REVISTA DE ESTUDIOS E INVESTIGACIÓN EN PSICOLOGÍA Y EDUCACIÓN
eISSN: 2386-7418, 2017, Vol. Extr., No. 06
DOI: https://doi.org/10.17979/reipe.2017.0.06.2752

Estratégias de resolução de problemas geométricos por futuros professores dos 1.º/2.º ciclos

Strategies for solving geometric problems by prospective teachers of the 1st/2nd cycles

Alexandra Gomes, Floriano Viseu
Universidade do Minho, Portugal

Resumo

A relevância que a resolução de problemas tem nos currículos de matemática levou-nos a averiguar as estratégias utilizadas por futuros professores na resolução de dois problemas de Geometria: um de contagem e outro de caminho mais curto. No problema de contagem, recorrem a esquemas para representar a situação e a tabelas para organizar e procurar regularidades nos dados. Nem todos procuram generalizar. Quanto ao problema de caminho mais curto, os futuros professores recorrem a esquemas para ilustrar a situação, que se tornam insuficientes para compreender e encontrar a solução do problema. Na resposta a este problema os futuros professores utilizam a linguagem natural sem qualquer sustentação matemática. A dificuldade que emerge nas suas resoluções indicia dever-se à ausência de mobilização de conhecimentos geométricos que ajudem a resolver o problema. *Palavras-chave:* resolução de problemas, estratégias de resolução, formação de professores.

Abstract

The relevance of problem solving in mathematics curricula has led us to investigate the strategies used by prospective teachers in solving two Geometry problems: one of counting and one of shorter path. In the counting problem, prospective teachers use schemas to represent the situation and tables to organize and look for regularities in the data. Not all of them tries to generalize. As for the shortest path problem, prospective teachers use schemes to illustrate the situation, which become insufficient to understand and find the solution to the problem. In response to this problem prospective teachers use natural language without any mathematical support. The difficulty that emerges in their resolutions is due to the lack of mobilization of geometric knowledge that help solve the problem.
Keywords: Problem solving, solving strategies, teacher training.

A resolução de problemas é uma das atividades que as sucessivas reformulações dos programas de Matemática de todos os níveis de escolaridade têm destacado como indispensável na aula de Matemática (ME, 2007; MEC, 2013). Trata-se de uma perspetiva que consigna à disciplina de Matemática uma dimensão formativa, ao promover o desenvolvimento de capacidades cognitivas do aluno e ao dar sentido ao que aprende, e uma dimensão utilitarista, ao aproximar essa atividade à que o aluno se depara em situações do quotidiano. Apesar da reconhecida importância da resolução de problemas, constata-se que o "hábito de resolver problemas (...) está pouco desenvolvido na maioria dos alunos" (Gomes, 2010). A sua visão da Matemática continua a ser essencialmente passiva. Os alunos parecem acreditar que primeiramente têm que dominar certas técnicas e métodos para depois os aplicarem, nomeadamente na resolução de problemas. Esta visão contraria totalmente as recomendações atuais da educação matemática que apontam para um ensino que valorize a Matemática como uma forma de pensar em detrimento de limitar o aluno a ouvir, ler e a repetir processos (Viseu, 2008) bem como a noção que adotamos de problema, como sendo uma situação desafiante para a qual o resolvedor não possui, à partida, um procedimento que conduza à solução (Kantowski, 1980). Deste modo, na resolução de problemas valoriza-se mais o processo do que o resultado, as formas de pensar e as estratégias adotadas, destacando a atividade do aluno na construção do seu conhecimento matemático.

Face às exigências desta abordagem educacional, centrada na resolução de problemas, torna-se fundamental que os futuros professores estejam preparados para implementar com sucesso um ensino que vá ao encontro das indicações atrás referidas. Assim, na sua formação, estes futuros profissionais devem ser confrontados com problemas vários pois só resolvendo problemas e tendo experiências similares às que terão que promover na sua prática pedagógica se tornarão bons resolvedores e compreenderão as potencialidades deste tipo de tarefa na dinamização do processo de ensino e de aprendizagem. Foi com este intuito que propusemos uma série de problemas a futuros professores e procuramos averiguar as estratégias utilizadas na sua resolução.

