

Universidade do Minho  
Escola de Ciências

Dulce Manuela Caldas Pinto

# Estabilidade do problema de três corpos restrito

Tese de Mestrado

Matemática - área de especialização em ensino

Trabalho realizado sob a orientação do Doutor Filipe C. Mena

Janeiro de 2006





## Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao orientador Doutor Filipe C. Mena por todas as discussões que levaram à realização deste trabalho e pela sua dedicação. Gostaria, também, de agradecer ao Doutor Hildeberto Cabral pelos esclarecimentos prestados sobre a estabilidade de sistemas Hamiltonianos e ao Doutor Mike Evans por gentilmente ter cedido as condições iniciais de Polydeuces.



# Estabilidade do problema de três corpos restrito

## Resumo

É apresentado neste trabalho um estudo analítico e numérico da estabilidade de soluções de equilíbrio hiperbólicas e elípticas de um sistema dinâmico Newtoniano não-linear. Este estudo é aplicado ao problema de três corpos restrito no plano, que é um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade e tem no referencial sinódico cinco pontos de equilíbrio: três pontos colineares e dois pontos triangulares. Os pontos triangulares, dependendo da razão entre as massas de dois corpos, podem ser classificados como pontos elípticos ou como pontos hiperbólicos. A estabilidade dos pontos de equilíbrio elípticos é estudada através da aplicação de teoremas gerais de sistemas Hamiltonianos não-lineares com dois graus de liberdade, nomeadamente do Teorema de Birkhoff e do Teorema de Arnold-Moser e a instabilidade dos pontos de equilíbrio hiperbólicos e dos pontos de equilíbrio colineares é estudada através da aplicação de teoremas gerais de equações diferenciais ordinárias não-lineares.

O problema de três corpos restrito não é, em geral, integrável sendo, portanto, apresentado um estudo numérico das suas órbitas através da análise da excentricidade, de secções de Poincaré e do máximo expoente de Lyapunov. Estes métodos são aplicados ao estudo de possíveis órbitas de asteróides, na vizinhança de pontos de equilíbrio do sistema Sol-Júpiter, e ao estudo da órbita de Polydeuces do sistema Saturno-Dione.



# Stability of the restricted three body problem

## Abstract

Here is presented an analytic and numerical study on the stability of hyperbolic and elliptical equilibrium solutions of a non-linear dynamical system. This study is applied to the, planar, restricted three-body problem, which is an Hamiltonian system with two degrees of freedom and has, on the synodic system five equilibrium points: three colinear points and two triangular points. The triangular points can be hyperbolic or elliptical, depending on the mass ratio between the two more massive bodies. The stability of the elliptical points is studied by applying the general theorems from the non-linear Hamiltonian systems with two degrees of freedom, namely the Birkhoff theorem and the Arnold-Moser theorem. The hyperbolic and colinear points instability results from general theorems of non-linear ordinary differential equations.

The restricted three body problem is non-integrable, in general. As such, a numerical study of its orbits is presented, through the analysis of the eccentricity, the Poincaré sections and the Lyapunov exponents. These methods are applied to the study of asteroids orbits, in the vicinity of equilibrium points of the Sun-Jupiter system and, to the study of Polydeuces orbit of the Saturn-Dione system.



# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Teoria mecânica</b>	<b>7</b>
1.1 Formalismo Lagrangiano . . . . .	7
1.2 Formalismo Hamiltoniano . . . . .	9
1.3 Equações de movimento . . . . .	13
<b>2 Problema de dois corpos</b>	<b>19</b>
2.1 Equações de movimento . . . . .	19
2.2 Análise qualitativa das soluções . . . . .	21
2.3 Integração das equações de movimento . . . . .	22
<b>3 Problema de três corpos restrito</b>	<b>27</b>
3.1 Equações de movimento . . . . .	28
3.1.1 O problema de Hill . . . . .	33
3.1.2 Região de Hill . . . . .	34
3.2 Pontos de equilíbrio do PTCR . . . . .	34
<b>4 Estabilidade linear dos pontos de equilíbrio</b>	<b>41</b>
4.1 Linearização do sistema Hamiltoniano . . . . .	41
4.2 Linearização do PTCR . . . . .	43
4.3 Pontos de equilíbrio triangulares . . . . .	44
4.4 Pontos de equilíbrio colineares . . . . .	46
4.5 Aplicações . . . . .	48
<b>5 Estabilidade não-linear dos pontos de equilíbrio</b>	<b>53</b>
5.1 Pontos de equilíbrio colineares e triangulares hiperbólicos . . . . .	54
5.2 Pontos de equilíbrio elípticos . . . . .	56
5.3 Aplicações . . . . .	70
<b>6 Caos, análise qualitativa e aplicações</b>	<b>73</b>
6.1 Excentricidade . . . . .	74

6.2	Secções de Poincaré . . . . .	76
6.3	Expoentes de Lyapunov . . . . .	80
6.4	Estabilidade numérica da órbita de Polydeuces . . . . .	84
	<b>Conclusão</b>	<b>87</b>
	<b>A Programas</b>	<b>91</b>
A.1	Secção de Poincaré . . . . .	91
A.2	Expoentes de Lyapunov . . . . .	95
	<b>Bibliografia</b>	<b>103</b>



# Lista de abreviaturas

- **PTCR:** Problema de três corpos restrito
- **EDO:** Equação diferencial ordinária
- **DSCI:** Dependência sensível às condições iniciais
- **MECL:** Máximo expoente característico de Lyapunov
- **IMECL:** Indicador do máximo expoente característico de Lyapunov



# Lista de notação

$L$ : função Lagrangiana.

$H$ : função Hamiltoniana.

$C_1, C_2$ : corpos no sistema de dois corpos. Se as suas massas são distintas,  $C_2$  identifica o corpo com menor massa.

$C_3$ : corpo de massa infinitesimal.

$m_1$ : massa do corpo  $C_1$ .

$m_2$ : massa do corpo  $C_2$ .

$\mu$ : massa reduzida.

$G$ : constante de gravitação universal.

$\mu^*$ :  $G(m_1 + m_2)$ .

$\mu_1$ : massa reduzida de  $C_1$ .

$\mu_2$ : massa reduzida de  $C_2$ .

$E_c$ : energia cinética.

$U$ : energia potencial.

$\vec{l}$ : momento angular.

$l$ : módulo do momento angular.

$a$ : medida do semi-eixo maior de uma cónica.

$e$ : excentricidade de uma cónica.

$p$ : lado recto de uma cónica.

$C_J$ : constante de Jacobi.

$\mathcal{I}$ : número complexo tal que  $\mathcal{I}^2 = -1$ .

$\vec{x}$ : posição de um corpo.

$\dot{\vec{x}}$ : velocidade de um corpo.

$\vec{x}_0$ : posição inicial de um corpo.

$\vec{x}_E$ : posição de um ponto de equilíbrio.

$\vec{x}_P$ : posição de um ponto de uma órbita periódica.

$T$ : período de uma órbita periódica.

$A$ : matriz Jacobiana em  $\vec{x}_E$ .

$I_{N \times N}$ : matriz identidade  $N \times N$ .

$0_{N \times N}$ : matriz nula  $N \times N$ .

$\mathcal{T}$ : matriz  $2N \times 2N$  da forma  $\begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -I_N & 0_N \end{pmatrix}$ .

$\phi$ ,  $\psi$  e  $\varphi$ : fluxos.

$\gamma$ : órbita periódica.

$\lambda$ : valor próprio.

$\chi$ : expoente característico de Lyapunov.

$\chi_1^*$ : indicador do máximo expoente característico de Lyapunov.

$\diamond$ : fim de demonstração.

# Lista de Tabelas

4.1	Estudo da estabilidade linear dos pontos de equilíbrio colineares e triangulares do PTCR planar. . . . .	49
5.1	Estudo analítico da estabilidade dos pontos de equilíbrio elípticos de um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade, no caso em que a parte quadrática $H_2$ não tem sinal definido, com aplicação ao PTCR planar. . . .	72



# Lista de Figuras

2.1	Representação de trajectórias no espaço fase $up$ para diferentes valores de $\frac{\beta^2}{\mu} > 0$ e diferentes valores de energia: (a) $E = 0$ ; (b) $E = 1$ e; (c) $E = -1$ .	23
2.2	Representação de trajectórias no espaço fase para $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ e diferentes valores de excentricidade: (a) $e = 0$ ; (b) $e = 0.8$ ; (c) $e = 1$ e; (e) $e = 1.25$ .	24
2.3	Simulação do movimento dos corpos $C_1$ e $C_2$ em relação ao seu centro de massa, considerando-se $\mu^* = G(m_1 + m_2) = 1$ , com $Gm_2 = 0.3$ , lado recto $p = 1$ e excentricidade $e = 0.8$ . O ponto cinzento representa a posição do corpo $C_1$ e o preto a posição de $C_2$ , encontrando-se no mesmo instante de tempo no mesmo segmento de recta. O ponto de intersecção dos segmentos de recta é o centro de massa do sistema.	25
3.1	Representação da posição de $C_3$ e do movimento de $C_1$ e $C_2$ em relação ao seu centro de massa, projectada no plano $OXY$ .	28
3.2	Representação da relação entre os referenciais inercial e sinódico, projectado no plano.	30
3.3	Representação das curvas de velocidade zero e das zonas onde o movimento de $C_3$ não é possível, a sombreado, no sistema Sol-Júpiter, para valores da constante de Jacobi: (a) $C_J = 3$ ; (b) $C_J = 3.01$ e; (c) $C_J = 3.04$ . Os pontos correspondem à posição dos corpos $C_1$ e $C_2$ .	34
3.4	Representação dos pontos de equilíbrio $L_1, L_2, L_3, L_4$ e $L_5$ para $\mu_2 = 0.3$ .	38
3.5	Posição na recta dos pontos colineares e dos corpos $C_1$ e $C_2$ em função da razão de massa $\mu_2$ .	38
4.1	Módulo dos valores próprios do sistema linearizado na vizinhança dos pontos triangulares em função de $\mu_2$ , para $0 < \mu_2 < \mu_{2,3}$ .	49
4.2	Trajectória do corpo $C_3$ , do sistema linearizado (a) e do sistema não linearizado (b), em relação ao referencial sinódico, na vizinhança do ponto de equilíbrio $L_4$ , $\mu_2 = 10^{-2}$ e intervalo de tempo $[0, 32\pi]$ . Este movimento pode representar o movimento de um corpo $C_3$ para um período de 16 anos da Lua.	50

4.3	Trajectória do corpo $C_3$ , do sistema linearizado (a) e do sistema não linearizado (b), em relação ao referencial sinódico, na vizinhança do ponto de equilíbrio $L_4$ , $\mu_2 = 10^{-3}$ e intervalo de tempo $[0, 32\pi]$ . Este movimento pode representar o movimento de um corpo $C_3$ para um período de 16 anos de Júpiter. . . . .	51
4.4	Trajectória do corpo $C_3$ , do sistema linearizado, em relação ao referencial sinódico, na vizinhança do ponto de equilíbrio $L_4$ , $\mu_2 = 10^{-3}$ e intervalo de tempo $[0, 20\pi]$ em (a) e $[0, 1600\pi]$ em (b). Este movimento pode representar o movimento de um corpo $C_3$ para 10 períodos orbitais da Terra em (a) e de 800 em (b) no sistema Sol-Terra. . . . .	51
4.5	Trajectória do corpo $C_3$ , do sistema linearizado para (a) $k_1/k_2 = 1/3$ , $\mu_2 \approx 0.0135$ e para (b) $k_1/k_2 = 1/2$ , $\mu_2 \approx 0.02494$ , em relação ao referencial sinódico, na vizinhança do ponto de equilíbrio $L_4$ . O tempo de integração corresponde a 250 períodos orbitais de $C_2$ . . . . .	52
5.1	Gráfico do determinante $D$ em função da massa $\mu_2$ . . . . .	65
5.2	Solução numérica do PTCR planar para valores próprios em ressonância 2 : 1 e período de integração $T$ , número de anos do corpo $C_2$ , com (a) $T \in [0, 250]$ e (b) $T \in [2546, 2785]$ . . . . .	71
5.3	Solução numérica do PTCR planar para valores próprios em ressonância 2 : 1 e período de integração $T$ , número de anos do corpo $C_2$ , com $T \in [2562, 2801]$ . . . . .	71
6.1	Representação da variação do semi-eixo maior (a) e da excentricidade (b) em função de $T$ , períodos orbitais de $C_2$ , com condição inicial $(x_0, y_0, \dot{x}_0) = (0.44, 0, 0)$ , $C_J = 3.06$ e massa $\mu_2 = 10^{-3}$ . . . . .	75
6.2	Representação da variação do semi-eixo maior (a) e da excentricidade (b) em função de $T$ , períodos de $C_2$ , com condição inicial $(x_0, y_0, \dot{x}_0) = (0.46, 0, 0)$ , $C_J = 3.06$ e massa $\mu_2 = 10^{-3}$ . . . . .	76
6.3	Representação da variação do semi-eixo maior (a) e da excentricidade (b) em função de $T$ , período de $C_2$ , com condição inicial $(x_0, y_0, \dot{x}_0) = (0.4925, 0.8595, 0)$ , $C_J = 2.999$ e $\mu_2 = 10^{-3}$ . O movimento de $C_3$ efectua-se na vizinhança de $L_4$ . . . . .	76
6.4	Representação da variação do semi-eixo maior (a) e da excentricidade (b) em função de $T$ , período de $C_2$ , com condição inicial $(x_0, y_0, \dot{x}_0) = (0.93, 0, 0)$ , $C_J = 3.0399$ e $\mu_2 = 10^{-3}$ . O movimento de $C_3$ efectua-se na vizinhança do ponto de equilíbrio $L_1$ . . . . .	77
6.5	(a) Órbita de $C_3$ na vizinhança do ponto de equilíbrio $L_4$ para um período de integração de 32 anos do corpo $C_2$ . (b) Órbita de $C_3$ na vizinhança do ponto de equilíbrio $L_1$ para um período de integração de 160 anos do corpo $C_2$ . . . . .	77



- 6.6 Comparação da excentricidade entre duas órbitas com condições iniciais próximas,  $(x_0, y_0, \dot{x}_0) = (0.93, 0, 0)$  (linha preta) e  $(x_0, y_0, \dot{x}_0) = (0.93 + 10^{-6}, 10^{-6}, 0)$  (linha cinzenta) e  $C_J = 3.0399$ . . . . . 77
- 6.7 Secções de Poincaré para a condição inicial (a)  $x_0 = 0.44$  e (b)  $x_0 = 0.46$ , para  $C_J = 3.06$  e  $\mu_2 = 10^{-3}$ . O tempo de integração corresponde a 1592 períodos orbitais do corpo  $C_2$ . A figura (a) representa uma secção de uma órbita regular e a figura (b) representa uma secção de uma órbita caótica. . . . . 79
- 6.8 (a) Secção de Poincaré, correspondente a uma órbita com condição inicial  $(x_0, y_0, u_0) = (0.93, 0, 0)$ ,  $C_J = 3.0399$  e  $\mu_2 = 10^{-3}$ . (b) Secções de Poincaré de várias trajectórias, com  $C_J = 3.04$  e  $\mu_2 = 10^{-3}$ . . . . . 79
- 6.9 (a) Secções de Poincaré para várias trajectórias, obtidas por variação de  $x_0$ , com  $C_J = 3.04$ ,  $\mu_2 = 10^{-3}$  e intervalo de tempo correspondente a cerca de 1600 anos do corpo  $C_2$ . (b) Separatriz, obtida para a trajectória com condição inicial  $x_0 = 0.2$ ,  $y_0 = 0$ ,  $u_0 = 0$  e  $C_J = 3.04$ . . . . . 80
- 6.10 Secções de Poincaré para várias trajectórias, obtidas por variação de  $x_0$ , com  $C_J = 3.06$  e  $\mu_2 = 10^{-3}$ . . . . . 80
- 6.11 Gráficos dos IMECL relativos às órbitas regular (gráfico inferior) e caótica (gráfico superior), de posições iniciais  $x_0 = 0.44$  e  $x_0 = 0.46$ , respectivamente, com  $C_J = 3.06$ . A distância inicial entre as respectivas órbitas vizinhas é  $\xi_0 = 10^{-6}$ . . . . . 83
- 6.12 IMECL relativo à trajectória com as condições iniciais  $x_0 = 0.93$ ,  $y_0 = 0$ ,  $u_0 = 0$ ,  $C_J = 3.0399$  e  $\mu_2 = 10^{-3}$ , para um período de integração de 477465 anos do corpo  $C_2$ . A distância inicial entre as órbitas vizinhas é  $10^{-6}$ . . . . . 83
- 6.13 IMECL relativo à trajectória com as condições iniciais  $x_0 = 0.4925$ ,  $y_0 = 0.8595$ ,  $u_0 = 0$  e  $C_J = 2.999$ , para um período de integração de 477465 anos do corpo  $C_2$ . A distância inicial entre as órbitas vizinhas é  $10^{-6}$ . . . . . 84
- 6.14 Trajectória de Polydeuces para um período de integração de 1035 anos de Dione que corresponde a cerca de 2 anos terrestres. . . . . 85
- 6.15 Secção de Poincaré relativa à trajectória de Polydeuces para um período de integração de  $1.6 \times 10^5$  períodos orbitais de Dione que correspondem a cerca de 1227 anos. . . . . 85
- 6.16 Representação da variação do semi-eixo maior (a) e da excentricidade (b) em função do tempo, da órbita de Polydeuces. A variável  $T$  refere-se a períodos orbitais de Dione. . . . . 86
- 6.17 Representação do IMECL da órbita de Polydeuces planar para cerca de 120000 períodos orbitais de Dione. . . . . 86



# Introdução

O problema de  $n$  corpos Newtoniano consiste no estudo da dinâmica de  $n$  corpos no espaço tridimensional sujeitos à lei da gravitação de Newton. O movimento desses corpos é caracterizado por um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares, podendo estas ser obtidas através do formalismo da mecânica clássica e estudadas no âmbito do formalismo Hamiltoniano [3].

A lei de gravitação universal, estabelecida por Newton no século dezassete, permite uma boa aproximação ao estudo do movimento dos corpos celestes no sistema solar [28]. Newton demonstrou que o sistema de equações diferenciais que descreve o movimento de dois corpos tem solução geral e que, conhecendo as posições e as velocidades iniciais dos corpos, é possível determinar a sua posição em qualquer tempo passado ou futuro. Se um sistema for formado por um planeta e pelo sol, por exemplo, o planeta descreve uma elipse com o sol posicionado num dos seus focos. A descrição da órbita elíptica dos planetas em relação ao sol já tinha sido descoberta, através de métodos experimentais, por Kepler (1609).

A resolução do problema de dois corpos apenas permite uma primeira aproximação ao real movimento dos planetas, pois as forças entre os planetas causam perturbações nestas órbitas elípticas. Este aspecto levantou o problema da estabilidade das órbitas planetárias: será que pequenas perturbações entre os planetas, após tempo suficientemente longo podem originar colisões ou provocar a exclusão de algum planeta do sistema solar? Esta questão foi abordada através de técnicas de expansão em séries por Laplace (1773), Lagrange (1776) e Poisson (1809), que apresentaram provas da estabilidade do sistema solar. No entanto, estas provas apenas permitem concluir a estabilidade do sistema solar para algumas décadas ou séculos [27]. Além disso, resultados obtidos por Poincaré (1892) sugerem que as séries, utilizadas nestas provas de estabilidade, divergem. Estudos realizados por Birkhoff [32, 17] que consistem na transformação das equações de movimento para a sua forma normal na vizinhança de um ponto de equilíbrio e por Siegel (1942) [32, 17] que estudou as condições para a convergência da transformação de Birkhoff, cujas séries são, em geral, divergentes, permitiram algum progresso no estudo da estabilidade do movimento de sistemas dinâmicos Hamiltonianos. Kolmogorov (1954) e Arnold (1961) provaram, sob a mesma condição para a convergência das séries da transformação de Birkhoff, a existência de soluções quase-

periódicas em sistemas dinâmicos não-lineares [17]. Moser (1961) demonstrou o mesmo resultado para mapas. O trabalho de Kolmogorov, Arnold e Moser deu origem à teoria KAM e, em particular, ao teorema KAM que assegura que órbitas quase periódicas de um sistema Hamiltoniano integrável com período *suficientemente irracional* permanecem quase periódicas quando sujeitas a perturbações *suficientemente pequenas* [23]. A demonstração da existência de soluções quase-periódicas nos sistemas Hamiltonianos não integráveis, desde que obedecem a determinadas condições, permitiu algum desenvolvimento do conhecimento da estrutura do respectivo espaço fase. Também o desenvolvimento dos computadores, na segunda metade do século vinte, foi um auxílio importante no conhecimento qualitativo da estrutura do espaço fase de sistemas Hamiltonianos.

Ao estudar o problema de três corpos, Poincaré apercebeu-se que determinadas condições iniciais dão origem a soluções que descreveu como complicadas, fornecendo as bases para o desenvolvimento da teoria do caos [28]. A compreensão do caos e as suas implicações na estabilidade do sistema solar tem sido um dos objectos de estudo na moderna mecânica celeste. Estudos realizados por Sussman e Wisdom (1988) [34] apresentam evidências de que a órbita de Plutão é caótica; Laskar (1989,1990) [19, 21] apresentou evidências que o movimento dos restantes planetas também é caótico. Estes estudos resultam da análise quantitativa do comportamento caótico dos planetas nomeadamente através do cálculo numérico de expoentes de Lyapunov.

Vários problemas são estudados na dinâmica do sistema solar relacionados com a estabilidade do sistema solar, como é o caso da distribuição de asteróides. Kirkwood (1867) descobriu que na cintura de asteróides que orbitam entre Marte e Júpiter os semi-eixos dos asteróides não estão distribuídos de forma aleatória, havendo zonas quase vazias de asteróides. Estas zonas são frequentemente designadas por *buracos de Kirkwood*, cujas posições correspondem a ressonâncias com Júpiter. Por exemplo, existe um buraco na ressonância 3 : 1, isto é, um possível asteróide nessa posição cumpriria três períodos orbitais em torno do sol enquanto que Júpiter cumpre um. Wisdom (1981) estudou numericamente o movimento de asteróides na vizinhança da ressonância 3 : 1 e encontrou condições iniciais que levam a órbitas caóticas que podem atingir excentricidades superiores a 0.6, o que implicaria a intersecção da sua órbita com a órbita da Terra. Estas órbitas podem ser vias de transporte de uma classe de meteoritos, as Condrites, da cintura de asteróides para a Terra, além disso, estudos apresentam evidências que parte dos asteróides próximos da Terra (estes asteróides são normalmente designados por *NEA - near earth asteroids*, por a sua órbita intersectar ou se aproximar da órbita da Terra) tiveram origem na ressonância 3 : 1 [37]. O estudo da dinâmica do sistema solar é essencial para perceber de onde surgem os objectos que intersectam a órbita da Terra e como evolui o seu movimento, pois o impacto de um grande asteróide com a Terra poderia provocar um desastre natural, colocando em causa a vida na Terra.

O problema de  $n$  corpos, com  $n > 2$ , revelou-se um problema difícil. No entanto, é pos-

sível obter para o problema de  $n$  corpos Newtoniano soluções particulares. Considerando um sistema de três corpos colineares, Euler (1767) encontrou três configurações possíveis em que os três corpos orbitam em torno do seu centro de massa em movimento circular uniforme. Outra solução obtém-se quando se considera um sistema formado por  $n$  corpos de massas iguais posicionados nos vértices de um polígono regular de  $n$  lados, as suas órbitas são cónicas complanares e congruentes, com o foco comum no centro de massa do sistema e a configuração poligonal inicial é preservada ao longo do movimento [11]. Em particular, num sistema formado por três corpos, estes definem um triângulo equilátero e esta configuração mantém-se mesmo que os três corpos tenham massas distintas. Estas soluções triangulares foram estudadas por Lagrange (1772). Existem no sistema solar vários sistemas de três corpos cuja configuração ao longo do seu movimento é próxima de um triângulo equilátero, como seja o sistema asteróides Troianos-Sol-Júpiter. Recentemente a sonda Cassini, que orbita em torno de Saturno com o objectivo de estudar o sistema saturniano, desde Julho de 2004, permitiu a descoberta de novas luas de Saturno como é o caso de Polydeuces que forma com Saturno e a lua Dione uma configuração próxima de um triângulo equilátero. Assume, deste modo, importância o estudo da estabilidade das órbitas de três corpos que ao longo do seu movimento apresentam uma configuração triangular aproximadamente equilátera. Se um dos três corpos tem massa comparativamente negligenciável em relação aos outros dois, cujo movimento é próximo do movimento circular uniforme, sendo as órbitas dos corpos complanares, o problema de três corpos restrito (PTCR) planar permite o estudo do movimento do corpo de massa nula. Existem cinco órbitas possíveis para que o corpo de massa nula orbite em torno do centro de massa do sistema segundo um movimento circular uniforme complanar com o movimento dos corpos massivos, que são as soluções colineares de Euler e as soluções triangulares de Lagrange.

Na formulação do PTCR planar obtém-se um sistema de equações diferenciais num espaço fase de quatro dimensões. Este sistema é Hamiltoniano e tem no referencial sinódico, no qual os dois corpos massivos estão em repouso, cinco pontos de equilíbrio que correspondem no referencial inercial às soluções de Euler e de Lagrange. É objectivo deste trabalho o estudo da estabilidade dos referidos pontos de equilíbrio. O caso mais interessante, por ter aplicação ao sistema solar, e mais difícil, refere-se à estabilidade dos pontos de equilíbrio elípticos que correspondem aos pontos de equilíbrio triangulares para razões entre massas dos dois corpos em movimento circular  $0 < \mu_2 < 0.5 - \sqrt{69}/18$ . No sistema solar os pares de corpos sol-planeta e planeta-satélite verificam esta condição à excepção do par Plutão-Charon com razão entre massas aproximadamente  $10^{-1}$ , no qual não é conhecido nenhum corpo na vizinhança dos pontos triangulares, enquanto que nos sistemas que verificam a condição para a estabilidade como é o caso de Sol-Júpiter, Sol-Marte ou Saturno-Dione existem corpos de massa comparativamente infinitesimal próximo dos pontos triangulares.

Sendo o PTCR um sistema Hamiltoniano, este trabalho começa por apresentar no capí-

tulo 1 alguns resultados da teoria mecânica necessários para a formulação das equações de movimento do PTCR e para a dedução de resultados gerais dos sistemas Hamiltonianos. Assim sendo, deduzem-se as equações de movimento num sistema Lagrangiano composto por  $n$  corpos, com base no Princípio de Hamilton, e destas deduzem-se as equações de movimento num sistema Hamiltoniano com  $n$  corpos. A seguir são observadas algumas das propriedades dos sistemas Hamiltonianos como é o caso da utilização de transformações canónicas, utilizadas em capítulos posteriores. Neste capítulo é também demonstrada a existência e unicidade local de solução das equações de movimento de um sistema Hamiltoniano Newtoniano com  $n$  corpos, isto é, um sistema formado por  $6n$  equações ordinárias (EDOs) de ordem um. O problema de dois corpos é estudado no capítulo 2, definindo-se as equações de movimento à custa do Lagrangiano do sistema, em coordenadas cartesianas, sendo este analisado após a transformação canónica de coordenadas cartesianas para coordenadas polares. A existência de duas constantes do movimento, a energia e o momento angular, permitem a integração das EDOs, concluindo-se que o movimento dos dois corpos é complanar, definindo cada corpo uma cónica em relação ao seu centro de massa, que se encontra num dos seus focos comum. Este capítulo é útil para o estudo do PTCR, no capítulo 3, pois supõe-se que o corpo de massa infinitesimal não tem influência no movimento circular dos outros dois corpos. Deste modo, na formulação deste problema obtêm-se três equações diferenciais de ordem dois, relativas ao movimento do corpo de massa infinitesimal, em coordenadas cartesianas. No referencial sinódico, existe uma constante de movimento designada *constante de Jacobi* e existem os pontos de equilíbrio colineares e triangulares, cuja existência e unicidade é demonstrada.

A partir do capítulo 4 restringe-se o movimento do corpo de massa infinitesimal ao plano e inicia-se o estudo da estabilidade das suas soluções de equilíbrio, começando por linearizar o caso geral de um sistema Hamiltoniano na vizinhança de um ponto de equilíbrio e por analisar os respectivos valores próprios que surgem em pares de números simétricos. Estes resultados são aplicados ao PTCR planar concluindo-se a estabilidade dos pontos de equilíbrio triangulares, pontos elípticos, para a razão entre massas  $0 < \mu_2 < 0.5 - \sqrt{69}/18$ , a instabilidade linear dos pontos de equilíbrio triangulares, pontos hiperbólicos, para a razão de massas  $0.5 - \sqrt{69}/18 < \mu_2 < 1/2$  e a instabilidade linear dos pontos colineares. A estabilidade não-linear dos pontos de equilíbrio é discutida no capítulo 5, sendo abordada por meio do estudo prévio da estabilidade linear. A instabilidade dos pontos colineares e dos pontos hiperbólicos segue da aplicação de um teorema da teoria das EDOs e surge da existência de um valor próprio com parte real positiva. No que respeita ao estudo da estabilidade dos pontos elípticos, o capítulo segue a seguinte metodologia: apresenta-se um resultado geral válido para sistemas Hamiltonianos e este é aplicado ao PTCR planar. Os teoremas relativos à estabilidade dos pontos elípticos aplicam-se a um sistema escrito na designada *forma normal*, obtida através da aplicação do teorema de Birkhoff, válido para sistemas Hamiltonianos com  $N$  graus de liberdade. A transformação de um sistema

Hamiltoniano para a forma normal envolve o desenvolvimento em séries que não são em geral convergentes, e resultam de estudos efectuados por Birkhoff [32, 17] e por Siegel [32, 17]. A estabilidade não-linear dos pontos elípticos do PTCR planar resulta de estudos realizados por Leontovitch (1962) [22], que aplicou o teorema de Arnold (1961) [5], por Deprit & Deprit (1966) [13] que aplicaram o teorema de Arnold-Moser [32] e por Markeev [6, 25]. Posteriormente, Cabral e Meyer (1998) [12] apresentaram um teorema geral que permite estabelecer a estabilidade e instabilidade de um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade, englobando os resultados obtidos por Arnold, Moser e Markeev.

É também objectivo deste trabalho apresentar um estudo numérico da estabilidade de órbitas do PTCR planar, através da integração numérica das respectivas equações diferenciais, utilizando procedimentos habituais da moderna mecânica celeste como é o caso das secções de Poincaré, que permitem a análise qualitativa das órbitas no espaço fase, e do máximo expoente de Lyapunov, que permite caracterizar a caoticidade de uma órbita. Estes aspectos, assim como o cálculo numérico da excentricidade de uma órbita, são discutidos no último capítulo e aplicados a objectos do sistema solar cujo movimento possa ser aproximado pelo PTCR planar e, em particular, aplicados ao estudo da estabilidade numérica de Polydeuces, considerando que se movimenta no plano orbital da lua Dione.





# Capítulo 1

## Teoria mecânica

Este capítulo pretende fornecer os conhecimentos básicos de mecânica clássica considerados essenciais para o estudo do PTCR como um caso particular de um sistema Hamiltoniano. Como tal, neste capítulo são deduzidas as equações de movimento de um sistema com  $n$  corpos baseadas em princípios variacionais, a partir da função de Lagrange. As equações de movimento num sistema Hamiltoniano são obtidas a partir do sistema Lagrangiano. As propriedades dos sistemas Hamiltonianos possibilitam a utilização de transformações canónicas, o que permite a simplificação do estudo da dinâmica de equações diferenciais. Como as equações de movimento de um sistema mecânico, quer Lagrangiano quer Hamiltoniano, são equações diferenciais, é também demonstrado, no contexto mais geral de um sistema de equações diferenciais ordinárias, que a sua solução existe e é única.

### 1.1 Formalismo Lagrangiano

Para um sistema com  $N$  variáveis independentes, a posição de um corpo desse sistema no instante  $t$  é dada pelo vector  $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ , a respectiva velocidade por  $\dot{\vec{x}}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_N(t))$  e o movimento desse corpo é descrito pela função de Lagrange  $L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)$  tal que

$$\begin{aligned} \vec{x} : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^N & \dot{\vec{x}} : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ t &\longmapsto \vec{x}(t), & t &\longmapsto \dot{\vec{x}}(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) &\longmapsto L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t). \end{aligned}$$

**Definição 1** *O integral  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) dt$  é chamado acção.*

**Princípio de Hamilton:** *A trajectória de um corpo que se movimenta num sistema mecânico, no intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$ , é determinada pelo valor estacionário da acção*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

Se no instante  $t_1$  um corpo se encontra na posição  $\vec{x}(t_1)$ , com velocidade  $\dot{\vec{x}}(t_1)$  e no instante  $t_2$  na posição  $\vec{x}(t_2)$  com velocidade  $\dot{\vec{x}}(t_2)$ , segundo o *Princípio de Hamilton*, entre as duas posições referidas o corpo move-se de modo que a variação da acção

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ L(\vec{x} + \delta\vec{x}, \dot{\vec{x}} + \delta\dot{\vec{x}}, t) - L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \right] dt$$

seja zero. Pretende-se, para  $\delta\vec{x}_i(t_1) = \delta\vec{x}_i(t_2) = 0$  e para  $i = 1, \dots, N$  determinar a lei do movimento para a qual  $\delta S = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \delta S = 0 &\iff \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{x} + \delta\vec{x}, \dot{\vec{x}} + \delta\dot{\vec{x}}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) dt = 0 \\ \implies &\int_{t_1}^{t_2} \left[ L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) + \frac{\partial L}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_N} \delta x_N + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \delta \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_N} \delta \dot{x}_N \right] dt - \\ &\int_{t_1}^{t_2} L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) dt = 0 \iff \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right) dt = 0 \\ \iff &\sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{d}{dt} \delta x_i \right) dt = 0 \\ \iff &\sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \\ \iff &\sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt = 0, \end{aligned}$$

e obtêm-se as equações de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Na segunda linha da dedução anterior, a função  $L(\vec{x} + \delta\vec{x}, \dot{\vec{x}} + \delta\dot{\vec{x}}, t)$  foi substituída pelo seu desenvolvimento em série de Taylor até aos termos de ordem dois.

Para  $\vec{q} = (q_1, \dots, q_N)$ , vector de coordenadas generalizadas, e para  $\dot{\vec{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$ , vector de velocidades generalizadas, a variação de  $\vec{q}$  com o tempo obedece às equações de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.1)$$

Em particular, o Princípio de Hamilton aplica-se a sistemas mecânicos em que as forças se deduzem de um potencial generalizado que depende explicitamente apenas das coordenadas. Para um sistema deste tipo definem-se as funções  $E_c$ , *energia cinética*, e  $U$ , *energia*

potencial, por

$$\begin{aligned} E_c : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} & U : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \dot{\vec{q}} &\longmapsto \frac{1}{2}\dot{\vec{q}} \cdot \dot{\vec{q}}, & \vec{q} &\longmapsto U(\vec{q}), \end{aligned}$$

respectivamente. A função de Lagrange correspondente escreve-se como

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = E_c(\dot{\vec{q}}) - U(\vec{q}). \quad (1.2)$$

Aplicando a esta função as equações de Lagrange (1.1) tal que, para  $i = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_i \\ \frac{\partial L}{\partial q_i} &= -\frac{\partial U}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

obtém-se

$$\ddot{q}_i + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.3)$$

sistema este, coincidente com as equações de Newton, que serão referidas com mais pormenor nos capítulos 2 e 3.

## 1.2 Formalismo Hamiltoniano

Seja  $L$  uma função de Lagrange

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) &\longmapsto L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t). \end{aligned}$$

Definindo  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , a função Hamiltoniana define-se como <sup>1</sup>

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t). \quad (1.4)$$

Derivando a igualdade anterior obtém-se, por um lado,

$$dH = \sum_{i=1}^N \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (1.5)$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned} &d \left[ \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^N p_i d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^N \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^N \left( p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (1.6)$$

---

<sup>1</sup>A função  $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$  é a transformada de Legendre da função de Lagrange  $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ , em relação a  $\dot{\vec{q}}$ .

