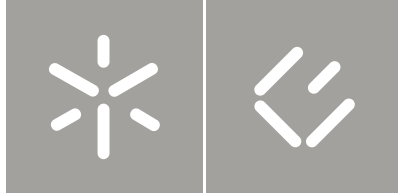


Universidade do Minho
Escola de Economia e Gestão

Artur Jorge Pereira Rodrigues

**Contribuições para a Avaliação da Modularidade
no Contexto das Opções Reais**

Dezembro de 2005



Universidade do Minho
Escola de Economia e Gestão

Artur Jorge Pereira Rodrigues

**Contribuições para a Avaliação da Modularidade
no Contexto das Opções Reais**

Tese de Doutoramento em Ciências Empresariais
Especialização em Finanças Empresariais

Trabalho efectuado sob a orientação do
Professor Doutor Manuel José da Rocha Armada
Departamento de Gestão

Dezembro de 2005

DECLARAÇÃO

Nome: ARTUR JORGE PEREIRA RODRIGUES

Endereço Electrónico: artur.rodrigues@eeg.uminho.pt **Telefone:** 253 604 564

N.º do Bilhete de Identidade: 9505081

Título da Tese de Doutoramento:

Contribuições para a Avaliação da Modularidade no Contexto das Opções Reais

Orientador:

Professor Doutor Manuel José da Rocha Armada

Ano de conclusão: 2005

Designação do Doutoramento:

Ciências Empresariais, Especialização em Finanças Empresariais

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTEGRAL DESTA TESE/TRABALHO APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO,
MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO QUE A TAL SE COMPROMETE.

Universidade do Minho, / /

Assinatura: _____

Agradecimentos

Este momento, tão ansiado, por ser o epílogo de uma longa jornada, só foi possível graças ao contributo de várias pessoas que cabe, aqui, destacar.

Em primeiro lugar, manifesto o meu apreço pelo meu orientador, o Professor Rocha Armada, que ao longo dos últimos anos, e, uma vez mais nesta orientação, contribuiu para o estabelecimento de padrões de qualidade, que marcarão, indelevelmente, a minha carreira de investigador, qua agora dá os primeiros passos.

Os meus colegas e amigos da Universidade do Minho, em particular os membros do grupo de Finanças têm, certamente, uma quota-parte de responsabilidade na conclusão deste trabalho. Uma palavra muito especial cabe ao Nelson Areal, que, para além dos vários contributos relacionados com a investigação que realizei, contribuiu para que aderisse a ferramentas que facilitarão, indiscutivelmente, o meu trabalho futuro de investigação.

Agradeço, também, os contributos e apoio dos Professores Andrea Gamba e Dean Paxson.

Gostaria de agradecer, ainda, ao Departamento de Gestão, ao Núcleo de Estudos em Gestão e ao Instituto de Investigação em Economia e Gestão pelos recursos disponibilizados.

Aos meus pais, a quem devo a vida e sem os quais ela teria pouco sentido, cabe uma gratidão especial. Souberam estar "na retaguarda" com o seu incentivo e apoio incondicionais.

Finalmente, o agradecimento mais emocionado para a Sara e os meus filhos Sofia e Pedro, que foram "vítimas" da minha "ausência" ao longo dos últimos tempos.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito do projecto de investigação POCTI/GES/46947/2002.

Contribuições para a Avaliação da Modularidade no Contexto das Opções Reais

Resumo

Esta tese propõe várias contribuições. Antes de mais, é efectuada uma extensa análise empírica sobre a precisão do método LSM - "Least Squares Monte Carlo Simulation Method" - proposto por Longstaff e Schwartz (2001) e da sua extensão por Gamba (2003). Posteriormente, é proposto um algoritmo alternativo ao de Gamba (2003) para avaliar opções mutuamente exclusivas e também um modelo de avaliação da carteira de opções reais criadas pela modularidade, considerando os operadores de divisão e de substituição, estendendo assim o modelo de Baldwin e Clark (2000).

Com efeito, efectua-se uma análise empírica da precisão do método LSM e da sua extensão, na avaliação de opções sobre o máximo de vários activos, de opções compostas e de opções mutuamente exclusivas. A análise da precisão da extensão de Gamba (2003), na avaliação de carteiras de opções, não foi, até ao momento, realizada. Analisa-se, ainda, a convergência do método para onze famílias e para diferentes métodos de simulação, incluindo métodos pseudo-aleatórios e cinco quasi-aleatórios (sequências de baixa discrepância). Os testes numéricos realizados, sugerem que a utilização de polinómios Laguerre ponderados, produz resultados mais precisos do que a utilização das outras famílias de polinómios, particularmente na avaliação de carteiras de opções. A análise realizada sugere que o método converge com o aumento do número de funções-base, bem como aumentando o número de caminhos simulados. As sequências de baixa discrepância tendem a produzir resultados mais precisos do que os métodos de simulação pseudo-aleatórios, em particular as de Sobol, com a inicialização de Silva e Barbe (2003), embora os resultados dependam do problema em análise, podendo algumas sequências de baixa discrepância, por exemplo, as sequências de Faure, produzir resultados menos precisos.

Uma outra contribuição, diz respeito ao algoritmo proposto para avaliar opções mutuamente exclusivas, que permite obter resultados mais precisos que o algoritmo de Gamba (2003), com recurso a um menor número de funções-base. Mostra-se, ainda, que possibilita identificar, com maior rigor, a melhor opção (estratégia) disponível.

Finalmente, o modelo proposto utiliza o método LSM para avaliar a carteira de opções reais criadas pelos operadores de divisão e substituição. Tendo-se desenvolvido na perspectiva das opções reais, trata-se de um modelo com pressupostos bem

menos restritivos do que o modelo de Baldwin e Clark (2000), ao se ter admitido: a possibilidade de correlação entre os módulos e o sistema, o desenvolvimento faseado do processo de modularização e a possibilidade de a adiar. Permite, assim e principalmente, obter o valor do projecto modular, determinar a estratégia óptima, quer no que respeita ao momento de modularização, quer ao número de módulos (incluindo a possibilidade de escolher um sistema interdependente, ou mesmo nada fazer), quer ao número de ensaios por módulo, e, ainda, identificar as origens do valor criado pela modularidade.

Contributions to the Valuation of Modularity with a Real Options Approach

Abstract

This thesis offers several contributions. Firstly, it provides a detailed empirical analysis of the precision of the Least Squares Monte Carlo Simulation Method (LSM), proposed by Longstaff and Schwartz (2001) and of the extension proposed by Gamba (2003). Secondly, it proposes, an alternative algorithm to that of Gamba (2003), for the valuation of mutually exclusive options, and, thirdly and above all, a valuation model of a real options portfolio created by modularity, taking into account the splitting and substitution operators, thus extending the model of Baldwin and Clark (2000).

In fact, it is provided an empirical analysis of the precision of the LSM method and its extension, for the valuation of options on the maximum of several assets, of compound options and of mutually exclusive options. The analysis of Gamba's extension, to value portfolios of options, has not yet been done. It is still analysed the convergence of the method as to eleven polynomial families and different simulation methods, including pseudo-random methods and five quasi-random methods (low discrepancy sequences). The empirical results suggest that the use of weighted Laguerre polynomials, provides more accurate results than any other family, particularly for the valuation of portfolios of options. The method seems to converge with the number of basis functions and the number of simulated paths. The low discrepancy sequences tend to produce more accurate results than those from pseudo-random simulation methods, namely the Sobol sequences, with the initialization proposed by Gamba (2003), although the results seem to be contingent on the problem under analysis, with Faure sequences producing less accurate results.

Another contribution is the proposed algorithm to value mutually exclusive options, which produces more accurate results than that from Gamba (2003), with fewer basis functions. We show that it also defines, more accurately, the best available option (strategy).

Finally, the proposed model applies the LSM method, to value a portfolio of real options, created by the splitting and substitution operators. In the context of a real options approach, the model has less restrictive assumptions than that from Baldwin and Clark (2000), allowing: the correlation between the modules and the system, a multi-staged modularization process and the option to delay it. Consequently, it allows to value the modular project, to define the optimal strategy, regarding both the optimal time to modularize and the optimal number

of modules and experiments per module (including the possibility of choosing an interconnected system or doing nothing), and, also, to identify the origins of the value created by modularity.

À Sara, Sofia e Pedro

Conteúdo

Declaração	ii
Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Dedicatória	ix
Conteúdo	x
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Figuras	xv
1 Introdução	1
1.1 Motivações	1
1.2 Objectivos	2
1.3 Apresentação da tese	3
2 Sobre a avaliação da modularidade	5
2.1 Introdução	5
2.2 A modularidade	6
2.3 Breve revisão da literatura das opções reais	8
2.3.1 A avaliação estática de projectos de investimento	9
2.3.2 A teoria das opções reais	10
2.3.2.1 O advento da teoria	10
2.3.2.2 A avaliação das opções reais	11
2.3.2.2.1 Programação dinâmica	11
2.3.2.2.2 Activos contingentes	13
2.3.2.2.3 Comparação entre as duas abordagens	14
2.3.2.2.4 Métodos de avaliação	16
2.3.3 Porque criam valor as opções reais	18
2.4 A avaliação de projectos modulares	20
2.5 Considerações finais	21

3	A avaliação de opções reais com o método de simulação Monte Carlo dos mínimos quadrados	23
3.1	Introdução	23
3.2	O método LSM	24
3.2.1	A extensão do método	27
3.2.1.1	Opções independentes	28
3.2.1.2	Opções compostas	28
3.2.1.3	Opções mutuamente exclusivas	29
3.3	A precisão do método	32
3.3.1	Convergência	33
3.3.2	Aperfeiçoamentos do método	34
3.3.2.1	Métodos e algoritmos de regressão	34
3.3.2.2	Polinómios	35
3.3.2.3	Técnicas de redução da variância	36
3.3.2.3.1	Variáveis antitéticas	36
3.3.2.3.2	Método dos momentos	37
3.3.2.4	Sequências da baixa discrepância	37
3.3.2.5	Melhorias do algoritmo	37
3.3.3	A precisão do método na avaliação de opções unidimensionais	38
3.3.4	A precisão do método na avaliação de opções multidimensionais	40
3.4	Análise empírica do método	41
3.4.1	Opções sobre o máximo de vários activos	42
3.4.1.1	A opção bermuda sobre o máximo de dois activos	43
3.4.1.1.1	Comparação da precisão dos polinómios	43
3.4.1.1.2	Comparação da precisão dos métodos de simulação	46
3.4.1.1.3	Regressão restrita vs regressão não restrita	46
3.4.1.2	A opção bermuda sobre o máximo de cinco activos	48
3.4.1.3	A convergência para o valor de uma opção americana e bermuda sobre o máximo de dois activos	49
3.4.2	Opções compostas	49
3.4.2.1	Comparação da precisão dos polinómios	53
3.4.2.2	Comparação da precisão dos métodos de simulação	54
3.4.2.3	Regressão restrita vs regressão não restrita	54
3.4.3	Opções mutuamente exclusivas	57
3.4.3.1	Comparação dos algoritmos	59
3.4.3.2	Comparação da precisão dos polinómios	60
3.4.3.3	Comparação da precisão dos métodos de simulação	60
3.4.3.4	Regressão restrita vs regressão não restrita	64
3.5	Considerações finais	64
	Apêndices do capítulo 3	68
3.A	Simulação de processos geométricos Brownianos	68
3.B	A avaliação de opções multivariadas com o método binomial de Boyle, Evnine e Gibbs (1989)	70
3.C	A avaliação de opções sobre o máximo de vários activos com o método LSM	73

3.D	A avaliação de opções compostas com o método LSM	78
3.E	A avaliação de opções mutuamente exclusivas com o método LSM	83
4	Um modelo de avaliação da modularidade na perspectiva das opções reais	89
4.1	Introdução	89
4.2	O modelo de Baldwin e Clark (2000)	90
4.2.1	O valor de um <i>design</i> interdependente	93
4.2.2	O valor de divisão e substituição	93
4.2.3	Limitações do modelo	96
4.3	Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade	97
4.3.1	O valor criado pelo operador de divisão	97
4.3.1.1	Opção de implementação	100
4.3.1.2	Opção de desenvolvimento	101
4.3.1.3	Opção de dividir	102
4.3.1.4	Resultados numéricos	104
4.3.1.5	O caso particular dos módulos perfeitamente correlacionados	115
4.3.1.6	O valor líquido de dividir	115
4.3.2	O valor criado pelos operadores de divisão e de substituição	119
4.3.2.1	Opção de implementação de cada ensaio alternativo	120
4.3.2.2	Opção de escolha do melhor ensaio	120
4.3.2.3	Opção de desenvolvimento de cada módulo	122
4.3.2.4	Opção de dividir	123
4.3.2.5	Resultados numéricos	123
4.4	Considerações finais	127
	Apêndices do capítulo 4	130
4.A	A avaliação de um projecto modular com o operador de divisão	130
4.A.1	Análise de sensibilidade	130
4.A.2	O valor líquido do operador de divisão	142
4.B	A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição	148
4.B.1	Análise de sensibilidade	148
4.B.2	A comparação entre os operadores de substituição e de divisão	161
5	Conclusões, limitações e sugestões para investigação futura	173
5.1	Principais conclusões	173
5.2	Limitações e sugestões para investigação futura	176
	Bibliografia	179
	Índice	187

Lista de Tabelas

3.1	Regras de recorrência para as funções-base	41
3.2	Parâmetros das opções sobre o máximo de vários activos analisadas	43
3.3	Comparação dos métodos de simulação QMC na avaliação de opções bermudas sobre o máximo de dois activos: regressão restrita vs regressão não restrita	46
3.4	Parâmetros das opções compostas analisadas	53
3.5	Comparação dos métodos de simulação QMC na avaliação de opções compostas americanas: regressão restrita vs regressão não restrita .	57
3.6	Parâmetros das opções mutuamente exclusivas analisadas	58
3.7	Parâmetros das opções mutuamente exclusivas analisadas nos exemplos alternativos	59
3.8	Comparação do algoritmo proposto com o algoritmo de Gamba para avaliar opções americanas mutuamente exclusivas	59
3.9	Comparação dos métodos de simulação QMC na avaliação de opções mutuamente exclusivas americanas: regressão restrita vs regressão não restrita	64
3.10	Comparação dos métodos binomial e de simulação na avaliação de opções bermudas sobre o máximo de 2 activos com 10 oportunidades de exercício vs famílias de polinómios	73
3.11	Comparação de diferentes métodos de simulação para avaliar opções bermudas sobre o máximo de 2 activos	75
3.12	Avaliação de opções bermudas sobre o máximo de 2 activos - exemplo com sequências QMC-Neiderreiter e 16000 caminhos.	77
3.13	Comparação dos métodos binomial e de simulação na avaliação de opções compostas americanas vs famílias de polinómios	78
3.14	Comparação de diferentes métodos de simulação para avaliar opções americanas compostas	80
3.15	Avaliação de opções americanas compostas - exemplo com sequências QMC-Halton e 32000 caminhos.	82
3.16	Comparação dos métodos binomial e de simulação na avaliação de opções americanas mutuamente exclusivas vs famílias de polinómios	83
3.17	Comparação de diferentes métodos de simulação para avaliar opções americanas mutuamente exclusivas	85
3.18	Avaliação de opções americanas mutuamente exclusivas - exemplo com sequências QMC-Sobol - Silva e Barbe e 16000 caminhos. . . .	87
4.1	Fases do modelo de Baldwin e Clark (2000)	91
4.2	Parâmetros do caso-base	105

4.3 Valor de um projecto modular 106

Lista de Figuras

3.1	Valor de continuação no passo T-1 para uma opção de venda	31
3.2	Precisão do método LSM com regressão restrita na avaliação de opções bermudas sobre o máximo de dois activos vs famílias de polinómios	44
3.3	Precisão do método LSM com regressão não restrita na avaliação de opções bermudas sobre o máximo de dois activos vs famílias de polinómios	45
3.4	Precisão do método LSM com regressão restrita na avaliação de opções bermudas sobre o máximo de dois activos vs métodos de simulação - convergência com o número de iterações	47
3.5	Precisão do método LSM na avaliação de uma opção bermuda sobre o máximo de cinco activos vs famílias de polinómios	48
3.6	Precisão do método LSM na avaliação de opções bermudas e americanas sobre o máximo de dois activos - convergência com o número de oportunidades de exercício	50
3.7	Precisão do método LSM na avaliação de opções americanas sobre o máximo de dois activos - convergência com o número de oportunidades de exercício vs <i>moneyness</i>	51
3.8	Precisão do método LSM na avaliação de opções bermudas e americanas sobre o máximo de dois activos - convergência com o número de iterações	52
3.9	Precisão do método LSM na avaliação de opções compostas americanas vs famílias de polinómios	55
3.10	Precisão do método LSM na avaliação de opções compostas americanas - convergência dos diferentes métodos com o número de caminhos	56
3.11	Comparação da convergência dos algoritmos alternativos para avaliar opções americanas mutuamente exclusivas, aumentando o número de funções-base	61
3.12	Precisão do algoritmo proposto para avaliar opções americanas mutuamente exclusivas com diferentes famílias de polinómios	62
3.13	Precisão do algoritmo proposto para avaliar opções americanas mutuamente exclusivas - convergência dos métodos de simulação com o número de iterações	63
3.14	Movimentos dos preços dos activos subjacentes num modelo binomial multiplicativo	71
4.1	Valor de um projecto modular com o operador de divisão - o efeito do valor do sistema/módulos	108

4.2	Valor de um projecto modular com o operador de divisão - o efeito do multiplicador dos custos	109
4.3	Valor de um projecto modular com o operador de divisão - o efeito da volatilidade do sistema	110
4.4	Valor de um projecto modular vs Multiplicador da volatilidade . . .	111
4.5	Valor de um projecto modular com o operador de divisão - o efeito das correlações	112
4.6	Valor de um projecto modular vs Correlação entre os módulos da mesma configuração - Igual volatilidade das carteiras de módulos . .	113
4.7	Valor de um projecto modular com o operador de divisão - o efeito do número máximo de módulos	114
4.8	Valor de um projecto modular com o operador de divisão - activos perfeitamente correlacionados	116
4.9	O valor líquido da modularidade - o efeito do valor do sistema/módulos	117
4.10	O valor líquido da modularidade - o efeito do multiplicador dos custos	118
4.11	O valor líquido da modularidade - o efeito da correlação entre os módulos da mesma configuração	118
4.12	A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do valor do sistema/módulos	124
4.13	A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do multiplicador dos custos	125
4.14	A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito da volatilidade do sistema	126
4.15	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do valor do sistema/módulos	130
4.16	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do custo de desenvolvimento	131
4.17	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do custo de implementação	132
4.18	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do custo das regras de <i>design</i>	133
4.19	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do multiplicador dos custos	134
4.20	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do horizonte temporal do projecto	135
4.21	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito da correlação entre os módulos da mesma configuração	136
4.22	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do correlação entre os módulos e o sistema	137
4.23	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do correlação entre módulos de diferentes configurações	138
4.24	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito da volatilidade do sistema	139
4.25	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do multiplicador da volatilidade	140
4.26	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do número máximo de módulos	141

4.27	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito do valor do sistema/módulos . . .	142
4.28	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito do custo de desenvolvimento . . .	142
4.29	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito do custo de implementação	143
4.30	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito do custo das regras de <i>design</i> . . .	143
4.31	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito do multiplicador dos custos	144
4.32	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito do horizonte temporal do projecto	144
4.33	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito da correlação entre os módulos da mesma configuração	145
4.34	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito do correlação entre os módulos e o sistema	145
4.35	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito do correlação entre módulos de diferentes configurações	146
4.36	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito da volatilidade do sistema	146
4.37	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito do multiplicador da volatilidade . .	147
4.38	A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito do número máximo de módulos . .	147
4.39	A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do valor do sistema/módulos	148
4.40	A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do custo de desenvolvimento	149
4.41	A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do custo de implementação	150
4.42	A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do custo das regras de <i>design</i>	151
4.43	A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do multiplicador dos custos	152
4.44	A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do horizonte temporal do projecto	153
4.45	A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito da correlação entre os módulos da mesma configuração	154
4.46	A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do correlação entre os módulos e o sistema .	155
4.47	A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do correlação entre módulos de diferentes configurações	156

4.48	A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - the effect of the correlation between experiments of each module	157
4.49	A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito da volatilidade do sistema	158
4.50	A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do multiplicador da volatilidade	159
4.51	A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do número máximo de módulos	160
4.52	A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do valor do sistema/módulos	161
4.53	A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do custo de desenvolvimento	162
4.54	A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do custo de implementação	163
4.55	A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do custo das regras de <i>design</i>	164
4.56	A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do multiplicador dos custos	165
4.57	A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do horizonte temporal do projecto	166
4.58	A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito da correlação entre os módulos da mesma configuração	167
4.59	A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do correlação entre os módulos e o sistema	168
4.60	A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do correlação entre módulos de diferentes configurações	169
4.61	A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito da volatilidade do sistema .	170
4.62	A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do multiplicador da volatilidade	171
4.63	A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do número máximo de módulos	172

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivações

Vivemos numa economia dinâmica onde a incerteza, a complexidade e a flexibilidade desempenham um papel central. A modularidade tem sido uma das ferramentas fundamentais para desenhar e produzir produtos com a flexibilidade que permita lidar com a incerteza. Diferentes produtos (e mesmo empresas) têm vindo a aumentar a sua modularidade: os computadores, o *software*, os automóveis ou as habitações são apenas alguns dos exemplos possíveis.

A motivação inicial para esta investigação tem origem, precisamente, quando o autor tomou contacto com um exemplo de um projecto modular. Ao fazer um estudo das propostas técnicas de desenvolvimento de um sítio na internet, verificou que uma delas tinha sido desenvolvida de forma modular, permitindo ao utilizador a escolha dos módulos a adquirir e aos proponentes o desenvolvimento futuro de novos módulos. O desenvolvimento do *software* é, como se viria a constatar posteriormente, um dos exemplos mais frequentes de aplicação da modularidade.

Desde logo, a flexibilidade da proposta permitia identificar um campo de aplicação dos modelos e da teoria das opções reais que tinha sido o tema genérico escolhido para o projecto de doutoramento. O passo seguinte foi a habitual revisão da literatura, tendo-se verificado a escassez de modelos de avaliação da dimensão deste tipo de projectos de investimento, na perspectiva do valor. A existência, no entanto, de um modelo bastante detalhado e que identificava como principal fonte de valor as opções criadas pela modularidade (Baldwin e Clark, 2000), terá sido inicialmente algo decepcionante pelos horizontes que fechava. Um estudo mais atento do modelo permitiu identificar limitações, o que abriu novas "avenidas" de investigação.

Essas "avenidas" esbarraram contudo num problema metodológico: não parecia existir um método que permitisse avaliar o tipo de opções que se identificaram, a

1.2. Objectivos

menos que se assumissem pressupostos simplificadores, o que nos faria retornar ao modelo de Baldwin e Clark (2000), que pretendíamos tornar mais realista. Durante o período de investigação, ou muito pouco tempo antes, essa possibilidade passou a existir através do método proposto por Gamba (2003) e Longstaff e Schwartz (2001).

As motivações que estão na origem desta tese são pois: (1) A modularidade é hoje uma dimensão importante de muitos projectos de investimento e permite uma maior flexibilidade num contexto de crescente incerteza; (2) criando opções reais (Baldwin e Clark, 2000); (3) que só podem ser avaliadas correctamente com recurso à simulação, em particular ao método de Longstaff e Schwartz (2001) e Gamba (2003).

1.2 Objectivos

O presente trabalho de investigação tem como principais objectivos:

1. Propor um modelo, de avaliação de projectos modulares, que permita avaliar as opções reais criadas pela modularidade e também uma aplicação mais geral do que aquela que é possível com o modelo proposto anteriormente por Baldwin e Clark (2000).

O modelo proposto por Baldwin e Clark (2000), embora seja um modelo bastante detalhado, assume pressupostos irrealistas. Por outro lado, é concebido numa perspectiva técnica da modularidade, com um abordagem simplificada das opções reais por ela criadas. Assim, uma abordagem que incorpore alguns conceitos e formulações dos modelos de opções reais, permitirá o desenvolvimento de um modelo que, sendo mais realista, permita analisar e identificar alguns dos factores que explicam e determinam a evolução e as opções estratégicas dos projectos modulares.

2. Analisar e avaliar a precisão do método de avaliação de opções com recurso à simulação proposto por Longstaff e Schwartz (2001) e estendido por Gamba (2003) comparando, nomeadamente, diferentes famílias de polinómios e diferentes métodos de simulação.

O primeiro objectivo só poderá ser atingido se se puder avaliar carteiras de opções reais contingentes em múltiplos activos ou variáveis. Ora tal só será possível recorrendo à simulação. Os desenvolvimentos recentes na investigação abriram essa possibilidade com a extensão do método proposto por Longstaff e Schwartz (2001) para avaliar carteiras de opções (Gamba, 2003).

Até ao momento não foi feita uma análise empírica do método, nem se analisaram as eventuais vantagens da utilização da simulação quasi-aleatória (com recurso às sequências de baixa discrepância).

1.3 Apresentação da tese

Esta tese é composta por dois capítulos centrais, antecedidos de uma introdução e de um capítulo que enquadra a tese na literatura, os quais precedem o capítulo das conclusões.

Assim, no capítulo 2 é feito um enquadramento da tese na literatura, com particular ênfase na literatura das opções reais. Após a definição da modularidade e das suas vantagens é feito um breve resumo da literatura das opções reais, confrontando os seus pressupostos com os da avaliação estática e apresentando alguns dos métodos de avaliação das opções. O capítulo resume, também, alguns dos modelos de avaliação das opções reais criadas pela modularidade e faz referência a modelos da literatura das opções reais relacionados com a modularidade. A última secção do capítulo apresenta uma síntese dos pressupostos que se assumem na presente tese.

No capítulo 3 é feita uma análise detalhada do método de Longstaff e Schwartz (2001) e da extensão de Gamba (2003), na avaliação de opções sobre o máximo (mínimo) de vários activos, de opções compostas e de opções mutuamente exclusivas. Até ao presente, de acordo com o que conhecemos, uma análise detalhada do método na avaliação de carteiras de opções (reais) não terá sido ainda realizada. A análise apresentada é feita sobretudo a dois níveis: ao nível da convergência com o grau de diferentes famílias de polinómios para estimar o valor de continuação e ao nível da convergência de diferentes métodos de simulação, incluindo a simulação quasi-Monte Carlo com o número de iterações ou caminhos simulados. A análise é feita para um número substancial de opções. É ainda proposto um algoritmo alternativo ao de Gamba (2003) para avaliar opções mutuamente exclusivas.

O capítulo 4, depois de apresentar de forma sucinta o modelo de Baldwin e Clark (2000), apresenta uma proposta de modelo de avaliação das opções reais criadas nos projectos modulares pelos operadores de divisão e substituição, com pressupostos menos restritivos. O modelo incorpora a possibilidade de os activos subjacentes às opções poderem ser correlacionados e assume que o processo de desenvolvimento de produtos modulares é um processo faseado, o que implica que as opções reais sejam compostas. O método de avaliação utilizado é o método de Longstaff e Schwartz (2001) estendido por Gamba (2003), por ser capaz de avaliar a carteira de opções americanas dependentes de múltiplos activos criada pela modularidade.

1.3. Apresentação da tese

O impacto de algumas das variáveis que influenciam a estratégia modular óptima é estudado através de uma análise de sensibilidade.

O capítulo 5 apresenta as principais conclusões, limitações e sugestões para investigação futura.

Capítulo 2

Sobre a avaliação da modularidade

2.1 Introdução

A complexidade dos projectos modulares, inerente à sua natureza, coloca desafios importantes à sua avaliação. De resto, a avaliação de projectos pressupõe, em geral, um compromisso entre o nível de complexidade e a aderência à realidade dos respectivos modelos. Em projectos com maior complexidade este compromisso é certamente mais difícil.

Se é certo que existem vários modelos que propõem heurísticas que permitem obter indicações quanto à estratégia a seguir na gestão de um projecto modular, esses modelos são quase sempre desenvolvidos com uma abordagem técnica e de engenharia, sendo incapazes de avaliar a modularidade na perspectiva da maximização do valor (Sullivan, Chalasani, Jha e Sazawal, 1999; Baldwin e Clark, 2000).

