A APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NUM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Álvaro Fernandes Serafim Filho [1], *Maria Helena Martinho* [2]
[1] Centro de Formação de Professores, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, alvarofernandesserafim@ufrb.edu.br
[2] Centro de Investigação em Educação, UMinho, mhm@ie.uminho.pt

Resumo. *Esta comunicação apresenta uma prática pouco explorada no ensino superior, particularmente no ensino do Cálculo Diferencial e Integral, que visa apresentar aos estudantes uma série de tarefas de natureza exploratória e investigativa com o suporte da tecnologia. O interesse investigativo por este tema tem-se apresentado de forma bastante acentuada devido aos altos índices de reprovação na matéria, além da necessidade de avançar do método exclusivamente expositivo para práticas mais dinâmicas e reflexivas que permitam a participação ativa dos alunos na elaboração do conhecimento. Com o apoio de alguns programas matemáticos os alunos exploram, ao longo de um semestre letivo, uma série de tarefas diversificadas. Para este estudo, procuramos o suporte teórico das explorações e investigações matemáticas apoiadas nos recursos tecnológicos. A introdução da informática na sala de aula, além de incorporar importantes fatores motivacionais, permite explorações dinâmicas do conhecimento. Seguindo uma metodologia qualitativa de carácter descritivo interpretativo. A estrutura experimental contou com a aplicação das tarefas em pequenos grupos e com a observação criteriosa do quadro evolutivo dos alunos, tanto no aspecto da aprendizagem quanto nos cenários das dificuldades e superações, inclusive no uso das tecnologias. Os resultados evidenciam as potencialidades que as tarefas exploratórias, com suporte nas tecnologias, agregam ao ensino do Cálculo. Estas abarcam uma diversidade enorme de assuntos da disciplina e permitem aos alunos: a possibilidade de abordar, do ponto de vista numérico, gráfico e analítico, uma série de tarefas contextualizadas; desenvolver as habilidades típicas dos processos investigativos matemáticos; compartilhar conhecimentos e cooperar na construção do conhecimento em pequenos grupos de trabalho, além de assumirem papéis ativos no processo de aprendizagem.*

Abstract: *This communication presents a little explored practice in superior education, particularly in the teaching of Differential and Integral Calculus, which aims to present students with a series of tasks of an exploratory and investigative nature supported by technology. The investigative interest in this subject has been presented in a very accentuated way in the present time due to the high failure rates in the matter, besides the need to move from the exclusively expository method to more dynamic and reflexive practices that allow the active participation of the students in the elaboration of knowledge. With the support of mathematical software, the students explored a sequence of wide range tasks with the purpose of applying some knowledge, enhancing others and introducing themes of the curricular grade. In this research, we look for the theoretical support of mathematical explorations and* *investigations by using technological resources in relevant problems. This combination is an important mechanism for the discovery-based learning. The introduction of the informatics in the classroom, besides its important motivational aspects, allows more dynamical exploration of the knowledge by using modern technologies. Following a qualitative methodology of descriptive interpretive character, the experimental structure was compounded by the application of tasks in groups and a careful observation of the evolution of the students, considering the learning aspects as well as scenarios of difficulties and overcoming, including the use of technologies. The results show the potential that the exploratory tasks, with support in the technologies, add to the teaching of Calculus. These potentialities contains a diversity of topics and allows the students: the possibility to approach, from the numeric, graphic and analytical point of view, a series of relevant in-context tasks; to develop typical skills of the mathematical investigative process; sharing knowledge and cooperating with the construction of the knowledge in small groups and work actively in the learning process.*

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral; Tarefas exploratórias e investigativas; Tecnologia educacional

Introdução

Diversos estudos nas últimas quatro décadas no Brasil apontam altos índices de reprovação nas disciplinas iniciais dos cursos de exatas, particularmente na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (e. g., Barufi, 1999; Gomes, Lopes & Nieto, 2005; Saback, 1980). A grande evasão dos alunos recém-ingressos nesta disciplina e as notórias dificuldades observadas na aprendizagem têm repercutido em diversos fóruns educacionais. Tanto a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) quanto a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) têm manifestado esta preocupação e vêm levantando a necessidade do aprofundamento das discussões em torno dos preocupantes números de reprovações observados na disciplina, nas diversas instituições de ensino superior do país, que oscilam na média dos 50%. Zuchi (2005), em sua tese doutoral, também reflete sobre esta temática e aponta que uma das principais dificuldades encontradas pelos alunos está na compreensão do conceito de limite, particularmente na definição formal com a simbologia $\varepsilon-\delta$, conceito este que impacta no desenvolvimento dos demais assuntos da matéria, como derivadas e integrais.

Uma tendência que vem ganhando cada vez mais espaço no ensino da Matemática consiste em envolver os estudantes em atividades matematicamente mais ricas e produtivas, sejam em contextos da realidade do aluno ou puramente matemáticos e lógicos (Ponte, 2005). Nesse sentido, a tecnologia entra como um valioso instrumento em auxílio ao aprendizado, pois o computador equipado com um bom *software* matemático pode ser usado não somente como uma sofisticada calculadora, mas também como um precioso instrumento de ajuda no processo de aprendizagem (Andrade, 2004).

A proposta deste estudo foi, portanto, investigar uma estratégia diferenciada de ensino para o Cálculo Diferencial e Integral que viesse a colaborar na qualidade da mediação e na aprendizagem dos alunos, contribuindo para reduzir as estatísticas negativas no quadro das reprovações. Através de tarefas exploratórias e investigativas, realizadas em pequenos grupos num laboratório de informática, o primeiro autor deste artigo, como professor da turma, explorou os principais conceitos e aplicações da disciplina. Exercendo o papel de investigador e de professor buscou verificar se havia uma mudança de postura no comportamento dos alunos ao propor explorações e investigações amparadas nos modernos recursos de animação e análise computacionais. O professor/investigador procurou se a atitude dos alunos assumiu uma condição mais laborativa e reflexiva, tornando-se um agente ativo na construção do seu próprio conhecimento (Bianchini e Santos, 2002).

Recorreu-se a uma experiência com uma turma para observar a influência de um conjunto de investigações com o auxílio da tecnologia sobre os alunos. Pretende-se, neste artigo, compreender a forma como dois grupos de alunos trabalham uma tarefa sobre derivadas com recurso ao *GeoGebra*.

Referencial teórico

Para este estudo, procuramos o suporte teórico do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, do ensino exploratório em Matemática, além do auxílio dos recursos tecnológicos para as investigações em relevantes problemas da disciplina.