Como  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , as equações de Lagrange (1.1) permitem deduzir que  $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$  e que (1.6) é igual a

$$\sum_{i=1}^N \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^N \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (1.7)$$

Da igualdade entre (1.5) e (1.7), obtêm-se as *equações de Hamilton*, para  $i = 1, \dots, N$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1.8)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

relativas à função Hamiltoniana  $H$  tal que

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{q}, \vec{p}, t) &\longmapsto H(\vec{q}, \vec{p}, t). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Pretende-se estudar essencialmente o comportamento da solução das equações de Hamilton quando o Hamiltoniano não depende do tempo, (1.8) e (1.9), ou seja, o comportamento da solução  $\vec{\xi}(t) = (\vec{q}, \vec{p})$  do sistema de EDOs

$$\dot{\vec{\xi}} = \mathcal{T} H_{\vec{\xi}}, \quad (1.11)$$

com

$$\begin{aligned} H_{\vec{\xi}} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^{2N} \\ (\vec{q}, \vec{p}, t) &\longmapsto \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{q}}, \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

e, representando as matrizes identidade  $N \times N$  e nula  $N \times N$  pelas matrizes  $I_N$  e  $0_N$ , respectivamente, com

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -I_N & 0_N \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Um sistema de EDOs que não dependa explicitamente da variável tempo designa-se por *autónomo* e, neste caso, salientam-se as seguintes propriedades:

1. O Hamiltoniano  $H$  é uma constante do movimento.
2. O Hamiltoniano é igual à energia total do sistema.

Das igualdades (1.4) e (1.2) resulta que

$$\begin{aligned} H(\vec{q}, \vec{p}, t) &= \sum_{i=1}^N \left[ p_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial L}{\partial p_i} \right)^2 \right] + U(\vec{q}) \\ &= \sum_{i=1}^N \left( p_i^2 - \frac{1}{2} p_i^2 \right) + U(\vec{q}) = E_c(\vec{p}) + U(\vec{q}). \end{aligned}$$

As equações de Hamilton podem ser obtidas a partir da acção  $S$  (definição 1). Como, pela equação (1.5),

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - H(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t),$$

segundo o Princípio de Hamilton,

$$\delta S = 0 \iff \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) dt = 0.$$

Assim sendo,  $H$  define o caminho de uma partícula  $\vec{q}(t)$  com velocidade  $\dot{\vec{q}}(t)$  de modo que, para variações nos extremos do intervalo  $[t_1, t_2]$  nulas,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - H(\vec{q}, \vec{p}, t) \right] dt = 0. \quad (1.14)$$

Por vezes, as equações diferenciais de um sistema Hamiltoniano  $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$  são muito complicadas e o estudo da sua dinâmica difícil, pelo que a utilização de outras variáveis  $\vec{Q}$  e  $\vec{P}$  e uma outra função Hamiltoniana  $K(\vec{Q}, \vec{P}, t)$  permite a simplificação do problema. Então, novamente pelo Princípio de Hamilton, pode escrever-se

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{i=1}^N P_i \dot{Q}_i - K(\vec{Q}, \vec{P}, t) \right] dt = 0. \quad (1.15)$$

Como o movimento do corpo quer seja descrito por  $H$  quer por  $K$  define o mesmo caminho, os integrandos de (1.14) e de (1.15) estão relacionados da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_{i=1}^N P_i \dot{Q}_i - K(\vec{Q}, \vec{P}, t) + \frac{dR}{dt}, \quad (1.16)$$

onde  $R$  é qualquer função de coordenadas do espaço de fase, com segundas derivadas contínuas.

**Definição 2** (*Transformação canónica*) Seja  $\vec{\zeta} = \Psi(\vec{\xi})$ ,  $\vec{\zeta} = (\vec{Q}, \vec{P})$  e  $\vec{\xi} = (\vec{q}, \vec{p})$ , a transformação de coordenadas que transforma o Hamiltoniano  $H(\vec{\xi})$  de equações  $\dot{\vec{\xi}} = \mathcal{T}H_{\vec{\xi}}$ , no Hamiltoniano  $K(\vec{\zeta})$  de equações  $\dot{\vec{\zeta}} = \mathcal{T}K_{\vec{\zeta}}$ .

A transformação de coordenadas  $\vec{\zeta} = \Psi(\vec{\xi})$  diz-se canónica se existir uma função

$R: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida num espaço de fase, com segundas derivadas contínuas tal que

$$\sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_{i=1}^N P_i \dot{Q}_i - K(\vec{Q}, \vec{P}, t) + \frac{dR}{dt}.$$

A transformação do Hamiltoniano  $K$  no Hamiltoniano  $H$  obtém-se através de  $\vec{\xi} = \Psi^{-1}(\vec{\zeta})$ .

A função  $R$  da equação (1.16) designa-se por *função geradora* da transformação canónica e relaciona as variáveis de vários modos, podendo por exemplo ser uma função de  $\vec{q}$  e de  $\vec{Q}$ . A seguir exemplifica-se como a partir de uma função geradora se podem obter as equações da transformação canónica  $\vec{\zeta} = \Psi(\vec{\xi})$ . Esta transformação será utilizada no capítulo 5 para

deduzir a forma normal de Birkhoff de um sistema Hamiltoniano. Seja  $G(\vec{q}, \vec{P})$  uma função com segundas derivadas contínuas tal que

$$R = G(\vec{q}, \vec{P}) - \sum_{i=1}^N Q_i P_i$$

é uma função geradora. Substituindo  $R$  na igualdade (1.16) e expandindo a derivada total de  $R$ , obtém-se

$$\sum_{i=1}^N (p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i) - H = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial G}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial G}{\partial P_i} \dot{P}_i - Q_i \dot{P}_i - P_i \dot{Q}_i \right) - K + \frac{\partial G}{\partial t}.$$

Desta igualdade resulta que

$$\vec{p} = \frac{\partial G}{\partial \vec{q}} \quad (1.17)$$

$$\vec{Q} = \frac{\partial G}{\partial \vec{P}} \quad (1.18)$$

$$K = H + \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (1.19)$$

Observando a função  $G$  verifica-se que ao resolver as equações (1.17) em ordem a  $P_i$ , para cada  $i = 1, \dots, N$ , estes dependem apenas das variáveis  $p_i$  e  $q_i$ , ou seja,  $P_i = \Psi_{i+1}(q_i, p_i)$ . Substituindo nas equações (1.18)  $P_i$  por  $\Psi_{i+1}(q_i, p_i)$  obtém-se as restantes  $N$  variáveis  $Q_i = \Psi_i(q_i, p_i)$ , o que se resume na função vectorial  $(\vec{Q}, \vec{P}) = \Psi(\vec{q}, \vec{p})$ . Os Hamiltonianos  $H$  e  $K$  estão relacionados através da igualdade (1.19) e, utilizando  $(\vec{q}, \vec{p}) = \Psi^{-1}(\vec{Q}, \vec{P})$ , exprime-se  $H$  e  $\frac{\partial G}{\partial t}$  em função de  $Q_i$  e  $P_i$ , obtendo-se  $K$ .

As equações de Hamilton podem ser formuladas em termos de matrizes simplécticas o que constitui outro método, por vezes mais simples, de abordar as transformações canónicas.

**Definição 3** (*Matriz simpléctica*) Uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N}$  diz-se simpléctica se  $A^T T A = T$ .

**Proposição 1** *As matrizes simplécticas formam um grupo para a multiplicação de matrizes usual.*

**Demonstração:**

- Se  $A$  e  $B$  são duas matrizes simplécticas então  $AB$  também é simpléctica:

$$(AB)^T T (AB) = B^T A^T T A B = B^T T B = T$$

- A multiplicação é associativa.
- O elemento identidade é a matriz identidade  $I$ , de dimensão  $2N \times 2N$ .

- Se  $A$  é matriz simpléctica então  $A^{-1}$  existe e é simpléctica: como,

$$|A^T \mathcal{T} A| = |\mathcal{T}| \Leftrightarrow |A|^2 |\mathcal{T}| = 1 \Leftrightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| \neq 0,$$

$A^{-1}$  existe, e como

$$(A^{-1})^T \mathcal{T} A^{-1} = (A^{-1})^T A^T \mathcal{T} A A^{-1} = I T I = \mathcal{T},$$

é simpléctica.  $\diamond$

A relação entre a transformação canónica e a matriz simpléctica associada às equações de Hamilton é dada pela proposição 2.

**Proposição 2** *Seja  $H(\vec{\xi})$  um sistema Hamiltoniano e  $\vec{\zeta} = \Psi(\vec{\xi})$  uma função invertível que transforma  $H(\vec{\xi})$  em  $K(\vec{\zeta})$ . A transformação  $\Psi$  é canónica se e só se a matriz  $M = \left( \frac{\partial \zeta_i}{\partial \xi_j} \right)_{i,j=1,\dots,2N}$  é simpléctica.*

**Demonstração:**

Da transformação  $\vec{\zeta} = \Psi(\vec{\xi})$  resulta que

$$\dot{\vec{\zeta}} = M \dot{\vec{\xi}} \tag{1.20}$$

As equações de movimento  $\dot{\vec{\xi}} = \mathcal{T} H_{\vec{\xi}}$  relativas ao Hamiltoniano  $H$  podem reescrever-se como

$$\dot{\vec{\xi}} = \mathcal{T} M H_{\vec{\zeta}}, \tag{1.21}$$

pois  $\vec{\xi} = \Psi^{-1}(\vec{\zeta})$ . Substituindo em (1.21)  $\dot{\vec{\zeta}} = M^{-1} \dot{\vec{\zeta}}$ , consequência de (1.20), obtém-se

$$\dot{\vec{\zeta}} = M \mathcal{T} M^T H_{\vec{\zeta}}. \tag{1.22}$$

Se a matriz  $M$  é simpléctica então  $\dot{\vec{\zeta}} = \mathcal{T} H_{\vec{\zeta}}$ . Como o Hamiltoniano nas variáveis  $\vec{\zeta}$  expresso em termos das novas variáveis  $\vec{\zeta}$  serve como novo Hamiltoniano, a transformação  $\Psi$  é canónica. Se a transformação  $\Psi$  é canónica, como  $\dot{\vec{\zeta}} = \mathcal{T} H_{\vec{\zeta}}$  são as equações de movimento relativas a  $K$ , conclui-se, por comparação com as equações (1.22), que a matriz  $M$  é simpléctica.  $\diamond$

### 1.3 Equações de movimento

Para um sistema Newtoniano  $N$  dimensional, as equações de Lagrange são  $N$  equações diferenciais ordinárias (EDOs) de ordem 2 e podem ser reduzidas a um sistema de  $2N$  EDOs de primeira ordem. Quanto às equações de Hamilton, estas já são constituídas por  $2N$  EDOs de primeiro grau. Interessa, por isso, provar a existência e unicidade de soluções

de um sistema de  $n$  EDOs de ordem um. Para efectuar este estudo representa-se um sistema com  $n$  equações diferenciais ordinárias (EDOs) de ordem 1 na forma

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t)) \wedge \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \quad (1.23)$$

sendo  $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  as variáveis e

$$\vec{F}(\vec{x}(t)) = (f_1(\vec{x}(t)), \dots, f_n(\vec{x}(t))) \quad (1.24)$$

a função do sistema tal que para  $i = 1, \dots, n$ ,  $f_i$  é uma função real de variável real definida como

$$\begin{aligned} f_i : O &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x}(t) &\longmapsto f_i(\vec{x}(t)), \end{aligned} \quad (1.25)$$

$O \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $O$  aberto.

$\vec{x}$  representa o estado do sistema e toma valores no espaço de fase  $O$ .

**Definição 4** (*Fluxo*) Seja  $\vec{x}(t)$  a solução do sistema de EDOs (1.23). O fluxo  $\psi_t$  define-se como

$$\begin{aligned} \psi_t : I \times O &\longrightarrow O \\ (t, \vec{x}_0) &\longmapsto \psi_t(\vec{x}_0) = \vec{x}(t). \end{aligned}$$

**Definição 5** Uma função  $f$  tal como definida em (1.25) é de Lipschitz em  $O$  se existir  $L \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$\|\vec{f}(\vec{x}(t)) - \vec{f}(\vec{y}(t))\| \leq L\|\vec{x}(t) - \vec{y}(t)\|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in O. \quad (1.26)$$

**Teorema 1** Seja  $f$  uma função de classe  $C^1$  definida como em (1.25). Então,  $\exists b > 0$  tal que  $U_b(\vec{x}_0) \subseteq O$ , onde

$$U_b(\vec{x}_0) = \{ \vec{x} \in O : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq b \},$$

sendo  $f$  de Lipschitz no conjunto  $U_b(\vec{x}_0)$ .

**Demonstração:**

Como o conjunto  $U_b(\vec{x}_0)$  é compacto e a função  $f$  é de classe  $C^1$ , então existe

$Df(\vec{x}) = [\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}]^T$  contínua em  $U_b(\vec{x}_0)$ , logo existe  $L > 0$  tal que  $\|Df(\vec{x})\| \leq L$ , em  $U_b(\vec{x}_0)$ . Além disso, para  $z, y \in U_b(\vec{x}_0)$ , pode definir-se a função  $\phi(s) = y + s\vec{y}\vec{z}$ ,  $s \in [0, 1]$  e  $\psi(s) = f \circ \phi(s)$ .

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^1 \psi'(s) ds \right\| &\leq \int_0^1 \|Df(y + s\vec{y}\vec{z})\vec{y}\vec{z}\| ds \leq \int_0^1 \|Df(y + s\vec{y}\vec{z})\| \|\vec{y}\vec{z}\| ds \\ &\leq \int_0^1 L\|\vec{y}\vec{z}\| ds \leq L\|z - y\| \end{aligned}$$



Por outro lado,  $\left\| \int_0^1 \psi'(s) ds \right\| = \|\psi(1) - \psi(0)\| = \|f(z) - f(y)\|$ . Logo,

$$\|f(z) - f(y)\| \leq L\|z - y\|. \diamond$$

**Teorema 2** *Sejam  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , funções  $C^1$  definidas como em (1.25). Então  $\exists a > 0$  tal que a EDO (1.23) tem uma única solução  $\vec{y}: ]t_0 - a, t_0 + a[ \rightarrow O$ .*

**Demonstração:**

A existência de solução de (1.23) será estabelecida através do método iterativo de Picard. Para cada  $i = 1, \dots, n$ , a função  $f_i$  é integrável e a respectiva solução pode escrever-se como

$$y_i(t) = y_{i0} + \int_{t_0}^t f_i(\vec{y}(s)) ds. \quad (1.27)$$

- Seja  $L$  a constante de Lipschitz de  $f_i$  no conjunto  $U_b(\vec{y}_0)$  tal como definido no teorema 1.
- No conjunto  $U_b(\vec{y}_0)$ ,  $\|f_i(\vec{y})\|$  é limitada. Seja  $M = \max_{\vec{y} \in U_b(\vec{y}_0)} \|f_i(\vec{y})\|$ .
- Sendo  $a > 0$  tal que  $a < \min\left\{\frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}$ , define-se a sucessão de funções

$$y_{im} : [t_0 - a, t_0 + a] \rightarrow U_b(\vec{y}_0),$$

$$\text{com } y_{i0}(t) = y_{i0} \wedge y_{ik+1}(t) = y_{i0} + \int_{t_0}^t f_i(\vec{y}_k(s)) ds.$$

Assumindo que  $\vec{y}_k$  está definida em  $U_b(\vec{y}_0)$ ,  $\forall t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ , então  $f_i(\vec{y}_k(s))$  está definida em  $U_b(\vec{y}_0)$ , logo  $\|\vec{y}_{k+1} - \vec{y}_0\| \leq b$ , concluindo-se que a sucessão  $y_{ik}$  está bem definida.

**Existência de solução:**

Pretende-se mostrar que para cada  $i = 1, \dots, n$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} y_{im}(t) = y_i(t),$$

sendo  $y_i(t)$  uma função que satisfaz (1.27) e é única.

Será provado por indução que:

$$\|y_{im}(t) - y_{im-1}(t)\| \leq \frac{M [Ln(t - t_0)]^m}{nL m!}. \quad (1.28)$$

Se  $m = 1$

$$\begin{aligned} \|y_{i1}(t) - y_{i0}(t)\| &= \left\| y_{i0} + \int_{t_0}^t f_i(\vec{y}_0(s)) ds - y_{i0} \right\| = \left\| \int_{t_0}^t f_i(\vec{y}_0(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f_i(\vec{y}_0(s))\| ds \leq \int_{t_0}^t M ds \leq M(t - t_0). \end{aligned}$$

Para  $\|y_{ik}(t) - y_{ik-1}(t)\| \leq \frac{M [Ln(t-t_0)]^k}{Ln k!} \implies \|y_{ik+1}(t) - y_{ik}(t)\| \leq \frac{M [Ln(t-t_0)]^{k+1}}{nL (k+1)!}$

$$\begin{aligned} \|y_{ik+1}(t) - y_{ik}(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f_i(\vec{y}_k(s)) - f_i(\vec{y}_{k-1}(s))] ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f_i(\vec{y}_k(s)) - f_i(\vec{y}_{k-1}(s))\| ds \leq \int_{t_0}^t L \sum_{i=1}^n \|y_{ik}(s) - y_{ik-1}(s)\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t nL \max_{1 \leq i \leq n} \|y_{ik}(s) - y_{ik-1}(s)\| ds \leq \int_{t_0}^t nL \frac{M [nL(s-t_0)]^k}{nL k!} ds \\ &\leq \frac{M [nL(t-t_0)]^{k+1}}{L (k+1)!} \end{aligned}$$

Tendo sido demonstrada a condição (1.28), conclui-se que

$$y_{i0} + \sum_{m=1}^{+\infty} [y_{im}(t) - y_{im-1}(t)] \leq y_{i0} + \frac{M}{nL} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{[nL(t-t_0)]^m}{m!}.$$

Como a série  $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{[nL(t-t_0)]^m}{m!}$  é convergente, então  $y_{i0}(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} [y_{im}(t) - y_{im-1}(t)]$  é majorada, o que significa que para cada  $i = 1, \dots, n$ ,  $y_i(t) = \lim_{m \rightarrow +\infty} y_{im}(t)$ , logo  $\vec{y}(t)$  é uma solução da EDO (1.23).

### Unicidade de solução:

Sejam  $\vec{z}, \vec{y}$ , com  $\vec{z}(t_0) = \vec{y}(t_0)$  duas soluções distintas da EDO (1.25) e seja

$$S = \max_{t \in J} \|\vec{y}(t) - \vec{z}(t)\|, \quad J = [t_0 - a, t_0 + a],$$

atingindo-o em  $t = t^*$ . Então

$$\begin{aligned} S &= \|\vec{y}(t^*) - \vec{z}(t^*)\| \leq \int_{t_0}^{t^*} \|f(\vec{y}(s)) - f(\vec{z}(s))\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t^*} L \|\vec{y}(s) - \vec{z}(s)\| \leq LS(t^* - t_0) \leq LSa. \end{aligned}$$

Como  $aL < 1$ ,  $S$  tem de ser 0. Então,  $\vec{y}(t) = \vec{z}(t)$ .  $\diamond$

O teorema de existência e unicidade é local, garantindo a existência e unicidade de solução num intervalo centrado no instante inicial  $t_0$ . Aplicando sucessivamente o teorema, pode estender-se o intervalo onde a solução  $\vec{x}(t, \vec{x}_0)$  está definida e, obter-se um intervalo maximal para o qual a solução está definida. Em particular, o teorema garante a existência e unicidade local das soluções das equações de Lagrange, nomeadamente para o problema de três corpos restrito (PTCR). As equações de movimento deste problema não são, em

geral, integráveis, mas é possível encontrar algebricamente soluções, nomeadamente pontos de equilíbrio e órbitas periódicas.

**Definição 6** (*Ponto de equilíbrio*)  $\vec{x}_E \in O$  é um ponto de equilíbrio da EDO (1.23) se  $\vec{F}(\vec{x}_E) = \vec{0}$ .

**Definição 7** (*Órbitas periódicas*) Uma solução  $\vec{x}(t)$  do sistema de EDOs (1.23) é uma órbita periódica de período  $T \neq 0$ ,  $T$  constante, se  $T$  é o valor mínimo tal que  $\vec{x}(T, \vec{x}_P) = \vec{x}_P$ , com  $\vec{x}_P$  ponto da órbita periódica.



## Capítulo 2

# Problema de dois corpos

Este capítulo trata o problema de dois corpos, o que poderá ser, por exemplo, uma primeira aproximação ao movimento de alguns corpos celestes. As equações de movimento dos dois corpos  $C_1$ , de massa  $m_1$ , e  $C_2$ , de massa  $m_2$ , são deduzidas a partir do Lagrangiano (1.2). Depois de deduzidas as equações de movimento é realizado um estudo qualitativo das suas soluções, sendo a seguir, determinadas as soluções do problema de dois corpos. A solução do problema de dois corpos será utilizada no capítulo seguinte na formulação do PTCR. No final deste capítulo é deduzida a equação que permite determinar a excentricidade de uma órbita elíptica, que será útil no último capítulo.

### 2.1 Equações de movimento

Considerando um referencial inercial de origem  $O$ , sejam  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  e  $\vec{R}$  os vectores posição definidos por  $O$  e  $C_1$ ,  $O$  e  $C_2$  e  $O$  e o centro de massa do sistema, respectivamente. O vector entre os dois corpos é dado por  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  e  $\vec{R}_1$  e  $\vec{R}_2$  são dois vectores dos dois corpos em relação ao centro de massa de modo que  $\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$ . A energia cinética deste sistema,  $E_c$ , é dada pela soma da energia cinética do movimento do centro de massa com a energia cinética do movimento em torno do centro de massa:

$$E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{R}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{R}}_2^2 \quad (2.1)$$

e a energia potencial,  $U(\vec{r}) = \frac{Gm_1m_2}{\|\vec{r}\|}$ , é proporcional ao inverso da distância entre os corpos.

Da definição do vector posição do centro de massa  $\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$  e de

$$\vec{R}_1 = \vec{r}_1 - \vec{R} \wedge \vec{R}_2 = \vec{r}_2 - \vec{R}$$

vem que

$$m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2 = \vec{0}. \quad (2.2)$$

Da igualdade (2.2) conclui-se que o centro de massa se encontra na linha que une os dois corpos. De  $\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$  e de (2.2), obtêm-se as relações:

$$\vec{R}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (2.3)$$

$$\vec{R}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (2.4)$$

Substituindo (2.3) e (2.4) na expressão para a energia cinética (2.1), o Lagrangiano (1.2) escreve-se como

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}), \text{ com } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.5)$$

Como  $m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{0}$ , obtêm-se  $\ddot{\vec{R}} = \vec{0}$ , o que significa que ou o centro de massa está em repouso ou em movimento uniforme em relação à origem do referencial inercial. Assim sendo, nenhuma das equações de movimento para  $\vec{r}$  tem termos em  $\vec{R}$  ou  $\dot{\vec{R}}$ , podendo reescrever-se o Lagrangiano (2.5) do seguinte modo:

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}). \quad (2.6)$$

Recorrendo às equações de Lagrange (1.1), o problema de dois corpos reduz-se à EDO

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}, \quad (2.7)$$

com

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -\frac{Gm_1 m_2 \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}.$$

A equação (2.7) é equivalente a

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu^*}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} = 0, \quad \vec{r}, \dot{\vec{r}} \in \mathbb{R}^3, \quad (2.8)$$

com

$$\mu^* = G(m_1 + m_2). \quad (2.9)$$

A equação (2.8) apresenta uma simplificação do problema de dois corpos inicial que se movem em relação ao centro de massa e descreve o movimento do corpo  $C_2$  relativamente ao corpo  $C_1$ , estando este fixo.

O momento angular é um integral do sistema, pois

$$\frac{d}{dt} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \left( -\frac{\mu^*}{\|\vec{r}\|^3} \right) \vec{r} = \vec{0}.$$

Se  $\vec{l} = \vec{0}$  então os vectores posição,  $\vec{r}$ , e velocidade,  $\dot{\vec{r}}$ , são paralelos, isto é, o movimento realiza-se numa linha recta e pode ocorrer uma colisão entre os corpos. Se  $\vec{l} \neq \vec{0}$ , como  $\vec{l}$  é perpendicular ao plano definido pelos vectores posição e velocidade, os dois corpos movimentam-se num plano, designado por *plano orbital*, o que permite simplificar o sistema

reduzido-lhe um grau de liberdade. Expressando o lagrangiano (2.6) em coordenadas polares obtém-se

$$L(r, \dot{r}, t) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r).$$

Recorrendo novamente às equações de Lagrange (1.1), obtém-se as EDOs

$$\begin{cases} \mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2 + \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \\ \frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

que são equivalentes às equações

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu^*}{r^2} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (2.11)$$

Da equação (2.11) deduz-se o módulo do momento angular,  $l$ , do sistema,

$$l = r^2\dot{\theta}. \quad (2.12)$$

Da equação (2.10) deduz-se a energia total do sistema,  $E$ , podendo esta equação escrever-se como

$$\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 - \frac{\mu^*}{r}\right),$$

e, multiplicando-a por  $\dot{r}$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \ddot{r}\dot{r} &= -\frac{d}{dr}\left(-\frac{\mu^*}{r} + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2\right)\dot{r} \iff \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(-\frac{\mu^*}{r} + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2\right) \\ \iff \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\mu^*}{r}\right] &= 0 \implies \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\mu^*}{r} = E. \end{aligned} \quad (2.13)$$

O momento angular  $l$  e a energia  $E$  são dois integrais do sistema, que ficou reduzido a dois graus de liberdade, logo é integrável.

## 2.2 Análise qualitativa das soluções

A partir das variáveis  $u = \frac{Gm_1m_2}{r}$ ,  $\beta = \frac{Gm_1m_2}{l}$  e  $p = \frac{du}{d\theta}$  e de (2.12) obtém-se

$$\dot{\theta} = \frac{l}{r^2}, \quad (2.14)$$

e, como  $\frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{Gm_1m_2\dot{r}}{l}$ , então

$$\dot{r} = -\frac{pl}{Gm_1m_2}. \quad (2.15)$$

Substitui-se (2.14) e (2.15) na equação da energia (2.13) e,

$$\frac{1}{2}\mu \left[ \left( \frac{pl}{Gm_1m_2} \right)^2 + r^2 \frac{l^2}{r^4} \right] = \frac{Gm_1m_2}{r} + E,$$

que multiplicando por  $\frac{(Gm_1m_2)^2}{l^2}$ , resulta na equação

$$\frac{1}{2}\mu (p^2 + u^2) = \beta^2 u + k,$$

com  $k = E \left( \frac{Gm_1m_2}{l} \right)^2$  que equivale à equação

$$p^2 + \left( u - \frac{\beta^2}{\mu} \right)^2 = \frac{2k}{\mu} + \left( \frac{\beta^2}{\mu} \right)^2. \quad (2.16)$$

A equação (2.16) representa uma circunferência de centro  $\left( 0, \frac{\beta^2}{\mu} \right)$  e raio  $\sqrt{\frac{2k}{\mu} + \left( \frac{\beta^2}{\mu} \right)^2}$  e, dependendo dos valores da energia  $E$ , permite deduzir o tipo de trajectória do corpo  $C_2$  em relação ao corpo  $C_1$ . Na figura 2.1 podem ser observadas algumas circunferências no espaço fase  $(up)$ . Quando  $E = 0$ , as trajectórias no espaço fase são circunferências tangentes no ponto  $(u, p) = (0, 0)$ . Neste caso, o corpo atinge infinito, com energia cinética igual a 0, seguindo uma trajectória parabólica (ver figura 2.2). Se  $E > 0$ , para os pontos  $(u, p) = \left( 0, \pm \sqrt{\frac{2k}{\mu}} \right)$  a energia cinética é diferente de 0, o corpo  $C_2$  "vem do infinito", aproxima-se do corpo fixo  $C_1$  até uma distância finita mínima  $r_1$ , neste caso  $p = 0$ , e "volta para infinito", pelo que a órbita é hiperbólica (ver figura 2.2). Se  $E < 0$ , quando  $p = 0$ ,  $u \neq 0$ , o que implica que a distância entre os corpos seja finita, mínima para  $r_1 = \frac{1}{\mu} \left( \beta^2 - \sqrt{\beta^4 + 2k\mu} \right)$  e máxima para  $r_2 = \frac{1}{\mu} \left( \beta^2 + \sqrt{\beta^4 + 2k\mu} \right)$ . Os pontos onde a distância entre os corpos é mínima chamam-se *pericentros* e os pontos onde a distância é máxima *apocentros*. Quando a energia é negativa o movimento é limitado e as órbitas de  $C_2$  em relação a  $C_1$  são elípticas.

### 2.3 Integração das equações de movimento

Na primeira secção reduziu-se o estudo do movimento de dois corpos,  $C_1$  e  $C_2$ , ao problema de um corpo virtual no plano com massa reduzida,  $\mu$ , sujeito a uma força central igual à força de interacção entre os dois corpos, obtendo-se o sistema de EDOs (2.10) e (2.11). Este sistema tem 2 graus de liberdade e dois integrais, a energia total do sistema,  $E$ , e o momento angular,  $l$ , por isso é integrável, conforme será provado na proposição 3.

**Proposição 3** *O sistema de EDOs (2.10) e (2.11), com condições iniciais*

$$r(0) = r_0 \wedge \dot{r}(0) = v_0$$



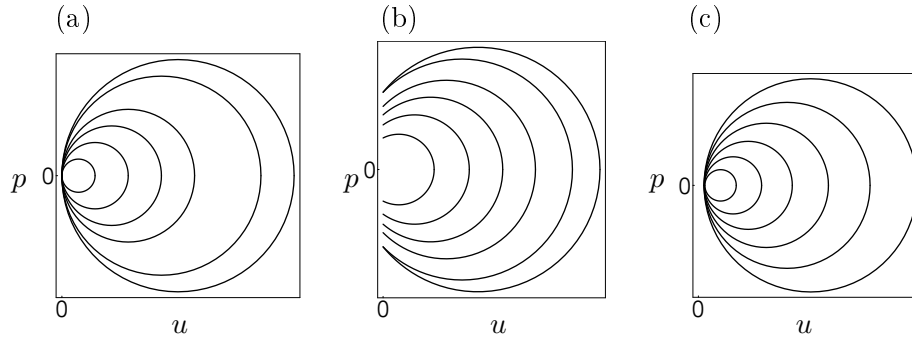


Figura 2.1: Representação de trajetórias no espaço fase  $up$  para diferentes valores de  $\frac{\beta^2}{\mu} > 0$  e diferentes valores de energia: (a)  $E = 0$ ; (b)  $E = 1$  e; (c)  $E = -1$ .

é integrável e a solução é a equação geral da cónica em coordenadas polares,

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)},$$

sendo  $p$  o lado recto e  $e$  a excentricidade da cónica.

#### Demonstração:

Para resolver a equação (2.10) efectua-se uma mudança de variável,  $u = \frac{1}{r}$ . Daqui se deduz que

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} = -\frac{du}{d\theta}. \quad (2.17)$$

Procedendo à mudança de variável na equação (2.10), resulta

$$\begin{aligned} l u^2 \frac{d}{d\theta} \left( l \frac{-du}{d\theta} \right) - l^2 u^3 &= -\mu^* u^2 \Rightarrow -l^2 u^2 \frac{d^2}{d\theta^2} u - l^2 u^3 = -\mu^* u^2 \\ \Rightarrow l^2 u^2 \left( \frac{d^2}{d\theta^2} u + u \right) &= \mu^* u^2 \Rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu^*}{l^2}. \end{aligned}$$

Através de uma nova mudança de variável, definindo  $y = u - \frac{\mu^*}{l^2}$ , obtém-se a equação  $\frac{d^2 y}{d\theta^2} + y = 0$ . A solução desta EDO, sujeita às condições  $y(0) = A \wedge \dot{y}(0) = B$  é dada por

$$y(\theta) = D \cos(\theta - \theta_0),$$

com  $D = \sqrt{A^2 + B^2}$  e  $\theta_0 = \arccos \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  constantes de integração. Então,

$$u(\theta) = \frac{\mu^*}{l^2} \left[ 1 + \frac{D l^2}{\mu^*} \cos(\theta - \theta_0) \right],$$

e, da igualdade (2.17) vem que

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (2.18)$$

com  $p = \frac{l^2}{\mu^*}$  e  $e = \frac{D l^2}{\mu^*}$ . Além disso,  $r_0 = \frac{l^2}{\mu^*} \frac{1}{1 + Al^2}$  e  $v_0 = \frac{1}{B}$ .  $\diamond$

Na figura 2.2 estão representadas algumas trajectórias, para diferentes valores de excentricidade, para o corpo  $C_2$  em relação ao corpo  $C_1$ , ocupando este um dos focos da cónica. Se  $e = 0$  a trajectória de  $C_2$  descreve um círculo; se  $0 < e < 1$  descreve uma elipse; se  $e = 1$  descreve uma parábola e; se  $e > 1$  descreve uma hipérbole.

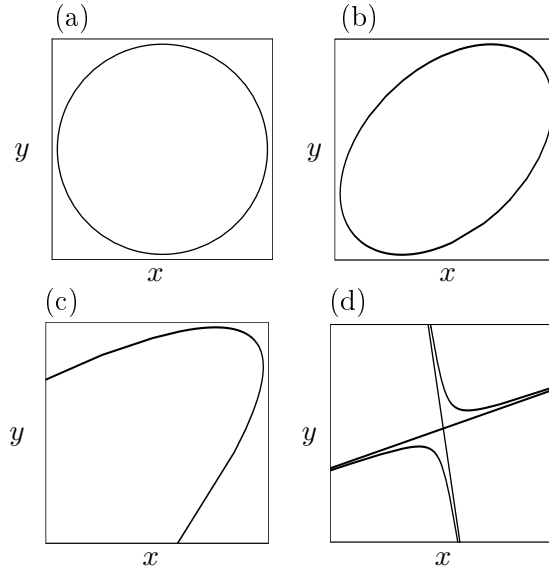


Figura 2.2: Representação de trajectórias no espaço fase para  $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$  e diferentes valores de excentricidade: (a)  $e = 0$ ; (b)  $e = 0.8$ ; (c)  $e = 1$ ; (e)  $e = 1.25$ .

Através das igualdades (2.3) e (2.4) observa-se que cada um dos corpos se movimenta em relação ao seu centro de massa segundo a mesma secção cónica, afectada dos escalares  $\frac{m_1}{m_1 + m_2}$  e  $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$  para  $C_2$  e  $C_1$ , respectivamente. Na figura 2.3 é simulado o movimento dos dois corpos relativamente ao seu centro de massa, sendo o movimento de cada um dos corpos uma elipse com o centro de massa num dos focos comuns.

A seguir deduzem-se alguns resultados com o objectivo de determinar a excentricidade de uma órbita elíptica, dada uma posição do corpo e a respectiva velocidade. A excentricidade será posteriormente utilizada no estudo do problema de três corpos restrito, como meio de detecção de caos.

Da equação da energia, (2.13), tem-se que

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2. \quad (2.19)$$

A área limitada por uma elipse de semi-eixos  $a$  e  $b$  é dada por  $A = \pi ab$ , a sua derivada por

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}l, \quad (2.20)$$

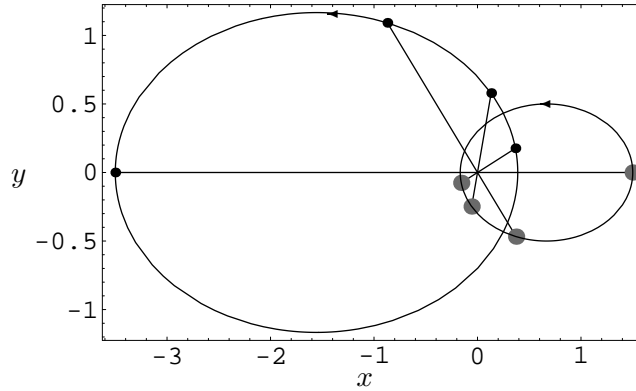


Figura 2.3: Simulação do movimento dos corpos  $C_1$  e  $C_2$  em relação ao seu centro de massa, considerando-se  $\mu^* = G(m_1 + m_2) = 1$ , com  $Gm_2 = 0.3$ , lado recto  $p = 1$  e excentricidade  $e = 0.8$ . O ponto cinzento representa a posição do corpo  $C_1$  e o preto a posição de  $C_2$ , encontrando-se no mesmo instante de tempo no mesmo segmento de recta. O ponto de intersecção dos segmentos de recta é o centro de massa do sistema.

o que implica que, para um período orbital  $T$ ,  $A = \int_0^T \frac{1}{2} l dt = \frac{1}{2} l T$ . Além disso,  $b$  á dado por  $b^2 = a^2(1 - e^2)$ , logo

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu^*}. \quad (2.21)$$

Definindo a *velocidade angular média*,  $n$ , por  $n = \frac{2\pi}{T}$ , obtém-se

$$\mu^* = n^2 a^3. \quad (2.22)$$

**Proposição 4** *Se o movimento de  $C_2$  em relação a  $C_1$  é elíptico, então o semi-eixo maior,  $a$ , e a excentricidade,  $e$ , da elipse são dados por*

$$a = \left( \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu^*} \right)$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{l^2}{\mu^* a}}.$$

**Demonstração:**

Derivando (2.18), resulta que  $\dot{r} = \frac{r \dot{\rho} e \sin \rho}{1 + e \cos \rho}$ , com  $\rho = \theta - \theta_0$ . Utilizando  $l^2 = \mu^* a(1 - e^2)$  e (2.22), deduz-se que

$$\dot{r} = \frac{n a e \sin \rho}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (2.23)$$

O segundo termo de (2.19) deduz-se a partir das equações (2.22) e (2.18) e resulta em

$$r \dot{\rho} = \frac{na(1 + e \cos \rho)}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (2.24)$$

Substituindo (2.23) e (2.24) na igualdade (2.19), obtém-se

$$v^2 = \frac{n^2 a^2 (e^2 + 2e \cos \rho + 1)}{1 - e^2} = \frac{n^2 a^2}{1 - e^2} \left[ e^2 - 1 + \frac{2a(1 - e^2)}{r} \right] = \mu^* \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

A segunda igualdade vem da equação (2.18). Deste modo é possível o cálculo do semi-eixo maior da elipse  $a$ , através da fórmula:

$$a = \left( \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu^*} \right)^{-1}. \quad (2.25)$$

A excentricidade,  $e$ , pode ser determinada a partir da relação  $l^2 = \mu^* a(1 - e^2)$ , sendo

$$e = \sqrt{1 - \frac{l^2}{\mu^* a}}. \diamond \quad (2.26)$$

Kepler (1609, 1619) quando estudou experimentalmente o movimento do planeta Marte definiu três leis que generalizou a todos os planetas. A primeira lei de Kepler: *o movimento dos planetas descrevem elipses em torno do sol que se encontra num dos focos* é uma consequência do potencial de Newton e traduz-se na equação (2.18). A equação (2.20) é a versão matemática da segunda lei de Kepler: *áreas varridas pelo vector posição em tempos iguais são iguais*, que resulta do facto do momento angular  $l$  ser constante. À terceira lei de Kepler: *o quadrado do período orbital é directamente proporcional ao cubo do semi-eixo maior da elipse*, corresponde a igualdade (2.21).