A avaliação da modularidade poderia ser realizada assumindo um contexto estático, utilizando as metodologias tradicionais de avaliação que se fundamentam na actualização dos fluxos de caixa, recorrendo ao Valor Actual Líquido (VAL), por exemplo. No entanto, a incerteza é uma característica dos projectos de investimento que não pode ser ignorada. Neste contexto, se a flexibilidade do projecto permitir adaptar as decisões à evolução incerta dos factores que determinam o valor, a avaliação das opções reais torna-se uma condição necessária para uma correcta avaliação do projecto.

Baldwin e Clark (1994) sugeriram pela primeira vez que os projectos modulares criam uma carteira de opções reais. Desenvolveram um modelo detalhado que permite identificar as opções criadas pela modularidade e que explica a evolução desta nos produtos e mesmo em alguns sectores da economia, em particular a

indústria informática (Baldwin e Clark, 2000).

Este capítulo apresenta sucintamente uma resenha da evolução da teoria das opções reais, com particular ênfase nos modelos relacionados com a avaliação de projectos modulares. A secção 2.2 apresenta uma definição da modularidade e os diferentes tipos desta, identificando algumas das suas vantagens. Na secção 2.3 (página 8) é apresentada uma breve revisão da literatura das opções reais. Os pressupostos dos modelos de opções reais são confrontados com os dos critérios estáticos (v.g.: VAL) e apresenta os diferentes métodos de avaliação de opções. Uma revisão da literatura sobre a avaliação de projectos modulares com opções reais e de modelos da literatura das opções reais relacionados com a modularidade, são apresentados na secção 2.4 (página 20). Finalmente, a secção 2.5 (página 21) apresenta algumas considerações que resumem os pressupostos que fundamentam o desenvolvimento desta tese e a sua relação com os capítulos seguintes.

2.2 A modularidade

Os projectos de investimento mais complexos podem ser divididos em unidades - módulos - que têm um certo grau de independência: "*A module is a unit whose structural elements are powerfully connected among themselves and relatively weakly connected to elements in other units... In other words, modules are units in a large system that are structurally independent of one another, but work together.*" (Baldwin e Clark, 2000, p. 63). Uma vez modularizado um projecto, a complexidade dos módulos pode ser "escondida" desde que seja definida uma *interface* que estabeleça a relação entre os módulos e o sistema. Esta ocultação da complexidade constitui aliás um dos conceitos-chave da modularidade: a chamada "ocultação da informação"¹.

A modularidade pode ser conseguida em três fases do desenvolvimento dos produtos: nas fases de *design*, produção e utilização. A modularização na primeira fase, através da criação das regras do *design*, tem sido um dos factores determinantes da evolução, inovação e crescimento de alguns sectores industriais, em particular no sector da informática (Baldwin e Clark, 2000). Embora não seja fácil distinguir a modularidade nas duas primeiras fases, há algumas diferenças: (1) o resultado da fase de *design* é a descrição de um produto, enquanto o resultado da segunda fase é o próprio produto; (2) As fases de *design* e produção são por vezes simultâneas, mas quando separadas, a fase de *design* precede a fase de produção. A separação das suas fases é mais clara quando um produto exige investigação e desenvolvimento (I&D). A modularidade é utilizada também para simplificar

¹*Information hiding.*

processos de produção complexos, dividindo o produto em diferentes módulos de produção ou "células". Um exemplo de modularidade na produção é o caso da indústria automóvel: o automóvel é dividido em componentes/módulos que podem ser produzidos em diferentes locais, ou em "células" dentro da mesma fábrica, e depois montados. Finalmente, os utilizadores podem combinar módulos de diferentes formas, criando produtos que resultam das várias combinações possíveis. Por exemplo, cada utilizador pode "construir" o seu computador com diferentes componentes de forma a satisfazer as suas necessidades e desejos.

A modularidade na fase de *design* foi estudada em detalhe por Baldwin e Clark (2000). Segundo os autores, a modularidade tem como principais resultados:

- Uma maior capacidade de gestão da complexidade. Os produtos e processos com um grande número de tarefas, são mais difíceis de gerir. A redução da interdependência que se consegue pela modularização reduz o impacto do insucesso pela diminuição do número de "ciclos" durante o fase de *design* e produção. Desta forma aumenta a probabilidade de sucesso e qualidade do produto final e reduz-se o tempo de desenvolvimento.
- O desenvolvimento paralelo ou mesmo concorrencial dos módulos, em conjunto com a redução dos "ciclos", permitindo uma maior redução do tempo de desenvolvimento.
- A integração da incerteza no processo de desenvolvimento. Ao contrário de um sistema interdependente, a modularização permite criar uma carteira de opções. Enquanto que no primeiro caso temos apenas a possibilidade de desenvolver o sistema como um todo, no segundo caso temos uma maior diversidade de opções, resultantes da possibilidade de combinar diferentes módulos e/ou diferentes versões dos módulos.

A modularidade determinou, por outro lado, a evolução de alguns sectores industriais, descentralizando e diversificando a estrutura industrial, pela criação de novas indústrias resultantes da criação de novos módulos. O exemplo evidente desta evolução é o do sector da informática, que evoluiu até aos nossos dias com um dinamismo assinalável que através do surgimento de novas indústrias e empresas: *software*, os diferentes componentes do hardware, a indústria dos serviços informáticos, só para referir algumas.

Talvez por isso a modularidade tenha sido mesmo sugerida como um paradigma de organização industrial (Schilling e Steensma, 2001; Baldwin e Clark, 2000) ou mesmo como uma teoria da empresa (Langlois, 2002).

2.3. Breve revisão da literatura das opções reais

A modularidade e o conceito de "ocultação da informação" são conceitos antigos². No entanto, estes centraram-se, fundamentalmente, na perspectiva estrutural dos produtos e do seu desenvolvimento. Raramente se fez uma análise na perspectiva do valor da modularidade. As heurísticas relativas ao processo de desenvolvimento de *software* (um exemplo clássico de modularidade), em particular as relativas à arquitectura do *software*, aos modelos faseados de redução do risco, apesar de "*These ideas, which are so central to software design and engineering, remain in their current formulations more akin to folk wisdom than science.*" (Sullivan, Chalasani, Jha e Sazawal, 1999, p. 215). A principal crítica dos autores, tal como de Baldwin e Clark (2000), é a sua incapacidade de avaliar a modularidade numa perspectiva de maximização do valor, que é hoje comumente aceite como sendo o objectivo último da empresa. Os trabalhos de Baldwin e Clark (2000) e Sullivan, Chalasani, Jha e Sazawal (1999) são das poucas excepções. Em ambos os casos, a modularidade é vista como um processo de criação de opções.

Um outro aspecto que reforça a importância da avaliação destes projectos na perspectiva das opções reais é o papel central da incerteza e do risco no processo de desenvolvimento de um produto. A flexibilidade de um projecto para lidar com tais incertezas é, pois, fundamental neste contexto. A incerteza pode ser endógena ou técnica e exógena ou de mercado. A primeira refere-se à possibilidade de sucesso técnico de um produto ou módulo enquanto que a última se refere à aceitação pelo mercado do novo produto ou módulo.

2.3 Breve revisão da literatura das opções reais

Brennan e Trigeorgis (2000) resumem a evolução da investigação (e da prática) dos modelos de avaliação em três fases: (1) avaliação estática pela utilização de modelos mecânicos que assumem o projecto de investimento como uma sequência de fluxos de caixa cujas características são conhecidas; (2) modelos de fluxos de caixa parcialmente controláveis, sendo possível a gestão activa dos projectos em resposta a incertezas exógenas das variáveis; (3) modelos de avaliação dinâmica em equilíbrio (ou modelos da teoria dos jogos) em que se assume não só a possibilidade de responder a incertezas exógenas mas também a (re)acções de terceiros, em particular de concorrentes.

²O conceito de *information hiding* foi desenvolvido na década de setenta por Parnas (1972).

2.3.1 A avaliação estática de projectos de investimento

Os modelos da primeira fase assumem um comportamento passivo do gestor, isto é, depois de tomada a decisão não existe qualquer interacção entre projecto e gestor. O método de avaliação geralmente considerado como mais robusto num contexto estático (v.g.: Brealey e Myers, 2003) - o VAL - preconiza a actualização de fluxos de caixa, cuja distribuição de probabilidade é exógena ao modelo, a uma taxa ajustada ao risco, também ela definida exogenamente. O VAL tem vindo a ser progressivamente adoptado na prática ao longo das últimas décadas, sendo, no entanto, recente o seu predomínio sobre outros critérios menos sofisticados, em particular o Período de Recuperação (Pike, 1996)³.

Desde cedo as limitações desta abordagem foram reconhecidas, na medida em que os critérios baseados nos fluxos de caixa actualizados sub-avaliavam as possibilidades estratégicas e a flexibilidade dos projectos de investimento.

A avaliação de projectos de investimento de acordo com o VAL consiste na actualização dos fluxos de caixa utilizando uma taxa de actualização. Na presença de risco deve ser feito um ajustamento, sendo o mais frequente o ajustamento da taxa de actualização ao risco subjacente a esses fluxos de caixa. Alternativamente, o ajustamento ao risco pode ser feito nos fluxos de caixa, utilizando o método da certeza equivalente, que actualiza fluxos de caixa assumidos como certos (ignorando a parte incerta dos fluxos de caixa) à taxa isenta de risco. A primeira abordagem é a mais utilizada, embora o método da certeza equivalente seja mais fácil de utilizar quando a incerteza diz respeito a activos para os quais existem futuros ou *forwards* transaccionados. As duas abordagens conduzem, no entanto, ao mesmo resultado.

A segunda fase reconhece a possibilidade de o gestor poder agir no futuro para influenciar a distribuição de probabilidade dos fluxos de caixa, à medida que vai dispondo de mais informação e de tal poder ser tido em conta no momento da avaliação. Já na década de sessenta, Hertz (1964) sugeriu a simulação de Monte Carlo e Magee (1964) as árvores de decisão como modelos que permitem considerar variáveis e eventos estocásticos. No entanto, estes modelos não permitiram conhecer em que medida as decisões futuras afectam o risco do projecto e, portanto, as taxas de actualização. Sendo estas decisões semelhantes às opções financeiras, o seu exercício tornaria impossível determinar a própria taxa de actualização, uma vez que ela depende da evolução estocástica dos activos subjacentes e das decisões dos gestores.

A possibilidade de resolver este problema foi aberta pelos trabalhos de Black e

³Em Portugal, um estudo recente sugere que, apesar de o VAL ser o critério principal mais utilizado, o Período de Recuperação continua a ser o critério mais popular (Rodrigues, 1999).

Scholes (1973) e Merton (1973b) que avaliaram as opções financeiras num contexto de neutralidade ao risco.

Myers (1987), embora sublinhe que muitas vezes o VAL é incorrectamente utilizado, ele é incapaz de reconciliar a teoria financeira com a estratégia, mesmo se correctamente utilizado. Sendo adequado para avaliar obrigações ou outros activos com rendimento fixo ou dividendos regulares, o VAL não permite avaliar empresas com importantes oportunidades de crescimento e menos ainda avaliar opções financeiras.

2.3.2 A teoria das opções reais

2.3.2.1 O advento da teoria

A avaliação das opções financeiras tem sido um campo profícuo de investigação, sobretudo a partir da década de setenta. Desde cedo se percebeu que o potencial de aplicação das metodologias de avaliação de opções não se resumia aos activos financeiros. Merton (2001) relembra que, quer nos seus trabalhos do início da década de setenta quer nos de Black e Scholes, se reconhece que as mesmas metodologias poderiam ser aplicadas a outros problemas de avaliação. Myers (1977) terá sido o primeiro a apelidar a aplicação destas metodologias na avaliação de activos reais, (por oposição aos financeiros) como de "opções reais"⁴:

"The value of the firm as a going concern depends on its future investment strategy. Thus it is useful for expositional purposes to think of the firm as composed of two distinct asset types: (1) real assets, which have market values independent of the firm's investment strategy, and (2) real options, which are opportunities to purchase real assets on possibly favorable terms." (Myers, 1977, p. 163)

A ideia principal de Myers (1977) foi a de indentificar as oportunidades de investimento como opções de crescimento. A partir desta ideia inicial vários autores sugeriram modelos de avaliação de opções reais. Em comum têm a ideia de que os aspectos de natureza estratégica e a flexibilidade têm uma natureza semelhante a opções sobre activos reais. Por exemplo, a possibilidade de aceitar um projecto numa data futura assemelha-se a uma opção de compra. Tal como uma opção financeira, esta possibilidade constitui um direito mas não uma obrigação. Entre

⁴Se tivermos a preocupação de encontrar o ano de nascimento do termo "opções reais" então teremos que recuar até 1975, ano em que foi publicada a primeira versão deste artigo em formato de documento de trabalho (Myers, 1975). Uma versão posterior viria a ser publicada em 1976 (Myers, 1976). É curioso referir ainda que o termo "opções reais" acaba por aparecer pela primeira vez num artigo publicado pelo mesmo autor uns meses antes (Myers e Turnbull, 1977).

os primeiros modelos de avaliação de opções reais destacam-se os de McDonald e Siegel (1985, 1986), que analisaram o valor da opção de adiar ou iniciar um investimento; Brennan e Schwartz (1985), que analisaram a opção de encerrar temporariamente; Trigeorgis e Mason (1987) e Pindyck (1988), que avaliaram as opções de expansão e de contracção; Myers e Majd (1990), que analisaram a opção de abandono.

2.3.2.2 A avaliação das opções reais

Tal como para as opções financeiras, os modelos e métodos de avaliação de opções reais assumem um papel fundamental. Pelos seus pressupostos, são muitas vezes objecto de debate, ainda que, como veremos, esse debate seja por vezes mal fundamentado. Uma das questões centrais é a relativa ao pressuposto da existência de mercados completos e/ou da neutralidade face ao risco, como se tal se aplicasse exclusivamente às opções reais e não os métodos tradicionais, como o VAL.

Existem duas abordagens principais de avaliação das opções, sejam elas financeiras ou reais. Dixit e Pindyck (1994) referem-nas como a abordagem da "programação dinâmica" e a abordagem dos "activos contingentes"⁵. Uma breve apresentação das duas abordagens e a sua comparação, permite uma análise das consequências da inexistência de mercados completos. Por outro lado, procura-se demonstrar que a avaliação das opções reais não requer pressupostos adicionais relativamente aos necessários para a avaliação de acordo com o VAL.

2.3.2.2.1 Programação dinâmica

A programação dinâmica permite dividir a sequência das decisões inerentes à avaliação de uma opção em apenas duas componentes: o valor da opção se exercida imediatamente e o valor de continuação que traduz o valor da opção assumindo o seu exercício óptimo nos períodos subsequentes. Se a opção tiver uma maturidade finita, este procedimento é utilizado a começar pelo último período, para o qual o valor de continuação é nulo, e é aplicado retroactivamente até ao momento presente. Se opção for perpétua, a solução torna-se ainda mais fácil de obter sendo mesmo possível, para alguns casos, obter soluções analíticas fechadas.

Tempo discreto

Embora seja habitual modelar a incerteza em tempo contínuo, a sua modelação em tempo discreto permite aproximar aquela, à medida que se reduz a duração de

⁵Esta secção segue de perto o capítulo 4 de Dixit e Pindyck (1994).

cada passo do tempo.

A ideia fundamental da programação dinâmica é dividir a decisão em duas partes: uma relacionada com o momento actual e a outra com todos os momentos seguintes. Supondo que a data actual é t , sendo X_t o vector das variáveis-estado, o valor da opção $F(X_t, t)$ representa o valor actual dos fluxos de caixa assumindo que todas as decisões a partir do momento actual são as óptimas. As decisões são representadas pelas variáveis-controlo (τ_t) e podem assumir valores de: (1) uma variável binária, representando a decisão de exercer a opção ou adiar a decisão; (2) uma variável contínua, que pode representar a escala do investimento; (3) ou mesmo um vector, quando está em causa mais do que uma decisão, como por exemplo, a escolha da melhor de duas opções (estratégias).

Na situação mais simples em que a variável-controlo é binária, estamos perante problemas de paragem óptima, como é o caso das opções americanas. Em cada momento deve ser comparado o valor obtido com o exercício imediato da opção ($\Pi(X_t, t)$) e o valor actual dos fluxos de caixa obtidos se se mantiver a opção "viva" (valor de continuação). Os fluxos de caixa resultantes das decisões futuras a partir do momento seguinte, $(F_{t+1}(X_{t+1}))$ são uma variável aleatória, porque dependem do valor aleatório da variável-estado, pelo que se deve utilizar o valor actual (de acordo com a taxa de actualização k) do seu valor esperado.

A decisão óptima em t - a escolha de τ_t - é o resultado de:

$$F(X_t, t) = \max_{\tau_t} \{ \Pi_t(X_t, \tau_t), (1+k)^{-1} \mathbb{E}[F(X_{t+1}, t+1) | X_t] \} \quad (2.1)$$

A equação 2.1 é conhecida como equação de *Bellman*. Quando a opção tem uma maturidade finita (T), a equação 2.1 é aplicada retroactivamente a partir do momento T , para o qual o valor de continuação é nulo.

Tempo contínuo

À medida que a duração de cada período se aproxima de zero (o número de períodos do infinito), a análise em tempo discreto aproxima-se da análise em tempo contínuo.

Um pressuposto frequente quanto à evolução estocástica, em tempo contínuo, dos preços dos activos (variáveis-estado) é o de que estes são governados por um processo geométrico Browniano:

$$dX = \alpha X dt + \sigma X dz \quad (2.2)$$

sendo α a taxa de crescimento esperada, σ a variância proporcional e dz um

incremento de um processo Wiener.

No momento imediatamente seguinte, após dt , o valor da variável-estado será de $X_t + dX$. Neste caso a equação de Bellman será:

$$F(X_t, t) = \max \{ \Pi(X_t, t), (1 + kdt)^{-1} \mathbb{E}[F(X_t + dX, t + dt) | X_t] \} \quad (2.3)$$

Utilizando o lema de Ito obtém-se a seguinte equação parcial diferencial que ser satisfeita pelo valor da opção:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 X^2 F_{XX}(X, t) + \alpha X F_X(X, t) + F_t(X, t) - kF(X, t) = 0 \quad (2.4)$$

2.3.2.2.2 Activos contingentes

A abordagem dos activos contingentes fundamenta-se na teoria financeira e pressupõe a existência de uma carteira de activos transaccionados no mercado que tenham a mesma distribuição de rendibilidades.

Para avaliar opções com a abordagem dos activos contingentes basta que a dinâmica das variáveis-estado possa ser replicada por uma carteira de activos transaccionados, não sendo necessário que as próprias variáveis-estado o sejam.

Consideremos uma vez mais que a variável-estado evolui de acordo com o processo expresso na equação 2.2. Note-se que a rendibilidade de um activo resulta não só da rendibilidade esperada do activo, como do seu dividendo (δ), fazendo com que a rendibilidade total seja de $\mu = \alpha + \delta$.

De acordo com o CAPM, em equilíbrio, a taxa esperada de rendibilidade de um activo é proporcional ao risco não diversificável:

$$\mu = r + \phi \sigma \rho_{XM} \quad (2.5)$$

sendo r a taxa isenta de risco, ϕ o prémio de risco do mercado e ρ_{XM} o coeficiente de correlação das rendibilidade do activo (X) e da carteira de mercado (M).

O valor do activo contingente (opção) é encontrado replicando as características de rendibilidade e risco utilizando activos transaccionados. Uma carteira constituída por uma unidade de um activo sem risco e n unidades do activo com risco terá uma taxa de rendibilidade de:

$$\frac{r + n(\alpha + \delta)X}{1 + nX} dt + \frac{\sigma nX}{1 + nX} dz \quad (2.6)$$

A taxa de rendibilidade do activo contingente, utilizado o lema de Ito, é de:

2.3. Breve revisão da literatura das opções reais

$$\frac{F_t(X, t) + \alpha F_X(X, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 F_{XX}(X, t)}{F(X, t)} dt + \frac{\sigma X F_X(X, t)}{F(X, t)} dz \quad (2.7)$$

Para replicar o risco do activo, n tem que ser tal que:

$$\frac{nX}{1 + nX} = \frac{XF_X(X, t)}{F(X, t)} \quad (2.8)$$

Tendo a carteira um risco igual ao do activo contingente, terá que ter a mesma rentabilidade:

$$\frac{F_t(X, t) + \alpha F_X(X, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 F_{XX}(X, t)}{F(X, t)} = \frac{r + n(\alpha + \delta)X}{1 + nX} \quad (2.9)$$

Substituindo $\frac{nX}{1+nX}$ pelo valor da equação 2.8, e simplificando, a solução obedece à seguinte equação diferencial parcial⁶:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 X^2 F_{XX}(X, t) + (r - \delta)XF_X(X, t) + F_t(X, t) - rF(X, t) = 0 \quad (2.10)$$

Esta equação é semelhante à derivada pelo método da programação dinâmica (equação 2.4), mas em vez do custo de oportunidade (k) temos agora a taxa isenta de risco (r) e o coeficiente de F_X é $r - \delta$ em vez de α .

Esta abordagem foi introduzida por Black e Scholes (1973) e Merton (1973b).

2.3.2.2.3 Comparação entre as duas abordagens

As duas abordagens têm uma diferença essencial: a abordagem pela programação dinâmica assume a existência de uma taxa de actualização exógena (k), enquanto a abordagem dos activos contingentes assume apenas a taxa isenta de risco como exógena. Mas para que tal possa ser assumido, é necessário que exista a possibilidade de o risco do activo subjacente à opção que estamos a avaliar seja transaccionado no mercado ou possa ser replicado por uma carteira de activos também transaccionados no mercado. Na abordagem da programação dinâmica é necessário, por outro lado, conhecer as preferências do investidor entre risco e rentabilidade (a sua função-utilidade).

Se os mercados forem perfeitos, a ausência de oportunidades de arbitragem implica a existência de uma distribuição de probabilidade neutral ao risco (medida equivalente de martingala), que permite calcular o valor dos activos actualizando

⁶A mesma equação poderia ser obtida com uma carteira constituída pelo activo contingente e uma posição curta de n unidades do activo com risco.

os valor esperado à taxa isenta de risco (Harrison e Kreps, 1979; Harrison e Pliska, 1981). A distribuição de probabilidade neutral ao risco é única se o mercado for completo, isto é, se for possível replicar a incerteza inerente ao activo sob avaliação utilizando activos transaccionados no mercado. Se, pelo contrário, os mercados não forem completos, ela pode não ser única, mas qualquer distribuição de probabilidade conduz, necessariamente ao mesmo valor de mercado.

Quando os activos subjacentes não são transaccionados, um modelo de equilíbrio (por exemplo o CAPM) pode ser utilizado para avaliar as opções. Cox, Ingersoll e Ross (1985) mostraram que é possível fazer uma avaliação neutral ao risco, descontando ao parâmetro de tendência um prémio de risco, calculado de acordo com o modelo de equilíbrio. Para obter este prémio de risco é necessário conhecer a correlação entre o activo e a carteira de mercado. Esta abordagem é semelhante à actualização dos fluxos de caixa certos à taxa isenta de risco (método da certeza equivalente). Note-se, no entanto, que para se poder calcular o prémio de risco de mercado é necessário encontrar um activo que replique as características do activo sob avaliação. O que equivale a dizer que é necessário que os mercados sejam completos.

"Hence, the contingent claims solution to our investment problem is equivalent to a dynamic programming solution, under the assumption of risk neutrality (that is the discount rate ρ is equal to the risk-free rate). Thus, whether or not spanning holds, we can obtain a solution to the investment problem, but without spanning, the solution will be subject to an assumed discount rate. In either case, the solution will have the same form, and the effects of changes in σ and δ will likewise be the same. One point is worth noting, however. Without spanning, there is no theory for determining the 'correct' value for the discount rate (unless we make restrictive assumptions about investors' or managers' utility functions). The CAPM, for example, would not hold, and so it could not be used to calculate a risk adjusted discount rate in the usual way." (Dixit e Pindyck, 1994, p. 152)

"The key assumption - implicit till now - is that the company's shareholders have access to assets with the same risk characteristics (e.g.: the same beta) as the capital investment being valued by the firm. [...] When we value a real option by the risk-neutral method, we are calculating the option's value if it could be traded. This exactly parallels standard capital budgeting. [...] This key assumption supports the use of both the DCF and real-option-valuation methods." (Brealey e Myers, 2003, p. 634-5)

2.3. Breve revisão da literatura das opções reais

Portanto, as duas abordagens só não conduzem à mesma solução se os mercados forem incompletos, o que inviabilizaria a determinação objectiva dos prémios de risco.

Henderson (2004) mostrou que as duas abordagens anteriores são casos particulares do seu modelo de avaliação de opções em mercados incompletos. No seu modelo só é possível replicar parcialmente o risco do activo subjacente, isto é, a correlação entre o activo subjacente e a sua "réplica" não é perfeita. Isto significa que as preferências do investidor - o seu grau de aversão ao risco - determinarão a rendibilidade esperada, uma vez que não é possível fazer uma cobertura perfeita do risco. Na situação limite em que a correlação é perfeita, a avaliação pela abordagem dos activos contingentes é válida. Por outro lado, na situação limite em que a aversão ao risco é nula, a avaliação pelo método da programação dinâmica é válida.

2.3.2.2.4 Métodos de avaliação

Para os problemas mais simples é possível derivar as equações diferenciais parciais e obter soluções fechadas para o valor das opções, assim como a estratégia óptima para o exercício das opções. Mas, frequentemente é necessário recorrer a métodos numéricos.

A avaliação das opções reais limitou-se, com algumas excepções, na fase inicial de desenvolvimento da teoria, à das opções para as quais existiam soluções fechadas, na maioria dos casos já utilizadas na avaliação de opções financeiras. A avaliação era quase sempre feita considerando poucos activos, ou varáveis-estado, e, na maioria dos casos, as opções eram de tipo europeu ou americanas perpétuas. Tal como em muitas outras áreas do saber, a investigação tem-se aproximado cada vez mais da realidade. Os projectos de investimento são quase sempre carteiras de opções, dependentes frequentemente de várias variáveis estocásticas, que podem ser exercidas antes da sua maturidade (i.e. são opções americanas ou bermudas).

O valor de opções americanas finitas, dependentes de poucas variáveis estocásticas, pode ser facilmente obtido utilizando o método das diferenças finitas (introduzido por Brennan e Schwartz (1977)) ou árvores binomiais (introduzidas por Cox, Ross e Rubinstein (1979) e Rendleman e Bartter (1979)). A avaliação de opções dependentes de múltiplos factores torna-se impraticável devido à conhecida "maldição da dimensionalidade": o número de nós de uma árvore binomial aumenta exponencialmente com o número de factores estocásticos. Por outro lado, os métodos das diferenças finitas apenas podem ser utilizados com duas ou três dimensões (variáveis estocásticas), uma vez que não é possível obter equações di-

ferenciais para problemas de maior dimensão.

A simulação tem surgido, nos últimos tempos, como uma alternativa viável para avaliar opções americanas, opções dependentes de múltiplas variáveis governadas por diversos processos estocásticos. Ao contrário das árvores binomiais, o esforço computacional aumenta apenas linearmente com o número de variáveis estocásticas. Esta é a principal vantagem dos métodos de simulação, sobretudo para problemas de maior dimensão: a convergência depende apenas do número de iterações e é independente da dimensão do problema.

A simulação de Monte Carlo foi introduzida pela primeira vez por Boyle (1977) na avaliação de opções. Tradicionalmente a simulação era vista como um método inadequado para avaliar opções americanas, por aquela ser um método progressivo e a avaliação de opções ser retroactiva. Como veremos no capítulo 3, nos últimos anos vários autores propuseram diferentes métodos que tornaram possível a avaliação de opções americanas, utilizando a simulação: Tilley (1993); Barraquand e Martineau (1995); Carrière (1996); Raymar e Zwecher (1997); Broadie e Glasserman (1997b,a); Tsitsiklis e Van Roy (1999); Longstaff e Schwartz (2001); Carrière (2001); Tsitsiklis e Van Roy (2001); Rogers (2002); Garcia (2003); Ibañez e Zapatero (2004); Haugh e Kogan (2004); Anderson e Broadie (2004)⁷. Dos vários métodos, o de Longstaff e Schwartz (2001) ganhou particular relevância.