A descoberta do Cálculo no século XVII foi um dos grandes marcos da história da matemática. Alguns relevantes problemas que haviam preocupado físicos e matemáticos por mais de vinte séculos passaram a ter uma solução relativamente elementar pelo que hoje conhecemos como o Teorema Fundamental do Cálculo. Essencialmente aplicamos os principais resultados teóricos do Cálculo Diferencial para medir taxas de variação em funções e perceber os efeitos dessas mudanças, além de usar o Cálculo Integral para resolver uma série de problemas da física-matemática que estão correlacionados com a quadratura de áreas limitadas por funções (Garbi, 2011). O alcance das suas aplicações tem levado o Cálculo a tratar de uma diversidade enorme de problemas dinâmicos da natureza e das ciências

As dificuldades apresentadas pelos alunos, além da sua postura passiva espectadora geralmente manifestada quando o professor expõe os assuntos, evidenciam o grau de complexidade e abstração na exposição formal dos conteúdos do Cálculo, principalmente na sua etapa inicial ao explorar o tema de limites. Talvez por este não ser um tema oficial do ensino médio, talvez pela inabilidade de explorar os conteúdos de maneira mais rigorosa, numa tendência quase sempre a "decorar" e aplicar fórmulas de maneira "artificial" em detrimento de um entendimento mais amplo e significativo dos conteúdos (Frescki & Pigatto, 2009, p. 911). Talvez por estas e outras razões os alunos acabam por evidenciar grandes dificuldades ao adentrar um curso introdutório de Cálculo. Alguns estudos focalizam parte desta problemática no aluno, na sua falta de base ou até mesmo na sua metodologia de estudo (Curi & Farias, 2008). O problema pode estar no facto da disciplina ser ministrada geralmente no início do curso, tratando-se de um primeiro contato do aluno com uma matemática "distinta" da trabalhada no ensino médio e as novidades de ser estudante universitário (Gomes, 2012). Outros estudos apontam para a metodologia de ensino do professor (Garzella, 2013). A qualidade na mediação dos assuntos ministrados pelo professor tem grande influência na aprendizagem dos alunos (Garzella, 2013). Estudos outros de natureza epistemológica (Rezende, 2003) realçam problemas que estão além das técnicas ou métodos de ensino, localizando-os na concepção originária dos conceitos que estão na base estrutural do Cálculo.

A necessidade de práticas mais dinâmicas, reflexivas e construtivas para o ensino do Cálculo fundamenta também este estudo. As orientações preconizadas nos parâmetros curriculares oficiais assinalam a importância das renovações pedagógicas para o tratamento diversificado dos conteúdos matemáticos, inclusive pelas vias exploratórias e investigativas. Estas orientações sugerem tratamentos diversificados dos conteúdos matemáticos, dando ênfase à resolução de tarefas desafiantes, como sendo esta uma atividade genuinamente matemática (São Paulo, 1991).

Neste estudo, é dado destaque ao ensino exploratório. Adentramos este modelo de ensino enfatizando as suas notórias características. No ensino exploratório os estudantes desempenham papéis ativos na aprendizagem. Esta se dá de uma forma reflexiva e construtiva, o pensamento autônomo dos alunos é incentivado (Ruthven, Hofmann & Mercer, 2011; Chapman & Heater, 2010) e, inclusive, os variados contextos investigativos favorecem que eles reflitam sobre o seu próprio processo de aprendizagem (Bishop & Goffree, 1986). No ensino exploratório as ideias matemáticas que emergem são discutidas em grupos, confrontadas e sistematizadas no coletivo (Canavarro, 2011; Ponte, 2005). Esta modalidade de ensino oportuniza aos alunos desenvolverem uma série de capacidades matemáticas ao possibilitar que os conhecimentos surjam com mais significado. A resolução de problemas, as estratégias de abordagem, os raciocínios analíticos e a comunicação matemática são algumas das habilidades potencializadas no ensino exploratório (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003). Estes autores destacam a importância do papel do professor nesta abordagem de ensino. A gestão da aula, a escolha apropriada das tarefas e a maneira de fazer ressaltar o conhecimento destes trabalhos são algumas das suas relevantes atribuições. Para além disso, o professor acompanha, interpreta e compreende as ações e respostas dos alunos de forma a articular e harmonizar o conjunto de saberes que brotam para garantir a aprendizagem matemática.

Neste sentido, destacamos também a importância da tecnologia em auxílio à aprendizagem do Cálculo. Alguns programas (neste estudo usamos o *GeoGebra*) apresentam excelentes recursos que integram dinamicamente as funções numéricas, algébricas e gráficas de forma a privilegiar a abordagem e a compreensão de muitos dos seus assuntos. Se estas ferramentas forem utilizadas em sala de aula, em apoio às tarefas exploratórias e investigativas, devem contribuir significativamente para tornar o ambiente de ensino e aprendizagem mais atraente e produtivo, desobrigando os alunos de situações mais mecânicas e operacionais e envolvendo-os em cenários mais reflexivos e conceituais (Allevato, 2005). O auxílio do *software* matemático, nesses ambientes, possibilita que os alunos participem mais ativamente na construção do próprio conhecimento. Eles passam a modelar problemas, fazer simulações, formular conjecturas e a visualizar situações que seriam muito complicadas, ou até mesmo inviáveis, sem o suporte da tecnologia. Os ambientes informatizados permitem situações mais dinâmicas para o ensino e a aprendizagem do Cálculo; favorecem, inclusive, que os alunos passem a comunicar mais expressivamente e a compartilhar os seus pensamentos e ideias em pequenos grupos de trabalho (Allevato, 2005).

Metodologia e apresentação da tarefa

A metodologia adotada neste estudo pauta-se nos preceitos da pesquisa qualitativa, alicerçada no paradigma descritivo interpretativo. Este modelo metodológico busca explorar e compreender um conjunto de conhecimentos que emergem de contextos experimentais e aprofundar as explicações que abrangem o conjunto de atitudes dos seus participantes.

As tarefas exploratórias e investigativas foram realizadas em pequenos grupos no laboratório de informática, numa turma composta por 36 alunos com 19 anos de idade em média e aprovados na disciplina anterior de Introdução ao Cálculo, matéria que estuda tópicos elementares da Matemática, tais como conjuntos, funções, logaritmos, exponenciais, trigonometria, dentre outros. Foram formados 12 grupos de 3 componentes cada, sendo que 2 grupos – G1 (composto por João, Alberto e Ricardo) e G2 (composto por Sandra, Flávia e Mônica) – se voluntariaram para uma observação mais criteriosa. Nesse ambiente os dados foram recolhidos pelo próprio professor investigador que recorreu a observações participativas, aplicação de questionários (anexo 1), entrevistas semiestruturadas − baseadas nas respostas fornecidas pelos próprios alunos em cada tarefa − além dos documentos elaborados pelos grupos de trabalho. Os questionários e entrevistas foram aplicados logo após o término de cada tarefa. Vale destacar o permanente contato do professor com os alunos ao longo do semestre letivo, numa frequência de três dias semanais em encontros de duas horas cada. Este convívio permite um olhar mais atencioso do investigador sobre todas as ações empreendidas no estudo e as expectativas dos participantes (Goetz & LeCompte, 1984; Merriam, 1988).

