um bom ponto de partida para o ensino das probabilidades.

Admitindo a consistência entre a posição tradicional e a estratégia das intuições ancoradoras na educação em ciências (CLEMENT, 1987), Lesser (1995) destaca duas limitações da posição tradicional: a possibilidade de não haver boas situações ancoradoras suficientes para realizar o processo de *bridging*[2] e os alunos podem não compreender ou aplicar as analogias da maneira pensada

[2] A técnica de bridging, ao dividir a analogia em duas etapas menores, facilita a compreensão, pois, presumidamente, é mais fácil compreender uma analogia próxima do que uma analogia distante. Naturalmente, se necessário, pode recorrer-se a vários casos intermédios de *bridging*.

pelo professor. Lesser (1995) identifica, ainda, limitações ao nível de aspectos do modelo de desenvolvimento cognitivo de Piaget e Inhelder (1951), na medida em que estudantes do ensino superior não atingem o estágio das operações formais, pelo fato de algumas concepções erradas tornarem-se dominantes com a idade e resistirem ao ensino (FISCHBEIN; SCHNARCH, 1997; GREEN, 1983) e pelo fato de a posição de Burrill (1990) basear-se no que acontece na sala de aula e não na investigação formal.

No paradigma alternativo, diferentemente, destacam-se de modo sistemático os exemplos contraintuitivos. Para Gordon (1991), a exploração destes exemplos, que se podem encontrar em todas as áreas da Matemática, incluindo as probabilidades, apresenta várias vantagens: cativa a atenção dos estudantes em virtude do desequilíbrio experienciado, desafia hábitos de pensamento e práticas e constitui uma oportunidade para desenvolver maior apreço acerca da necessidade de exploração, de reflexão e de raciocínio.

Lesser (1998) manifesta a convicção de que o uso inteligente destes exemplos contraintuitivos em estatística suporta uma pedagogia construtivista, promovendo uma aprendizagem mais profunda a partir das crenças prévias dos alunos e encorajando o papel do professor como facilitador da aprendizagem. Além disso, os alunos poderão beneficiar-se de oportunidades para desenvolver a motivação, a metacognição, o pensamento crítico, a aprendizagem por descoberta, as conexões com aplicações da vida real e a história. Alguns destes aspectos são também referidos por Falk e Konold (1992). Referindo-se aos exemplos contraintuitivos, que veiculam falácias e conclusões paradoxais, estes autores afirmam:

> Alguns destes exemplos desempenharam um papel importante no desenvolvimento da teoria das probabilidades. Os estudantes podem igualmente se beneficiar em comparar suas intuições relativas a quebra-cabeças e paradoxos com soluções normativas. Esta atividade requer uma consciência dos seus próprios processos de pensamento. O conhecimento acerca do seu próprio pensamento (metacognição) não é menos importante do que a aprendizagem da solução correta, e o pensamento reflexivo é um passo vital para atingir a capacidade matemática abstrata. Um paradoxo usualmente gera um conflito. Estes conflitos podem encorajar os estudantes a examinarem criticamente suas teorias intuitivas. Paralelamente ao desenvolvimento histórico da teoria, este exame pode revelar aos estudantes as deficiências na sua compreensão e, portanto, promover o desenvolvimento de conceitos normativos. (FALK; KONOLD, 1992, p. 157, tradução nossa)

Konold (1994, p. 233, tradução nossa) destaca o efeito motivacional dos resultados surpreendentes, afirmando que os “estudantes estão motivados para explorar o problema mais formalmente”. Além disso, para este autor, os estudantes, quando confrontados com estes resultados surpreendentes, revelam ansiedade em exprimir opiniões nas discussões da sala de aula.

Tal como na posição tradicional, também na posição alternativa Lesser (1995) identifica limitações. Primeiro, uma situação concebida para contrastar um raciocínio normativo com um raciocínio informal pode não produzir qualquer conflito. Segundo, a publicação e divulgação de um conjunto *standard* de exemplos contraintuitivos com ampla circulação na sala de aula pode, eventualmente, perder sua eficácia, na medida em que os estudantes podem centrar-se mais nas respostas corretas do que em compreender os problemas subjacentes. Finalmente, a profunda compreensão do que a exploração de um exemplo contraintuitivo pode produzir raramente está associada com um curso superior introdutório. Diferentemente, estes exemplos são planejados para estudantes universitários de matemática avançada, para estudantes graduados e para professores. A questão crítica, neste caso, é estar-se seguro de que os estudantes dispõem dos meios adequados para analisar os paradoxos de modo significativo.