Inicialmente os modelos de opções reais permitiam avaliar projectos com uma única opção. No entanto, tal como inicialmente havia sido sugerido Myers (1977), uma empresa é constituída por uma carteira de opções reais. O valor de uma carteira de opções, com interacções entre si, pode ser significativamente diferente da soma dos valores das opções individuais (Trigeorgis, 1993). Um modelo genérico de avaliação das interacções entre as opções foi proposto por Kulatilaka (1995) e Kulatilaka e Trigeorgis (1994). Um projecto de investimento, com múltiplas opções, pode ser decomposto em diferentes "modos" com interacções entre si. As opções são modeladas como sendo as transições entre os "modos" com um preço de exercício igual ao "custo" da troca. No entanto, este modelo só é praticável em problemas de pequena dimensão, i.e. na avaliação de carteiras com poucas opções.

Um carteira de opções pode também ser avaliada utilizando árvores binomiais, mas, uma vez mais, a "maldição da dimensionalidade" limita a sua aplicabilidade.

Gamba (2003), estendendo o método de Longstaff e Schwartz (2001), abriu novos horizontes para a possibilidade de avaliar carteiras de opções. O método decompõe problemas complexos de múltiplas opções reais em conjuntos simples, hierarquizados, de opções individuais. Dado que utiliza a simulação, através do

⁷Uma revisão e comparação de alguns destes métodos pode ser encontrada em Broadie e Detemple (1996), Fu, Laprise, Madan, Su e Wu (2000) e Broadie e Detemple (2004).

método LSM, permite a avaliação de opções americanas ou bermudas, frequentemente implícitas nas opções reais. De entre as possíveis interações entre opções, são analisadas as opções independentes, as opções compostas, as opções mutuamente exclusivas e os problemas de troca.

2.3.3 Porque criam valor as opções reais

A incerteza, a flexibilidade e a irreversibilidade são características frequentes nos projectos de investimento. Se uma delas estiver ausente, a avaliação do projecto pode ser realizada utilizando o VAL. Se, pelo contrário, todas elas estiverem presentes, então a análise tradicional do VAL é inadequada, sendo necessário utilizar a teoria das opções reais (Pereira e Armada, 2005).

As decisões de investimento são tomadas, normalmente, num contexto de incerteza, i.e. , o valor futuro dos fluxos de caixa do projecto não é conhecido antecipadamente e as decisões futuras que deles dependem também não podem ser antecipadas. Se os fluxos de caixa fossem certos, seria possível antecipar quais as decisões óptimas, o que poderia ser feito utilizando simplesmente o VAL.

No entanto, se não for possível modificar as decisões inicialmente planeadas, à medida que a incerteza vai sendo "revelada", i.e. , se não houver flexibilidade, não haverá opções e portanto não haverá valor adicional ao obtido com o VAL.

Finalmente, se os custos de investimento forem totalmente recuperáveis (reversíveis), i.e. , o projecto puder ser parcial ou totalmente abandonado, recuperando a totalidade do investimento realizado, não existirão "custos afundados" e, portanto, não haverá incentivo a adiar a decisão de investir. A decisão obtida com o critério do VAL corresponderá à decisão óptima.

Em resumo, a irreversibilidade parcial do investimento num contexto de incerteza faz com que, sendo possível adiar a decisão de investir (existindo flexibilidade), o valor de um projecto seja superior ao valor obtido pelo VAL e que este tenha que ser superior a um determinado valor positivo para que a decisão óptima seja investir imediatamente (Dixit e Pindyck, 1994). Note-se, pelo contrário, que a existência de oportunidades de crescimento (Kester, 1984) ou de uma opção de abandono (Myers e Majd, 1990), aumentando o valor do projecto, antecipa o momento óptimo para investir, que poderá ocorrer para valores negativos do VAL.

Se a incerteza, a flexibilidade e irreversibilidade parcial contribuem para o aumento de valor das opções, existem factores que têm o efeito contrário.

Quando as oportunidades de investimento, ou as opções reais em geral, não são propriedade exclusiva de uma empresa, i.e. , são partilhadas por outras empresas, o valor dessas opções pode reduzir-se significativamente. Kester (1984), ainda na fase inicial da teoria das opções reais, sugeriu que a concorrência entre as empresas

produz um incentivo à antecipação da decisão de investir. Trigeorgis (1996) sugeriu que a concorrência tem um efeito semelhante ao dos dividendos de uma opção financeira, reduzindo o valor das opções e antecipando o momento do investimento. Mesmo na ausência de concorrência, se o adiamento do investimento significar uma perda de fluxos de caixa, existe um incentivo à antecipação do investimento. Note-se que, sendo a opção de investimento semelhante a uma opção de compra americana, não existindo fluxos de caixa perdidos com o adiamento da decisão, o investimento só será realizado no último momento possível, isto é, na maturidade.

Só recentemente a possibilidade de competição foi endogeneizada nos modelos de opções reais, que passaram a incorporar modelos de equilíbrio de mercado, utilizando, por exemplo, a teoria dos jogos (v.g.: Dixit e Pindyck, 1994, capítulo 9).

Sendo certo que uma carteira de opções tem sempre maior valor do que uma opção individual, o valor da carteira, como já referimos anteriormente, pode diferir significativamente da soma dos valores das opções individuais (Trigeorgis, 1993). Assim, a interação entre as diferentes opções, incorporadas num projecto de investimento ou numa empresa, determinará o valor do seu conjunto. As opções têm interações se o seu exercício influenciar o valor dos activos subjacentes das outras opções. Note-se que as opções podem ser independentes, situação na qual o valor da carteira corresponde à soma das opções, mesmo se os activos subjacentes não o forem. A correlação entre os activos subjacentes (ou variáveis-estado mais genericamente), tem também um efeito importante sobre o valor da opção (ou das opções). Em princípio, uma maior correlação, reduz o valor das opções (v.g.: Childs, Ott e Triantis, 1998).

Um modelo de equilíbrio de avaliação de opções reais só se pode obter se um dos seguintes pressupostos for assumido: a existência de um mercado suficientemente completo ou a neutralidade face ao risco. Sem estes pressupostos não seria possível avaliar objectivamente as opções. Sendo certo que se admite como frequente a existência de mercados incompletos em muitas opções reais, o seu efeito sobre as decisões de investimento só muito recentemente tem sido estudado. Henderson (2004) sugere que, na presença de mercados incompletos ou de aversão ao risco não sistemático, os modelos clássicos de avaliação da opção de investimento sobreavaliam esta opção e, portanto, sugerem que a opção de investir deve ser adiada em demasia. A incerteza teria também o efeito contrário sobre o valor da opção, que seria menor quanto maior a incerteza. Estas conclusões podem indiciar que os estudos nesta área, numa fase ainda embrionária, poderão produzir resultados algo inesperados para a teoria das opções reais.

Em qualquer dos casos, qualquer uma destas situações só podera ser considerada

se a análise for realizada incorporando o efeito das opções reais. ” *If modern finance is to have a practical and salutary impact on investment-decision making, it is now obliged to treat all major investment decisions as option pricing problems.*” (Ross, 1995, p. 101).

2.4 A avaliação de projectos modulares

A avaliação da modularidade na perspectiva das opções reais foi pela primeira vez sugerida e tratada por Baldwin e Clark (1994, 1997, 2000), que desenvolveram um modelo detalhado para avaliar a modularidade no *design*. A modularização cria uma carteira de opções que tem mais valor do que uma opção sobre uma carteira de activos (Merton, 1973a). Esta diferença fundamental está, segundo os autores, na origem da principal vantagem da modularidade. O modelo assume pressupostos simples que permitem obter soluções fechadas para o valor do projecto. Embora sugiram que a avaliação da modularidade seja aferida pelo mercado, a avaliação das opções é feita sem qualquer pressuposto sobre avaliação do risco pelo mercado. Trata-se mais de uma abordagem estatística do que uma abordagem na perspectiva da teoria das opções reais. A principal contribuição do modelo é, sobretudo, uma descrição detalhada das opções reais criadas pela modularidade, e não propriamente a sua avaliação⁸.

Uma abordagem semelhante foi utilizada por Gaynor e Bradner (2001) para avaliar a standardização da tecnologia. Os autores sugerem que a modularidade favorece o desenvolvimento faseado dos *standards*.

Sullivan, Griswold, Cai e Hallen (2001) adaptaram o modelo de Baldwin e Clark (2000) para avaliar a modularidade no desenvolvimento de *software*. O modelo de avaliação é bastante similar e a principal diferença relaciona-se com a metodologia de partição de um sistema em módulos independentes. A incerteza cria um incentivo para adiar a modularização, sendo que a principal dificuldade reside, precisamente, na estimação da incerteza técnica associada a cada módulo.

Sullivan, Chalasani, Jha e Sazawal (1999) argumentam que o modelo criado por Baldwin e Clark (1997) se baseia mais na abordagem clássica da modularidade, da estrutura de tarefas e da teoria da ocultação de informação, do que na teoria das opções reais. Os pressupostos relativos à evolução estocástica dos activos e a aditividade dos valores dos módulos não permite ao modelo lidar com sistemas modulares mais realistas. Na sua abordagem consideram também as opções reais criadas pela modularidade e sugerem que o desenvolvimento faseado dos projectos modulares seja considerado, pela criação de opções compostas. No entanto, não é

⁸Uma apresentação mais detalhada do modelo será feita no capítulo 4.

sugerido qualquer modelo de avaliação.

Keppo e Samila (2004) avaliaram as opções de substituição de produtos modulares na perspectiva do consumidor, assumindo que cada substituição é um incremento de Poisson no valor do produto.

Na literatura das opções reais, a avaliação do desenvolvimento de produtos, de projectos de I&D e de projectos faseados, sugerem alguns contributos para a avaliação de projectos modulares.

Childs, Ott e Triantis (1998) compararam o desenvolvimento paralelo e o desenvolvimento sequencial de projectos correlacionados. Childs e Triantis (1999) avaliaram projectos com múltiplos produtos, considerando a aprendizagem com a experiência e o desenvolvimento do projecto, a aprendizagem "colateral" entre projectos diferentes e a interacção entre os valores dos projectos.

A incerteza técnica e a incerteza de mercado, associadas aos projectos de I&D, têm sido modeladas de diferentes formas⁹. É, como habitualmente nos modelos de opções reais, um factor crucial na avaliação das opções associadas a tais projectos.

Lint e Pennings (2001) estudaram o impacto da incerteza e da *moneyiness* num projecto, com duas fases, de desenvolvimento de um produto único. A incerteza acerca do valor do produto cria um incentivo para adiar o investimento. Quando a oportunidade de investimento é partilhada por outros concorrentes, reduz-se o seu valor. O valor de adiar um projecto foi, pela primeira vez, sugerido por McDonald e Siegel (1986). Por outro lado, a existência de um ciclo de vida dos produtos tem um efeito importante sobre o valor da opção de adiar o investimento e da opção de contrair: aquela tende a ser sobre-avaliada pelo modelo que não a consideram, enquanto esta é sub-avaliada (Bollen, 1999).

2.5 Considerações finais

A modularidade é uma característica fundamental de muitos produtos, projectos de investimento e mesmo empresas. A modularidade cria uma carteira de opções pelo facto de a decisão de investir ou desenvolver cada módulo ser tomada ao nível do módulo e não do sistema. O modelo de Baldwin e Clark (2000), que identifica os factores que determinam as diferentes opções criadas pela modularidade, será apresentado em maior detalhe no capítulo 4. Nele teremos, também, oportunidade de identificar as suas principais limitações, que estão na origem de alguns dos contributos do modelo de avaliação das opções reais criadas pela modularidade,

⁹Como um processo geométrico Browniano em Roberts e Weitzman (1981), como uma opção de troca entre custos e benefícios em Newton, Paxson e Pearson (1996), Childs, Ott e Triantis (1998), Taudes (1998) e Lint e Pennings (2001) ou como um processo Poisson em Weeds (1999) e Schwartz e Moon (2000).

proposto nesta tese.

A avaliação de projectos com opções reais não requer pressupostos adicionais relativamente aos métodos de avaliação baseados na actualização dos fluxos de caixa, como o VAL. A existência de riscos que não podem ser replicados pelo mercado, i.e. a inexistência de mercados suficientemente completos, impossibilita quer a utilização do VAL quer a avaliação das opções reais num contexto risco-neutral, a menos que se assuma como pressuposto que os agentes são neutrais face a esses riscos.

Na presença de mercados incompletos a avaliação de projectos só pode ser realizada utilizando uma avaliação subjectiva das probabilidades associadas a cada evento e dos prémios de risco. Nesse caso perder-se-ia a "disciplina" que o mercado impõe à avaliação. Reconhece-se que, sobretudo para as opções reais, os mercados poderão não ser suficientemente completos. A avaliação das opções neste contexto está ainda numa fase embrionária de investigação, pelo que se assume aqui que os mercados são suficientemente completos, o que possibilita a avaliação risco-neutral, independentemente das preferências dos agentes face ao risco¹⁰.

A avaliação de opções com múltiplos activos ou variáveis-estado subjacentes, não se pode realizar com recurso a métodos que sofrem da "maldição da dimensionalidade", como as árvores binomiais ou o método das diferenças finitas. A simulação surge como alternativa viável, mesmo para o caso das opções americanas ou bermudas.

A modularidade, para além de depender de várias variáveis-estado, cria uma carteira de opções. A avaliação de carteiras de opções tem sido, também, um desafio importante para a literatura das opções reais. Recentemente Gamba (2003) propôs a extensão do método de simulação de Longstaff e Schwartz (2001) (o método de simulação de Monte Carlo dos mínimos quadrados, LSM¹¹) para avaliar carteiras de opções. O capítulo 3 propõe-se analisar empiricamente o desempenho do método na avaliação de opções com múltiplos activos e de carteiras de opções reais.

Finalmente deve ser referido que se assume, nesta tese, que as opções são proprietárias, i.e. a empresa tem um direito de monopólio sobre elas. O modelo que se propõe no capítulo 4 pode incorporar, se tal for necessário, o efeito da competição.

¹⁰Poder-se-ia assumir, em alternativa, que os agentes são neutrais face aos riscos para os quais o mercado não é suficientemente completo.

¹¹"Least Squares Monte Carlo simulation Method".

Capítulo 3

A avaliação de opções reais com o método de simulação Monte Carlo dos mínimos quadrados

3.1 Introdução

Tal como referimos anteriormente, e veremos em maior detalhe no capítulo 4, a modularidade cria uma carteira de opções reais contingentes sobre múltiplos activos, que só podem ser correctamente avaliadas com recurso à simulação, dada a impossibilidade de se obterem soluções fechadas ou de utilizar outros métodos numéricos por sofrerem da "maldição da dimensionalidade"¹. Limitar o exercício das opções ao momento da sua maturidade é um pressuposto bastante restritivo pois a maioria das decisões de investimento podem ser tomadas, senão continuamente, pelo menos em vários momentos ao longo do tempo, i.e. as opções reais são frequentemente opções do tipo americano ou bermudas.

A simulação, introduzida por Boyle (1977) para avaliar opções europeias, foi considerada inicialmente inadequada para avaliar opções americanas, por se considerar ser impossível compatibilizar a natureza retroactiva desta com uma técnica progressiva como aquela. Só na última década é possível encontrar métodos que permitem avaliar opções americanas com recurso à simulação. Alguns destes métodos estimam o valor de continuação através de uma projecção dos fluxos de caixa gerados pela opção sobre um conjunto de funções-base (Carrière, 1996; Tsitsiklis e Van Roy, 1999; Longstaff e Schwartz, 2001; Tsitsiklis e Van Roy, 2001; Carrière, 2001). Talvez devido à sua simplicidade, o método LSM de Longstaff e

¹A menos que se considere apenas a possibilidade de um produto ter somente dois módulos, situação na qual seria possível obter uma solução, ainda que mais demorada, recorrendo ao método binomial.

Schwartz (2001) ganhou algum destaque sobre os outros, tendo sido analisada a sua convergência teórica (Clément, Laberton e Protter, 2002; Stentoft, 2004b) e empírica (Moreno e Navas, 2003; Stentoft, 2004a; Areal e Taylor, 2005). Por outro lado, foi utilizado, anteriormente, por diversos autores na avaliação de opções reais (v.g.: : Albertí, León e Llobet (2003), Schwartz (2004), Cortazar, Gravel e Urzua (2005), Gonçalves-Pinto e Azevedo-Pereira (2005)).

Gamba (2003) propôs uma extensão do método LSM para avaliar carteiras de opções. Utilizando uma abordagem modular, decompõe os problemas de opções reais em conjuntos de opções individuais hierarquicamente definidos, tornando possível a sua avaliação. O método é utilizado para avaliar opções independentes, compostas, mutuamente exclusivas e problemas de troca ótima.

A simulação permite, para além de avaliar opções americanas dependentes de várias variáveis e carteiras de opções, introduzir pressupostos alternativos quanto à evolução estocástica das variáveis, para os quais, mesmo em problemas mais simples, não seria possível encontrar soluções com outros métodos.

O presente capítulo tem como objectivo analisar, avaliando a sua precisão, o método LSM e a sua extensão². A secção 3.2 apresenta o método LSM e sua extensão para avaliar carteiras de opções. Nesta secção é proposto um algoritmo alternativo ao de Gamba (2003) para avaliar opções mutuamente exclusivas. Na secção 3.3 (página 32) é discutida a precisão do método ao nível da sua convergência, bem assim como são apresentadas as análises empíricas anteriormente realizadas. Na secção 3.4 (página 41) é realizada uma análise detalhada do método. A análise é feita considerando diferentes famílias de polinómios e a convergência do método com o número de funções-base. São ainda analisados diferentes métodos de simulação, incluindo a simulação quasi-aleatória (números ou sequências de baixa discrepância) e sua convergência com o número de iterações. Finalmente a secção 3.5 (página 64) apresenta os principais resultados e as considerações finais do capítulo.

3.2 O método LSM

A simulação de Monte Carlo tem uma vantagem significativa sobre outros métodos de avaliação de opções: pode ser utilizada para avaliar opções com variáveis-estado subjacentes cuja evolução pode ocorrer de acordo com diversos processos estocásticos. No entanto, nesta tese centramos a nossa atenção na avaliação de opções sobre activos (X_t - vector da(s) variável(eis)-estado) cujos preços são go-

²Doravante, designaremos ambos (o método de Longstaff e Schwartz (2001) e a extensão proposta por Gamba (2003)) como "método" ou "método LSM".

vernados por processos geométricos Brownianos, eventualmente correlacionados:

$$dX_t = (\mu - \delta) X_t dt + \sigma X_t dW \quad X_0 = x \quad (3.1)$$

$X_t > 0$, μ e σ representam, respectivamente, o parâmetro de tendência e a volatilidade instantânea, δ a taxa de dividendos ou taxa de conveniência, que é, normalmente, no contexto das opções reais, a taxa de fluxos de caixa perdidos enquanto a opção não é exercida. Finalmente, dW é um incremento de um processo de Wiener.

Pressupondo que os mercados são suficientemente completos, existe uma única medida de probabilidade neutral ao risco, de acordo com a qual o processo estocástico do preço do activo é:

$$dX_t = (r - \delta) X_t dt + \sigma X_t dW \quad X_0 = x \quad (3.2)$$

sendo r a taxa isenta de risco.

O valor de uma opção americana, com um *payoff* $\Pi(t, X_t)$, que pode ser exercida desde o momento t até à maturidade (T), é dado por:

$$F(t, X_t) = \max_{\tau} \{ \mathbb{E}_t^* [e^{-r(\tau-t)} \Pi(\tau, X_{\tau})] \} \quad (3.3)$$

onde τ é o momento óptimo de paragem ($\tau \in [t, T]$) e $\mathbb{E}_t^*[\cdot]$ o valor esperado neutral ao risco, condicionado à informação disponível no momento t .

Longstaff e Schwartz (2001) propuseram um algoritmo para avaliar opções americanas descritas pela equação 3.3, podendo esta ser aproximada em tempo discreto, dividindo a maturidade (T) em N intervalos de duração igual a $\Delta t = \frac{T}{N}$. O processo estocástico das variáveis-estado subjacentes é simulado com K iterações ou caminhos³. Se se assumir que a opção só pode ser exercida em momentos discretos no intervalo $[0, T]$, o momento óptimo de paragem pode ser obtido utilizando a seguinte equação de Bellman:

$$F(t_n, X_{t_n}) = \max \{ \Pi(t_n, X_{t_n}), e^{-r(t_{n+1}-t_n)} \mathbb{E}_{t_n}^* [F(t_{n+1}, X_{t_{n+1}})] \} \quad (3.4)$$

Sendo o valor de continuação:

$$\Phi(t_n, X_{t_n}) = e^{-r(t_{n+1}-t_n)} \mathbb{E}_{t_n}^* [F(t_{n+1}, X_{t_{n+1}})] \quad (3.5)$$

com:

$$\Phi(T, X_T) = 0$$

³Ver no apêndice 3.A (página 68) como simular caminhos (correlacionados) de processos geométricos Brownianos.

3.2. O método LSM

O momento óptimo de paragem para cada caminho ω ($\tau(\omega)$) é obtido, começando no momento T e retroactivamente, aplicando a seguinte regra:

$$\text{se: } \Phi(t_n, X_{t_n}(\omega)) \leq \Pi(t_n, X_{t_n}) \quad \text{então: } \tau(\omega) = t_n \quad (3.6)$$

Na maturidade o valor de continuação é nulo, uma vez que a opção deixa de estar disponível. Num qualquer momento t_n , anterior a T , o detentor da opção deve comparar o resultado do exercício imediato, que é conhecido ($\Pi(t_n, X_{t_n})$) com o valor de continuação ($\Phi(t_n, X_{t_n})$), que não é conhecido e é igual ao valor esperado condicional dos fluxos de caixa gerados pelo exercício da opção nos momentos posteriores. Se a condição 3.6 se verificar, então o momento de paragem, $\tau(\omega)$, é actualizado. O valor da opção americana é calculado pela média dos valores de todas as iterações:

$$F(0, x) = \frac{1}{K} \sum_{\omega=1}^K e^{-r\tau(\omega)} \Pi(\tau(\omega), X_{\tau(\omega)}(\omega)) \quad (3.7)$$

A principal contribuição do método LSM é o cálculo do valor de continuação⁴, Φ , que corresponde ao valor esperado dos fluxos de caixa futuros resultantes do exercício óptimo, condicional à informação disponível no momento actual. Seja $\Pi(t, s, \tau, \omega)$ o fluxo de caixa para o caminho ω resultante do exercício óptimo da opção no momento s ($t < s \leq T$), assumindo que a opção não foi exercida no momento t ou em qualquer momento anterior.

O valor de continuação no momento t_n é, portanto:

$$\Phi(t_n, X_{t_n}) = \mathbb{E}_{t_n}^* \left[\sum_{i=n+1}^N e^{-r(t_i - t_n)} \Pi(t_n, t_i, \tau, \cdot) \right] \quad (3.8)$$

com:

$$\Pi(t, s, \tau, \omega) = \begin{cases} \Pi(s, X_s(\omega)) & \text{se } \tau(\omega) = s \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Dado que Φ pertence a um espaço de Hilbert \mathcal{L}^2 , o valor esperado condicional pode ser obtido através de uma combinação linear de elementos de funções ortogonais, $\Phi(t, X_t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi(t) L_j(t, X_t)$. O valor de continuação pode ser aproximado utilizando apenas os primeiros $J < \infty$ elementos: $\Phi^J(t, X_t) = \sum_{j=1}^J \phi(t) L_j(t, X_t)$. $\phi(t)$ pode ser estimado por uma regressão, utilizando o método dos mínimos quadrados como foi proposto por Longstaff e Schwartz, ou por outro método de regressão

⁴Um método semelhante foi proposto por Carrière (1996) e, numa abordagem diferente, por Tsitsiklis e Van Roy (1999), como os Longstaff e Schwartz (2001) referem.

apropriado⁵. O valor de continuação estimado pela regressão é utilizado para obter o momento óptimo de paragem:

$$\hat{\Phi}^J(t_n, X_{t_n}) = \sum_{j=1}^J \hat{\phi}(t) L_j(t_n, X_{t_n}) \quad (3.9)$$

Os autores, embora sugeriram que a família de polinómios Laguerre ponderados permite resultados mais precisos, afirmam que os testes numéricos realizados mostraram que polinómios das famílias Hermite, transformações de Fourier, funções trigonométricas ou mesmo simples potências das variáveis-estado, produzem também resultados bastante precisos. Sugerem ainda que a utilização apenas dos caminhos *in-the-money* nas regressões produz, para além de um algoritmo mais rápido, estimativas do valor da opção com menores erros-padrão.

Não é demais relembrar algumas das advertências feitas pelos autores quanto à implementação do método:

- A utilização do método dos mínimos quadrados ordinários para estimar o valor de continuação, pode não ser o mais adequado para processos com volatilidade estocástica, que podem produzir resíduos heterocedásticos. Métodos alternativos, como o método dos mínimos quadrados ponderado ou dos mínimos quadrados generalizado, podem ser mais adequados.
- Deve ter-se o cuidado de verificar a existência de potenciais problemas de "under(over)flows" durante a computação do algoritmo. Para reduzir a ocorrência de tais problemas, os autores sugerem a normalização da opção, dividindo todos os fluxos de caixa e preços pelo preço de exercício.
- Quando as funções-base escolhidas produzem uma matriz quase singular, deve ser utilizado um algoritmo de regressão apropriado para evitar erros numéricos.

3.2.1 A extensão do método

A variedade de aplicações feitas por Longstaff e Schwartz (2001) sugere que o método LSM pode ser aplicado com alguma facilidade na avaliação de uma só opção com múltiplas variáveis-estado e com diferentes processos estocásticos. O passo lógico seguinte seria a extensão do método para avaliar carteiras de opções. Tal foi

⁵Pizzi e Pellizzari (2002) utilizaram uma regressão não paramétrica. Embora tenham obtido resultados mais precisos com um menor número de iterações e momentos de exercício, a sua aplicação a problemas de maior dimensão fica comprometida devido ao facto de os métodos não paramétricos sofrerem também da "maldição da dimensionalidade".

proposto por Gamba (2003), que estendeu o método, possibilitando a sua utilização na avaliação de opções independentes, compostas e mutuamente exclusivas, assim como de problemas de troca.

3.2.1.1 Opções independentes

O valor de uma carteira de opções independentes é, simplesmente, a soma dos valores das opções individuais. Neste caso a aditividade dos valores das opções é válida, mesmo se os activos subjacentes não são independentes. Aqui a independência das opções significa que o seu exercício não é condicionado pelo exercício das outras opções.

O valor de H opções independentes ($G(t, X_t)$), com maturidades T_h e valores $F_h(t, X_t)$, $h = 1, \dots, H$ é, portanto, simplesmente a soma dos valores das opções individuais, que são, conjuntamente com o seus momentos óptimos de paragem, calculados independentemente, utilizando o método LSM. O valor da carteira é dado por:

$$G(t, X_t) = \sum_{h=1}^H F_h(t, X_t) \quad (3.10)$$

3.2.1.2 Opções compostas

Outro tipo de opções inter-relacionadas analisado é o das opções compostas, i.e. opções que, uma vez exercidas, dão o direito a exercer outras opções. O valor da opção depende, portanto, do valor das opções subsequentes.

O valor de uma carteira de H opções compostas com maturidades T_h ($T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_H$)⁶ é obtido aplicando o método LSM a começar pela opção de maior maturidade. Uma vez que a opção h dá o direito ao exercício da opção subsequente, o seu *payoff*, $\Pi_h(t, X_t)$ deve incluir o valor da opção $h + 1$. O valor da opção h (F_h) é portanto:

$$F_h(t, X_t) = \max_{\tau \in \mathcal{T}(t, T_h)} \{ \mathbb{E}_t^* [e^{-r(\tau-t)} (\Pi_h(\tau, X_\tau) + F_{h+1}(\tau, X_\tau))] \} \quad (3.11)$$

A equação de Bellman para este tipo de opções é:

$$F_h(t_n, X_{t_n}) = \max \{ \Pi_h(t_n, X_{t_n}) + F_{h+1}(t_n, X_{t_n}), e^{-r(t_{n+1}-t_n)} \mathbb{E}_{t_n}^* [F_h(t_{n+1}, X_{t_{n+1}})] \} \quad (3.12)$$

⁶Em alternativa, a opção subsequente pode ter uma duração fixa, em vez de uma maturidade fixa. Neste caso, o valor da opção subsequente é dependente do percurso, uma vez que o momento de paragem (τ_h) da opção h passa a ser estocástico e dependente do momento de paragem da opção $h - 1$. A opção subsequente pode ser exercida até $\tau_h + D$, em que D é a duração dessa opção.