## Capítulo 3

# Problema de três corpos restrito

Generalizando as leis de movimento (2.7), definidas no capítulo anterior, para um sistema mecânico Newtoniano com  $n$  corpos, o movimento do corpo  $i$  interagindo com os restantes  $n - 1$  corpos de massas  $m_1, \dots, m_n$ ,  $n \neq i$ , é dado por

$$\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} + \sum_{j=1}^n \frac{Gm_j}{\|\vec{r}_{ij}\|^3} \vec{r}_{ij} = \vec{0}, \quad j \neq i, \quad (3.1)$$

com  $i = 1, \dots, n$ , e  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ .

O problema de três corpos, representados por  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , restrito (PTCR) é um caso particular do problema de três corpos cujas equações do movimento são dadas por (3.1), com  $n = 3$  e  $\vec{r}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ , considerando-se as restrições: um dos corpos,  $C_3$ , tem massa negligenciável face aos outros dois; um dos dois corpos massivos,  $C_2$ , tem massa menor ou igual que  $C_1$  e  $C_2$  efectuam um movimento circular uniforme no mesmo plano, em relação ao centro de massa do sistema. O PTCR pretende estudar o movimento do corpo  $C_3$ .

O PTCR é uma boa aproximação para estudar determinados objectos do sistema solar, como asteróides e cometas face aos sistemas sol-planeta ou planeta-satélite. A maior razão de massas, conhecida até à data, entre os sistemas referidos corresponde ao sistema de Plutão e do seu satélite Coronte, e é aproximadamente  $1/9$  [28].

Neste capítulo são deduzidas as equações de movimento do corpo  $C_3$ , considerando um sistema de massas normalizadas, com o objectivo de facilitar tanto o estudo algébrico como o estudo numérico das equações de movimento do PTCR. A partir das equações de movimento deduz-se o integral do sistema e é feita a respectiva identificação com um sistema Hamiltoniano autónomo. Isto permitirá, em alguns casos, considerar resultados gerais de sistemas Hamiltonianos e aplicá-los ao PTCR. Em seguida são estudadas as condições para as quais o movimento de  $C_3$  é limitado.

Apesar das simplificações efectuadas em relação ao problema de três corpos, o PTCR não é, em geral, integrável. A não integrabilidade do PTCR foi demonstrada por Poincaré em [30]. No entanto, conforme será referido neste capítulo, existem soluções algébricas

particulares como é o caso da solução do Problema de Hill [28], obtida por Hénon e Petit, no caso limite em que a massa de  $C_2$  tende para zero. Por fim, são determinados os pontos de equilíbrio do PTCR, as soluções de Euler e de Lagrange.

### 3.1 Equações de movimento

No capítulo 2, onde foi estudado o problema de dois corpos, foi obtida a solução do movimento dos corpos  $C_1$  e  $C_2$  em relação ao seu centro de massa, concluindo-se que definem uma cónica, na qual o centro de massa ocupa um dos seus focos. A órbita descrita pelos corpos é estável se for uma elipse (recorde-se que neste caso a energia,  $E$ , é negativa), em particular, se a excentricidade é 0, o movimento dos corpos é circular e pode ser observado na figura 3.1. No PTCR, em que o corpo  $C_3$  está sujeito às forças gravitacionais dos corpos  $C_1$  e  $C_2$ , mas estes não são influenciados pela força gravítica de  $C_3$ , o movimento de  $C_1$  e  $C_2$  é descrito pela solução do problema de dois corpos. Restringe-se, ao longo deste trabalho o movimento dos corpos massivos ao movimento circular. O movimento de  $C_3$  é inicialmente definido num referencial inercial definido pela órbita complanar dos dois corpos  $C_1$  e  $C_2$ , no qual a origem é o seu centro de massa, e a seguir no referencial sinódico, no qual a posição dos dois corpos massivos é fixa. Seja  $OXYZ$  um *referencial inercial* tal que o eixo

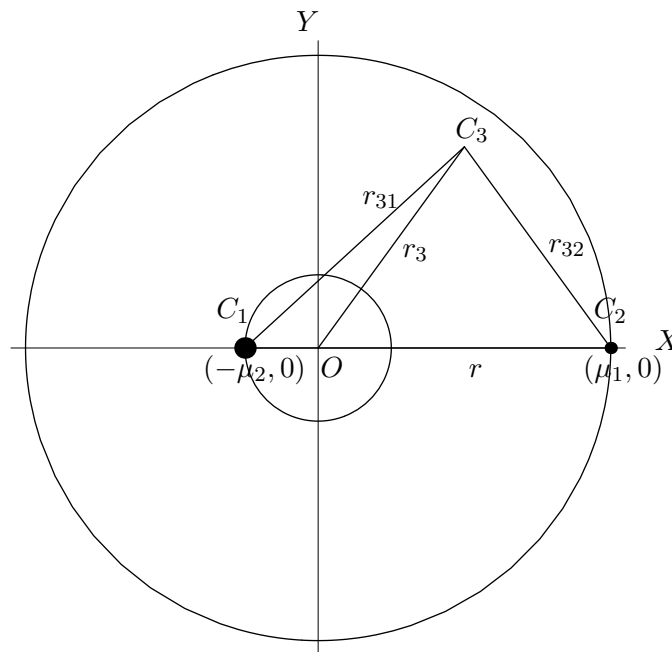


Figura 3.1: Representação da posição de  $C_3$  e do movimento de  $C_1$  e  $C_2$  em relação ao seu centro de massa, projectada no plano  $OXY$ .

$OX$  toma a direcção de  $[C_1C_2]$  no instante  $t = 0$ , o eixo  $OY$  é perpendicular ao eixo  $OX$  e está contido no plano orbital definido pelos corpos  $C_1$  e  $C_2$ . O eixo  $OZ$  é perpendicular ao plano  $OXY$ . Os corpos  $C_1$  e  $C_2$  efectuam uma trajectória circular em torno do seu centro

de massa, sendo a distância entre eles fixa e igual à unidade. Para facilitar o tratamento numérico deste problema considera-se a massa do sistema  $\mu^* = G(m_1 + m_2)$  normalizada,  $\mu^* = 1$ , o que significa que se  $\bar{\mu} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $\mu_1 = Gm_1 = 1 - \bar{\mu}$  e  $\mu_2 = Gm_2 = \bar{\mu}$ . A posição de  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  em relação à origem do referencial  $OXYZ$  é dada, respectivamente, por  $\vec{r}_3 = (X, Y, Z)$ ,  $\vec{r}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$  e  $\vec{r}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ . A posição de  $C_3$  em relação a  $C_1$  é dada por  $\vec{r}_{31} = (X - X_1, Y - Y_1, Z - Z_1)$  e em relação a  $C_2$  por  $\vec{r}_{32} = (X - X_2, Y - Y_2, Z - Z_2)$ . Utilizando (3.1) deduz-se a equação do movimento de  $C_3$

$$\ddot{\vec{r}}_3 + \frac{Gm_1\vec{r}_{31}}{\|\vec{r}_{31}\|^3} + \frac{Gm_2\vec{r}_{32}}{\|\vec{r}_{32}\|^3} = \vec{0},$$

que é equivalente a

$$(\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z}) = -\frac{Gm_1(X - X_1, Y - Y_1, Z - Z_1)}{\|\vec{r}_{31}\|^3} - \frac{Gm_2(X - X_2, Y - Y_2, Z - Z_2)}{\|\vec{r}_{32}\|^3}$$

e a

$$\ddot{X} = \mu_1 \frac{X_1 - X}{\|\vec{r}_{31}\|^3} + \mu_2 \frac{X_2 - X}{\|\vec{r}_{32}\|^3} \quad (3.2)$$

$$\ddot{Y} = \mu_1 \frac{Y_1 - Y}{\|\vec{r}_{31}\|^3} + \mu_2 \frac{Y_2 - Y}{\|\vec{r}_{32}\|^3} \quad (3.3)$$

$$\ddot{Z} = \mu_1 \frac{Z_1 - Z}{\|\vec{r}_{31}\|^3} + \mu_2 \frac{Z_2 - Z}{\|\vec{r}_{32}\|^3} \quad (3.4)$$

com

$$\|\vec{r}_{31}\| = \sqrt{(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 + (Z_1 - Z)^2}$$

$$\|\vec{r}_{32}\| = \sqrt{(X_2 - X)^2 + (Y_2 - Y)^2 + (Z_2 - Z)^2}$$

**Definição 8** (*Referencial sinódico*) *Um referencial  $Oxyz$  é sinódico se efectuar um movimento em rotação, no sentido directo, em relação ao referencial inercial  $OXYZ$ .*

O referencial sinódico  $Oxyz$  move-se rotativamente na razão  $n$  em relação ao referencial  $OXYZ$ , sendo  $n$  a velocidade angular média do movimento de  $C_2$  em relação a  $C_1$ . Neste caso, os corpos massivos estão fixos e é em relação ao seu centro de massa que se movimenta  $C_3$ . No PTCR, os corpos  $C_1$  e  $C_2$  movem-se em órbitas circulares em relação ao seu centro de massa, que de acordo com o estudo efectuado no capítulo 2 está em repouso ou em movimento rectilíneo uniforme, podendo considerar-se um referencial inercial com origem no centro de massa. De acordo com o estudo efectuado no problema de dois corpos,  $C_2$  move-se em relação a  $C_1$  segundo uma órbita circular de semi-eixo  $a$ . Fixando  $a = 1$ , como a massa do sistema normalizada é  $\mu^* = 1$ , conclui-se, pela equação (2.22), que  $n = \sqrt{\mu^* a^{-3}} = 1$ .

O plano  $Oxy$  está contido no plano orbital de  $C_1$  e de  $C_2$ , o eixo  $Ox$  tem a direcção e sentido de  $\vec{C_1 C_2}$ , é perpendicular ao eixo  $Oy$  e o eixo  $Oz$  é perpendicular ao plano  $Oxy$ . Se a origem do referencial sinódico se posiciona no centro de massa dos corpos  $C_1$  e  $C_2$ , então

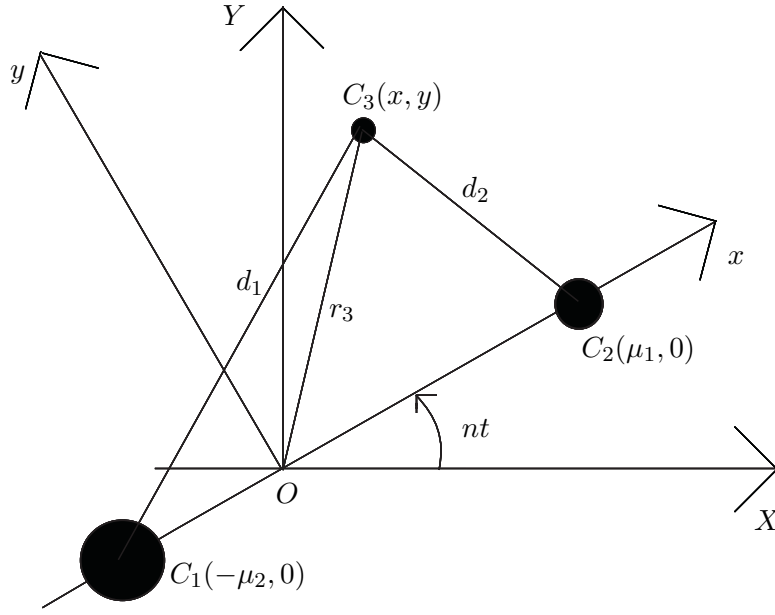


Figura 3.2: Representação da relação entre os referenciais inercial e sinódico, projectado no plano.

as suas posições são dadas por  $(x_1, y_1, z_1) = (-\mu_2, 0, 0)$  e  $(x_2, y_2, z_2) = (\mu_1, 0, 0)$ . A posição  $(x, y, z)$  do corpo  $C_3$  em relação ao referencial sinódico obtém-se a partir da sua posição em relação ao referencial inercial, deduzindo-se, através de uma rotação, as equações do movimento de  $C_3$  em relação ao referencial  $Oxyz$  (ver figura 3.2). Seja

$$P = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a matriz rotação  $3 \times 3$  que transforma a equação do corpo  $C_3$  no referencial  $OXYZ$  na respectiva equação no referencial  $Oxyz$ . Então a posição  $(x, y, z)$  do corpo  $C_3$  no instante de tempo  $t$  em relação a  $Oxyz$  é dada por

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

a respectiva velocidade por

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

e a respectiva aceleração por

$$\begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y \\ \ddot{z} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$



Seja  $d_1$  a distância entre os corpos  $C_3$  e  $C_1$  e  $d_2$  a distância entre os corpos  $C_3$  e  $C_2$ . Neste caso,

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{(x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2} \\ d_2 &= \sqrt{(x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Substituindo nas equações (3.2), (3.3) e (3.4),  $(X, Y, Z)$  pelas novas coordenadas,  $(X_1, Y_1, Z_1)$  por  $(-\mu_2 \cos nt, -\mu_2 \sin nt, 0)$  e  $(X_2, Y_2, Z_2)$  por  $(\mu_1 \cos nt, \mu_1 \sin nt, 0)$ , obtém-se

$$\begin{aligned} (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\cos nt - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\sin nt &= -\left[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{d_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{d_2^3}\right]\cos nt \\ &\quad + \left[\frac{\mu_1}{d_1^3} + \frac{\mu_2}{d_2^3}\right]y\sin nt \\ (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\sin nt + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\cos nt &= -\left[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{d_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{d_2^3}\right]\sin nt \\ &\quad - \left[\frac{\mu_1}{d_1^3} + \frac{\mu_2}{d_2^3}\right]y\cos nt \\ \ddot{z} &= -\left[\frac{\mu_1}{d_1^3} + \frac{\mu_2}{d_2^3}\right]z. \end{aligned}$$

No sistema de equações anterior, multiplicam-se as equações por funções trigonométricas adequadas e adicionando-as obtém-se as equações (3.8) de movimento do corpo  $C_3$  em relação ao referencial  $Oxyz$ :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \quad (3.8)$$

com

$$U = U(x, y, z) = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{d_1} + \frac{\mu_2}{d_2}. \quad (3.9)$$

Multiplicando as equações do sistema (3.8), a primeira por  $\dot{x}$ , a segunda por  $\dot{y}$  e a terceira por  $\dot{z}$  e adicionando-as obtém-se

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \dot{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Integrando (3.10) obtém-se

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = U - \frac{1}{2}C_J, \quad (3.11)$$

sendo  $C_J$  uma constante de movimento, chamada *constante de Jacobi*. Reduzindo o sistema de equações de segunda ordem (3.8) a um sistema de equações de primeira ordem obtém-se o sistema de EDOs

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) \quad (3.12)$$

com

$$\vec{F}(\vec{x}) = \left( u, v, w, 2nv + \frac{\partial U}{\partial x}, -2nu + \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right), \quad (3.13)$$

sendo  $\vec{x} = (x, y, z, u, v, w)$ . A posição de  $C_3$  é dada por  $(x, y, z)$  e a respectiva velocidade por  $(u, v, w)$ .

**Proposição 5** *O sistema de EDOs (3.12) pode ser expresso na forma de sistema Hamiltoniano (1.11), com*

$$H = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + n(\dot{X}Y - \dot{Y}X) - \left( \frac{\mu_1}{d_1} + \frac{\mu_2}{d_2} \right).$$

**Demonstração:**

A partir da igualdade (3.5) obtém-se  $\vec{X}^T = P\vec{x}^T \Rightarrow \vec{x}^T = P^{-1}\vec{X}^T$  e  $\dot{\vec{X}}^T = P\dot{\vec{x}}^T - nS\vec{x}^T$ , com:

- $S = \begin{pmatrix} \sin nt & \cos nt & 0 \\ -\cos nt & \sin nt & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $P^T = P^{-1}$
- $PP^T = I$
- $S^T S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Então  $\dot{\vec{x}}^T = P^T \dot{\vec{X}}^T + nP^T S P^T \vec{X}^T$ . Deste modo,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}\dot{\vec{x}}^T &= (\dot{\vec{X}}P + n\vec{X}PS^T P)(P^T \dot{\vec{X}}^T + nP^T S P^T \vec{X}^T) \\ &= \dot{\vec{X}}\dot{\vec{X}}^T + n\dot{\vec{X}}S P^T \vec{X}^T + n\vec{X}PS^T \dot{\vec{X}}^T + n^2 \vec{X}S^T S \vec{X}^T \\ &= \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 + 2n(\dot{X}Y - \dot{Y}X) + n^2(X^2 + Y^2). \end{aligned}$$

Substituindo em (3.11), uma vez que as distâncias se mantêm independentemente do referencial, isto é,  $x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ , o Hamiltoniano  $H$  no referencial inercial escreve-se como

$$H = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + n(\dot{X}Y - \dot{Y}X) - \left( \frac{\mu_1}{d_1} + \frac{\mu_2}{d_2} \right), \quad (3.14)$$

com  $H = -\frac{1}{2}C_J$ .  $\diamond$

### 3.1.1 O problema de Hill

As equações de movimento do corpo  $C_3$  do PTCR surgem do facto de se considerar que, no referencial inercial, os corpos  $C_1$  e  $C_2$  se movimentam uniformemente segundo órbitas circulares coplanares. Por conseguinte, estes dois corpos, no referencial sinódico estão em repouso e a equação do movimento de  $C_3$  é dada pela equação (3.8). O problema de Hill (1878) consiste num sistema de EDOs que descrevem o movimento de  $C_3$  no plano, quando este se encontra na vizinhança do corpo  $C_2$ . Este sistema de EDOs é obtido a partir do PTCR, efectuando uma translação da origem das coordenadas, associada ao vector  $\overrightarrow{OC_2}$ , para a posição de  $C_2$ . As posições dos corpos relativamente ao eixo  $Oy$  mantêm-se. Definindo  $\Delta = d_2$ , como se está a considerar o movimento próximo de  $C_2$  e a razão de massas  $\mu_2$  pequena, pode assumir-se que  $x$ ,  $y$  e  $\Delta$  são quantidades da  $O(\mu_2^{\frac{1}{3}})$ . Assim sendo, do sistema de EDOs (3.8) restrito ao plano, obtém-se  $d_1 \approx (1 + 2x)^{\frac{1}{2}}$  e as equações de Hill

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{x} &= \frac{\partial U_H}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{y} &= \frac{\partial U_H}{\partial y}, \end{cases} \quad (3.15)$$

com

$$U_H = \frac{3}{2}x^2 + \frac{\mu_2}{\Delta}, \quad \Delta = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.16)$$

A correspondente constante de Jacobi é dada por

$$C_H = 3x^2 + 2\frac{\mu_2}{\Delta} - \dot{x}^2 - \dot{y}^2. \quad (3.17)$$

Hénon e Petit (1986) [28] mostraram que o sistema de equações de Hill (3.15) são integráveis no caso particular em que  $\mu_2 \rightarrow 0$  e a solução é da forma

$$x = D_1 \cos t + D_2 \sin t + D_3 \quad (3.18)$$

$$y = -2D_1 \sin t + 2D_2 \cos t - \frac{3}{2}t + D_4, \quad (3.19)$$

sendo  $D_i, i = 1, 2, 3, 4$  constantes de integração. Neste caso a constante de Jacobi é dada por

$$C_H = \frac{3}{4}D_3^2 - D_1^2 - D_2^2. \quad (3.20)$$

O sistema (3.15) não é, em geral, integrável, mas Hill (1878) [32] encontrou soluções periódicas através de expansões em séries de potências, cuja convergência foi, mais tarde, demonstrada por Wintner (1925) [32]. Estas soluções foram obtidas por Hill quando estudou o movimento da lua através do estudo do sistema Sol-Terra-Lua, considerando que os corpos  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são, respectivamente, o sol, a terra e a lua. O problema de Hill é um caso particular do PTCR e é estudado em detalhe em [28] e [32].

### 3.1.2 Região de Hill

No integral do PTCR planar (3.11) tem-se  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 < 0$  se as velocidades forem um número complexo, o que não é fisicamente possível. Pode, então, definir-se a designada *região de Hill* do plano,  $\mathcal{H}$ , onde o movimento de  $C_3$  é possível

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2U(x, y) - C_J \geq 0\}.$$

Isto significa que é possível determinar os valores de  $C_J$  para os quais o movimento é limitado. Considerando  $u = 0$  e  $v = 0$  no integral de Jacobi, obtém-se a equação que descreve as curvas de velocidade zero, que definem os limites para os quais o movimento de  $C_3$  é fisicamente possível. Na figura 3.3 está representada a região de Hill do plano, para a massa  $\mu_2 = 10^{-3}$ , um valor próximo do sistema Sol-Júpiter, considerando três valores de constante de Jacobi. O movimento não é possível na região a sombreado, sendo esta limitada por uma curva de velocidade zero. À medida que  $C_J$  aumenta a região onde o movimento é impossível aumenta e para  $C_J = 3.04$ , se  $C_3$  orbita em torno de  $C_1$  não poderá orbitar  $C_2$ , se  $C_3$  orbitar  $C_2$  não poderá orbitar  $C_1$ . Nestes casos, é impossível a  $C_3$  escapar do sistema. O movimento de  $C_3$  na região

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2U(x, y) - C_J \geq 0 \wedge C_J \geq 3.04\}$$

é limitado, se orbitar  $C_1$  ou  $C_2$  [28].

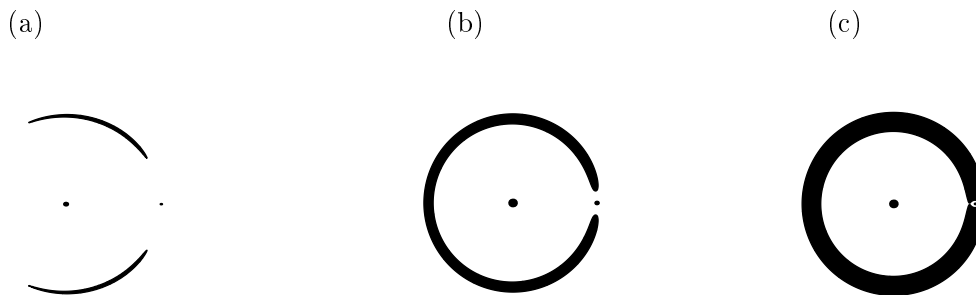


Figura 3.3: Representação das curvas de velocidade zero e das zonas onde o movimento de  $C_3$  não é possível, a sombreado, no sistema Sol-Júpiter, para valores da constante de Jacobi: (a)  $C_J = 3$ ; (b)  $C_J = 3.01$  e; (c)  $C_J = 3.04$ . Os pontos correspondem à posição dos corpos  $C_1$  e  $C_2$ .

## 3.2 Pontos de equilíbrio do PTCR

A procura da posição e da velocidade do corpo  $C_3$  tal que o seu movimento seja estacionário, no referencial sinódico, corresponde, no referencial inercial, à procura da posição e da

velocidade adequadas para que o corpo  $C_3$  efectue um movimento circular uniforme em relação ao centro de massa do sistema, considerando que os três corpos se movimentam no mesmo plano. Os pontos de equilíbrio são cinco, três colineares e dois triangulares, de acordo com a seguinte proposição:

**Proposição 6** *O PTCCR tem 5 pontos de equilíbrio, no referencial sinódico,  $L_1, L_2, L_3, L_4$  e  $L_5$  e as suas posições são:*

- $L_1 (\mu_1 - \rho, 0, 0)$ , sendo  $\rho$  o zero real do polinómio

$$p(d_2) = d_2^5 + (\mu_2 - 3)d_2^4 + (3 - 2\mu_2)d_2^3 - \mu_2 d_2^2 + 2\mu_2 d_2 - \mu_2$$

- $L_2 (\mu_1 + \rho, 0, 0)$ , sendo  $\rho$  o zero real do polinómio

$$p(d_2) = d_2^5 + (3 - \mu_2)d_2^4 + (3 - 2\mu_2)d_2^3 - \mu_2 d_2^2 - 2\mu_2 d_2 - \mu_2$$

- $L_3 (\mu_1 - \rho, 0, 0)$ , sendo  $\rho$  o zero real do polinómio

$$p(d_2) = d_2^5 + (\mu_2 - 3)d_2^4 + (3 - 2\mu_2)d_2^3 + (\mu_2 - 2)d_2^2 + 2\mu_2 d_2 - \mu_2.$$

- $L_4 \left( \frac{1}{2} - \mu_2, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$ ;
- $L_5 \left( \frac{1}{2} - \mu_2, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$ .

**Demonstração:**

Do sistema de EDOs do PTCCR (3.12) obtêm-se as condições

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial y} = 0 \\ z = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Uma vez que  $z = 0$  e

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 1 \\ d_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 \\ d_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2, \end{cases}$$

tem-se

$$\mu_1 d_1^2 + \mu_2 d_2^2 = \mu_1(x + \mu_2)^2 + \mu_1 y^2 + \mu_2(x - \mu_1)^2 + \mu_2 y^2,$$

donde se retira que

$$x^2 + y^2 = \mu_1 d_1^2 + \mu_2 d_2^2 - \mu_1 \mu_2. \quad (3.22)$$

Substituindo (3.22) em (3.9) o potencial pode escrever-se

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} (\mu_1 d_1^2 + \mu_2 d_2^2 - \mu_1 \mu_2) + \frac{\mu_1}{d_1} + \frac{\mu_2}{d_2} \\ &= \mu_1 \left( \frac{1}{d_1} + \frac{d_1^2}{2} \right) + \mu_2 \left( \frac{1}{d_2} + \frac{d_2^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \mu_1 \mu_2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Voltando ao sistema (3.21), pretende-se encontrar o par  $(x, y)$  que verifique a condição

$$\begin{cases} \mu_1 \left( -\frac{1}{d_1^2} + d_1 \right) \frac{x+\mu_2}{d_1} + \mu_2 \left( -\frac{1}{d_2^2} + d_2 \right) \frac{x-\mu_1}{d_2} = 0 \\ \mu_1 \left( -\frac{1}{d_1^2} + d_1 \right) \frac{y}{d_1} + \mu_2 \left( -\frac{1}{d_2^2} + d_2 \right) \frac{y}{d_2} = 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

e esta divide-se nos seguintes casos:

Caso 1  $(x, y) = \left( \frac{1}{2} - \mu_2, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

$$\begin{cases} -\frac{1}{d_1^2} + d_1 = 0 \\ -\frac{1}{d_2^2} + d_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d_1 = 1 \\ d_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (x + \mu_2)^2 + y^2 = 1 \\ (x - \mu_1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Daqui vem que

$$\begin{aligned} (x + \mu_2)^2 - (x - \mu_1)^2 &= 0 \\ 2x(\mu_1 + \mu_2) + \mu_2^2 - \mu_1^2 &= 0 \\ 2x + \mu_2 - \mu_1 &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} - \mu_2 \end{aligned}$$

e que  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Estes pontos chamam-se *pontos de equilíbrio triangulares de Lagrange* e serão representados por  $L_4$  e  $L_5$ , sendo que  $L_4 = \left( \frac{1}{2} - \mu_2, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$  e  $L_5 = \left( \frac{1}{2} - \mu_2, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ . Quando o corpo  $C_3$  se encontra num dos pontos triangulares os três corpos formam um triângulo equilátero e esta configuração é mantida no referencial inercial enquanto cada um dos corpos se movimenta em órbita circular relativamente ao centro de massa do sistema.

Caso 2  $(x, y) = (x, 0)$  tal que  $x$  verifica a condição

$$\frac{\partial U}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial x} = 0.$$

Neste caso existem três *pontos de equilíbrio colineares* que se podem representar por  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ .

caso 2a No ponto  $L_1$ ,

$$\frac{\partial d_1}{\partial x} = -\frac{\partial d_2}{\partial x} = 1 \quad (3.25)$$

$$\mu_1 \left( d_1 - \frac{1}{d_1^2} \right) - \mu_2 \left( d_2 - \frac{1}{d_2^2} \right) = 0. \quad (3.26)$$

Da igualdade (3.25) resulta que  $d_1 = x + \mu_2$ ,  $d_2 = -x + \mu_1$ ,  $d_1 + d_2 = 1$  e  $-\mu_2 < x < \mu_1$ .

Da igualdade (3.26) e do facto de  $d_1 = 1 - d_2$  obtém-se o polinómio

$$p(d_2) = d_2^5 + (\mu_2 - 3)d_2^4 + (3 - 2\mu_2)d_2^3 - \mu_2 d_2^2 + 2\mu_2 d_2 - \mu_2.$$

Como o polinómio  $p$  é estritamente crescente e  $p(0)p(1) < 0$  então tem um único zero real no intervalo  $0 < d_2 < 1$ .

caso 2b No ponto  $L_2$ ,

$$\frac{\partial d_1}{\partial x} = \frac{\partial d_2}{\partial x} = 1 \quad (3.27)$$

$$\mu_1 \left( d_1 - \frac{1}{d_1^2} \right) + \mu_2 \left( d_2 - \frac{1}{d_2^2} \right) = 0. \quad (3.28)$$

Da igualdade (3.27) resulta que  $d_1 = x + \mu_2$ ,  $d_2 = x - \mu_1$ ,  $d_1 - d_2 = 1$  e  $x > \mu_1$ . Da igualdade (3.28) e do facto de  $d_1 = 1 + d_2$  obtém-se o polinómio

$$p(d_2) = d_2^5 + (3 - \mu_2)d_2^4 + (3 - 2\mu_2)d_2^3 - \mu_2 d_2^2 - 2\mu_2 d_2 - \mu_2$$

Como o polinómio  $p$  é estritamente crescente,  $p(0) < 0$  e  $p(+\infty) > 0$ , então tem um único zero real no intervalo  $d_2 > 0$ .

caso 2c No ponto  $L_3$ ,

$$\frac{\partial d_1}{\partial x} = \frac{\partial d_2}{\partial x} = -1 \quad (3.29)$$

$$\mu_1 \left( d_1 - \frac{1}{d_1^2} \right) + \mu_2 \left( d_2 - \frac{1}{d_2^2} \right) = 0. \quad (3.30)$$

Da igualdade (3.29) resulta que  $d_1 = -x - \mu_2$ ,  $d_2 = -x + \mu_1$ ,  $d_2 - d_1 = 1$  e  $x < -\mu_2$ .

Da igualdade (3.30) e do facto de  $d_1 = d_2 - 1$  obtém-se o polinómio

$$p(d_2) = d_2^5 + (\mu_2 - 3)d_2^4 + (3 - 2\mu_2)d_2^3 + (\mu_2 - 2)d_2^2 + 2\mu_2 d_2 - \mu_2.$$

Como o polinómio  $p$  é estritamente crescente,  $p(1) < 0$  e  $p(+\infty) > 0$ , então tem um único zero real no intervalo  $0 < d_2 < 1$ .  $\diamond$

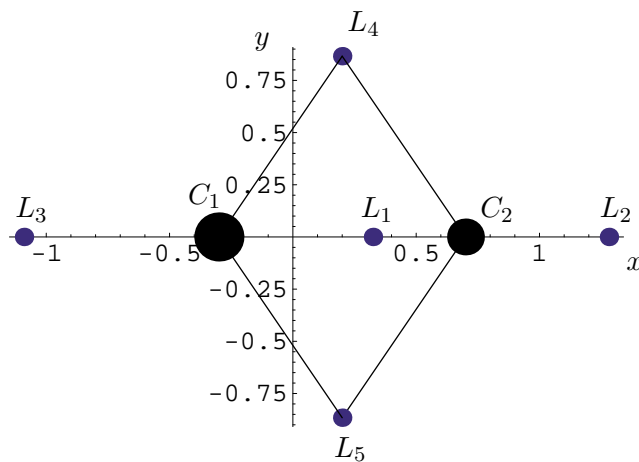


Figura 3.4: Representação dos pontos de equilíbrio  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $L_4$  e  $L_5$  para  $\mu_2 = 0.3$ .

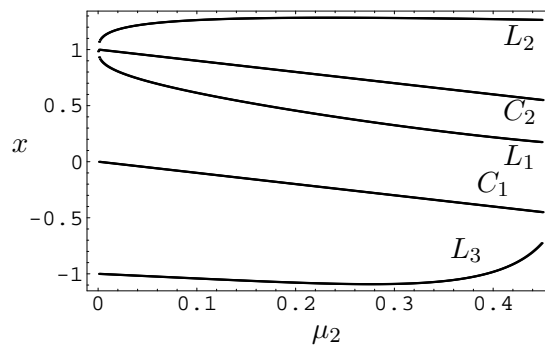


Figura 3.5: Posição na recta dos pontos colineares e dos corpos  $C_1$  e  $C_2$  em função da razão de massa  $\mu_2$ .

Os pontos colineares  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  foram encontrados por Euler [6]. No entanto, as soluções de equilíbrio são normalmente designadas por soluções de Lagrange, por serem um caso particular do problema de três corpos, estudado por Lagrange. A posição dos pontos de equilíbrio, para  $\mu_2 = 0.7$ , estão representados na figura 3.4. Na figura 3.5 pode observar-se a posição na recta dos pontos colineares e dos corpos  $C_1$  e  $C_2$  em função da razão entre as suas massas. Quando  $\mu_2 \rightarrow 0$ , a posição de  $C_1$  aproxima-se do centro de massa, isto é, da origem do referencial inercial. Neste caso, os pontos  $L_1$  e  $L_2$  atingem a posição mais próxima do corpo  $C_2$ , sendo aproximadamente simétricos. O ponto  $L_3$  posiciona-se sobre a circunferência que o corpo  $C_2$  descreve ao longo do seu movimento. À medida que a massa de  $C_2$  aumenta, o ponto  $L_2$  afasta-se dos dois corpos massivos, o ponto  $L_1$  afasta-se de  $C_2$  e aproxima-se de  $C_1$  e o ponto  $L_3$  aproxima-se de  $C_1$ .

Os pontos de equilíbrio triangulares, aparentemente sem aplicação na astronomia na época em que foram descobertos por Lagrange (1772), acabam por ter aplicabilidade devido à existência de corpos celestes que se posicionam na vizinhança dos referidos pontos. Por exemplo, existem dois grupos de asteróides, os Gregos no ponto  $L_4$  e os Troianos no ponto  $L_5$ , que formam uma configuração próxima de um duplo triângulo equilátero com Júpiter e o Sol quando o seu movimento é aproximado pelo PTCR (os asteróides posicionam-se



próximo dos vértices simétricos em relação à linha definida pelo sol e por Júpiter que se posicionam nos outros dois vértices). Também os pontos colineares assumem importância, por exemplo, próximo do ponto de equilíbrio colinear  $L_1$ , relativo ao sistema Sol-Terra- $C_3$ , foi colocada a sonda SOHO, com o intuito de observar o Sol [28]. Importa, portanto, estudar a estabilidade dos pontos de equilíbrio.



## Capítulo 4

# Estabilidade linear dos pontos de equilíbrio

Pretende-se, neste capítulo, apresentar um estudo da estabilidade linear dos pontos de equilíbrio colineares e triangulares do PTCR, obtidos no capítulo 3. Restringindo o movimento do corpo  $C_3$  a um plano, obtém-se um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade. Deste modo, o PTCR planar apresenta as características dos sistemas Hamiltonianos autónomos estudadas no primeiro capítulo deste trabalho.

A linearização de um sistema Hamiltoniano na vizinhança de um ponto de equilíbrio resulta num sistema Hamiltoniano em que os valores próprios associados são da forma de pares de números simétricos. Depois de determinados os valores próprios do sistema linear do PTCR planar, determinam-se as respectivas soluções do sistema de EDOs lineares, através das quais é analisada a estabilidade linear dos pontos colineares e triangulares.

