O conceito de reta tangente na obra pedagógica de Sebastião e Silva

Catarina Mota
Universidade do Minho
catlexmota@gmail.com

Maria Elfrida Ralha
Departamento de Matemática e Aplicações — Universidade do Minho
eralha@math.uminho.pt

Maria Fernanda Estrada
Universidade do Minho
festrada@math.uminho.pt

Resumo: As alterações políticas ocorridas no século XX Português tiveram reflexo direto no sistema educacional e no ensino da Matemática.

Sob alçada do ministro Francisco Leite Pinto é estabelecido, em 1959, um protocolo de cooperação com a OCDE, o Projeto Regional do Mediterrâneo, que tem como um dos objetivos uma reestruturação do ensino Português, pretendendo dotar o país de pessoas com o conhecimento científico e técnico capazes de desenvolverem a economia nacional.

O ensino da matemática é assim reformado, tendo José Sebastião e Silva um papel fundamental nesta reforma ao liderar, no triénio 1964–1966 a equipa responsável pelas alterações curriculares.

Nesta comunicação analisaremos o pensamento pedagógico de Sebastião e Silva a partir do tratamento dado ao conceito de reta tangente a uma curva nas suas obras pedagógicas, dando particular relevo a três aspetos: a introdução do conceito; os exemplos/exercícios propostos; a utilização da história da matemática no ensino.

Abstract: The political changes that took place in Portuguese 20th century had direct impact in the educational system and in Mathematics teaching.

Under the responsibility of the minister Francisco Leite Pinto it's established, in 1959, a cooperation protocol with OCDE, the Mediterranean Regional Project, that had as one of the goals reform the Portuguese educational system,

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CMAT através do FCT Project Est-C/MAT/UI0013/2011 e pela Bolsa de Doutoramento da FCT com a referência SFRH/BD/63176/2009.

aiming provide the country with people with scientific and technical knowledge able to develop the national economy.

The teaching of mathematics is, therefore, reformed having José Sebastião e Silva a fundamental role in this reform leading, in the years 1964–1966 the team responsible by the curricular changes.

In this paper we will analyze the pedagogical ideals of Sebastião e Silva from the treatment given to the concept of tangent line to a curve in his pedagogical works, emphasising three aspects: the concept introduction; the examples/exercises proposed; the use of history of mathematics in teaching.

1 Introdução

José Sebastião e Silva (1914–1972) foi um dos matemáticos e pedagogos que mais se distinguiu no século XX Português.

Do seu trabalho científico destacam-se os cerca de 50 artigos publicados em revistas nacionais e internacionais, na área da Lógica, Análise Funcional e Teoria das Distribuições. A importância destes artigos é de tal forma relevante que os atualmente denominados "Espaços Silva" são assim conhecidos em honra do trabalho desenvolvido pelo matemático português nesta área.

Contudo, nos dias de hoje, José Sebastião e Silva é essencialmente relembrado pelo seu trabalho enquanto professor e pedagogo. Exerceu o cargo de professor no Instituto Superior de Agronomia e na Faculdade de Ciências de Lisboa, embora o seu maior contributo para o ensino da Matemática se deva ao papel que desempenhou na reforma do ensino liceal português na década de 60 do século XX.

Aquando da assinatura do Projeto Regional do Mediterrâneo, projeto assinado entre Portugal e a OCDE e outros países do sul da Europa, para a melhoria do ensino nestes estados, uma das alterações efetuadas foi uma reforma curricular ao nível do Ensino da Matemática. No triénio 1964–1966 José Sebastião e Silva fez parte da equipa responsável por esta reforma. Neste âmbito, como nota Matos (2009), publicou manuais escolares, elaborou guias de utilização dos manuais publicados, organizou formação para os professores de matemática e, com as opções curriculares tomadas, contribuiu de forma direta para a introdução da matemática moderna em Portugal.

Autor de uma vasta obra pedagógica, constituída não só pelos manuais para o ensino secundário mas também por apontamentos para o ensino superior e artigos publicados em revistas, assim como a disseminação dos seus ideais através das ações de formação que deu em Oeiras, Sebastião e Silva difundiu nessa sua obra os seus ideais pedagógicos e contribuiu para a formação de uma nova geração de matemáticos e de professores de matemática.

Uma das características de Sebastião e Silva era o rigor com que tratava os conceitos e as definições. Um dos conceitos que mais problemas levanta no seu ensino/aprendizagem é o conceito de reta tangente a uma curva. A importância de uma completa compreensão dos conceitos e das definições tem sido amplamente estudada, sendo o caso da reta tangente um dos mais abordados. Vinner (2002, p. 75–76) e Tall (1990, p. 57) mostram nos seus trabalhos os problemas que surgem no ensino do conceito de reta tangente a uma curva e as consequências que daí podem advir, chamando à atenção que apenas um ensino completo deste conceito poderá evitar os problemas já diagnosticados.

Neste trabalho analisaremos, na sua obra pedagógica, a forma como Sebastião e Silva lida com um conceito elementar (tendo em conta a sua precoce introdução no ensino da matemática) mas que muitas vezes é de difícil aprendizagem. A metodologia seguida nesta análise segue o modelo sugerido por Sierra et al. (2003) e consiste em analisar a obra como um todo (título, ano de edição, destinatários e conteúdos) seguido de uma análise do conteúdo no livro em causa através do modo de introdução do conceito, representações do conceito, sequência do ensino e tipo de exercícios e problemas.