A regra seguinte é utilizada para determinar o momento óptimo de paragem para a opção h (τ_h) no momento t_n para o caminho ω :

$$\begin{aligned} \text{se: } & \Phi_h(t_n, X_{t_n}(\omega)) \leq \Pi_h(t_n, X_{t_n}(\omega)) + F_{h+1}(t_n, X_{t_n}(\omega)) \\ \text{então: } & \tau_h(\omega) = t_n \end{aligned} \quad (3.13)$$

O valor de continuação, Φ_h , obtém-se estendendo a ideia de Longstaff e Schwartz:

$$\Phi_h(t_n, X_{t_n}(\omega)) = \mathbb{E}_{t_n}^* \left[\sum_{i=n+1}^N e^{-r(t_i-t_n)} \sum_{l=h}^H \Pi_l(t_n, t_i, \tau, \cdot) \right] \quad (3.14)$$

Φ_h é aproximado por Φ_h^J , que pode ser estimado pelo método de regressão dos mínimos quadrados.

O valor da opção $h+1$, F_{h+1} , é dado por:

$$F_{h+1}(t_n, X_{t_n}(\omega)) = \max \{ \Pi_{h+1}(t_n, X_{t_n}(\omega)) + F_{h+2}(t_n, X_{t_n}(\omega)), \Phi_{h+1}(t_n, X_{t_n}(\omega)) \} \quad (3.15)$$

O valor de continuação da opção $h+1$ é, uma vez mais, calculado pelo método LSM. O *payoff* das opções subsequentes ($l = h+1, \dots, H$), $\Pi_l(t_n, t_n, \tau, \omega)$ é já conhecido.

Dado que precisamos do valor das opções subsequentes para todos os valores do activo subjacente, ele deve ser estimado utilizando todos os caminhos⁷. Uma abordagem alternativa seria a utilização apenas dos caminhos *in-the-money* para encontrar os momentos óptimos de paragem para cada opção e de todos os caminhos para estimar o valor de continuação necessário para a equação 3.15. Isto significa que teríamos, neste caso, uma regressão adicional para cada passo⁸.

3.2.1.3 Opções mutuamente exclusivas

O terceiro tipo de opções abordado em Gamba (2003) é o das opções mutuamente exclusivas, i.e. opções que uma vez exercidas anulam todas as outras opções alternativas. No contexto das opções reais é o caso, por exemplo, da escolha entre a opção de expansão e a opção de abandono. A decisão tem que ser tomada num determinado horizonte temporal, T_H , e implica a escolha da melhor alternativa. Assume-se, adicionalmente, que a decisão é irreversível. O problema sob avaliação significa não só a escolha do momento óptimo de paragem mas também a escolha da opção óptima (melhor). A variável-controlo é agora uma variável dupla (τ, ζ) ,

⁷Apelidamos, neste caso, a regressão de "não restrita".

⁸Apelidamos esta abordagem de "regressão restrita".

3.2. O método LSM

sendo τ o momento de paragem $\in \mathcal{T}(t, T_H)$ e $\zeta \in \{1, 2, \dots, H\}$. O valor da opção de escolha da melhor de H opções é dado por:

$$G(t, X_t) = \max_{(\tau, \zeta)} \{e^{-r(\tau-t)} \mathbb{E}_t^* [F_\zeta(\tau, X_\tau)]\} \quad (3.16)$$

A equação de Bellman para este tipo de opções é dada por:

$$G(t_n, X_{t_n}) = \max \{F_1(t_n, X_{t_n}), \dots, F_H(t_n, X_{t_n}), e^{-r(t_{n+1}-t_n)} \mathbb{E}_{t_n}^* [G(t_{n+1}, X_{t_{n+1}})]\} \quad (3.17)$$

A regra seguinte é utilizada para determinar a variável-controlo (τ, ζ) no momento t_n para o caminho ω :

$$\text{se: } \Phi(t_n, X_{t_n}(\omega)) \leq \max_h \{F_h(t_n, X_{t_n}(\omega))\} \quad \text{então: } (\tau, \zeta)(\omega) = (t_n, \bar{h}) \quad (3.18)$$

com:

$$\bar{h} = \arg \max_h \{F_h(t_n, X_{t_n}(\omega))\},$$

O valor de continuação obtém-se, uma vez mais, estendendo a ideia de Longstaff e Schwartz:

$$\Phi(t_n, X_{t_n}) = \mathbb{E}_{t_n}^* \left[\sum_{i=n+1}^N e^{-r(t_i-t_n)} \Pi(t_n, t_i, \tau, \zeta, \cdot) \right] \quad (3.19)$$

com

$$\Pi(t_n, s, \tau, \zeta, \cdot) = \begin{cases} \Pi_h(t, X_s(\omega)) & \text{se: } s = \tau(\omega) \text{ e } h = \zeta(\omega) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

que pode ser aproximado por Φ^J , que se pode estimar por uma regressão de mínimos quadrados.

O valor da opção h (F_h) deve ser também estimado. Dado que o momento óptimo de paragem para a opção h já foi determinado, então:

$$F_h(t_n, X_{t_n}(\omega)) = \max \{\Pi_h(t_n, X_{t_n}(\omega)), \Phi_h(t_n, X_{t_n}(\omega))\} \quad (3.20)$$

O valor de continuação da opção h (Φ_h) é calculado de acordo com o método LSM.

Propomos um algoritmo alternativo para avaliar este tipo de opções. *"Since the decision about the option is irreversible... the choice is not made until the time to exercise the most favourable outcome has come."* (Gamba, 2003, p. 12). Uma opção mutuamente exclusiva pode ser avaliada utilizando o método LSM para avaliar uma opção única, substituindo o *payoff* por:

$$\Pi_G(t_n, X_{t_n}) = \max_h \{\Pi_h(t_n, X_{t_n})\} \quad (3.21)$$

O controlo óptimo (τ, ζ) , no momento t_n para o caminho ω , é determinado utilizando a seguinte regra:

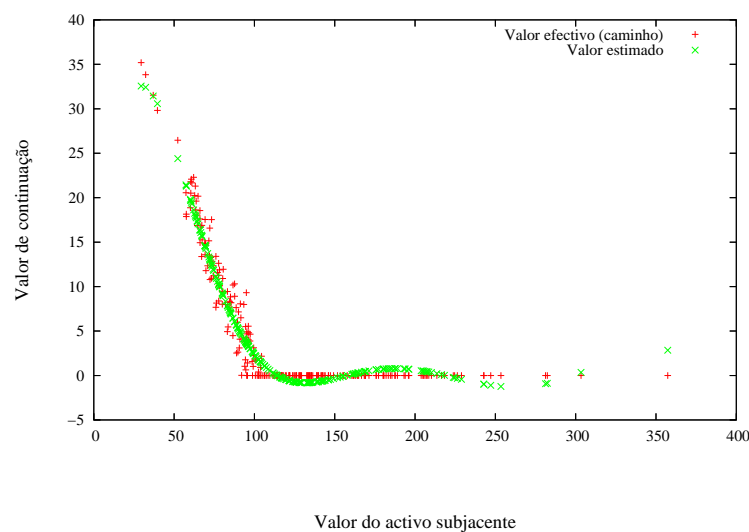
$$\text{se: } \Phi(t_n, X_{t_n}(\omega)) \leq \max_h \{\Pi_h(t_n, X_{t_n}(\omega))\} \quad \text{então: } (\tau, \zeta)(\omega) = (t_n, \bar{h}) \quad (3.22)$$

onde:

$$\bar{h} = \arg \max_h \{\Pi_h(t_n, X_{t_n}(\omega))\},$$

Com este algoritmo não é necessário avaliar cada uma das H opções, o que significa que é um algoritmo mais rápido do que o proposto por Gamba. Esta não é a sua única vantagem: produz também valores das opções mais precisos para um menor número de funções-base, como veremos na secção 3.4.3.1 (página 59), e uma escolha mais correcta (precisa) da melhor opção, o que não acontece com o algoritmo de Gamba. Para ilustrar esta última vantagem podemos observar na figura 3.1 que, ao estimar o valor de continuação, o método LSM atribui um valor positivo na região *out-the-money*, na qual o valor de continuação deveria ser nulo. Este facto faz com que o número de vezes em que a opção é exercida é superior ao que deveria ser. No caso das opções mutuamente exclusivas o método atribuirá, muitas vezes, a escolha da melhor opção a outra opção que não a correcta ou a uma das opções quando a escolha correcta seria nenhuma delas.

Figura 3.1: Valor de continuação no passo T-1 para uma opção de venda



São apresentados apenas os valores referentes aos primeiros 250 caminhos simulados.

3.3 A precisão do método

Dado que um estimador de Monte Carlo é uma média de K valores (caminhos) individuais de uma variável aleatória, cada estimativa individual, para um K suficientemente grande, tem uma distribuição normal de probabilidade, de acordo com o teorema do limite central. O desvio padrão é uma das medidas da incerteza da estimativa da simulação. Normalmente não é conhecida a variância da variável aleatória para a qual estamos a usar a simulação para calcular o valor esperado. Para a estimar podemos fazer várias simulações para cada opção ou, alternativamente, podemos utilizar a variância da simulação como estimador:

$$\hat{\sigma}_K = \sqrt{\left(\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \hat{F}_i(0, x)^2 \right) - \left(\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \hat{F}_i(0, x) \right)^2} \quad (3.23)$$

O *erro padrão* é utilizado como uma medida de precisão da estimativa da simulação:

$$\hat{\epsilon}_K = \frac{\hat{\sigma}_K}{\sqrt{K}} \quad (3.24)$$

Uma medida alternativa da precisão da simulação de Monte Carlo é a raiz quadrada da média dos quadrados dos erros relativos (RMSRE⁹), que é uma medida relativa da precisão de L estimativas:

$$RMSRE = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \left[\frac{F(0, x) - \hat{F}_j(0, x)}{F(0, x)} \right]^2} \quad (3.25)$$

onde $\hat{F}_j(0, x)$ é a estimativa j e $F(0, x)$ é o "verdadeiro" valor da opção.

O erro de aproximação do método LSM pode ser decomposto em três partes:

1. O erro de discretização resultante da restrição das oportunidades de exercício a um número finito de datas¹⁰.
2. O erro de aproximação do valor de continuação, resultante da utilização de um número finito de funções-base:

$$\Phi(t, X_t) \approx \hat{\Phi}^J(t, X_t) \quad (3.26)$$

⁹"Root Mean Square Relative Error".

¹⁰Este erro não ocorre para as opções bermudas, desde que se utilize na simulação dos caminhos as oportunidades de exercício como passos discretos do tempo.

3. O erro estocástico que resulta da simulação de Monte Carlo:

$$F(0, x) \approx \frac{1}{K} \sum_{\omega=1}^K e^{-r\tau(\omega)} \Pi(\tau(\omega), X_{\tau(\omega)}(\omega)) \quad (3.27)$$

3.3.1 Convergência

Provar que um algoritmo de aproximação converge para o valor "verdadeiro" é uma questão central. O ritmo ao qual converge é, também, uma variável importante a ser considerada. O método LSM deve convergir à medida que aumentam, simultaneamente, o número de oportunidades de exercício (M), o número de funções-base (J) e o número de caminhos simulados (K).

A convergência do algoritmo é analisada por Longstaff e Schwartz (2001). Os autores apresentam duas proposições. A primeira proposição sugere que o algoritmo produz um limite inferior para o valor da opção e que este limite inferior pode ser melhorado aumentando o número de funções-base¹¹. Intuitivamente se percebe que, no limite, se o momento de paragem obtido pelo LSM fosse o correcto, então o valor da opção seria o valor verdadeiro. Se o momento de paragem que se obtém não é o óptimo, quer se exerça mais cedo ou mais tarde do que o momento óptimo, o valor encontrado para a opção será inferior ao verdadeiro. Isto sugere que o número de funções-base, J , deve ser aumentado até que o valor da opção não aumente significativamente. No entanto, alguns testes empíricos parecem colocar em causa esta sugestão (Rasmussen, 2002; Moreno e Navas, 2003; Stentoft, 2004a) para um número finito de caminhos: aumentando o número de funções-base pode produzir erros numéricos no algoritmo de regressão (v.g.: secção 3.3.2.1 (página seguinte)).

A segunda proposição sugere que, para uma opção contingente numa única variável-estado, que pode ser exercida apenas em dois momentos, o método LSM converge para o valor verdadeiro, para um dado nível de precisão, utilizando um número finito de funções-base e aumentando o número de iterações. Embora a proposição seja válida apenas para opções dependentes de uma só variável, os autores sugerem que resultados semelhantes poderiam ser obtidos para problemas de maior dimensão.

Uma análise mais detalhada, demonstrando a convergência pelo teorema do limite central, foi realizada por Clément, Laberton e Protter (2002). Os autores demonstram que o valor de continuação estimado converge para o valor de continuação correcto à medida que se aumenta o número de funções-base até ao infinito, e que, para um dado número de funções-base, o algoritmo converge para o valor

¹¹Um limite superior foi proposto por Glasserman e Yu (2004).

correcto de uma opção bermuda aumentando o número de iterações.

Stentoft (2004b) defende que Clément, Laberton e Protter (2002) negligenciaram o facto de, para assegurar a convergência, ser necessário aumentar, simultaneamente, o número de funções-base e o número de iterações. Demonstra a convergência do valor de continuação estimado, em múltiplos períodos e dimensões, para o valor de continuação correcto. O autor sugere ainda uma escolha óptima da combinação de funções-base e iterações, que devem crescer simultaneamente. Esta combinação depende da "suavidade" da função do valor de continuação e do número de variáveis-estado. O aumento do número de iterações produz melhores resultados do que o aumento do número de bases. Finalmente, Stentoft (2004b) sugere que a taxa de convergência é, provavelmente, decrescente relativamente ao número de oportunidades de exercício. .

Glasserman e Yu (2004) demonstram que, se a variável-estado subjacente é governada por um processo aritmético Browniano, o número de funções-base, para o qual é possível obter uma estimativa suficientemente precisa, deve crescer exponencialmente com o número de iterações, enquanto que para um processo geométrico Browniano deve crescer a uma taxa superior, para ser possível obter estimativas precisas do valor correcto de uma opção.

3.3.2 Aperfeiçoamentos do método

O método LSM pode ser melhorado reduzindo o erro estocástico da simulação de Monte Carlo e aumentando a qualidade da regressão. Esta pode ser melhorada utilizando quer uma família de polinómios diferente para as funções-base, quer um melhor método ou algoritmo de regressão. A qualidade da simulação poder ser melhorada utilizando técnicas de redução da variância (variáveis antitéticas e método dos momentos, por exemplo) ou utilizando sequências de baixa discrepância (simulação quasi-Monte Carlo ou quasi-aleatória).

3.3.2.1 Métodos e algoritmos de regressão

Longstaff e Schwartz (2001) sugerem, como dissemos anteriormente, a utilização de métodos alternativos ao dos mínimos quadrados ordinários e, para este, a utilização de um algoritmo capaz de tratar uma matriz quase singular, evitando imprecisões numéricas. À medida que o número de termos do polinómio aumenta, aumenta também a probabilidade de tal ocorrer e, muitas vezes, as imprecisões numéricas são impossíveis de evitar. Na presença de uma matriz quase singular, os coeficientes assumem valores muito elevados e instáveis. O algoritmo SVDFIT de Press, Teukolsky, Vetterling e Flanney (1992) utiliza a decomposição de uma

matriz singular para ultrapassar este problema. Quando algumas combinações das funções-base são irrelevantes para o valor estimado, o algoritmo força-as a ter um coeficiente pequeno e inócuo. O nível de tolerância a partir do qual tal é feito pode ser editado no algoritmo, escolhendo uma tolerância adequada. Níveis mais baixos de tolerância diminuem, contudo, a velocidade do algoritmo. Acresce que este nível de tolerância depende da precisão escolhida para as variáveis¹².

Areal e Taylor (2005) demonstraram que, se o tempo de computação for uma variável crítica para o problema em avaliação¹³, é possível obter resultados igualmente precisos na avaliação de uma única opção unidimensional, utilizando um algoritmo de regressão mais rápido (que não utiliza a decomposição da matriz singular) em conjunto com uma correcção da estimativa do valor de continuação, controlando-a para que tenha um valor pelo menos igual ao obtido no passo anterior¹⁴.

Uma das vantagens do método LSM é a simplicidade e celeridade da regressão dos mínimos quadrados. A utilização de, por exemplo, uma regressão não paramétrica, tal como foi feito por Carrière (1996) e Pizzi e Pellizzari (2002), embora produza resultados mais precisos, torna o algoritmo mais lento, o que limita a sua utilização para problemas de maior dimensão.

Longstaff e Schwartz (2001) sugerem que a utilização na regressão apenas dos caminhos *in-the-money* permite obter resultados mais precisos, com erros padrão menores.

3.3.2.2 Polinómios

De acordo com Longstaff e Schwartz (2001) o valor de continuação (condicional) esperado, dado pertencer a um espaço de Hilbert, pode ser representado por uma combinação de funções-base ortogonais. A ortogonalidade pode ser interpretada como a ausência de correlação (ou colinearidade) entre os termos de um polinómio. A escolha das funções base tem um efeito importante na significância individual dos coeficientes, aumentando a probabilidade de ocorrência das imprecisões numéricas anteriormente referidas. Tem, no entanto, um impacto reduzido na precisão do valor estimado, que é o que importa ser considerado. Tal como Moreno e Navas (2003) lembraram, os coeficientes de polinómios ortogonais formam uma matriz não-singular relativamente às potências simples, o que significa que a estimativa

¹²Demonstraremos mais à frente que isto pode explicar alguns resultados inesperados quando se aumenta o número de parâmetros da regressão.

¹³O que não será o caso da avaliação de opções reais.

¹⁴Este procedimento foi por nós sugerido e por ter apenas interesse quando o tempo de computação é uma variável relevante não será utilizado nesta tese. Para mais detalhes consultar Areal e Taylor (2005).

3.3. A precisão do método

do método LSM deve ser igual para todas as famílias de polinómios ortogonais e para as potências. As diferenças encontradas por Stentoft (2004a) para a opção de venda americana e por Moreno e Navas (2003) para a opção sobre o máximo de cinco activos só podem, portanto, ser explicadas pelas imprecisões numéricas do algoritmo de regressão.

A utilização de funções-base não ortogonais tem um impacto reduzido na precisão do método LSM (Longstaff e Schwartz, 2001; Rasmussen, 2002). Rasmussen (2002) propôs a utilização de funções-base diferentes para o caso de uma opção única: em vez de polinómios sugere a utilização do preço se exercício, do valor da variável-estado, do valor de uma opção europeia com maturidade em T e o produto dos últimos dois valores. Obviamente esta sugestão só é possível aplicar em opções para as quais se pode obter uma solução fechada para o valor da opção europeia.

3.3.2.3 Técnicas de redução da variância

Uma apresentação detalhada das várias técnicas de redução da variância pode ser encontrada no capítulo 10 de Jackel (2002). De seguida são apresentadas apenas as duas técnicas que serão utilizadas na nossa análise.

3.3.2.3.1 Variáveis antitéticas

Em alternativa à utilização de K valores aleatórios independentes de uma distribuição normal, podem utilizar-se apenas $\frac{K}{2}$ ($\Phi_j \in N(0, 1)$, $j = 1, \dots, \frac{K}{2}$) e os respectivos $\frac{K}{2}$ valores simétricos ($-\Phi_j$). O valor da opção corresponde à média entre os preços obtidos com os valores "positivos" e os obtidos com os valores "negativos":

$$F_{AV} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K} (F^+ + F^-) \right] \quad (3.28)$$

A variância do preço obtido com as variáveis antitéticas é:

$$\text{Var} [F_{AV}] = \frac{1}{2} (\text{Var} [F^+] + \text{Cov} [F^+, F^-]) \quad (3.29)$$

dado que $\text{Var} [F^+] = \text{Var} [F^-]$.

A utilização de variáveis antitéticas é eficaz apenas se a co-variância entre os preços obtidos com os valores "positivos" e os preços obtidos com os valores "negativos" for negativa, o que é o caso.

Um argumento simples para a utilização da variáveis antitéticas é o de que os valores aleatórios obtidos com as variáveis antitéticas se distribuem de forma mais regular, dado que os K valores têm certamente uma média zero.

3.3.2.3.2 Método dos momentos

O método dos momentos corrige os primeiros momentos dos valores aleatórios de uma distribuição normal, assegurando que tenham a média de zero e o desvio padrão de um, por exemplo. Isto não significa que, no caso de um processo geométrico Browniano, a distribuição lognormal obtida tenha os dois primeiros momentos iguais à da distribuição lognormal contínua. O método dos momentos permite, normalmente, obter resultados mais precisos mas tal não é garantido dado que a correcção dos primeiros momentos tem um efeito imprevisível nos momentos de maior grau.

A popularidade destes métodos diminuiu significativamente com a utilização das sequências de baixa discrepância, com as quais podem, no entanto, ser combinados (Jackel, 2002). Para problemas de maior dimensão, estes métodos tornam-se proibitivos porque requerem bastante tempo de computação. Em qualquer dos casos as sequências de baixa discrepância permitem obter resultados mais precisos, mesmo em problemas de baixa dimensão.

3.3.2.4 Sequências da baixa discrepância

Apesar de terem como objectivo a aleatoriedade, os geradores de números aleatórios têm sempre uma periodicidade, i.e. têm séries correlacionadas, o que, por definição os tornam *não aleatórios*. É por esta razão que são chamados de números *pseudo-aleatórios*. Os números ou sequências de baixa discrepância (SBD), ou métodos quasi-Monte Carlo (ou quasi-aleatórios), procuram ultrapassar esta limitação, preenchendo os pontos do domínio que ainda não foram preenchidos.

A superior precisão das SBD não foi ainda demonstrada teoricamente, particularmente para problemas de maior dimensão (número de passos x número de variáveis aleatórias). O seu desempenho depende do problema em avaliação e pode apenas ser analisado empiricamente.

Na avaliação de opções americanas, as SBD foram utilizados anteriormente por Tan e Boyle (2000), Carrière (2001) e Haugh e Kogan (2004). Areal e Taylor (2005) testaram os mesmos geradores de sequências quasi-aleatórias desta tese na avaliação de opções únicas unidimensionais com o método LSM.

3.3.2.5 Melhorias do algoritmo

Rasmussen (2002) propôs uma alteração ao algoritmo LSM, para ultrapassar a deterioração da qualidade da regressão quando o número de caminhos *in-the-money* é reduzido. Propõe a geração de caminhos com diferentes valores iniciais para

as variáveis-estado, em vez de um único valor inicial. Note-se que a estratégia de exercício de uma opção é independente do valor inicial das variáveis-estado. Para calcular o valor da opção, uma vez estimado o valor de continuação, são utilizados apenas os caminhos com origem no valor inicial das variáveis-estado. Esta alteração torna, no entanto, o algoritmo bastante mais lento. Resultados com a mesma precisão podem ser obtidos, por exemplo, com SBD com um tempo de computação bastante inferior.

Areal e Taylor (2005) propuseram a utilização da fórmula de Black e Scholes (1973) para determinar o valor de continuação no passo imediatamente anterior à maturidade de uma opção única. Note-se que o valor de continuação, nesse momento, corresponde ao valor de uma opção europeia, dado que não haverá oportunidades de exercício antes da maturidade.

3.3.3 A precisão do método na avaliação de opções unidimensionais

A análise empírica da convergência do método proposto por Longstaff e Schwartz (2001) foi já realizada, utilizando diferentes metodologias, por alguns autores, permitindo aferir a sua precisão na avaliação de opções únicas, uni e multidimensionais.

A avaliação de opções de venda americanas com o método LSM é o primeiro exemplo apresentado por Longstaff e Schwartz (2001). Embora os autores refiram que testaram o método com diferentes parâmetros, não são apresentados os resultados da comparação das diferentes implementações. Uma análise mais detalhada foi realizada por Moreno e Navas (2003), Stentoft (2004a) e Areal e Taylor (2005).

Moreno e Navas (2003) compararam a utilização de dez famílias de polinómios como funções-base até ao limite de vinte membros (não tendo incluído a família de polinómios Laguerre ponderada proposta por Longstaff e Schwartz (2001)), na avaliação de uma só opção de venda americana¹⁵. Como esperado, os resultados apresentados são idênticos para todas as famílias de polinómios e as diferenças encontradas devem-se às imprecisões numéricas da rotina utilizada na regressão¹⁶. Pelo facto de o valor da opção parecer não crescer monotonamente, particularmente a partir do quinto grau dos polinómios, e embora o método sub-avale sistematicamente, quer as opções americanas quer as bermudas, os autores questionam a validade da proposição 1 de Longstaff e Schwartz (2001): a sugestão do aumento do número de regressores, até que o valor da opção deixe de crescer significativamente, parece ser de difícil implementação prática.

¹⁵Os autores testaram o método, com diferentes parâmetros para a opção, e afirmam que os resultados são semelhantes.

¹⁶A rotina utilizada foi a SVDFIT de Press, Teukolsky, Vetterling e Flanney (1992).

Uma conclusão semelhante é sugerida por Stentoft (2004a), que calcula 100 estimativas do valor de cada opção com diferentes "sementes"¹⁷ e a média das estimativas é comparada com o valor obtido com uma árvore binomial com 50000 passos, utilizando o RMSRE como indicador da precisão. Uma vez mais, a proposição 1 parece ser questionada: com 1 ou 2 funções-base o método sub-avalia o valor das opções enquanto que com 3 ou 4 funções-base parece sobre-avaliar o valor das opções. Tal pode ser o resultado, de acordo com o autor, de um desvio positivo produzido pela utilização do mesmo conjunto de caminhos para estimar o valor de continuação e o valor da opção¹⁸. Este desvio positivo tende a diminuir com o aumento do número de iterações. Os resultados sugerem ainda que o aumento do número de regressores nem sempre contribui para aumentar o valor da opção quando os polinómios da família Laguerre são utilizados. No entanto, quando se utilizam polinómios da família Chebyshev ou Legendre, a monotonia dos valores das opções é assegurada.

À medida que as opções ficam mais *out-the-money* (o valor da opção americana aproxima-se do valor da opção europeia), o efeito do aumento do número de regressores é menos significativo, sendo o aumento do número de iterações mais relevante.

O autor sugere que os polinómios da família *shifted* Legendre parecem produzir valores mais precisos, com um menor RMSRE do que os outros polinómios analisados. Se for considerado o tempo de computação necessário, as potências simples permitem obter resultados que não são menos precisos do que os obtidos com polinómios ortogonais¹⁹.

Algumas das conclusões destes dois estudos parecem contradórias mas poderão, eventualmente, ser explicadas pelas diferentes implementações utilizadas. Embora mais detalhada, a análise de Stentoft (2004a) utiliza apenas polinómios até ao quinto grau, enquanto que Moreno e Navas (2003) fazem uma análise até ao vigésimo grau. Outra possível explicação pode estar relacionada com a rotina de regressão dos mínimos quadrados utilizada ou pelo nível de precisão da variáveis escolhido, informação ausente no segundo estudo.

A análise mais detalhada e recente do método LSM, na avaliação de opções únicas unidimensionais, foi feita por Areal e Taylor (2005). Para uma amostra incomparavelmente maior de opções (2500), sugerem, numa análise que considera o tempo de computação e a precisão, a utilização de potências como funções-base

¹⁷Apenas metade das opções avaliadas por Longstaff e Schwartz (2001) são consideradas.

¹⁸Longstaff e Schwartz (2001) mostraram não haver uma diferença significativa se comparadas as duas alternativas.

¹⁹Tal deve-se ao facto de as funções obtidas a partir de potências serem mais rápidas de calcular do que as funções mais complexas dos outros polinómios.

e de SBD de Halton como método de simulação.

