Classificação Hierárquica dos Quadriláteros e Comunicação Matemática: Uma experiência com alunos do 4.º ano de escolaridade

Mariana Ferreira, Alexandra Gomes
CIEC/IE, Universidade do Minho
pg25526@alunos.uminho.pt, magomes@ie.uminho.pt

Número 5
Dezembro 2015
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR

Classificação Hierárquica dos Quadriláteros e Comunicação Matemática: Uma experiência com alunos do 4.° ano de escolaridade

Mariana Ferreira, Alexandra Gomes
CIEC/IE, Universidade do Minho
pg25526@alunos.uminho.pt, magomes@ie.uminho.pt

Resumo: *O presente artigo retrata parte de um projeto de intervenção pedagógica supervisionada cujos principais objetivos foram potenciar a compreensão de conceitos geométricos elementares e desenvolver a comunicação matemática nos alunos de uma turma de 4.° ano de escolaridade. De acordo com uma metodologia de investigação de caráter qualitativo, e adotando como estratégia de investigação o estudo de caso, procurou-se perceber que dificuldades se verificaram na construção e classificação de conceitos geométricos elementares e qual o papel desempenhado pela comunicação matemática na aprendizagem de conceitos geométricos elementares.*

Palavras-chave: geometria; quadriláteros; comunicação matemática; 1.° ciclo do Ensino Básico.

1 Classificação dos Quadriláteros e Comunicação Matemática

De acordo com o *National Council of Teachers of Mathematics* [10], do 3.° ao 5.° ano de escolaridade, os alunos devem centrar-se na identificação e descrição de propriedades de formas bi e tridimensionais, desenvolvendo, simultaneamente, o vocabulário especializado que lhes está associado. Para isso, "os alunos devem desenhar e construir formas, comparar e discutir os seus atributos, classificá-las, e elaborar e reflectir sobre definições, baseadas nas propriedades das formas" ([10], p. 191).

Fischbein e Mariotti consideram que o processo de classificação consiste em identificar propriedades comuns pertinentes que determinam uma categoria [4]. Tal como Fonseca refere, "observando os quadriláteros podemos descobrir algumas particularidades que os caracterizam e relacionam uns com os outros" ([5], p. 271). Neste sentido, De Villiers aborda dois tipos de classificação de quadriláteros: partitiva e hierárquica [1].

Numa classificação partitiva, "the various subsets of concepts are considered to be disjoint from one another" ([1], p. 11). O autor apresenta um exemplo de uma classificação partitiva (Figura 1), onde é percetível que os quadrados não são considerados losangos nem retângulos e, por sua vez, estes não são considerados paralelogramos.

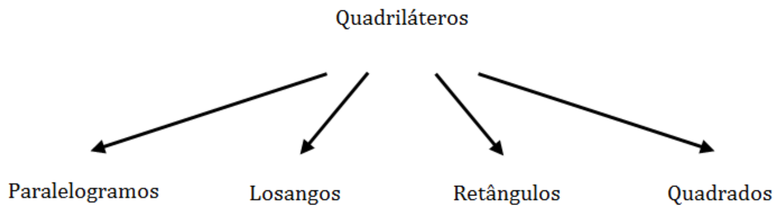

Figura 1: Exemplo de classificação partitiva.

Relativamente à classificação hierárquica, De Villiers esclarece que "by the term hierarchical classification is meant here the classification of a set of concepts in such a manner that the more particular concepts form subsets of the more general concepts" ([1], p. 11). Ora, tendo em conta o exemplo dado anteriormente, quando temos por base uma classificação deste tipo, os losangos e os retângulos são subconjuntos dos paralelogramos e os quadrados aparecem na interseção dos losangos e dos retângulos (Figura 2).

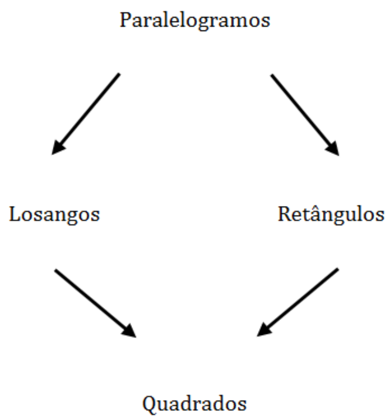

Figura 2: Exemplo de classificação hierárquica.

O processo de definir está, como é evidente, intimamente relacionado com a classificação de qualquer conjunto de conceitos. De Villiers exemplifica esta afirmação referindo que classificar hierarquicamente os paralelogramos como trapézios requer que definamos trapézio como um quadrilátero com pelo menos um par de lados paralelos [1]. Se, pelo contrário, definirmos trapézio como um quadrilátero com apenas um par de lados paralelos, estamos a fazer uma classificação partitiva. Assim, "under the exclusive definitions, parallelograms are not trapezoids. Under the inclusive definition, they are" ([12], p. 27).