2 A Obra Pedagógica de Sebastião e Silva

A obra pedagógica de Sebastião e Silva é vasta e multifacetada. Desde os manuais escolares, aos apontamentos para o ensino superior, a artigos de opinião sobre as diferentes metodologias de ensino ou a utilização da calculadora, durante toda a sua vida Sebastião e Silva debruçou-se de forma séria sobre o ensino e deu a conhecer as suas ideias e ideais.

Nas diferentes obras/artigos publicados Sebastião e Silva aborda o conceito de reta tangente em três delas: *Transformações Geométricas*, para o ensino superior; *Compêndio de Álgebra*, e *Geometria Analítica e Plana* para o ensino secundário.

2.1 *Transformações Geométricas*

A obra *Transformações Geométricas*, é uma edição, datada de 1950, da Associação de Estudantes da Faculdade de Ciências de Lisboa e foi escrita para os alunos da disciplina de Geometria Descritiva que Sebastião e Silva lecionava nessa altura na Faculdade de Ciências de Lisboa.

Este encontra-se atualmente publicada no primeiro volume dos seus textos didáticos e ocupa, nessa edição (Silva, 1999, I, p. 187–300), 108 páginas seguidas de um índice de duas páginas. É composta por 26 capítulos, 1 apêndice e referências bibliográficas e aborda temas de geometria projetiva e diferencial.

O conceito de reta tangente é abordado em três capítulos distintos: no 14.º capítulo, aquando do estudo das secções cónicas; no 26.º capítulo, aquando da introdução da geometria diferencial; e no 27.º capítulo, no estudo da relação entre o conceito de tangente e de assíntota.

2.2 *Geometria Analítica e Plana*

Geometria Analítica e Plana, obra publicada em 1956, foi o livro único do 7.º ano do liceu[1] nos concursos do Ministério da Educação Nacional de 1957, 1962 e 1967.

Este livro de 138 páginas inicia com uma pequena introdução, onde é feita a distinção entre a Geometria e a Análise, é explicado o significado da geometria analítica e as circunstâncias que levaram ao surgimento deste novo ramo da geometria.

> A matemática compreende dois ramos principais: a *análise*, que trata dos números e das relações entre números (expressa por equações, inequações, etc.), e a *geometria*, que estuda as propriedades relativas a pontos e a conjuntos de pontos (lugares geométricos). (...)
>
> A ideia básica deste método [geometria analítica] — simples como todas as ideias realmente fecundas — consiste em definir a posição de cada ponto por meio dum sistema de números (dois números, em geometria plana, e três, em geometria do espaço), o que permite traduzir integralmente a linguagem da geometria na linguagem precisa e maleável da análise: as figuras geométricas passam então a ser descritas por meio de equações e inequações; os problemas da geometria transformam-se em problemas de álgebra ou de cálculo infinitesimal; os teoremas da geometria tornam-se demonstráveis por meio da análise. (Silva, 1970, p. 5).

Logo após a introdução, surgem as notas históricas, uma das características mais marcantes das obras de Sebastião e Silva e que mostram a importância

[1] O 7.º ano do ensino liceal corresponde ao atual 11.º ano de escolaridade do sistema de ensino português.

por ele atribuída a este ramo da matemática. Nestas notas históricas Sebastião e Silva apresenta uma breve biografia de René Descartes e Pierre de Fermat, os matemáticos que Sebastião e Silva considera como os fundadores da Geometria Analítica. Estas referências históricas são complementadas com indicações bibliográficas que permitem aos interessados (professores e/ou alunos) aprofundarem a história da matemática.

No que se refere aos conteúdos da obra estes encontram-se divididos em 4 capítulos:

1. Pontos e números;
2. Lugares Geométricos e equações;
3. Estudo geral da reta;
4. Estudo elementar das cónicas.

Os diferentes capítulos encontram-se estruturados com a apresentação da teoria, seguida de exemplos. No final do capítulo encontram-se os exercícios e respetivas soluções.

O conceito de reta tangente nesta obra é abordado no último capítulo aquando do estudo da circunferência.

2.3 *Compêndio de Álgebra*

A obra *Compêndio de Álgebra*, escrita em colaboração com J. D. Silva Paulo, tem a primeira edição datada de 1956 e foi o livro único nos concursos do Ministério da Educação Nacional de 1958, 1963 e 1968 para o ensino liceal. Utilizado até, pelo menos, aos anos de 1973 e 1974 é composto por 2 tomos: o primeiro para o 6.º ano[2] e o segundo para o 7.º ano do liceu.

O primeiro volume, composto por 312 páginas, encontra-se dividido em 10 capítulos abordando as seguintes temáticas: conceito de número (números naturais, racionais, reais e complexos); funções reais de variável real; limites de sucessões e de funções; cálculo diferencial; polinómios e frações algébricas.

O segundo volume, composto por 283 páginas, contém 13 capítulos cujas temáticas são: análise combinatória; binómio de Newton; resolução de equações e inequações; resolução de problemas por meio de equações; função exponencial e logarítmica; propriedades e tábuas de logaritmos.