Para esta comunicação iremos considerar apenas a tarefa 1 (anexo 2), constituída por duas questões. Esta tarefa explora o conceito das retas tangentes no contexto do cálculo de áreas de triângulos. Alguns lugares geométricos apresentam características e aplicações interessantes e que tomam contornos investigativos. As tangentes traçadas nas hipérboles de equações $y = (a/x), a \in \mathbb{R}^*$, determinam, com os eixos ox e oy, triângulos cujas áreas possuem sempre um mesmo valor, independente do ponto de tangência. Esta tarefa visa colocar os alunos diante de uma notável situação exploratória, onde eles desempenham verdadeiros papéis de investigadores matemáticos, lançando suposições e realizando provas algébricas. A possibilidade que o *software* oferece da visualização dinâmica das tangentes, deslizando sobre as curvas e gerando uma infinidade de triângulos distintos, todos com a mesma área, não deixa dúvida da veracidade do resultado. Porém, o maior desafio é demonstrar algebricamente a conjectura principal. Esta tarefa insere-se após os alunos terem explorado a interpretação gráfica da derivada e aprenderem a fórmula geral da reta tangente.

Apresentação dos resultados

Inicialmente realizamos em conjunto a leitura integral do roteiro da tarefa. O professor informou a classe que avançaria no estudo das derivadas, explorando o conceito de reta tangente, dentre outros, num problema geométrico. Os alunos então iniciaram os trabalhos. Após um tempo preliminar de discussões internas, relativamente ao item a) do primeiro problema, G1 já analisa a questão com o auxílio do *software*:

> *Ricardo:* Entre com a função f [no computador] e ponha um ponto sobre o gráfico.
> *Alberto:* Qual ponto?
> *Ricardo:* Ponha aí um ponto qualquer (acompanhando a figura do roteiro) e vamos tentar calcular a área [do triângulo]!

Os alunos criam no programa o ponto de coordenadas $(1, 1)$ e partem para obter a reta tangente. Depois de certo tempo tentando realizar os cálculos no rascunho, continuam:

> *João*: Não deu certo. Não está tangente...
> *Alberto*: Olhe aqui (apontando para o caderno). A regra do "x^n" (derivada da função potência) é mais rápida... Lembra-se desse exercício? Tem que transformar em potência!
> *João*: Mas será que dá o mesmo resultado?
> *Alberto*: Ela também não veio do limite?
> *João*: Pode ser... Professor, podemos usar esta fórmula para "$1/x$"?

Este diálogo é fruto de um conhecimento trabalhado anteriormente em sala de aula. Enquanto Ricardo se concentra mais nas construções computacionais, João e Alberto desenvolvem os cálculos realizando consultas bibliográficas. Eles estavam tentando obter a derivada através da definição (pelo limite) e estavam se complicando nas contas. O professor estava por perto e então João solicitou a sua orientação. O professor apontou o equívoco de modo que prosseguissem no desenvolvimento. O professor também solicitou que ele calculasse a derivada através da regra da potência, afim de que comparasse os resultados. Este fato seria útil nas discussões coletivas.

Um aspecto singular que mereceu destaque nesta tarefa foi a estratégia diferenciada de derivação. Alguns alunos utilizaram a definição clássica da derivada, outros pegaram o "atalho" da regra da potência e outros ainda utilizaram a regra operacional do quociente. Obviamente, quem usou a regra da potência ganhou um pouco mais de tempo. O professor tinha essa percepção quando circulava pelo laboratório e observava os trabalhos. Não orientou para uma "melhor" forma, para que os alunos seguissem o seu próprio caminho. No entanto, registou e aproveitou essa diversidade para ser apresentada e destacada nas discussão final. Quando os grupos se apresentaram, foram descritos os seguintes processos de derivação (fig.1) que implicaram a necessidade de tempos diferentes para a sua conclusão.

Derivada pela regra da potência:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f'(x) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Derivada pela regra do quociente:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Derivada pela definição:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x - x - \Delta x}{x^2 + x \cdot \Delta x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{x^2 + x \cdot \Delta x} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x^2 + x \cdot \Delta x} = -\frac{1}{x^2}$$

Figura 1. Diferentes formas de obter a derivada utilizadas pelos grupos.

No G2, as dificuldades surgem para gerar o cenário dinâmico no programa. Apesar das alunas terem conseguido plotar a função e a tangente no ponto de abscissa $x_0 = 1$, quando moviam o ponto com o *mouse,* a reta não o acompanhava, e quando tentavam movimentar a reta, esta não acompanhava o movimento.

> *Sandra:* (...) mas quando tento movimentar a reta, ela não vai...
> *Flávia:* Deixe a reta aí parada e movimente o ponto.
> *Sandra:* Mas a reta não acompanha (o ponto). Tem alguma coisa errada...
> *Mônica:* Professor, o que está errado aqui?

O professor constatou que as alunas tinham calculado corretamente a reta tangente no ponto $x_0 = 1$. A tela indicava de forma precisa a situação de tangência desta sobre o gráfico da função. Aparentemente tudo estava perfeito, porém, o problema é que não tinham usado o comando geral de traçado de tangentes do programa, daí essa “confusão”. O ponto era móvel, porém a reta era tangente apenas no ponto $x_0 = 1$. Após a orientação do professor, elas perceberam o equívoco, viabilizaram a disposição dinâmica e prosseguiram as suas análises. Este episódio evidencia a dificuldade preliminar do G2 para visualizar a situação dinâmica no computador, porém o auxílio específico do comando permitiu o desenvolvimento da questão.

Apesar de já ter utilizado o *GeoGebra* em sala de aula, este grupo apresentou dificuldades em usar este comando. Por se tratar de uma tarefa que exigia bastante o uso dos recursos dinâmicos do *software* e esta ser a primeira experiência com essas funções, alguns necessitaram de ajuda do professor. Depois de uma orientação prestada às alunas de G2 o professor fez algumas observações coletivas sobre este domínio específico do programa. A turma parou um instante para acompanhar as breves explicações e seguiram as suas investigações.

Foi possível constatar que o conhecimento estava sendo construído pouco a pouco. A compreensão global do problema se ampliava à medida que as funções dinâmicas do programa eram utilizadas corretamente. O G2 não tinha constatado que o caso particular que estavam a elaborar não serviria para provar a proposição. O professor não os alertou deixando que prosseguissem com os raciocínios, registando pois esses cálculos viabilizariam o que viria a ser feito mais à frente de forma generalizada. Depois que estruturaram o triângulo e visualizaram a medida da área no programa, Sandra comentou “Que legal! O triângulo se move, mas a área fica constante e igual a 2! No outro lado [no 3º quadrante] continua o mesmo resultado! (...) pronto, o valor da área é sempre 2, não importa o ponto! Finalizamos esta parte”.