Resolução de problemas e estratégias de resolução

A resolução de problemas implica que os alunos se envolvam numa tarefa para a qual não dispõem de um procedimento que conduza à solução. Assim, é necessário que os alunos explorem os seus

Correspondência: Alexandra Gomes, magomes@ie.uminho.pt
Selección y *peer-review* bajo responsabilidad del Comité Organizador del XIV Congreso Internacional Galego-Portugués de Psicopedagogía

conhecimentos matemáticos e, através desse processo, desenvolvam novos conhecimentos. O ensino da matemática centrado na resolução de problemas requer, portanto, a ideia de que aprender Matemática é uma atividade de exploração, formulação de conjeturas, observação e experimentação. Esta ideia não se coaduna com uma "resolução isolada de problemas não rotineiros ou de problemas típicos dos manuais escolares" (NCTM, 1994, p. 97).

Na resolução de um problema é importante que se discutam múltiplas estratégias de resolução e que se apresentem diversas soluções de modo a combater a crença generalizada de que o principal objetivo é obter uma resposta correta, de forma rápida e por um determinado caminho. Além disso, o facto de um problema poder oferecer múltiplas estratégias de resolução, poder admitir várias (ou nenhuma) soluções pode contribuir para ajudar os alunos a adquirir "confiança e gosto pela tarefa que estão a realizar" (Vale, 1997, p. 31), levando-os a ver a matemática como algo a construir e não uma coisa já feita.

As estratégias de resolução de problemas, ou seja, o conjunto de técnicas que o resolvedor utiliza para abordar um problema no sentido de chegar à solução, têm sido estudadas e categorizadas por vários investigadores. Por exemplo, Musser e Shaughnessy (1980) apresentam cinco estratégias: (1) *tentativa e erro,* em que se tenta "adivinhar" a solução usando as informações dadas e verificando se a solução obedece ou não às condições do problema; (2) *uso de padrões,* em que se parte de casos particulares do problema e se generaliza para encontrar a solução; (3) *resolução de um problema mais simples*, que implica a resolução de um caso particular de um problema, ou uma transformação transitória de um problema complexo para uma versão simplificada; (4) *trabalhar em sentido inverso*, ou seja, começar pelo fim ou pelo que se quer provar, em vez de partir dos dados; (5) *simulação*, em que a solução do problema passa pela realização de uma experiência, criação de um modelo ou recolha de dados e uma tomada de decisão baseada na análise desses dados.

Vale e Pimentel (2004) para além destas estratégias referem ainda as seguintes: *usar dedução lógica/fazer eliminação*, em que se encaram todas as hipóteses e se vai eliminando, uma a uma, as que não são possíveis; *fazer um desenho, diagrama ou esquema* que represente a situação ou os dados; *fazer uma tabela ou fazer uma lista organizada* para representar, organizar e guardar informação.

Ainda que as figuras sejam "uma ajuda importante para problemas de todos os tipos, mesmo que nada tenham de geométrico" (Polya, 2003, p. 126), nos problemas de Geometria o recurso a figuras é quase inevitável.

Também a generalização é uma estratégia que pode ser útil na resolução de problemas porquanto pode levar de uma simples observação a uma lei geral. No entanto, é necessário ter em conta que qualquer resultado tem que ser estabelecido, definitivamente, por meio de uma demonstração rigorosa.

A resolução de problemas e a formação de professores

O modo como os professores podem desenvolver todo o potencial que existe num problema passa necessariamente pela experiência pessoal na resolução de problemas. Pólya afirmava que "aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os" (Pólya, 2003, p. 26). Por isso, torna-se indispensável que a resolução de problemas esteja presente na formação de futuros professores, especialmente de futuros professores dos níveis elementares.