A estrutura destes dois volumes é semelhante à da *Geometria Analítica Plana*: exposição dos conceitos teóricos e exemplos e no final do capítulo são

[2] O 6.º ano do ensino liceal corresponde ao atual 10.º ano de escolaridade do sistema de ensino português.

apresentados os exercícios de consolidação e as respetivas soluções. A diferença centra-se com a introdução, no final de vários capítulos, de notas históricas.

No *Compêndio de Álgebra* o conceito de reta tangente a uma curva é estudado no 1.º volume, aquando da introdução ao cálculo diferencial.

3 O conceito de reta tangente

José Sebastião e Silva trata o conceito de reta tangente abordando-o de duas formas distintas: o conceito de reta tangente à circunferência e o conceito de reta tangente a uma curva geral. A separação deste estudo deve-se às propriedades particulares que a reta tangente à circunferência apresenta, e que não podem ser generalizadas para outras curvas.

É também notória a diferença entre o tratamento dado ao conceito nas obras dedicadas ao ensino liceal e ao ensino superior, decorrentes das diferenças de conteúdos a lecionar. Analisemos em pormenor estes estudos.

3.1 O conceito de reta tangente no *Compêndio de Álgebra*

O conceito de reta tangente surge, no *Compêndio de Álgebra*, associado ao conceito de declive de uma curva na introdução ao Cálculo Diferencial.

O declive de uma curva é apresentado nos seguintes moldes:

> Dados uma curva C, um ponto P_0 da curva e P um ponto móvel sobre a curva, o limite
>
> $$d_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
>
> dá-nos o **declive da curva** C **no ponto** P_0 (Silva, 1963, p. 217–218).

No sentido de ajudar a clarificar o conceito o autor apresenta uma figura elucidativa (Silva, 1963, p. 217).

Note-se que, na figura, a ideia do movimento se encontra presente, e é representado por setas que indicam as diferentes direções do movimento de aproximação dos dois pontos, e consequente movimento das retas secantes que se aproximam de uma posição fixa — a reta tangente.

Inicialmente a reta tangente é introduzida nos seguintes termos:

> A reta t, que passa por P_0 e tem declive d_0, diz-se **tangente à curva no ponto** P_0 (Silva, 1963, p. 217–218).

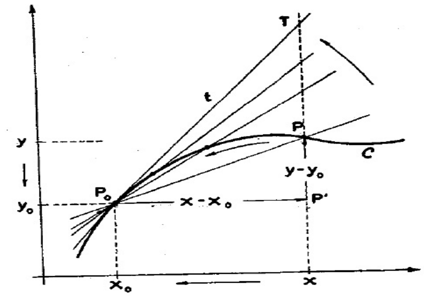

Figura 1: Ilustração do conceito de declive de uma curva.

Contudo, a ideia transmitida pela representação gráfica do declive de uma curva é utilizada para apresentar uma definição alternativa de reta tangente a uma curva num ponto, definição que ainda hoje é a utilizada em vários manuais do ensino secundário.

> Quando um ponto móvel P tende para o ponto fixo P_0, a secante P_0P tende para uma posição limite t, que é a tangente à curva no ponto P_0 (Silva, 1963, p. 218).

Sebastião e Silva dedica-se, em seguida, à análise da existência (ou não) de retas tangentes verticais.

Quando, nesta obra, definiu declive de uma reta (Silva, 1963, p. 217) Sebastião e Silva considerou que as retas verticais tinham declive infinito (1963, p. 217), pelo que neste ponto também considera, de forma análoga, que uma curva genérica pode ter declive infinito. Contudo, impõe uma condição para a existência de reta tangente nesse ponto:

> Se aquele limite d_0 for ∞, diremos que o *declive da curva em P_0 é infinito.* Mas só quando o sinal deste for determinado se pode então falar de «tangente à curva em P_0» (Silva, 1963, p. 218).

Com este resultado Sebastião e Silva restringe a existência de retas tangentes verticais aos casos em que os limites laterais do declive da curva têm como resultado infinito com o mesmo sinal. Com esta distinção é possível a existência de retas tangentes verticais, por exemplo em pontos de inflexão de algumas curvas, mas não se consideram como retas tangentes as retas verticais que podem surgir como limites das secantes em pontos angulosos de certas curvas.

Depois de estabelecer a relação entre o conceito de reta tangente a uma curva num ponto e o conceito de declive da curva nesse ponto, Sebastião e Silva relaciona a reta tangente com a derivada no ponto de tangência da função que define a curva, estabelecendo uma relação direta entre um problema de análise e um problema de geometria.

> A derivada da função $f(x)$ em x_0 é o declive do gráfico dessa função no ponto de abcissa x_0.
>
> Como o declive de uma curva num ponto é, por definição, o declive da tangente à curva nesse ponto, *o cálculo da derivada traduz, em análise, o problema geométrico da determinação da tangente* (Silva, 1963, p. 221).