Por fim, são apresentadas simulações numéricas do movimento linear e não-linear de  $C_3$  na vizinhança de pontos de equilíbrio.

### 4.1 Linearização do sistema Hamiltoniano

A estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema de EDOs não-linear pode ser estudada através da sua linearização, por meio de uma expansão de Taylor, na vizinhança de um ponto. Uma vez que as soluções de equilíbrio do sistema de EDOs (1.11) são os pontos  $\vec{\xi}_E$  onde  $H_{\vec{\xi}}(\vec{\xi}_E) = \vec{0}$ , a sua linearização corresponde à segunda variação do Hamiltoniano na vizinhança do ponto de equilíbrio  $\vec{\xi}_E$ . Considerando-se uma translação do ponto de equilíbrio  $\vec{\xi}_E$  para a origem das coordenadas e desenvolvendo a função  $H$  na vizinhança da origem em série de Taylor, escreve-se

$$H(\vec{\xi}) = \sum_{i=0}^{+\infty} H_i = H_0 + H_1 + H_2 + \dots, \quad (4.1)$$

sendo cada  $H_i$  um polinómio homogéneo de grau  $i$ . Como  $H_0 = H(\vec{0})$  é uma constante e  $H_1 = H_{\vec{\xi}}(\vec{0})\vec{\xi} = 0$ , por definição de ponto de equilíbrio, vem que  $H = \frac{1}{2}\vec{\xi}A\vec{\xi}^T + O(\xi^3)$ , com  $A = DH_{\vec{\xi}}(\vec{0})$ . Deste modo,  $H_{\vec{\xi}} = A\vec{\xi} + O(\xi^2)$  e

$$\dot{\vec{\xi}} = \mathcal{T}A\vec{\xi} \quad (4.2)$$

é o sistema de EDOs linearizado correspondente ao sistema Hamiltoniano (1.11), com  $\mathcal{T}$  definida em (1.13).

**Proposição 7** *Os valores próprios do sistema Hamiltoniano linearizado (4.2), isto é, os valores próprios de  $A$  são pares de números simétricos e podem ser ordenados do seguinte modo:*

$$\lambda_1, \dots, \lambda_N, \lambda_{N+1}, \dots, \lambda_{2N} \quad (4.3)$$

tal que  $\lambda_{i+N} = -\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

**Demonstração:**

De acordo com o sistema de EDOs linear (4.2), pretende-se mostrar que o polinómio característico  $p(\lambda) = |\mathcal{T}A - \lambda I|$  é uma função par. De

- $A = A^T$ ,
- $\mathcal{T}^T = -\mathcal{T}$ ,
- $\mathcal{T}^2 = -I$ ,

vem que

$$(\mathcal{T}A - \lambda I)^T = A^T\mathcal{T}^T - \lambda I = -AT - \lambda I = \mathcal{T}^2AT + \mathcal{T}^2\lambda I = \mathcal{T}(\mathcal{T}A + \lambda I)\mathcal{T}.$$

Então, como  $|\mathcal{T}| = 1$ ,

$$p(\lambda) = |\mathcal{T}A - \lambda I| = |(\mathcal{T}A - \lambda I)^T| = |\mathcal{T}(\mathcal{T}A + \lambda I)\mathcal{T}| = |\mathcal{T}A + \lambda I| = p(-\lambda). \diamond$$

Os pontos de equilíbrio podem ser classificados da seguinte forma:

**Definição 9** *(Ponto hiperbólico) Um ponto de equilíbrio diz-se hiperbólico se todos os valores próprios da matriz  $A$  têm, nesse ponto, parte real diferente de zero.*

**Definição 10** *(Ponto elíptico) Um ponto de equilíbrio diz-se elíptico se todos os valores próprios da matriz  $A$ , nesse ponto, são imaginários puros.*

## 4.2 Linearização do PTCR

O estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrio relativos ao movimento do corpo  $C_3$  será realizado restringindo o seu movimento ao plano  $Oxy$ . Assim sendo, o sistema de EDOs do PTCR planar é

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) \quad (4.4)$$

tal que, de (3.13) com  $n = 1$ , se obtém

$$\vec{F}(x, y, u, v) = \left( u, v, 2v + \frac{\partial U}{\partial x}, -2u + \frac{\partial U}{\partial y} \right). \quad (4.5)$$

Para classificar os pontos de equilíbrio do sistema (4.5) considera-se, então, o seu sistema linear associado e determinam-se os valores próprios da matriz  $A = D\vec{F}(\vec{0})$ . Para  $U$ , dado em (3.9), restrito ao plano e  $n = 1$ , obtém-se

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 1 - \left[ \frac{\mu_1}{d_1^3} + \frac{\mu_2}{d_2^3} \right] + 3 \left[ \mu_1 \frac{(x + \mu_2)^2}{d_1^5} + \mu_2 \frac{(x - \mu_1)^2}{d_2^5} \right], \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 3 \left[ \mu_1 \frac{x + \mu_2}{d_1^5} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{d_2^5} \right] y, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 1 - \left[ \frac{\mu_1}{d_1^3} + \frac{\mu_2}{d_2^3} \right] + 3 \left[ \frac{\mu_1}{d_1^5} + \frac{\mu_2}{d_2^5} \right] y^2 \quad (4.8)$$

e, sendo  $U_{x^2} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0$ ;  $U_{xy} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_0$ ;  $U_{y^2} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_0$ , onde 0 representa o valor das derivadas parciais no ponto de equilíbrio, obtém-se a matriz

$$\mathcal{T}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{x^2} & U_{xy} & 0 & 2 \\ U_{xy} & U_{y^2} & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinando-se os valores próprios da matriz  $\mathcal{T}A$  através dos zeros do respectivo polinómio característico tem-se

$$\lambda^4 + (4 - U_{x^2} - U_{y^2})\lambda^2 + U_{x^2}U_{y^2} - U_{xy}^2 = 0. \quad (4.9)$$

Os valores próprios da matriz  $\mathcal{T}A$  podem então escrever-se do seguinte modo

$$\lambda = \pm \left[ \frac{U_{x^2} + U_{y^2} - 4 \pm \left[ (4 - U_{x^2} - U_{y^2})^2 - 4(U_{x^2}U_{y^2} - U_{xy}^2) \right]^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.10)$$

Como critério de estabilidade, utiliza-se aqui a noção de Lyapunov para pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico.

**Definição 11** (*Ponto de equilíbrio estável segundo Lyapunov*) Seja  $\vec{x}_E \in O$ , com  $O$  aberto e  $O \subseteq \mathbb{R}^n$ , um ponto de equilíbrio do sistema de EDOs (1.23) e seja  $\vec{x}(t)$  uma solução tal que  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ . O ponto de equilíbrio  $\vec{x}_E$  é estável se e só se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|(\vec{x}_0 - \vec{x}_E)\| < \delta \implies \|\vec{x}(t, \vec{x}_0) - \vec{x}_E\| < \epsilon, \forall t \geq 0.$$

Em caso de estabilidade de uma órbita é possível prever aproximadamente a posição do corpo para todo o tempo, desde que sejam conhecidas as condições iniciais, o que significa a continuidade da órbita para todo o tempo, na dependência das suas condições iniciais.

**Definição 12** (*Ponto de equilíbrio instável segundo Lyapunov*) Seja  $\vec{x}_E \in O$ , com  $O$  aberto e  $O \subseteq \mathbb{R}^n$ , um ponto de equilíbrio do sistema de EDOs (1.23) e seja  $\vec{x}(t)$  uma solução tal que  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ . O ponto de equilíbrio  $\vec{x}_E$  é instável se e só se

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 : t \geq 0, \|\vec{x}_0 - \vec{x}_E\| < \delta \wedge \|\vec{x}(t, \vec{x}_0) - \vec{x}_E\| \geq \epsilon$$

Os teoremas relativos à estabilidade dos pontos de equilíbrio serão demonstrados para  $\vec{x}_E = \vec{0}$ , sendo que os resultados a obter se mantêm para outros valores possíveis de  $\vec{x}_E$ , a menos de uma mudança de coordenadas.

### 4.3 Pontos de equilíbrio triangulares

Considerando que os valores próprios na linearização dos pontos de equilíbrio do PTCR planar são distintos (note-se que se os valores próprios são distintos então nenhum deles é zero, pela proposição 7), a solução da EDO (4.4) é dada por

$$(x(t), y(t)) = \left( \sum_{j=1}^4 z_j e^{\lambda_j t}, \sum_{j=1}^4 w_j e^{\lambda_j t} \right)$$

com

$$w_j = \frac{\lambda_j^2 - U_{x2}}{2\lambda_j + U_{xy}} z_j$$

determinado por substituição da solução  $(x, y, u, v)$  no sistema de EDOs linear. Os valores de  $z_j$  e de  $w_j$  resultam das condições iniciais  $(x_0, y_0, u_0, v_0)$  e do facto da solução  $(x, y, u, v)$  pertencer a  $\mathbb{R}^4$ . A equação de movimento do sistema de EDOs (4.4) linearizada, na vizinhança de pontos de equilíbrio triangulares elípticos e hiperbólicos, é dada por

$$\begin{cases} x(t) = z_1 e^{\lambda_1 t} + \bar{z}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t} + z_2 e^{\lambda_2 t} + \bar{z}_2 e^{\bar{\lambda}_2 t} \\ y(t) = z_3 e^{\lambda_1 t} + \bar{z}_3 e^{\bar{\lambda}_1 t} + z_4 e^{\lambda_2 t} + \bar{z}_4 e^{\bar{\lambda}_2 t}, \end{cases} \quad (4.11)$$

sendo  $z_j = a_j + \mathcal{I}b_j$ ,  $\bar{z}_j = a_j - \mathcal{I}b_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ,  $\lambda_i = \alpha_i \pm \beta_i \mathcal{I}$ ,  $i = 1, 2$  e  $a_i, b_i, \alpha_j, \beta_j$  constantes reais.

**Proposição 8** *Para os pontos de equilíbrio triangulares, os valores próprios do sistema linearizado do PTCR são imaginários puros distintos para  $0 < \mu_2 < \mu_{2,3}$ , com  $\mu_{2,3} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{60}}{9} \right)$ .*

**Demonstração:**

Sendo os pontos triangulares da forma  $\left(\frac{1}{2} - \mu_2, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ , vem que

$$U_{x^2} = \frac{3}{4}, \quad U_{xy} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu_2), \quad U_{y^2} = \frac{9}{4}.$$

A equação característica correspondente aos pontos triangulares é da forma:

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu_2(1 - \mu_2) = 0.$$

e os respectivos valores próprios da forma  $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$  tal que

$$\lambda_1 = \left[ \frac{-1 - [1 - 27\mu_2(1 - \mu_2)]^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.12)$$

$$\lambda_2 = \left[ \frac{-1 + [1 - 27\mu_2(1 - \mu_2)]^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

$$\bar{\lambda}_1 = - \left[ \frac{-1 - [1 - 27\mu_2(1 - \mu_2)]^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.14)$$

$$\bar{\lambda}_2 = - \left[ \frac{-1 + [1 - 27\mu_2(1 - \mu_2)]^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.15)$$

4.13 Os valores próprios são imaginários puros distintos se

$$1 - 27\mu_2(1 - \mu_2) > 0 \wedge 1 - 27\mu_2(1 - \mu_2) < 1.$$

Para  $0 < \mu_2 < \frac{1}{2}$ , a segunda condição é universal. Então,

$$\left( \mu_2 < \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{69}}{9} \right) \vee \mu_2 > \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{69}}{9} \right) \right) \wedge 0 < \mu_2 < \frac{1}{2}.$$

Logo, se  $0 < \mu_2 < \mu_{2,3}$ , com  $\mu_{2,3} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{69}}{9} \right) \approx 0.038521$ , os valores próprios são imaginários puros distintos.  $\diamond$

**Proposição 9** *Os pontos de equilíbrio triangulares são linearmente estáveis segundo Lyapunov, se  $0 < \mu_2 < \mu_{2,3}$ .*

**Demonstração:**

Para  $0 < \mu_2 < \mu_{2,3}$ , a linearização na vizinhança de pontos de equilíbrio triangulares resulta em quatro valores próprios imaginários puros distintos da forma  $\pm\beta_i\mathcal{I}$ ,  $\beta_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ . Neste caso, a solução do sistema de EDOs (4.11) pode escrever-se na forma

$$\begin{cases} x(t) = 2a_1\cos(\beta_1t) + 2a_2\cos(\beta_2t) - 2b_1\sin(\beta_1t) - 2b_2\sin(\beta_2t) \\ y(t) = 2a_3\cos(\beta_1t) + 2a_4\cos(\beta_2t) - 2b_3\sin(\beta_1t) - 2b_4\sin(\beta_2t), \end{cases}$$

com  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , o que permite observar que o movimento da partícula é oscilatório, permanecendo na vizinhança do ponto de equilíbrio, pelo que os pontos de equilíbrio  $L_4$  e  $L_5$  do PTCR são linearmente estáveis.  $\diamond$

**Proposição 10** *Os pontos de equilíbrio triangulares são instáveis segundo Lyapunov, se  $\mu_{2,3} < \mu_2 < 1/2$ .*

**Demonstração:**

Para  $\mu_{2,3} < \mu_2 < 1/2$ , a linearização na vizinhança de pontos de equilíbrio triangulares resulta em quatro valores próprios complexos distintos, da forma  $\pm\alpha \pm \beta\mathcal{I}$ , com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ . A solução do sistema de EDOs (4.11) pode escrever-se na forma

$$\begin{cases} x(t) = 2(a_1e^{\alpha t} + a_2e^{-\alpha t})\cos(\beta t) - 2(b_1e^{\alpha t} + b_2e^{-\alpha t})\sin(\beta t) \\ y(t) = 2(a_3e^{\alpha t} + a_4e^{-\alpha t})\cos(\beta t) - 2(b_3e^{\alpha t} + b_4e^{-\alpha t})\sin(\beta t), \end{cases}$$

com  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , o que permite observar que os termos que dependem de  $e^{\alpha t}$ ,  $\alpha > 0$  dominarão, provocando um aumento exponencial da distância do corpo em relação ao ponto de equilíbrio, pelo que os pontos de equilíbrio  $L_4$  e  $L_5$  do PTCR são linearmente instáveis.  $\diamond$

#### 4.4 Pontos de equilíbrio colineares

**Proposição 11** *Os valores próprios de  $A$  na vizinhança dos pontos de equilíbrio colineares,  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , são sempre dois números reais simétricos e dois números imaginários puros conjugados.*

**Demonstração:**

Da igualdade (4.6) e do facto de  $d_1^2 = (x + \mu_2)^2$  e de  $d_2^2 = (x - \mu_1)^2$  vem que

$$U_{x^2} = 1 + 2 \left[ \frac{\mu_1}{d_1^3} + \frac{\mu_2}{d_2^3} \right].$$

Nos pontos de equilíbrio colineares,  $y = 0$ . Então, as igualdades (4.7) e (4.8) resultam em

$$\begin{aligned} U_{xy} &= 0 \\ U_{y^2} &= 1 - \left[ \frac{\mu_1}{d_1^3} + \frac{\mu_2}{d_2^3} \right]. \end{aligned}$$

Sendo

$$\bar{A} = \frac{\mu_1}{d_1^3} + \frac{\mu_2}{d_2^3}, \tag{4.16}$$

os valores próprios do sistema linearizado correspondente podem escrever-se como

$$\lambda = \pm \left[ \frac{\bar{A} - 2 \pm [(2 - \bar{A})^2 - 4(1 + 2\bar{A})(1 - \bar{A})]^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.17}$$

Pretende-se mostrar que  $\bar{A} > 1$ , isto é,  $U_{y^2} < 0$ .



- No ponto  $L_1$ ,

$$\frac{\partial d_1}{\partial x} = -\frac{\partial d_2}{\partial x} = 1. \quad (4.18)$$

Além disso,  $0 < d_2 < 1$ . Da definição do potencial  $U$  (3.23) obtém-se

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial x}. \quad (4.19)$$

Por definição de ponto de equilíbrio,  $U_x = 0$  e por (4.18) obtém-se  $\frac{\partial U}{\partial d_1} = \frac{\partial U}{\partial d_2}$ . Logo, utilizando novamente (3.23), obtém-se

$$U_{y^2} = \frac{1}{d_1} \frac{\partial U}{\partial d_1} + \frac{1}{d_2} \frac{\partial U}{\partial d_2} = \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \frac{\partial U}{\partial d_2} = \mu_2 \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \left( -\frac{1}{d_2^2} + d_2 \right).$$

$U_{y^2}$  tem sinal negativo, pois  $0 < d_2 < 1$ .

- No ponto  $L_2$ ,

$$\frac{\partial d_1}{\partial x} = \frac{\partial d_2}{\partial x} = 1 \quad (4.20)$$

e  $d_1 - d_2 = 1$ . De (4.20), da definição de ponto de equilíbrio e de (4.19) conclui-se que

$$\frac{\partial U}{\partial d_1} = -\frac{\partial U}{\partial d_2}. \quad (4.21)$$

Do mesmo modo que no ponto  $L_1$ , obtém-se

$$U_{y^2} = \frac{1}{d_1} \frac{\partial U}{\partial d_1} + \frac{1}{d_2} \frac{\partial U}{\partial d_2} = \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) \frac{\partial U}{\partial d_1} = \mu_1 \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) \left( -\frac{1}{d_1^2} + d_1 \right).$$

Como  $d_1 - d_2 = 1$ , então  $d_1 > 1$  e obtém-se  $\left( -\frac{1}{d_1^2} + d_1 \right) > 0$  e  $\left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) < 0$ , logo  $U_{y^2} < 0$ .

- No ponto  $L_3$ ,

$$\frac{\partial d_1}{\partial x} = \frac{\partial d_2}{\partial x} = -1 \quad (4.22)$$

e  $d_1 - d_2 = -1$ . De (4.22), da definição de ponto de equilíbrio e de (4.19) conclui-se que

$$\frac{\partial U}{\partial d_1} = -\frac{\partial U}{\partial d_2}. \quad (4.23)$$

Para o ponto  $L_3$ , obtém-se

$$U_{y^2} = \frac{1}{d_1} \frac{\partial U}{\partial d_1} + \frac{1}{d_2} \frac{\partial U}{\partial d_2} = \left( -\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \frac{\partial U}{\partial d_2} = \mu_1 \left( -\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \left( -\frac{1}{d_2^2} + d_2 \right).$$

Como  $d_1 - d_2 = -1$ , então  $d_2 > 1$  e obtém-se  $\left( -\frac{1}{d_2^2} + d_2 \right) > 0$  e  $\left( -\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) < 0$ . Deste modo conclui-se que  $U_{y^2} < 0$ , ou seja, em todos os pontos de equilíbrio colineares  $\bar{A} > 1$ .

Como nos pontos colineares  $\bar{A} > 1$ ,  $(2 - \bar{A})^2 - 4(1 + 2\bar{A})(1 - \bar{A}) > 1$  e

$$\bar{A} - 2 + \sqrt{(2 - \bar{A})^2 - 4(1 + 2\bar{A})(1 - \bar{A})} > 0,$$

por observação da igualdade (4.17) verifica-se que existem dois valores próprios reais. Por outro lado,

$$\bar{A} - 2 < \sqrt{(2 - \bar{A})^2 - 4(1 + 2\bar{A})(1 - \bar{A})},$$

ou seja,

$$\bar{A} - 2 - \sqrt{(2 - \bar{A})^2 - 4(1 + 2\bar{A})(1 - \bar{A})} < 0$$

e, observando (4.17), conclui-se que existem dois números imaginários puros conjugados.  $\diamond$

**Proposição 12** *Os pontos de equilíbrio colineares são linearmente instáveis, segundo Lyapunov.*

**Demonstração:**

Pela proposição 11, os valores próprios na vizinhança dos pontos de equilíbrio colineares são dois números reais simétricos  $\lambda_{1,2} = \pm\alpha$ ,  $\alpha > 0$  e dois imaginários puros conjugados  $\lambda_{2,3} = \pm\beta\mathcal{I}$ ,  $\beta > 0$ , logo a solução do sistema de EDOs linear pode escrever-se como

$$\begin{cases} x(t) = a_1 e^{\alpha t} + a_2 e^{-\alpha t} + 2a_3 \cos(\beta t) + 2b_3 \sin(\beta t) \\ y(t) = a_4 e^{\alpha t} + a_5 e^{-\alpha t} + 2a_6 \cos(\beta t) + 2b_6 \sin(\beta t), \end{cases}$$

com  $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $j = 3, 6$ . Observando a forma da solução, verifica-se que o primeiro termo dominará e provocará um aumento exponencial da distância do corpo em relação à origem.  $\diamond$

Resulta das proposições 9, 10 e 12 que, a existência de valores próprios na forma de pares de números imaginários puros distintos, é condição suficiente para a estabilidade linear dos pontos de equilíbrio. Esta condição é verificada quando  $0 < \mu_2 < 0.5 - \sqrt{69}/18$ . Os resultados relativos à estabilidade linear dos pontos de equilíbrio do PTCR planar encontram-se resumidos na tabela 4.1.

## 4.5 Aplicações

Os pontos de equilíbrio  $L_4$  e  $L_5$  do sistema linearizado são estáveis se os respectivos valores próprios forem imaginários puros distintos da forma  $\lambda_{1,3} = \pm\beta_1\mathcal{I}$  e  $\lambda_{2,4} = \pm\beta_2\mathcal{I}$ , com  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^+$ . Como se pode observar na figura 4.1, à medida que a massa  $\mu_2$  decresce, a frequência de um dos dois valores próprios,  $\beta_1$ , aproxima-se de zero enquanto que a

Pontos de equilíbrio	Valores próprios	Classificação dos pontos de equilíbrio	Estabilidade linear
$L_1$ $L_2$ $L_3$	$\pm\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^+$ $\pm\beta\mathcal{I}, \beta \in \mathbb{R}^+$ $0 < \mu_2 \leq 1/2$		instabilidade
$L_4$ $L_5$	$\pm\alpha\mathcal{I}, \pm\beta\mathcal{I}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, \alpha \neq \beta$ $0 < \mu_2 < \mu_{2,3}$	elíptico	estabilidade
	$\pm\alpha \pm \beta\mathcal{I}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ $\mu_{2,3} < \mu_2 \leq 1/2$	hiperbólico	instabilidade

Tabela 4.1: Estudo da estabilidade linear dos pontos de equilíbrio colineares e triangulares do PTCR planar.

outra frequência,  $\beta_2$ , se aproxima de um. Então o movimento de  $C_3$  é composto por dois movimentos diferentes, um com período longo,  $2\pi/\beta_1$  e outro com período curto,  $2\pi/\beta_2 \approx 2\pi$ , próximo do período de  $C_2$ . Neste caso, o movimento pode ser aproximado ao movimento elíptico de período  $2\pi/\beta_1$ .

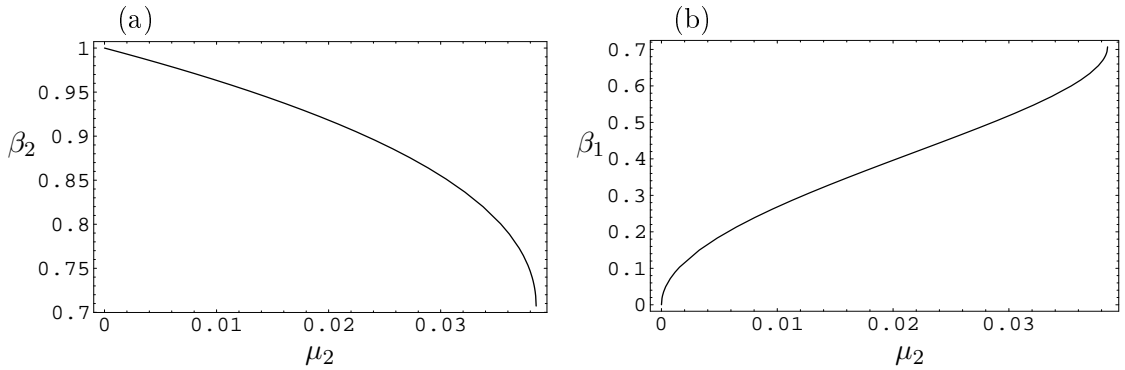


Figura 4.1: Módulo dos valores próprios do sistema linearizado na vizinhança dos pontos triangulares em função de  $\mu_2$ , para  $0 < \mu_2 < \mu_{2,3}$ .

Nas figuras 4.2a, 4.3a e 4.4, onde são considerados os movimentos de possíveis asteroídes,  $C_3$ , nos sistemas Terra-Lua, Sol-Júpiter e Sol-Terra, respectivamente, observa-se que o movimento de  $C_3$  pode ser aproximado, na vizinhança de  $L_4$ , a uma elipse de período  $2\pi/\beta_1$ , que tem uma forma mais alongada, à medida que a massa do sistema diminui.

O movimento de  $C_3$ , aproximado pelo PTCR planar, relativo ao sistema Terra-Lua- $C_3$  na vizinhança do ponto  $L_4$  pode ser observado na figura 4.2, que representa a solução do sistema linear e a solução do sistema não-linear, obtida por integração numérica das equações diferenciais (4.5), para 16 períodos orbitais da Lua. Neste caso, para  $\mu_2 \approx 10^{-2}$  e para a condição inicial  $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0.49 + 10^{-5}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 10^{-5}, 0, 0)$ , obtêm-se os valores

próprios do sistema linear  $\lambda_{1,3} = \pm 0.268\mathcal{I}$ ,  $\lambda_{2,4} = \pm 0.963\mathcal{I}$  e obtêm-se a solução linear

$$\begin{cases} x(t) = 3.45 \times 10^{-5} \cos(0.268t) - 2.45 \times 10^{-5} \cos(0.963t) + 3.07 \times 10^{-4} \sin(0.268t) \\ \quad - 8.55 \times 10^{-5} \sin(0.963t) \\ y(t) = 5.20 \times 10^{-5} \cos(0.268t) - 4.20 \times 10^{-5} \cos(0.963t) - 1.76 \times 10^{-4} \sin(0.268t) \\ \quad + 4.91 \times 10^{-5} \sin(0.963t). \end{cases}$$

O movimento de  $C_3$  linearizado, no sistema Sol-Júpiter, representado na figura 4.3 corresponde à solução

$$\begin{cases} x(t) = 3.08 \times 10^{-5} \cos(0.082t) - 2.08 \times 10^{-5} \cos(0.996t) + 8.72 \times 10^{-4} \sin(0.082t) \\ \quad - 7.21 \times 10^{-5} \sin(0.996t) \\ y(t) = 4.60 \times 10^{-5} \cos(0.082t) - 3.60 \times 10^{-5} \cos(0.996t) - 5.03 \times 10^{-4} \sin(0.082t) \\ \quad + 4.16 \times 10^{-5} \sin(0.996t) \end{cases}$$

e, no sistema Sol-Terra à solução

$$\begin{cases} x(t) = 3.05 \times 10^{-5} \cos(0.002598t) - 2.05 \times 10^{-5} \cos(0.999997t) \\ \quad + 2.73 \times 10^{-2} \sin(0.002598t) - 7.10 \times 10^{-5} \sin(0.999997t) \\ y(t) = 4.55 \times 10^{-5} \cos(0.002598t) - 3.55 \times 10^{-5} \cos(0.999997t) \\ \quad - 1.58 \times 10^{-2} \sin(0.002598t) + 4.10 \times 10^{-5} \sin(0.999997t). \end{cases}$$

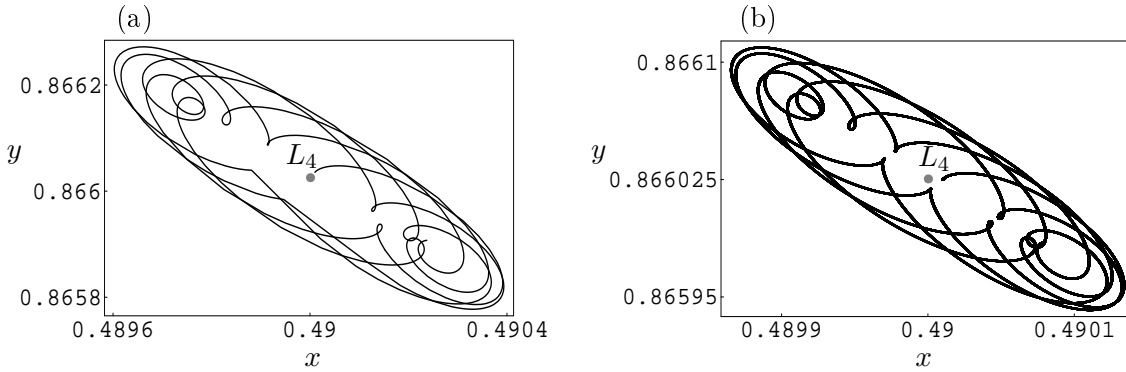


Figura 4.2: Trajectória do corpo  $C_3$ , do sistema linearizado (a) e do sistema não linearizado (b), em relação ao referencial sinódico, na vizinhança do ponto de equilíbrio  $L_4$ ,  $\mu_2 = 10^{-2}$  e intervalo de tempo  $[0, 32\pi]$ . Este movimento pode representar o movimento de um corpo  $C_3$  para um período de 16 anos da Lua.

Na figura 4.5 estão representados o movimento linear de dois sistemas hipotéticos, com razões de massas  $\mu_2 \approx 0.0135$  e  $\mu_2 \approx 0.02494$ , correspondentes a razões entre os módulos de valores próprios  $\beta_1/\beta_2 = 1/2$  e  $\beta_1/\beta_2 = 1/3$ , respectivamente. Não são conhecidos, até ao momento, corpos do sistema solar que verifiquem estas razões de massas. Para os

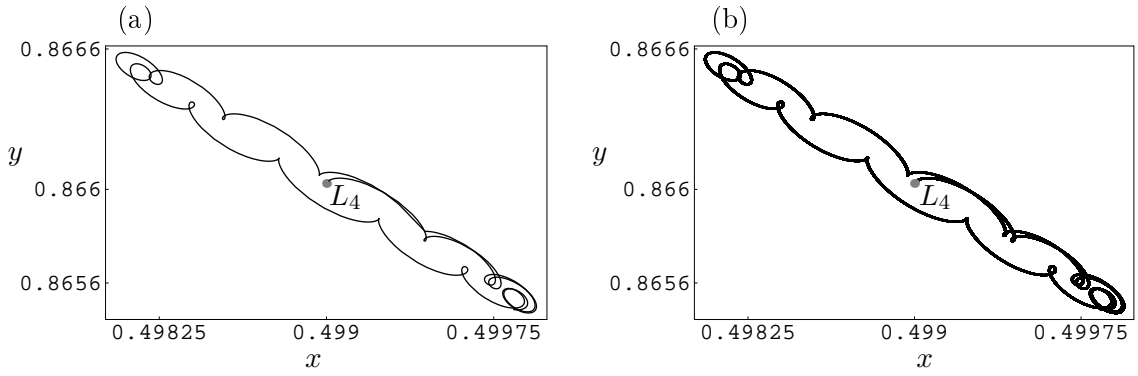


Figura 4.3: Trajectória do corpo  $C_3$ , do sistema linearizado (a) e do sistema não linearizado (b), em relação ao referencial sinódico, na vizinhança do ponto de equilíbrio  $L_4$ ,  $\mu_2 = 10^{-3}$  e intervalo de tempo  $[0, 32\pi]$ . Este movimento pode representar o movimento de um corpo  $C_3$  para um período de 16 anos de Júpiter.

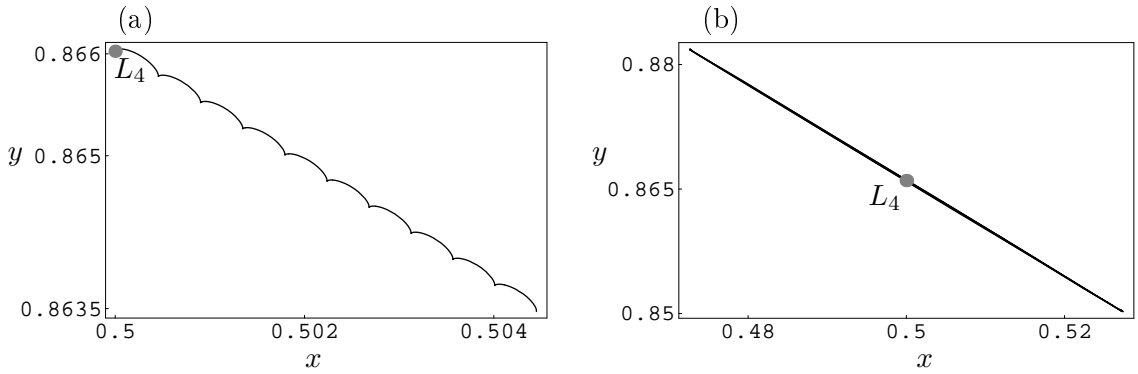


Figura 4.4: Trajectória do corpo  $C_3$ , do sistema linearizado, em relação ao referencial sinódico, na vizinhança do ponto de equilíbrio  $L_4$ ,  $\mu_2 = 10^{-3}$  e intervalo de tempo  $[0, 20\pi]$  em (a) e  $[0, 1600\pi]$  em (b). Este movimento pode representar o movimento de um corpo  $C_3$  para 10 períodos orbitais da Terra em (a) e de 800 em (b) no sistema Sol-Terra.

valores de massas considerados, o ponto de equilíbrio  $L_4$ , como será tratado em capítulo posterior, é instável apesar de apresentar estabilidade linear.

Como exemplo do movimento na vizinhança de um ponto de equilíbrio colinear pode considerar-se o movimento de um possível asteroide,  $C_3$ , na vizinhança do ponto  $L_1$ , do sistema Sol-Terra. Neste sistema  $\mu_2 \approx 10^{-6}$ ,  $\lambda_1 = 2.525$ ,  $\lambda_2 = -2.525$ ,  $\lambda_3 = 2.082\mathcal{I}$  e  $\lambda_4 = -2.082\mathcal{I}$ . Para um deslocamento inicial  $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (10^{-5}, 10^{-5}, 0, 0)$  em relação ao ponto de equilíbrio obtém-se a solução

$$\begin{cases} x(t) = 5.139 \times 10^{-6} e^{2.525t} + 7.389 \times 10^{-6} e^{-2.525t} - 2.528 \times 10^{-6} \cos(2.082t) \\ \quad + 2.728 \times 10^{-6} \sin(2.082t) \\ y(t) = -2.755 \times 10^{-6} e^{2.525t} + 3.684 \times 10^{-5} e^{-2.525t} + 8.793 \times 10^{-6} \cos(2.082t) \\ \quad + 8.148 \times 10^{-6} \sin(2.082t). \end{cases}$$

As figuras apresentadas ilustram o movimento linearizado de possíveis asteroides,  $C_3$ ,

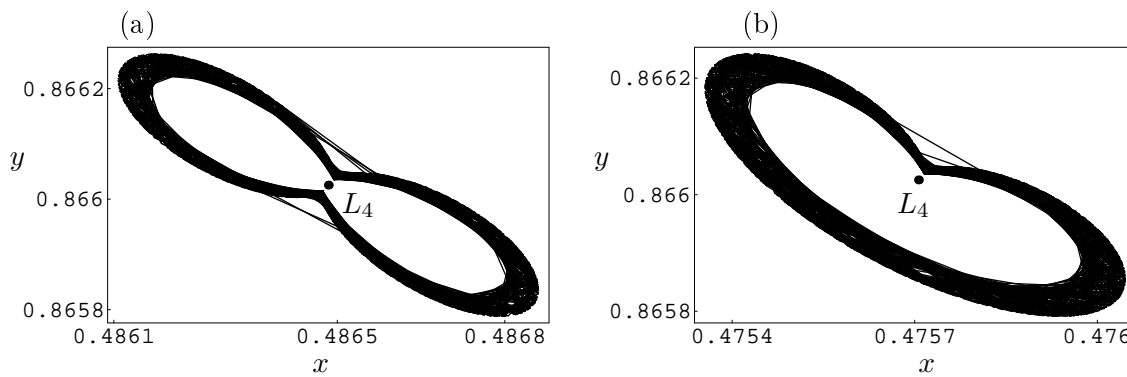


Figura 4.5: Trajetória do corpo  $C_3$ , do sistema linearizado para (a)  $k_1/k_2 = 1/3$ ,  $\mu_2 \approx 0.0135$  e para (b)  $k_1/k_2 = 1/2$ ,  $\mu_2 \approx 0.02494$ , em relação ao referencial sinódico, na vizinhança do ponto de equilíbrio  $L_4$ . O tempo de integração corresponde a 250 períodos orbitais de  $C_2$ .

para condições iniciais próximas do ponto de equilíbrio  $L_4$ , face aos sistemas Terra-Lua, Sol-Júpiter, Sol-Terra e a dois sistemas virtuais  $C_1$ - $C_2$ , com razões de massas  $\mu_2 \approx 0.02494$  e  $\mu_2 \approx 0.0135$ , respectivamente. Nos casos dos sistemas Terra-Lua e Sol-Júpiter são também simulados os movimentos na vizinhança do ponto de equilíbrio  $L_4$ , nas figuras 4.2b e 4.3b, respectivamente, os quais aparentam manter a estabilidade linear (ver figuras 4.2a e 4.3a). Existem vários exemplos no sistema solar de asteróides que se movimentam na vizinhança dos pontos de equilíbrio triangulares, como é o caso de Eureka, descoberta em 1990 no sistema Sol-Marte, que se movimenta em torno do ponto  $L_4$  [28]. No sistema Sol-Júpiter, como já foi referido no capítulo anterior, existe um grupo de asteróides próximo de  $L_4$  e outro próximo de  $L_5$ . No sistema de Saturno foram descobertos os satélites Telesto, que se movimenta em torno de  $L_4$  e Calypso, que se movimenta em torno de  $L_5$ , do sistema Saturno-Tethys [28]. Também no sistema Saturno-Dione foram descobertos satélites próximos de  $L_4$  e  $L_5$ , Helene e Polydeuces, respectivamente [31]. Estes pares de corpos verificam a condição para a estabilidade linear,  $\mu_2 < 0.038521$ .