Muitos dos estudantes, futuros professores, chegam às instituições de formação com uma visão muito tradicional da Matemática uma vez que durante o seu percurso académico apenas resolveram problemas rotineiros. Assim sendo, não dispõem de ferramentas para lidar com problemas (não rotineiros), não estão familiarizados com eles, nem sequer estão conscientes da importância deste tipo de tarefa. Cabe, pois, às instituições formadoras uma função crucial na preparação dos futuros professores para a sua prática letiva. Este não é um desafio fácil e há ainda poucos estudos que se debrucem sobre o papel da resolução de problemas na formação inicial de professores, sobretudo nos níveis elementares. Serrazina, Vale, Fonseca e Pimentel (2002) realizaram uma revisão de investigações centradas na temática da resolução de problemas na formação inicial de professores e referem algumas das conclusões desses estudos. Por exemplo, os estudos mostram que os futuros professores, em formação inicial, podem aprender a resolver problemas em Matemática e também podem ser ensinados a aplicar, de forma consciente, diversas estratégias de resolução. Concluem ainda que, apesar da resolução de problemas contribuir para desenvolver uma atitude positiva em relação à Matemática, os futuros professores sentem dificuldades na compreensão, generalização e argumentação, o que pode ser explicado pela falta de conhecimentos matemáticos destes alunos.

Método

No âmbito de uma unidade curricular do Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, 12 futuros professores resolveram um conjunto de problemas de Geometria, distribuídos por quatro tipos, de acordo com a tipologia adotada por Gay (1998): problemas de contagem, de caminho mais curto, da melhor forma e de empacotamento. Para este trabalho, selecionamos apenas as resoluções de um problema de contagem e outro de caminho mais curto (Figura 1).

Problema de contagem

Um triângulo construído com peças de madeira é rígido, mas um quadrado já não o é por se deformar. Para se prevenir que um quadrado se deforme, constroem-se as suas diagonais. Em geral, para se tornar um polígono rígido deve-se construir as suas diagonais. Quantas diagonais terá um polígono com 500 lados?

Problema de caminho mais curto

> Era uma vez uma camponesa que vivia numa casa na margem de um rio. Na mesma margem do rio, mas a alguma distância da casa, estava a sua vaca, amarrada a uma árvore. A camponesa vai mugir a vaca mas antes disso, tem que passar no rio para lavar o balde. Dos vários caminhos possíveis para percorrer, qual será o mais curto (se existir)?

Figura 1. Problemas propostos aos alunos

Durante as aulas, os problemas foram resolvidos numa primeira fase em pares e numa segunda fase em grande grupo. Neste trabalho, debruçamo-nos sobre as resoluções efetuadas em pares antes da sua discussão no grupo turma, com o objetivo de averiguar as estratégias utilizadas pelos futuros professores na resolução dos problemas propostos. Para responder a este objetivo adotamos uma abordagem qualitativa na procura de compreender os diferentes tipos de estratégia usados pelos futuros professores. Os dados recolhidos através das resoluções de problemas foram sujeitos à análise de conteúdo.

Análise de dados

Na resolução dos problemas propostos, de contagem e de busca do caminho mais curto, cada par de futuros professores recorreu a várias estratégias com a finalidade de, numa primeira instância, compreender a informação do problema em resolução e de, posteriormente, procurar dar-lhe resposta (Tabela 1).

Tabela 1.
Estratégias utilizadas na resolução de problemas

	Contagem						Caminho mais curto					
Estratégias (pares)	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
Fazer desenhos	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Construir tabela	×	×	×	×	×	×	–	–	–	–	–	–
Padrões/Generalizar	×	–	–	–	–	×	–	–	–	–	–	–

Nota: × refere-se a estratégia concretizada e – a estratégia não concretizada.

Em ambos os tipos de problemas, os futuros professores recorreram a desenhos/esquemas com o intuito de interpretar os dados dos problemas. Enquanto no problema de busca do caminho mais curto os futuros professores não apresentam mais nenhuma estratégia, no problema de contagem todos os pares introduziram dados numa tabela e somente os pares P1 e P6 definiram uma lei de formação e responderam ao problema.