Ao contrário do que seria de esperar não existe qualquer exemplo ou exercício relativo à determinação da equação da reta tangente ao gráfico de uma função por um dado ponto, embora em vários gráficos apareçam traçadas retas tangentes para facilitar a compreensão da relação existente entre o sinal da derivada e a monotonia da função, ou o sinal da segunda derivada e a concavidade da função. Este facto pode dever-se à não referência no programa (Decreto n.º 39807 de 7 de setembro de 1954 do Ministério da Educação Nacional) ao estudo do conceito de reta tangente pelo que Sebastião e Silva terá optado por não aprofundar esse estudo com a inclusão de exercícios sobre este tema.

O capítulo termina com notas históricas sobre o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, em particular biografias de Newton e de Leibniz, não sendo contudo referida a questão da determinação das retas tangentes a curvas, problemas que os dois matemáticos trataram.

Sebastião e Silva abordará a determinação da reta tangente a uma curva na sua *Geometria Analítica Plana*.

3.2 O conceito de reta tangente na *Geometria Analítica Plana*

Na *Geometria Analítica Plana* Sebastião e Silva estuda diversas propriedades geométricas recorrendo a equações, nos moldes tradicionais da geometria analítica.

No último capítulo, intitulado "Estudo Elementar das Cónicas", estuda as propriedades das cónicas enquanto lugares geométricos definidos por equações do 2.º grau; estuda então o conceito de reta tangente à circunferência, apresentando no subcapítulo 46, a resolução de problemas relativos a tangentes.

Após o estudo de algumas propriedades da circunferência, Sebastião e Silva dedica-se à determinação da interseção de uma reta com uma circunferência e é neste contexto que apresenta a sua definição de reta tangente.

Começa por fazer notar que, dado uma reta poder ser representável por uma equação de 1.º grau em x e y enquanto uma circunferência é representável por uma equação de 2.º grau em x e y, determinar a interseção de uma reta com uma circunferência se reduz à resolução de um sistema de duas equações em x e em y, o que originará a resolução de uma equação do 2.º grau com uma só incógnita. Assim, é possível dizer que o problema da interseção de uma reta com uma circunferência se reduz à resolução de uma equação de 2.º grau, de coeficientes reais, numa incógnita. Sebastião e Silva analisa então as diferentes soluções desta equação, e nesse contexto define reta tangente nos seguintes termos:

> Como se sabe, uma equação do 2.º grau, de coeficientes reais, numa incógnita, pode ter duas raízes reais (distintas), uma só raiz real (dupla) ou duas raízes imaginárias. Assim, no 1.º caso, a interseção será formada por dois pontos distintos (*a reta é secante*); no 2.º caso, a interseção será formada de um único ponto (*a reta é tangente*); no 3.º caso, a interseção será vazia (*a reta não encontra a circunferência*). (Silva, 1970, p. 107).

A caracterização da reta tangente como a reta que tem um único ponto em comum com a circunferência, embora conhecida desde Euclides, tornou-se generalizada com a introdução da geometria analítica por Descartes e é ainda hoje a definição apresentada em diversos livros de texto aos alunos aquando da lecionação do conceito de reta tangente à circunferência. Seguem-se três exemplos que visam representar as três situações definidas anteriormente.

No subcapítulo seguinte, Sebastião e Silva debruça-se sobre problemas relativos a tangentes à circunferência dividindo-os em dois tipos, que designa de espécies:

> *Problemas de 1.ª espécie:* é dada uma circunferência e pede-se uma reta que seja tangente à circunferência, em dadas condições.
>
> *Problemas de 2.ª espécie:* é dada uma reta e pede-se uma circunferência que seja tangente à reta, em dadas condições. (Silva, 1970, p. 108)

Estes problemas são aprofundados com a apresentação de vários exemplos ilustrativos de cada uma das espécies de problemas. Relativamente aos problemas da 1.ª espécie, são apresentados dois exemplos: o primeiro consiste na determinação da reta tangente a uma circunferência por um ponto da circunferência; o segundo consiste na determinação da equação da reta tangente a uma circunferência por um ponto exterior à circunferência.

Do primeiro exemplo ressalta a nota final onde é estabelecida a correspondência entre a resolução no âmbito da geometria analítica e a resolução recorrendo às derivadas, método que havia sido estudado pelos alunos no ano anterior utilizando o *Compêndio de Álgebra*. Esta constante interligação entre os diferentes conteúdos é uma das marcas das obras de Sebastião e Silva que pretende fornecer sempre aos seus leitores uma visão integradora e completa da matemática e não apenas uma visão compartimentada.

No que concerne ao segundo exemplo, saliente-se a nota que ressalva a existência de tangentes verticais. À semelhança do que havia feito no *Compêndio de Álgebra*, Sebastião e Silva não evita as questões relacionadas com o infinito, salientando-as e esclarecendo-as de modo a fornecer aos alunos uma visão completa do conceito que está a tratar.

Já os problemas da segunda espécie são considerados facultativos, dado não se encontrarem incluídos no programa. O facto de, embora facultativos, Sebastião e Silva os incluir na sua obra mostra-nos a importância atribuída pelo autor a um tratamento completo dos diferentes temas abordados.

Também nestes problemas são apresentados dois exemplos: o primeiro consiste na determinação da circunferência que contém um ponto e é tangente a uma reta num ponto dado; o segundo pretende a determinação da circunferência que contém dois pontos dados e é tangente a uma reta dada.