Conforme ressaltamos, o G2, de posse da equação da reta tangente, passa agora a calcular a área do triângulo. A equipe busca provar que esta é de 2 unidades, porém toda a estrutura analítica está baseada apenas no ponto de abscissa $x_0 = 1$, isto é, particularizam a demonstração. Ao afirmarem (conjecturarem!) que o valor da área era constante em qualquer ponto de tangência, com base na visualização gráfica, equivocadamente partiram para obter a área apenas em um único ponto ($x_0 = 1$). Apesar das discussões já realizadas em tarefas anteriores, Sandra ainda questiona a necessidade da demonstração, argumentando que era suficiente confirmar a situação pelo programa para ter a certeza. Apontando para o gráfico plotado na tela do computador, ela diz: "olha isto aqui, professor, pra que demonstrar? Em todos estes pontos o programa indica o valor de área igual a 2!". Sandra não sentia a necessidade de comprovar o resultado após perceber, através do computador, que o resultado era "claramente verdadeiro". A evidência computacional era tomada por uma prova matemática. Esse foi mais um importante aspecto que ficou registado pelo professor para a discussão final.

O G1 compreendeu de forma mais imediata e segura, a partir das visualizações computacionais, que deveria encaminhar a prova para o caso geral, isto é, demonstrar o resultado num ponto arbitrário do domínio. Eles já entendiam, naquele contexto, que casos particulares não serviam para provar situações abrangentes, mas apenas para formar indícios ou suposições. Esta circunstância mostrou-se bastante útil também para os debates. Inclusive foi interessante relembrar a conjectura de Fermat no diálogo que se seguiu:

> *Professor:* Fermat também se deu por satisfeito ao enunciar um resultado geral com base na evidência de alguns casos particulares na sua famosa conjectura (dirige-se ao quadro): ele afirmava que todos os números obtidos a partir da sequência
> $$f(n) = 2^{2^n} + 1, n = 0, 1, 2, 3 \ldots,$$
> seriam primos.
> *Alberto:* E não são?
> *Professor:* Vamos ver... Quanto dá $f(0)$ e $f(1)$?
> *Alberto:* Pra $n = 0$ dá 3 e pra $n = 1$ dá 5, que são primos!
> *Professor:* João, por favor, calcule agora $f(2)$ e $f(3)$. Ricardo, use o *software* e obtenha $f(4)$. (depois de um tempo analisando os valores os alunos apresentam as respostas)
> *João:* Pra $n = 2$ deu 17 que é primo e pra $n = 3$ deu 257... Aí eu já não sei!
> *Professor:* Está ficando grande, mas posso asseverar que 257 é primo também!
> *Ricardo:* Pra $n = 4$ deu aqui no *GeoGebra* 65.537 (fig. 2). É primo?
> *Professor:* Sim, é primo! Porém Fermat só testou até aí e generalizou erroneamente o resultado! Mais tarde, no século XVIII, Leonard Euler provou que para $n = 5$,
> $f(5) = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4.294.967.297 = (641)(6.700.417)$
> era composto, "quebrando" a conjectura de Fermat! No caso da tarefa, mesmo diante das evidências computacionais, necessitamos demonstrar o valor da área para validarmos algebricamente o resultado. Vamos prosseguir...

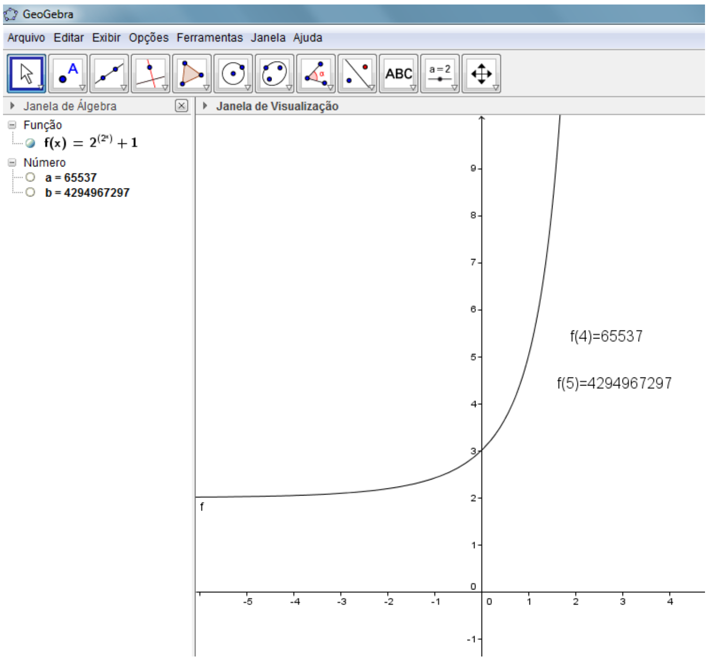


Figura 2. Tela capturada por G1 para a obtenção dos números de Fermat.

Este episódio foi bastante singular e serviu para demonstrar que casos particulares não serviam para generalizar uma conjectura matemática. O episódio evidencia também as ricas situações comunicativas e reflexivas que procedem dos contextos investigativos das tarefas exploratórias apoiadas nos recursos computacionais.

G2 usou a regra do quociente para estabelecer a derivada e montar a equação da reta tangente, enquanto G1 utilizou a regra da potência, variando a técnica operacional, como veremos adiante. Depois que G2 percebeu que estava no caminho errado, concluiu esta etapa da tarefa e apresentou a sua solução (fig. 3). Percebe-se que os alunos calcularam adequadamente os pontos de interseção da reta tangente com os eixos coordenados e determinaram o valor da área do triângulo.

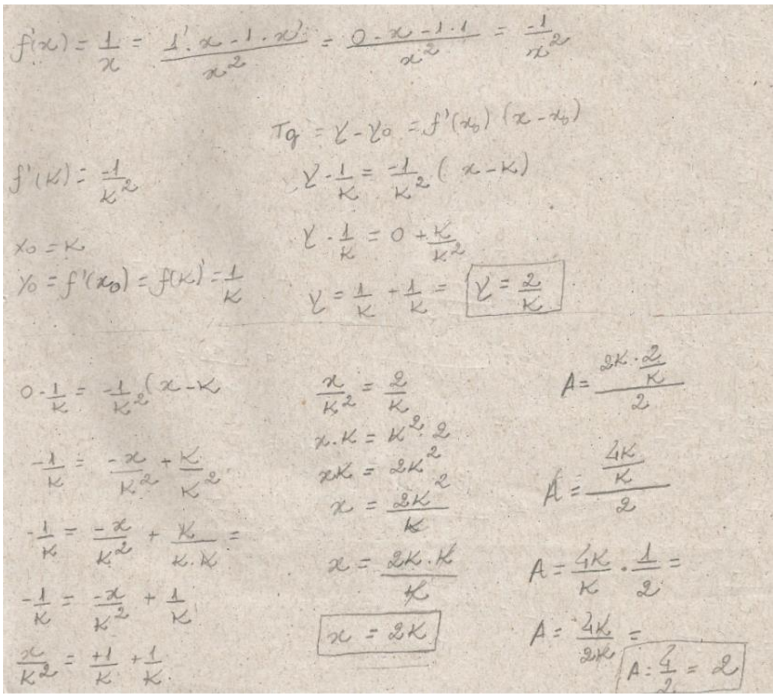


Figura 3. Solução apresentada por G2 à questão 1.