Por fim, Lesser (1995), avançando quatro razões, advoga uma síntese dos dois paradigmas como o menor de dois males. A primeira pode ser observada em investigadores de educação em Ciências que recorrem simultaneamente a analogias ancoradoras, consistentes com a posição tradicional, e a estratégias de mudança conceitual, consistentes com a posição alternativa. A segunda centra-se na recomendação de Burrill (1990). Tal recomendação não deve ser entendida como excluindo totalmente as situações contraintuitivas, assim como Gordon (1991), provavelmente, não advoga a apresentação exclusiva de situações paradoxais. Terceiro, assim como não há evidência suficiente para afirmar que a eliminação dos exemplos contraintuitivos conduziria a uma realização mais efetiva em certos objetivos afetivos e cognitivos, também não há evidência de que esses exemplos devam ser usados sempre ou mesmo durante a maior parte do tempo. Finalmente, a opção entre explorar uma situação contraintuitiva ou outra situação deve ser determinada por critérios de adequação.

## 3 Exploração de situações contraintuitivas por alunos do 11º ano e futuros professores de Matemática

As quatro questões seguintes, estudadas por Fernandes (1990), foram aplicadas a alunos do 11º ano (17 anos de idade), sem ensino de probabilidades (SEP), e do 4º ano de uma Licenciatura em Ensino de Matemática (futuros professores de Matemática), com ensino de probabilidades (CEP).

Em todas as quatro questões, consideram-se três partes: na primeira, o aluno é questionado sobre o acontecimento mais provável; na segunda parte é interrogado sobre o acontecimento menos provável, tendo em vista avaliar a coerência e consistência de sua resposta anterior; e, finalmente, na terceira parte é pedido ao aluno que indique o raciocínio subjacente às respostas dadas antes.

Assim, com as respostas às primeiras duas partes de cada questão definimos um par ordenado, sendo o primeiro termo a resposta à primeira parte e o segundo termo a resposta à segunda parte, representando por “ ” a resposta do aluno à segunda parte da questão em que afirmou que nenhuma das opções consideradas é menos provável[3]. Além disso, consideramos como resposta “incoerente” a afirmação da igual probabilidade de todos os acontecimentos na primeira parte e a indicação de um deles como sendo menos provável na segunda parte ou a indicação de um acontecimento mais provável na primeira parte e a afirmação da igual probabilidade de todos os acontecimentos na segunda parte.

*3.1 Concepções erradas do acaso*

1.1 Qual dos resultados seguintes, obtidos em seis lançamentos consecutivos de uma moeda equilibrada (não viciada), é o mais provável? (F representa a frente da moeda e V representa o seu verso)

a) F F V F V V
b) V F V F V F
c) V V F V V V
d) Ambas as sequências a) e b) são igualmente prováveis.
e) Todas as três sequencias a), b) e c) são igualmente prováveis.

1.2. Alguma das sequências anteriores, a), b) ou c), é menos provável (Sim/Não)? ____ Se sim, qual? ____

1.3. Que raciocínio utilizou para selecionar sua resposta?

Pela Tabela 1, podemos ver que os pares de respostas mais frequentes foram (e, ) e (d, c). No caso do par de respostas (e, ), que são as respostas corretas, ele foi o mais escolhido, quer pelos alunos com ensino de probabilidade (CEP) quer pelos alunos sem ensino de probabilidades (SEP). A escolha destas respostas baseou-se num dos raciocínios: “aceite pela escola”, “aleatoriedade” e “causalidade”. O raciocínio “aceite pela escola”, alicerçado na equiprobabilidade e independência dos acontecimentos ou no número de elementos do espaço amostral, foi referido apenas por seis alunos CEP; o raciocínio “aleatoriedade”, baseado no “acaso”, na “equiprobabilidade de V e F” ou na “referência ao espaço amostral”, foi o mais referido, tendo os alunos CEP centrado seus raciocínios, principalmente, na “equiprobabilidade de V e F” ou na “referência ao espaço amostral”, e os alunos SEP, preponderantemente, no “acaso”. O raciocínio “causalidade”, com origem em fatores causais, foi referido por cinco alunos SEP.