No primeiro exemplo é de realçar a necessidade da utilização da perpendicularidade entre a reta tangente e o raio da circunferência pelo ponto de tangência, relação que não é nunca referida nesta obra. Contudo, segundo o programa da disciplina de matemática (Decreto n.º 39807 de 7 de setembro de 1954 do Ministério da Educação Nacional) o estudo da circunferência e da reta tangente à circunferência teria já sido estudado no 3.º ano[3], em termos de geometria euclidiana, pelo que este facto seria já do conhecimento dos alunos.

Com estes exemplos Sebastião e Silva termina o estudo teórico do conceito de reta tangente à circunferência. Embora um estudo análogo pudesse ter sido realizado relativamente às outras cónicas, Sebastião e Silva não o apresenta, talvez devido ao facto de se encontrar fora do âmbito do programa.

O estudo do conceito de reta tangente é apenas novamente explorado nos exercícios propostos no final do capítulo. Dos 21 exercícios sobre a circunferência, 7 referem-se ao conceito de reta tangente, sendo que 4 destes são facultativos, uma vez que são problemas da 2.ª espécie. Destes exercícios, salienta-se o diferente grau de dificuldade dos exercícios propostos e os diferentes objetivos que se pretendem atingir com os mesmos.

[3] O 3.º ano do ensino liceal corresponde ao atual 7.º ano de escolaridade do sistema de ensino português.

Os dois primeiros exercícios (exercícios 12 e 13) são exercícios de consolidação de conceitos e procedimentos, sendo análogos aos exemplos de 1.ª espécie apresentados por Sebastião e Silva no corpo do texto. Já o exercício 14, embora também pretenda a determinação da reta tangente a uma circunferência dada, não fornece pontos da reta mas sim uma reta paralela à reta pretendida. Este exercício permite uma revisão dos conceitos relativos a retas paralelas e, mais uma vez, uma interligação de diferentes conceitos estudados no âmbito da disciplina de matemática.

Os exercícios facultativos (exercícios 16 a 19) conduzem à elaboração de raciocínios mais complexos. Enquanto os exercícios 16 e 17 são de consolidação dos procedimentos apresentados nos exemplos dos problemas de 2.ª espécie, os exercícios 18 e 19 exigem uma mobilização constante de conceitos e procedimentos estudados anteriormente e permitem apresentar aos alunos a matemática como uma ciência onde os diferentes temas/conteúdos/conceitos se encontram interrelacionados.

O problema da determinação das retas tangentes a curvas é também referido nas notas históricas que se encontram no início da *Geometria Analítica Plana*.

> Além disso, Fermat foi considerado por Newton um percursor do cálculo diferencial, no seu estudo das tangentes aos gráficos das funções, assunto que também mereceu a atenção de Descartes. (Silva, 1970, p. 14)

Embora Sebastião e Silva não aborde em pormenor esta questão fornece ao leitor a indicação de onde poderá encontrar mais informações sobre o problema da determinação das tangentes, ao referir dois dos matemáticos que mais contribuíram para a resolução deste problema.

Esgotado o estudo do conceito de reta tangente a uma curva no âmbito do programa do ensino liceal, Sebastião e Silva abordará em pormenor este tema no ensino superior, nas suas aulas de Geometria Descritiva na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

3.3 O conceito de reta tangente nas *Transformações Geométricas*

Na obra *Transformações Geométricas*, dedicada a alunos do ensino superior, Sebastião e Silva embora se refira a resultados de geometria euclidiana dedica-se essencialmente ao estudo da geometria projetiva e de homologias[4].

[4]Homologia entre dois planos α e β é uma transformação pontual biunívoca que transforma retas em retas, deixa invariante os pontos de uma reta (eixo da homologia) e tal que retas que

Uma das temáticas estudadas por Sebastião e Silva à custa das homologias são as secções cónicas, começando pela circunferência, e é neste contexto que introduz o conceito de reta tangente:

> Uma reta r se diz *secante* ou *tangente* a uma circunferência $[C]$, conforme o número de pontos comuns a r e a $[C]$ é 2 ou 1. (Silva, 1999, p. 241)

Note-se que esta definição já tinha sido introduzida anteriormente aos alunos no ensino liceal aquando do estudo da geometria analítica, embora na altura, o número de pontos de interseção entre a reta tangente e a circunferência fosse apresentado em termos do número de soluções de uma equação do 2.º grau.

Esta definição é estendida a todas as cónicas e, utilizando as homologias, é estabelecida a relação entre o conceito de reta tangente e o conceito de assíntota, relação facilmente justificada em geometria projetiva.

> Se r é tangente a $[C]$, a imagem $r*$ de r por meio de uma homologia Θ será ainda tangente à imagem de $[C]$ por meio de Θ. Em particular, se j encontra $[C]$ em dois pontos M, N, as tangentes a, b a $[C]$ em M, N serão convertidas por Θ nas tangentes $a*$, $b*$ a $[C]*$ *nos pontos impróprios*[5] $M*$, $N*$. (...)
>
> Diz-se que uma reta é *assíntota* de uma cónica quando é tangente à cónica num seu ponto impróprio. (Silva, 1999, p. 241)

Note-se que esta definição de assíntota estabelece, de modo formal, a relação entre o conceito de tangente e assíntota, relação muitas vezes estabelecida apenas de modo intuitivo.

