CB-523

# EXPLORAÇÃO DE UMA TAREFA DE PROBABILIDADES POR FUTUROS EDUCADORES E PROFESSORES DOS PRIMEIROS ANOS ESCOLARES

José António Fernandes – Floriano Viseu
jfernandes@ie.uminho.pt – fviseu@ie.uminho.pt
Universidade do Minho, Portugal

Núcleo temático: I. Ensino e aprendizagem da matemática em diferentes modalidades e níveis educacionais
Modalidade: CB
Nível educativo: Universitário
Palavras-chave: competência; Probabilidades; educadores e professores dos primeiros anos.

**Resumo**

*Atualmente, em muitos países, nos quais se inclui Portugal, o tema de Probabilidades e Estatística faz parte dos currículos escolares desde o início da escolarização até ao final do ensino secundário. Ora tais alterações curriculares destacam a necessidade de realizar investigações tendo em vista adequar a formação dos futuros professores às novas exigências. Assim, no presente estudo investiga-se a competência dos futuros professores em Probabilidades. Mais especificamente, trata-se de um estudo focado no conhecimento do conteúdo de Probabilidades e nele participaram 59 estudantes do curso de Licenciatura em Educação Básica, a quem foi pedido para resolverem uma tarefa de probabilidades, aplicada no contexto de avaliação formal dos alunos no âmbito da unidade curricular de Números e Probabilidades. Em termos de resultados, verificou-se que os estudantes revelaram uma competência um tanto limitada, destacando-se justificações das suas respostas a um nível intuitivo, a ausência de justificação ou justificações não inteligíveis e a adesão a raciocínios errados, de que se destaca o enviesamento de equiprobabilidade. Face às dificuldades e erros observados recomenda-se um aprofundamento da formação destes estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, uma vez que o conhecimento do conteúdo é um requisito necessário a um ensino adequado do tema.*

## Introdução

Nos últimos tempos, o ensino de Probabilidades e Estatística tem ganho cada vez mais relevância nas escolas, podendo concluir-se que a visibilidade social desta temática se tem repercutido nas escolas. Em Portugal, os conteúdos de Probabilidades e Estatística constituem o tema Organização e Tratamento de Dados, o qual faz parte dos programas escolares da disciplina de Matemática desde o início da escolaridade até ao final do ensino secundário (Ministério da Educação e Ciência, 2013, 2014).


ISBN 978-84-945722-3-4

Ora, o ensino deste tema desde o início da escolaridade implica formar os professores de modo a poderem proporcionar um ensino adequado a esses alunos, até porque o tema de Probabilidades e Estatística tem sido pouco valorizado na formação inicial dos professores de Matemática (Fernandes, Sousa & Ribeiro, 2004).

Tal formação, versando o conhecimento do conteúdo e o conhecimento didático (Godino, 2009), tornou-se ainda mais premente a partir do ano de 2007, altura em que a temática de Probabilidades e Estatística foi introduzida pela primeira vez no programa escolar de matemática dos primeiros anos de escolaridade.

## Marco teórico

Em termos teóricos, o estudo baseia-se em alguns pressupostos do Enfoque Ontossemiótico do conhecimento e instrução matemática, de Godino e colaboradores (e.g., Godino, Batanero & Font, 2007). Neste paradigma investigativo assume-se que o significado matemático é o conjunto das práticas discursivas e atuativas usadas para resolver as situações-problema de matemática, distinguindo-se dois tipos de significado (Godino & Batanero, 1994): o significado institucional, que se refere às práticas de um grupo de pessoas (instituição), interessadas numa mesma classe de situações-problema; e o significado pessoal, que se refere às práticas de uma pessoa particular.

A aquisição dos significados institucionais é a meta última da escola, sendo a competência matemática dos alunos avaliada pela conformidade dos seus significados pessoais com os significados pessoais. Assim, o aluno será mais competente quanto mais significados pessoais coincidirem com significados institucionais. Em contraste, as discrepâncias entre os significados pessoais e institucionais originam conflitos semióticos, que devem ser resolvidos para que os alunos desenvolvam a sua competência matemática.

## Antecedentes

São variados os estudos que mostram dificuldades dos alunos em conteúdos de Probabilidades, em que alguns desses estudos se focam em futuros professores dos primeiros anos escolares, como acontece no presente estudo.