[3] Por exemplo, o par ordenado (d, c) significa que o aluno seleccionou a opção d) na primeira parte da questão e a opção c) na segunda parte da questão, enquanto o par ordenado (e, ) significa que o aluno seleccionou a opção e) na primeira parte da questão e afirmou que nenhuma das opções consideradas é menos provável na segunda parte da questão.

**Tabela 1 – Porcentagem de alunos nas respostas à questão 1**

| Respostas | 11º ano (SEP) (n=80) | Futuros professores (CEP) (n=32) |
|---|---|---|
| (a, b) | 8,8 | 0,0 |
| (d, c) | 30,0 | 31,2 |
| (e, ) | 43,7 | 59,4 |
| Incoerente | 12,2 | 9,4 |
| Outra | 6,3 | 0,0 |

Fonte: os autores.

Nota. SEP: alunos sem ensino de probabilidades; CEP: alunos com ensino de probabilidades.

O par de respostas (d, c) foi o segundo mais escolhido por ambos os grupos de alunos. Estas respostas erradas foram baseadas no raciocínio "propriedades da sequência": igual proporção de Vs e Fs. Verificou-se que este raciocínio nunca conduziu à resposta correta e porque os alunos avaliaram o processo de formação da sequência em função da semelhança com o processo correspondente na população, não considerando o número limitado de lançamentos, podemos sugerir que a "heurística da representatividade" (KAHNEMAN; TVERSKY, 1982) interveio em suas tomadas de decisão. Para além das "concepções erradas do acaso", esta heurística é também influenciada pela "insensibilidade às probabilidades prévias ou *a priori* dos resultados" − ignorando o impacto da informação prévia na probabilidade − e pela "insensibilidade à dimensão da amostra" – tendência para atribuir às pequenas amostras propriedades que apenas são válidas na população ou em grandes amostras. Kahneman e Tversky (1982) designam este fenômeno por lei dos pequenos números.

Quanto ao par de respostas (a, b), escolhido por poucos alunos SEP, sua seleção também se baseou no raciocínio "propriedades da sequência", agora centrado na ordenação da sequência, para além da igual proporção de Vs e Fs. Consequentemente, para estes alunos o acaso caracteriza-se pela ausência de regularidades.

Ao nível estatístico, o teste de $\chi^2$ com correção de continuidade não determinou diferenças estatisticamente significativas entre a correção/ não correção das respostas dos dois grupos de alunos (*p 0,199*).

*3.2 Influências devidas à recuperabilidade de exemplificações*

2.1 Um jogador da loto fez três apostas no concurso desta semana. Com qual das apostas, indicadas abaixo, tem mais chances de ganhar um prêmio?

a) 1 2 3 4 5 6
b) 5 13 24 25 30 42
c) 2 17 19 25 34 39
d) Tem as mesmas chances de ganhar um prêmio com qualquer das apostas b) e c).

e) Tem as mesmas chances de ganhar um prêmio com qualquer das apostas a), b) e c).

2.2. Relativamente às apostas anteriores, a), b) e c), o jogador tem menos chances de ganhar um prêmio com alguma delas (Sim/Não)? ____ Se sim, qual? ____

2.3. Que raciocínio utilizou para selecionar sua resposta?

Conforme se vê pela Tabela 2, nesta questão a maioria dos alunos CEP escolheu o par de respostas corretas (e, ), enquanto a maioria dos alunos SEP escolheu o par de respostas (d, a). No caso do par de respostas (e, ), baseadas no raciocínio "aleatoriedade", verificou-se que a maioria dos alunos CEP justificou suas respostas na "equiprobabilidade de cada número" e a maioria dos alunos SEP justificou suas respostas no "acaso".

**Tabela 2 – Porcentagem de alunos nas respostas à questão 2**

| Respostas | 11º ano (SEP) (n=80) | Futuros professores (CEP) (n=32) |
|---|---|---|
| (b, a) | 5,0 | 0,0 |
| (d, a) | 56,3 | 34,4 |
| (e, ) | 35,0 | 65,6 |
| Incoerente | 3,7 | 0,0 |

Fonte: os autores.