Ora, apesar de a classificação partitiva poder ser aceite, a classificação hierárquica é preferencial. No que concerne especificamente à classificação de quadriláteros, os normativos legais em vigor em Portugal, atribuem uma preferência pela classificação hierárquica. A título de exemplo, pode ler-se os seguintes descritores: "reconhecer o quadrado como caso particular do retângulo" ([8], p. 6), "reconhecer o quadrado como caso particular do losango" ([8], p. 12) e "justificar que um paralelogramo é um trapézio" ([8], p. 50).

Erez e Yerushalmy afirmam que "learning in this sense means learning to analyse the attributes of different quads, to distinguish between critical and non-critical attributes of different quads, and also learning the hierarchy among quads" ([3], p. 272). A este respeito, Hershkowitz alerta-nos para a utilização frequente de exemplos protótipos dos conceitos. De acordo com a autora, "the prototype examples were usually the subset of examples that had the longest list of attributes - all the critical attributes of the concept and those specific (noncritical) attributes that had strong visual characteristics" ([7], p. 82). Note-se que *critical attributes* são aqueles que uma figura deve ter para ser considerada exemplo de um dado conceito, enquanto *noncritical attributes* apenas alguns exemplos do conceito possuem [7]. Ora, os *noncritical attributes* dos exemplos protótipos geralmente possuem fortes características visuais, criando, possivelmente, um efeito distrativo. Desta forma, estes podem sobrepor-se à definição do conceito, impedindo os alunos de perceber, por exemplo, tendo por base uma classificação hierárquica, que o quadrado é um retângulo. Os alunos podem criar, assim, uma "imagem limitada do conceito (...) que pode vir a tornar-se um verdadeiro obstáculo de aprendizagem" ([6], p. 99), sendo por isso "necessário que os alunos observem muitos exemplos de figuras correspondentes ao mesmo conceito geométrico, bem como uma variedade de figuras que não sejam exemplos desse conceito" ([10], p. 114), sendo que "é através das discussões de turma, acerca desses exemplos e contra-exemplos, que os conceitos geométricos são desenvolvidos e aperfeiçoados" ([10], p. 114).

Na verdade, o presente estudo tem por base uma perspetiva segundo a qual a matemática é vista como uma "construção cultural partilhada pelos intervenientes e as aulas são caracterizadas pelos processos de interacção social entre o professor e os alunos" ([11], p. 42) "com vista à negociação de conceitos matemáticos e à construção de novos conhecimentos" ([11], p. 43).

O Programa de Matemática para o Ensino Básico preconiza que os desempenhos que os alunos deverão evidenciar em cada ciclo devem concorrer, entre outros aspetos, para uma comunicação adequada à matemática, salientando o facto de que "os alunos devem ser incentivados a expor as suas ideias, a comentar as afirmações dos seus colegas e do professor e a colocar as suas dúvidas" ([9], p. 5). De facto, "aprender a analisar e a reflectir sobre o que os outros dizem é essencial ao desenvolvimento do conhecimento e da compreensão quer de conteúdos, quer de processos" ([10], p. 150).

2 O Estudo

O presente estudo é parte integrante de um Projeto de Intervenção Pedagógica Supervisionada realizado no âmbito da unidade curricular Prática de Ensino Supervisionada, incluída no plano de estudos do Mestrado em Ensino nos 1.° e 2.° ciclos do Ensino Básico da Universidade do Minho.

Numa primeira fase, a Prática de Ensino Supervisionada desenvolveu-se no 1.° ciclo do ensino básico, numa turma do 4.° ano de escolaridade pertencente a uma escola de Braga. A turma era constituída por 26 alunos com 9 anos de idade, sendo 15 do sexo feminino e 11 do sexo masculino.

Os principais objetivos deste projeto foram potenciar a compreensão de conceitos geométricos elementares e desenvolver a comunicação matemática. Neste sentido, foram desenvolvidas cinco intervenções, cada uma com a duração de 180 minutos. Sumariamente, na 1.ª intervenção pretendeu-se, essencialmente, desenvolver a compreensão do conceito de polígono; na 2.ª intervenção objetivou-se promover a classificação de polígonos atendendo ao número de lados e à regularidade e a compreensão do que são polígonos geometricamente iguais; na 3.ª intervenção pretendeu-se promover a identificação de propriedades de quadriláteros; na 4.ª intervenção objetivou-se promover a classificação hierárquica dos quadriláteros e potenciar a reflexão sobre as relações entre os quadriláteros; e na 5.ª intervenção pretendeu-se promover a descrição de quadriláteros e a representação de quadriláteros tendo por base uma descrição. Desenvolver a comunicação matemática foi um objetivo transversal a todo o projeto, pelo que foram criados em todas as sessões vários momentos de partilha de pensamentos matemáticos e discussão.

Tendo por base uma metodologia de investigação de caráter qualitativo e utilizando como estratégia de investigação o estudo de caso, pretendeu-se perceber que dificuldades se verificaram na construção e classificação de conceitos geométricos elementares e qual o papel desempenhado pela comunicação matemática na aprendizagem de conceitos geométricos elementares. Neste sentido, a interpretação e avaliação da intervenção baseou-se nos documentos construídos pelos alunos e nas interações aluno-aluno e alunos-professor. Em particular, estas foram possibilitadas graças à observação, ao registo audiovisual de cada intervenção e a registos escritos regulares. Note-se que, da turma, foram selecionados seis alunos, aos quais se atribuíram os seguintes nomes fictícios: Maria, Alice, Guilherme, Rui, Rita e Tomás.