Num estudo, em que participaram 37 futuros professores do 1.º e 2.º ciclo, Fernandes e Barros (2005) verificaram dificuldades dos futuros professores em formular acontecimentos, em



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

compreender acontecimentos compostos e frequentemente recorriam a um raciocínio aditivo para comparar probabilidades.

Também Contreras, Estrada, Díaz e Batanero (2010), num estudo com 69 futuros professores do ensino primário espanhol, a partir de dados apresentados numa tabela de dupla entrada, concluíram que os futuros professores tiveram muita dificuldade no cálculo da probabilidade condicionada e conjunta e alguns desses futuros professores aderiram à falácia da condicional transposta (trocar o acontecimento condicionante com o condicionado) e à falácia da conjunção (atribuir à probabilidade da interseção de dois acontecimentos um valor superior à probabilidade de um desses acontecimentos).

Analogamente, Vásquez e Alsina (2015), utilizando o marco do conhecimento didático-matemático de Godino (2009), concluíram que os professores do ensino primário do Chile revelaram um conhecimento insuficiente de Probabilidades.

Envolvendo futuros professores dos primeiros anos de escolaridade, Fernandes, Viseu e Gea (2016) constataram que os alunos, excetuando o caso da probabilidade simples, demonstraram um desempenho muito limitado: 60% nos itens de definição de acontecimentos certos; 72% nos itens de probabilidade simples; 56% nos itens de probabilidade condicionada e 26% nos itens de probabilidade conjunta.

Fernandes, Gea e Batanero (2016) propuseram também uma tarefa de cálculo de probabilidades em experiências compostas a futuros professores do 1.º e 2º ciclo, como acontece no presente estudo. Novamente os futuros professores exibiram um baixo desempenho, com percentagens de respostas corretas inferiores a 40% e cujos principais erros ocorreram ao relacionar incorretamente probabilidades das experiências simples com a probabilidade da experiência composta, não considerar a não reposição na experiência ou não atender à ordem para identificar os resultados da experiência.

## Método

Com o presente estudo pretende-se averiguar o conhecimento de probabilidades de futuros professores dos primeiros anos. Participaram na investigação 59 alunos que se encontravam a frequentar o 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica, de uma universidade do Norte de Portugal.


ISBN 978-84-945722-3-4

Os alunos resolveram várias tarefas sobre probabilidades num contexto de avaliação formal em sala de aula, das quais é aqui apresentada apenas uma (Figura 1). Na altura em que os alunos resolveram a tarefa eles já tinham estudado o tema de Probabilidades.

Considere os três seguintes resultados do lançamento de um dado três vezes consecutivas:

**A**: Obter um 4, um 2 e um 3;
**B**: Obter duas vezes um 3 e uma vez o 2;
**C**: Obter três vezes o 3.

**a)** Algum dos resultados anteriores é mais provável? Qual? Porquê?
**b)** Algum dos resultados anteriores é menos provável? Qual? Porquê?

**Figura 1. Enunciado da tarefa proposta aos futuros professores.**

A tarefa envolve a avaliação de probabilidades em experiências compostas, diferindo de outras que são antes referidas pelo facto de poder ser resolvida por contagem dos casos favoráveis e/ou possíveis. Em termos de análise de dados, estudámos as resoluções dos alunos quanto ao tipo de resposta (correta e incorreta) e quanto aos erros cometidos, usando tabelas para resumir as frequências obtidas.

## Resoluções dos futuros educadores e professores

Na resolução da tarefa esperava-se que os alunos se focassem no número de casos favoráveis de cada um dos acontecimentos (6 casos favoráveis a A, 3 casos favoráveis a B e 1 caso favorável a C), já que nas aulas de Probabilidades eles não tinham estudado Combinatória. Conhecendo o número de casos favoráveis, porque o número de casos possíveis é sempre o mesmo, os alunos podem identificar o acontecimento mais provável com o que tem maior número de casos favoráveis e o acontecimento menos provável com o que tem menor número de casos favoráveis, podendo ainda determinar as respetivas probabilidades.

A seguir apresentam-se os resultados do estudo, começando por classificar as respostas dos alunos em corretas e incorretas, continuando-se com a apresentação dos processos de resolução subjacentes às respostas. Na Tabela 1 podem-se observar as frequências dos tipos de respostas apresentadas pelos alunos.