3.3.4 A precisão do método na avaliação de opções multidimensionais

Os métodos de simulação de Monte Carlo são particularmente eficientes na avaliação de opções de maior dimensão, i.e. de opções contingentes em várias variáveis-estado, dada a "maldição da dimensionalidade" de outros métodos numéricos. Longstaff e Schwartz (2001) propõem a utilização do método LSM para avaliar opções com mais do que uma variável-estado. Citando Judd (1998) sugerem que o número de funções-base necessário para obter resultados, com uma precisão aceitável, aumenta menos do que exponencialmente. Na verdade, Judd (1998) mostram que a convergência é conseguida aumentando o número de funções-base de acordo com os polinómios completos (multidimensionais). No entanto, Longstaff e Schwartz (2001) não utilizam os polinómios completos na avaliação de uma opção bermuda (com nove oportunidades de exercício) sobre o máximo de cinco activos não correlacionados. Utilizam antes, como funções-base, uma constante, cinco polinómios Hermite do máximo dos cinco activos, o segundo até ao quinto valores máximos dos activos e os seus quadrados, os quatro produtos de pares consecutivos e o produto dos cinco activos, num total de dezanove funções-base. Como valor de referência é utilizado o valor obtido pelo "stochastic mesh method" (SMM) de Broadie e Glasserman (1997b). As estimativas do método LSM para as opções avaliadas encontram-se dentro do intervalo de confiança do SMM, com a vantagem de ser significativamente mais rápidas de calcular.

Moreno e Navas (2003) testaram diferentes famílias de polinómios na avaliação da mesma opção sugerindo que a utilização de menos do que dois termos e mais do que sete termos produz resultados fora do intervalo dado pelo SMM. Os últimos são produzidos pela fraca qualidade da regressão. Foram testadas pelos autores formulações alternativas das funções-base. Com estes resultados (principalmente a fraca convergência aumentando o grau do polinómio), questionaram a robustez do método LSM na avaliação de opções multidimensionais.

Stentoft (2004a) analisou a precisão do método LSM na avaliação de opções sobre o máximo, mínimo, média aritmética e média geométrica de três activos. Na análise foram utilizados os polinómios completos (Judd, 1998) com três termos como funções-base. Para as opções com "payoffs" suaves (opções sobre a média aritmética e sobre a média geométrica), o método LSM parece ser bastante preciso. Para os outros "payoffs" (opções sobre o máximo ou sobre o mínimo) foram encontradas diferenças significativas relativamente aos valores do método binomial

de Boyle, Evnine e Gibbs (1989). No entanto, o autor afirma ser difícil concluir sobre a qualidade das estimativas do preço destas opções dado que, com a capacidade de memória disponível, foi apenas possível calcular o valor da opção com uma árvore binomial de apenas 400 passos. Finalmente, o autor demonstra que com o aumento dos factores estocásticos, o método LSM torna-se mais eficiente na relação tempo-precisão do que os métodos binomiais, devido à "maldição da dimensionalidade" dos últimos.

3.4 Análise empírica do método

Nesta secção, a precisão do método LSM é analisada, utilizando o RMSRE, na avaliação das opções sobre o máximo de vários activos, das opções compostas e das opções mutuamente exclusivas. Tal como referimos anteriormente, as análises existentes não apresentaram conclusões claras sobre a precisão do método LSM na avaliação de opções sobre o máximo (mínimo) de vários activos. Por outro lado, a análise do método na avaliação de carteiras de opções não foi ainda realizada.

Longstaff e Schwartz (2001) sugeriram a utilização de polinómios Laguerre ponderados como funções-base ($\mathcal{WL}_n(x)$ sendo n o grau do polinómio):

$$\mathcal{WL}_0(x) = e^{(-x/2)} \tag{3.30}$$

$$\mathcal{WL}_1(x) = e^{(-x/2)}(1 - x) \tag{3.31}$$

$$\mathcal{WL}_2(x) = e^{(-x/2)}(1 - 2x + x^2/2) \tag{3.32}$$

$$\mathcal{WL}_n(x) = e^{(-x/2)} \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \tag{3.33}$$

Tabela 3.1: Regras de recorrência para as funções-base

$$a_{1n}f_{n+1} = (a_{2n} + a_{3n}x)f_n(x) + -a_{4n}f_{n-1}(x) \quad (n - \text{grau do polinómio})$$

$f_n(x)$	a_{1n}	a_{2n}	a_{3n}	a_{4n}	$f_0(x)$	$f_1(x)$
Potências - $\mathcal{W}_n(x)$	1	0	1	0	1	x
Legendre - $\mathcal{P}_n(x)$	$n+1$	0	$2n+1$	n	1	x
Laguerre - $\mathcal{L}_n(x)$	$n+1$	$2n+1$	-1	n	1	$1 - x$
Hermite-A - $\mathcal{H}_n(x)$	1	0	2	$2n$	1	$2x$
Hermite-B - $\mathcal{H}_e_n(x)$	1	0	1	n	1	x
Chebyshev 1st tipo A - $\mathcal{T}_n(x)$	1	0	2	1	1	x
Chebyshev 1st tipo B - $\mathcal{C}_n(x)$	1	0	1	1	2	x
Chebyshev 1st tipo C - $\mathcal{T}_n^*(x)$	1	0	1	1/4	1	x
Chebyshev 2nd tipo A - $\mathcal{U}_n(x)$	1	0	2	1	1	$2x$
Chebyshev 2nd tipo B - $\mathcal{S}_n(x)$	1	0	1	1	1	$2x$

Fonte: Abramowitz e Stegun (1972)

Na análise serão testadas onze famílias de polinómios: as dez apresentadas na

tabela 3.1 (página anterior) e os polinômios Laguerre ponderados. Serão ainda testados: a utilização de variáveis antitéticas, o primeiro e o segundo método dos momentos e cinco sequências de baixa discrepância: Halton (1960), Sobol (1967), Faure (1982) e Niederreiter (1988). Na implementação das sequências de Sobol serão utilizados dois algoritmos: (1) o algoritmo proposto por Bratley e Fox (1988) e (2) o algoritmo proposto por Press, Teukolsky, Vetterling e Flanney (1992) com a inicialização de Silva e Barbe (2003), que, de acordo com os autores, produz melhores resultados para problemas de maior dimensão. Para reduzir os problemas associados à utilização de SBD em problemas com mais dimensões, são utilizadas *Brownian bridges*²⁰.

Será ainda comparada a utilização apenas dos caminhos *in-the-money* (regressão restrita) com a utilização de todos os caminhos na regressão (regressão não restrita). Para todas as opções, serão consideradas opções de venda e opções de compra.

Na análise será utilizada a rotina MRG31k3p de L'Ecuyer e Touzin (2000) para gerar valores da distribuição uniforme e o método de Moro (1995) para gerar valores da distribuição normal. As regressões serão feitas utilizando a rotina SVD-FIT (Press, Teukolsky, Vetterling e Flanney, 1992) com uma tolerância de $10e^{-15}$. Todas as variáveis relevantes serão do tipo "long double".

3.4.1 Opções sobre o máximo de vários activos

Dados os problemas da dimensionalidade associados aos métodos das árvores binomiais, optou-se por testar inicialmente o método LSM na avaliação de uma opção sobre o máximo de apenas dois activos²¹: com 1GB de RAM é possível construir uma árvore binomial com 1000 passos utilizando o método de Boyle, Evnine e Gibbs (1989)²² num tempo razoável. Será analisada a precisão do método LSM na avaliação quer da opção bermuda quer da opção americana.

Na análise assume-se que os preços dos activos subjacentes são governados por processos estocásticos geométricos Brownianos correlacionados. O *payoff* da opção é $\max[K - \max(S^1, S^2), 0]$ para a opção de venda, e $\max[\max(S^1, S^2) - K, 0]$ para a opção de compra. Os parâmetros das opções analisadas são apresentados na tabela 3.2 (página seguinte)²³.

²⁰Tal como sugerido por Boyle, Broadie e Glasserman (1997), são ignorados os primeiros 64 números da sequência.

²¹A opção sobre o mínimo foi também analisada, mas os resultados são bastantes semelhantes, pelo que se omitiu a sua apresentação.

²²Uma apresentação breve do método pode ser encontrada no apêndice 3.B (página 70).

²³Com estes parâmetros, o método LSM será testado na avaliação de 24 opções de venda e 24 opções de compra, enquanto que na análise de Stentoft (2004a) foram utilizadas apenas 12 opções de venda.

Tabela 3.2: Parâmetros das opções sobre o máximo de vários activos analisadas

Variável	Valor
$S_0^1 = S_0^2$	{36, 40, 44}
δ	0.0
σ	{0.3, 0.4}
ρ	{0.00, 0.25, 0.50, 0.75}
T	1 ano
K	40
r	0.06

3.4.1.1 A opção bermuda sobre o máximo de dois activos

Nesta secção é analisada a precisão do método LSM na avaliação de opções bermudas com o mesmo número de oportunidades de exercício (10 na nossa análise)²⁴. Tal como sugerido por Longstaff e Schwartz (2001) são utilizados apenas os caminhos *in-the-money* para estimar o valor de continuação. É utilizada também a formulação das funções-base por eles proposta.

3.4.1.1.1 Comparação da precisão dos polinómios

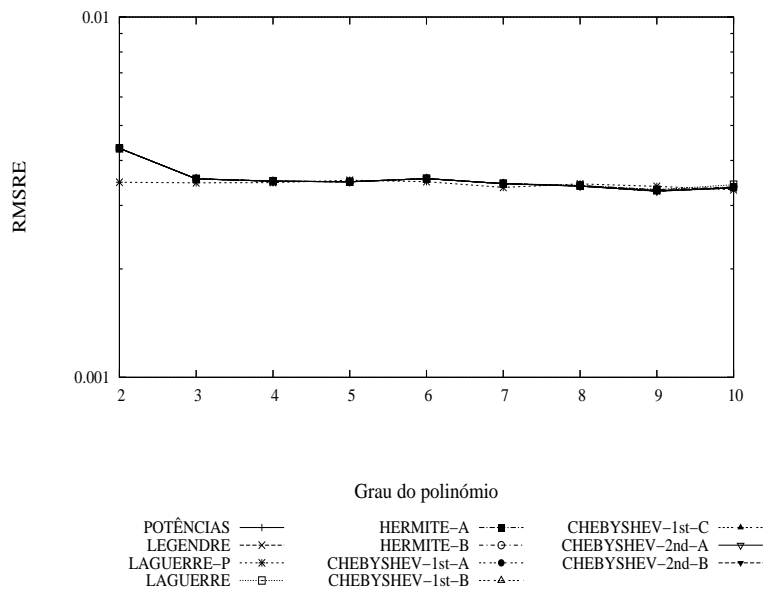
A figura 3.2 (página seguinte) mostra que todas as famílias de polinómios produzem resultados bastante semelhantes mesmo no caso da família Laguerre ponderada, com a excepção do grau dois²⁵. Tal como Moreno e Navas (2003) sugeriram, as diferenças que possam existir devem-se a imprecisões numéricas da rotina de regressão. A figura mostra também que o método LSM produz estimativas bastante precisas, com um RMSRE de cerca de 0,3%, para um grau reduzido dos polinómios (utilizando mais do que três termos não parece aumentar significativamente a precisão). Se se utilizar, em alternativa, todos os caminhos gerados na estimação do valor de continuação (figura 3.3 (página 45)) são obtidos resultados semelhantes. No entanto, os polinómios Laguerre poderados parecem produzir resultados com maior precisão. Em qualquer dos casos os gráficos evidenciam a convergência do método aumentando o grau do polinómio. Tal como mostraremos posteriormente

²⁴As análises empíricas anteriores usaram também como valor de referência o valor da opção bermuda (Longstaff e Schwartz, 2001; Moreno e Navas, 2003; Stentoft, 2004a). Na verdade, o método LSM converge para o valor da opção bermuda para um dado número de oportunidades de exercício.

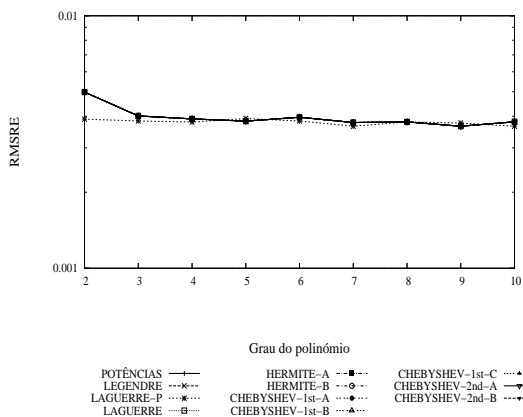
²⁵No apêndice 3.C (página 73) são apresentadas algumas das tabelas subjacentes ao gráfico.

3.4. Análise empírica do método

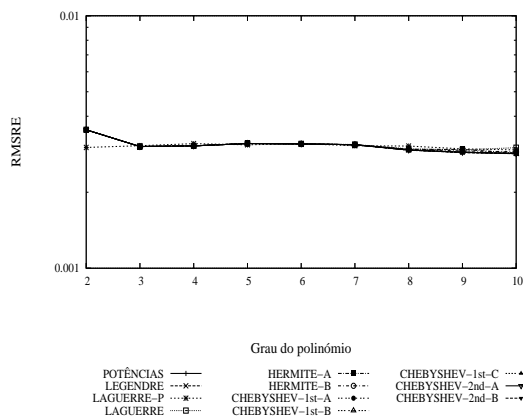
Figura 3.2: Precisão do método LSM com regressão restrita na avaliação de opções bermudas sobre o máximo de dois activos vs famílias de polinómios



(a) Opção de compra e opção de venda bermuda



(b) Opção de compra bermuda

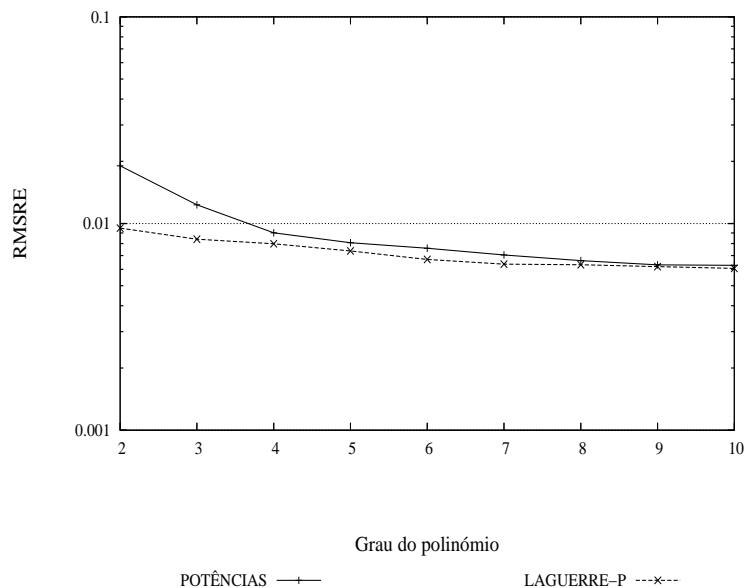


(c) Opção de venda bermuda

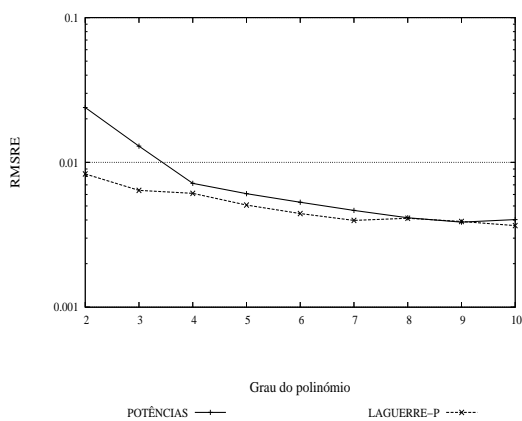
O valor de referência da opção bermuda foi obtido utilizando o método binomial com os parâmetros de Boyle, Evnine e Gibbs (1989) e 1000 passos. A simulação foi realizada com 100000 iterações com variáveis antitéticas e sem *Brownian bridges*. O gerador de números aleatórios (L'Ecuyer e Touzin, 2000) foi reinicializado em cada conjunto de opções de compra e venda, com a "semente" 12345 e variáveis normais geradas de acordo com Moro (1995). A regressão foi realizada utilizando a rotina SVDFIT com todos os caminhos.

em maior detalhe, a sugestão de Longstaff e Schwartz (2001) de utilizar apenas os caminhos *in-the-money* produz estimativas significativamente melhores.

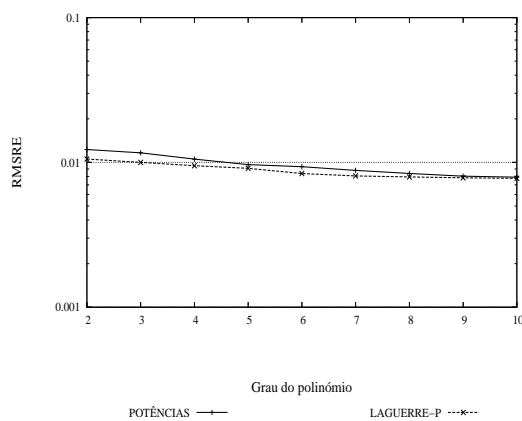
Figura 3.3: Precisão do método LSM com regressão não restrita na avaliação de opções bermudas sobre o máximo de dois activos vs famílias de polinómios



(a) Opção de compra e opção de venda bermuda



(b) Opção de compra bermuda



(c) Opção de venda bermuda

O valor de referência da opção bermuda foi obtido utilizando o método binomial com os parâmetros de Boyle, Evnine e Gibbs (1989) e 1000 passos. A simulação foi realizada com 100000 iterações com variáveis antitéticas e sem *Brownian bridges*. O gerador de números aleatórios (L'Ecuyer e Touzin, 2000) foi reinicializado em cada conjunto de opções de compra e venda, com a "semente" 12345 e variáveis normais geradas de acordo com Moro (1995). A regressão foi realizada utilizando a rotina SVDFIT com todos os caminhos.

3.4.1.1.2 Comparação da precisão dos métodos de simulação

A comparação dos métodos de simulação é realizada para vários números de iterações, numa progressão geométrica de $2^1 * 1000$ (2000) até $2^7 * 1000$ (128000) permitindo descortinar a convergência do método.

A comparação dos diferentes métodos de simulação (figura 3.4 (página seguinte)) sugere que as sequências de baixa discrepância melhoram a precisão da simulação. Das várias sequências analisadas, as de Faure parecem produzir os resultados menos precisos. A utilização de variáveis antitéticas e do método dos momentos, embora melhorem a precisão, produzem resultados que não se comparam: as sequências de Sobol, Halton e Niederreiter com 16000 iterações produzem resultados tão precisos quanto os obtidos com sequências pseudo-aleatórias com 128000 iterações. Os resultados sugerem ainda que as estimativas do método LSM parecem convergir para o valor de uma opção bermuda.

3.4.1.1.3 Regressão restrita vs regressão não restrita

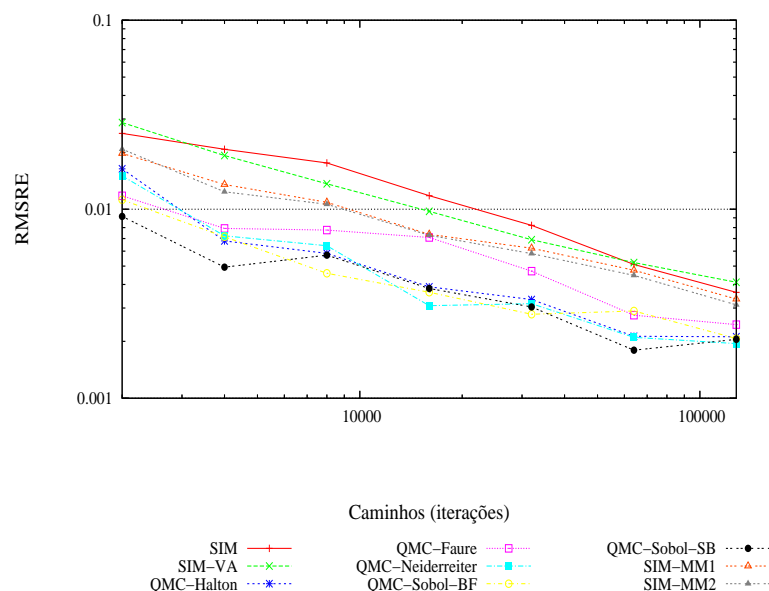
Tabela 3.3: Comparação dos métodos de simulação QMC na avaliação de opções bermudas sobre o máximo de dois activos: regressão restrita vs regressão não restrita

Método	Erro relativo máximo			RMSRE		
	Compra	Venda	Global	Compra	Venda	Global
Sequências de Halton						
Regressão não restrita	0.013	0.024	0.024	0.008	0.011	0.009
Regressão restrita	0.007	0.006	0.007	0.005	0.003	0.004
Sequências de Faure						
Regressão não restrita	0.014	0.031	0.031	0.005	0.018	0.013
Regressão restrita	0.004	0.016	0.016	0.002	0.009	0.006
Sequências de Niederreiter						
Regressão não restrita	0.010	0.019	0.019	0.004	0.012	0.009
Regressão restrita	0.006	0.007	0.007	0.003	0.003	0.003
Sequências de Sobol - Bratley e Fox						
Regressão não restrita	0.009	0.020	0.020	0.006	0.011	0.009
Regressão restrita	0.009	0.014	0.014	0.005	0.005	0.005
Sequências de Sobol - Silva e Barbe						
Regressão não restrita	0.010	0.034	0.034	0.005	0.016	0.012
Regressão restrita	0.008	0.014	0.014	0.003	0.006	0.005

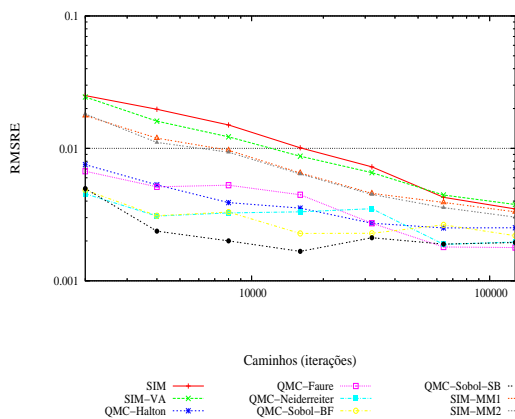
Na comparação foram utilizadas 48 opções de compra e 48 opções de venda. A taxa isenta de risco é de 6%, a taxa de dividendos 0% ou 10%, o tempo para a maturidade da opção de 1 ano, o preço de exercício 40, o preço do activo subjacente 36, 40 ou 44, a volatilidade 30% ou 40%, a correlação 0.0, 0.25, 0.5 ou 0.75. O valor do método binomial foi obtido com 1000 passos e os parâmetros do método de Boyle, Evnine e Gibbs (1989). A simulação foi realizada com 16000 iterações com "Brownian bridges". O gerador de números aleatórios (L'Ecuyer e Touzin, 2000) foi reinicializado em cada conjunto de opções de compra e venda, com a "semente" 12345 e variáveis normais geradas de acordo com a rotina de Moro (1995). A regressão foi realizada utilizando a rotina SVDFIT com polinómios Laguerre ponderados de grau 3.

Tal como mostrámos anteriormente, a utilização apenas dos caminhos *in-the-money* na estimação do valor de continuação permite obter resultados mais precisos. A tabela 3.3 apresenta uma evidência mais detalhada de tal superioridade:

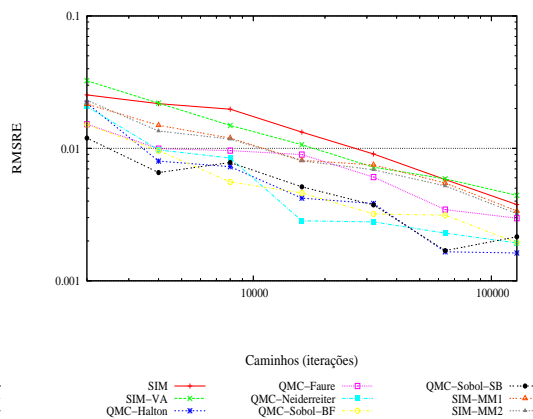
Figura 3.4: Precisão do método LSM com regressão restrita na avaliação de opções bermudas sobre o máximo de dois activos vs métodos de simulação - convergência com o número de iterações



(a) Opção de compra e opção de venda bermuda



(b) Opção de compra bermuda



(c) Opção de venda bermuda

O valor de referência da opção bermuda foi obtido utilizando o método binomial com os parâmetros de Boyle, Evnine e Gibbs (1989) e 1000 passos. A simulação foi realizada com *Brownian bridges* para os métodos QMC. O gerador de números aleatórios (L'Ecuyer e Touzin, 2000) foi reinicializado em cada conjunto de opções de compra e venda, com a "semente" 12345 e variáveis normais geradas de acordo com Moro (1995). A regressão foi realizada utilizando a rotina SVDFIT com todos os caminhos e polinômios Laguerre ponderados de grau 3. SIM: Simulação com números pseudo-aleatórios; VA - variáveis antitéticas; QMC - Simulação com sequências de baixa discrepância (quasi-Monte Carlo); BF - Bratley e Fox (1988); SB - Silva e Barbe (2003); MM1 - Método dos momentos (1º momento); MM2 - Método dos momentos (1º e 2º momentos).

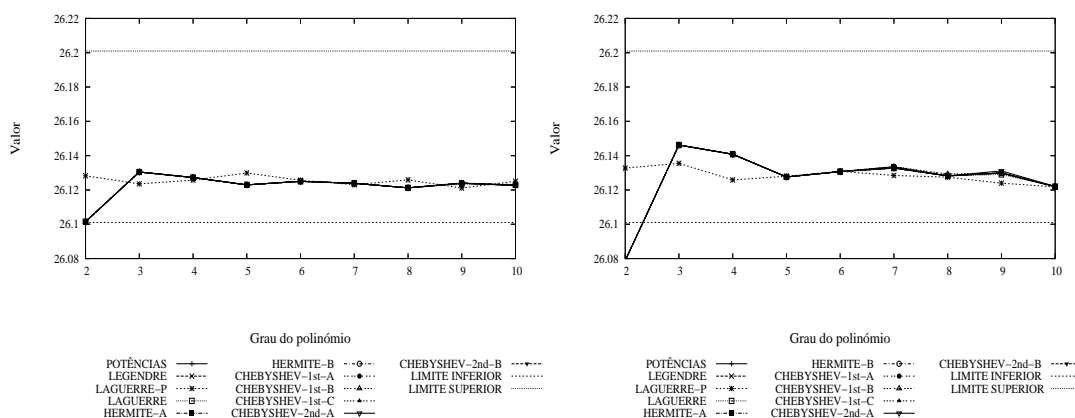
3.4. Análise empírica do método

para todas as sequências de baixa discrepância, o RMSRE é cerca de metade ou ainda inferior. Nesta comparação foram acrescentadas mais 48 opções, com a inclusão da possibilidade de a taxa de dividendos ser de 10%.

3.4.1.2 A opção bermuda sobre o máximo de cinco activos

Moreno e Navas (2003) analisaram a robustez do método LSM na avaliação de uma opção de compra bermuda sobre o máximo de cinco activos já analisada por Longstaff e Schwartz (2001). A figura 3.5 apresenta os resultados da nossa implementação. Todas as estimativas encontram-se dentro dos limites do intervalo de confiança, o que não era o caso para os polinómios da família Chebyshev-1st tipo A em Moreno e Navas (2003). Para além de possíveis diferenças na implementação do algoritmo, mesmo tendo utilizado a mesma rotina para a regressão, fizémo-lo utilizando uma precisão "long double" e uma tolerância para os valores singulares de $10e^{-15}$ (na implementação original da rotina, as variáveis são de tipo "float" e a tolerância de $10e^{-5}$) enquanto Moreno e Navas (2003) utilizaram variáveis do tipo "double"²⁶.

Figura 3.5: Precisão do método LSM na avaliação de uma opção bermuda sobre o máximo de cinco activos vs famílias de polinómios



²⁶A precisão das variáveis depende dos processadores e sistemas operativos utilizados. Com um processador Pentium 4 e o sistema operativo Linux obtém-se uma precisão de $10e^{-16}$ para as variáveis tipo "double" e $10e^{-20}$ para as tipo "long double".

3.4.1.3 A convergência para o valor de uma opção americana e bermuda sobre o máximo de dois activos

Utilizando sequência de baixa discrepância de Sobol com a inicialização de Bratley e Fox (1988) foi testada a precisão do método na avaliação de opções americanas sobre o máximo de dois activos, por comparação com a precisão na avaliação de opções bermudas.

O método LSM tem um precisão assinalável na avaliação de opções bermudas com um erro médio de cerca de 0,2% para uma opção com dez oportunidades de exercício (figura 3.6 (página seguinte)). No entanto, um maior número de oportunidades de exercício reduz a precisão do método na avaliação das opções bermudas. Já no que se refere às opções americanas, verifica-se que a precisão do método é, como esperado, inferior, aumentando com o número de passos (oportunidades de exercício) utilizados na simulação. Esta diferença resulta, sobretudo, da diferença de precisão na avaliação de opções de venda, já que a precisão na avaliação de opções de compra americanas é semelhante à precisão na avaliação de opções de compra bermudas.