É em seguida analisado um método para a construção da reta tangente a uma cónica por um dado ponto. O método proposto assenta no conhecimento rigoroso da determinação, apenas com régua e compasso, da reta tangente a uma circunferência por um ponto dado, no facto de retas tangentes serem transformadas em retas tangentes por homologias, e ainda no facto de que qualquer cónica é imagem de uma circunferência por uma homologia. Para análise deste método são apresentados dois exemplos de determinação das tangentes a duas elipses distintas (fig. 3).

unem pontos correspondentes passam todas pelo mesmo ponto (centro da homologia) (Silva, 1990, p. 216).

[5]Pontos impróprios ou pontos de infinito são os pontos que se juntam ao espaço euclideano para obter o espaço projetivo [Silva, 1999, p. 192].

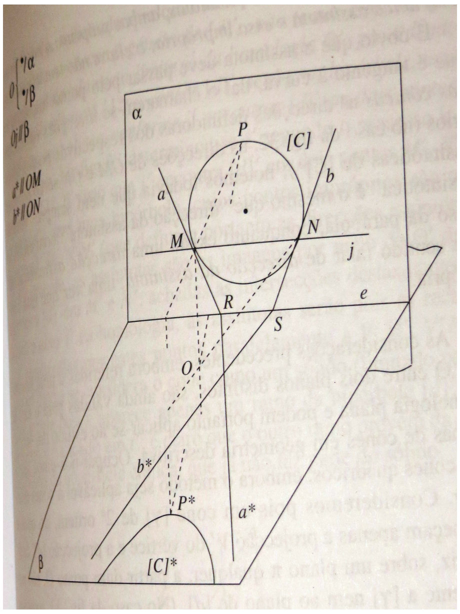

Figura 2: Ilustração da relação entre o conceito de reta tangente e o conceito de assíntota.

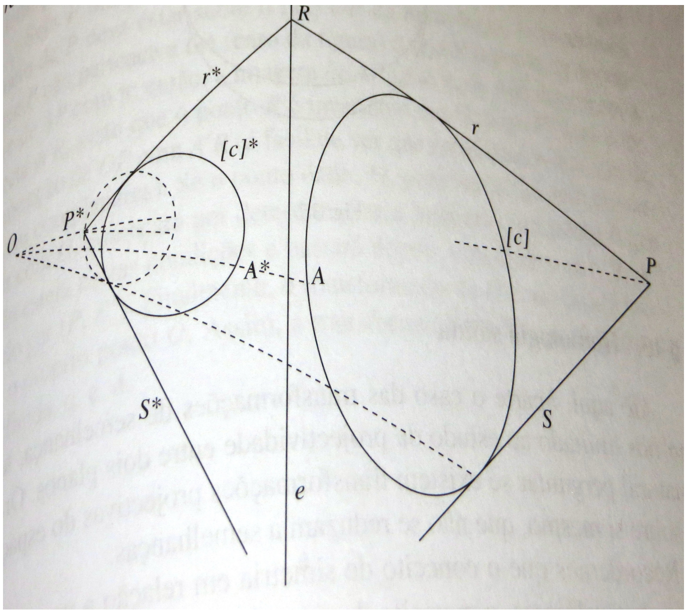

Figura 3: Exemplo da determinação das tangentes à elipse.

O estudo do conceito de reta tangente é retomado, já no final da obra, aquando da introdução de algumas noções de geometria diferencial.

Ainda antes da definição formal, Sebastião e Silva chama a atenção para a impossibilidade de generalização, para qualquer curva, da definição apresentada anteriormente para a circunferência, tentando deste modo evitar que os seus alunos cometam o erro comum desta generalização.

> O conceito de tangente é inicialmente definido, para o caso da circunferência, de maneira elementar. Tal definição pode ainda ser aplicada no caso das cónicas, como se fez no 14.º, mas é inaplicável ao caso de uma linha qualquer. (Silva, 1999, p. 278)

Sebastião e Silva apresenta então uma ideia intuitiva da noção de reta tangente:

> A reta tangente num ponto M é a posição limite para que tende a secante que passa por M, quando o outro ponto da interseção tende para M.

Note-se que esta ideia intuitiva tinha sido já apresentada por Sebastião e Silva no seu *Compêndio de Álgebra* para os alunos do 6.º ano do liceu. Contudo, no *Compêndio de Álgebra* Sebastião e Silva não formaliza o conceito como o faz nas *Transformações Geométricas*, formalização que não está incluída no programa respetivo.

A definição rigorosa do conceito de reta tangente apresentada por Sebastião e Silva em termos de geometria diferencial é:

> Seja C uma linha contínua e M um ponto simples (próprio[6]) de C. É claro que M divide C em duas partes, que podemos chamar *anterior e posterior* a M (supondo a linha C orientada, isto é, percorrida num determinado sentido). Seja agora P um ponto variável de C *posterior* a M; diz-se que a semirreta $\hat{M}P$ (de origem $\hat{M}$) *tende para a posição limite MT ao tender de P para M*, quando, qualquer que seja o número $\epsilon > 0$, se possa sempre associar-lhe $\delta > 0$, de modo que se tenha
>
> $$P\hat{M}T < \epsilon, \text{ desde que } dis(P, M) < \delta;$$
>
> nesta hipótese, diz-se ainda que a semirreta $\hat{M}T$ é *semitangente a C em M, à direita*, e analogamente à *esquerda* (basta considerar um ponto variável de C anterior a M).