O presente estudo incide, sobretudo, na classificação hierárquica dos quadriláteros, sendo apenas apresentadas a 3.ª e a 4.ª intervenções, intituladas, respetivamente, "Identificação de Propriedades de Quadriláteros" e "Classificação Hierárquica dos Quadriláteros". Uma vez que o Tomás estava doente e não esteve presente nestas duas intervenções, não serão apresentados quer dados escritos, quer orais, referentes a este aluno.

2.1 Identificação de Propriedades de Quadriláteros

Nesta intervenção pretendia-se desenvolver a comunicação matemática e promover a identificação de algumas propriedades geométricas, essencialmente, de quadriláteros. Neste sentido, foram criadas duas tarefas [1] às quais se seguiu um jogo[2].

A primeira tarefa era composta por quatro perguntas com a mesma estrutura. Objetivava-se, essencialmente, que os alunos, a partir de um conjunto de polígonos agrupados e de polígonos não agrupados, analisassem as suas propriedades e descobrissem o critério usado para os agrupar. Apesar de ter sido explicitado o que se pretendia com a tarefa, os alunos revelaram algumas dúvidas relativamente ao que era pedido, pelo que foi proposto que respondessem, inicialmente, apenas à primeira pergunta. Findo este momento, seguiu-se uma discussão e correção da resolução, no sentido de diminuir possíveis dificuldades relacionadas com este aspeto.

Perante o primeiro conjunto de polígonos apresentado (Figura 3), a Maria, a Alice, a Rita e o Rui responderam que a propriedade comum aos polígonos agrupados era o facto de terem lados paralelos e o Guilherme respondeu que os polígonos agrupados eram quadriláteros.

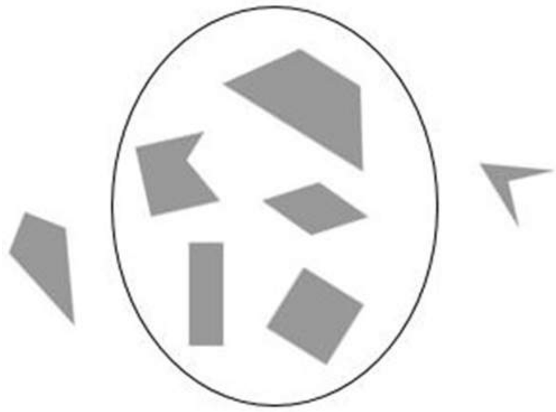

Figura 3: Conjunto de polígonos apresentado na pergunta 1.

A aluna que foi ao quadro explicar o seu raciocínio (Rita) indicou, em cada polígono, os lados paralelos. E, em grande grupo, vimos quantos pares de lados paralelos apresentava cada um dos polígonos agrupados. Concluímos, assim, que enquanto alguns polígonos tinham dois pares de lados paralelos, outros apresentavam apenas um par. A transcrição que se segue revela o diálogo que decorreu após esta constatação, onde se destaca a intervenção final da Rita.

[1]Apenas será aqui descrita a primeira tarefa realizada.

[2]Este jogo resulta de uma adaptação de um jogo intitulado *Guess what* da autoria de Johanson Terry, presente no sítio `http://illuminations.nctm.org/Lesson.aspx?id=2989`

Professora: Então vamos escrever a resposta. Qual foi o critério usado para agrupar os polígonos?
Maria: É ter lados paralelos.
Rita: Eu acho que só acrescentava uma coisa.
Professora: O quê?
Rita: É ter pelo menos um par de lados paralelos.

No final desta discussão, o Guilherme optou por não expor o seu raciocínio inicial, revelando concordar com a resposta dada pelos seus colegas. Note-se que a sua resposta não era aceitável, não só porque era apresentado um pentágono no grupo dos polígonos agrupados, mas porque os polígonos não agrupados eram quadriláteros.

Perante o segundo conjunto de polígonos apresentado (Figura 4), todos os alunos referiram que o critério usado para agrupar os polígonos foi ter dois pares de lados paralelos.

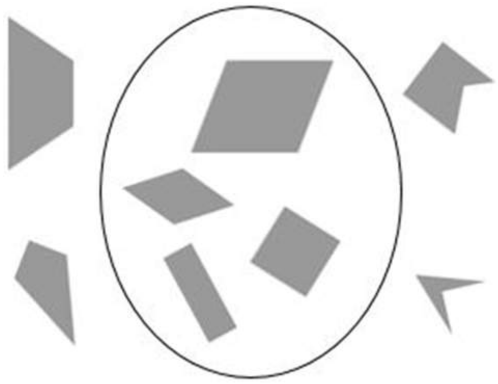

Figura 4: Conjunto de polígonos apresentado na pergunta 2.