Problema de contagem

A interpretação da informação do problema de contagem proposto proporcionou o desenho de figuras que representam os polígonos idealizados pelos futuros professores. Alguns pares representaram o triângulo, o quadrado, o pentágono e o hexágono para determinar o número de diagonais de cada um destes polígonos, como exemplifica a resolução do P1 (Figura 2):

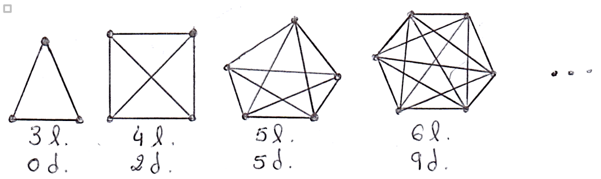

Figura 2. Desenho de polígonos e suas diagonais pelo P1

Outros pares prescindiram do triângulo e representaram outros polígonos, como, por exemplo, o octógono desenhado pelo P6 (Figura 3):

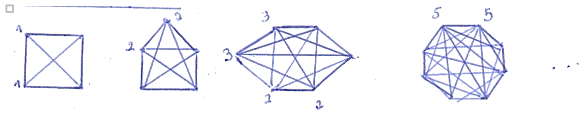

Figura 3. Desenho de polígonos e suas diagonais pelo P6

Este par (P6), em vez de indicar o número total de diagonais de cada polígono, indicou a sua contagem a partir dos vértices dos polígonos, embora sem ser exaustivo.

Dos seis pares de futuros professores somente um deles, P4, revelou não ter uma noção precisa de diagonal de um polígono com um número de lados superior a 4, como ilustra a Figura 4:

Figura 4. Desenho de polígonos e suas diagonais pelo P4

Após o desenho e com base no número de diagonais traçadas, alguns futuros professores relacionaram numa tabela esse número com o número de lados de cada um dos polígonos considerados, como exemplifica a resolução do P5 (Figura 5):

Figura 5. Relação entre o n.º de lados e o n.º de diagonais de polígonos pelo P5

Com o preenchimento de uma tabela com o número de lados e o número de diagonais dos polígonos, os futuros professores poderiam estabelecer regularidades que lhes permitisse efetuar generalizações próximas do número de diagonais de um dado polígono em função do seu número de lados.

A imprecisão que o P4 revelou ter de noção de diagonal de um polígono, nos desenhos que elaborou, traduz-se no número de diagonais que indica na tabela que preencheu (Figura 6).

Nome	lados	vértices	diagonais
triângulo	3	3	2
quadrado	4	4	3
pentágono	5	5	3
hexágono	6	6	4
heptágono	7	7	4
octágono	8	8	
eneágono	9	9	5
~~(h)~~ decágono			5

Figura 6. Relação entre o nº de lados e o de diagonais de polígonos pelo P4

Com os valores correspondentes ao número de lados (vértices) e de diagonais de cada um dos polígonos considerados, os futuros professores poderiam obter regularidades que lhes permitissem generalizar esse número para um polígono qualquer através de uma lei de formação, o que somente foi conseguido pelos P1 e P6 (Figura 7):

$$D = \frac{(m-3)m}{2} = \frac{m^2-3m}{2}$$

$$= \frac{(500-3)\,500}{2}$$

$$= \frac{248.500}{2}$$

$$= 124.250$$

Nº de vértices (m)	Nº de diagonais	
3	0	
4	2	+3
5	5	+4
6	9	+5
7	14	+6
8	20	
⋮	⋮	
m	$\frac{(m-3)\times m}{2}$	

Figura 7. Definição da lei de formação pelos P1 e P6

Ao definirem a lei de formação, os pares P1 e P6 estabeleceram o número de diagonais de um polígono convexo com 500 lados, como mostra a resposta dada pelo P6 (Figura 8):

Considerando que o padrão encontrado é válido, um polígono com 500 lados terá 124 250 diagonais.

$$m = 500 \rightarrow \frac{(500-3)\times 500}{2} = 124\,250$$

Figura 8. Resposta ao problema pelo P6

Ambos os pares partem do pressuposto de que, a partir dos casos particulares com que trabalharam, a lei que definiram é válida sem que tenham provado essa validade. Com base nesse pressuposto, estes pares foram os únicos que responderam ao problema.