Embora os pontos de equilíbrio triangulares sejam linearmente estáveis, para assegurar a sua estabilidade, é necessária análise não-linear [32]. Como será demonstrado, os pontos de equilíbrio triangulares são instáveis quando os valores próprios do sistema linearizado verificam a condição  $\beta_1/\beta_2 = 1/2$  ou a condição  $\beta_1/\beta_2 = 1/3$ .

## Capítulo 5

# Estabilidade não-linear dos pontos de equilíbrio

O PTCR planar é um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade, pois as equações que definem o movimento do corpo de massa infinitesimal são da forma  $\dot{\vec{x}} = \mathcal{T}H_{\vec{x}}$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ . O polinómio característico que se obtém com a linearização de um sistema Hamiltoniano na vizinhança de um ponto de equilíbrio é uma função par e, por esse motivo, os valores próprios surgem em pares de números simétricos. Na primeira secção deste capítulo mostra-se que a existência de um valor próprio com parte real positiva implica a instabilidade do respectivo ponto de equilíbrio, estando nesta situação os pontos colineares e os pontos triangulares hiperbólicos.

A estabilidade dos pontos de equilíbrio elípticos, que são linearmente estáveis, será abordada através do estudo da forma normal de Birkhoff, que corresponde à parametrização do toro, sendo esta obtida por meio de transformações canónicas que envolvem séries. Estas séries não são, em geral, convergentes. No entanto, é possível, independentemente da convergência da transformação canónica, estudar a estabilidade do sistema não-linear na vizinhança dos pontos elípticos do PTCR no plano, por aplicação do teorema de Arnold-Moser, válido para sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade. A aplicação ao PTCR planar deve-se a Leontovitch [22], que mostrou a estabilidade dos pontos para razões de massas  $0 < \mu_2 \leq \mu_{2,3}$  excepto num conjunto de medida nula, aplicando o teorema de Arnold, e a Deprit & Deprit [13] que mostraram a estabilidade para  $0 < \mu_2 < \mu_{2,3}$  excepto três valores de  $\mu_2$ , por aplicação do teorema de Arnold-Moser. Dois dos valores de  $\mu_2$  excluídos correspondem a ressonâncias entre os valores próprios  $2 : 1$  e  $3 : 1$ . Markeev [25] apresentou critérios para averiguar a estabilidade ou instabilidade de pontos de equilíbrio de sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade nos casos de ressonâncias  $2 : 1$  e  $3 : 1$  e aplicou-os ao PTCR planar, demonstrando a instabilidade dos respectivos pontos triangulares. São apresentados, neste capítulo, os critérios de instabilidade e a demonstração de Markeev. Nesta demonstração é utilizado o teorema de Cetaev, sendo, por

isso, demonstrado este resultado. Por fim, o outro valor de massa  $\mu_2$  excluído também foi estudado por Markeev[6], demonstrando a sua estabilidade.

O estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrio elípticos do PTCR será realizado através da aplicação de resultados gerais para sistemas Hamiltonianos previamente apresentados. O teorema de Birkhoff será estabelecido para sistemas Hamiltonianos com  $N$  graus de liberdade e os restantes teoremas da secção para sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade.

## 5.1 Pontos de equilíbrio colineares e triangulares hiperbólicos

No capítulo 3 determinaram-se os valores próprios do sistema linearizado do PTCR planar, na vizinhança dos pontos de equilíbrio colineares, os pontos  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , obtendo-se dois valores próprios reais simétricos,  $\pm\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , e dois valores próprios imaginários puros conjugados,  $\pm\beta\mathcal{I}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^+$  e concluiu-se a instabilidade linear. A instabilidade não-linear será obtida através do seguinte resultado:

**Teorema 3** *Considere-se o sistema de EDOs (1.23),  $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t)) \wedge \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ , escrito na forma*

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{G}(\vec{x}) \quad (5.1)$$

tal que

- a matriz  $A = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_E) \right)_{i,j=1,\dots,n}$  tem pelo menos um valor próprio com parte real positiva e é diagonalizável;
- a função  $\vec{G}: O \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$ ;
- $\lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\vec{G}(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|} = 0$ ;

então o ponto de equilíbrio  $\vec{x}_E$  é instável, segundo Lyapunov.

**Demonstração:**

- Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  os valores próprios da matriz  $A$  com parte real positiva tal que para todo  $i = 1, \dots, s$ ,  $Re(\lambda_i) \geq \rho > 0$ .
- Sejam  $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n$  os valores próprios da matriz  $A$  com parte real negativa ou zero, isto é  $Re(\lambda_i) \leq 0$ , para todo  $i = s+1, \dots, n$ .
- Seja  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_s, y_{s+1}, \dots, y_n)$  e  $\|\vec{y}\|^2 = R^2 + r^2$ , com  $R^2 = \sum_{i=1}^s |y_i|^2$  e  $r^2 = \sum_{i=s+1}^n |y_i|^2$ .
- Seja  $D = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$  uma matriz diagonal  $n \times n$ .



- Seja  $C$  uma matriz  $n \times n$  invertível tal que  $C^{-1}AC = D$ .

Assim sendo, a transformação  $\vec{x} = C\vec{y}^T$  permite escrever a equação (5.1) da seguinte forma:

$$\dot{\vec{y}} = C^{-1}AC\vec{y} + C^{-1}\vec{G}(C\vec{y}). \quad (5.2)$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|y_i|^2 &= \frac{d}{dt}(y_i\bar{y}_i) = \dot{y}_i\bar{y}_i + y_i\dot{\bar{y}}_i \\ &= C^{-1}ACy_i\bar{y}_i + (C^{-1}\vec{G}(Cy))_i\bar{y}_i + y_i\overline{C^{-1}ACy_i} + y_i\overline{(C^{-1}\vec{G}(Cy))_i} \\ &= C^{-1}ACy_i\bar{y}_i + C^{-1}ACy_i\bar{y}_i + (C^{-1}\vec{G}(Cy))_i\bar{y}_i + y_i(C^{-1}\vec{G}(Cy))_i \\ &= 2Re(\lambda_i)|y_i|^2 + (C^{-1}\vec{G}(Cy))_i\bar{y}_i + y_i(C^{-1}\vec{G}(Cy))_i \end{aligned}$$

Pretende-se mostrar que

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 : t \geq t_0, \|\vec{y}_0\| \leq \delta \wedge \|\vec{y}(t, \vec{y}_0)\| \geq \epsilon$$

Pela terceira condição do teorema, escolhendo  $0 < \epsilon \leq \frac{\rho}{2}$ ,  $\delta > 0$  tal que para  $t \geq t_0$   $\|\vec{y}_0\| \leq \delta$ , tem-se que:

$$|(C^{-1}\vec{G}(C\vec{y}))_i| \leq \epsilon|y_i|.$$

Nestas condições, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(R^2 - r^2) &\geq \sum_{i=1}^s (2Re(\lambda_i) - 2\epsilon|y_i|^2) - \sum_{i=s+1}^n (2Re(\lambda_i) + 2\epsilon|y_i|^2) \\ &\geq 2\epsilon(R^2 - r^2). \end{aligned}$$

A solução da equação diferencial  $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(R^2 - r^2) = \epsilon(R^2 - r^2)$ , com condição inicial

$$(R^2 - r^2)|_{t=t_0} = \nu, \nu > 0$$

é dada por

$$R^2 - r^2 = \nu e^{2\epsilon(t-t_0)}.$$

Então,  $\|\vec{y}\| \geq |R^2 - r^2| \geq \nu e^{2\epsilon(t-t_0)}$ , concluindo-se a instabilidade do ponto de equilíbrio.  $\diamond$

**Proposição 13** *Os pontos de equilíbrio colineares são instáveis, segundo Lyapunov.*

**Demonstração:**

Pela proposição 11 e pelo teorema 3, conclui-se que o respectivo sistema é instável na vizinhança dos pontos de equilíbrio colineares.  $\diamond$

**Proposição 14** *Os pontos de equilíbrio triangulares do sistema de três corpos restrito são instáveis segundo Lyapunov, se  $\mu_{2,3} < \mu_2 \leq 1/2$ .*

**Demonstração:**

Os valores próprios do sistema linearizado do PTCR, para  $\mu_{2,3} < \mu_2 \leq 1/2$ , são da forma  $\pm\alpha \pm \beta\mathcal{I}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ . Pelo teorema 3, conclui-se que o PTCR planar é instável na vizinhança de cada ponto de equilíbrio triangular hiperbólico.  $\diamond$

Concluiu-se a instabilidade dos pontos colineares e dos pontos triangulares hiperbólicos, que mantêm a instabilidade linear, utilizando teoremas gerais das EDOs. O estudo da estabilidade dos pontos triangulares elípticos resultará da aplicação de teoremas obtidos para sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade.

## 5.2 Pontos de equilíbrio elípticos

As formas normais são utilizadas na mecânica Hamiltoniana para estudar a estabilidade na vizinhança de pontos de equilíbrio, de órbitas periódicas e de toros invariantes. Estas formas providenciam aproximações à dinâmica das soluções de sistemas de EDOs lineares, até uma determinada ordem finita. Neste caso, o sistema correspondente à forma normal é integrável e é possível obter informações acerca do respectivo sistema não-linear. O Teorema de Birkhoff demonstra a existência e unicidade de uma transformação canónica que permite transformar uma função Hamiltoniana de um sistema com  $N$  graus de liberdade na sua forma normal até termos de uma determinada ordem. As transformações canónicas e a utilização de funções geradoras foram estudadas no primeiro capítulo e serão utilizadas na demonstração do teorema de Birkhoff.

**Definição 13** (*Função analítica*) Seja  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\vec{y}_0 \in \Omega$  e  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Diz-se que  $g$  é analítica em  $\vec{y}_0$  se existir  $\delta > 0$  tal que para

$$\forall \vec{y} \in \Omega \cap \{\vec{w} \in \Omega : \|\vec{w} - \vec{y}_0\| \leq \delta\},$$

$g$  é igual à sua série de Taylor em  $\vec{y}_0$ . Diz-se que  $g$  é analítica em  $\Omega$  se for analítica em todos os pontos de  $\Omega$ .

**Definição 14** (*Forma Normal de Birkhoff*) Seja  $H(\vec{q}, \vec{p})$  uma função Hamiltoniana tal que:

- os valores próprios do sistema linear são distintos e da forma  $\pm\beta_j\mathcal{I}$ ,  $j = 1, \dots, N$ ;
- $H(\vec{q}, \vec{p}) = \sum_{s=2}^{+\infty} H_s(\vec{q}, \vec{p})$  representa o desenvolvimento de  $H$  em série de potências nas variáveis  $q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N$  e  $H_s$  contém apenas termos de grau  $s$ ;
- $K(\vec{Q}, \vec{P}) = \sum_{s=2}^{+\infty} K_s(\vec{Q}, \vec{P})$  é uma série de potências nas variáveis  $Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N$ , obtida pela transformação canónica  $(\vec{q}, \vec{p}) = (\Psi(\vec{Q}, \vec{P}), \Phi(\vec{Q}, \vec{P}))$ ;

- $e$ ,  $(\vec{w}, \vec{z})$  são as variáveis que se relacionam com  $(\vec{Q}, \vec{P})$  da forma  $Q_j = w_j + \mathcal{I}z_j$ ,  $P_j = w_j - \mathcal{I}z_j$  e, com  $\tau_j = \frac{1}{2}(w_j^2 + z_j^2)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , pode definir-se  $\vec{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ .

A forma normal de Birkhoff de grau  $s$  para a função Hamiltoniana  $H$  é o polinómio de grau  $s$  nas variáveis  $(\vec{Q}, \vec{P})$  e de grau  $s/2$  nas variáveis  $\vec{\tau}$  tal que, em coordenadas polares  $(\vec{\tau}, \vec{\theta})$  dadas por  $(\vec{w}, \vec{z}) = (\sqrt{2\tau_1}\cos\theta_1, \dots, \sqrt{2\tau_N}\cos\theta_N, \sqrt{2\tau_1}\sin\theta_1, \dots, \sqrt{2\tau_N}\sin\theta_N)$ ,

$$\mathcal{K}(\vec{\tau}) = \mathcal{K}_2(\vec{\tau}) + \sum_{s=3}^{+\infty} \mathcal{K}_s(\vec{\tau}) = \sum_{j=1}^N \beta_j \tau_j + \sum_{s=3}^{+\infty} \mathcal{K}_s(\vec{\tau}). \quad (5.3)$$

De acordo com a definição anterior, o Hamiltoniano  $H$  de um sistema autónomo com 2 graus de liberdade, até grau 2 nas variáveis  $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$  escreve-se na forma

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_4 = \beta_1 \tau_1 + \beta_2 \tau_2 + \nu_{11} \tau_1^2 + \nu_{12} \tau_1 \tau_2 + \nu_{22} \tau_2^2.$$

O termo  $\mathcal{K}_2$  da forma normal corresponde à diagonalização da matriz  $\mathcal{T}A$  do sistema de EDOs (4.2). É, por isso, demonstrado na proposição seguinte que existe uma transformação canónica que transforma  $H_2$  na sua forma normal.

**Proposição 15** *Existe uma matriz  $R$  invertível tal que  $\vec{\xi} = R\vec{\eta}$  transforma o sistema (4.2),  $\dot{\vec{\xi}} = \mathcal{T}H_{\vec{\xi}}$  de Hamiltoniano  $H(\vec{\xi})$ , no sistema  $\dot{\vec{\eta}} = \mathcal{T}K_{\vec{\eta}}$  de Hamiltoniano  $K(\vec{\eta})$  tal que o termo  $K_2$  do desenvolvimento em série de  $K$ , obtido em (4.1), pode escrever-se na sua forma normal*

$$K_2 = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_i P_i, \quad (5.4)$$

com  $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_{2N}) = (Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N)$ .

### Demonstração:

Como os valores próprios  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  têm multiplicidade 1 e estão ordenados como em (4.3), definindo a matriz diagonal  $D_0 = [\lambda_1, \dots, \lambda_N]$ , representa-se a matriz dos valores próprios da forma  $D = \begin{pmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & -D_0 \end{pmatrix}$ . Seja  $C$  uma matriz  $2N \times 2N$  invertível que diagonaliza  $\mathcal{T}A$ . Então

$$C^{-1} \mathcal{T}AC = D \Rightarrow \mathcal{T}AC = CD. \quad (5.5)$$

Como

- a matriz  $D$  é diagonal,  $D^T = D$ ;
- $\mathcal{T}^T = \mathcal{T}^{-1} = -\mathcal{T}$ ;
- a matriz  $A$  é simétrica,  $A^T = A$ ;

da relação (5.5) vem que

$$(\mathcal{T}AC)^T = (CD)^T \Rightarrow C^T AT = -DC^T. \quad (5.6)$$

A matriz  $D\mathcal{T}^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & D_0 \\ D_0 & 0 \end{pmatrix}$  é simétrica, logo

$$D\mathcal{T}^{-1} = (D\mathcal{T}^{-1})^T = -\mathcal{T}^T D = \mathcal{T}D. \quad (5.7)$$

De (5.6) e de (5.7) resulta que

$$(\mathcal{T}^{-1}C^T\mathcal{T})\mathcal{T}A = \mathcal{T}C^T A = \mathcal{T}DC^T\mathcal{T} = D\mathcal{T}^{-1}C^T\mathcal{T} = D(\mathcal{T}^{-1}C^T\mathcal{T}).$$

Definindo a matriz  $B = (\mathcal{T}^{-1}C^T\mathcal{T})^{-1}$ ,  $\det(B) \neq 0$ , obtém-se

$$B^{-1}\mathcal{T}AB = D, \quad (5.8)$$

o que significa que  $B$  também é uma matriz invertível que diagonaliza  $\mathcal{T}A$ . Seja a matriz

diagonal invertível  $G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$ . Pretende-se mostrar que  $BG$  verifica a relação (5.5).

Assim, utilizando-se a igualdade (5.8) e o facto de as matrizes  $D$  e  $G$  serem diagonais, vem que  $(BG)^{-1}\mathcal{T}A(BG) = G^{-1}(B^{-1}\mathcal{T}AB)G = G^{-1}DG = D$ , o que implica que  $C = BG$ . Por definição de  $B$ ,  $C^T = \mathcal{T}B^{-1}\mathcal{T}^{-1}$  e

$$C^T\mathcal{T}C = \mathcal{T}B^{-1}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}C = \mathcal{T}B^{-1}C = \mathcal{T}G. \quad (5.9)$$

Por outro lado,  $(C^T\mathcal{T}C)^T = C^T\mathcal{T}^T C = -C^T\mathcal{T}C$ , logo  $(\mathcal{T}G)^T = -\mathcal{T}G \Rightarrow G_1 = G_2$ .

Definindo a matriz

$$F = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

obtém-se que  $F^T\mathcal{T}F = \mathcal{T}G$ . De (5.9) e de (5.10) resulta que  $F^T\mathcal{T}F = C^T\mathcal{T}C$ , então  $(FC^{-1})\mathcal{T}(FC^{-1}) = \mathcal{T}$ , ou seja, a matriz  $R = FC^{-1}$  é simpléctica e diagonaliza  $\mathcal{T}A$ :

$$R^{-1}\mathcal{T}AR = (CF^{-1})^{-1}\mathcal{T}A(CF^{-1}) = F(C^{-1}\mathcal{T}AC)F^{-1} = FDF^{-1} = D.$$

A transformação  $\vec{\xi} = R\vec{\eta}$  é canónica, uma vez que a relação (5.5) permanece invariante para  $R$ . Por fim,  $R^T AR = -R^T\mathcal{T}RD = -\mathcal{T}D$ .

Definindo o vector  $\vec{\eta} = (Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N)$ , faz-se a substituição  $\vec{\xi} = R\vec{\eta}$  e o sistema  $\dot{\vec{\xi}} = \mathcal{T}H_{\vec{\xi}}$  transforma-se no sistema  $\dot{\vec{\eta}} = \mathcal{T}K_{\vec{\eta}}$  e

$$H_2(\vec{\xi}) = \frac{1}{2}\vec{\xi}^T A\vec{\xi} = \frac{1}{2}\vec{\eta}^T R^T AR\vec{\eta} = -\frac{1}{2}\vec{\eta}^T \mathcal{T}D\vec{\eta} = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_i P_i. \diamond \quad (5.11)$$

Como  $H$  é real, então a respectiva forma normal também tem de ser real. Desta condição resulta que as variáveis  $(\vec{Q}, \vec{P})$ , obtidas em (5.11) são números complexos e relacionam-se da forma  $P_j = \mathcal{I}\vec{Q}_j$ . Então, de acordo com a definição 14, a diagonalização da matriz  $\mathcal{T}A$  determina a forma normal de  $H_2$ .

A diagonalização de  $H_2$  permite observar o sinal da parte quadrática do Hamiltoniano  $H$  e se esta tiver sinal definido, positivo ou negativo, a estabilidade dos pontos de equilíbrio elípticos é garantida pelo teorema de Lagrange-Dirichlet.

**Teorema 4** (*Lagrange-Dirichlet*) *Se a parte quadrática  $H_2$  do Hamiltoniano tem sinal positivo ou sinal negativo, então o ponto de equilíbrio é estável.*

**Demonstração:**

Seja  $\vec{x}(t)$  uma solução de  $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$  com condição inicial  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ . O ponto de equilíbrio  $\vec{x}_E = \vec{0}$  é estável se e só se  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|\vec{x}_0\| < \delta \implies \|\vec{x}(t)\| < \epsilon$ .

Sejam  $\varrho$  e  $\nu$  constantes positivas tais que, para  $H_2 > 0$ ,  $\varrho\|\vec{x}_0\|^2 \leq H_2 \leq \nu\|\vec{x}_0\|^2$  e  $\delta = \frac{\epsilon}{2}\sqrt{\frac{\varrho}{\nu}}$ . Para  $\|\vec{x}_0\|$  suficientemente pequeno  $\frac{\varrho}{2}\|\vec{x}_0\|^2 \leq H \leq 2\nu\|\vec{x}_0\|^2$ . Como  $\|\vec{x}_0\| < \delta$ , então  $\frac{\varrho}{2}\|\vec{x}_0\|^2 \leq H < 2\nu\delta^2$ . Sendo  $H$  um integral do movimento, conclui-se que:

$$\frac{\varrho}{2}\|\vec{x}(t)\|^2 \leq H < 2\nu\delta^2 \implies \|\vec{x}(t)\| < 2\sqrt{\frac{\nu}{\varrho}}\delta \implies \|\vec{x}(t)\| < \epsilon,$$

isto é, se  $H_2 > 0$  então o ponto de equilíbrio é estável e, de modo análogo se mostra o resultado para  $H_2 < 0$ .  $\diamond$

O critério de estabilidade estabelecido no teorema anterior não pode ser aplicado ao PTCR planar, pois a parte quadrática  $H_2 = \beta_1\tau_1 - \beta_2\tau_2$  não tem sinal definido. Isto não significa a instabilidade dos pontos de equilíbrio elípticos, como se verá através do teorema de Arnold-Moser. Para aplicar o teorema de Arnold-Moser ao PTCR planar é necessário proceder à normalização dos termos de ordem superior a 2, estabelecendo a forma normal de Birkhoff até ordem 4.

Após determinada a forma normal para os termos de  $H$  de grau 2, para o caso geral de um sistema  $2N$  dimensional, que resultam da segunda derivada de  $H$ , determinam-se os termos de ordem  $s > 2$  por um processo indutivo, supondo que os termos de  $H_2, \dots, H_{s-1}$  já estão definidos. A forma normal a ser construída é obtida através da expansão de  $H$  em termos de  $Q_j$  e  $P_j$ , usando as variáveis complexas  $Q_j = w_j + \mathcal{I}z_j$ ,  $P_j = w_j - \mathcal{I}z_j$ , para  $j = 1, \dots, N$ . Os termos da série têm a forma geral

$$Q^a P^b = \prod_{j=1}^N Q_j^{a_j} P_j^{b_j}.$$

Este processo indutivo constitui a demonstração do Teorema de Birkhoff, apresentado a seguir, para o qual é necessário o conceito de ressonância entre os valores próprios.

**Definição 15** (*Ressonância*) *Seja  $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  o vector de  $N$  valores próprios imaginários puros (os restantes são os simétricos de  $\vec{\lambda}$  e estão ordenados como em (4.3)), obtidos após diagonalização da matriz  $\mathcal{T}A$ . Os valores próprios dizem-se ressonantes de ordem  $s$  se existir  $\vec{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_N)$  tal que*

$$\langle \vec{\kappa}, \vec{\lambda} \rangle = \sum_{j=1}^N \kappa_j \lambda_j = 0 \wedge \sum_{j=1}^N |\kappa_j| = s, \kappa_i \in \mathbb{Z}. \quad (5.12)$$

**Teorema 5** (Birkhoff) *Se os valores próprios do sistema (4.2) não satisfazem nenhuma condição de ressonância (5.12) até ordem  $r + 1$ , então existe uma transformação canónica na vizinhança da origem, tal que  $H$  se reduz à forma normal de Birkhoff de grau  $r$  com precisão de ordem  $r + 1$ .*

**Demonstração:** (Siegel [32])

A demonstração consiste em determinar por indução a transformação canónica que converte o Hamiltoniano  $H$  na respectiva forma normal de Birkhoff. Definindo-se a função geradora

$$G(\vec{q}, \vec{P}) = \sum_{j=1}^N q_j P_j + \sum_{s=3}^{+\infty} G_s$$

em que  $G_s$  é um polinómio homogéneo de grau  $s$  nas variáveis  $q_j, P_j, j = 1, \dots, N$ . Verifica-se que  $G$  é consistente para  $G_2$ , pois  $H_2(\vec{q}, \vec{p})$  já está na forma normal. As variáveis  $(\vec{q}, \vec{p})$  e  $(\vec{Q}, \vec{P})$  relacionam-se através de

$$\vec{p} = \frac{\partial G}{\partial \vec{q}} \wedge \vec{Q} = \frac{\partial G}{\partial \vec{P}}$$

ou ainda

$$Q_j = q_j + \sum_{s=3}^{+\infty} G_{sP_j} \wedge p_j = P_j + \sum_{s=3}^{+\infty} G_{sq_j}, \quad G_{sP_j} = \frac{\partial G_s}{\partial P_j}, \quad G_{sq_j} = \frac{\partial G_s}{\partial q_j}. \quad (5.13)$$

A transformação canónica

$$(\vec{q}, \vec{p}) = (\Psi(\vec{Q}, \vec{P}), \Phi(\vec{Q}, \vec{P}))$$

define-se como

$$q_j = Q_j + \sum_{s=2}^{+\infty} \Psi_{js}(\vec{Q}, \vec{P}) \wedge p_j = P_j + \sum_{s=2}^{+\infty} \Phi_{js}(\vec{Q}, \vec{P}), \quad j = 1, \dots, N, \quad (5.14)$$

sendo  $\Psi_s(\vec{Q}, \vec{P})$  e  $\Phi_s(\vec{Q}, \vec{P})$  polinómios homogéneos de grau  $s$  nas variáveis  $Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N$ .

A função  $H(\vec{q}, \vec{p})$  pode escrever-se em função de  $(\vec{Q}, \vec{P})$  e nesse caso, obtém-se

$$H(\vec{Q}, \vec{P}) = H(\Psi(\vec{Q}, \vec{P}), \Phi(\vec{Q}, \vec{P})) = \sum_{j=1}^N \lambda_j Q_j P_j + \sum_{s=3}^{+\infty} K_s(\vec{Q}, \vec{P}) \quad (5.15)$$

sendo

$$K_s = K'_s + K''_s = \sum_{j=1}^N \lambda_j \left( Q_j G_{sq_j}(\vec{Q}, \vec{P}) - P_j G_{sP_j}(\vec{Q}, \vec{P}) \right) + K''_s$$

tal que  $G_{sq_j}(\vec{Q}, \vec{P})$  representa o polinómio de termos com grau  $s - 1$  que resultam da substituição de  $\vec{q}$  em  $G_{sq_j}(\vec{q}, \vec{P})$  por  $\Psi(\vec{Q}, \vec{P})$ . De igual forma se obtém os termos de  $G_{sP_j}(\vec{Q}, \vec{P})$  de grau  $s - 1$ . O polinómio  $K'_s$  resulta da extracção dos termos de grau  $s$ ,

obtidos por desenvolvimento de  $H_2(\Psi(\vec{Q}, \vec{P}), \Phi(\vec{Q}, \vec{P}))$  e  $K_s''$  são termos de grau  $s$  extraídos de produtos de  $G_3, \dots, G_{s-1}$  e da substituição de variáveis em  $H_3, \dots, H_s$ .

Supondo que os termos  $G_2, \dots, G_{s-1}$  de  $G$  já estão determinados e que  $K_2 + K_3 + \dots + K_{s-1}$  já está na forma pretendida, determinam-se os termos de  $K_s$ . Como os monómios de  $G_s(\vec{Q}, \vec{P})$  se podem escrever na forma

$$\mathcal{P} = \omega_{a_j b_j} \prod_{a_j + b_j = s} Q_j^{a_j} P_j^{b_j}, \quad j = 1, \dots, N \quad (5.16)$$

deduz-se que

$$\begin{aligned} K_s &= \sum_{j=1}^N \lambda_j \left[ \omega_{a_j b_j} a_j Q_j \prod_{j=1}^N Q_j^{a_j - 1} P_j^{b_j} - \omega_{a_j b_j} b_j P_j \prod_{j=1}^N Q_j^{a_j} P_j^{b_j - 1} \right] + K_s'' \\ &= \sum_{j=1}^N \lambda_j (a_j - b_j) \mathcal{P} + K_s''. \end{aligned}$$

Considerando que os coeficientes dos monómios de parte literal igual a  $\mathcal{P}$  que surgem em  $K_s''$  são da forma  $\hbar_{a_j b_j}$  e que os valores próprios não são ressonantes, todos os termos podem ser eliminados, à excepção dos termos em que  $a_j = b_j$  para todo  $j = 1, \dots, N$ , tal que

$$\omega_{a_j b_j} = - \frac{\hbar_{a_j b_j}}{\sum_{a_j + b_j = s} (a_s - b_s) \lambda_j}. \quad (5.17)$$

Assim sendo, se  $s$  for ímpar, os termos de  $K_s$  podem ser todos eliminados. Se  $s$  for par, podem eliminar-se todos os termos excepto os que são do tipo  $\mathcal{P}$ , com  $a_j = b_j$  para todo  $j = 1, \dots, N$ .

Os coeficientes dos termos da forma  $Q_j^{a_j} P_j^{b_j}$ ,  $a_j = b_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  determinam-se de modo que não existam na expressão

$$\begin{aligned} \Gamma &= (Q_1 \dots Q_N P_1 \dots P_N) \mathcal{T} (q_1 \dots q_N p_1 \dots p_N)^T = \sum_{j=1}^N (p_j Q_j - q_j P_j) \\ &= \sum_{j=1}^N \left[ Q_j \sum_{s=3}^{+\infty} G_{s q_j}(\vec{q}, \vec{P}) + P_j \sum_{s=3}^{+\infty} G_{s p_j}(\vec{q}, \vec{P}) \right]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Após a substituição de  $\vec{q}$  na expressão (5.18) por  $\Psi(\vec{Q}, \vec{P})$  e extraíndo os monómios de grau  $s$  obtém-se

$$\Gamma_s = \Gamma'_s + \Gamma''_s = \sum_{j=1}^N \left[ Q_j G_{s q_j}(\vec{Q}, \vec{P}) + P_j G_{s p_j}(\vec{Q}, \vec{P}) \right] + \Gamma''_s = \sum_{j=1}^N s G_s(\vec{Q}, \vec{P}) + \Gamma''_s,$$

surgindo a última igualdade do facto de ser possível escrever os monómios de  $G_s$  na forma (5.16).

Substituindo em (5.14)  $q_j$  e  $p_j$  pela igualdade definida em (5.13) obtém-se a relação

$$\sum_{s=2}^{+\infty} \left[ \Psi_{j s}(\vec{Q}, \vec{P}) + G_{s p_j}(\vec{q}, \vec{P}) \right] = 0 \wedge \sum_{s=2}^{+\infty} \left[ \Phi_{j s}(\vec{Q}, \vec{P}) + G_{s q_j}(\vec{q}, \vec{P}) \right] = 0$$

da qual se extraem apenas os monómios de grau  $s$  após a substituição de  $\vec{q}$  por  $\Psi(\vec{Q}, \vec{P})$ .  
 Extraíndo os termos de ordem  $s$  de

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{Q}, \vec{P}) + G_{s+1P_j}(\vec{Q}, \vec{P}) + \sum_{k=3}^s G_{k+1P_j}(\vec{Q}, \vec{P}) &= 0 \\ \Phi(\vec{Q}, \vec{P}) - G_{s+1Q_j}(\vec{Q}, \vec{P}) - \sum_{k=3}^s G_{k+1Q_j}(\vec{Q}, \vec{P}) &= 0\end{aligned}$$

determinam-se os termos de  $\Psi_s(\vec{Q}, \vec{P})$  e de  $\Phi_s(\vec{Q}, \vec{P})$ . Note-se que os coeficientes dos termos até ordem  $s$  de  $G$  e os termos até ordem  $s - 1$  de  $(\Psi, \Phi)$  são conhecidos.  $\diamond$

A ideia da forma normal de Birkhoff é conjugar o Hamiltoniano  $H$  a um outro Hamiltoniano  $K$  por um processo iterativo até obter a chamada forma normal do Hamiltoniano  $H$ . Seja  $K = K_0 + K_1$  a forma normal de  $H$ , sendo  $K_0$  a parte integrável até uma determinada ordem finita e  $K_1$  o resto não integrável. De facto  $K_0$  é uma série de potências que dependem apenas das acções,  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , (no caso de os valores próprios não estarem em ressonância), sendo estas  $N$  integrais do sistema  $K_0$ , logo o sistema  $K_0$  é integrável e descreve movimentos quase-periódicos no toro  $\vec{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  com frequências  $\frac{\partial K_0}{\partial \tau_j}$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Quando a transformação de Birkhoff converge, o processo para a obtenção da forma normal permite a integração do sistema não-linear na vizinhança do ponto de equilíbrio elíptico. No entanto, em geral, a transformação é divergente [32]. A divergência da transformação de Birkhoff deve-se, em parte, aos *denominadores pequenos* que surgem nos coeficientes dos seus monómios (5.17), obtidos à custa da divisão por  $\langle \vec{\kappa}, \vec{\lambda} \rangle$ .

O facto da transformação de Birkhoff divergir não é impedimento para estudar o comportamento das soluções do Hamiltoniano  $H$  na vizinhança do ponto de equilíbrio através da respectiva forma normal. As soluções do sistema não-linear  $H$  são aproximadas através das soluções de um sistema  $H^*$  que coincida até grau  $s$  com o sistema  $H$  e neste caso a transformação de Birkhoff é convergente, pois é truncada, deixando os termos de grau  $s > 1$ .

A estabilidade das soluções de equilíbrio elípticas no caso em que  $H_2$  não tem sinal definido, é garantida pelo teorema de Arnold-Moser, para quase todos os valores próprios e para sistemas Hamiltonianos com 2 graus de liberdade.

**Teorema 6** (Arnold-Moser) *Seja  $H$  a função Hamiltoniana de um sistema com dois graus de liberdade, expressa na forma normal de Birkhoff (5.3) tal que:*

1.  $H$  é analítica numa vizinhança da origem.
2. os valores próprios do correspondente sistema linearizado são da forma

$$\lambda_{1,3} = \pm\beta_1\mathcal{I} \text{ e } \lambda_{2,4} = \pm\beta_2\mathcal{I},$$



com  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^+$ ,  $\beta_1 \neq \beta_2$  e  $\mathcal{I} = \sqrt{-1}$

$$3. H_2(w_1, w_2) = \beta_1 w_1 - \beta_2 w_2.$$

$$4. H_4(w_1, w_2) = \frac{1}{2} [\nu_{11} w_1^2 + 2\nu_{12} w_1 w_2 + \nu_{22} w_2^2]$$

$$5. \kappa_1 \beta_1 - \kappa_2 \beta_2 = 0 \wedge \kappa_1 + \kappa_2 < 5, \text{ com } \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{Z}.$$

Se  $D = H_4(\beta_2, \beta_1) \neq 0$  então a origem é um ponto de equilíbrio estável segundo Lyapunov do sistema Hamiltoniano.

### Resumo da demonstração:

O espaço fase de um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade tem dimensão quatro. Como a superfície de energia tem dimensão três, é possível construir uma secção (ou mapa) de Poincaré do fluxo, que preserva a área, de dimensão dois. O teorema da existência de curvas invariantes garante a existência de curvas invariantes numa secção de Poincaré, na vizinhança de um ponto de equilíbrio. Uma órbita com condição inicial entre duas curvas invariantes é impedida de se afastar do ponto de equilíbrio, o que prova a estabilidade.

Ver [32]. $\diamond$

A estabilidade dos pontos de equilíbrio elípticos de um sistema Hamiltoniano conservativo com 2 graus de liberdade foi estabelecida por Arnold (1961) [5] substituindo a condição 5 do teorema por  $\kappa_1 \beta_1 - \kappa_2 \beta_2 = 0 \wedge \kappa_1 + \kappa_2 < +\infty$ . A aplicação do teorema de Arnold às soluções equilaterais do PTCR planar deve-se a Leontovitch (1962) [22] que verificou que  $D$  não é identicamente nulo em  $\mu_2$ , deduzindo que estas soluções são estáveis na generalidade das massas possíveis. Posteriormente, Moser observou que para assegurar a estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema Hamiltoniano com 2 graus de liberdade, era suficiente a condição 5 considerada no Teorema Arnold-Moser [4]. A determinação de  $D$  e dos valores de  $\mu_2$  para os quais os pontos equilaterais são estáveis, foi concretizada por Deprit & Deprit (1966) [13].