No caso do terceiro conjunto de polígonos apresentado (Figura 5), a Maria, a Alice, a Rita e o Rui responderam que o critério usado para agrupar os polígonos foi ter todos os ângulos retos e o Guilherme referiu que foi ter quatro lados, quatro vértices, quatro ângulos e dois pares de lados paralelos.
No momento de partilha das diferentes respostas houve oportunidade para discutirmos diferentes formas de a escrever corretamente, tal como demonstra o seguinte diálogo.

Professora: Agora vamos ver como é que vocês escreveram.
Alice: A propriedade usada para agrupar os polígonos é que têm ambos quatro ângulos retos.
Professora: É verdade?
Alunos: Sim.
Professora: Alguém escreveu de forma diferente?
Rui: É igual, eu não disse quatro ângulos retos, disse todos os ângulos retos.
Catarina: Eu pus apenas ângulos retos.
Professora: Sim. E porque é que escreveste apenas?

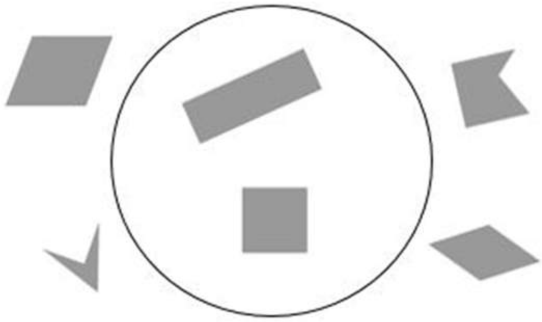

Figura 5: Conjunto de polígonos apresentado na pergunta 3.

Catarina: Porque nas de fora há figuras que também têm ângulos retos, mas não são todos [A aluna foi ao quadro indicar o tipo de ângulos nos polígonos não agrupados].
Rui: Ó professora, mas isso foi o que já dissemos.
Professora: Pois foi, mas foi dito de forma diferente. Tu disseste que os polígonos agrupados tinham todos os ângulos retos. Ela disse que tinham apenas ângulos retos. É o mesmo, mas foi outra forma de dizer corretamente.

Este diálogo foi importante para que os alunos analisassem e refletissem sobre o que os seus colegas escreveram, tomando consciência de que as respostas não têm necessariamente de ser iguais para serem igualmente corretas. O Guilherme voltou a dar uma resposta não aceitável, parecendo revelar, ainda, alguma incompreensão da tarefa. O aluno escreve, de facto, propriedades dos polígonos agrupados - "ter cada um quatro lados com dois pares de lados paralelos, quatro vértices e quatro ângulos" -, algumas das quais comuns aos polígonos não agrupados, não identificando, desta forma, o critério utilizado para os agrupar.

Perante o quarto conjunto de polígonos apresentado (Figura 6), a Alice, o Guilherme, a Rita e o Rui referiram que o critério usado para agrupar os polígonos foi ter todos os lados do mesmo polígono com igual comprimento. A Maria, apesar de ter identificado corretamente um critério usado para agrupar os polígonos, este diferiu do indicado pelos restantes colegas - "eu descobri que se nós dividirmos por aqui os polígonos agrupados [a aluna traçou as diagonais de cada um dos polígonos agrupados] formam-se triângulos geometricamente iguais" (Maria).
Aquando da partilha das respostas surgiu uma situação de discussão, a seguir transcrita, interessante do ponto de vista da comunicação matemática.

Dinis: A propriedade usada para agrupar os polígonos é ter os lados todos com a mesma medida.
Alice: [Dirigida ao Dinis] *Em todas as figuras o comprimento dos lados é o mesmo? Eu acho que não.*
Professora: Porquê?
Alice: Neste eu sei que cada lado mede dois centímetros. Neste eu já não me lembro, mas sei que mede diferente de dois centímetros. E neste aqui também. Por isso não podemos dizer que todos os polígonos [agrupados] *têm os lados com*

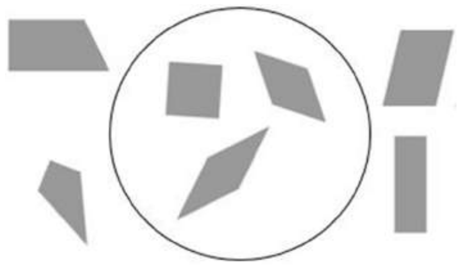

Figura 6: Conjunto de polígonos apresentado na pergunta 4.

o mesmo comprimento.
Professora: O que é que tu querias dizer (Dinis)?
Dinis: Que cada figura tem os lados com o mesmo comprimento.

De facto, o diálogo mostra que a Alice revela fazer uma análise crítica daquilo que o seu colega escreveu, ajudando-o a tomar consciência de que é necessário ter algum rigor linguístico ao escrever a sua resposta sob pena de, neste caso, não ser compreendido pelos seus colegas.

No final da intervenção foi realizado um jogo onde os alunos tinham de identificar e comparar propriedades de quadriláteros. Neste sentido, foi distribuído, por cada aluno, um envelope que continha cartões com representações de quadriláteros (Figura 7).