As formas distintas utilizadas pelos grupos para a obtenção da derivada evidenciam a variedade estratégica oriunda das tarefas investigativas. As ricas discussões que brotaram dos pequenos grupos de trabalho permitiram uma maior autonomia para que os alunos decidissem o caminho que julgassem mais adequado para a solução do problema. Ao invés do professor indicar o "melhor" caminho, eles tomaram a iniciativa para alcançar as respostas. Nos debates finais foi possível sistematizar os conhecimentos produzidos.

Apesar da percepção de G1 de realizar a prova genérica para verificar a validade do resultado, outra dificuldade surge, dessa vez no cálculo das dimensões do triângulo. Pelo programa eles conseguem, através do comando "interseção de dois objetos", observar essas grandezas, porém na parte escrita encontram alguns embaraços:

> *João:* (...) use a fórmula da reta tangente [$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$].
> *Alberto:* Qual o valor de y_0?
> *João:* É o valor da função quando substitui x_0. Substitua aí $f(x_0)$. (os alunos se concentram no cálculo da reta tangente e obtêm a sua equação depois de certo tempo)
> *Alberto:* Pronto! Vamos calcular agora a área do triângulo... Qual o valor da base?
> *João:* Estava tentando calcular o valor da altura primeiro. Não é o mesmo valor de y_0?
> *Alberto:* Acho que não, vamos ver... (observando a figura no roteiro, discutem por algum tempo e não chegam a acordo).

O grupo sente alguma dificuldade para determinar algebricamente a base e a altura do triângulo. O professor orienta-os no processo de obtenção dessas medidas, mas, ao observar o desenvolvimento, limita-se a informá-los para prestarem mais atenção às simplificações. Foi possível constatar, posteriormente, nas entrevistas, que os maiores impasses realmente estavam concentrados nesta etapa. A resolução do primeiro problema gerou mais dificuldade do que a resolução do segundo, isto devido à semelhança dos procedimentos. Os dois grupos conseguiram demonstrar o valor da área no primeiro caso e a segunda fase mostrou-se mais tranquila. Isso ficou patente nas entrevistas:

> Foi preciso muita atenção nos pequenos detalhes, principalmente na demonstração do primeiro problema, pois o segundo caso foi muito parecido. Quando o grupo resolveu focar na solução, esta saiu com mais facilidade. (Sandra)

> As maiores dificuldade foram na parte algébrica, na hora de determinar as interseções e estabelecer o valor da área do triângulo no primeiro problema. O *software* exibia os valores [das interseções e da área], mas estávamos com dificuldades de calcular. (...) o programa ajudou bastante na compreensão geral da tarefa. (Alberto)

Na segunda questão da tarefa, a partir da simulação gráfica computacional (fig. 4), G1 conseguiu captar a relação que existia entre os valores das áreas dos triângulos e os respectivos numeradores das funções. De fato, para cada função do tipo $f_a(x) = a/x\,, a = 2, 3, 4, \ldots$, o valor da área é igual a $2a$. *A conjectura está lançada!* — foi desta forma que João se expressou animadamente ao preencher a tabela 1 do roteiro e descobrir o padrão. Bastava, então, partir para a demonstração solicitada no item b). Foi da seguinte forma que eles procederam ao identificar a relação:

> *João:* Quando (a função) é $2/x$, dá 4 (o valor da área do triângulo); quando é $3/x$, dá 6, quando é $4/x$, dá 8...
> *Alberto:* Então é sempre o dobro, não é!?
> *João:* Isso! O valor da área é o dobro do número que tiver em cima [no numerador da função]. A conjectura está lançada!
> *Ricardo:* Hum, então por isso que no caso anterior a resposta deu 2! Vamos então agora demonstrar!

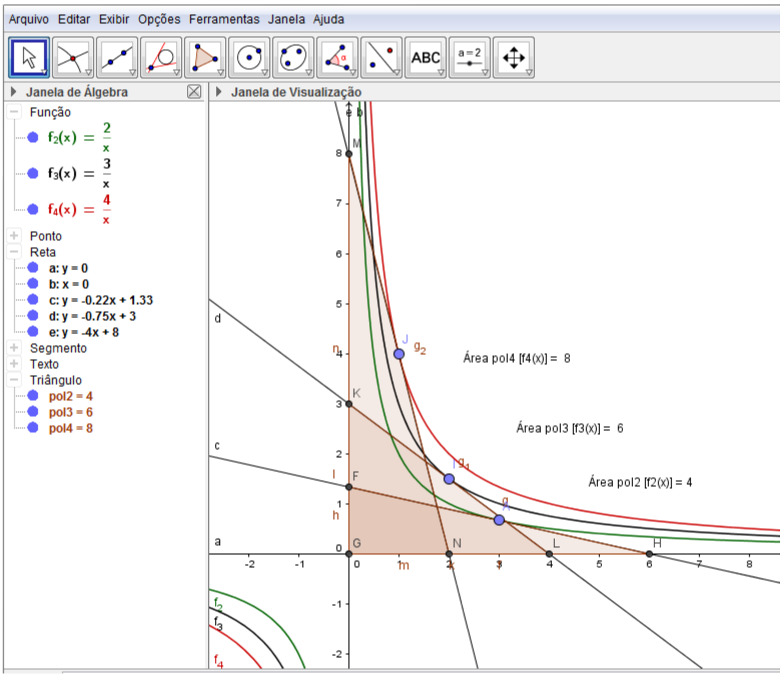
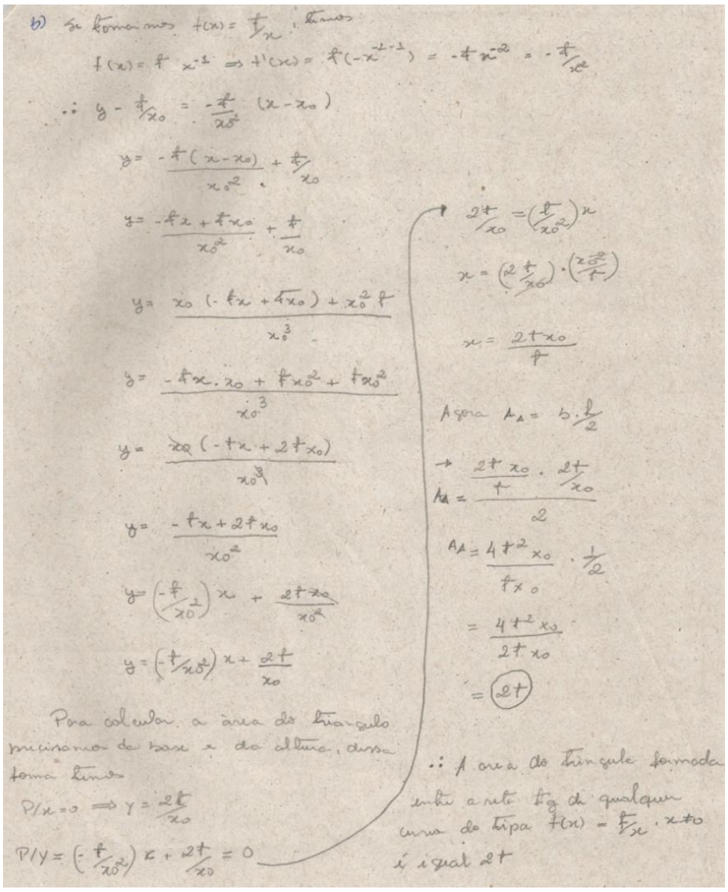


Figura 4. Apresentação dinâmica das hipérboles, suas tangentes e as respectivas áreas dos triângulos. Tela capturada por G1 para a formulação da conjectura principal.