**Teorema 7** (Deprit) *Os pontos de equilíbrio triangulares do PTCR, com  $0 < \mu_2 < \frac{1}{2}$ , são estáveis para*

$$\mu_2 \in ]0, \mu_{2,0}[ \cup ]\mu_{2,0}, \mu_{2,1}[ \cup ]\mu_{2,1}, \mu_{2,2}[ \cup ]\mu_{2,2}, \mu_{2,3}[,$$

tal que:

$$\mu_{2,0} = \frac{1449 - \sqrt{1576995 + 966\sqrt{199945}}}{2898},$$

$$\begin{aligned}\mu_{2,1} &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{213}}{15} \right), \\ \mu_{2,2} &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{1833}}{45} \right), \\ \mu_{2,3} &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{69}}{9} \right).\end{aligned}$$

**Demonstração:**

Pela proposição 8 os valores próprios são imaginários puros distintos se  $\mu_2 < \mu_{2,3}$ . Assumindo que  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ , os valores próprios são ressonantes se existirem dois números inteiros  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  tais que

$$\lambda_1 \kappa_2 + \lambda_2 \kappa_1 = 0 \wedge |\kappa_1| + |\kappa_2| \leq 4.$$

Então, os valores próprios no intervalo  $]0, \mu_{2,3}[$  estão em ressonância nos casos em que  $\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{2}{1}$  e em que  $\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{3}{1}$ .

- Ressonância  $\frac{2}{1}$ .

Os valores próprios são tais que:  $\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \wedge \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = -1 \iff \lambda_2^2 = -\frac{1}{5}$ .

Utilizando (4.13) obtém-se  $\lambda_2^2 = -\frac{1}{5} \iff \mu_2 = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\sqrt{1833}}{45} \right)$ . Os valores próprios são da forma

$$\lambda_1 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathcal{I} \wedge \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}\mathcal{I}.$$

- Ressonância  $\frac{3}{1}$ .

Os valores próprios são tais que:  $\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \wedge \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = -1 \iff \lambda_2^2 = -\frac{1}{10}$ .

Utilizando (4.13) obtém-se  $\lambda_2^2 = -\frac{1}{10} \iff \mu_2 = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\sqrt{213}}{15} \right)$ . Os valores próprios são da forma

$$\lambda_1 = -\frac{3\sqrt{10}}{10}\mathcal{I} \wedge \lambda_2 = \frac{\sqrt{10}}{10}\mathcal{I}.$$

Para que as condições do teorema de Arnold-Moser sejam satisfeitas, é necessário excluir do intervalo  $0 < \mu_2 < \mu_{2,3}$ , os valores  $\mu_{2,2} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{1833}}{45} \right) \approx 0.024294$  e  $\mu_{2,1} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{213}}{15} \right) \approx 0.013516$ . Os outros valores de ressonâncias que verificam a condição 4 do teorema de Arnold-Moser correspondem a valores de  $\mu_2 \notin ]0, \mu_{2,3}[$ .

Deprit & Deprit [13] calcularam a quantidade

$$D = -\frac{1}{8} \frac{36 - 541\lambda_1^2\lambda_2^2 + 644\lambda_1^4\lambda_2^4}{(1 - 4\lambda_1^2\lambda_2^2)(4 - 25\lambda_1^2\lambda_2^2)}$$

que se anula para os valores de

$$\mu_2 = \frac{1449 \pm \sqrt{1576995 \pm 966\sqrt{199945}}}{2898}.$$

Destes valores exclui-se

$$\mu_{2,0} = \frac{1449 - \sqrt{1576995 + 966\sqrt{199945}}}{2898} \approx 0.0109$$

por ser menor do que  $\mu_{2,3}$ . O gráfico de  $D$  em função de  $\mu_2$  pode ser observado na figura 5.1. Como  $D \neq 0$ , para os valores de  $\mu_2$  considerados no teorema conclui-se que os pontos de equilíbrio triangulares são estáveis.  $\diamond$

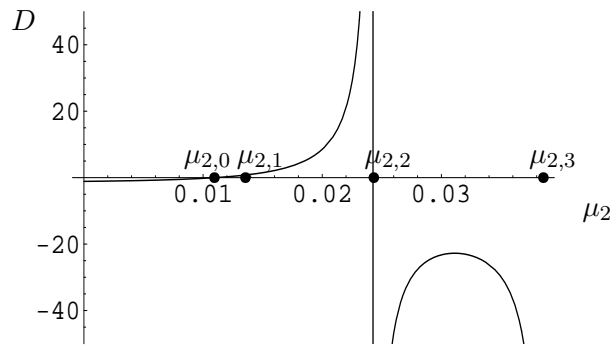


Figura 5.1: Gráfico do determinante  $D$  em função da massa  $\mu_2$ .

Em relação à estabilidade dos pontos de equilíbrio triangulares nos casos de ressonância  $2 : 1$  e  $3 : 1$ , é possível estudá-la a partir de dois teoremas estabelecidos por Markeev [25]. Markeev também provou a estabilidade dos pontos triangulares do PTCR planar para  $\mu_2 = \mu_{2,0}$  [6]. Os teoremas de Markeev, e o teorema de Arnold-Moser foram generalizados por Cabral e Meyer (1998) [12]. O estudo da estabilidade, no caso de ressonâncias, pode ser realizado através da transformação do sistema não-linear numa forma normal por um processo análogo ao utilizado na demonstração do Teorema de Birkhoff para a ausência de ressonância. No entanto, os termos correspondentes aos casos de ressonância não podem ser eliminados e, em caso de transformação para coordenadas polares, aparecem termos que dependem da variável ângulo.

A seguir é apresentado o teorema de Cetaev que será utilizado na demonstração dos critérios de instabilidade, estabelecidos por Markeev para os casos de ressonâncias entre os valores próprios  $2 : 1$  e  $3 : 1$ , para um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade.

**Teorema 8 (Cetaev)** *Sejam  $\vec{x}_E$  um ponto de equilíbrio da EDO (1.23) e  $V$  uma vizinhança de  $\vec{x}_E$ . Se existir um aberto  $V_1$  em  $V$  e uma função  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  de  $C^1$  com as seguintes propriedades:*

1.  $g(x) > 0$  e  $\dot{g}(x) > 0$ ,  $\forall x \in V_1$ ;

$$2. g(x) = 0, \forall x \in Fr(V_1) \cap V;$$

$$3. \vec{x}_E \in Fr(V_1);$$

então, o ponto de equilíbrio é instável.

**Demonstração:** Supondo por contradição que zero (assume-se  $\vec{x}_E = \vec{0}$ ) é um ponto de equilíbrio estável, então

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta < \epsilon : \|\vec{x}_0\| \leq \delta \implies \|\vec{x}(t, \vec{x}_0)\| \leq \epsilon, \forall t \geq 0.$$

Pela condição 1 do teorema, se  $\vec{x}_0 \in V_1$  e  $g(\vec{x}(t, \vec{x}_0)) \in V_1$  então  $g(\vec{x}(t, \vec{x}_0)) > g(\vec{x}_0)$ . Pode, então, definir-se o conjunto

$$R = \{\vec{x} \in V : \|\vec{x}\| \leq \epsilon \wedge g(\vec{x}(t, \vec{x}_0)) \geq g(\vec{x}_0)\}.$$

Como o conjunto  $R$  é compacto, a função  $\dot{g}$  assume um mínimo  $m > 0$  em  $R$ , pois a função  $\dot{g}$  é positiva em  $V_1$ . Então

$$g(\vec{x}(t, \vec{x}_0)) = g(\vec{x}_0) + \int_0^t \dot{g}(\vec{x}(s)) ds \geq g(\vec{x}_0) + \int_0^t m ds \geq g(\vec{x}_0) + mt. \quad (5.19)$$

Por outro lado, como o conjunto  $R$  é compacto, a função  $g$  tem um máximo  $M > 0$ , logo

$$g(\vec{x}(t)) \leq M \quad (5.20)$$

para todo  $t \geq 0$ . As condições (5.19) e (5.20) são contraditórias, logo a solução de equilíbrio é instável.  $\diamond$

**Teorema 9 (Markeev)** *Seja  $H = 2\beta_2\tau_1 - \beta_2\tau_2 + \delta\tau_1^{\frac{1}{2}}\tau_2\cos(\theta_1 + 2\theta_2) + O_4$  a forma normal de um sistema Hamiltoniano. Se  $\delta \neq 0$  então o ponto de equilíbrio é instável.*

**Demonstração:**

Para a ressonância 2 : 1 e para  $\lambda_{1,2} = \mathcal{I}\beta_{1,2}$ ,  $\beta_1 = 2\beta_2$  e é possível eliminar todos os termos de  $H$  de grau 3, à exceção daqueles em que  $\alpha_1 = 1 \wedge \beta_2 = 2$  ou  $\alpha_2 = 2 \wedge \beta_1 = 1$ . Markeev [25] determinou a transformação canónica que permite escrever o sistema  $H$  na respectiva forma normal

$$H = \lambda_1 q_1 p_1 + \lambda_2 q_2 p_2 + A q_1 p_2^2 + B q_2^2 p_1 + O_4,$$

onde  $A = x + \mathcal{I}y$  e  $B = -\frac{\beta_2^2}{2\beta_1}(y + \mathcal{I}x)$ . A mudança de coordenadas

$$(q_1, q_2, p_1, p_2) = \left( \beta_1^{-1/2}(q'_1 - \mathcal{I}p'_1), \beta_2^{-1/2}(\mathcal{I}q'_2 - p'_2), \frac{1}{2}\beta_1^{1/2}(-\mathcal{I}q'_1 + p'_1), \frac{1}{2}\beta_2^{1/2}(q'_2 - \mathcal{I}p'_2) \right)$$

transforma o Hamiltoniano  $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$  em

$$\begin{aligned} H(q'_1, q'_2, p'_1, p'_2) &= \frac{1}{2}\beta_1(q_1'^2 + p_1'^2) - \frac{1}{2}\beta_2(q_2'^2 + p_2'^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sqrt{2\beta_2} \left[ \frac{1}{2}(q_2'^2 - p_2'^2)(xq'_1 + yp'_1) + q_2'p_2'(yq'_1 - xp'_1) \right] + O_4 \end{aligned}$$

Supondo  $x^2 + y^2 \neq 0$  é possível a mudança de coordenadas

$$(q'_1, q'_2, p'_1, p'_2) = (Q_1 \cos \theta - P_1 \sin \theta, Q_2, Q_1 \sin \theta + P_1 \cos \theta, P_2),$$

com  $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \wedge \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$  e

$$\begin{aligned} H(Q_1, Q_2, P_1, P_2) &= \beta_2(Q_1^2 + P_1^2) - \frac{1}{2}(Q_2^2 + P_2^2) \\ &\quad - \frac{1}{2}\sqrt{2\beta_2(x^2 + y^2)} \left[ \frac{1}{2}Q_1(P_2^2 - Q_2^2) + P_1Q_2P_2 \right] + O_4. \end{aligned}$$

Seja

$$F(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = \frac{1}{2}P_1(P_2^2 - Q_2^2) - Q_1Q_2P_2.$$

Existe uma vizinhança  $\mathcal{V}$  do ponto de equilíbrio tal que no conjunto

$$V = \{(Q_1, Q_2, P_1, P_2) \in \mathcal{V} : Q_1 < 0, P_1 < 0, P_2 < Q_2 < 0\}$$

- a função  $F$  é positiva;
- $\dot{F}(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2\beta_2(x^2 + y^2)}(Q_2^2 + P_2^2) [(Q_2^2 + P_2^2) + 4(Q_1^2 + P_1^2)]$  é positiva, se  $x^2 + y^2 \neq 0$ ;
- se  $(Q_1, Q_2, P_1, P_2) \in Fr(V)$  então  $F(\vec{0}) = 0$ ;
- $\vec{0} \in Fr(V)$ , onde  $Fr(V)$  é a fronteira de  $V$ .

Estas condições verificam o teorema de Cetaev, logo a origem é instável.

Efectuando a mudança de coordenadas para as coordenadas polares

$$(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = (\sqrt{2\tau_1} \cos \theta_1, \sqrt{2\tau_2} \cos \theta_2, \sqrt{2\tau_1} \sin \theta_1, \sqrt{2\tau_2} \sin \theta_2)$$

o Hamiltoniano transforma-se em

$$H = 2\beta_2\tau_1 - \beta_2\tau_2 + \delta\tau_1^{\frac{1}{2}}\tau_2 \cos(\theta_1 + 2\theta_2) + O_4,$$

com  $\delta = \frac{1}{2}\sqrt{\beta_2(x^2 + y^2)}$ .  $\diamond$

**Teorema 10** *Os pontos de equilíbrio triangulares,  $L_4$  e  $L_5$ , do PTCR no plano, são instáveis, em caso de ressonância 2 : 1.*

**Demonstração:**

De acordo com Cabral e Meyer [12], o Hamiltoniano  $H$  pode escrever-se, até ordem 3 como

$$H = 2\frac{\sqrt{5}}{5}\tau_1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\tau_2 + \frac{11\sqrt{11}}{18\sqrt[4]{5}}\tau_1^{\frac{1}{2}}\tau_2 \cos(\theta_1 + 2\theta_2) + O_4$$

Pelo teorema anterior, o ponto de equilíbrio é instável, pois  $\delta = \frac{11\sqrt{11}}{18\sqrt[4]{5}}$ .  $\diamond$

**Teorema 11** (Markeev) *Seja*

$$H = 3\beta_2\tau_1 - \beta_2\tau_2 + \delta_1\tau_1^2 + \delta_2\tau_1\tau_2 + \delta_3\tau_2^2 + \delta_4\tau_1^{\frac{1}{2}}\tau_2^{\frac{3}{2}}\cos(\theta_1 + 3\theta_2) + O_5$$

a forma normal de um sistema Hamiltoniano quando os valores próprios estão em ressonância 3 : 1. Se

$$3\sqrt{3}|\delta_4| > |\delta_1 + 3\delta_2 + 9\delta_3|$$

então, o ponto de equilíbrio é instável.

**Demonstração:**

No caso da ressonância 3 : 1,  $\beta_1 = 3\beta_2$  e é possível eliminar todos os termos de  $H$  de grau 3 e os de grau 4, à exceção dos casos já conhecidos e dos casos em que os expoentes de  $Q_i^{a_i}P_i^{b_i}$  são da forma  $a_1 = 1 \wedge b_2 = 3$  ou  $a_2 = 3 \wedge b_1 = 1$ . Utilizando transformações canônicas semelhantes às utilizadas no teorema anterior, Markeev [25] determinou a forma normal de  $H$

$$H = \lambda_1q_1p_1 + \lambda_2q_2p_2 + Aq_1^2p_1^2 + Bq_1q_2p_1p_2 + Cq_2^2p_2^2 + Dq_1p_2^3 + Eq_2^3p_1 + O_5,$$

onde  $D = x + \mathcal{I}y$  e  $E = -\frac{1}{12}\beta_2^2(x - \mathcal{I}y)$ . A mudança de coordenadas

$$(q_1, q_2, p_1, p_2) = (\beta_1^{-1/2}(q'_1 - \mathcal{I}p'_1), \beta_2^{-1/2}(\mathcal{I}q'_2 - p'_2), \frac{1}{2}\beta_1^{1/2}(-\mathcal{I}q'_1 + p'_1), \frac{1}{2}\beta_2^{1/2}(q'_2 - \mathcal{I}p'_2))$$

transforma o Hamiltoniano  $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$  em

$$\begin{aligned} H(q'_1, q'_2, p'_1, p'_2) &= \frac{3}{2}\beta_2(q_1'^2 + p_1'^2) - \frac{1}{2}\beta_2(q_2'^2 + p_2'^2) \\ &\quad - \frac{1}{4}A(q_1'^2 + p_1'^2)^2 + \frac{1}{4}B(q_1'^2 + p_1'^2)(q_2'^2 + p_2'^2) - \frac{1}{4}C(q_2'^2 + p_2'^2)^2 \\ &\quad + \frac{1}{12}\sqrt{3}\beta_2 \left[ p_2'(p_2'^2 - 3q_2'^2)(xp'_1 - yq'_1) + q_2'(q_2'^2 - 3p_2'^2)(yp'_1 + xq'_1) \right] + O_5 \end{aligned}$$

Supondo  $x^2 + y^2 \neq 0$  é possível a mudança de coordenadas

$$(q'_1, q'_2, p'_1, p'_2) = (Q_1\cos\phi - P_1\sin\phi, Q_2, Q_1\sin\phi + P_1\cos\phi, P_2),$$

com  $\sin\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \wedge \cos\phi = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . O Hamiltoniano é transformado em

$$\begin{aligned} H(Q_1, Q_2, P_1, P_2) &= \frac{3}{2}\beta_2(Q_1^2 + P_1^2) - \frac{1}{2}\beta_2(Q_2^2 + P_2^2) - \frac{1}{4}A(Q_1^2 + P_1^2)^2 + \\ &\quad \frac{1}{4}B(Q_1^2 + P_1^2)(Q_2^2 + P_2^2) - \frac{1}{4}C(Q_2^2 + P_2^2) \\ &\quad + \frac{1}{12}\beta_2\sqrt{3(x^2 + y^2)} \left[ Q_1P_2(P_2^2 - 3Q_2^2) - P_1Q_2(Q_2^2 - 3P_2^2) \right] + O_5 \end{aligned}$$

As coordenadas polares

$$(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = (\sqrt{2r_1}\cos\theta_1, \sqrt{2r_2}\cos\theta_2, \sqrt{2r_1}\sin\theta_1, \sqrt{2r_2}\sin\theta_2)$$

transformam  $H(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$  em

$$H(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = 3\beta_2 r_1 - \beta_2 - Ar_1^2 + Br_1 r_2 - Cr_2^2 + \frac{1}{3}\beta_2 \sqrt{3(x^2 + y^2)} r_1^{\frac{1}{2}} r_2^{\frac{3}{2}} \sin(\theta_1 + 3\theta_2) + O_5$$

Por fim, a transformação canónica

$$(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{P}_1, \bar{P}_2) = (\theta_1 + 3\theta_2, -3\theta_1, \frac{1}{3}r_2, -\frac{1}{3}r_1 + \frac{1}{9}r_2)$$

permite escrever  $H(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$  como

$$H(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{P}_1, \bar{P}_2) = (-A + 3B - 9C)\bar{P}_1^2 + 3(2A - 3B)\bar{P}_1\bar{P}_2 - 9A\bar{P}_2^2 - 9\beta_2\bar{P}_2 + 3\beta_2\sqrt{x^2 + y^2}\bar{P}_1^{\frac{3}{2}}(\bar{P}_1 - 3\bar{P}_2)^{\frac{1}{2}} \sin \bar{Q}_1 + O_5$$

Seja

$$F(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{P}_1, \bar{P}_2) = 12\sqrt{3} \left[ (18\bar{P}_2)^2 - (6\bar{P}_1)^l \right] \bar{P}_1^{\frac{3}{2}} (\bar{P}_1 - 3\bar{P}_2)^{\frac{1}{2}} \cos \bar{Q}_1$$

Existe uma vizinhança  $\mathcal{V}$  do ponto de equilíbrio tal que no conjunto

$$V = \{(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{P}_1, \bar{P}_2) \in \mathcal{V} : -\frac{(6\bar{P}_1)^{\frac{l}{2}}}{18} < \bar{P}_2 < \frac{(6\bar{P}_1)^{\frac{l}{2}}}{18}, \bar{P}_1 > 0, \cos \bar{Q}_1 < 0\}$$

- a função  $F$  é positiva;
- para  $2 < l < 3$  e para  $P_2 = \frac{1}{18}R(6P_1)^{\frac{l}{2}}$ , com  $R \in ]-1, 1[$

$$\dot{F}(t) = 12\sqrt{3}[3l6^l\beta_2\sqrt{x^2 + y^2}\cos^2\bar{Q}_1 + 12(1 - R^2)(3\beta_2\sqrt{x^2 + y^2} + (-A + 3B - 9C)\sin \bar{Q}_1) + f(\bar{P}_1)]\bar{P}_1^{l+3}.$$

No desenvolvimento de  $\dot{F}(t)$  surgem expressões da forma  $(1 - \bar{P}_1^{l/2-1})^{1/2}$ . Como  $\dot{F}$  tem de ser positiva em  $V$ ,  $l > 2$ . Também surge a expressão  $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} R6^{(3l-9)/2}$  que toma valores positivos se  $l > 3$ .

Como  $f(\bar{P}_1)$  tende para zero, à medida que  $\bar{P}_1$  tende para zero,  $\dot{F}(t) > 0$  no conjunto  $V$  se

$$3\beta_2\sqrt{x^2 + y^2} \geq |-A + 3B - 9C|.$$

- se  $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{P}_1, \bar{P}_2) \in Fr(V)$  então  $F(\vec{0}) = 0$ ;
- $\vec{0} \in Fr(V)$ , onde  $Fr(V)$  é a fronteira de  $V$ .

Estas condições verificam o teorema de Cetaev, logo a origem é instável. A função Hamiltoniana  $H$  pode escrever-se como

$$H = 3\beta_2\tau_1 - \beta_2\tau_2 + \delta_1\tau_1^2 + \delta_2\tau_1\tau_2 + \delta_3\tau_2^2 + \delta_4\tau_1^{\frac{1}{2}}\tau_2^{\frac{3}{2}}\cos(\theta_1 + 3\theta_2) + O_5,$$

com  $\delta_4 = \frac{1}{3}\beta_2\sqrt{3(x^2 + y^2)}$ ,  $\delta_1 = -A$ ,  $\delta_2 = B$  e  $\delta_3 = -C$ . Assim sendo, o ponto de equilíbrio é instável se

$$3\sqrt{3}\delta_4 > |\delta_1 + 3\delta_2 + 9\delta_3|. \diamond$$

**Teorema 12** *Os pontos de equilíbrio triangulares,  $L_4$  e  $L_5$ , do PTCR são instáveis, em caso de ressonância 3 : 1.*

**Demonstração:**

De acordo com Cabral e Meyer [12], o Hamiltoniano  $H$  pode escrever-se como

$$H = \frac{3\sqrt{10}}{10}\tau_1 - \frac{\sqrt{10}}{10}\tau_2 + \frac{3\sqrt{14277}}{80}\tau_1^{\frac{1}{2}}\tau_2^{\frac{3}{2}}\cos(\theta_1 + 3\theta_2) + \frac{309}{2240}\tau_1^2 - \frac{1219}{560}\tau_1\tau_2 + \frac{79}{1120}\tau_2^2 + O_5,$$

verificando-se as condições do teorema 11, pois

$$3\sqrt{3}\delta_4 = 9\frac{\sqrt{42831}}{80} \approx 23.28$$

e

$$|\delta_1 + 3\delta_2 + 9\delta_3| = \frac{12897}{2240} \approx 5.76.$$

Logo, o ponto de equilíbrio é instável para  $\mu_2 = \mu_{2,1}$ .  $\diamond$

Os resultados obtidos por Arnold, Moser e Markeev são válidos para sistemas Hamiltonianos com 2 graus de liberdade. Estes resultados e a respectiva aplicação ao PTCR planar, realizada por Leontovitch, por Deprit & Deprit e por Markeev, encontram-se resumidos, por ordem cronológica, na tabela 5.1. Além dos resultados apresentados na tabela, Markeev [25] mostrou a estabilidade do PTCR planar correspondente à razão entre massas  $\mu_2 = \mu_{2,0}$ . Refira-se, ainda, que Sokolskii [33] apresentou critérios para averiguar a estabilidade ou a instabilidade para qualquer sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade, no caso em que os valores próprios têm módulos iguais, e os aplicou ao PTCR planar, concluindo a estabilidade dos pontos triangulares para o valor de  $\mu_{2,3}$ , correspondente à ressonância entre os valores próprios 1 : 1.

A estabilidade de um ponto de equilíbrio elíptico é um problema resolvido no caso de um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade por Arnold [5], Moser [32], Markeev[25] e Sokolskii[33]. Mais tarde, os resultado demonstrados por Arnold, Moser e Markeev foram generalizados por Cabral e Meyer [12].

### 5.3 Aplicações

A estabilidade linear dos pontos de equilíbrio elípticos do PTCR planar foi estabelecida para  $0 < \mu_2 < \mu_{2,3}$ . No entanto, como foi demonstrado a estabilidade linear não implica a estabilidade não linear, excluindo-se os valores de  $\mu_2$  que correspondem a ressonâncias entre os valores próprio 2 : 1 e 3 : 1. A instabilidade da órbita de um corpo  $C_3$ , hipotético, que se encontre na vizinhança do ponto  $L_4$  de um hipotético sistema de corpos  $C_1 - C_2$  tal que os valores próprios estão em ressonância 2 : 1, correspondendo a  $\mu_2 = \mu_{2,2}$ , pode ser



observado nas figuras 5.2 e 5.3. A trajetória de  $C_3$  encontra-se na vizinhança do ponto  $L_4$  até cerca de 2764 períodos orbitais de  $C_2$ . Não é conhecido no sistema solar nenhum par de corpos  $C_1 - C_2$  que corresponda a este valor de  $\mu_2$  para o qual o ponto  $L_4$  é instável.

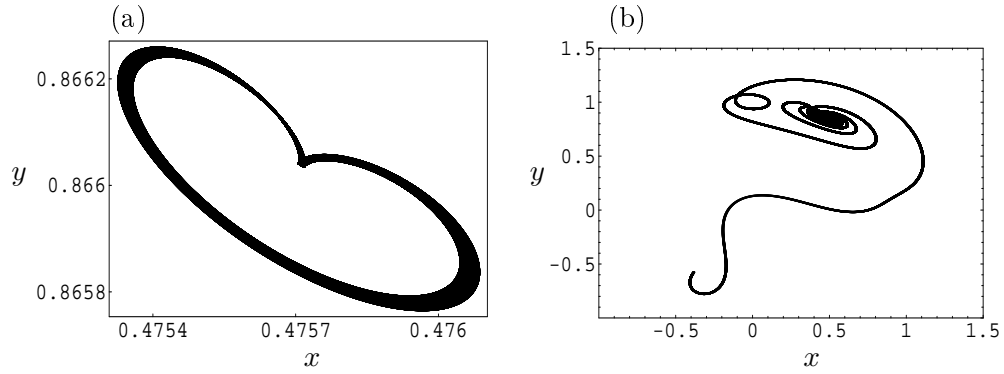


Figura 5.2: Solução numérica do PTCR planar para valores próprios em ressonância 2 : 1 e período de integração  $T$ , número de anos do corpo  $C_2$ , com (a)  $T \in [0, 250]$  e (b)  $T \in [2546, 2785]$ .

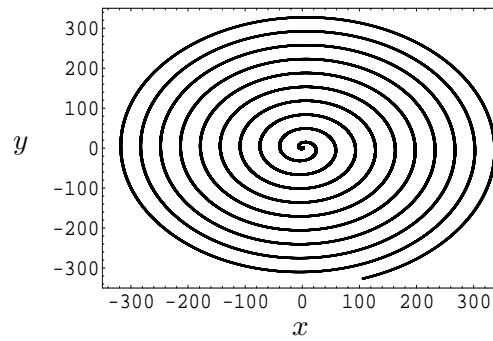


Figura 5.3: Solução numérica do PTCR planar para valores próprios em ressonância 2 : 1 e período de integração  $T$ , número de anos do corpo  $C_2$ , com  $T \in [2562, 2801]$ .

Ponto de equilíbrio elíptico	Sistema Hamiltoniano	Aplicação PTCR planar	Ponto de equilíbrio $L_4$ e $L_5$
estável se <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\kappa_1\beta_1 - \kappa_2\beta_2 \neq 0</math> e <math> \kappa_1  +  \kappa_2  &lt; +\infty</math></li> <li>• <math>D \neq 0</math></li> </ul>	Arnold (1961)	Leontovitch (1962)	estável para $\mu_2 \in ]0, \mu_{2,3}[$ excepto num conjunto de medida nula.
estável se <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\kappa_1\beta_1 - \kappa_2\beta_2 \neq 0</math> e <math> \kappa_1  +  \kappa_2  &lt; 5</math></li> <li>• <math>D \neq 0</math></li> </ul>	Arnold-Moser	Andrée e Bartholomé Deprit (1966)	estável para $\mu_2 \in ]0, \mu_{2,3}[$ excepto $\mu_{2,0}, \mu_{2,1}$ e $\mu_{2,2}$ .
instável se <ul style="list-style-type: none"> <li>• valores próprios em ressonância 2 : 1</li> <li>• <math>\delta \neq 0</math></li> </ul> instável se <ul style="list-style-type: none"> <li>• valores próprios em ressonância 3 : 1</li> <li>• <math> \delta_4  &gt; \frac{\sqrt{3}}{18} \delta_1 + 6\delta_2 + 9\delta_3 </math></li> </ul>	Markeev (1967)	Markeev (1969)	instável para $\mu_{2,2}$ .
		Markeev (1969)	instável para $\mu_{2,1}$ .

Tabela 5.1: Estudo analítico da estabilidade dos pontos de equilíbrio elípticos de um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade, no caso em que a parte quadrática  $H_2$  não tem sinal definido, com aplicação ao PTCR planar.

## Capítulo 6

# Caos, análise qualitativa e aplicações

Nos dois capítulos anteriores foi estudada a estabilidade segundo Lyapunov de soluções de equilíbrio do PTCR, no plano, no entanto, outras soluções podem ser estudadas como é o caso de órbitas periódicas, cuja estabilidade também é possível averiguar, e de órbitas quase-periódicas. Além destas soluções regulares, num sistema de EDOs não integrável também podem surgir as denominadas *soluções caóticas*.

A análise qualitativa de uma órbita periódica, introduzida por Poincaré, consiste no estudo do comportamento de órbitas com condições iniciais próximas da órbita periódica. Se estas permanecem para todo o tempo na sua vizinhança, a órbita periódica é considerada estável. Este estudo qualitativo pode ser realizado através das denominadas *secções de Poincaré*.

As órbitas caóticas surgem em sistemas dinâmicos não integráveis e um critério objectivo para as identificar é a existência ou não de divergência exponencial entre órbitas vizinhas. Diz-se que duas órbitas vizinhas  $\psi_t(\vec{x}_0)$  e  $\psi_t(\vec{x}_0 + \delta\vec{x}_0)$ , com  $\delta > 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$  apresentam *dependência sensível às condições iniciais (DSCI)* se existir  $t > 0$  tal que as órbitas divergem. Para efeitos experimentais, se existir um valor  $\chi > 0$  tal que

$$d(t) \approx d_0 \exp(\chi t),$$

com

$$d(t) = \|\psi_t(\vec{x}_0) - \psi_t(\vec{x}_0 + \delta\vec{x}_0)\|$$

designa-se a órbita  $\psi$  por *órbita caótica* [28]. O valor de  $\chi$  é quantificado pelos *expoentes característicos de Lyapunov*, nomeadamente pelo seu máximo (MECL).

Para a detecção de órbitas caóticas podem ser estabelecidos outros critérios, não quantitativos, como o estudo do padrão gráfico obtido por meio da evolução orbital ao longo do tempo, exemplificado, no PTCR planar, com a excentricidade de uma trajectória.

Na determinação algébrica de soluções do problema de  $n$  corpos é utilizada a teoria de perturbações. O PTCR, por exemplo, pode ser estudado a partir do sistema integrável

de dois corpos  $C_1$  e  $C_3$  correspondente ao Hamiltoniano  $H_0$ , que quando sujeito à perturbação do corpo  $C_2$  resulta no sistema Hamiltoniano  $H = H_0 + \mu_2 H_1$  não integrável. A dificuldade em encontrar soluções algébricas resulta do desenvolvimento de  $H$  em séries de potências normalmente divergentes, devido ao problema dos denominadores pequenos, correspondendo estes a ressonâncias entre o movimento de dois corpos,  $C_2$  e  $C_3$  [4]. Sendo, em geral, difícil encontrar soluções algébricas para o PTCR, opta-se, neste capítulo, pelo estudo da estabilidade de órbitas através de métodos numéricos, um procedimento habitual em mecânica celeste [28].

Apesar da possibilidade de fornecerem resultados quantitativos, a demora da integração numérica das EDOs, assim como o aparecimento de erros numéricos são problemas que podem surgir na utilização de métodos numéricos.

Neste capítulo é estudada a excentricidade de uma órbita ao longo do tempo, secções de Poincaré e o máximo expoente de Lyapunov, no âmbito do PTCR planar, sendo parte da análise qualitativa e quantitativa efectuada na vizinhança de pontos de equilíbrio.

A integração numérica das EDOs do PTCR no plano utilizada neste trabalho baseia-se no método de Runge-Kutta de 4ª ordem, que tem um erro de truncatura  $O(h^5)$ , sendo  $h$  o passo de integração. A propagação do erro foi testada através do cálculo em passos intermédios do integral de Jacobi que, recorde-se, é um integral do PTCR.

Os programas utilizados para a determinação de secções de Poincaré e do Expoente de Lyapunov encontram-se em apêndice.

## 6.1 Excentricidade

Na dinâmica do sistema solar, é possível analisar a evolução da posição de um corpo ao longo do tempo por meio da evolução da excentricidade ou do semi-eixo maior da sua órbita, sendo esta, para cada posição e velocidade, aproximada a uma órbita elíptica [28].

Integrando numericamente as equações de movimento do corpo  $C_3$ , relativas ao PTCR planar, obtém-se a sua posição e velocidade num determinado instante,  $t$ . Deste modo é possível calcular para cada  $t$  o momento angular,  $l$ , o que permite obter um valor de excentricidade, utilizando a equação (2.26), através da aproximação ao problema de dois corpos, sendo estes  $C_1$  e  $C_3$ .

Das igualdades (3.5), (3.6) e efectuando uma mudança de coordenadas de forma a posicionar o corpo  $C_1$  na origem do referencial, deduz-se os valores de  $v^2$  e de  $l$ , obtendo-se

$$v^2 = (\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x + \mu_2)^2$$

e

$$l = (x + \mu_2)(\dot{y} + x + \mu_2) - y(\dot{x} - y).$$

As fórmulas (2.25) e (2.26), obtidas no estudo do problema de dois corpos, e que permitem obter o semi-eixo maior e a excentricidade da elipse, reescrevem-se do seguinte modo

$$a = \left( \frac{2}{d_1} - \frac{v^2}{\mu_1} \right)^{-1} \quad (6.1)$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{l^2}{\mu_1 a}}. \quad (6.2)$$

A seguir são apresentados alguns gráficos de órbitas regulares e caóticas para um valor de  $\mu_2 = 10^{-3}$ , que corresponde aproximadamente ao sistema Sol-Júpiter- $C_3$ , quando adaptado ao modelo do PTCR. A figura 6.1 representa a variação do semi-eixo e da excentricidade para uma órbita com as condições iniciais  $x_0 = 0.44$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$  e  $\dot{y}_0$  determinado tal que  $C_J = 3.06$ , um valor de constante de Jacobi para o qual o movimento é limitado, como estudado no capítulo 3. Os gráficos apresentam um padrão que se repete ao longo do tempo o que dá a indicação de uma órbita regular, contrastando com os gráficos da figura 6.2 que representam uma órbita, com as mesmas condições iniciais à exceção de  $x_0 = 0.46$ , aparentemente caótica.

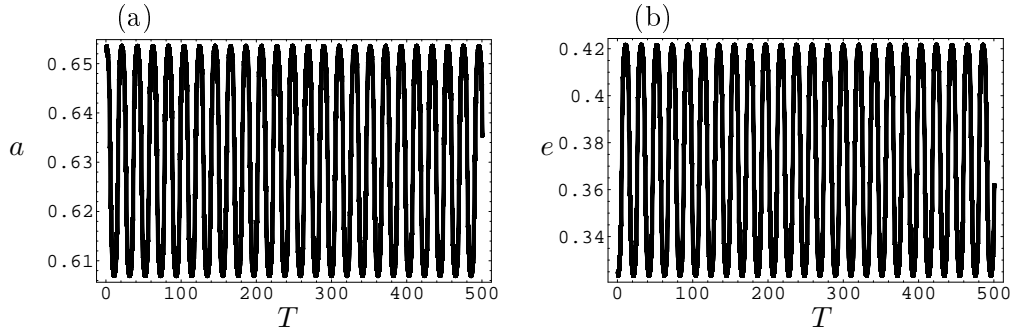


Figura 6.1: Representação da variação do semi-eixo maior (a) e da excentricidade (b) em função de  $T$ , períodos orbitais de  $C_2$ , com condição inicial  $(x_0, y_0, \dot{x}_0) = (0.44, 0, 0)$ ,  $C_J = 3.06$  e massa  $\mu_2 = 10^{-3}$ .

Os gráficos da figura 6.3 referem-se a uma órbita com condições iniciais na vizinhança do ponto de equilíbrio  $L_4$ . Esta órbita, denominada *tadpole*, é regular e pode ser observada na figura 6.5a para um tempo de integração de 32 anos do corpo  $C_2$ . A figura 6.5b representa a trajetória do corpo  $C_3$  para uma condição inicial próxima do ponto de equilíbrio  $L_1$ . De acordo com a excentricidade da órbita (ver figura 6.4), a trajetória aparenta ser caótica. A DSCI desta órbita pode ser observada na figura 6.6, onde para uma distância de  $10^{-6}$  entre as condições iniciais, os gráficos da excentricidade se separam para um período orbital superior a 20. Foi confirmado que esta diferença entre as excentricidade das duas órbitas não se deve a erros numéricos, pois as soluções das EDOs são obtidas com erros  $O(10^{-14})$ .