Nota. SEP: alunos sem ensino de probabilidades; CEP: alunos com ensino de probabilidades.

No caso do par de respostas (d, a), o raciocínio dos alunos foi preponderantemente influenciado pela "dispersão dos números", a partir de "números distribuídos e não consecutivos" e da "evocação de resultados observados na loto". Enquanto uma parte importante dos alunos SEP evocaram os resultados da loto para justificarem que a aposta formada pelos seis primeiros números era muito pouco provável de ocorrer, já os alunos CEP, geralmente, não referiram tal evocação. Esta evocação dos resultados da loto leva a admitir que os alunos recorreram à "heurística da disponibilidade" (TVERSKY; KAHNEMAN, 1982a) para responder a esta questão. Esta heurística, além das influências devidas à "recuperabilidade de exemplificações", também é afetada por influências devidas à "eficácia de procura num conjunto" − por exemplo, avaliar a probabilidade que uma palavra comece pela letra K ou em que K seja sua terceira letra num texto de inglês − e influências "de imaginabilidade" − na ausência de exemplificações existentes em memória, trata-se de avaliar a probabilidade por meio da facilidade da construção de exemplificações relevantes.

A escolha do par de respostas (b, a), selecionado por poucos alunos SEP, baseou-se na "dispersão dos números", agora com maior grau de sofisticação. Dentre as duas apostas b) e c), "razoavelmente distribuídas", estes alunos escolheram como sendo mais provável aquela que continha pelo menos um número em cada classe das dezenas, isto é, de 0-9, 10-19, 20-29, 30-39 e 40-47.

Nesta questão, verificou-se que os alunos CEP apresentaram mais frequentemente respostas corretas do que os alunos SEP e, ao nível estatístico, o teste de $\chi 2$ com correção de continuidade determinou diferenças significativas entre a correção/ incorreção das respostas dos dois grupos de alunos (*p  0,01*).

*3.3 Influências devidas à causalidade*

3.1 Qual dos acontecimentos seguintes é o mais provável?

a) Que uma rapariga tenha olhos azuis, se sua mãe tem olhos azuis.

b) Que uma mãe tenha olhos azuis, se sua filha tem olhos azuis.

c) Os acontecimentos a) e b) são igualmente prováveis.

3.2. Algum dos acontecimentos anteriores, a) ou b), é menos provável (Sim/ Não)? ____ Se sim, qual? ____

3.3. Que raciocínio utilizou para selecionar sua resposta?

Nesta questão,os pares de respostas (c,  ) e (a, b) foram os mais escolhidos pelos dois grupos de alunos, conforme se pode ver pela Tabela 3.

As respostas do par (c,  )[4] basearam-se, geralmente, num dos raciocínios: "simetria mãe-filha" e "simetria mãe-filha-pai". No primeiro raciocínio, os alunos escolheram a resposta com base na proposição: "se a mãe (filha) tem olhos azuis, então é provável que a filha (mãe) também tenha olhos azuis"; enquanto no segundo raciocínio, os alunos fizeram suas escolhas tendo em conta que "os olhos azuis da filha não dependem só do pai" ou "o fato de a mãe ter olhos azuis não implica que a filha também os tenha azuis". Apesar de ambos os raciocínios terem conduzido, geralmente, à mesma resposta, a utilização do raciocínio "simetria mãe-filha-pai" conduziu a respostas menos uniformes, tendo justificado também o par de respostas (a, b).

**Tabela 3 – Porcentagem de alunos nas respostas à questão 3**

| Respostas | 11º ano (SEP) (n=80) | Futuros professores (CEP) (n=32) |
|---|---|---|
| (a, b) | 70,0 | 50,0 |
| (b, a) | 1,3 | 3,1 |
| (c,  ) | 26,2 | 37,5 |
| Incoerente | 2,5 | 9,4 |

Fonte: os autores.

Nota. SEP: alunos sem ensino de probabilidades; CEP: alunos com ensino de probabilidades.

[4] Assumindo que a proporção de filhas com olhos azuis é igual à proporção de mães com olhos azuis na população, concluímos que a probabilidade de a filha ter olhos azuis se a mãe tem olhos azuis ($P(Y|X)$) é igual à probabilidade de a mãe ter olhos azuis se a filha tem olhos azuis ($P(X|Y)$). Trata-se, então, de provar que: $P(X)$  $P(Y)$ se, e somente se, $P(X|Y)$  $P(Y|X)$.