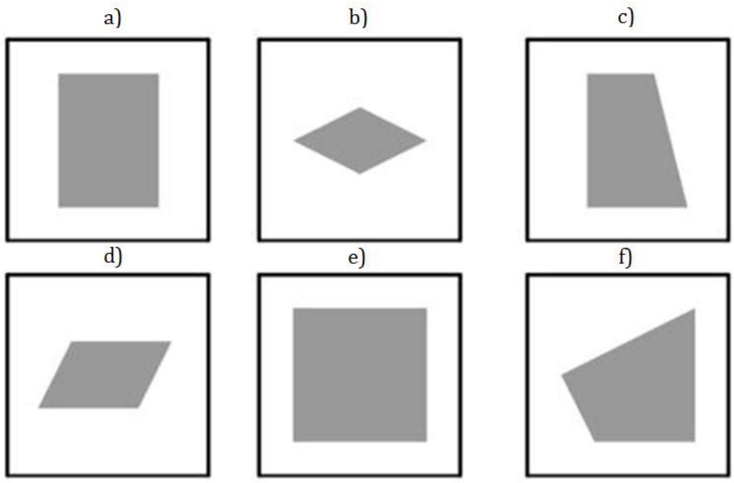

Figura 7: Cartões com representações de quadriláteros distribuídos pelos alunos.

Os alunos foram informados que iria ser selecionado um dos quadriláteros e que deveriam tentar descobrir qual era. Para isso, deveriam fazer perguntas acerca das propriedades que o quadrilátero possuía (Exemplo: O quadrilátero tem dois pares de lados paralelos?) e só iriam obter uma das seguintes respostas: “sim” ou “não”. Note-se que foi esclarecido que os alunos não poderiam utilizar a designação atribuída ao quadrilátero (Exemplo: É o quadrado?). À medida que as perguntas iam sendo respondidas, os alunos deveriam ir eliminando hipóteses e, quando descobrissem, deveriam partilhar com a turma, justificando o seu raciocínio. Para facilitar o momento de discussão que se seguiu, foram escritas no quadro todas as perguntas que os alunos fizeram, bem como todas as respostas.

Ressalve-se que o jogo contemplou quatro repetições. Contudo, apenas será dado destaque às duas primeiras jogadas por apresentarem mais relevância para o estudo.

Na Tabela 1 são apresentadas as perguntas colocadas durante a primeira jogada, bem como as respostas dadas e os quadriláteros que era possível eliminar com cada informação. Note-se que, durante as jogadas, houve alunos que julgavam ter descoberto o polígono sem, contudo, terem dados suficientes para o fazer. Estas intervenções apresentam-se nas tabelas relativas a cada jogada (Tabelas 1 e 2) sob a forma de uma linha sombreada.

Tabela 1: Primeira jogada.

Aluno	**Pergunta**	**Resposta**	**Quadriláteros Eliminados**
Dinis	Tem todos os lados com o mesmo comprimento?	Não	b), e)
André	Os ângulos têm todos a mesma amplitude?	Não	a)
Martim	Tem quatro lados?	Sim	-
Rui	Tem dois pares de lados paralelos?	Não	d)
Rui	Tem pelo menos um par de lados paralelos?	Não	c)

A Rita, depois das primeiras três perguntas e respetivas respostas disse que já tinha descoberto o polígono - considerava que era o polígono d). Neste sentido, percorremos cada uma das perguntas para aferirmos qual dos polígonos conseguiríamos eliminar com cada uma das informações. A aluna referiu que, com a primeira resposta, conseguiu eliminar o quadrilátero b) e e) e, com a segunda, o quadrilátero a). Note-se que a pergunta feita pelo Martim não fez sentido para a maioria dos alunos uma vez que todos os polígonos tinham quatro lados, não sendo possível eliminar nenhum quadrilátero - "Todos têm quatro lados. Esta pergunta é desnecessária" (Alice). Após este momento, a Rita percebeu que a conclusão a que tinha chegado era precipitada - "Professora, preciso de mais perguntas..." (Rita) -, pelo que o jogo prosseguiu.

No final da resposta à última pergunta do Rui quase todos os alunos levantaram o dedo porque já tinham descoberto que era o quadrilátero f). Mesmo assim, confirmamos que polígonos conseguiríamos eliminar com cada uma das informações. Depois de descoberto o polígono, resolvi fazer uma extensão ao jogo, tal como se pode ler na seguinte transcrição.

Professora: Vocês fizeram estas perguntas todas até descobrir. Agora que vocês sabem qual era o polígono, que pergunta é que vocês me fariam para descobrir mais rápido?
Dinis: Tem pelo menos um par de lados paralelos?
Professora: E eu dizia não. E eliminávamos quais?
Rui: Essa, essa, essa, essa e essa [a), b), c), d), e)].

Ora, este exemplo mostra que estes alunos revelam ser capazes de analisar os atributos dos diferentes quadriláteros representados e distinguir entre *critical attributes* e *noncritical attributes* [7]. De facto, rapidamente constataram que a propriedade "ter pelo menos um par de lados paralelos" era comum a todos os quadriláteros, exceto ao quadrilátero f).