Podemos identificar ainda uma tendência, também esperada, para uma menor precisão na avaliação de opções *out-the-money* do que nas opções *in-the-money* (figura 3.7 (página 51)). Tal é comum a outras opções e deve-se ao facto de na estimação do valor de continuação haver um menor número de caminhos *in-the-money*.

O aumento do número de iterações utilizadas permite melhorar significativamente a precisão na avaliação das opções bermudas, tendo um impacto quase nulo na precisão da avaliação de opções americanas (figura 3.8 (página 52)).

3.4.2 Opções compostas

Como referimos anteriormente, não foi, até ao momento, realizada uma análise detalhada da precisão da extensão proposta por Gamba (2003) na avaliação de carteiras de opções. Assim, utilizando a mesma metodologia da secção anterior, procede-se, de seguida, à análise do desempenho do método na avaliação de opções compostas (nesta secção) e de opções mutuamente exclusivas (na próxima secção)

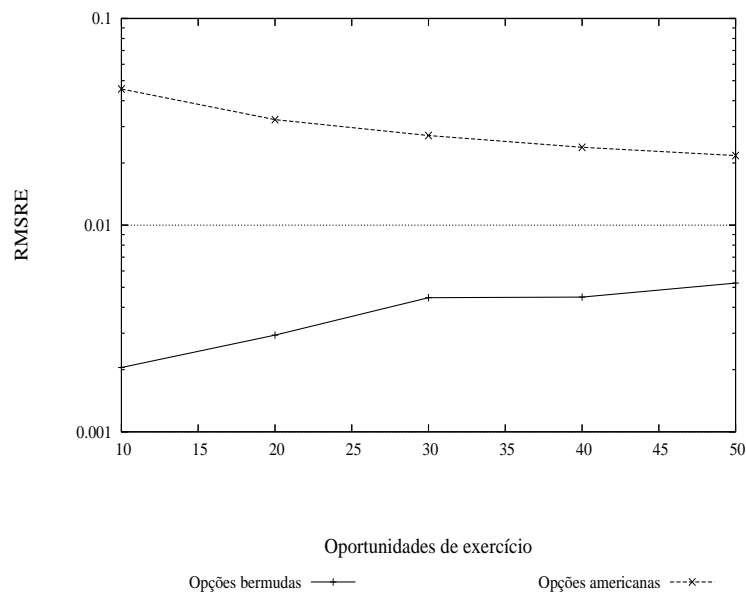
Para analisar o desempenho do método LSM na avaliação de opções compostas americanas, são utilizados os exemplos apresentados em Gamba (2003). Assume-se que o valor de um activo é governado por um processo estocástico geométrico Browniano:

$$dS_t = (r - \delta) S_t dt + \sigma S_t dW \quad S_0 = S \quad (3.34)$$

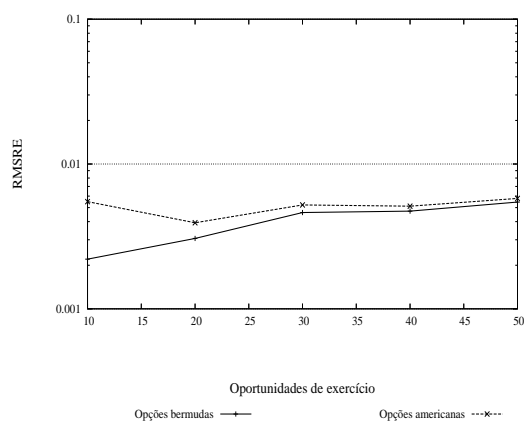
No primeiro exemplo apresentado a empresa pode exercer as seguintes opções:

3.4. Análise empírica do método

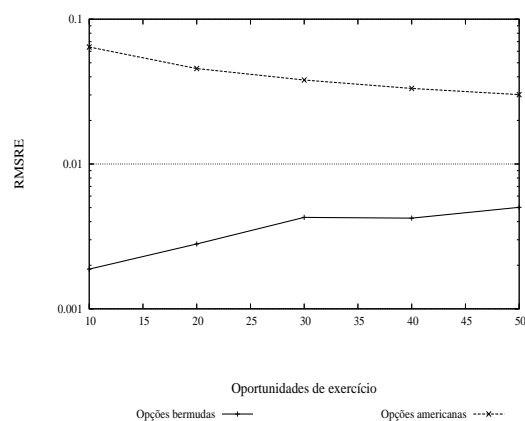
Figura 3.6: Precisão do método LSM na avaliação de opções bermudas e americanas sobre o máximo de dois activos - convergência com o número de oportunidades de exercício



(a) Opção de compra e opção de venda



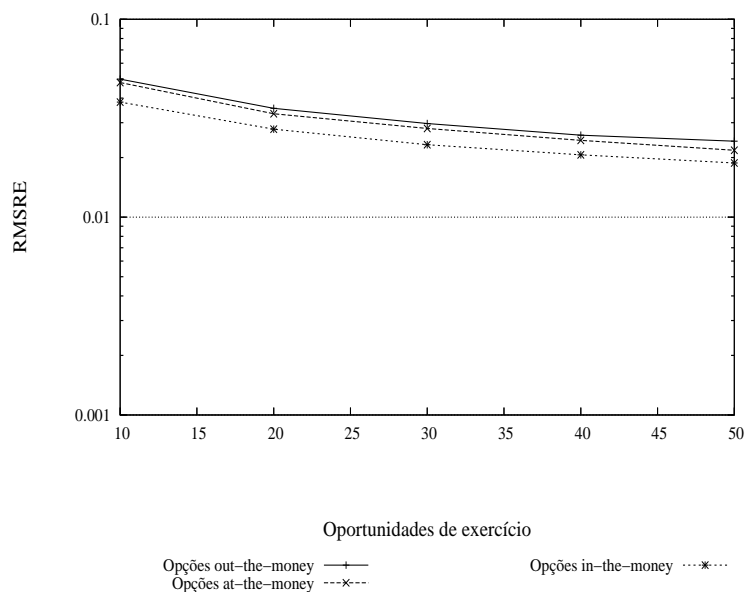
(b) Opção de compra



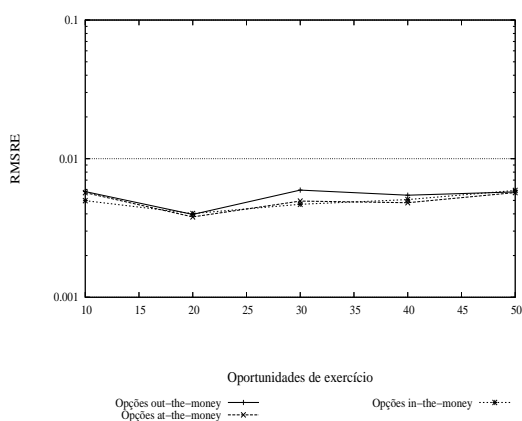
(c) Opção de venda

O valor de referência da opção foi obtido utilizando o método binomial com os parâmetros de Boyle, Evnine e Gibbs (1989) e 1000 passos. A simulação foi realizada com *Brownian bridges* e sequências de baixa discrepância de Sobol com o algoritmo de Bratley e Fox (1988) e 128000 iterações. A regressão foi realizada utilizando a rotina SVDFIT com todos os caminhos e polinômios Laguerre ponderados de grau 3.

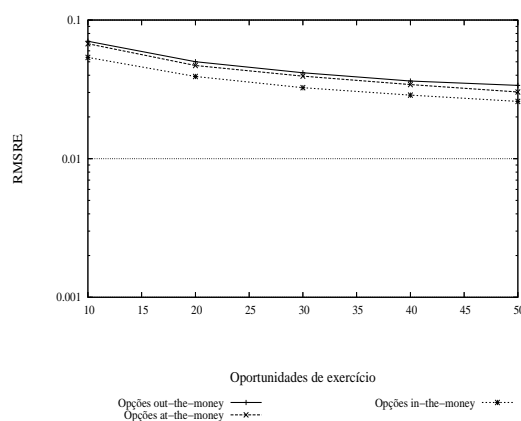
Figura 3.7: Precisão do método LSM na avaliação de opções americanas sobre o máximo de dois activos - convergência com o número de oportunidades de exercício vs *moneyness*



(a) Opção de compra e opção de venda



(b) Opção de compra

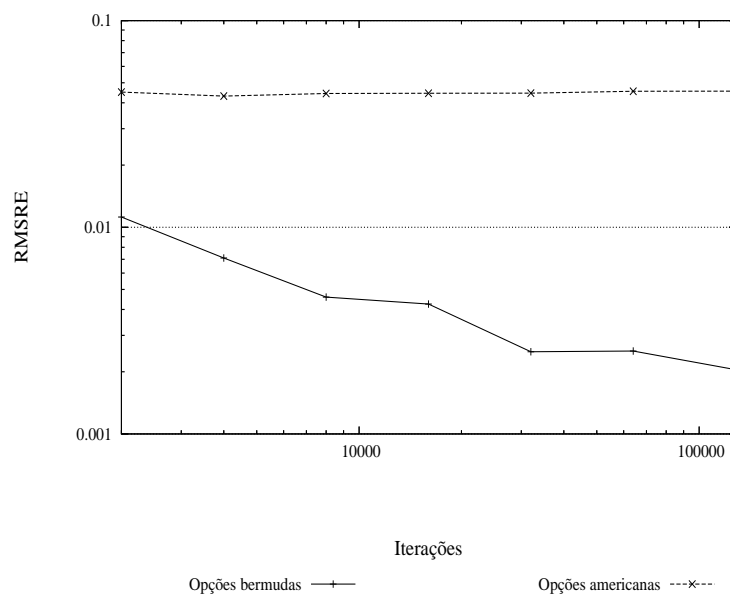


(c) Opção de venda option

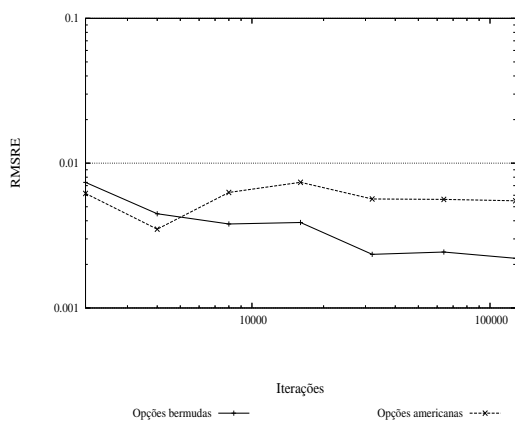
O valor de referência da opção foi obtido utilizando o método binomial com os parâmetros de Boyle, Evnine e Gibbs (1989) e 1000 passos. A simulação foi realizada com *Brownian bridges* e sequências de baixa discrepância de Sobol com o algoritmo de Bratley e Fox (1988) e 128000 iterações. A regressão foi realizada utilizando a rotina SVDFIT com todos os caminhos e polinômios Laguerre ponderados de grau 3.

3.4. Análise empírica do método

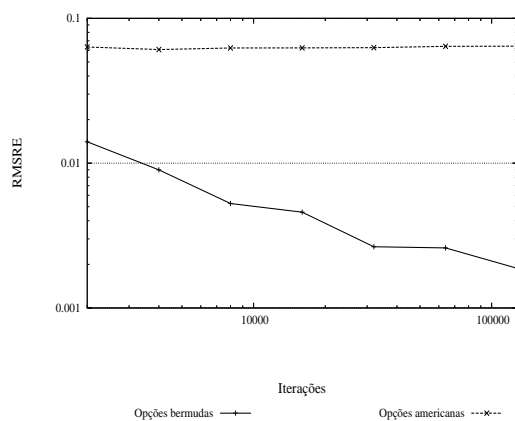
Figura 3.8: Precisão do método LSM na avaliação de opções bermudas e americanas sobre o máximo de dois activos - convergência com o número iterações



(a) Opção de compra e opção de venda



(b) Opção de compra



(c) Opção de venda

O valor de referência da opção bermuda com 10 oportunidades de exercício e da opção americana foi obtido utilizando o método binomial com os parâmetros de Boyle, Evnine e Gibbs (1989) e 1000 passos. A simulação foi realizada com *Brownian bridges* e sequências de baixa discrepância de Sobol com o algoritmo de Bratley e Fox (1988). A regressão foi realizada utilizando a rotina SVDFIT com todos os caminhos e polinômios Laguerre ponderados de grau 3.

- opção de diferimento do investimento até ao momento T_1 : uma vez realizado o investimento, desembolsando K_1 , a empresa passa a deter uma parte, e_1 , do activo e uma opção de expansão, F_2 . O *payoff* desta opção é: $\Pi_1(t, S_t) = \max\{e_1 S_t - K_1 + F_2(t, S_t), 0\}$.
- opção de expansão: pode ser exercida até ao momento T_2 , uma vez exercida a opção anterior, desembolsando um valor de K_2 , ficando a empresa a deter a parte restante do activo ($e_2 = 1 - e_1$). O *payoff* desta opção é: $\Pi_2(t, S_t) = \max\{e_2 S_t - K_2, 0\}$.

O segundo exemplo consiste numa estratégia alternativa com as seguintes opções:

- opção de diferimento do investimento até ao momento T_1 : pelo investimento de $K = K_1 + K_2$, a empresa passa a deter a totalidade do activo e uma opção de redução da escala do projecto (F_2). O *payoff* da opção é: $\Pi_1(t, S_t) = \max\{S_t - K + F_2(t, S_t), 0\}$.
- opção de redução da escala do projecto: pode ser exercida até T_2 , uma vez exercida a opção anterior. Parte do investimento inicial pode ser recuperada ($X = K_2$), reduzindo a escala para k do activo. O *payoff* é portanto: $\Pi_2(t, S_t) = \max\{X - k S_t, 0\}$

Os parâmetros das opções analisadas são apresentados na tabela 3.4.

Tabela 3.4: Parâmetros das opções compostas analisadas

Variável	Valor
$K_1 = K_2 = X$	80
$e_1 = e_2 = k$	0.5
T_1	$T - 2$
T_2	T
S_0	{100, 110}
δ	{0.03, 0.05}
σ	{0.2, 0.3}
T	{4, 5} anos
r	0.05

3.4.2.1 Comparação da precisão dos polinómios

As onze famílias de polinómios são analisadas até ao décimo grau na avaliação das 32 opções (figura 3.9 (página 55)). Como esperado, com a excepção dos polinómios

3.4. Análise empírica do método

Laguerre ponderados, os resultados para as diferentes famílias são idênticos. Os polinómios Laguerre ponderados produzem estimativas mais precisas, particularmente para graus reduzidos dos polinómios. Os resultados sugerem ainda que o método LSM parece convergir aumentando o número de funções-base, a uma taxa decrescente, e que a precisão é similar nas duas estratégias alternativas, que correspondem, respectivamente, a uma opção de compra sobre uma opção de compra e a uma opção de compra sobre uma opção de venda.

3.4.2.2 Comparação da precisão dos métodos de simulação

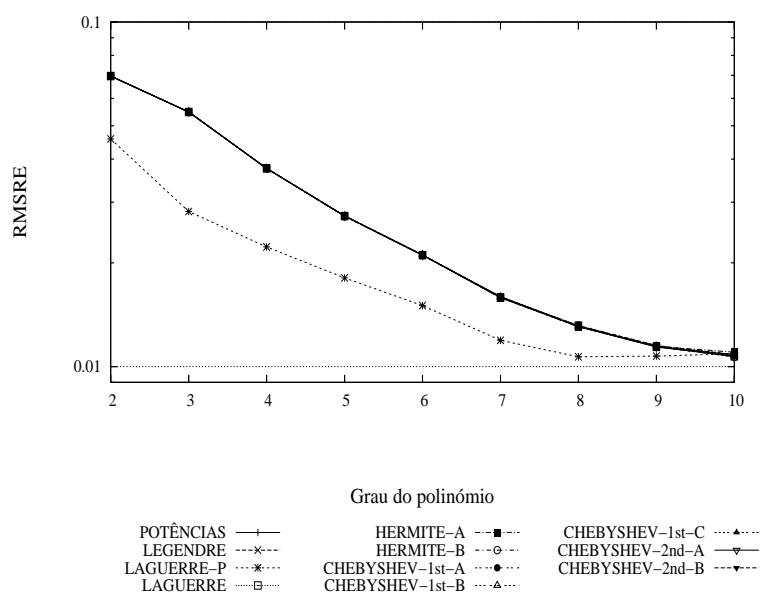
Tal como para a opção sobre o máximo de vários activos, a comparação dos métodos de simulação é realizada para várias iterações, crescendo geometricamente de $2^1 * 1000$ (2000) a $2^7 * 1000$ (128000). São acrescentadas 32 opções, permitindo, em princípio, um teste empírico mais robusto, com um tempo de computação razoável, acrescentando valores alternativos para e_1, e_2 e k . No primeiro exemplo, é considerada a possibilidade de o investimento inicial permitir apenas a aquisição de 25% do activo, sendo os restantes 75% adquiridos na fase de expansão ($e_1 = 0.25; e_2 = 0.75$). No segundo exemplo foi acrescentada a possibilidade de abandono total do projecto ($k = 1$ e $X = K$).

Aumentando o número de iterações, a precisão do método melhora substancialmente (figura 3.10 (página 56)). A comparação dos métodos alternativos de simulação sugere que as sequências de baixa discrepância podem melhorar a precisão da simulação, mas nem sempre tal é conseguido: a utilização das sequências de Faure produz mesmo resultados com menor precisão do que os obtidos com números pseudo-aleatórios. Uma vez mais se verifica que a utilização de variáveis antitéticas ou do método dos momentos não traz vantagens significativas, sendo preferível a utilização dos métodos quasi-Monte Carlo, que permitem a mesma precisão para um número bastante inferior de iterações.

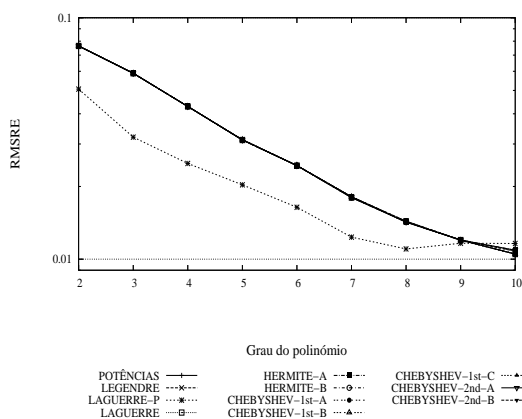
3.4.2.3 Regressão restrita vs regressão não restrita

A eventual utilização apenas dos caminhos *in-the-money*, para determinar os momentos óptimos de paragem para as opções, não permite obter resultados com igual precisão que os obtidos utilizando todos os caminhos, com a excepção das sequências de Faure (tabela 3.5 (página 57)). Recorde-se, tal já referimos anteriormente, que é sempre necessário utilizar todos os caminhos na estimação do valor da opção subsequente.

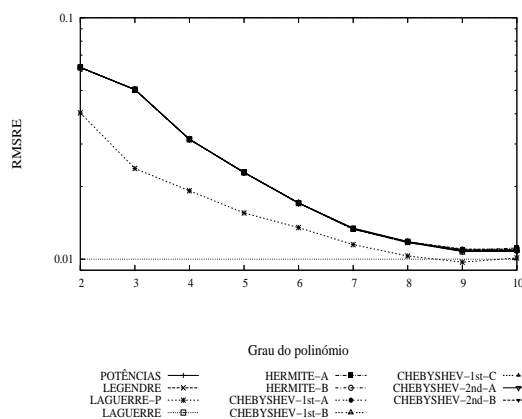
Figura 3.9: Precisão do método LSM na avaliação de opções compostas americanas vs famílias de polinômios



(a) Ambas estratégias



(b) Investimento + Expansão

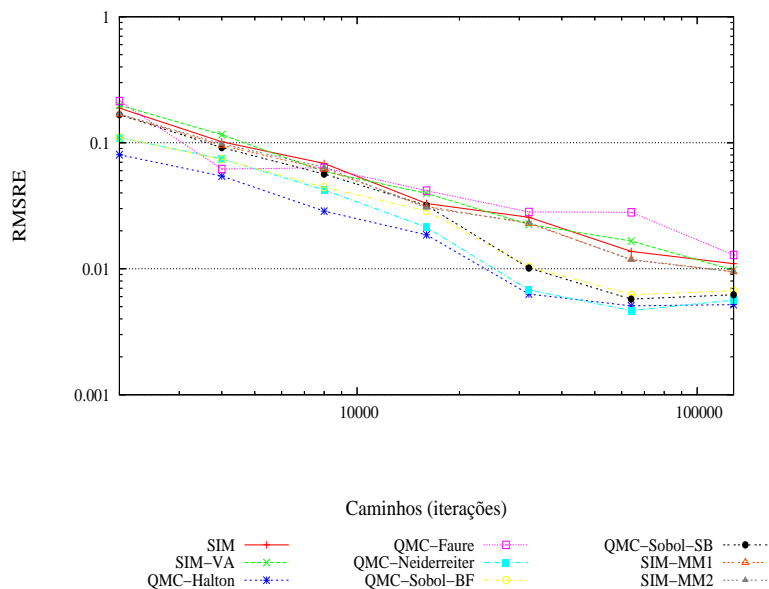


(c) Investimento + Contracção

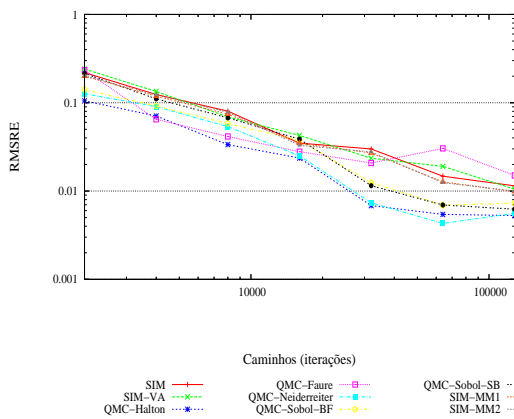
O valor de referência da opção americana foi obtido pelo método binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979) com 10000 passos. A simulação foi realizada com números pseudo-aleatórios, variáveis antitéticas e 100000 caminhos. O gerador de números aleatórios (L'Ecuyer e Touzin, 2000) foi reinicializado em cada conjunto de estratégias alternativas, com a "semente" 12345 e variáveis normais geradas de acordo com Moro (1995). A regressão foi realizada utilizando a rotina SVDFIT com todos os caminhos.

3.4. Análise empírica do método

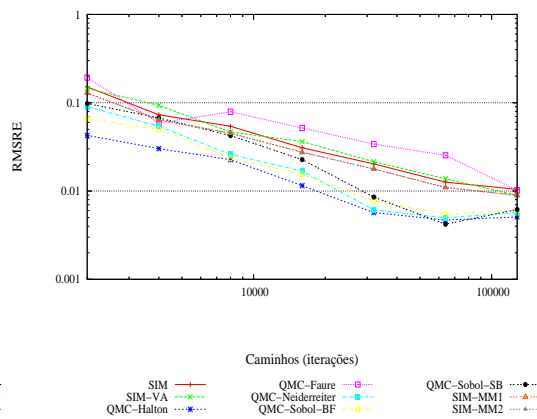
Figura 3.10: Precisão do método LSM na avaliação de opções compostas americanas - convergência dos diferentes métodos com o número de caminhos



(a) Ambas estratégias



(b) Investimento + Expansão



(c) Investimento + Contracção

O valor de referência da opção americana foi obtido pelo método binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979) com 10000 passos. A simulação foi realizada com *Brownian bridges* para os métodos QMC. O gerador de números aleatórios (L'Ecuyer e Touzin, 2000) foi reinicializado em cada conjunto de estratégias alternativas, com a "semente" 12345 e variáveis normais geradas de acordo com Moro (1995). A regressão foi realizada utilizando a rotina SVDFIT com todos os caminhos e polinômios Laguerre ponderados de grau 8. SIM: Simulação com números pseudo-aleatórios; VA - variáveis antitéticas; QMC - Simulação com seqüências de baixa discrepância (quasi-Monte Carlo); BF - Bratley e Fox (1988); SB - Silva e Barbe (2003); MM1 - Método dos momentos (1º momento); MM2 - Método dos momentos (1º e 2º momentos).

Tabela 3.5: Comparação dos métodos de simulação QMC na avaliação de opções compostas americanas: regressão restrita vs regressão não restrita

Método	Erro relativo máximo			RMSRE		
	I+E	I+C	Global	I+E	I+C	Global
Sequências de Halton						
Regressão não restrita	0.017	0.018	0.018	0.007	0.006	0.006
Regressão restrita	0.042	0.025	0.042	0.023	0.011	0.018
Sequências de Faure						
Regressão não restrita	0.059	0.087	0.087	0.021	0.034	0.028
Regressão restrita	0.046	0.071	0.071	0.016	0.024	0.020
Sequências de Niederreiter						
Regressão não restrita	0.016	0.015	0.016	0.007	0.006	0.007
Regressão restrita	0.050	0.039	0.050	0.029	0.015	0.023
Sequências de Sobol - Bratley and Fox (1988)						
Regressão não restrita	0.030	0.018	0.030	0.012	0.008	0.010
Regressão restrita	0.066	0.036	0.066	0.035	0.018	0.028
Sequências de Sobol - Silva and Barbe (2003)						
Regressão não restrita	0.030	0.020	0.030	0.012	0.009	0.010
Regressão restrita	0.061	0.036	0.061	0.031	0.021	0.027

Na comparação foram utilizadas 32 opções de investimento+expansão e 32 opções de investimento+contração. A taxa isenta de risco é de 5%, a taxa de dividendos 3% ou 5%, o tempo para a maturidade 3 ou 5 anos, o preço do activo subjacente 100 ou 110, a volatilidade 30% ou 40%. A primeira opção expira 2 anos antes da segunda. Quando a segunda opção é de expansão, os parâmetros são: $K_1 = 80$, $K_2 = 80$; $e_1 = 0.5$ e $e_2 = 0.5$ ou 0.25. Quando a segunda opção é de contração, os parâmetros são: $K_1 = 160$, $K_2 = 80$; $e_1 = 1$ e $e_2 = 0.5$ ou 1. O valor de referência foi obtido com o método binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979) com 10000 passos. A simulação foi realizada com "Brownian bridges" e 32000 caminhos. Foram utilizadas variáveis normais de Moro (1995). O algoritmo de regressão utilizado foi o SVDFIT com polinómios Laguerre ponderados do grau 8. I+E = Estratégia de investimento + expansão, que corresponde a um opção de compra sobre uma opção de compra. I+C = Estratégia de investimento + contração, que corresponde a um opção de compra sobre uma opção de venda.

3.4.3 Opções mutuamente exclusivas

O primeiro exemplo considerado por Gamba (2003) como sendo de uma opção mutuamente exclusiva, não é uma opção mutuamente exclusiva "pura". Trata-se, antes, de uma opção composta sobre uma opção mutuamente exclusiva. Se se pretende analisar o desempenho do método LSM na avaliação de opções mutuamente exclusivas, então devemos testá-lo numa opção que seja apenas uma opção mutuamente exclusiva. Considerando o mesmo activo dos exemplos apresentados anteriormente para o caso das opções compostas, o exemplo proposto por Gamba tem as seguintes opções:

- opção de diferimento do investimento até ao momento T_1 : desembolsando K_1 , a empresa passa a deter uma parte, e_1 , do activo. O *payoff* desta opção é $\Pi_1(t, S_t) = \max\{e_1 S_t - K_1 + G(t, S_t), 0\}$. Uma vez realizado o investimento inicial (até T_1), poderá escolher a melhor das estratégias seguintes ($G(t, S_t)$):
 - opção de expansão: pode ser exercida até T_2 ($T_2 \geq T_1$), com um investimento adicional de K_2 , a empresa passa a deter a parte restante do activo ($e_2 = 1 - e_1$). O *payoff* desta opção é $\Pi_2(t, S_t) = \max\{e_2 S_t - K_2, 0\}$

ou

3.4. Análise empírica do método

- opção de abandono: alternativamente o activo pode ser abandonado em troca de K_3 , até ao momento T_3 ($T_3 \geq T_1$). O *payoff* é $\Pi_3(t, S_t) = \max \{K_3 - e_1 S_t, 0\}$

Os parâmetros do cenário-base são apresentados na tabela 3.6.