A detecção de órbitas caóticas a partir do gráfico da excentricidade deve ser confrontada com os resultados das respectivas secções de Poincaré e com o cálculo dos expoentes de

Lyapunov, conforme será tratado nas secções seguintes.

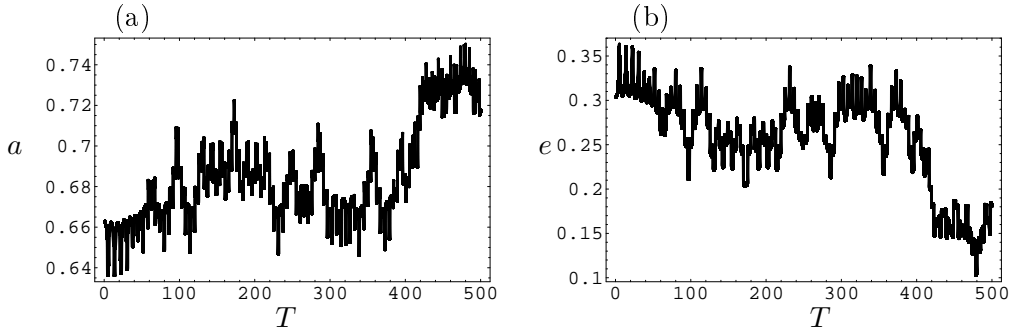


Figura 6.2: Representação da variação do semi-eixo maior (a) e da excentricidade (b) em função de  $T$ , períodos de  $C_2$ , com condição inicial  $(x_0, y_0, \dot{x}_0) = (0.46, 0, 0)$ ,  $C_J = 3.06$  e massa  $\mu_2 = 10^{-3}$ .

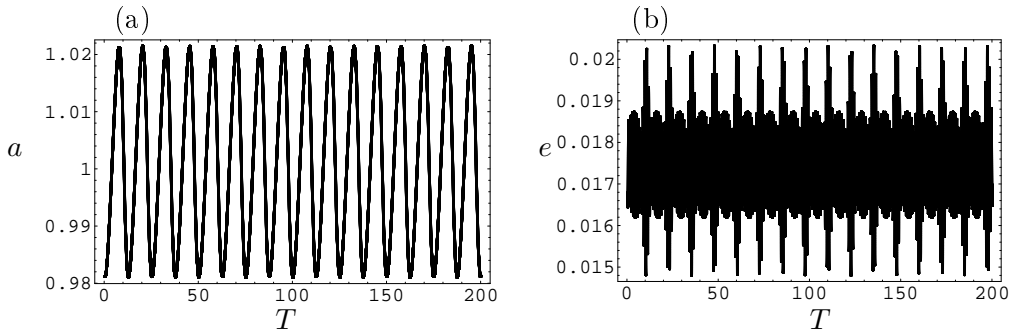


Figura 6.3: Representação da variação do semi-eixo maior (a) e da excentricidade (b) em função de  $T$ , período de  $C_2$ , com condição inicial  $(x_0, y_0, \dot{x}_0) = (0.4925, 0.8595, 0)$ ,  $C_J = 2.999$  e  $\mu_2 = 10^{-3}$ . O movimento de  $C_3$  efectua-se na vizinhança de  $L_4$ .

## 6.2 Secções de Poincaré

**Definição 16** (*Secção local*) Considerando um sistema de EDOs tal como definido em (1.23),  $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ ,  $\vec{F} : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ , seja  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  um hiperplano, isto é, um subespaço linear de dimensão  $n - 1$ . Uma secção local de  $\vec{F}$  em  $\vec{x} \in O$  é um aberto  $S$  num hiperplano  $\Sigma$ , contendo  $\vec{x}$  e transversa a  $\vec{F}$ , isto é,  $\vec{F}(\vec{x}) \notin \Sigma$  para todo  $\vec{x} \in S$ .

**Definição 17** (*Função de Poincaré*) Seja  $\gamma$  uma órbita periódica de período  $T$ ,  $\vec{x}_P \in \gamma$  e  $S$  uma secção local de  $\vec{F}$  em  $\vec{x}_P$  do sistema de EDOs (1.23). Existe uma vizinhança  $V$  de  $\vec{x}_P$  e uma única função  $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$  de  $C^1$  tal que  $\phi(\tau(\vec{x}), \vec{x}) \in S$ , para todo  $\vec{x} \in V$  e  $\tau(\vec{x}_P) = T$ . Pode definir-se a função  $p$  de classe  $C^1$

$$\begin{aligned} p : S \cap V &\longrightarrow S \\ \vec{x} &\longmapsto \phi(\tau(\vec{x}), \vec{x}). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Esta função designa-se por função de Poincaré.

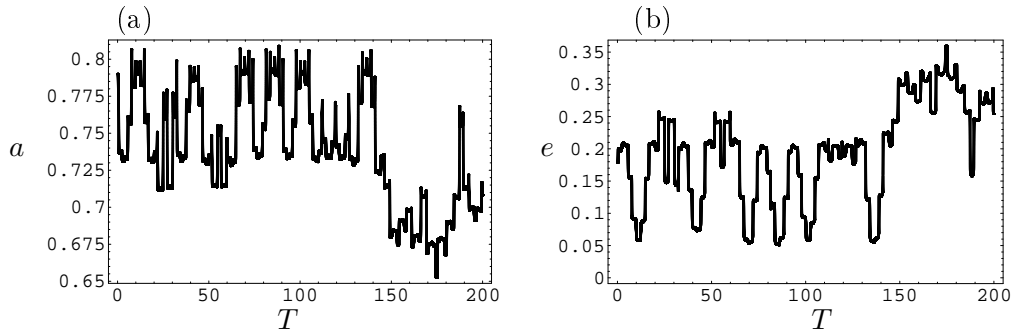


Figura 6.4: Representação da variação do semi-eixo maior (a) e da excentricidade (b) em função de  $T$ , período de  $C_2$ , com condição inicial  $(x_0, y_0, \dot{x}_0) = (0.93, 0, 0)$ ,  $C_J = 3.0399$  e  $\mu_2 = 10^{-3}$ . O movimento de  $C_3$  efectua-se na vizinhança do ponto de equilíbrio  $L_1$ .

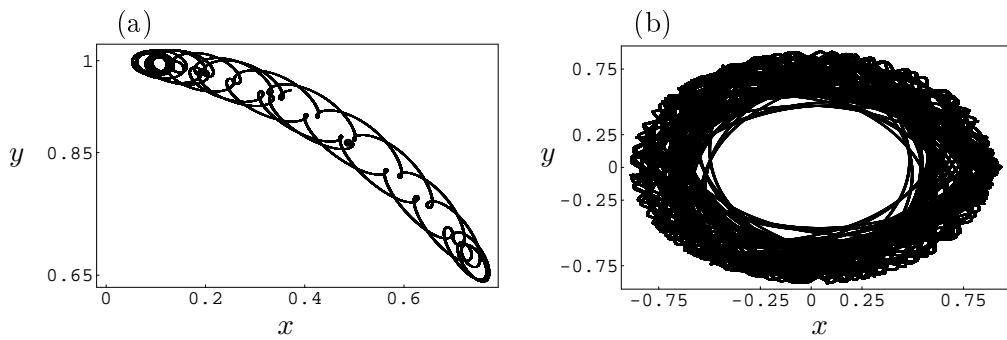


Figura 6.5: (a) Órbita de  $C_3$  na vizinhança do ponto de equilíbrio  $L_4$  para um período de integração de 32 anos do corpo  $C_2$ . (b) Órbita de  $C_3$  na vizinhança do ponto de equilíbrio  $L_1$  para um período de integração de 160 anos do corpo  $C_2$ .

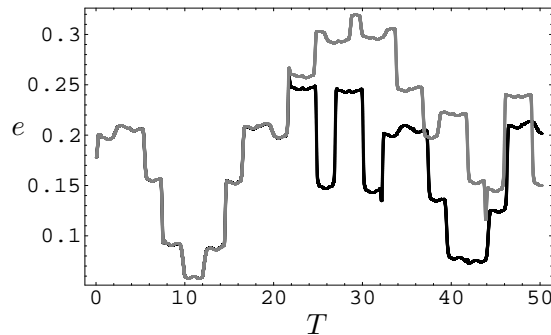


Figura 6.6: Comparação da excentricidade entre duas órbitas com condições iniciais próximas,  $(x_0, y_0, \dot{x}_0) = (0.93, 0, 0)$  (linha preta) e  $(x_0, y_0, \dot{x}_0) = (0.93 + 10^{-6}, 10^{-6}, 0)$  (linha cinzenta) e  $C_J = 3.0399$ .

O comportamento dos pontos,  $\vec{x}_0 \in V$ , de órbitas vizinhas da órbita  $\varphi$ , pode ser estudado através da observação das iterações sucessivas,  $p^k(\vec{x}_0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , de  $p$ , transformando-se o estudo das órbitas de um sistema dinâmico contínuo no estudo das órbitas de um sistema dinâmico discreto.

Note-se que nem sempre é possível estudar a órbita de uma solução de  $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$  a partir da construção da função de Poincaré, pois a secção  $S$  é local e pode existir um  $k \in \mathbb{Z}$  para o qual  $p^k(\vec{x})$  não esteja definido.

Num sistema Hamiltoniano com dimensão quatro, conservativo, as trajectórias estão contidas na superfície tridimensional para as quais o Hamiltoniano  $H(\vec{q}, \vec{p})$  é uma constante  $h_0$ , reduzindo-se deste modo uma dimensão ao problema. Construindo uma função de Poincaré de forma a relacionar um par de variáveis conjugadas, reduz-se outra dimensão ao problema e obtém-se a *Secção de Poincaré*. Esta construção permite obter um mapa que preserva a área [3].

Os pontos fixos da aplicação de Poincaré correspondem a pontos de órbitas periódicas do espaço fase e, reciprocamente, os pontos de órbitas periódicas do espaço fase correspondem a pontos fixos, reduzindo-se deste modo o estudo da existência de soluções periódicas ao estudo dos pontos fixos de uma aplicação que preserva a área.

É possível associar a uma solução periódica de um sistema dinâmico contínuo Hamiltoniano um mapa  $\mathcal{S}$  que preserva a área com origem no ponto fixo [3]. Assim sendo a aplicação de Poincaré permite estender a noção de estabilidade de um ponto de equilíbrio à estabilidade de uma órbita periódica, através do estudo da estabilidade do ponto fixo do mapa  $\mathcal{S}$ .

De acordo com a definição de Secção de Poincaré e com a simbologia utilizada nos capítulos anteriores, a posição de  $C_3$  é dada por  $\vec{x} = (x, y)$  e a respectiva velocidade por  $\dot{\vec{x}} = (u, v)$ . Fixando-se  $C_J(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = c_0$ , com  $c_0 > 0$ , é possível expressar  $v$  em função de  $x$ ,  $y$  e  $u$ :

$$v = \sqrt{n^2(x^2 + y^2) + 2 \left[ \frac{\mu_1}{d_1} + \frac{\mu_2}{d_2} \right] - u^2 - c_0}.$$

Para definir uma secção do fluxo deste sistema, fixa-se, por exemplo,  $y = 0$ . A secção de Poincaré será o conjunto de pontos  $(x, u)$ , que resultam da intersecção de uma órbita com a secção, mantendo-se a direcção do movimento. Estes pontos definem um padrão que permite caracterizar a respectiva órbita: quando o movimento de uma órbita é regular, a sua intersecção com a secção é um ponto (órbita periódica) ou parece uma curva diferenciável (órbita quase-periódica), quando o movimento é caótico os pontos parecem preencher de forma densa uma área do plano da secção de Poincaré [28]. A figura 6.7 representa as secções de duas órbitas para as mesmas condições iniciais da figura 6.1 e 6.2, da secção relativa à excentricidade, e confirma que à condição inicial  $x_0 = 0.44$  corresponde uma órbita regular e à condição inicial  $x_0 = 0.46$  uma órbita caótica. A



figura 6.8a representa a secção da órbita caótica, representada na figura 6.5b, obtida para condições iniciais próximas do ponto de equilíbrio  $L_1$ .

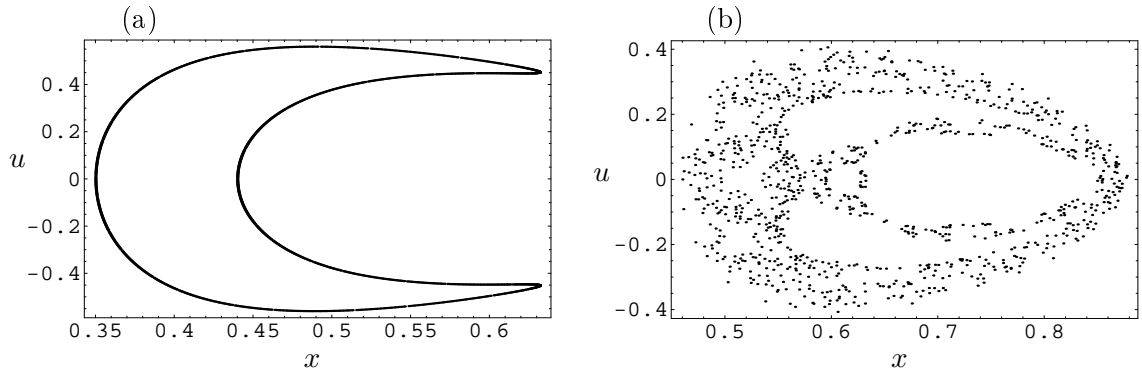


Figura 6.7: Secções de Poincaré para a condição inicial (a)  $x_0 = 0.44$  e (b)  $x_0 = 0.46$ , para  $C_J = 3.06$  e  $\mu_2 = 10^{-3}$ . O tempo de integração corresponde a 1592 períodos orbitais do corpo  $C_2$ . A figura (a) representa uma secção de uma órbita regular e a figura (b) representa uma secção de uma órbita caótica.

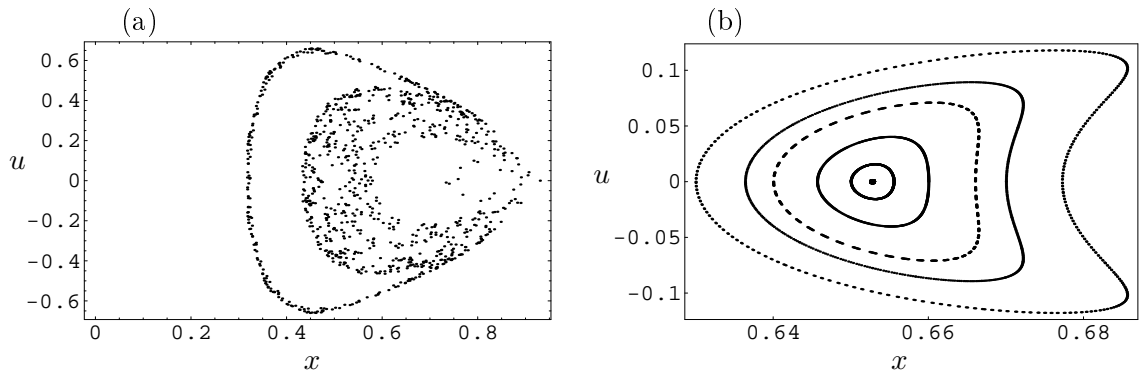


Figura 6.8: (a) Secção de Poincaré, correspondente a uma órbita com condição inicial  $(x_0, y_0, u_0) = (0.93, 0, 0)$ ,  $C_J = 3.0399$  e  $\mu_2 = 10^{-3}$ . (b) Secções de Poincaré de várias trajectórias, com  $C_J = 3.04$  e  $\mu_2 = 10^{-3}$ .

A figura 6.8b representa um conjunto de curvas invariantes que rodeiam um ponto fixo elíptico, correspondendo este a uma órbita periódica estável. As curvas correspondem a trajectórias quase-periódicas. Na figura 6.9b observa-se a secção de duas trajectórias, uma formada por uma cadeia de três ilhas que rodeiam um ponto fixo elíptico e outra que "enlaça" a anterior e, próximo dos pontos onde essa curva se parece intersectar, encontram-se pontos fixos hiperbólicos, ou seja, uma curva periódica instável. Na figura 6.10 pode observar-se um ponto fixo elíptico rodeado de curvas invariantes, uma cadeia de 5 ilhas que rodeiam um ponto fixo elíptico e entre estes pontos elípticos encontra-se um ponto hiperbólico acompanhados da respectiva separatriz. Existe outra cadeia de 9 ilhas e entre estas duas cadeias de ilhas existe uma curva normalmente designada de *curva KAM*.

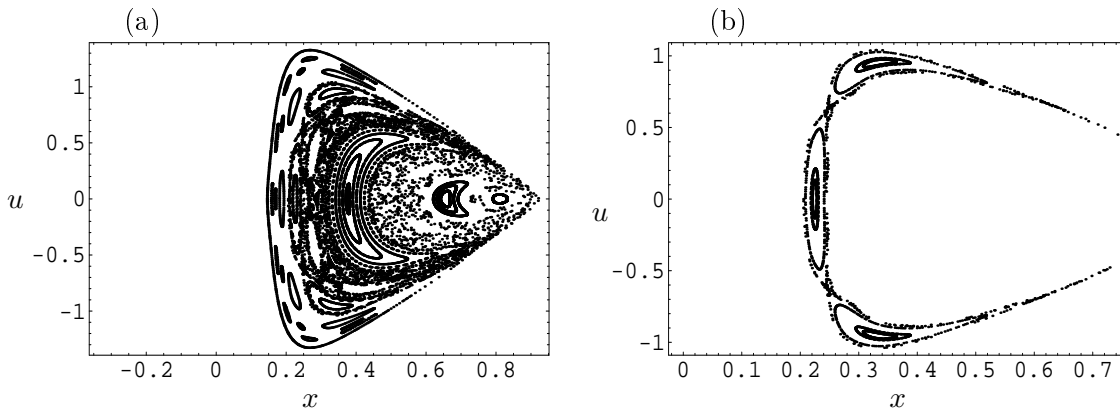


Figura 6.9: (a) Secções de Poincaré para várias trajectórias, obtidas por variação de  $x_0$ , com  $C_J = 3.04$ ,  $\mu_2 = 10^{-3}$  e intervalo de tempo correspondente a cerca de 1600 anos do corpo  $C_2$ . (b) Separatriz, obtida para a trajectória com condição inicial  $x_0 = 0.2$ ,  $y_0 = 0$ ,  $u_0 = 0$  e  $C_J = 3.04$ .

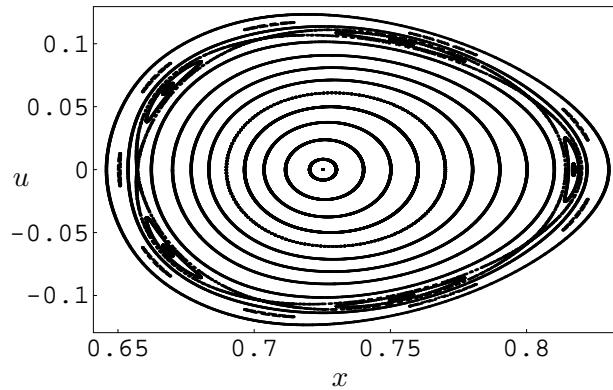


Figura 6.10: Secções de Poincaré para várias trajectórias, obtidas por variação de  $x_0$ , com  $C_J = 3.06$  e  $\mu_2 = 10^{-3}$

### 6.3 Expoentes de Lyapunov

Num sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade como é o caso do PTCR planar, é possível visualizar o comportamento das suas órbitas através, por exemplo, da representação de secções de Poincaré. Embora seja possível representar secções de Poincaré para sistemas com três ou mais dimensões, a sua interpretação é complicada [23]. A distinção entre órbitas regulares e órbitas caóticas é importante para compreender o comportamento de sistemas dinâmicos, constituindo o cálculo dos ECL (expoentes característicos de Lyapunov), nomeadamente o seu máximo, MECL (máximo expoente característico de Lyapunov), uma ferramenta muito utilizada actualmente para testar a caoticidade de uma órbita [28]. A dificuldade de calcular algebricamente os ECL foi contornada através do seu cálculo numérico, obtendo-se uma estimativa do MECL. Neste trabalho adopta-se IMECL (indicador do máximo expoente característico de Lyapunov) como a estimativa de MECL.

Sejam  $\vec{x}(t)$  e  $\vec{y}(t)$  duas soluções, no espaço fase  $O \subseteq \mathbb{R}^n$ , do sistema autónomo de  $n$

EDOs  $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ , com condições iniciais  $\vec{x}_0$  e  $\vec{y}_0 = \vec{x}_0 + \delta\vec{x}_0$  tal que  $\delta > 0$  e  $\delta \rightarrow 0$ . A distância entre as trajectórias  $\vec{x}(t)$  e  $\vec{y}(t)$  ao longo do tempo é dada por  $\vec{\xi}(t) = \vec{y}(t) - \vec{x}(t)$ . Através da expansão de  $\vec{F}$  em série de Taylor na vizinhança de  $\vec{x}(t)$ , é possível obter a evolução da distância entre as trajectórias ao longo do tempo:

$$\frac{d}{dt}\vec{\xi} = \frac{d}{dt}[\vec{y}(t) - \vec{x}(t)] = \vec{F}(\vec{y}) - \vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x} + \vec{\xi}) - \vec{F}(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}(t))\vec{\xi} + O_2, \quad (6.4)$$

tal que  $O_2$  representa os termos de ordem 2 nas variáveis  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Sendo  $M = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}$ , a matriz Jacobiana da função  $\vec{F}$ , da igualdade (6.4) obtém-se o sistema de  $n$  EDOs linear

$$\dot{\vec{\xi}} = M(\vec{x}(t))\vec{\xi} \wedge \vec{\xi}(0) = \vec{\xi}_0, \quad \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.5)$$

**Definição 18** *Seja  $X(t)$  a matriz solução de  $\dot{\vec{\xi}} = M(\vec{x}(t))\vec{\xi}$  e seja  $\vec{e}$  um vector em  $\mathbb{R}^n$ . Então o coeficiente expansão na direcção  $\vec{e}$  ao longo da órbita que contém  $\vec{x}_0$  define-se como  $\lambda_t(\vec{x}_0, \vec{e}) \equiv \frac{\|X(t)\vec{e}\|}{\|\vec{e}\|}$ .*

**Definição 19 (ECL)** *O ECL na direcção de  $\vec{e}$  ao longo da órbita que contém  $\vec{x}_0$  define-se como  $\chi(\vec{x}_0, \vec{e}) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(\lambda_t(\vec{x}_0, \vec{e}))$ .*

**Definição 20** *Diz-se que uma base ortonormal em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , é base normal se  $\sum_{i=1}^n \chi(\vec{x}_0, \vec{e}_i)$  tiver o seu mínimo nessa base.*

**Teorema 13 (Lyapunov (1966))** *Se*

- $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln |\det(X(t))|$  existe e é finito e;
- para cada base normal  $\{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $\sum_{i=1}^n \chi(\vec{x}_0, \vec{e}_i) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |\det(X(t))|$ ;

então  $\chi(\vec{x}_0, \vec{e}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \lambda_t(\vec{x}_0, \vec{e})$  existe e é finito para qualquer vector  $\vec{e} \in \mathbb{R}^n$ .

**Demonstração:**

Ver [24].  $\diamond$

Os números  $\chi(\vec{x}_0, \vec{e}_i)$  designam-se por *expoentes característicos de Lyapunov*. Este teorema foi demonstrado por Lyapunov (1966) e por Oseledec (1968), que demonstraram, também, a existência da base normal tal como definida no teorema. Este resultado é importante, pois apresenta uma simplificação da definição do ECL, que facilita o seu cálculo numérico.

**Teorema 14 (Oseledec (1968))** *Seja  $\chi(\vec{x}, \vec{e}_i) = \chi_i(\vec{x})$ , para  $1 \leq i \leq n$  tal que  $\chi_1 \geq \chi_2 \geq \dots \geq \chi_n$  e sejam  $\{\sigma_j(\vec{x})\}_{1 \leq j \leq s}$  os valores distintos de  $\chi_i(\vec{x})$ ,  $1 \leq i \leq n$  e  $k_j(\vec{x})$  a respectiva multiplicidade. Para cada  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  existem subespaços lineares  $H_1, \dots, H_s$  de  $\mathbb{R}^n$ , tal que*

1.  $\mathbb{R}^n = H_1 \oplus \dots \oplus H_s$ ;
2.  $\dim H_j = k_j(\vec{x})$ ,  $1 \leq j \leq s$ ;
3. se  $\vec{e} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{e} \in H_j$ , então  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|t|} \ln \lambda_t(\vec{x}, \vec{e}) = \pm \sigma_j(\vec{x})$ ,  $1 \leq j \leq s$ ;
4. se  $\vec{e} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{e} \in H_1 \oplus \dots \oplus H_j$ , mas  $\vec{e} \notin H_1 \oplus \dots \oplus H_{j-1}$ , então  $\chi(\vec{x}, \vec{e}) = \sigma_j(\vec{x})$ ,  $1 \leq j \leq s$ .

**Demonstração:**

Ver [29].  $\diamond$

Com base neste teorema espera-se que, escolhendo um vector  $\vec{e}$  ao acaso, se encontre  $\chi(\vec{x}, \vec{e}) = \chi_1(\vec{x})$  [8], sendo  $\chi_1(\vec{x})$  o máximo expoente de Lyapunov da órbita  $\vec{x}(t)$ .

O maior dos expoentes de Lyapunov,  $\chi_1$ , permite inferir o comportamento da órbita  $\vec{x}(t)$  de um sistema dinâmico, sendo que, se  $\chi_1 > 0$  a órbita  $\vec{x}(t)$  é caótica e se  $\chi_1 \approx 0$  a órbita  $\vec{x}(t)$  é regular. Uma vez que nem sempre é possível determinar algebricamente o expoente de Lyapunov  $\chi_1$  de uma determinada órbita  $\vec{x}(t)$ , existe a possibilidade da sua determinação numérica, efectuando-se a integração numérica do sistema de EDOs (6.5) ao longo do tempo. No entanto, como não é possível a integração numérica para  $t \rightarrow +\infty$ , a evolução do expoente de Lyapunov é seguida durante algum tempo e representada graficamente. Deste modo obtém-se IMECL, representado por  $\chi_1^*$ .

A linearização de (6.4) é definida localmente o que significa que, se  $\xi(t)$  cresce ao longo de  $t$  e se afasta muito do valor inicial  $\xi_0$ ,  $\chi_1$  deixa de ser uma medida correcta de divergência local. Neste caso, é possível reescalar-se a órbita  $\vec{\xi}(t)$  efectuando uma renormalização do vector distância entre as órbitas, de cada vez que a distância  $\xi(t_i) > \xi_{max}$ , com  $\xi_{max} \in \mathbb{R}^+$ , mantendo-se a orientação relativa entre as órbitas. O valor  $\xi_{max}$  pode ser escolhido de forma a manter a linearização (6.5). De cada vez que se efectua uma renormalização pode considerar-se, por exemplo,

$$\vec{\xi}(t_i) = \vec{\xi}(t_i) \frac{\xi_0}{\xi(t_i)}.$$

Se houver  $m$  renormalizações da distância entre as órbitas então a estimativa de  $\chi_1$  será dada por

$$\chi_1^* = \frac{1}{t_m} \sum_{i=1}^m \ln \left[ \frac{\xi(t_i)}{\xi_0} \right],$$

sendo  $m$  um número natural.

A evolução de  $\chi_1^*$ , num determinado intervalo de tempo é obtida através da representação gráfica de  $\log \chi_1^*$  em função de  $\log t$ . Na prática, se a curva obtida tiver um declive negativo constante diz-se regular; se a curva apresentar uma inflexão do declive que se aproxima de 0 e o gráfico convergir para um determinado valor, então diz-se caótica [35]. De acordo com este critério, a evolução dos IMECL representados na figura 6.11 indica que

a órbita com condições iniciais  $(x_0, y_0, u_0, c_j) = (0.44, 0, 0, 3.06)$  é regular e que a órbita com condições iniciais  $(x_0, y_0, u_0, c_j) = (0.46, 0, 0, 3.06)$  é caótica. O cálculo do IMECL, representado na figura 6.12, indica que a órbita com condições iniciais na vizinhança do ponto de equilíbrio instável  $L_1$ , com  $(x_0, y_0, u_0, c_j) = (0.93, 0, 0, 3.0399)$  e  $\mu_2 = 10^{-3}$ , é caótica, o que confirma os resultados obtidos nas secções anteriores. A órbita com condições iniciais na vizinhança do ponto de equilíbrio  $L_4$ ,  $(x_0, y_0, u_0, c_j) = (0.4925, 0.8595, 0, 2.999)$ ,  $\mu_2 = 10^{-3}$ , é regular, como indica a evolução de  $\chi_1^*$  representado na figura 6.13.

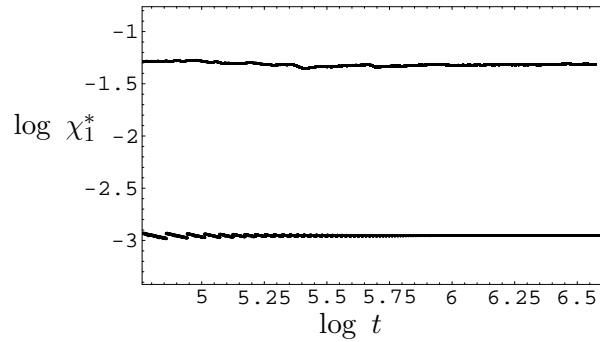


Figura 6.11: Gráficos dos IMECL relativos às órbitas regular (gráfico inferior) e caótica (gráfico superior), de posições iniciais  $x_0 = 0.44$  e  $x_0 = 0.46$ , respectivamente, com  $C_J = 3.06$ . A distância inicial entre as respectivas órbitas vizinhas é  $\xi_0 = 10^{-6}$ .

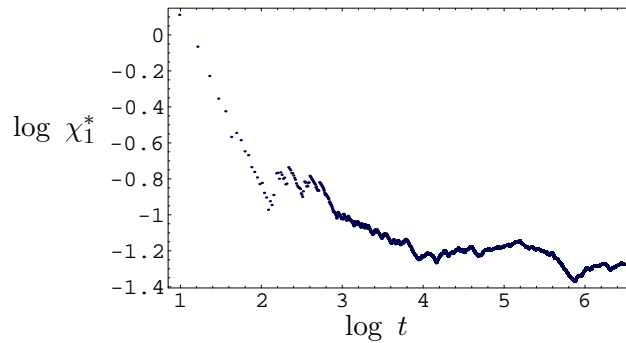


Figura 6.12: IMECL relativo à trajetória com as condições iniciais  $x_0 = 0.93$ ,  $y_0 = 0$ ,  $u_0 = 0$ ,  $C_J = 3.0399$  e  $\mu_2 = 10^{-3}$ , para um período de integração de 477465 anos do corpo  $C_2$ . A distância inicial entre as órbitas vizinhas é  $10^{-6}$ .

Os expoentes de Lyapunov por serem uma medida quantitativa são indicadores de caos mais precisos do que as secções de Poincaré ou do que a evolução da excentricidade ao longo do tempo, mas nem sempre é possível a sua obtenção algébrica, e a integração numérica é demorada para grandes escalas de tempo, o que, por vezes, implica longos tempos de integração até ser possível perceber a verdadeira natureza da órbita.

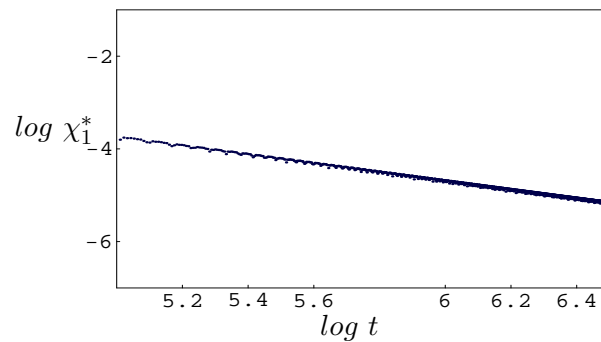


Figura 6.13: IMECL relativo à trajectória com as condições iniciais  $x_0 = 0.4925$ ,  $y_0 = 0.8595$ ,  $u_0 = 0$  e  $C_J = 2.999$ , para um período de integração de 477465 anos do corpo  $C_2$ . A distância inicial entre as órbitas vizinhas é  $10^{-6}$ .

## 6.4 Estabilidade numérica da órbita de Polydeuces

Desde 1 de Julho de 2004 que a sonda Cassini foi capturada pela gravidade de Saturno, em torno do qual orbita. Esta sonda foi enviada com vários objectivos, tais como descobrir novas luas de Saturno e obter as suas órbitas, obter melhores resultados de órbitas de satélites já conhecidos, investigar a evolução das órbitas dos satélites, investigar a estrutura e a dinâmica dos anéis e explorar tanto Saturno como algumas das suas luas. Imagens obtidas por esta sonda permitiram a descoberta de vários satélites, nomeadamente de Methone, de Pallene, que orbitam entre Mimas e Enceladus, e de Polydeuces<sup>1</sup> que orbita em torno do ponto Lagrangiano  $L_5$  de Dione [31]. São conhecidos, actualmente, dois satélites que orbitam em torno dos pontos Lagrangianos  $L_4$ , Helene, e  $L_5$ , Polydeuces, do sistema Saturno-Dione. A órbita de Dione tem uma excentricidade próxima de zero,  $e \approx 0.0022$  pelo que o seu movimento é aproximadamente circular. Além disso, Polydeuces tem massa comparativamente nula relativamente à massa de Dione e de Saturno. Deste modo, o PTCR permite uma aproximação ao movimento de Polydeuces, que é estudado nesta secção. As condições iniciais de Polydeuces e de Dione referem-se à época 1 de Janeiro de 2005, 12 horas UTC e foram fornecidas pelo grupo de *Queen Mary*, da universidade de Londres, que trabalha com os dados enviados pela Cassini [9]. As unidades físicas são escolhidas de modo que, tanto a distância entre Dione e Saturno como a velocidade angular de Dione, sejam 1, obtendo-se a posição  $(x, y, z) \approx (0.7831, -0.6519, 0.0027)$  e a velocidade  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \approx (-0.0181, -0.0341, 0.0021)$ . A razão entre as massas de Saturno e de Dione é  $\mu_2 = 1.85 \times 10^{-6}$ , valor que, de acordo com os resultados obtidos no capítulo 5 para o PTCR planar, permite concluir a estabilidade do ponto Lagrangiano  $L_5$ . O facto do ponto de equilíbrio ser estável não implica a estabilidade para o caso presente, uma vez que Polydeuces não se encontra exactamente, mas aproximadamente, em  $L_5$ . Opta-se então por um estudo numérico da sua estabilidade através da análise da excentricidade, da secção

<sup>1</sup>Estes são nomes provisórios, sendo os satélites identificados por S/2004 S1, S/2004 S2 e S/2004 S5, respectivamente.

de Poincaré e do IMECL. Como primeira aproximação considera-se este problema como um PTCR planar, ignorando-se a terceira coordenada da posição e a terceira coordenada da velocidade das condições iniciais de Polydeuces. A órbita deste satélite é do tipo "tadpole" e tem um período de aproximadamente 792 dias [31]. Este movimento pode ser observado na figura 6.14. A secção de Poincaré, obtida na figura 6.15, da órbita de Polydeuces sugere

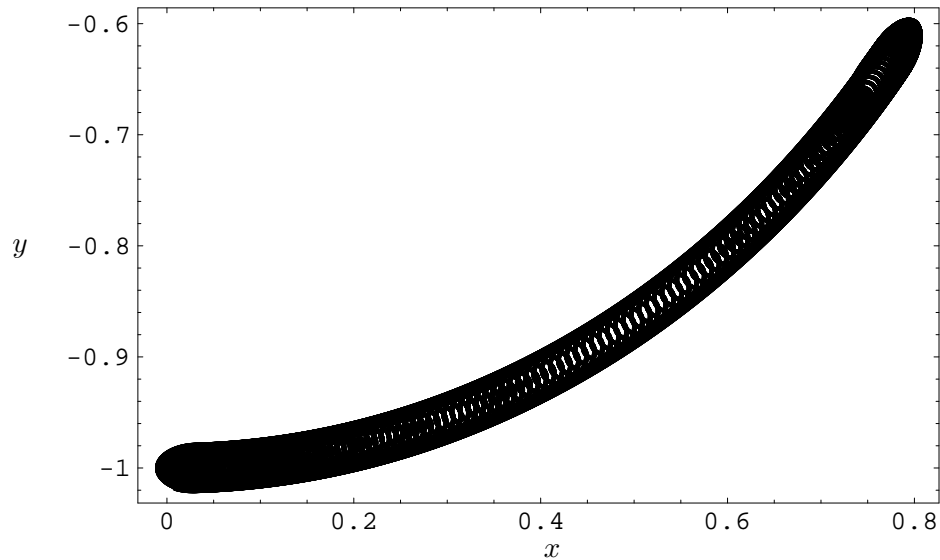


Figura 6.14: Trajectória de Polydeuces para um período de integração de 1035 anos de Dione que corresponde a cerca de 2 anos terrestres.

que esta é quase-periódica. Também a representação gráfica da excentricidade sugere que a órbita é regular (ver figura 6.16b), numa escala de tempo de cerca de 8 anos.