**Tabela 1 – Frequências (em %) dos tipos de respostas dos alunos**

| | Frequência | |
|---|---|---|
| Tipo de resposta | a) | b) |
| Correta | 31 (52,5) | 35 (59,3) |



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

| | | |
|---|---|---|
| Incorreta | 24 (40,7) | 18 (30,5) |
| Não respostas | 4 (6,8) | 6 (10,2) |

Apesar das dificuldades experienciadas por muitos alunos, verifica-se que a maior parte deles respondeu corretamente a ambos os itens. Por outro lado, verificou-se que poucos alunos (5,1%) foram inconsistentes nas suas respostas aos dois itens, pois afirmaram a equiprobabilidade num dos itens a) ou b) e identificaram um acontecimento mais provável em a) ou um acontecimento menos provável em b).

Relativamente aos processos de resolução desenvolvidos pelos alunos nas suas respostas, podemos constatar na Tabela 2 que eles foram diversificados e que conduziram a respostas corretas e erradas, conforme será clarificado a seguir.

**Tabela 2 – Frequências (em %) dos processos de resolução dos alunos**

| | Frequência | |
|---|---|---|
| Processos de resolução | a) | b) |
| Enumeração/Probabilidade | 15 (25,4) | 19 (32,2) |
| Argumento intuitivo | 10 (16,9) | 10 (16,9) |
| Enviesamento de equiprobabilidade | 12 (20,3) | 11 (18,6) |
| Total de números diferentes | 6 (10,2) | 3 (5,1) |
| Tabela de dupla entrada | 3 (5,1) | — |
| Repetição do enunciado/Não inteligível/Sem justificação | 9 (15,3) | 10 (17,0) |

Como podemos observar na Tabela 2 a enumeração dos casos favoráveis e/ou cálculo das probabilidades foi o processo de resolução mais adotado pelos alunos. Na Figura 2 vemos que o aluno A18 estabeleceu e comparou apenas os casos favoráveis.

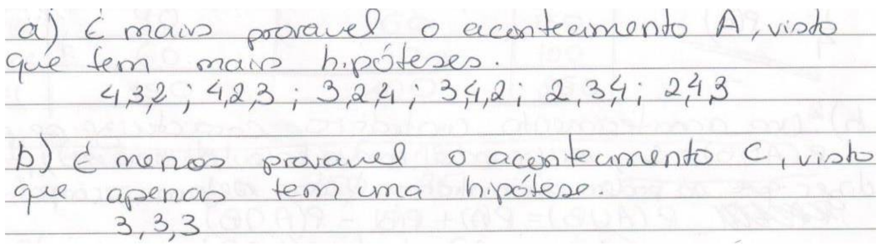


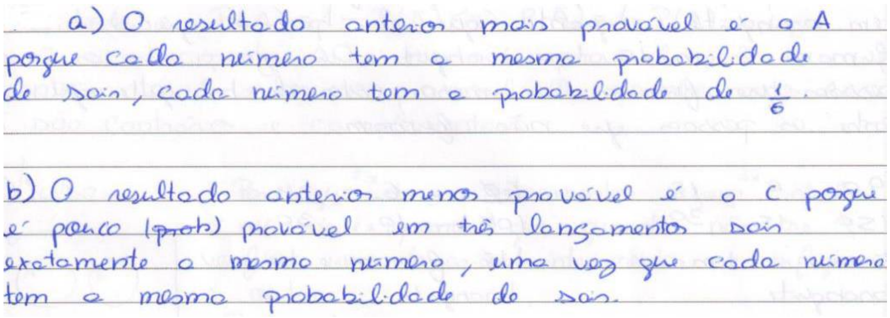

**Figura 2. Resolução da tarefa pelo aluno A18.**



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Nalguns casos, os alunos determinaram também o número de casos possíveis e, de seguida, calcularam e compararam as respetivas probabilidades. Este processo de resolução conduziu quase sempre à resposta correta, com apenas dois alunos a responderem incorretamente devido a apresentarem enumerações incompletas. Entre os dois itens, verificou-se um melhor desempenho no item b), o que significa que os alunos tiveram maior facilidade em identificar o único caso favorável do acontecimento C $(3, 3, 3)$.

No argumento intuitivo os alunos responderam sempre corretamente e basearam as suas respostas na ideia de que existem mais casos favoráveis com três resultados diferentes do com o mesmo resultado, conforme se pode verificar na Figura 3.