A seleção do par de respostas (a, b) foi, geralmente, baseada no raciocínio "causalidade" (TVERSKY; KAHNEMAN, 1982b), que é incompatível com o modelo probabilístico. Identificaram-se duas referências diferentes a este raciocínio, que parecem traduzir dois graus de adesão à causalidade: alguns alunos referiram explicitamente que a cor dos olhos dos filhos depende da cor dos olhos dos pais, mas não o contrário, enquanto outros não o referiram tão claramente.

A influência da "causalidade" na avaliação de probabilidades manifesta-se por intermédio de "assimetrias inferenciais" – em que as pessoas inferem com maior confiança efeitos das causas do que causas dos efeitos (como exemplifica a questão apresentada) – e da "significação causal e diagnóstica da evidência" – em que as pessoas tendem a realçar o impacto causal dos dados para o futuro e a negligenciar suas implicações diagnósticas acerca do passado.

Estatisticamente, a aplicação do teste de $\chi^2$ com correção de continuidade não determinou diferenças significativas entre a correção/ não correção das respostas dos dois grupos de alunos (*p  0,342*).

Como alguns dos alunos SEP tinham estudado o tema de genética na disciplina de Biologia, relacionado com esta questão, colocou-se a hipótese destes alunos apresentarem respostas mais frequentemente corretas do que os alunos SEP que não tinham estudado tal tema. Contudo, tal hipótese não se confirmou estatisticamente, não tendo o Teste de Fisher estabelecido diferenças significativas entre os dois grupos de alunos no que se refere à correção/ não correção das respostas (*p  0,141*). Em face deste resultado, pode ser dito que o ensino da genética não produziu melhoria significativa nas repostas (quanto à sua correção) nesta situação.

### 3.4 *Falácia da conjunção*

4.1. Qual das afirmações seguintes é a mais provável?

a) Um português teve um ou mais ataques cardíacos.

b) Um português teve um ou mais ataques cardíacos e tem mais do que 55 anos.

c) As duas afirmações a) e b) são igualmente prováveis.

4.2. Alguma das afirmações anteriores, a) ou b), é menos provável (Sim/ Não)? ____ Se sim, qual? ____

4.3. Que raciocínio utilizou para selecionar sua resposta?

Na Tabela 4, salienta-se que os alunos SEP escolheram mais frequentemente o par de respostas corretas (a, b) do que os alunos CEP. Nestas respostas, baseadas no raciocínio "aceite pela escola", parece ter sido suficiente constatar que a) continha b), ou seja, $A \quad A \quad B$, em que $A$  {portugueses que tiveram 1 ou mais ataques cardíacos} e $B$  {portugueses com mais de 55 anos}, para que os alunos tivessem escolhido a resposta correta.

**Tabela 4 – Percentagem de alunos nas respostas à questão 4**

| Respostas | 11º ano (SEP) (n=80) | Futuros professores (CEP) (n=32) |
|---|---|---|
| (a, b) | 13,8 | 6,3 |
| (b, a) | 50,0 | 71,8 |
| (c, ) | 17,5 | 6,3 |
| Incoerente | 18,7 | 15,6 |

Fonte: os autores.

Nota. SEP: alunos sem ensino de probabilidades; CEP: alunos com ensino de probabilidades.

Na escolha do par de respostas (b, a) verificou-se uma tendência contrária, sendo agora selecionado por mais alunos CEP. Estas respostas erradas, baseadas no raciocínio “fator idade”, podem ser explicadas pelo fato de os ataques cardíacos serem frequentes em portugueses com mais de 55 anos, o que pode ter levado os alunos a aderirem à proposição: “Se *B* é altamente representativo de *A*, então *P(A  B)  P(A)*”. Assim, os alunos parecem ter interpretado a opção b) da seguinte maneira: “Um português teve um ou mais ataques cardíacos se tem mais de 55 anos”. Para além desta explicação, designada por “falácia da conjunção” (TVERSKY; KAHNEMAN, 1983), alguns alunos, também incluídos neste raciocínio, podem ter-se centrado, relativamente à opção a), nos portugueses com idade inferior a 55 anos, pois não referiram explicitamente que tal opção incluía também os portugueses com idade superior ou igual a 55 anos.