Em função da semelhança deste problema com o primeiro da tarefa, o grupo já apresentou um pouco mais de confiança e requisitava menos o professor. Eles ainda especularam (colocaram uma questão) se o resultado geral continuaria válido para um número real qualquer (diferente de zero) no numerador da função. Apesar desta análise não fazer parte direta da atividade, a proposição permaneceria válida e esta reflexão foi aproveitada nas discussões, enriquecendo o debate e ampliando a percepção da classe. Eles simularam esta situação no *GeoGebra* e constataram a validade do resultado. Estas circunstâncias evidenciam o protagonismo dos alunos na exploração dos conhecimentos e o caráter dinâmico das descobertas viabilizadas pelas análises computacionais. Foi através do seguinte diálogo que eles iniciaram a demonstração no segundo item:

> *João:* No lugar de 1 [na função $y = 1/x$] vamos usar uma variável [t].
> *Alberto:* (...) temos então $f(x) = t/x$. Mas qual o valor de x_0 agora?
> *João:* Vamos deixar x_0 mesmo, acho que pode.
> *Alberto:* Sim. Agora [o procedimento] não é igual ao problema 1?
> *Ricardo:* Penso que deve ser. Vamos calcular a reta tangente e depois obter a área...

Houve uma discussão longa e bastante produtiva no grupo para estabelecer a resposta final. No decurso da demonstração para confirmarem a conjectura, os integrantes debateram intensamente em todas as etapas, desde a estruturação da reta tangente até ao estabelecimento do valor algébrico da área do triângulo. No final, fizeram uma série de simulações no programa para consolidar a veracidade da resposta encontrada e encaminharam a solução (fig. 5). Cabe ressaltar a estratégia diferenciada deste grupo para obter a derivada. Como vimos, G2 utilizou a regra do quociente, enquanto este fez uso da regra da potência. Eles obtiveram mais facilmente as dimensões do triângulo nesta segunda etapa, como se pode constatar, em função de algumas orientações coletivas realizadas na primeira questão.


b) Se tomarmos $f(x) = t/x$, temos

$f(x) = t\,x^{-1} \Rightarrow f'(x) = t(-x^{-1-1}) = -t x^{-2} = -t/x^2$

$\therefore y - t/x_0 = \dfrac{-t}{x_0^2}(x - x_0)$

$y = \dfrac{-t(x - x_0)}{x_0^2} + t/x_0$

$y = \dfrac{-tx + tx_0}{x_0^2} + \dfrac{t}{x_0}$

$y = \dfrac{x_0(-tx + tx_0) + x_0^2 t}{x_0^3}$

$y = \dfrac{-tx.x_0 + tx_0^2 + tx_0^2}{x_0^3}$

$y = \dfrac{x_0(-tx + 2tx_0)}{x_0^3}$

$y = \dfrac{-tx + 2tx_0}{x_0^2}$

$y = \left(-t/x_0^2\right)x + \dfrac{2tx_0}{x_0^2}$

$y = \left(-t/x_0^2\right)x + \dfrac{2t}{x_0}$

Para calcular a área do triângulo precisamos da base e da altura, dessa forma temos

$P/x = 0 \Rightarrow y = 2t/x_0$

$P/y = \left(-t/x_0^2\right)x + 2t/x_0 = 0$

$2t/x_0 = \left(t/x_0^2\right)x$

$x = \left(2t/x_0\right)\cdot\left(\dfrac{x_0^2}{t}\right)$

$x = \dfrac{2tx_0}{t}$

Agora $A_\Delta = b.h/2$

$A_\Delta = \dfrac{\dfrac{2t\,x_0}{t}\cdot 2t/x_0}{2}$

$A_\Delta = \dfrac{4t^2 x_0}{tx_0}\cdot 1/2$

$= \dfrac{4t^2 x_0}{2t x_0}$

$= 2t$

$\therefore$ A área do triângulo formado entre a reta tg de qualquer curva do tipo $f(x) = t/x$, $x \neq 0$ é igual $2t$

Figura 5. Solução apresentada Por G1 à questão 2.

No G2 as discussões eram encaminhadas de forma parecida. As alunas aproveitaram a construção computacional feita na etapa precedente, fizeram alguns ajustes e não apresentaram maiores dificuldades para perceber o padrão. No preenchimento da tabela, puderam constatar efetivamente a relação de dobro. Ao perceberem que estavam no caminho certo, confirmando a solução do primeiro problema, manifestaram ainda mais entusiasmo na sequência. Depois de algumas discussões em grupo, chegaram também ao resultado esperado. G2 apresentou uma organização textual semelhante a G1, porém utilizando uma forma diferenciada para a derivada (usaram a regra do quociente) e uma notação distinta para o novo parâmetro da função.

Após o término das explorações passaram para a etapa das discussões finais. Puderam ressaltar e refletir conjuntamente uma série de situações. À medida que os grupos iam apresentando as suas produções, os principais factos registrados naquele encontro foram realçados: as três formas possíveis para derivar a função; o equívoco de particularizar as demonstrações; a necessidade das provas algébricas diante das evidências computacionais; a conjectura de Fermat; a extensão do resultado para os números reais; outras propriedades das hipérboles foram lembradas, além da continuidade daquelas investigações na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, onde seria possível explorar outras curvas com aquele mesmo comportamento. Alguns alunos mostraram-se curiosos para conhecer tais curvas e iniciar um projeto de pesquisa.

Discussão e conclusões

Através desta tarefa buscamos explorar o conceito das retas tangentes, avançando nos estudos das derivadas, num contexto prático e investigativo envolvendo o cálculo de áreas de triângulos.

As construções geométricas com o *software* seguiam à frente das produções algébricas, como pôde ser notado logo no primeiro episódio. Ainda neste, percebemos que G2 avançou mais rapidamente que G1 no cálculo da derivada, isto em virtude da percepção que tiveram na forma de derivar a função envolvida na investigação. A regra do quociente aplicada por G2 mostrou-se mais eficiente que o procedimento utilizado por G1, que se complicou no cálculo pela definição e posteriormente usou a regra da potência. Essa diversificação na estratégia de derivação foi importante e bastante útil nas discussões finais, onde pudemos confrontar os resultados obtidos e formalizar os conhecimentos produzidos. Esta variedade processual nos mostra que apesar do “roteiro investigativo” ser essencialmente o mesmo, no sentido de estabelecer a equação da reta tangente, determinar as interseções com os eixos coordenados, dimensionar os catetos do triângulo e calcular a sua área, os procedimentos conceituais para alcançar o resultado final foram distintos e relevantes. Após os grupos apresentarem as suas estratégias de abordagem, inclusive indicando o método utilizado para obter a derivada, alguns alunos ficaram surpresos ao ver como uma forma de derivar se mostrava tão mais rápida que a outra.