[6]Ponto próprio é um ponto do espaço euclideano (Silva, 1999, p. 192).

> Pode acontecer que a linha C admita em M duas semi-tangentes $\hat{M}T$, $\hat{M}T_1$ diretamente opostas; então a reta TT_1 formada pelas duas semi-tangentes é chamada *tangente* a C no ponto M. (Silva, 199, p. 278–279)

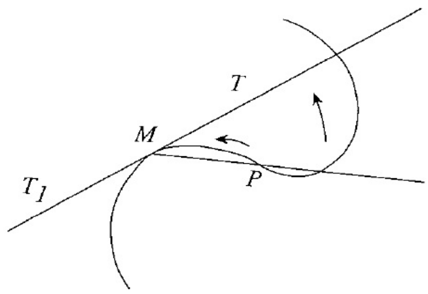

Figura 4: Ilustração do conceito de reta tangente a uma curva.

Note-se que, há semelhança do que se verifica no *Compêndio de Álgebra*, atendendo a que na definição existe a ideia de movimento essa ideia de movimento é transmitida na imagem que pretende ilustrar o conceito definido, pretendendo Sebastião e Silva obter uma representação o mais completa possível do conceito apresentado (fig. 4).

Esta tentativa de formar nos seus leitores uma imagem completa do conceito é reforçado pelos casos referidos após a definição, onde Sebastião e Silva chama a atenção dos seus leitores para alguns dos erros mais comuns relacionados com o conceito de reta tangente:

- Tratando-se de uma linha qualquer C o facto de uma reta r ser ou não tangente a C nada tem que ver com o número de pontos que r encontra C. [Silva, 1999, p. 279]
- A tangente r pode atravessar a linha C no ponto de tangência (fig. 5). (Silva, 1999, p. 279)
- Toda a reta r admite como tangente, em cada um dos seus pontos, a própria reta r. (Silva, 1999, p. 279)

Analisados os diferentes casos onde pode existir reta tangente (pontos regulares) Sebastião e Silva apresenta os casos onde a reta tangente não existe (pontos singulares). De facto, um ponto M de C é singular nos seguintes casos:

- Admite duas semitangentes não colineares (ponto anguloso) (fig. 6); (Silva, 1999, p. 280)

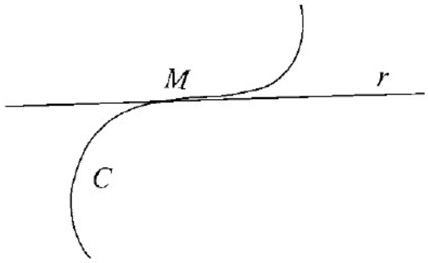

Figura 5: Reta tangente a uma curva num ponto de inflexão.

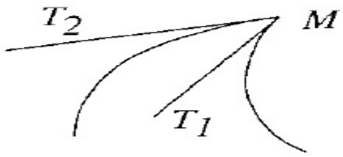

Figura 6: Representação de um ponto anguloso.

- Admite duas semitangentes coincidentes (ponto de regressão) (fig. 7); (Silva, 1999, p. 280)

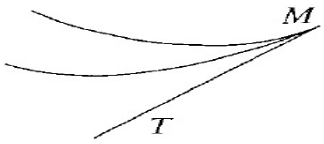

Figura 7: Representação de um ponto de regressão.

- M é um extremo de C com uma semitangente (*ponto de suspensão*) (fig. 8); (Silva, 1999, p. 280)
- Não admite semitangente (fig. 9). (Silva, 1999, p. 280)

A análise de todos estes casos permite que os leitores/alunos concebam uma imagem mental do conceito de reta tangente completo e não estereotipado, eliminando dúvidas e esclarecendo possíveis conflitos mentais entre a definição formal e a sua representação.

Figura 8: Representação de um ponto de suspensão.

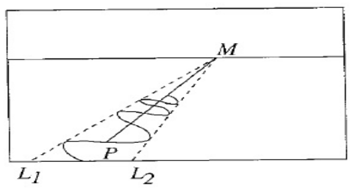

Figura 9: Representação de um ponto que não admite semitangentes.

De salientar também a referência por Sebastião e Silva a curvas que não admitem reta tangente em qualquer dos seus pontos, como é o caso da curva representativa da função de Weierstrass, o que mais uma vez contribui para que o conceito de reta tangente seja completamente entendido e os casos contra-intuitivos sejam tidos em conta e não ignorados. Neste seguimento é também abordado o caso das retas tangentes a pontos múltiplos.

> Se um ponto M é ponto múltiplo de C não faz sentido falar de tangente, mas algumas partes podem admitir tangentes cujo nome se estende. (Silva, 1999, p. 281)

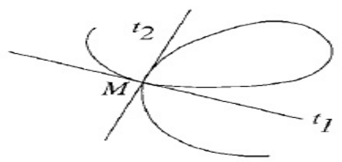

Figura 10: Representação das retas tangentes num ponto múltiplo.