A seleção do par de respostas (c,  ), escolhido por alguns alunos de ambos os grupos, baseou-se no raciocínio “negação do fator idade”. Este raciocínio, alicerçado na resistência física da pessoa e nos seus cuidados de saúde, levou os alunos a afirmarem que a idade da pessoa não era um fator decisivo para a ocorrência de ataques cardíacos.

Finalmente, no caso da resposta “incoerente”, a maioria das escolhas contraditórias parecem basear-se na seguinte ideia: “Se os acontecimentos são possíveis, então são igualmente prováveis”, o que claramente conflita com o conceito de probabilidade.

Ao nível estatístico, o Teste de Fisher não determinou diferenças significativas entre a correção/ não correção das respostas dos dois grupos de alunos (*p  0,342*).

## 4 Implicações didáticas da exploração de situações contraintuitivas

As quatro questões apresentadas na seção anterior, que correspondem a outras tantas situações contraintuitivas, mostram que os alunos de diferentes níveis de escolaridade aderem a ideias probabilísticas limitadas e/ou erradas quando confrontados com tais situações. Este resultado reforça o amplo consenso existente sobre a necessidade de iniciar o ensino das probabilidades logo nos primeiros níveis de escolaridade (BOROVCNIK; PEARD, 1996; BATANERO; HENRY; PARZYZ, 2005) de modo a desenvolver intuições sólidas e enraizadas nas experiências das crianças e jovens. Para Fischbein (1975), em contraste com Piaget e Inhelder (1951), o ensino formal desempenha um papel decisivo na promoção do pensamento probabilístico, atribuindo a prevalência de uma visão determinista do mundo ao contato tardio dos alunos com a incerteza. Ora, tal visão determinista, em sua perspectiva, constitui-se como a principal barreira à compreensão dos fenômenos aleatórios.

Por outro lado, apenas o reforço do ensino de probabilidades não parece suficiente para que os alunos desenvolvam intuições corretas, pois nos exemplos apresentados não se salientaram diferenças significativas na adesão às ideias erradas entre os alunos com ensino de probabilidades e sem ensino de probabilidades. No estudo mais amplo (FERNANDES, 1990), que incluía as quatro questões aqui apresentadas e outras quatro questões, verificou-se não existirem diferenças estatisticamente significativas entre os alunos com ensino de probabilidades e sem ensino de probabilidades ($p \;\; 0{,}069$), em relação ao valor do erro no conjunto das oito questões. Díaz (2009) observou também que estudantes do Primeiro Curso de Psicologia revelaram muitas dificuldades no conceito de probabilidade condicional, após terem estudado o conceito na disciplina de Análise de Dados, designadamente: confundindo acontecimentos independentes e mutuamente exclusivos, alterando os termos da probabilidade condicional, confundindo a probabilidade condicional com a probabilidade conjunta e atribuindo à probabilidade conjunta um valor superior à probabilidade simples, violando as regras lógicas do cálculo de probabilidades.

Ao não alterar substancialmente as ideias dos alunos, especialmente as erradas, o ensino regular de probabilidades revela suas limitações para lidar com as situações contraintuitivas. Em geral, Greer e Mukhopadhyay (2005) perspectivam que a melhoria do ensino de probabilidades passa pelo recurso a exemplos realistas e interessantes, defendo o aprofundamento de análises históricas, epistemológicas e culturais, o fortalecimento de conexões entre as probabilidades ensinadas na escola e as vidas dos estudantes e a educação para a modelação probabilística como instrumento de análise crítica de questões sociais e políticas. No caso das situações contraintuitivas, Lesser (1995) preconiza a estratégia de mudança conceptual e Fast (1997) advoga que a exploração de intuições ancoradoras, que se desenvolvem por meio de situações em que o aprendiz chega às respostas corretas, constitui um método plausível para adquirir conceitos matematicamente corretos. No caso das probabilidades, Fast (1997) gerou situações ancoradoras a partir da apresentação do problema de uma perspectiva diferente, utilizando situações concretas ou familiares, alterando os valores numéricos de modo a obter-se um caso extremo e utilizando gráficos.