Na segunda jogada (Tabela 2), depois de responder às duas primeiras perguntas, o Rodrigo achou que já tinha descoberto (o aluno pensou que era o polígono e)), pelo que fomos, novamente, confirmar. Apurou-se que o aluno considerou que o losango não quadrado não tinha todos os lados com igual comprimento. Note-se que o aluno tinha acertado no polígono, mas como não tinha informação suficiente para o afirmar, depois de a dúvida do aluno ter sido esclarecida, o jogo continuou.

Tabela 2: Segunda jogada.

Aluno	**Pergunta**	**Resposta**	**Quadriláteros Eliminados**
Catarina	Tem pelo menos um par de lados paralelos?	Sim	f)
Maria	Os lados têm todos o mesmo comprimento?	Sim	a), c), d)
Alice	Tem pelo menos um ângulo reto?	Sim	b)

Depois de respondida a última pergunta, um grande número de alunos voltou a levantar o dedo, uma vez que já tinha descoberto o polígono em questão - e). À semelhança do que foi feito na jogada anterior, no final, perguntei aos alunos que pergunta(s) me fariam para descobrir mais rapidamente o polígono.

Rita: Eu fazia uma pergunta que era: todos os seus ângulos são ângulos retos? E a professora dizia sim. E eliminávamos este, este, este e este [f), c), b) e d)].
Professora: Sim, e ficávamos com dois... por isso tínhamos que fazer outra.
Rui: Todos os seus lados têm igual comprimento?
Professora: E eu respondia não e eliminávamos esta [a)]. *E só com duas perguntas descobríamos.*

Na verdade, creio que a opção pela realização deste jogo foi profícua, na medida em que proporcionou um reforço das aprendizagens acerca das propriedades dos quadriláteros. Para além disso, os alunos encontraram no jogo uma motivação adicional, desenvolvendo, simultaneamente, a comunicação e o raciocínio matemático

2.2 Classificação Hierárquica dos Quadriláteros

Esta intervenção tinha como objetivo primordial a criação de um esquema de classificação hierárquica dos quadriláteros tendo por base as propriedades estudadas.

Num primeiro momento, foi realizada uma tarefa onde os alunos tinham de reconhecer se certos quadriláteros (Figura 8) detinham determinadas propriedades (pelo menos um par de lados paralelos, dois pares de lados paralelos, todos os ângulos internos com igual amplitude, todos os lados com igual comprimento).

Figura 8: Quadriláteros representados na tarefa.

Apesar de os alunos em estudo terem efetuado toda a tarefa com correção, houve alguns que, quando o quadrilátero apresentava dois pares de lados paralelos, não selecionaram a propriedade ter pelo menos um par de lados paralelos. Este aspeto foi debatido em grande grupo, tendo contribuído para o seu esclarecimento a intervenção dos restantes alunos - "Se tem dois [pares de lados paralelos] tem de ter pelo menos um" (Rui).

A este momento seguiu-se a apresentação do diagrama, que serviu de base ao esquema, contemplando apenas uma etiqueta (Figura 9). Antes de completarmos o diagrama numa cartolina de formato A2, este foi projetado e construído em discussão com os alunos, no computador.
O preenchimento do diagrama teve várias fases. Inicialmente, pediu-se aos alunos que organizassem, no mesmo, as diferentes propriedades contempladas na tarefa anterior, sendo neste momento irrelevante as designações atribuídas aos quadriláteros. Posteriormente, foi pedido que referissem onde deveríamos colocar, no diagrama, os diferentes quadriláteros presentes na tarefa anteriormente realizada, não tendo sido notada a presença de qualquer dúvida. Numa terceira fase, foi pedido aos alunos que se pronunciassem relativamente às designações dos quadriláteros. Note-se que estes apenas tinham conhecimento das designações quadrado, retângulo e losango, tendo sido apresentadas, neste momento, as designações trapézio e paralelogramo.

Numa última fase, foi pedido aos alunos que "definissem"[3] cada um dos tipos

[3]Ressalve-se que, apesar de se considerar que aprender a definir é um problema basilar da

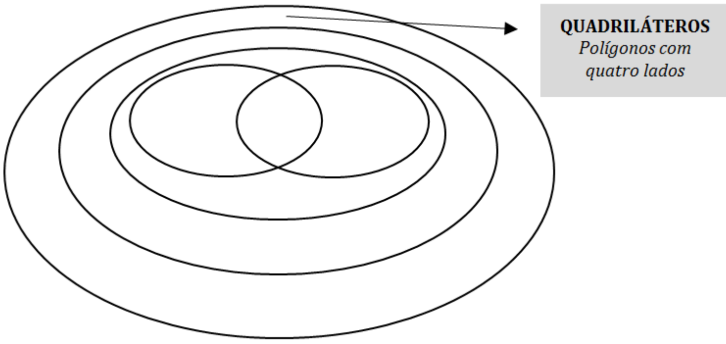

Figura 9: Diagrama que serviu de base ao esquema de classificação hierárquica dos quadriláteros.

de quadriláteros envolvidos. Comecei por perguntar-lhes o que era um trapézio. A Maria referiu que era um polígono que tinha pelo menos um par de lados paralelos. Neste sentido, representei um undecágono com um par de lados paralelos. Veja-se, na seguinte transcrição, o diálogo que se seguiu a este momento.