A utilização da informática, além de favorecer um melhor entendimento das retas tangentes e derivadas, inclusive do ponto de vista gráfico, levou a que os alunos lidassem com técnicas operacionais mais rotineiras com maior conhecimento de causa (Villarreal, 1999). Os grupos estavam bastante empenhados pois a exploração da tarefa continha todos os elementos característicos das investigações matemáticas: as elaborações computacionais com as suas riquezas de visualização e dinamicidade; os raciocínios analíticos na busca de padrões e conjecturas; as reflexões e os diálogos internos. O ambiente informatizado permitiu envolver os alunos em situações dinâmicas para o ensino e aprendizagem, comunicando e partilhando as ideias em grupo (Allevato, 2005).

No segundo episódio pudemos perceber a contribuição valorosa do *software* para que os alunos pudessem conjecturar o valor da área do triângulo de uma forma mais rápida e dinâmica, ampliando a compreensão do problema. O *GeoGebra* mostrou-se eficiente nesta experiência ao auxiliar e possibilitar a exploração de um dos principais conceitos do Cálculo, a derivada (Barufi, 1999; Melo, 2002; Saraiva, 2000). Neste episódio também pudemos notar que as evidências computacionais são às vezes tomadas como uma prova matemática, como foi o caso de Sandra, e por isso a sua "resistência" apresentada para demonstrar algebricamente as conjecturas.

O terceiro episódio, sobre a conjectura de Fermat, surgiu da necessidade de debater com a turma que casos particulares não serviam para provar situações abrangentes, mas apenas para formar indícios/suposições e que as visualizações/simulações computacionais são excelentes ferramentas para isto. G1 teve esta percepção. Muitos autores (e. g., Miquelino & Resende, 2013; Allevato, 2005; Bianchini & Santos, 2002) evidenciam a renovação no aspecto motivacional de alunos que vivenciam as experiências exploratórias e investigativas em ambientes informatizados. Os autores destacam como os recursos computacionais contribuem significativamente para melhorar a relação destes atores, através do contato mais comunicativo que se percebe entre eles nestes ambientes.

Já no quarto episódio percebemos a dificuldade de G1 em realizar os cálculos das dimensões do triângulo, ainda que pelo programa, na função "interseção de dois objetos", eles consigam extrair estas grandezas. Apesar de terem a percepção sobre a necessidade da prova algébrica para constatar a validade do resultado, eles apresentam embaraços para calcular a área do triângulo. Esta foi a etapa que gerou maiores obstáculos à classe e por isso foi necessária uma explicação geral acerca do cálculo das interseções envolvendo parâmetros algébricos.

No quinto episódio ficou clara a percepção de G1 sobre o padrão que existia entre os valores das áreas dos triângulos e os respectivos numeradores das funções. Eles conseguiram detectar esta regularidade, inferindo que para cada função do tipo $f_a(x) = a/x\,, a = 1, 2, 3, 4, \ldots$, o valor da área é igual a $2a$, inclusive João demonstra animadamente a sua compreensão acerca das conjecturas ao completar a tabela 1, afirmando animadamente *A conjectura está lançada!*. O reconhecimento de padrões e regularidades surgiu nesta tarefa permitindo induções e conjecturas (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003). Este fato ampliou o conhecimento dos alunos sobre os processos investigativos em Matemática.

Focando agora no último episódio, pudemos constatar que G1 já apresentava mais confiança. Aproveitam ainda as construções computacionais para especular a validade do resultado principal, estendendo o numerador da função para os números reais. Esta é uma questão que eles mesmos colocam e, através de ensaios realizados pelo *software*, chegam a uma conclusão positiva. São circunstâncias iguais a esta que evidenciam o protagonismo dos alunos na exploração dos conhecimentos e que são valiosamente viabilizadas pelo caráter dinâmico das analises computacionais. Novamente cabe ressaltar as estratégias diferenciadas utilizadas pelos dois grupos na demonstração algébrica do segundo problema. Enquanto G2 utilizou a regra do quociente para derivar, G1 utilizou a regra da potência (após perceber que esta é muito mais rápida que a definição clássica), evidenciando que os alunos são capazes de trilhar estratégias distintas nas investigações, buscando caminhos alternativos para a solução dos problemas (Cengiz et al., 2011).

Esta tarefa auxiliou a turma a ampliar a sua concepção sobre investigações matemáticas, conjecturas e demonstrações. A abordagem desta tarefa permitiu que os alunos aplicassem os assuntos teóricos ora em estudo (limites e derivadas) e aprofundassem os seus domínios conceituais, evoluindo os seus conhecimentos na disciplina. Num ambiente diversificado de aprendizagem, em pequenos grupos e fazendo uso dos recursos computacionais, eles vivenciaram os notáveis aspectos das atividades investigativas. Ficou evidente a importância do *software* para este trabalho. Os alunos utilizaram os seus dinâmicos recursos para visualizar gráfico de funções, descobrir padrões e verificar os resultados demonstrados. Foi notável também os recursos do programa que possibilitaram o movimento contínuo da tangente, a construção do triângulo e a medida simultânea da sua área, promovendo a ampla compreensão do problema.

Referências bibliográficas

Allevato, N. S. G. (2005). *Associando o computador à resolução de problemas fechados: Análise de uma experiência* (Tese de Doutoramento, Universidade Estadual Paulista).

Andrade, L. N. (2004). *Introdução à computação algébrica com o Maple.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Barufi, M. C. B. (1999). *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral* (Tese de Doutoramento, Universidade de São Paulo).

Bianchini, W., & Santos A. R. (2002). *Aprendendo Cálculo com o Maple - Cálculo de uma variável.* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora.

Bishop, A. & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11–17.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14* (5), 355–374.

Chapman, O., & Heater, B. (2010). Understanding change through a high school mathematics teacher's journey to inquiry-based teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13* (6), 445–458.

Curi, R. C., & Farias, R. M. S. (2008). Métodos de estudo e sua influência no desempenho dos alunos em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. In *Anais do XXXVI Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia* (pp. 1–11). São Paulo: ABENGE.

Frescki, F. B., & Pigatto, P. (2009). Dificuldades na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral na Educação Tecnológica: Proposta de um curso de nivelamento. In *Anais do Simpósio Nacional de Iniciação Científica* (pp. 910–917). Curitiba: UTFPR.

Garbi, G. G. (2011). *A Rainha das Ciências*. São Paulo: Livraria da Física.