Problema do caminho mais curto

Enquanto o problema de contagem proporcionou o recurso a várias estratégias, o mesmo não aconteceu com o problema de busca do caminho mais curto. Nas suas resoluções, os futuros professores recorreram a desenhos (esquemas) que não se tornaram elucidativas na exploração de conceitos geométricos que fossem plausíveis na sua resolução. O raciocínio mais linear foi desenvolvido pelo P4, para quem o caminho mais curto entre três pontos do plano é o que resulta do alinhamento desses pontos por um segmento de reta, como ilustra a seguinte figura, restringindo as condições do enunciado do problema (Figura 9):

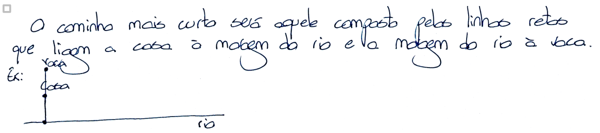

Figura 9. Determinação geométrica da busca do caminho mais curto entre três pontos pelo P4

Os pares P1, P2, P5 e P6 também restringiram as condições do enunciado problema ao representarem a situação por desenho. Apesar de não consideraram os três pontos colineares, todos eles assumiram que a 'vaca' e a 'camponesa' estavam à mesma distância do rio constituindo-se extremos de um segmento paralelo à reta que representava o rio. O seu raciocínio foi pautado pelo ponto médio do segmento de reta que une os pontos que representam a casa e a vaca, como ilustram as respostas dadas pelo P2 e P5 (Figura 10):

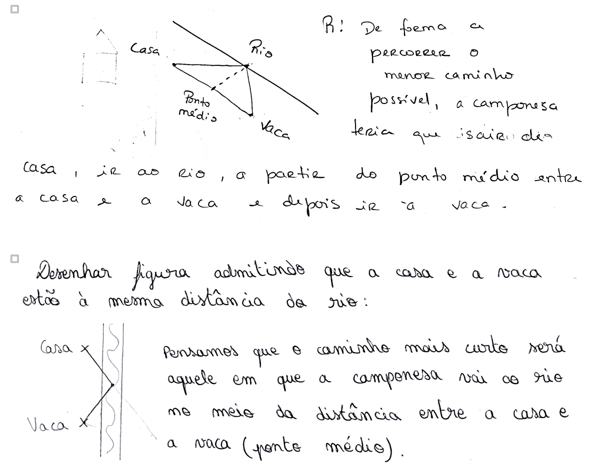

Figura 10. Determinação geométrica da busca do caminho mais curto entre três pontos pelos P2 e P5

Embora não façam referência à mediatriz de um segmento de reta, as respostas destes pares indiciam traduzir a propriedade deste conceito.

De forma similar indicia a resposta do P3, que é sustentada pela determinação da soma das distâncias da casa-rio-vaca, como revela a seguinte figura (Figura 11):

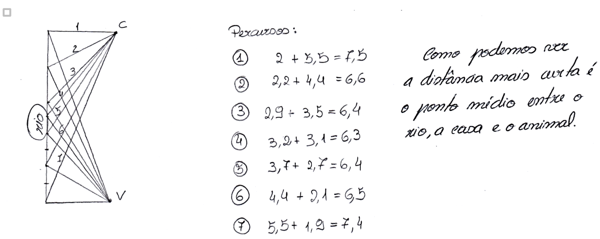

Figura 11. Determinação geométrica da busca do caminho mais curto entre três pontos pelo P3

Como a menor distância entre dois pontos se traduz na sua localização em linha reta, a este par faltou capacidade visual de ler a informação que emerge da construção que efetuaram. De modo a determinar o ponto onde a camponesa deveria ir ao rio, este par não se apercebeu que poderiam aplicar uma reflexão axial ao ponto C segundo a reta que representa o rio e de seguida unir o ponto transformado ao ponto V. A intersecção deste segmento com a reta que representa o rio daria a localização do ponto que seria o elemento chave da resolução do problema.