Maria: Paralelogramo é um trapézio com dois pares de lados paralelos.
Professora: Quando nós dizemos "paralelogramo é um trapézio", o que é que nós já estamos a dizer?
Rui: Que tem quatro lados e pelo menos um par de lados paralelos.
Alice: E só temos de acrescentar os dois pares de lados paralelos. Mas um trapézio não tem dois pares de lados paralelos...
Maria: Pode ter!
Rui: Pois pode, porque ali diz pelo menos. Um paralelogramo é um trapézio porque tem pelo menos um par de lados paralelos, mas tem dois. Então, é um trapézio com dois pares de lados paralelos.

De facto, apesar de a Alice já ter contactado com exemplos e contraexemplos do conceito em causa, o protótipo de trapézio ainda predomina. Isto é, vê o trapézio como um quadrilátero com exatamente um par de lados paralelos, não aceitando que o paralelogramo é um trapézio, baseando-se, desta forma, numa classificação partitiva.

Quando perguntei aos alunos o que consideravam ser um retângulo a resposta foi imediata - "Retângulo é um paralelogramo com todos os seus ângulos internos com igual amplitude" (Guilherme). No entanto, a Maria teve algumas dúvidas, tendo sugerido o acréscimo de uma condição, tal como se pode ver na seguinte transcrição.

Maria: Eu não discordo do que ele disse, mas acho que devíamos acrescentar que tem dois pares de lados paralelos.

educação matemática, sendo essencial envolver ativamente os alunos no processo de definir [2], não é expectável que os alunos nos primeiros anos produzam definições que obedeçam a todos os princípios lógicos. Por este motivo, sempre que se tratarem de definições construídas pelos alunos serão colocadas aspas.

Alice: Eu vou ajudar a (Maria). Nós ao dizermos paralelogramo já estamos a dizer isso.
Professora: (Alice), anda escrever aqui aquilo que nós já estamos a dizer quando escrevemos paralelogramo. [Figura 10]

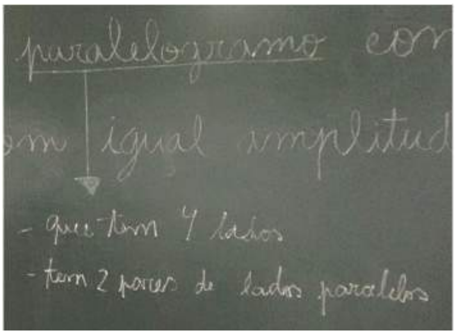

Figura 10: Intervenção da Alice no quadro.

Veja-se que, uma vez mais, foi fundamental a intervenção dos alunos, destacando--se a Alice, que revela compreender que uma definição estabelece condições necessárias e suficientes, tendo mostrado à Maria que a sua sugestão não era necessária à definição já construída. Relativamente à definição de losango, todos os alunos concordaram com a intervenção do Guilherme - "Um losango é um paralelogramo com todos os lados com o mesmo comprimento".

O processo de construção da "definição" de quadrado teve como ponto de partida uma intervenção do André, que foi escrita no quadro: "Um quadrado é um quadrilátero com dois pares de lados paralelos, com todos os seus lados com igual comprimento e com todos os seus ângulos com igual amplitude". Tendo por base esta intervenção, foram detalhadamente exploradas as afirmações da Rita - "Eu acho que podemos dizer de outra maneira. O quadrado é um retângulo com todos os seus lados com igual comprimento" - e do Guilherme - "Eu acho que o quadrado também é um losango com todos os ângulos internos com igual amplitude" (Figura 11).

Figura 11: Registo no quadro da intervenção do André, da Rita e do Guilherme.

A Maria, aquando desta discussão, apesar de ter concordado com a intervenção da Rita, mostrou alguma relutância em aceitar que o quadrado é um losango, tal como afirmado pelo Guilherme. A este respeito, veja-se a seguinte transcrição.

Professora: E por que é que um quadrado é um losango?
Maria: Não é...
Rui: É, é!
Professora: Bem, a (Maria) diz que não é, o (Rui) diz que é. (Maria) por que é que achas que um quadrado não é um losango?
Maria: Porque... calma. O quadrado tem todos os ângulos internos com igual amplitude...
Rui: Ó (Maria), então assim um quadrado também não pode ser um retângulo! Eu sei qual é a dúvida dela. É porque o losango não tem uma propriedade que o quadrado tem, mas o retângulo também não tem. (Maria), um quadrado é um losango porque tem todas as propriedades que um losango tem, que são ter quatro lados, ter dois pares de lados paralelos e ter todos os lados com igual comprimento, mas ainda tem mais uma que é ter todos os ângulos internos com igual amplitude, mas isso não quer dizer que ele não seja um losango.
Professora: Percebeste (Maria)?
Maria: Sim.