Batanero e Sanchez (2005) acrescentam que a experimentação e a simulação constituem estratégias adequadas para lidar com intuições erradas (ver também Fernandes et al., 2009), as quais podem ser muito fortalecidas com o uso das tecnologias de informação e comunicação, pelo fato de: permitirem aos alunos apreciar a diferença entre os fenômenos empíricos e os modelos probabilísticos; existir *software* cada vez mais poderoso, de uso "amigável" e com maiores capacidades gráficas, que facilita a exploração e a *transnumeração* (transformações dos dados, como definida por Wild e Pfannkuch, 1999) de dados reais; a grande variedade de *software* de simulação existente, incluindo os *applets* que proliferam na internet, dirigidos à exploração de conceitos e procedimentos estocásticos particulares, permitir aos professores criarem micromundos em que os alunos podem confrontar suas concepções com os resultados das simulações.

Tomando como exemplo o problema de Monty Hall, enquanto situação contraintuitiva estudada por Batanero, Fernandes e Contreras (2009), podemos concluir que as situações contraintuivas verificam as condições de idoneidade didática, que Godino, Wilhelmi e Bencomo (2005) definem como a articulação das cinco componentes seguintes: (1) *idoneidade epistêmica ou matemática*, que se refere à representatividade dos significados institucionais implementados (ou pretendidos), a respeito de um significado de referência; (2) *idoneidade cognitiva*, que estabelece em que medida os significados pretendidos/implementados são acessíveis aos alunos, assim como se os significados pessoais alcançados pelos alunos são os pretendidos pelo professor; (3) *idoneidade interacional*, que se refere ao grau em que a organização do ensino permite identificar conflitos semióticos e resolvê-los durante o processo de instrução; (4) *idoneidade mediacional*, em que se verifica a disponibilidade e adequação dos recursos necessários para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem; e (5) *idoneidade emocional*, relativa ao interesse e à motivação dos alunos no processo de estudo.

Para além dos alunos, também os professores poderão retirar vantagens da exploração de situações contraintuitivas para sua atividade profissional. Em primeiro lugar, também eles terão a oportunidade de aprofundar sua compreensão acerca das ideias probabilísticas, o que se justifica pelos resultados apresentados e é defendido por Greer e Mukhopadhyay (2005); em segundo lugar, permite-lhes desenvolver maior abertura e compreensão face às dificuldades e erros dos alunos; e, por último, permite-lhes compreender as origens das ideias limitadas e/ou erradas dos alunos e, consequentemente, desafiá-los de forma a vencerem tais ideias.

Referências

AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION. **Teaching statistics:** guidelines for elementary through high school. Palo Alto, CA: Dale Seymour, 1994.

BATANERO, C.; FERNANDES, J. A.; CONTRERAS, J. M. Um análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. **Suma,** Valencia, n. 62, p. 11-18, 2009.

BATANERO, C.; HENRY, M.; PARZYZ, B. The nature of chance and probability. In: JONES, G. A. (Ed.). **Exploring probability in school:** challenges for teaching and learning (p. 15-37). Nova York: Springer, 2005.

BATANERO, C.; SANCHEZ, E. What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability? In: JONES, G. A. (Ed.). **Exploring probability in school:** challenges for teaching and learning. Nova York: Springer, 2005. p. 241-266.

BOROVCNIK, M.; BENTZ, H.-J.; KAPADIA, R. A probabilistic perspective. In: KAPADIA, R.; BOROVCNIK, M. (Ed.). **Chance encounters:** probability in education. Dordrecht: Kluwer Academic, 1991. p. 27-71.

BOROVCNIK, M.; PEARD, R. Probability. In: BISHOP, A. J. et al. (Ed.). **International handbook of mathematics education.** Dordrecht: Kluwer Academic, 1996. p. 239-287.

BURRILL, G. Implementing the standards: statistics and probability. **Mathematics Teacher,** Reston, v. 83, n. 12, p. 113-118, 1990.

CLEMENT, J. Overcoming students' misconceptions in physics: the role of anchoring intuitions and analogical validity. In: NOVAK, J. (Ed.). **Proceedings of the Second International Seminar, Misconceptions and Strategies in Science and Mathematics.** Ithaca, NY: Cornell University, 1987. v. I, p. 84-97.

DÍAZ, C. Sesgos en probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. In: FERNANDES, J. A. et al. (Org.). **Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola.** Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, 2009. p. 100-116.