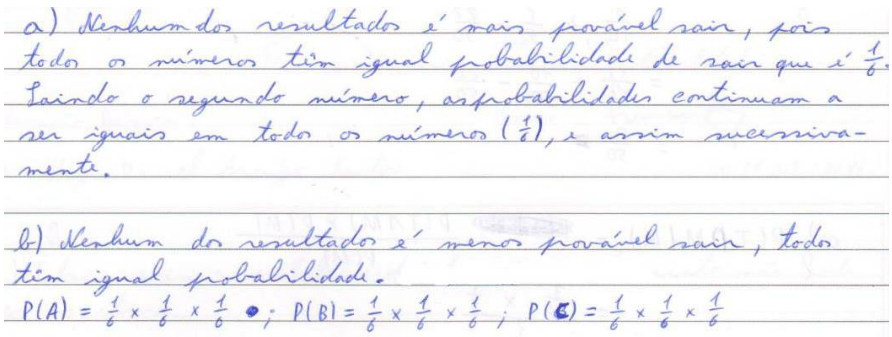

a) O resultado anteror mais provável é o A porque cada número tem a mesma probabilidade de sair, cada número tem a probabilidade de $\frac{1}{6}$.

b) O resultado anterior menos provável é o C porque é pouco (prob) provável em três lançamentos sair exatamente o mesmo número, uma vez que cada número tem a mesma probabilidade de sair.

**Figura 3. Resolução da tarefa pelo aluno A56.**

Embora o aluno A56 se foque na probabilidade do resultado do lançamento de um dado, a sua reposta pressupõe a consideração de diferentes casos favoráveis/possíveis.

O enviesamento de equiprobabilidade foi o segundo raciocínio mais adotado pelos alunos e conduziu sempre a respostas incorretas. Este raciocínio consiste em atribuir a mesma probabilidade a todos os acontecimentos, sem ter em conta o espaço amostral em questão. Neste caso, os alunos foram muito influenciados pela equiprobabidade dos resultados do lançamento de um dado, como se constata com a resposta da Figura 4.


a) Nenhum dos resultados é mais provável sair, pois todos os números têm igual probabilidade de sair que é $\frac{1}{6}$. Saindo o segundo número, as probabilidades continuam a ser iguais em todos os números ($\frac{1}{6}$), e assim sucessivamente.

b) Nenhum dos resultados é menos provável sair, todos têm igual probabilidade.

$P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ ; $P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ ; $P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$

**Figura 4. Resolução da tarefa pelo aluno A32.**


ISBN 978-84-945722-3-4

No raciocínio "total de números diferentes", os alunos parecem ter considerado o total de números diferentes no primeiro lançamento, reduzindo de uma unidade no lançamento seguinte, até ao valor mínimo de um, como se envolvesse a não reposição. Na Figura 5 exemplifica-se este processo de resolução.

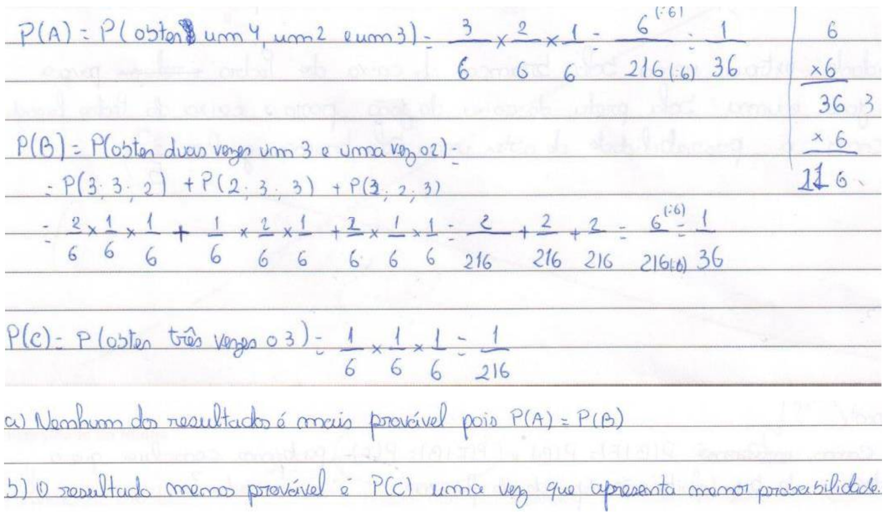



**Figura 5. Resolução da tarefa pelo aluno A6.**

Neste raciocínio, que foi adotado por nove alunos e que conduziu quase sempre a respostas incorretas, o aluno A6, no acontecimento A, começou por considerar três hipóteses e, de seguida, foi diminuindo uma unidade. Nos acontecimentos B e C procedeu de modo análogo, considerando um o número mínimo de hipóteses.