Na verdade, tal como sublinhado pelo Rui, por uma figura possuir determinadas propriedades, diferentes de outra, não significa que a primeira não possa pertencer a um subconjunto da segunda. A imagem do conceito de losango que a Maria parece ter é a de um paralelogramo com quatro lados congruentes, um par de ângulos agudos congruentes e um par de ângulos obtusos congruentes, vendo estas características como *critical attributes* [7]. Ora, como o quadrado não possui todos estes atributos, a Maria considera que o quadrado não é um losango.

No final da intervenção, colamos as respetivas etiquetas na cartolina e foram distribuídos mais cartões com representações de quadriláteros, de forma a minimizar a criação de imagens dos conceitos incorretas/incompletas, sendo pedido aos alunos que os colassem no local onde consideravam correto e justificassem a sua opção. Nesta atividade não se verificaram dificuldades.

3 Considerações Finais

Ao longo do presente estudo, foi possível verificar que as dificuldades observadas na construção e, consequentemente, na classificação de conceitos geométricos se relacionaram com o facto de o raciocínio geométrico dos alunos ser significativamente influenciado pelas suas restritas imagens mentais dos conceitos, associadas, frequentemente, a exemplos protótipos. Relacionada com esta dificuldade, que se prende com a natureza complexa dos conceitos figurativos e provavelmente com as experiências de aprendizagem proporcionadas até então, encontra-se a complexidade em analisar os atributos dos diferentes quadriláteros e em distinguir *critical attributes* e *noncritical attributes* [7].

Ao longo do estudo, foi também notória a crescente consciencialização, por parte dos alunos, da importância de comunicar o seu pensamento de forma coerente e clara, utilizando uma linguagem correta do ponto de vista matemático. Note-se que, para tal, foi essencial o papel desempenhado pelos restantes alunos, nomeadamente no que diz respeito à análise e reflexão feitas sobre as intervenções orais e/ou escritas. Foi visível que estas estratégias contribuíram, também, para o reconhecimento dos colegas como interlocutores a atender durante o processo de aprendizagem.

Na verdade, as oportunidades e incentivos dados aos alunos para comunicar matematicamente (quer escrita, quer oralmente) e o confronto de pensamentos matemáticos, aliado à consciencialização da importância do uso de uma linguagem matematicamente correta, desenvolveu, nos alunos, a capacidade de comunicação matemática. Esta afirmação corrobora a conclusão de Ponte et al. [11]:

> É ao escrever e falar sobre a Matemática, usando a linguagem não só para expressar os seus pensamentos, mas também para partilhar significados, para compreender os argumentos dos outros alunos e do professor, que os alunos desenvolvem a sua capacidade de comunicação matemática. ([11], p. 46)

Conclui-se, ainda, que a comunicação matemática teve um papel basilar para apoiar a compressão dos conceitos geométricos por parte dos alunos. Ora, durante o processo de comunicação foram negociados, em grande ou pequeno grupo, diferentes significados, o que contribuiu para que os alunos refletissem sobre a sua compreensão matemática e aprofundassem e alargassem os seus conhecimentos acerca de conceitos matemáticos.

Referências

[1] De Villiers, M. "The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals", *For the learning of mathematics*, 14(1), 11–18, 1994.

[2] De Villiers, M. "To teach definitions in geometry or teach to define?", *Proceedings of the twenty-second international conference for the psychology of mathematics education*, 2, 248–255, 1998.

[3] Erez, M., Yerushalmy, M. "If you can turn a rectangle into a square, you can turn a square into a rectangle: Young students experience the dragging toll", *International journal of computers for mathematical learning*, 11(3), 271–299, 2006.

[4] Fischbein, E., Mariotti, M. A. "Defining in classroom activities", *Educational studies in mathematics*, 34, 219–248, 1997.

[5] Fonseca, L. "Geometria no plano", *Elementos de matemática para professores do ensino básico*, P. Palhares (Ed.), 251–302, Lidel, 2004.

[6] Gomes, A. "Um estudo sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1.° ciclo: O problema dos conceitos fundamentais em geometria", Tese de Doutoramento, Universidade do Minho, 2003.

[7] Hershkowitz, R. "Psychological aspects of learning geometry", *Mathematics and cognition: a research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education*, J. Kilpatrick, P. Nesher (Eds.), 70–95, Cambridge University Press, 1990.

[8] Ministério da Educação e Ciência. *Metas curriculares de matemática para o ensino básico*, Lisboa: Direção Geral da Educação, 2012.

[9] Ministério da Educação e Ciência. *Programa de matemática para o ensino básico*, Lisboa: Direção Geral da Educação, 2013.

[10] National Council of Teachers of Mathematics. *Princípios e normas para a matemática escolar*, Associação de Professores de Matemática, 2007.

[11] Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J. M., Veiga, L., Viseu, F. "A comunicação nas práticas de jovens professores de matemática", *Revista portuguesa de educação*, 20(2), 39–74, 2007.

[12] Usiskin, Z., Griffin, J. *The classification of quadrilaterals*, Information Age Publishing, 2008.