Tabela 3.6: Parâmetros das opções mutuamente exclusivas analisadas

Variável	Valor
$K_1 = K_2$	50
K_3	30
$e_1 = e_2$	0.5
T_1	$T - 2$
T_2	T
T_3	$T - 0.5$
r	0.05

Exemplos alternativos (opção mutuamente exclusiva "pura")

Assume-se que a empresa já detém uma parte, e_1 (50%, por exemplo), do activo e tem as seguintes opções alternativas:

- opção de expansão: pode ser exercida até T_1 , com um investimento de K_1 a empresa passa a deter a totalidade do activo ($e_2 = 1 - e_1$), sendo o *payoff* $\Pi_1(t, S_t) = \max \{e_2 S_t - K_1, 0\}$
ou
- opção de abandono: o activo pode ser abandonado, em troca de um valor de K_2 , até ao momento T_2 . O *payoff* desta opção é: $\Pi_2(t, S_t) = \max \{K_2 - e_1 S_t, 0\}$

Para testar também o caso da melhor de duas opções de compra, é considerada uma estratégia alternativa de expansão, que pode ser exercida até ao momento T_3 , com um investimento de K_3 e uma parte do activo e_3 . O *payoff* é: $\Pi_3(t, S_t) = \max \{e_3 S_t - K_3, 0\}$. Podemos assim analisar quer a melhor de entre uma opção de expansão e uma opção de abandono, quer a melhor de entre duas opções de expansão.

Os parâmetros base para este exemplo são apresentados na tabela 3.7 (página seguinte).

Tabela 3.7: Parâmetros das opções mutuamente exclusivas analisadas nos exemplos alternativos

Variável	Valor
S_0	{90, 100, 110}
δ	{0.05, 0.10}
σ	{0.2, 0.4}
T	{3, 5}
K_1	50
K_2	30
K_3	35
e_1	0.5
e_2	0.5
e_3	0.4
$T_1 = T_2 = T_3$	T
r	0.05

3.4.3.1 Comparação dos algoritmos

O desempenho do algoritmo proposto nesta tese para avaliar opções mutuamente exclusivas, pode ser observado utilizando o exemplo, apresentado por Gamba, de uma opção composta sobre uma opção mutuamente exclusiva (tabela 3.8). Uma simples modificação da maturidade da opção de abandono, igualando-a igual a T , tornaria mais evidente a superioridade do algoritmo proposto. Mas tal é ainda mais evidente para os exemplos alternativos de uma opção mutuamente exclusiva "pura". A figura 3.11 (página 61) apresenta os resultados da comparação entre os dois algoritmos e da sua convergência aumentando o número de funções-base. O algoritmo proposto tem claramente uma maior precisão, particularmente na avaliação da melhor de duas opções de expansão²⁷.

Tabela 3.8: Comparação do algoritmo proposto com o algoritmo de Gamba para avaliar opções americanas mutuamente exclusivas

S	σ	δ	T	Binomial	Algoritmo de Gamba			Algoritmo proposto		
					Valor	s.e.	Erro rel.	Valor	e.p.	Erro rel.
80	0.2	0.05	3	1.694	1.746	0.013	0.031	1.738	0.014	0.026
80	0.2	0.05	5	4.786	4.704	0.027	-0.017	4.712	0.027	-0.015
80	0.2	0.10	3	0.904	0.909	0.009	0.005	0.912	0.009	0.008
80	0.2	0.10	5	2.311	2.305	0.017	-0.003	2.302	0.017	-0.004
80	0.4	0.05	3	8.392	8.491	0.040	0.012	8.427	0.042	0.004
80	0.4	0.05	5	15.295	15.264	0.073	-0.002	15.278	0.072	-0.001
80	0.4	0.10	3	6.573	6.607	0.030	0.005	6.591	0.030	0.003
80	0.4	0.10	5	11.169	11.104	0.049	-0.006	11.165	0.048	-0.000
100	0.2	0.05	3	9.131	9.173	0.019	0.005	9.151	0.019	0.002

continua na página seguinte

²⁷Este resultado é independente do método de simulação utilizado.

3.4. Análise empírica do método

continuação da página anterior

S	σ	δ	T	Binomial	Algoritmo de Gamba			Algoritmo proposto		
					Valor	s.e.	Erro rel.	Valor	e.p.	Erro rel.
100	0.2	0.05	5	13.120	13.149	0.032	0.002	13.134	0.033	0.001
100	0.2	0.10	3	6.533	6.529	0.014	-0.001	6.548	0.014	0.002
100	0.2	0.10	5	8.447	8.428	0.020	-0.002	8.429	0.021	-0.002
100	0.4	0.05	3	18.568	18.779	0.046	0.011	18.722	0.044	0.008
100	0.4	0.05	5	26.080	26.249	0.090	0.007	26.112	0.087	0.001
100	0.4	0.10	3	15.566	15.668	0.032	0.007	15.645	0.032	0.005
100	0.4	0.10	5	20.459	20.349	0.052	-0.005	20.318	0.051	-0.007
RMSRE					0.010			0.009		

A taxa isenta de risco é de 5%, o preço do activo subjacente s , a volatilidade σ , a taxa de dividendos δ e o tempo para a maturidade T são os indicados na tabela. O valor de referência foi obtido com o método binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979) com 10000 passos. A simulação foi realizada com 100000 caminhos com variáveis antitéticas e sem "Brownian bridges". A rotina de geração de números aleatórios utilizada foi a de L'Ecuyer e Touzin (2000) e foi reinicializada para cada conjunto de estratégias com a semente 12345. Foram utilizadas variáveis normais de Moro (1995). O algoritmo de regressão utilizado foi o SVDFIT com potências até ao 9º grau como funções-base.

3.4.3.2 Comparação da precisão dos polinómios

A figura 3.12 (página 62)²⁸ sugere que os polinómios Laguerre ponderados proporcionam resultados com menores RMSRE, tal como no caso das opções compostas. O método parece convergir aumentando o número de funções-base. As incorrecções numéricas do algoritmo de regressão estarão na origem dos resultados divergentes para o décimo grau de algumas família de polinómios. Com os parâmetros escolhidos, um polinómio de grau superior a 3 para a melhor das duas opções de expansão, e de grau superior 8, para a melhor entre a opção de expansão e a opção de abandono, não parece melhorar significativamente a precisão da avaliação. Nas análises seguintes serão, portanto, utilizados apenas polinómios Laguerre ponderados de grau 8.

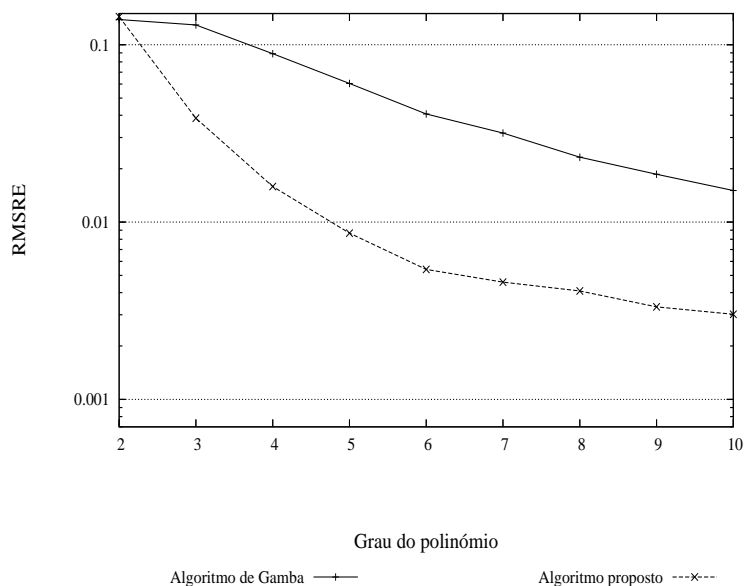
3.4.3.3 Comparação da precisão dos métodos de simulação

A comparação dos métodos de simulação (figura 3.13 (página 63)) sugere que a superioridade do desempenho das sequências de baixa discrepância não é tão significativa como nos casos anteriores. As sequências de Faure têm, uma vez mais, um desempenho inferior para um baixo grau dos polinómios. No entanto, produzem resultados mais precisos para um número maior de iterações.

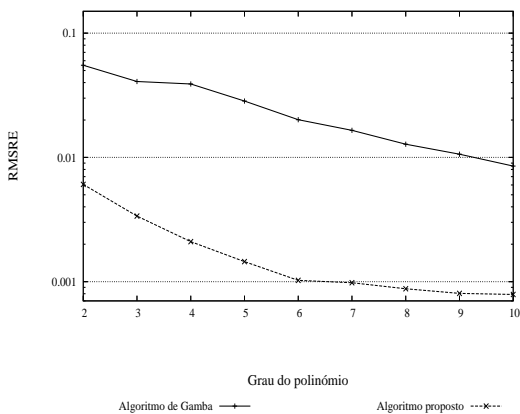
Os resultados das estimativas da simulação, sugerem que o método converge para o valor correcto de uma opção americana com o aumento do número de iterações, mas a uma taxa decrescente. De facto, não existe evidência de que a utilização de mais do que 16000 iterações aumente significativamente a precisão das estimativas.

²⁸No apêndice 3.E (página 83) são apresentadas algumas das tabelas com os resultados dos testes numéricos.

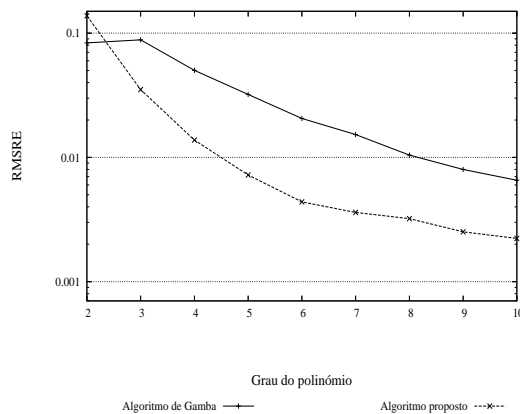
Figura 3.11: Comparação da convergência dos algoritmos alternativos para avaliar opções americanas mutuamente exclusivas, aumentando o número de funções-base



(a) Ambas estratégias



(b) Melhor de duas opções de expansão

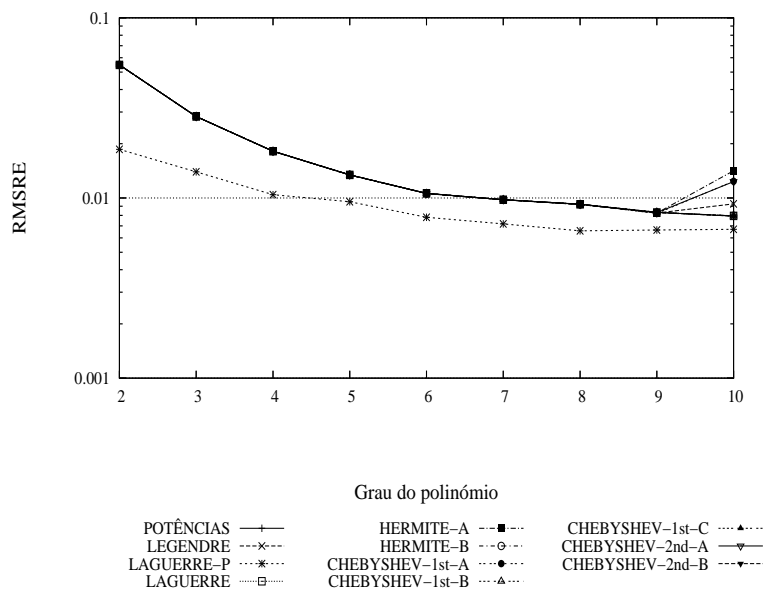


(c) Melhor de uma opção de expansão e uma opção de abandono

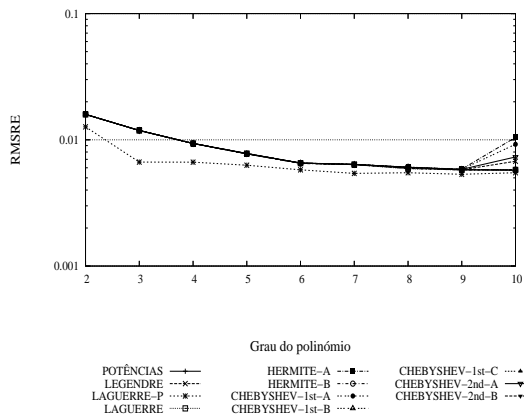
O valor de referência da opção americana foi obtido com o método binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979) com 10000 passos. A simulação foi realizada com 100000 caminhos com variáveis antitéticas e sem *Brownian bridges*. A rotina de geração de números aleatórios utilizada foi a de L'Ecuyer e Touzin (2000) e foi reinicializada para cada conjunto de estratégias com a semente 12345. Foram utilizadas variáveis normais de Moro (1995). O algoritmo de regressão utilizado foi o SVDFIT com potências até ao 9º grau como funções-base.

3.4. Análise empírica do método

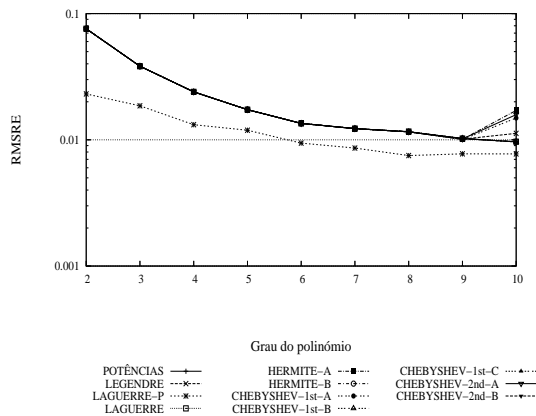
Figura 3.12: Precisão do algoritmo proposto para avaliar opções americanas mutuamente exclusivas com diferentes famílias de polinômios



(a) Ambas estratégias



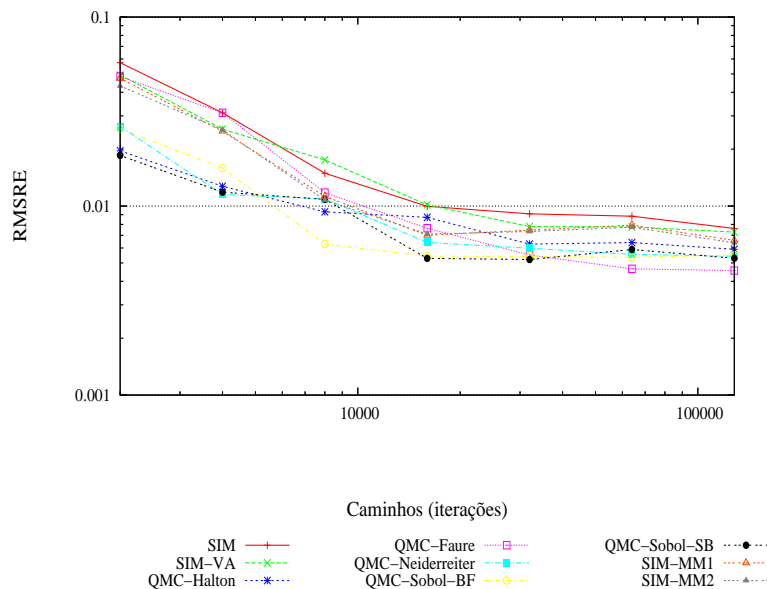
(b) Melhor de duas opções de expansão



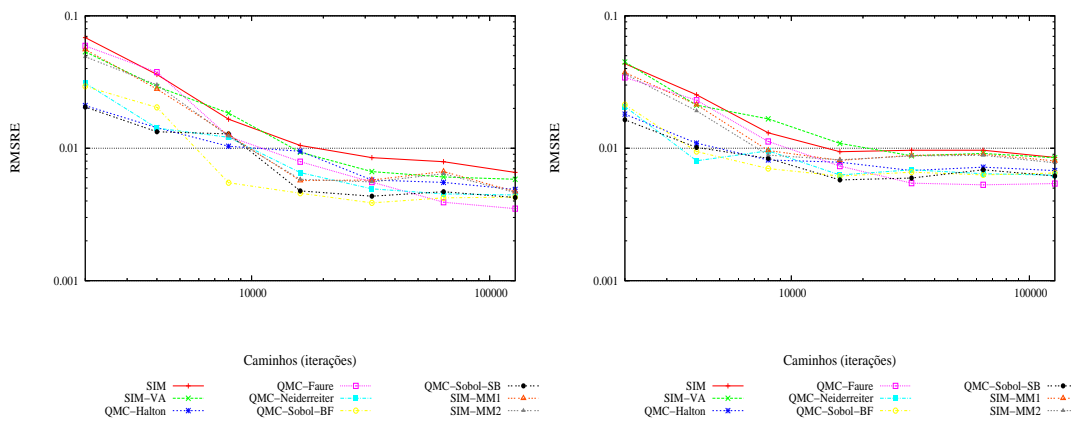
(c) Melhor de uma opção de expansão e uma opção de abandono

O valor de referência da opção americana foi obtido com o método binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979) com 10000 passos. A simulação foi realizada com 100000 caminhos com variáveis antitéticas e sem *Brownian bridges*. A rotina de geração de números aleatórios utilizada foi a de L'Ecuyer e Touzin (2000) e foi reinicializada para cada conjunto de estratégias com a semente 12345. Foram utilizadas variáveis normais de Moro (1995). O algoritmo de regressão utilizado foi o SVDFIT.

Figura 3.13: Precisão do algoritmo proposto para avaliar opções americanas mutuamente exclusivas - convergência dos métodos de simulação com o número de iterações



(a) Ambas estratégias



(b) Melhor de duas opções de expansão

(c) Melhor de uma opção de expansão e uma opção de abandono

O valor de referência da opção americana foi obtido com o método binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979) com 10000 passos. A simulação foi realizada com *Brownian bridges* para os métodos QMC. O gerador de números aleatórios (L'Ecuyer e Touzin, 2000) foi reinicializado em cada conjunto de opções de compra e venda, com a "semente" 12345 e variáveis normais geradas de acordo com Moro (1995). A regressão foi realizada utilizando a rotina SVDFIT com apenas os caminhos *in-the-money* e polinômios Laguerre ponderados de grau 8. SIM: Simulação com números pseudo-aleatórios; VA - variáveis antitéticas; QMC - Simulação com sequências de baixa discrepância (quasi-Monte Carlo); BF - Bratley e Fox (1988); SB - Silva e Barbe (2003); MM1 - Método dos momentos (1º momento); MM2 - Método dos momentos (1º e 2º momentos).

3.4.3.4 Regressão restrita vs regressão não restrita

A comparação dos RMSRE, quando se utilizam todos os caminhos (regressão não restrita) ou apenas os caminhos *in-the-money* (regressão restrita), na estimação do valor de continuação, permite concluir que as duas alternativas produzem resultados com uma precisão semelhante (Table 3.9).

Tabela 3.9: Comparação dos métodos de simulação QMC na avaliação de opções mutuamente exclusivas americanas: regressão restrita vs regressão não restrita

Método	Erro relativo máximo			RMSRE		
	E/E	E/A	Global	E/E	E/A	Global
Sequências de Halton						
Regressão não restrita	0.015	0.017	0.017	0.009	0.008	0.009
Regressão restrita	0.014	0.010	0.014	0.009	0.005	0.007
Sequências de Faure						
Regressão não restrita	0.016	0.023	0.023	0.008	0.007	0.008
Regressão restrita	0.023	0.009	0.023	0.011	0.005	0.008
Sequências de Niederreiter						
Regressão não restrita	0.013	0.014	0.014	0.007	0.006	0.006
Regressão restrita	0.019	0.009	0.019	0.008	0.005	0.007
Sequências de Sobol - Bratley e Fox						
Regressão não restrita	0.009	0.014	0.014	0.005	0.006	0.005
Regressão restrita	0.012	0.009	0.012	0.006	0.004	0.005
Sequências de Sobol - Silva e Barbe						
Regressão não restrita	0.011	0.015	0.015	0.005	0.006	0.005
Regressão restrita	0.016	0.009	0.016	0.008	0.004	0.006

Na comparação foram utilizadas 24 opções de cada tipo (melhor de duas opções e expansão - E/E, e melhor de uma opção de expansão e de uma opção de abandono - E/A). A taxa isenta de risco é de 5%, o preço do activo subjacente 90, 100 ou 110, a volatilidade 20% ou 40%, a taxa de dividendos 5% ou 10% e o tempo para a maturidade de 3 ou 5 anos. O valor de referências foi obtido com o método binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979) com 10000 passos. A simulação foi realizada com "Brownian bridges" e 16000 passos. Foram utilizadas variáveis normais de Moro (1995). O algoritmo de regressão utilizado foi o SVDFIT com polinómios Laguerre ponderados do grau 8 tendo sido utilizados apenas os caminhos "in-the-money" na estimação do valor de continuação.

3.5 Considerações finais

Neste capítulo, foi feita uma análise detalhada do método LSM e da sua extensão por Gamba (2003), na avaliação de opções sobre o máximo de vários activos, opções compostas e opções mutuamente exclusivas. As análises anteriores a esta tese, quanto à opção sobre o máximo, apresentaram resultados contraditórios. Por outro lado, não foi realizada até ao momento presente uma análise da extensão referida. Em qualquer dos casos, a análise aqui realizada tem uma profundidade, quer quanto ao número de opções, quer quanto aos métodos de simulação utilizados, significativamente superior à efectuada em estudos anteriores²⁹.

Assim, na análise que aqui foi realizada, foram comparadas onze famílias de polinómios, utilizadas como funções-base na estimação do valor de continuação, e analisada a convergência do método aumentando o número de funções-base. Os resultados numéricos sugerem que os polinómios Laguerre ponderados produzem

²⁹Se excluirmos a análise do método LSM na avaliação de opções únicas unidimensionais de Areal e Taylor (2005), semelhante à nossa e que decorreu em simultâneo.

resultados mais precisos, que convergem mais rapidamente com o número de termos, em particular no caso das opções compostas e mutuamente exclusivas. Tal como já haviam sugerido Moreno e Navas (2003), as outras famílias produzem resultados idênticos pelo facto de serem combinações lineares de potências. Quaisquer resultados divergentes dever-se-ão a imprecisões numéricas do algoritmo de regressão. O problema coloca-se quando é necessário utilizar um maior número de funções-base e só poderá ser ultrapassado manipulando o nível de tolerância, o que implica uma maior necessidade de tempo de computação.

Foram, também, comparados diferentes métodos de simulação, pseudo-aleatórios e quasi-aleatórios: a utilização de variáveis antitéticas, o método dos momentos e cinco sequências de baixa discrepância. Os resultados da análise sugerem que as sequências de baixa discrepância tendem a produzir resultados mais precisos, utilizando um menor número de iterações. No entanto, tal não deve ser dado como garantido. As sequências de Faure, por exemplo, produzem, nalguns casos, resultados menos precisos do que os números pseudo-aleatórios.

A sugestão de Longstaff e Schwartz (2001), de utilização apenas dos caminhos *in-the-money* na estimação do valor de continuação, melhora substancialmente a precisão do método na avaliação de opções sobre o máximo de vários activos, não tendo, contudo, um efeito significativo na avaliação das restantes opções. Note-se que, no caso da opções compostas, tal deverá resultar do facto de ser necessário obter o valor da opção subsequente para todos os valores do activo subjacente.

A análise efectuada nesta tese, sugere ainda que o método converge, quer com o número de funções-base quer com o número de iterações, em qualquer dos casos a um ritmo decrescente. A escolha dos dois parâmetros (número de funções-base e número de iterações) far-se-á ponderando a precisão desejada e o tempo de computação necessário para a obter.

Foi ainda proposto um algoritmo alternativo de avaliação das opções mutuamente exclusivas. Em comparação com o algoritmo de Gamba (2003), aquele converge mais rapidamente com o número de funções-base e permite identificar, mais correctamente, a estratégia adequada ao sugerir, com maior precisão, a opção mutuamente exclusiva com maior valor na região *out-the-money*.

Com a análise realizada neste capítulo, obteve-se uma maior evidência da precisão do método LSM na avaliação de opções frequentes em problemas de opções reais. No entanto, como veremos no próximo capítulo, as opções criadas pela modularidade são de uma complexidade superior às até aqui analisadas, nomeadamente porque a carteira de opções criada tem um maior número de opções e, sobretudo, porque dependem de um maior número de variáveis ou activos. Ora, neste tipo de problemas, não é possível obter um valor de referência ("benchmark") preciso para

3.5. Considerações finais

o valor da carteira de opções devido à conhecida "maldição da dimensionalidade", não sendo possível, portanto, replicar a análise realizada no presente capítulo. A simulação tem, assim, um desempenho superior nestes casos, para os quais é, muitas vezes, o único método viável de avaliação das opções.

Em síntese, e tendo em consideração o que se disse anteriormente, sugere-se que a avaliação das opções reais criadas pela modularidade, que será objecto do capítulo seguinte, seja feita recorrendo aos polinómios Laguerre ponderados e utilizando sequências de Sobol com a inicialização de Silva e Barbe (2003). Em qualquer caso, e dada a dependência da precisão das sequências de baixa discrepância dos parâmetros e do tipo de opções sob avaliação, deve ser feita sempre uma comparação para avaliar o seu desempenho.

Apêndices do capítulo 3

3.A Simulação de processos geométricos Brownianos

A equação estocástica diferencial para um processo geométrico Browniano é:

$$dX_t = (r - \delta) X_t dt + \sigma X_t dW(t) \quad (3.35)$$

onde dW é um incremento de um processo de Wiener e r e σ são constantes³⁰. A solução para esta equação para um valor inicial da variável-estado, X_0 , é:

$$X_t = X_0 e^{\left\{ \left(r - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right\}}. \quad (3.36)$$

Para um dado momento no tempo, t , o valor da variável-estado, X_t é:

$$X_t = X_0 e^{\left\{ \left(r - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \sqrt{t} Z_t \right\}}. \quad (3.37)$$

onde Z_t é um valor de uma distribuição normal padronizada ($Z_t \sim N(0, 1)$). Se o processo for discretizado, a sequência de valores é dada por:

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} e^{\left\{ \left(r - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{t_{i+1}} \right\}}. \quad (3.38)$$

Simulação de processos geométricos Brownianos correlacionados

A simulação de processos geométricos Brownianos correlacionados pode ser facilmente obtida a partir da extensão da equação 3.38. Em vez de uma única variável aleatória com distribuição normal, utiliza-se um vector, $\tilde{Z}_t = \left(\tilde{Z}_t^1, \tilde{Z}_t^2, \dots, \tilde{Z}_t^L \right)$, de uma distribuição normal multivariada, $N(0, \Sigma)$. Σ é a matriz de co-variâncias, com $\Sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$.

O primeiro passo da simulação é a geração de um vector de variáveis aleatórias independentes com distribuição normal, $Z_t = \left(Z_t^1, Z_t^2, \dots, Z_t^L \right)$. A decomposição da matriz Σ , C , tal que $\Sigma = CC'$, permite obter $CX \sim N(0, \Sigma)$. Pode ser utilizada a decomposição de Cholesky, dado C ser uma matriz triangular inferior. O vector \tilde{Z}_t por ser calculado da seguinte forma:

³⁰Estes parâmetros podem ser, em alternativa, estocásticos.

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_t^1 &= C_{11}Z_t^1 \\ \tilde{Z}_t^2 &= C_{21}Z_t^1 + C_{22}Z_t^2 \\ &\dots \\ \tilde{Z}_t^L &= C_{L1}Z_t^1 + \dots + C_{LL}Z_t^L\end{aligned}\tag{3.39}$$

Realizações individuais de cada variável-estado podem ser obtidas utilizando a equação 3.38 com os valores obtidos através da equação 3.39.

3.B A avaliação de opções multivariadas com o método binomial de Boyle, Evnine e Gibbs (1989)

Boyle, Evnine e Gibbs (1989) estenderam o método binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979) para avaliar opções multivariadas. Os parâmetros do método, i.e. os valores de u e d e as probabilidades p_j , são escolhidos de forma a assegurar que as funções características das distribuições discretas convergem para as funções contínuas. Os valores de u e d são calculados da mesma forma que no método de Cox, Ross e Rubinstein (1979) e as probabilidades são calculadas de forma a garantir a convergência³¹.

O método assume que os valores das variáveis-estado seguem processos estocásticos geométricos Browniano correlacionados.