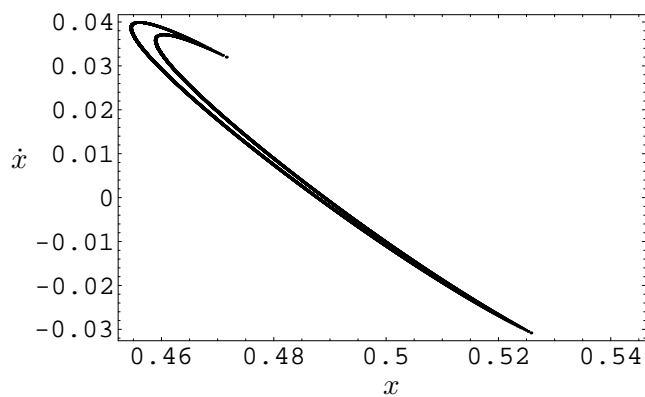


Figura 6.15: Secção de Poincaré relativa à trajectória de Polydeuces para um período de integração de  $1.6 \times 10^5$  períodos orbitais de Dione que correspondem a cerca de 1227 anos.

A figura 6.17 sugere que para um tempo inferior a cerca de 3000 anos, a órbita de Polydeuces é regular, ficando em aberto o problema da regularidade da órbita para um tempo superior. Os resultados numéricos desta secção são originais e será interessantes compará-los com resultados posteriores sobre a estabilidade de Polydeuces.

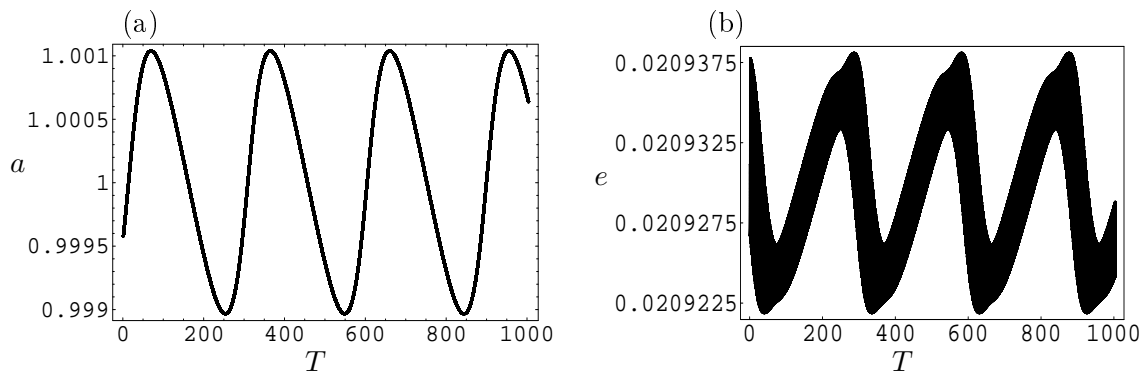


Figura 6.16: Representação da variação do semi-eixo maior (a) e da excentricidade (b) em função do tempo, da órbita de Polydeuces. A variável  $T$  refere-se a períodos orbitais de Dione.

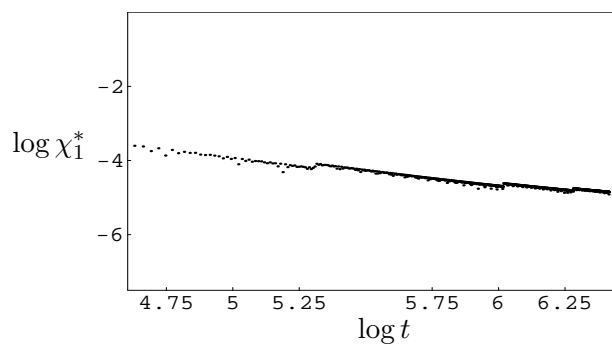


Figura 6.17: Representação do IMECL da órbita de Polydeuces planar para cerca de 120000 períodos orbitais de Dione.



# Conclusão

Neste trabalho foi apresentado um método analítico para estudar a estabilidade de soluções de equilíbrio do PTCR planar, como um caso particular de um sistema Hamiltoniano. O PTCR, num referencial sinódico, tem cinco pontos de equilíbrio: três pontos colineares e dois pontos triangulares, descobertos por Euler e por Lagrange, respectivamente. O sistema sinódico, introduzido por Euler, permitiu a descoberta, por parte de Jacobi, de um integral de movimento [28], a designada *constante de Jacobi*. Sendo o movimento do PTCR caracterizado por um sistema de EDOs não-linear, o estudo da estabilidade das soluções de equilíbrio foi abordado, numa primeira fase, através da análise linear. Os pontos de equilíbrio são de diferentes tipos, pelo que a estabilidade foi analisada utilizando diferentes técnicas. Assim sendo, a instabilidade dos pontos colineares e dos pontos triangulares hiperbólicos, do PTCR planar, foi obtida através da aplicação de teoremas gerais da teoria de equações diferenciais ordinárias e, a estabilidade dos pontos triangulares elípticos, surgiu da aplicação de resultados obtidos para sistemas Hamiltonianos, com dois graus de liberdade. Os pontos triangulares elípticos são linearmente estáveis quando a razão entre as massas dos corpos massivos verifica a condição  $0 < \mu_2 < 0.0385$ . Estes pontos acabam por se revelar importantes, pois existem na sua vizinhança, por exemplo, asteróides em sistemas Sol-Planeta e, satélites, em sistemas Saturno-satélite, que verificam a condição para a estabilidade linear.

A estabilidade não-linear dos pontos triangulares elípticos do PTCR planar foi garantida para  $0 < \mu_2 < 0.0385$  à exceção de três valores de  $\mu_2$  e foi estudada por Leontovitch e Deprit & Deprit através da aplicação do teorema de Arnold e do teorema de Arnold-Moser, respectivamente. Dois dos valores excluídos correspondem a ressonâncias,  $2 : 1$  e  $3 : 1$ , entre os valores próprios do respectivo sistema linearizado, e, nestes casos, Markeev demonstrou a instabilidade dos pontos de equilíbrio elípticos.

O teorema de Arnold-Moser permite concluir a estabilidade segundo Lyapunov de pontos de equilíbrio elípticos de um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade, mas quando estendido a sistemas Hamiltonianos com  $N > 2$  graus de liberdade, não garante a estabilidade segundo Lyapunov, ou seja, a estabilidade para todo o tempo. Quando  $N = 2$  os toros invariantes têm dimensão dois e, portanto, dividem a superfície de energia tridimensional em dois conjuntos disjuntos e, uma órbita com condição inicial entre

dois toros invariantes, permanecerá nessa região para todo o tempo. Se  $N \geq 3$ , os toros invariantes têm dimensão  $N$  e não dividem a superfície de energia com dimensão  $2N - 1$  em regiões disjuntas. É, no entanto, possível obter uma estabilidade efectiva para sistemas com três ou mais graus de liberdade, isto é, uma estabilidade para tempos superiores ao tempo de vida do sistema físico em causa. Existem diversos trabalhos publicados sobre a estabilidade efectiva de asteróides. Um exemplo é o estudo apresentado por Skokos e Dokoumetzidis (2001) em [14], onde mostram a existência de uma região de estabilidade efectiva, na vizinhança do ponto  $L_4$ , do sistema Sol-Júpiter. Esta região inclui um asteróide Troiano.

No presente trabalho foram revistos como meios de detecção de caos, utilizados no estudo da dinâmica do sistema solar, a evolução da excentricidade de uma órbita, a secção de Poincaré e o cálculo do indicador do máximo expoente de Lyapunov. Foi simulado o movimento de corpos, com condições iniciais na vizinhança dos pontos de equilíbrio  $L_1$  e  $L_4$  do sistema Sol-Júpiter e estudada a órbita de Polydeuces. Para averiguar a regularidade de órbitas do PTCR planar procedeu-se à análise das excentricidades, das secções de Poincaré e dos MECLs. Estes métodos complementam-se, por exemplo, o MECL não permite identificar, de entre as órbitas regulares, quais são ressonantes e quais são não ressonantes, enquanto que a secção de Poincaré o permite. No caso do sistema Sol-Júpiter foram encontrados exemplos de órbitas com características de caoticidade e de órbitas com características de regularidade. Quanto a Polydeuces, estudado como um PTCR planar, concluiu-se que a sua órbita é regular. Tanto quanto se sabe, este é um resultado original que deverá ser complementado com o estudo da órbita a três dimensões.

São apresentados, em seguida, algumas limitações das técnicas aqui usadas e o resumo de alguns resultados recentes sobre o PTCR. O cálculo numérico dos expoentes de Lyapunov exige a solução das equações de movimento e das correspondentes equações variacionais, o que implica um esforço computacional significativo, cada vez maior, à medida que se utilizam sistemas com mais dimensões. Quanto às secções de Poincaré, estas também apresentam limitações, tornando-se difíceis de interpretar quando utilizadas em sistemas Hamiltonianos com  $N > 2$  graus de liberdade. Existem outros métodos para estudar a dinâmica de uma órbita, como é o caso do método da análise da frequência introduzido por Laskar (1988,1990) em [20, 21] para estudar o comportamento caótico do sistema solar. Este método tem sido, desde então, aplicado frequentemente à mecânica celeste, permitindo a distinção entre órbitas regulares e órbitas caóticas e a identificação do movimento ressonante através da análise das razões entre as frequências. Recentemente, Arevalo e Marsden (2004) em [2] apresentaram uma modificação ao método de análise da frequência e aplicaram-no ao problema de transporte entre diferentes regiões do espaço, no contexto do PTCR.

Há vários trabalhos actuais que envolvem o estudo do PTCR. Um exemplo é o trabalho apresentado por Font, Nunes e Simó (2002) em [15], onde é demonstrada a existência de

órbitas em que o corpo de massa negligenciável faz, ao longo do seu movimento, passagens consecutivas muito próximas do corpo menos massivo. Estas órbitas são úteis, por exemplo, para colocar objectos espaciais numa determinada órbita em torno do corpo mais massivo, a baixo custo. Para além deste, existem outros trabalhos recentes que aplicam o PTCR ao estudo do movimento de asteróides Troianos, de satélites Troianos, como é o caso de Telesto, Calypso, Helene e ao estudo de órbitas de *NEAs* - *near earth asteroids*. É fundamental que se compreenda a população de asteróides com órbitas próximas da órbita da Terra, pois existe a possibilidade de uma colisão entre um destes objectos e o planeta que habitamos.



# Apêndice A

## Programas

Os programas a seguir apresentados foram escritos em linguagem de programação C, utilizando como compilador o turbo C. As variáveis utilizadas na integração das equações diferenciais (EDOs) são do tipo "double", efectuando-se a integração das EDOs em precisão dupla.

### A.1 Secção de Poincaré

```
/* Este programa determina os pontos de intersecção de uma trajectória do sistema de EDOs do PTCR com a secção de Poincaré  $z = 0$ . As EDOs de ordem 1 relativos ao PTCR no plano  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{w}) = f(x, y, z, w)$ , sendo  $(x, z)$  a posição e  $(y, w)$  a velocidade do corpo num determinado tempo de integração  $t$ , são integradas através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem. */
```

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#define ERRO 10-10
FILE *sp;
```

```
/*São definidas nas duas funções seguintes as funções  $f2$  e  $f4$  que resultam de  $f(x, y, z, w) = (y, f2(x, y, z, w), w, f4(x, y, z, w))$ .*/
```

```
double f2(double x, double z, double w, double nu)
{
    return 2 * w + x - (1 - nu) * (x + nu) / ((pow(x + nu, 2) + pow(z, 2) * sqrt(pow(x + nu, 2) + pow(z, 2))) - nu * (x - 1 + nu) / ((pow(x - 1 + nu, 2) + pow(z, 2) * sqrt(pow(x - 1 + nu, 2)
```

```

    +pow(z,2));
}
double f4(double x, double y, double z, double nu)
{
    return -2*y+z-(1-nu)*z/((pow(x+nu,2)+pow(z,2)*sqrt(pow(x+nu,2)+pow(z,2)))-
nu * z/((pow(x - 1 + nu),2)+pow(z,2)*sqrt(pow(x - 1 + nu,2)
    +pow(z,2)));
}

```

/\* A função "ler" lê:

- o tempo de integração inicial,  $t$ , e final,  $tmax$ ;
- a posição inicial,  $(x, z)$  e a velocidade inicial,  $(y, w)$ ;
- o número de iterações,  $n$ ;
- o valor da menor massa normalizada,  $nu$ ;
- a constante de Jacobi,  $cj$ . \*/

```

void ler(double *t, double *x, double *y, double *z, double *cj, double *tmax, double *n,
double *nu)
{
    printf("Introduza os seguintes dados:");
    printf("\n-limite inferior do intervalo de tempo:");
    scanf("%lf",t);
    printf("\n-limite superior do intervalo de tempo:");
    scanf("%lf",tmax);
    printf("\n-o número de passos de integração:");
    scanf("%lf",n);
    printf("\n-o valor nu para a menor massa:");
    scanf("%lf",nu);
    printf("\n-a primeira componente da posição inicial:");
    scanf("%lf",x);
    printf("\n-a segunda componente da posição inicial:");
    scanf("%lf",z);
    printf("\n-a primeira componente da velocidade inicial:");
    scanf("%lf",y);
    printf("\n-a constante de Jacobi:");
    scanf("%lf",cj);
}

```

/\* É na função "integraRK" que se desenvolve todo o processo iterativo de integração do sistema de EDOs relativo ao PTCR no plano, utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para calcular a respectiva solução,  $(x, y, z, w)$ . As equações diferenciais são integradas até que se encontre uma solução próxima da secção da órbita pretendida, ou seja, quando  $z_t \cdot z_{t+h} < 0$  e  $z_{t+h} > 0$ . Neste caso, o passo,  $h$ , é sucessivamente modificado da forma  $h = 0.1h$  e as EDOs integradas até que se obtenham os valores de  $(x, y)$  com erro absoluto inferior ao valor de ERRO. Depois de encontrado o primeiro ponto da secção de Poincaré é retomado o passo  $h$  inicial e o processo referido é sucessivamente aplicado até que se atinja o tempo máximo de integração. \*/

```
void integraRK(double *t, double *x, double *y, double *z, double *w, double h, double tmax, double nu, double (*f2)(double, double, double, double), double (*f4)(double, double, double, double))
{
    double k1,k2,k3,k4,l1,l2,l3,l4,m1,m2,m3,m4,n1,n2,n3,n4;

    double auxx,auxy,auxz,auxt,auxh,sx,sy;
    int i,dim;
    auxh = h;
    dim = 0;
    do
    {
        auxx = x[0];
        auxy = y[0];
        auxz = z[0];
        auxw = w[0];
        auxt = t[0];
        k1 = h * y[0];
        l1 = h * (*f2)(x[0], z[0], w[0], nu);
        m1 = h * w[0];
        n1 = h * (*f4)(x[0], y[0], z[0], nu);
        k2 = h * (y[0] + l1/2);
        l2 = h * (*f2)(x[0] + k1/2, z[0] + m1/2, w[0] + n1/2, nu);
        m2 = h * (w[0] + n1/2);
        n2 = h * (*f4)(x[0] + k1/2, y[0] + l1/2, z[0] + m1/2, nu);
        k3 = h * (y[0] + l2/2);
        l3 = h * (*f2)(x[0] + k2/2, z[0] + m2/2, w[0] + n2/2, nu);
        m3 = h * (w[0] + n2/2);
```

```

n3 = h * (*f4)(x[0] + k2/2, y[0] + l2/2, z[0] + m2/2, nu);
k4 = h * (y[0] + l3);
l4 = h * (*f2)(x[0] + k3, z[0] + m3, w[0] + n3, nu);
m4 = h * (w[0] + n3);
n4 = h * (*f4)(x[0] + k3, y[0] + l3, z[0] + m3, nu);
x[0] = x[0] + (k1 + 2.0 * k2 + 2.0 * k3 + k4)/6.0
y[0] = y[0] + (l1 + 2.0 * l2 + 2.0 * l3 + l4)/6.0
z[0] = z[0] + (m1 + 2.0 * m2 + 2.0 * m3 + m4)/6.0
w[0] = w[0] + (n1 + 2.0 * n2 + 2.0 * n3 + n4)/6.0
if(auxz * z[0] < 0 && z[0] > 0)
{
  if(fabs(x[0] - auxx) >= ERRO || fabs(y[0] - auxy) >= ERRO)
  {
    h = 0.1 * h;
    x[0] = auxx;
    y[0] = auxy;
    z[0] = auxz;
    w[0] = auxw;
    t[0] = auxx;
  }
  else
  {
    sx = (x[0] + auxx)/2;
    sy = (y[0] + auxy)/2;
    fprintf(sp, "n%.20f\t%.20f\n", sx, sy);
    ++ dim;
    h = auxh;
  }
}
while(t[0] < tmax)
}

```

/\* Na função "resolveEM3C" :

- é chamada a função "ler";
- é calculado o valor de  $w$  através do integral de Jacobi;



- é chamada a função "integraRK", onde se integra o sistema de EDOs e se determina os pontos de intersecção com a secção de Poincaré;
- é determinado o passo de integração  $h$ .

Os valores de saída,  $(x, y)$  são enviados para o ficheiro "secpoinc". \*/

```
void resolveEM3C()
{
    double t[0], x[1], y[3], z[1], w[1], h, tmax, n, nu, cj;
    ler(t, x, z, &tmax, &n, &nu);
    w[0] =sqrt(x[0]*x[0]+z[0]*z[0]+2*(1-nu)/sqrt((x[0]+nu)*(x[0]+nu)+z[0]*z[0]))
    +2*nu/(sqrt((x[0]-1+nu)*(x[0]-1+nu)+z[0]*z[0]))-y[0]*y[0]-cj);
    h = (tmax - t[0])/n;
    integraRK(t, x, y, z, w, h, tmax, nu, f2, f4);
}

int main(void)
{
    sp=fopen("secpoinc","w");
    printf("Secções de Poincaré\n");
    resolveEM3C();
    fclose(sp);
    return 1;
}
```

## A.2 Expoentes de Lyapunov

/\* Este programa calcula o máximo expoente de Lyapunov, utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para a integração de equações diferenciais (EDOs) de ordem 1. São integrados o sistema de EDOs não-linear do problema de três corpos restrito no plano  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{w}) = f(x, y, z, w)$ , sendo  $(x, z)$  a posição e  $(y, w)$  a velocidade do corpo num determinado tempo de integração  $t$ , e o sistema de EDOs linear  $(\dot{d}1, \dot{d}2, \dot{d}3, \dot{d}4) = J(d1, d2, d3, d4)^T$ , sendo  $(d1, d3)$  a posição e  $(d2, d4)$  a velocidade num determinado tempo de integração  $t$  e  $J$  a matriz Jacobiana da função  $f$  em cada  $(x, y, z, w)$ .\*/

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
FILE *el;
```

```

#define MAXDIST 10-2
#define NPONTOS 106

/*São definidas nas duas funções seguintes as funções f2 e f4 que resultam de  $f(x, y, z, w) = (y, f2(x, y, z, w), w, f4(x, y, z, w)).$ */

double f2(double x, double z, double w, double nu)
{
    return 2*w + x - (1 - nu) * (x + nu) / ((pow(x + nu, 2) + pow(z, 2)) * sqrt(pow(x + nu, 2) + pow(z, 2))) - nu * (x - 1 + nu) / ((pow(x - 1 + nu, 2) + pow(z, 2)) * sqrt(pow(x - 1 + nu, 2) + pow(z, 2)));
}

double f4(double x, double y, double z, double nu)
{
    return -2 * y + z - (1 - nu) * z / ((pow(x + nu, 2) + pow(z, 2)) * sqrt(pow(x + nu, 2) + pow(z, 2))) - nu * z / ((pow(x - 1 + nu, 2) + pow(z, 2)) * sqrt(pow(x - 1 + nu, 2) + pow(z, 2)));
}

/* São definidas nas duas funções seguintes as funções j2 e j4 que resultam de  $J(d1, d2, d3, d4) = (d2, j2(d1, d2, d3, d4), d4, j4(d1, d2, d3, d4)).$ */

double j2(double x, double z, double d1, double d2, double d3, double nu)
{
    return 2*d4 + 3*d3*(1 - nu)*(x + nu)*z / (pow((x + nu)*(x + nu) + z*z, 2)*sqrt((x + nu)*(x + nu) + z*z)) + 3*d3*nu*(x - 1 + nu)*z / pow((x - 1 + nu)*(x - 1 + nu) + z*z, 2)*sqrt((x - 1 + nu)*(x - 1 + nu) + z*z) + d1 - d1 * ((1 - nu) * (z * z - 2 * (x + nu) * (x + nu)) / (pow((x + nu) * (x + nu) + z * z, 2) * sqrt((x + nu) * (x + nu) + z * z)) + nu * (z * z - 2 * (x - 1 + nu) * (x - 1 + nu)) / (pow((x - 1 + nu) * (x - 1 + nu) + z * z, 2) * sqrt((x - 1 + nu) * (x - 1 + nu) + z * z)));
}

double j4(double x, double z, double d1, double d3, double d4, double nu)
{
    return -2*d2 + d3 - d3 * ((1 - nu) * ((x + nu) * (x + nu) - 2 * z * z) / (pow((x + nu) * (x + nu) + z * z, 2) * sqrt((x + nu) * (x + nu) + z * z)) + nu * ((x - 1 + nu) * (x - 1 + nu) - 2 * z * z) / (pow((x - 1 + nu) * (x - 1 + nu) + z * z, 2) * sqrt((x - 1 + nu) * (x - 1 + nu) + z * z)) + d1 * (1 - nu) * 3 * (x + nu) * z / (pow((x + nu) * (x + nu) + z * z, 2) * sqrt((x + nu) * (x + nu) + z * z)) + 3 * d1 * nu * (x - 1 + nu) * z / (pow((x - 1 + nu) * (x - 1 + nu) + z * z, 2) * sqrt((x - 1 + nu) * (x - 1 + nu) + z * z)));
}

```

```
}

```

```
/* A função "ler" lê:

```

- o tempo de integração inicial,  $t$ , e final,  $tmax$ ;
- a posição inicial,  $(x, z)$  e a velocidade inicial,  $(y, w)$ ;
- a perturbação da posição inicial  $\delta$ ,  $(d1, d3) = (\delta, \delta)$  e da velocidade inicial,  $(d2, d4) = (\delta, \delta)$ ;
- o número de iterações,  $n$ ;
- o valor da menor massa normalizada,  $nu$ ;
- a constante de Jacobi,  $cj$ . \*/

```
void ler(double *t, double *x, double *y, double *z, double d1, double d2, double d3,
double *cj, double *tmax, double *n, double *nu)

```

```
{

```

```
    printf("Introduza os seguintes dados:");
    printf("\n-limite inferior do intervalo de tempo:");
    scanf("%lf",t);
    printf("\n-limite superior do intervalo de tempo:");
    scanf("%lf",tmax);
    printf("\n-o número de passos de integração:");
    scanf("%lf",n);
    printf("\n-o valor nu para a menor massa:");
    scanf("%lf",nu);
    printf("\n-a primeira componente da posição inicial:");
    scanf("%lf",x);
    printf("\n-a segunda componente da posição inicial:");
    scanf("%lf",z);
    printf("\n-a primeira componente da velocidade inicial:");
    scanf("%lf",y);
    printf("\n-a primeira componente da posição inicial modificada:");
    scanf("%lf",d1);
    printf("\n-a segunda componente da posição inicial modificada:");
    scanf("%lf",d3);
    printf("\n-a primeira componente da velocidade inicial modificada:");
    scanf("%lf",d2);
    printf("\n-a constante de Jacobi:");

```

```
scanf("%lf",cj);
}
```

/\* É na função "integraRK" que se desenvolve todo o processo iterativo de integração das duas EDOs, utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para calcular  $(x, y, z, w)$  e, repetindo-o para calcular  $(d1, d2, d3, d4)$ . As equações são integradas até que a distância entre as órbitas seja inferior a um valor definido por MAXDIST ou até que termine o tempo de integração. \*/

```
void integraRK(double *t, double *x, double *y, double *z, double *w, double h, double tmax, double dist1, double nu, double (*f2)(double, double, double, double), double (*f4)(double, double, double, double), double (*j2)(double, double, double, double, double, double), double (*j4)(double, double, double, double, double, double), double *d1, double *d2, double *d3, double *d4, double disti, double soma, double dist, double lb)
{
    double k1,k2,k3,k4,l1,l2,l3,l4,m1,m2,m3,m4,n1,n2,n3,n4;
```

```
int cont;
```

```
do
```

```
{
```

```
    k1 = h * y[0];
```

```
    l1 = h * (*f2)(x[0], z[0], w[0], nu);
```

```
    m1 = h * w[0];
```

```
    n1 = h * (*f4)(x[0], y[0], z[0], nu);
```

```
    k2 = h * (y[0] + l1/2);
```

```
    l2 = h * (*f2)(x[0] + k1/2, z[0] + m1/2, w[0] + n1/2, nu);
```

```
    m2 = h * (w[0] + n1/2);
```

```
    n2 = h * (*f4)(x[0] + k1/2, y[0] + l1/2, z[0] + m1/2, nu);
```

```
    k3 = h * (y[0] + l2/2);
```

```
    l3 = h * (*f2)(x[0] + k2/2, z[0] + m2/2, w[0] + n2/2, nu);
```

```
    m3 = h * (w[0] + n2/2);
```

```
    n3 = h * (*f4)(x[0] + k2/2, y[0] + l2/2, z[0] + m2/2, nu);
```

```
    k4 = h * (y[0] + l3);
```

```
    l4 = h * (*f2)(x[0] + k3, z[0] + m3, w[0] + n3, nu);
```

```
    m4 = h * (w[0] + n3);
```

```
    n4 = h * (*f4)(x[0] + k3, y[0] + l3, z[0] + m3, nu);
```

```
    x[0] = x[0] + (k1 + 2.0 * k2 + 2.0 * k3 + k4)/6.0
```

```
    y[0] = y[0] + (l1 + 2.0 * l2 + 2.0 * l3 + l4)/6.0
```

```
    z[0] = z[0] + (m1 + 2.0 * m2 + 2.0 * m3 + m4)/6.0
```

```

w[0] = w[0] + (n1 + 2.0 * n2 + 2.0 * n3 + n4)/6.0
k1 = h * d2[0];
l1 = h * (*j2)(x[0], z[0], d1[0], d3[0], d4[0], nu);
m1 = h * d4[0];
n1 = h * (*j4)(x[0], z[0], d1[0], d3[0], nu);
k2 = h * (d2[0] + l1/2);
l2 = h * (*j2)(x[0], z[0], d1[0] + k1/2, d3[0] + m1/2, d4[0] + n1/2, nu);
m2 = h * (d4[0] + n1/2);
n2 = h * (*j4)(x[0], z[0], d1[0] + k1/2, d2[0] + l1/2, d3[0] + m1/2, nu);
k3 = h * (d2[0] + l2/2);
l3 = h * (*j2)(x[0], z[0], d1[0] + k2/2, d3[0] + m2/2, d4[0] + n2/2, nu);
m3 = h * (d4[0] + n2/2);
n3 = h * (*j4)(x[0], z[0], d1[0] + k2/2, d2[0] + l2/2, d3[0] + m2/2, nu);
k4 = h * (d2[0] + l3);
l4 = h * (*j2)(x[0], y[0], d1[0] + k3, d3[0] + m3, d4[0] + n3, nu);
m4 = h * (d4[0] + n3);
n4 = h * (*j4)(x[0], z[0], d1[0] + k3, d2[0] + l3, d3[0] + m3, nu);
d1[0] = d1[0] + (k1 + 2.0 * k2 + 2.0 * k3 + k4)/6.0
d2[0] = d2[0] + (l1 + 2.0 * l2 + 2.0 * l3 + l4)/6.0
d3[0] = d3[0] + (m1 + 2.0 * m2 + 2.0 * m3 + m4)/6.0
d4[0] = d4[0] + (n1 + 2.0 * n2 + 2.0 * n3 + n4)/6.0
dist1 =sqrt(d1[0] * d1[0] + d2[0] * d2[0] + d3[0] * d3[0] + d4[0] * d4[0]);
t[0] = t[0] + h;
dist=sqrt(d1[0] * d1[0] + d3[0] * d3[0]);
lb = (soma + log(dist/dist1))/t[0];
energia = -(w[0] * w[0] + y[0] * y[0]) + x[0] * x[0] + z[0] * z[0] + 2 * (1 - nu)/(sqrt((x[0]
+ nu) * (x[0] + nu) + z[0] * z[0])) + 2 * nu / (sqrt((x[0] - 1 + nu) * (x[0] - 1 + nu) + z[0] * z[0]));
fprintf(e1, "\n%.5f\t%.10f", t[0], lb);
}
while(dist1 < MAXDIST && t[0] < tmax);
}

```

/\* Na função "ExpLyapunov" :

- é chamada a função "ler";
- são calculados  $w$  e  $d_4$  através do integral de Jacobi;
- é calculado o vector distância entre as duas posições iniciais,  $(d1, d2, d3, d4)$ ;

- é chamada a função "integraRK" durante o primeiro intervalo de tempo em que a distância entre as suas órbitas é inferior ao valor definido por MAXDIST e depois, sucessivamente é renormalizada a distância sempre que esta seja superior a MAXDIST, e é chamada a função "integraRK" , até atingir o tempo máximo de integração.

Algumas das variáveis utilizadas nesta função são:

- *disti* - norma da posição inicial (*d1*, *d3*);
- *dist* - norma de (*d1*, *d3*) ao longo do processo iterativo;
- *soma* - soma os valores de  $\log(\text{dist}/\text{disti})$ , obtidos ao longo das renormalizações;
- *h* - passo de integração;
- *lb* - expoente de Lyapunov calculado ao longo do processo iterativo.

Os valores de saída que são, por esta ordem, o tempo e o expoente de Lyapunov, são enviados para o ficheiro "expLyp". \*/

```
void ExpLyapunov()
{
    double t[1],x[1],y[1],z[1],w[1],h,tmax,n,nu,cj,dist1,disti;
    double d1[1],d2[1],d3[1],d4[1],dist,soma,lb,dist0;
    ler(t,x,y,z,d1,d2,d3,&cj,&tmax,&n,&nu);
    lb = 0;
    dist0 =sqrt(d1[0] * d1[0] + d2[0] * d2[0] + d3[0] * d3[0] + d4[0] * d4[0]);
    disti =sqrt(d1[0] * d1[0] + d3[0] * d3[0]);
    soma = 0;
    h = (tmax - t[0])/n;
    do
    {
        dist1 =sqrt(d1[0] * d1[0] + d2[0] * d2[0] + d3[0] * d3[0] + d4[0] * d4[0]);
        integraRK(t,x,y,z,w,h,tmax,dist1,nu,f2,f4,j2,j4,d1,d2,d3,d4,disti,soma,dist,lb);
        dist =sqrt(d1[0] * d1[0] + d3[0] * d3[0]);
        d1[0] = d1[0] * dist0/dist1;
        d2[0] = d2[0] * dist0/dist1;
        d3[0] = d3[0] * dist0/dist1;
        d4[0] = d4[0] * dist0/dist1;
        soma = soma + log(dist/disti);
        lb = soma/t[0];
    }
}
```

```
    while ( $t[0] < tmax$ );  
}  
  
int main(void)  
{  
    el=fopen("expLyp","w");  
    printf("Máximo Expoente de Lyapunov\n");  
    ExpLyapunov();  
    fclose(el);  
    return 1;  
}
```





# Bibliografia

- [1] Abraham R., Marsden J., *Foundations of mechanics*, (Addison-Wesley, 1978)
- [2] Arevelo L., Marsden J., *Time-frequency analysis of the restricted three body problem: Transport and resonance transitions*, Institute of Physics Publishing, **21**, 351-375, (2004).
- [3] Arnold V., *Métodos matemáticos da mecânica clássica*, (Mir, Moscovo, 1987).
- [4] Arnold V., *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*, Russian Mathematical Surveys, **18:6**, 85-191, (1963).
- [5] Arnold V., *The stability of the equilibrium position of a Hamiltonian system of ordinary differential equations in the general elliptic case*, Soviet. Math. Dokl., **2**, 247-249, (1961).
- [6] Arnold V., Kozlov V., Neishtadt A.I., *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, (Springer-Verlag, Berlin, 1997).
- [7] Arrowsmith D., Place C., *An introduction to Dynamical Systems*, (Cambridge University Press, 1990).
- [8] Benettin G., Galgani L., Strelcyn J., *Kolmogorov entropy and numerical experiments*, Physical Review A, **14**, 2338-2345, (1976).
- [9] Beurle K., Cooper N., Evans M., Murray C., *S/2004 S 5: A new co-orbital companion for Dione, Icarus*, article in press, (2005).
- [10] Boor C., Conte, S., *Elementary numerical analysis an algorithmic approach*, 3rd edition (McGraw-Hill, 1981).
- [11] Butikov E., *Regular Keplerian motions in classical many-body*, Eur. J. Phys. **21**, 1-18, (2000).
- [12] Cabral H., Meyer K., *Stability of equilibria and fixed points of conservative systems*, Nonlinearity, **12**, 1351-1352, (1999).

- [13] Deprit A., Deprit B., *Stability of the Triangular Lagrangian Points*, Astronomical Journal, **72**, 173-179, (1967).
- [14] Dokoumetzidis, A., Skokos, C., *Effective stability of the trojan asteroids*, Astronomical Journal, **367**, 729-736, (2001).
- [15] Font J., Nunes A., Simó C., *Consecutive quasi-collisions in the planar circular RTBP*, Nonlinearity, **15**, 115-142, (2001).
- [16] Goldstein H., *Classical Mechanics*, 2nd edition (Addison-Wesley, 1980).
- [17] Hagihara Y., *Celestial mechanics*, vol. IV, Part 2, (Japan society for the promotion of science, 1975).
- [18] Hirsh M., Smale S., *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, (Academic Press, 1974).
- [19] Laskar J., *A numerical experiment on the chaotic behaviour of the solar system*, Nature, **338**, 237-238, (1989).
- [20] Laskar J., *Secular evolution of the solar system over 10 million years*, Astron. Astrophys., **198**, 341-362, (1988).
- [21] Laskar J., *The chaotic motion of the solar system. A numerical estimate of the size of the chaotic zones*, Icarus, **88**, 266-291, (1990).
- [22] Leontovitch A., *On the stability of the Lagrange periodic solutions for the reduced problem of three bodies*, Soviet. Math. Dokl. **33**, 112-116, (1967).
- [23] Lichtenberg A., Lieberman M., *Regular and Chaotic Dynamics*, 2nd edition (Springer-Verlag, 1983).
- [24] Lyapunov A., *Stability of motion*, (Academic Press: New York, 1966).
- [25] Markeev A.P., *Stability of a canonical system with two degrees of freedom in the presence of resonance*, Prikl. Math. Mech., **4**, 738-744, (1968).
- [26] Melo W., Palis J., *Introdução aos sistemas dinâmicos*, (Editora Edgard Blücher, Ltda, 1978).
- [27] Moser J., *Is the solar system stable?*, Mathematical Intelligencer, **1**, 65-71, (1978).
- [28] Murray C., Dermott S., *Solar system dynamics*, (Cambridge University Press, 1999).
- [29] Oseledec V., *A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*, Trans. Moscow Math. Soc. **19**, 197-231, (1968).

- [30] Poincaré H., *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, I, II, III, (Paris, 1892, 1893, 1899).
- [31] Porco C., et al., *Cassini imaging science: initial results on Saturn's rings and small satellites*, *Science* **307**, 1226-1236, (2005).
- [32] Siegel C., Moser L., *Lectures on celestial Mechanics*, (Springer-Verlag, Berlin, 1971).
- [33] Sokolskii A., *Stability of the lagrange solutions of the restricted three body problem for the critical ratio of the masses*, *Prikl. Math. Mech.*, vol.39, **2**, 366-369, (1974).
- [34] Sussman G., Wisdom J., *Numerical evidence that Pluto is chaotic*, *Science*, **241**, 433-437, (1988).
- [35] Tancredi G., Sánchez A., Roig F., *A comparison between methods to compute Lyapunov exponents*, *Astronomical Journal*, **121**, 1171-1179, (2001).
- [36] Wiggins S., *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, (Springer-Verlag, New York, 1990).
- [37] Wisdom J., *Chaotic dynamics in the solar system*, *Icarus*, **72**, 241-275, (1987).