O estudo do conceito de reta tangente é terminado com a análise do carácter projetivo deste conceito: se a reta r é tangente à linha C e não passa pelo centro de projeção O então a imagem de r será tangente à imagem de C pela projeção de centro O.

Note-se que este resultado tinha sido já apresentado no caso das homologias, sendo agora reforçado para o caso da projeção.

Do estudo do conceito de reta tangente efetuado por Sebastião e Silva nas *Transformações Geométricos* destaca-se o rigor e o formalismo das definições, embora sempre complementado com uma ideia intuitiva que pretende ajudar a entender o conceito, assim como a importância atribuída à análise de todos os casos, por mais contra-intuitivos que sejam.

4 Notas Finais

Sebastião e Silva marcou uma geração de alunos e de professores de matemática. Desde os manuais, aos cursos de formação de formação de profesores assim como na lecionação no ensino superior a sua faceta de pedagogo, sempre interessado no desenvolvimento do ensino/aprendizagem da matemática marcou a forma como em Portugal se encarava e ensinava matemática.

No tratamento que Sebastião e Silva deu ao conceito de reta tangente na sua obra pedagógica são visíveis muitos dos ensinamentos que ainda hoje os professores devem ter em conta aquando da introdução de um novo conceito.

A importância do currículo: Ao apresentar alguns exercícios e problemas como facultativos, assim como ao não aprofundar o conceito de reta tangente no *Compêndio de Álgebra*, Sebastião e Silva mostra-nos um profundo conhecimento do currículo que tem para lecionar. Atualmente, os livros de texto substituem muitas vezes o currículo pelo que, o cuidado e a atenção dedicadas por Sebastião e Silva ao currículo devem ser uma lembrança para os professores atuais de que um efetivo conhecimento do currículo é essencial no processo de ensino/aprendizagem;

As definições: Sebastião e Silva adequa a definição de reta tangente que apresenta nas diferentes obras ao ramo da matemática que se encontra a apresentar, assim como ao nível de ensino para o qual a obra se destina. Contudo, saliente-se também a constante interligação entre as diferentes formas de definir o mesmo conceito, numa tentativa de garantir que os seus leitores/alunos entendam que se trata do mesmo conceito e que as propriedades já estudadas não deixam de se verificar apenas por uma alteração de linguagem ou de formalização;

Os exemplos/exercícios: A escolha de exemplos e exercícios que permitem, por um lado a consolidação de conceitos e procedimentos, por outro lado, a interligação de diferentes conceitos e ainda a exploração de todas as possibilidades, e exemplos menos usuais mostram a importância que Sebastião e Silva atribuíu à necessidade de um ensino rigoroso, onde tudo fosse feito para que os leitores/alunos desenvolvessem imagens mentais completas dos diferentes conceitos/conteúdos e se habituassem a investigações exaustivas.

A História da Matemática: A inclusão de biografias nas suas obras para o ensino liceal seguiam uma indicação direta do programa em vigor. Realce-se contudo, a escolha dos matemáticos apresentados por Sebastião e Silva nas suas notas históricas assim como a bibliografia que completa algumas destas notas. Com informações detalhadas não só da vida mas da obra de matemáticos como Descartes, Fermat, Newton ou Leibniz, Sebastião e Silva permite que os seus leitores,em caso de interesse, possam complementar e aprofundar de forma rigorosa os conteúdos abordados.

Face a estes ensinamentos, e no ano em que se celebra o centenário do nascimento de José Sebastião e Silva, resta-nos desejar que os ensinamentos deixados por este brilhante matemático e pedagogo sejam cada vez mais divulgados e tornados prática corrente nas salas de aula dos dias de hoje.

Referências

Decreto n.º 39807 de 7 de setembro de 1954 do Ministério da Educação Nacional. Diário do governo. I Série. N.º 198.

Matos, J. M. (2009). Changing representations and practices in school mathematics: the case of Modern Math in Portugal. Em K. Bjarnadóttir, F. Furinguetti e G. Schubring (Eds.), *"Dig where you stand" Proceedings of a Conference on Ongoing Research in the History of Mathematics Education*, Gardabær, Iceland, June 20–24 2009. Reikyavik: Universidade da Islândia.

Sierra Vázquez, M.; González Astudillo, M. T.; López Esteban, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática*, vol. 15, núm. 1, abril, 2003, p. 21–49

Silva, J. S. (1963). *Compêndio de Álgebra*. 1.º Tomo. Lisboa. Livraria Popular de Francisco Franco.

Silva, J. S. (1970). *Geometria Analítica Plana*. Lisboa. Empresa Literária Fluminense, L.DA.

Silva, J. S. (1950/1999). Transformações Geométricas. In: *Textos Didácticos*. Vol. I. Lisboa. Fundação Calouste Gulbenkian.

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the Learning of Calculus and Analysis. In: *Focus*, vol. 12, 3&4, 49–63.

Vinner, S. (2002). The Role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In David Tall (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*. 65–81. New York. Kluwer Academic Publishers.