Considerações finais

Analisando as resoluções apresentadas pelos vários pares de futuros professores aos problemas propostos, verifica-se a pouca diversidade de estratégias de resolução utilizadas, o que indicia algumas dificuldades em explorar diferentes estratégias de resolução de problemas. No caso do problema de contagem, constatou-se um melhor desempenho. Os futuros professores usaram o desenho para representar a situação e, a partir daí trabalharam no problema aritmético (ou algébrico) com recurso a padrões com o objetivo de generalizar. Apesar disso não existiu nenhuma tentativa de validação da conjetura através da prova. Aparentemente estes futuros professores aceitam como certa uma lei geral sugerida por casos particulares.

No problema de caminho mais curto, os futuros professores revelaram maior dificuldade possivelmente por este tipo de problemas estar quase ausente na sua experiência escolar. Enunciados que não orientem possíveis processos de resolução faz com que se sintam perdidos e não consigam dar sentido a conhecimentos adormecidos. Neste problema os futuros professores consideraram restrições ao enunciado do problema o que condicionou o raciocínio. Além disso, não foram capazes de mobilizar os seus conhecimentos geométricos, em particular os relacionados com a reflexão axial, para a resolução do problema.

Em suma, parece ser possível constatar, com este trabalho, a importância de envolver os futuros professores em atividades de resolução de problemas, que os desafiem a pensar sobre os conhecimentos adquiridos que podem suportar a resolução dos mesmos e desenvolver novos conhecimentos. Também o contacto com diferentes estratégias é muito relevante para a formação do futuro professor, uma vez que lhe permitirá enriquecer o seu próprio pensamento e melhorá-lo.

Referências

Gay, D. (1998). *Geometry by discovery*. New York: John Wiley & Sons.

Gomes, A. (Ed.) (2010). *Problemas e investigações. Exemplos e experiências no pré-escolar e 1.º ciclo*. Braga: AEME.

Kantowski, M.G. (1980). Some thoughts on teaching for problem solving. In R.E. Reys (Ed.), *Problem solving in school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Autor.

MEC (2013). *Programa de matemática para o ensino básico*. Lisboa: Autor.

Musser, G. L., &, Shaughnessy, J. M. (1980). Problem solving strategies in school mathematics. In S. Krulik (Ed.), *Problem Solving in School Mathematics* (pp.136-145). Virginia: NCTM.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: APM e Instituto de Inovação Educacional (Tradução portuguesa do original de 1991).

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva (tradução portuguesa do original de 1945).

Serrazina, L., Vale, I., Fonseca, L. & Pimentel, T. (2002). Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores. Em J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 42-58). Coimbra: SPCE – Secção Educação Matemática.

Vale, I. (1997). Desempenhos e concepções de futuros professores de matemática na resolução de problemas. In D. Fernandes, F. Lester, A, Borralho e I. Vale. (Coords), *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática: múltiplos contextos e perspectivas* (pp. 1-37). Aveiro: GIRP.

Vale, I. & Pimentel, T. (2004). Resolução de Problemas. In P. Palhares (Ed), *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico* (pp.7-51). Lisboa: Lidel.

Viseu, F. (2008). *A formação do professor de Matemática, apoiado por um dispositivo de intervenção virtual no estágio pedagógico*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado pelo CIEd — Centro de Investigação em Educação, UID/CED/01661/, Instituto de Educação, Universidade do Minho, através de fundos nacionais da FCT/MCTES-PT; e pelo CIEC - Centro de Investigação em Estudos da Criança da Universidade do Minho, por fundos nacionais da FCT e cofinanciado pelo FEDER através do COMPETE 2020 –POCI com a referência POCI-01-0145-FEDER-007562.