FALK, R.; KONOLD, C. The pshycology of learning probability. In: GORDON, F.; GORDON, S. (Ed.). **Statistics for the twuenty-first century, MAA Notes 26.** Washington, DC: Mathematical Association of America, 1992. p. 151-164.

FAST, G. R. Using analogies to overcome student teachers' probability misconceptions. **Journal of Mathematical Behavior,** Norwood, v. 16, n. 4, p. 325-344, 1997.

FERNANDES, J. A. **Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos.** 1990. Dissertação (Mestrado em Informática no Ensino), Universidade do Minho, Braga. 1990.

FERNANDES, J. A. et al. A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. **Quadrante,** Lisboa, v. 18, n. 1-2, p. 161-183, 2009.

FISCHBEIN, E. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children.** Dordrecht: D. Reidel, 1975.

FISCHBEIN, E.; NELLO, M. S.; MARINO, M. S. Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, v. 22, p. 523-549, 1991.

FISCHBEIN, E.; SCHNARCH, D. The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. **Journal for Research in Mathematics Education,** Reston, v. 28, n. 1, p. 96-105, 1997.

GODINO, J.; WILHELMI, M. R.; BENCOMO, D. Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. **Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education,** Reston, v. 4, n. 2, p. 1-26, 2005.

GORDON, M. Counterintuitive instances encourage mathematical thinking. **Mathematics Teacher,** Reston, v. 84, n. 7, p. 511-515, 1991.

GREEN, D. R. A survey of probability concepts in 3.000 pupils aged 11-16 years. In: GREY, D. R. et al. (Ed.). **Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics.** Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust, 1983. v. 2, p. 766-783.

GREER, B.; MUKHOPADHYAY, S. Teaching and learning the mathematization of uncertainty: historical, cultural and political contexts. In: JONES, G. A. (Ed.). **Exploring probability in school:** challenges for teaching and learning. Nova York: Springer, 2005. p. 297-324.

HAWKINS, A.; KAPADIA, R. Children's conceptions of probability: a psychological and pedagogical review. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, v. 15, p. 349-377, 1984.

KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. Subjective probability: a judgment of representativeness. In: KAHNEMAN, D.; SLOVIC P.; TVERSKY A. (Ed.). **Judgment under uncertainty:** heuristics and biases. Cambridge: Cambridge University Press, 1982. p. 32-47.

KONOLD, C. Teaching probability through modeling real problems. **Mathematics Teacher,** Reston, v. 87, n. 4, p. 232-235, 1994.

LESSER, L. Countering indifference: using counterintuitive examples. **Teaching Statistics,** Oxford, v. 20, n. 1, p. 10-12, 1998.

LESSER, L. M. **The role of counterintuitive examples in statistics education.** 1995. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – University of Texas, Austin. 1994.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.** Trad. portuguesa de Eduardo Veloso et al. Lisboa: APM: IIE, 1991.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant.** Paris: Presses Universitaires de France, 1951.

STEINBRING, H.; VON HARTEN, G. Learning from experience: Bayes theorem: a model for stochastic learning situations? In: GREY, D. et al. (Ed.). **Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics.** Sheffield: Teaching Statistics Trust, 1983. v. 2, p. 701-713.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Availability: a heuristic for judging frequency and probability. In: KAHNEMAN, D. SLOVIC, P.; TVERSKY, A. (Ed.). **Judgment under uncertainty:** heuristics and biases. Cambridge: Cambridge University, 1982a. p. 163-178.

______. Causal schemas in judgment under uncertainty. In: KAHNEMAN, D. SLOVIC, P.; TVERSKY, A. (Ed.). **Judgment under uncertainty:** heuristics and biases. Cambridge: Cambridge University, 1982b. p. 117-128.

______. Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. **Psychological Review,** Washington, v. 90, n. 4, p. 293-315, 1983.

WATKINS, A. et al. Remedial statistics? The implications for colleges of the changing secondary school curriculum. In: GORDON, F.; GORDON, S. (Ed.). **Statistics for the twuenty-first century, MAA Notes 26.** Washington, DC: Mathematical Association of America, 1992. p. 45-55.

WILD, C.; PFANNKUCH, M. Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). **International Statistical Review,** Voorburg, v. 67, n. 3, p. 223-265, 1999.