Garzella, F. C. (2013). *A disciplina de Cálculo I: A análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos* (Tese de Doutoramento, Universidade de Campinas).

Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. San Diego, CA: Academic Press.

Gomes, G. H., Lopes, C. M. C., & Nieto, S. S. (2005). Cálculo Zero: Uma experiência pedagógica com calouros nos cursos de engenharia. *In XXXIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia* (pp. 1–9). Campina Grande: Cobenge.

Melo, J. M. R. (2002). *Conceitos de integral: Uma proposta computacional para o ensino e aprendizagem* (Dissertação de Mestrado, PUC – São Paulo).

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. São Francisco, CA: Jossey-Bass.

Miquelino, L. H., & Resende, M. R. (2013). As tecnologias de informação e comunicação e o desenvolvimento profissional do professor de Cálculo. *In XI Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 1–16). Curitiba: SBEM.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autentica Editora.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de trabalho de investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Rezende, W. M. (2003). *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de natureza epistemológica* (Tese de Doutoramento, Universidade de São Paulo).

Ruthven, K., Hofmann, R., & Mercer, N. (2011). A dialogic approach to plenary problem synthesis. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 81–88. Ankara, Turkey: PME.

Saback, M. S. O. (1980). *O Desenvolvimento cognitivo e o desempenho em Cálculo na Universidade: Um estudo de caso* (Dissertação de Mestrado, PUC – Rio de Janeiro).

Saraiva, R. P. (2000). Novas tecnologias no ensino do conceito de limite de função (Dissertação de Mestrado, PUC – São Paulo).

São Paulo (1991). *Proposta curricular para o ensino de Matemática: 2º grau.* São Paulo: SE/CENP.

Silva, J. F. (1994). *Questões metodológicas do ensino do Cálculo Diferencial e Integral* (Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará).

Villarreal, M. E. (1999). *O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas* (Tese de Doutoramento, Universidade Estadual Paulista).

Zuchi, I. (2005). *A abordagem do conceito de limite via sequência didática: Do ambiente lápis e papel ao ambiente computacional* (Tese de Doutoramento, Universidade Federal de Santa Catarina).

Anexo 1

QUESTIONÁRIO DE INVESTIGAÇÃO

Caro estudante

Este questionário tem como objetivo principal avaliar o grau de satisfação e aprendizado de alguns tópicos do Cálculo Diferencial e Integral a partir do uso de tarefas exploratórias investigativas em grupo e com o auxílio do computador. Em particular, almejo verificar se esta é uma estratégia que favorece a compreensão acerca da abordagem de investigações matemáticas, conjecturas e demonstrações. As informações que serão prestadas neste questionário não visam estabelecer qualquer tipo de nota ou conceito dos respondentes, servem, porém, para melhor compreender o comportamento e evolução dos discentes a partir dessa estratégia didática para o aperfeiçoamento do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

Enquanto docente e responsável por essa investigação, comprometo utilizar as informações aqui fornecidas apenas no âmbito desta pesquisa, assegurando também o anonimato, de forma que não há necessidade de sua identificação. Assim, conto com a veracidade das informações aqui prestadas e agradeço antecipadamente a sua colaboração.

Atenciosamente,
Prof. Álvaro Fernandes Serafim Filho.

Após a realização da atividade, solicito que responda com bastante atenção e cuidado as seguintes questões:

1. Você considera que esta atividade, realizada em grupo e com auxílio do computador, o ajudou a compreender melhor a abordagem de investigações matemáticas, conjecturas e demonstrações?

(   ) Sim   (   ) Não

Que aspectos na realização dessa tarefa você considera que mais contribuíram para formar a sua opinião? Explique.

____
____
____
____
____

2. Ao longo da realização desta tarefa, foi-lhe sugerido o uso do computador com o *software GeoGebra*. Como foi utilizado este recurso tecnológico?

( ) Para toda a resolução da tarefa.
( ) Apenas para visualização do gráfico.
( ) Apenas para verificação da solução.
( ) Outra. Qual?

____

Explique a(s) opção(ões) escolhida(s).

____
____
____
____
____
____
____

3. Você encontrou dificuldades na realização desta tarefa?

( ) Sim ( ) Não

Se marcou “sim”, que dificuldades encontrou?

( ) Na compreensão da tarefa
( ) No uso do *software*
( ) Na demonstração formal dos resultados
( ) Na realização dos cálculos
( ) Outra. Qual(ais)?

____

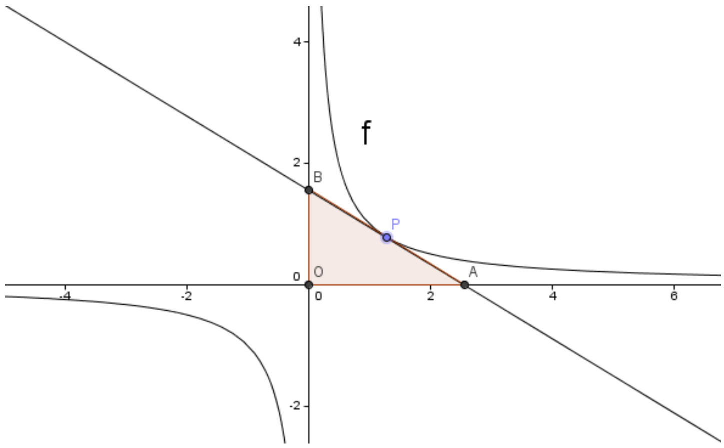
Explique a(s) opção(ões) escolhida(s).

____
____
____
____
____

Anexo 2

Tarefa 1 - Áreas de regiões planas delimitadas por retas tangentes

Questão 1: Considere a função $f(x) = 1/x\,, x \neq 0$. Verifique se é constante (e sempre o mesmo valor!) a área do triângulo AOB, sendo A e B os pontos de interseção de qualquer reta tangente ao gráfico desta função com os eixos coordenados x e y, respectivamente, conforme a figura.



a) Use o *GeoGebra* para investigar esta questão. Caso a sua resposta seja afirmativa, demonstre este resultado.

Questão 2: Ainda com relação a construção anterior, trace sucessivamente os gráficos das funções $f_2(x) = 2/x$, $f_3(x) = 3/x$, $f_4(x) = 4/x$ e observe o comportamento das áreas dos triângulos (complete a tabela).

Função:	Área do triângulo AOB:	Função:	Área do triângulo AOB:
$f_1(x) = 1/x$		$f_4(x) = 4/x$	
$f_2(x) = 2/x$		$f_5(x) = 5/x$	
$f_3(x) = 3/x$		$\vdots$	

a) A partir da observação da tabela é possível estabelecer alguma relação entre a família de funções $f(x) = a/x\,, x \neq 0$, sendo a constante real não nula e as respectivas áreas dos triângulos? Justifique.

b) A partir da sua resposta anterior, demonstre algebricamente a sua afirmação usando os seus conhecimentos do Cálculo Diferencial e Integral.