No raciocínio "tabela de dupla entrada", que conduziu sempre a respostas erradas, um aluno construiu uma tabela incompleta (com alguns casos possíveis), até porque seria impossível representar os resultados possíveis dos três lançamentos do dado através de uma tabela a duas dimensões, e dois alunos consideraram uma tabela de dupla entrada relativa à soma dos resultados de dois lançamentos de um dado, talvez recordando tarefas semelhantes realizadas nas aulas.

Por fim, dezanove alunos repetiram parte do enunciado, apresentaram justificações não inteligíveis ou não apresentaram mesmo justificação. Neste caso, verificou-se a seleção da resposta correta ao nível do acaso.

## Conclusão


ISBN 978-84-945722-3-4

Comparativamente com outros estudos, os resultados do presente estudo não são problemáticos, sendo mesmo melhores do que os que foram observados no estudo de Fernandes et al. (2016). O facto de a tarefa proposta envolver um pequeno número de casos favoráveis poderá ter facilitado a obtenção da resposta correta pelos alunos.

A ideia de que existem mais casos favoráveis/possíveis ou que a probabilidade é superior quando se trata de números distintos, comparativamente com números repetidos, esteve sistematicamente na origem de respostas corretas e revelou-se um argumento intuitivo com grande potencial educativo. Também não se constataram inconsistências nas respostas dos alunos ao afirmarem um acontecimento mais provável no item a) e um acontecimento menos provável no item b), o que também pode ser visto como um resultado positivo pois essa inconsistência pode ser resultado de intuições erradas enraizadas na mente do aprendiz (Fernandes, 1999), portanto muito difíceis de erradicar.

Assim, em termos da aprendizagem de Probabilidades, deste estudo destacam-se duas orientações para o ensino. Em primeiro lugar, a exploração de situações com um número de casos favoráveis limitado como primeira etapa para o estabelecimento da probabilidade. Em termos do conteúdo de ensino, para estes futuros educadores a abordagem baseada na contagem dos casos favoráveis/possíveis, tal como se verificou no presente estudo, é suficiente. Em segundo lugar, com os devidos cuidados, também a ideia intuitiva de resultados diferentes *versus* resultados iguais pode ser explorada com vantagem na aprendizagem dos alunos. Neste caso, Tversky e Kahneman (1982) chamam a atenção para que o mais distinto num acontecimento pode levar os alunos a avaliarem-no como sendo mais extenso e, portanto, mais provável.

**Agradecimento**. Este trabalho é financiado pelo CIEd — Centro de Investigação em Educação, UID/CED/01661/, Instituto de Educação, Universidade do Minho, através de fundos nacionais da FCT/MCTES-PT; Proyecto EDU2016-74848-P (MEC) e Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

## Referências bibliográficas

Contreras, J. M., Estrada, A., Díaz, C. & Batanero, C. (2010). Dificultades de futuros profesores en la lectura y cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada. In M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 271–280). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.


ISBN 978-84-945722-3-4

Fernandes, J. A. & Barros, P. M. (2005). Dificuldades de futuros professores do 1º e 2º ciclos em estocástica. In *Actas do V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática* (CIBEM). Porto (Portugal): Faculdade de Ciências.
Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.
Fernandes, J. A., Gea, M. M. & Batanero, C. (2016). Conocimiento de futuros profesores de Educación Primaria sobre probabilidad en experiencias compuestas. In J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 217-225). Málaga: SEIEM.
Fernandes, J. A., Sousa, M. V. & Ribeiro, S. A. (2004). O ensino de estatística no ensino básico e secundário: Um estudo exploratório. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 165-193). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.
Fernandes, J. A., Viseu, F. & Gea, M. M. (2016). O conhecimento de probabilidades de futuros educadores e professores dos primeiros anos. In L. G. W. Coan & M. T. Moretti (Orgs.), *Aplicações matemáticas com tecnologias de informação e comunicação* (pp. 123-142). Florianópolis, SC: Editora Insular.
Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.
Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN — Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.
Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.
Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Autor.
Ministério da Educação e Ciência (2014). *Programa de Matemática A – Ensino Secundário*. Lisboa: Autor.
Vásquez, C. & Alsina, C. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: un análisis global desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *7*, 27-48.
Tversky, A. & Kahneman, D. (1982). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 3-20). Cambridge: Cambridge University Press.


ISBN 978-84-945722-3-4