Simbologia:

S_i = valor actual do activo i ($i = 1, \dots, m$)

T = tempo para a maturidade

X = preço de exercício

r = taxa isenta de risco anual contínua

σ_i = volatilidade do activo i

N = número de passos no tempo

$\Delta t = \frac{T}{N}$ = duração de um passo

u_i = factor de aumento do valor do activo i

d_i = factor de diminuição do activo i

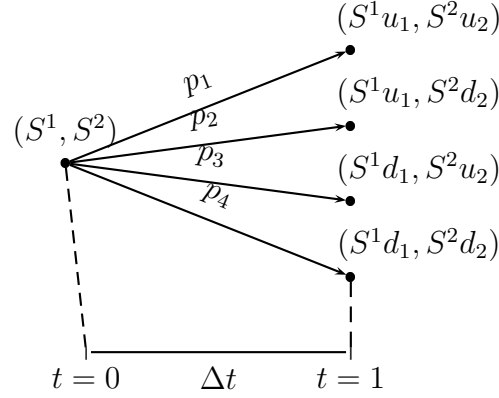
ρ_{ij} = correlação entre o activo i e o activo j

Opção com dois activos subjacentes

Pressupondo que os preços dos dois activos (S^1, S^2) têm uma distribuição log-normal bivariada, os autores sugerem que eles podem ser aproximados por um processo discreto com quatro ramificações (figura 3.14 (página seguinte)).

³¹Em alternativa, as probabilidades poderiam ser fixas e os valores de u e d calculados para assegurar a convergência. Os autores sugerem que as diferenças entre as duas alternativas são pequenas.

Figura 3.14: Movimentos dos preços dos activos subjacentes num modelo binomial multiplicativo



Tal como em Cox, Ross e Rubinstein (1979) as variações são:

$$u_i = e^{\sigma_i \sqrt{\Delta t}} \quad i=1, 2 \quad (3.40)$$

$$u_i d_i = 1 \quad (3.41)$$

A convergência entre a distribuição discreta e a distribuição bivariada é obtida com os seguintes valores para as probabilidades:

$$p_1 = \frac{1}{4} \left(1 + \rho + \sqrt{\Delta t} \left(\frac{u_1}{\sigma_1} + \frac{u_2}{\sigma_2} \right) \right) \quad (3.42)$$

$$p_2 = \frac{1}{4} \left(1 - \rho + \sqrt{\Delta t} \left(\frac{u_1}{\sigma_1} - \frac{u_2}{\sigma_2} \right) \right) \quad (3.43)$$

$$p_3 = \frac{1}{4} \left(1 - \rho + \sqrt{\Delta t} \left(-\frac{u_1}{\sigma_1} + \frac{u_2}{\sigma_2} \right) \right) \quad (3.44)$$

$$p_4 = \frac{1}{4} \left(1 + \rho + \sqrt{\Delta t} \left(-\frac{u_1}{\sigma_1} - \frac{u_2}{\sigma_2} \right) \right) \quad (3.45)$$

À medida que o número de passos (N) aumenta, as probabilidades obtidas com as equações anteriores serão todas não-negativas.

O caso n-dimensional

Para o caso n-dimensional, em cada passo, Δt , cada activo pode variar positivamente ou negativamente, o que significa que após h passos temos $M = 2^n$ valores possíveis para os n activos. As probabilidades associadas a cada estado são:

3.B. A avaliação de opções multivariadas com o método binomial de Boyle, Evnine e Gibbs (1989)

$$p_j = \frac{1}{M} \left(1 + \sum_{k,m=1}^n \delta_{km}(j) \rho_{km} + \sqrt{\Delta t} \sum_{k=1}^n \delta_k(j) \frac{\mu_k}{\sigma_k} \right) \quad j = 1, \dots, M \quad (3.46)$$

onde $\delta_{km}(j) = 1$, se os dois activos k e m variam na mesma direcção no estado j , ou $\delta_{km}(j) = -1$, caso contrário, $\delta_k(j) = 1$ (-1) se o activo k varia positivamente (negativamente) no estado j .

Esta solução não garante que as probabilidades sejam positivas e, portanto, tal deve ser verificado em cada aplicação.

3.C A avaliação de opções sobre o máximo de vários activos com o método LSM

Neste apêndice são apresentadas apenas algumas das tabelas que foram utilizadas para obter os resultados apresentadas na secção 3.4.1 (página 42). A tabela 3.10 apresenta o resumo dos resultados para cada uma das 11 famílias de polinómios, do 2º ao 10º grau. Sumaria os resultados de 99 tabelas com 24 opções de compra e 24 opções de venda sobre o máximo de 2 activos. A tabela 3.11 (página 75) é também um resumo dos resultados dos métodos de simulação. A tabela 3.12 (página 77) é um exemplar das 63 tabelas necessárias para obter a tabela anterior.

Tabela 3.10: Comparação dos métodos binomial e de simulação na avaliação de opções bermudas sobre o máximo de 2 activos com 10 oportunidades de exercício vs famílias de polinómios

Polinómio	Erro relativo máximo			RMSRE		
	Compra	Venda	Global	Compra	Venda	Global
Potências						
2º grau	0.015	0.008	0.015	0.005	0.004	0.004
3º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
4º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
5º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.003
6º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.004
7º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.003
8º grau	0.012	0.007	0.012	0.004	0.003	0.003
9º grau	0.010	0.007	0.010	0.004	0.003	0.003
10º grau	0.011	0.006	0.011	0.004	0.003	0.003
Legendre						
2º grau	0.015	0.008	0.015	0.005	0.004	0.004
3º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
4º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
5º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.003
6º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.004
7º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.003
8º grau	0.012	0.007	0.012	0.004	0.003	0.003
9º grau	0.010	0.007	0.010	0.004	0.003	0.003
10º grau	0.011	0.006	0.011	0.004	0.003	0.003
Laguerre ponderados						
2º grau	0.011	0.006	0.011	0.004	0.003	0.003
3º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.003
4º grau	0.011	0.006	0.011	0.004	0.003	0.003
5º grau	0.012	0.007	0.012	0.004	0.003	0.004
6º grau	0.012	0.007	0.012	0.004	0.003	0.003
7º grau	0.010	0.006	0.010	0.004	0.003	0.003
8º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.003
9º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.003
10º grau	0.010	0.007	0.010	0.004	0.003	0.003
Laguerre						
2º grau	0.015	0.008	0.015	0.005	0.004	0.004
3º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
4º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
5º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.003
6º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.004
7º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.003
8º grau	0.012	0.007	0.012	0.004	0.003	0.003
9º grau	0.010	0.007	0.010	0.004	0.003	0.003
10º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.003
Hermite-A						
2º grau	0.015	0.008	0.015	0.005	0.004	0.004
3º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
4º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
5º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.003
6º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.004
7º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.003
8º grau	0.012	0.007	0.012	0.004	0.003	0.003
9º grau	0.010	0.007	0.010	0.004	0.003	0.003
10º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.003

continua na página seguinte

3.C. A avaliação de opções sobre o máximo de vários activos com o método LSM

continuação da página anterior

Polinómio	Erro relativo máximo			RMSRE		
	Compra	Venda	Global	Compra	Venda	Global
Hermite-B						
2º grau	0.015	0.008	0.015	0.005	0.004	0.004
3º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
4º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
5º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.003
6º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.004
7º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.003
8º grau	0.012	0.007	0.012	0.004	0.003	0.003
9º grau	0.010	0.007	0.010	0.004	0.003	0.003
10º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.003
Chebyshev-1st-A						
2º grau	0.015	0.008	0.015	0.005	0.004	0.004
3º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
4º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
5º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.003
6º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.004
7º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.003
8º grau	0.012	0.007	0.012	0.004	0.003	0.003
9º grau	0.010	0.007	0.010	0.004	0.003	0.003
10º grau	0.011	0.006	0.011	0.004	0.003	0.003
Chebyshev-1st-B						
2º grau	0.015	0.008	0.015	0.005	0.004	0.004
3º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
4º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
5º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.003
6º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.004
7º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.003
8º grau	0.012	0.007	0.012	0.004	0.003	0.003
9º grau	0.010	0.006	0.010	0.004	0.003	0.003
10º grau	0.011	0.006	0.011	0.004	0.003	0.003
Chebyshev-1st-C						
2º grau	0.015	0.008	0.015	0.005	0.004	0.004
3º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
4º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
5º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.003
6º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.004
7º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.003
8º grau	0.012	0.007	0.012	0.004	0.003	0.003
9º grau	0.010	0.007	0.010	0.004	0.003	0.003
10º grau	0.011	0.006	0.011	0.004	0.003	0.003
Chebyshev-2nd-A						
2º grau	0.015	0.008	0.015	0.005	0.004	0.004
3º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
4º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
5º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.003
6º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.004
7º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.003
8º grau	0.012	0.007	0.012	0.004	0.003	0.003
9º grau	0.010	0.007	0.010	0.004	0.003	0.003
10º grau	0.011	0.006	0.011	0.004	0.003	0.003
Chebyshev-2nd-B						
2º grau	0.015	0.008	0.015	0.005	0.004	0.004
3º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
4º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.004
5º grau	0.012	0.006	0.012	0.004	0.003	0.003
6º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.004
7º grau	0.011	0.007	0.011	0.004	0.003	0.003
8º grau	0.012	0.007	0.012	0.004	0.003	0.003
9º grau	0.010	0.007	0.010	0.004	0.003	0.003
10º grau	0.011	0.006	0.011	0.004	0.003	0.003

Na comparação foram utilizadas 24 opções de compra e 24 opções de venda. A taxa isenta de risco é de 6%, a taxa de dividendos 0%, o tempo para a maturidade da opção de 1 ano, o preço de exercício 40, o preço da activo subjacente 36, 40 ou 44, a volatilidade 30% ou 40%, a correlação 0.0, 0.25, 0.5 ou 0.75. O valor do método binomial foi obtido com 1000 passos e os parâmetros do método de Boyle, Evnine e Gibbs (1989). A simulação foi realizada com 100000 iterações com variáveis antitéticas e sem "Brownian bridges". O gerador de números aleatórios (L'Ecuyer e Touzin, 2000) foi reinicializado em cada conjunto de opções de compra e venda, com a "semente" 12345 e variáveis normais geradas de acordo com Moro (1995). A regressão foi realizada utilizando a rotina SVDFIT com todos os caminhos.

3.C. A avaliação de opções sobre o máximo de vários activos com o método LSM

Tabela 3.11: Comparação de diferentes métodos de simulação para avaliar opções bermudas sobre o máximo de 2 activos

Método	Erro relativo máximo			RMSRE		
	Compra	Venda	Global	Compra	Venda	Global
LSM						
2000 caminhos	0.063	0.061	0.063	0.026	0.026	0.026
4000 caminhos	0.046	0.067	0.067	0.020	0.023	0.022
8000 caminhos	0.034	0.059	0.059	0.015	0.019	0.017
16000 caminhos	0.024	0.028	0.028	0.010	0.013	0.012
32000 caminhos	0.015	0.023	0.023	0.007	0.009	0.008
64000 caminhos	0.011	0.013	0.013	0.004	0.006	0.005
128000 caminhos	0.007	0.009	0.009	0.003	0.004	0.004
LSM com variáveis antitéticas						
2000 caminhos	0.070	0.091	0.091	0.025	0.032	0.029
4000 caminhos	0.029	0.068	0.068	0.016	0.021	0.019
8000 caminhos	0.024	0.033	0.033	0.010	0.014	0.012
16000 caminhos	0.023	0.037	0.037	0.009	0.011	0.010
32000 caminhos	0.016	0.017	0.017	0.006	0.007	0.007
64000 caminhos	0.011	0.020	0.020	0.004	0.006	0.005
128000 caminhos	0.009	0.012	0.012	0.003	0.004	0.004
LSM com sequências de Halton						
2000 caminhos	0.015	0.045	0.045	0.009	0.022	0.017
4000 caminhos	0.008	0.020	0.020	0.006	0.009	0.008
8000 caminhos	0.008	0.018	0.018	0.004	0.008	0.006
16000 caminhos	0.005	0.011	0.011	0.003	0.004	0.004
32000 caminhos	0.005	0.012	0.012	0.002	0.004	0.003
64000 caminhos	0.004	0.004	0.004	0.002	0.002	0.002
128000 caminhos	0.003	0.003	0.003	0.001	0.002	0.002
LSM com sequências de Faure						
2000 caminhos	0.012	0.037	0.037	0.007	0.016	0.012
4000 caminhos	0.010	0.020	0.020	0.005	0.009	0.007
8000 caminhos	0.010	0.022	0.022	0.006	0.009	0.008
16000 caminhos	0.005	0.025	0.025	0.003	0.009	0.006
32000 caminhos	0.004	0.021	0.021	0.002	0.006	0.004
64000 caminhos	0.002	0.008	0.008	0.001	0.004	0.003
128000 caminhos	0.003	0.008	0.008	0.001	0.003	0.002
LSM com sequências de Niederreiter						
2000 caminhos	0.010	0.032	0.032	0.004	0.021	0.015
4000 caminhos	0.008	0.021	0.021	0.003	0.011	0.008
8000 caminhos	0.003	0.017	0.017	0.002	0.008	0.006
16000 caminhos	0.003	0.007	0.007	0.002	0.003	0.002
32000 caminhos	0.004	0.007	0.007	0.002	0.003	0.002
64000 caminhos	0.003	0.005	0.005	0.001	0.002	0.002
128000 caminhos	0.002	0.004	0.004	0.001	0.002	0.002
LSM com sequências de Sobol - Bratley e Fox						
2000 caminhos	0.013	0.056	0.056	0.005	0.015	0.011
4000 caminhos	0.007	0.030	0.030	0.002	0.010	0.007
8000 caminhos	0.004	0.013	0.013	0.002	0.006	0.004
16000 caminhos	0.005	0.013	0.013	0.002	0.004	0.003
32000 caminhos	0.002	0.008	0.008	0.001	0.003	0.002
64000 caminhos	0.003	0.007	0.007	0.001	0.003	0.002
128000 caminhos	0.003	0.005	0.005	0.001	0.002	0.002
LSM com sequências de Sobol - Silva e Barbe						
2000 caminhos	0.010	0.021	0.021	0.006	0.010	0.008
4000 caminhos	0.009	0.011	0.011	0.004	0.006	0.005
8000 caminhos	0.005	0.021	0.021	0.002	0.008	0.006
16000 caminhos	0.004	0.013	0.013	0.001	0.005	0.003
32000 caminhos	0.003	0.010	0.010	0.001	0.003	0.003
64000 caminhos	0.002	0.004	0.004	0.001	0.002	0.001
128000 caminhos	0.002	0.006	0.006	0.001	0.002	0.002
LSM com método dos momentos - 1º momento						
2000 caminhos	0.041	0.074	0.074	0.018	0.023	0.020
4000 caminhos	0.030	0.045	0.045	0.011	0.016	0.014
8000 caminhos	0.024	0.045	0.045	0.009	0.012	0.010
16000 caminhos	0.018	0.015	0.018	0.006	0.008	0.007
32000 caminhos	0.010	0.019	0.019	0.004	0.007	0.006
64000 caminhos	0.010	0.010	0.010	0.003	0.005	0.004
128000 caminhos	0.008	0.009	0.009	0.003	0.003	0.003
LSM com método dos momentos - 1º e 2º momentos						
2000 caminhos	0.046	0.069	0.069	0.019	0.025	0.022
4000 caminhos	0.023	0.036	0.036	0.010	0.014	0.012
8000 caminhos	0.020	0.040	0.040	0.008	0.011	0.009
16000 caminhos	0.017	0.015	0.017	0.006	0.008	0.007
32000 caminhos	0.010	0.017	0.017	0.004	0.007	0.005

continua na página seguinte

3.C. A avaliação de opções sobre o máximo de vários activos com o método LSM

continuação da página anterior

Método	Erro relativo máximo			RMSRE		
	Compra	Venda	Global	Compra	Venda	Global
64000 caminhos	0.010	0.012	0.012	0.003	0.005	0.004
128000 caminhos	0.008	0.009	0.009	0.003	0.003	0.003

Na comparação foram utilizadas 24 opções de compra e 24 opções de venda. A taxa isenta de risco é de 6%, a taxa de dividendos 0%, o tempo para a maturidade da opção de 1 ano, o preço de exercício 40, o preço do activo subjacente 36, 40 ou 44, a volatilidade 30% ou 40%, a correlação 0.0, 0.25, 0.5 ou 0.75. O valor do método binomial foi obtido com 1000 passos e os parâmetros do método de Boyle, Evnine e Gibbs (1989). A simulação foi realizada com "Brownian bridges" para os métodos QMC. O gerador de números aleatórios (L'Ecuyer e Touzin, 2000) foi reinicializado em cada conjunto de opções de compra e venda, com a "semente" 12345 e variáveis normais geradas de acordo com Moro (1995). A regressão foi realizada utilizando a rotina SVDFIT com todos os caminhos e polinómios Laguerre ponderados de grau 3.

3.C. A avaliação de opções sobre o máximo de vários activos com o método LSM

Tabela 3.12: Avaliação de opções bermudas sobre o máximo de 2 activos - exemplo com sequências QMC-Neiderreiter e 16000 caminhos.

S	σ	ρ	Binomial	Simulação	Erro rel.
Opção de compra					
36	0.3	0.00	6.483	6.473	-0.002
36	0.3	0.25	6.139	6.110	-0.005
36	0.3	0.50	5.704	5.696	-0.001
36	0.3	0.75	5.109	5.112	0.001
36	0.4	0.00	9.101	9.054	-0.005
36	0.4	0.25	8.624	8.580	-0.005
36	0.4	0.50	8.017	7.992	-0.003
36	0.4	0.75	7.178	7.173	-0.001
40	0.3	0.00	10.109	10.088	-0.002
40	0.3	0.25	9.562	9.533	-0.003
40	0.3	0.50	8.903	8.898	-0.000
40	0.3	0.75	8.029	8.032	0.000
40	0.4	0.00	12.919	12.869	-0.004
40	0.4	0.25	12.227	12.160	-0.005
40	0.4	0.50	11.377	11.341	-0.003
40	0.4	0.75	10.233	10.240	0.001
44	0.3	0.00	14.223	14.193	-0.002
44	0.3	0.25	13.476	13.448	-0.002
44	0.3	0.50	12.594	12.592	-0.000
44	0.3	0.75	11.444	11.455	0.001
44	0.4	0.00	17.134	17.009	-0.007
44	0.4	0.25	16.222	16.130	-0.006
44	0.4	0.50	15.126	15.081	-0.003
44	0.4	0.75	13.674	13.674	0.000
Opção de venda					
36	0.3	0.00	4.000	4.000	0.000
36	0.3	0.25	4.000	4.000	0.000
36	0.3	0.50	4.047	4.043	-0.001
36	0.3	0.75	4.523	4.515	-0.002
36	0.4	0.00	4.000	4.000	0.000
36	0.4	0.25	4.393	4.377	-0.004
36	0.4	0.50	4.894	4.878	-0.003
36	0.4	0.75	5.527	5.521	-0.001
40	0.3	0.00	1.545	1.544	-0.001
40	0.3	0.25	1.877	1.881	0.002
40	0.3	0.50	2.245	2.239	-0.003
40	0.3	0.75	2.702	2.708	0.002
40	0.4	0.00	2.290	2.296	0.002
40	0.4	0.25	2.736	2.728	-0.003
40	0.4	0.50	3.229	3.217	-0.004
40	0.4	0.75	3.840	3.858	0.005
44	0.3	0.00	0.685	0.683	-0.004
44	0.3	0.25	0.935	0.936	0.001
44	0.3	0.50	1.222	1.227	0.005
44	0.3	0.75	1.586	1.588	0.001
44	0.4	0.00	1.317	1.316	-0.001
44	0.4	0.25	1.698	1.700	0.001
44	0.4	0.50	2.126	2.135	0.004
44	0.4	0.75	2.662	2.677	0.006

Erro relativo máximo - Opções de compra: 0.007
 Erro relativo máximo - Opções de venda: 0.006
 Erro relativo máximo - Global: 0.007

RMSRE - Opções de compra: 0.003
 RMSRE - Opções de venda: 0.003
 RMSRE - Global: 0.003

A taxa isenta de risco é de 6%, a taxa de dividendos 0%, o tempo para a maturidade da opção de 1 ano, o preço de exercício 40, o preço da activo subjacente s , a volatilidade σ , a correlação ρ , conforme indicado na tabela. O valor do método binomial foi obtido com 1000 passos e os parâmetros do método de Boyle, Evnine e Gibbs (1989). A simulação foi realizada com 16000 iterações com "Brownian bridges". O gerador de números aleatórios (L'Ecuyer e Touzin, 2000) foi reinicializado em cada conjunto de opções de compra e venda, com a "semente" 12345 e variáveis normais geradas de acordo com Moro (1995). A regressão foi realizada utilizando a rotina SVDFIT com polinómios Laguerre ponderados de grau 3 e os caminhos "in-the-money"

3.D A avaliação de opções compostas com o método LSM

Neste apêndice são apresentadas apenas algumas das tabelas que foram utilizadas para obter os resultados apresentados na secção 3.4.2 (página 49). A tabela 3.13 apresenta o resumo dos resultados para cada uma das 11 famílias de polinómios, do 2º ao 10º grau. Sumaria os resultados de 99 tabelas com 32 opções cada. A tabela 3.14 (página 80) é também um resumo dos resultados dos métodos de simulação. A tabela 3.15 (página 82) é um exemplar das 63 tabelas necessárias para obter a tabela anterior.

Tabela 3.13: Comparação dos métodos binomial e de simulação na avaliação de opções compostas americanas vs famílias de polinómios

Polinómio	Erro relativo máximo			RMSRE		
	Inv. +Exp.	Inv. +Cont.	Global	Inv. +Exp.	Inv. +Cont.	Global
Potências						
2º grau	0.109	0.095	0.109	0.076	0.062	0.070
3º grau	0.111	0.090	0.111	0.059	0.050	0.055
4º grau	0.079	0.067	0.079	0.043	0.031	0.038
5º grau	0.047	0.044	0.047	0.031	0.023	0.027
6º grau	0.048	0.041	0.048	0.024	0.017	0.021
7º grau	0.036	0.030	0.036	0.018	0.013	0.016
8º grau	0.032	0.025	0.032	0.014	0.012	0.013
9º grau	0.029	0.026	0.029	0.012	0.011	0.011
10º grau	0.024	0.024	0.024	0.011	0.011	0.011
Legendre						
2º grau	0.109	0.095	0.109	0.076	0.062	0.070
3º grau	0.111	0.090	0.111	0.059	0.050	0.055
4º grau	0.079	0.067	0.079	0.043	0.031	0.038
5º grau	0.047	0.044	0.047	0.031	0.023	0.027
6º grau	0.048	0.041	0.048	0.024	0.017	0.021
7º grau	0.036	0.030	0.036	0.018	0.013	0.016
8º grau	0.032	0.025	0.032	0.014	0.012	0.013
9º grau	0.029	0.026	0.029	0.012	0.011	0.011
10º grau	0.024	0.024	0.024	0.011	0.011	0.011
Laguerre ponderados						
2º grau	0.084	0.076	0.084	0.051	0.040	0.046
3º grau	0.051	0.046	0.051	0.032	0.024	0.028
4º grau	0.046	0.045	0.046	0.025	0.019	0.022
5º grau	0.040	0.039	0.040	0.020	0.016	0.018
6º grau	0.034	0.034	0.034	0.016	0.014	0.015
7º grau	0.029	0.026	0.029	0.012	0.011	0.012
8º grau	0.026	0.023	0.026	0.011	0.010	0.011
9º grau	0.029	0.022	0.029	0.012	0.010	0.011
10º grau	0.023	0.021	0.023	0.012	0.010	0.011
Laguerre						
2º grau	0.109	0.095	0.109	0.076	0.062	0.070
3º grau	0.111	0.090	0.111	0.059	0.050	0.055
4º grau	0.079	0.067	0.079	0.043	0.031	0.038
5º grau	0.047	0.044	0.047	0.031	0.023	0.027
6º grau	0.048	0.041	0.048	0.024	0.017	0.021
7º grau	0.036	0.030	0.036	0.018	0.013	0.016
8º grau	0.032	0.025	0.032	0.014	0.012	0.013
9º grau	0.029	0.026	0.029	0.012	0.011	0.011
10º grau	0.024	0.024	0.024	0.010	0.011	0.011
Hermite-A						
2º grau	0.109	0.095	0.109	0.076	0.062	0.070
3º grau	0.111	0.090	0.111	0.059	0.050	0.055
4º grau	0.079	0.067	0.079	0.043	0.031	0.038
5º grau	0.047	0.044	0.047	0.031	0.023	0.027
6º grau	0.048	0.041	0.048	0.024	0.017	0.021
7º grau	0.036	0.030	0.036	0.018	0.013	0.016
8º grau	0.032	0.025	0.032	0.014	0.012	0.013
9º grau	0.029	0.026	0.029	0.012	0.011	0.011
10º grau	0.024	0.024	0.024	0.011	0.011	0.011
Hermite-B						
2º grau	0.109	0.095	0.109	0.076	0.062	0.070

continua na página seguinte

3.D. A avaliação de opções compostas com o método LSM

continuação da página anterior

Polinómio	Erro relativo máximo			RMSRE		
	Inv. +Exp.	Inv. +Cont.	Global	Inv. +Exp.	Inv. +Cont.	Global
3º grau	0.111	0.090	0.111	0.059	0.050	0.055
4º grau	0.079	0.067	0.079	0.043	0.031	0.038
5º grau	0.047	0.044	0.047	0.031	0.023	0.027
6º grau	0.048	0.041	0.048	0.024	0.017	0.021
7º grau	0.036	0.030	0.036	0.018	0.013	0.016
8º grau	0.032	0.025	0.032	0.014	0.012	0.013
9º grau	0.029	0.026	0.029	0.012	0.011	0.011
10º grau	0.024	0.024	0.024	0.011	0.011	0.011
Chebyshev-1st-A						
2º grau	0.109	0.095	0.109	0.076	0.062	0.070
3º grau	0.111	0.090	0.111	0.059	0.050	0.055
4º grau	0.079	0.067	0.079	0.043	0.031	0.038
5º grau	0.047	0.044	0.047	0.031	0.023	0.027
6º grau	0.048	0.041	0.048	0.024	0.017	0.021
7º grau	0.036	0.030	0.036	0.018	0.013	0.016
8º grau	0.032	0.025	0.032	0.014	0.012	0.013
9º grau	0.029	0.026	0.029	0.012	0.011	0.011
10º grau	0.024	0.024	0.024	0.011	0.011	0.011
Chebyshev-1st-B						
2º grau	0.109	0.095	0.109	0.076	0.062	0.070
3º grau	0.111	0.090	0.111	0.059	0.050	0.055
4º grau	0.079	0.067	0.079	0.043	0.031	0.038
5º grau	0.047	0.044	0.047	0.031	0.023	0.027
6º grau	0.048	0.041	0.048	0.024	0.017	0.021
7º grau	0.036	0.030	0.036	0.018	0.013	0.016
8º grau	0.032	0.025	0.032	0.014	0.012	0.013
9º grau	0.029	0.026	0.029	0.012	0.011	0.011
10º grau	0.024	0.024	0.024	0.011	0.011	0.011
Chebyshev-1st-C						
2º grau	0.109	0.095	0.109	0.076	0.062	0.070
3º grau	0.111	0.090	0.111	0.059	0.050	0.055
4º grau	0.079	0.067	0.079	0.043	0.031	0.038
5º grau	0.047	0.044	0.047	0.031	0.023	0.027
6º grau	0.048	0.041	0.048	0.024	0.017	0.021
7º grau	0.036	0.030	0.036	0.018	0.013	0.016
8º grau	0.032	0.025	0.032	0.014	0.012	0.013
9º grau	0.029	0.026	0.029	0.012	0.011	0.011
10º grau	0.024	0.024	0.024	0.011	0.011	0.011
Chebyshev-2nd-A						
2º grau	0.109	0.095	0.109	0.076	0.062	0.070
3º grau	0.111	0.090	0.111	0.059	0.050	0.055
4º grau	0.079	0.067	0.079	0.043	0.031	0.038
5º grau	0.047	0.044	0.047	0.031	0.023	0.027
6º grau	0.048	0.041	0.048	0.024	0.017	0.021
7º grau	0.036	0.030	0.036	0.018	0.013	0.016
8º grau	0.032	0.025	0.032	0.014	0.012	0.013
9º grau	0.029	0.026	0.029	0.012	0.011	0.011
10º grau	0.025	0.024	0.025	0.011	0.011	0.011
Chebyshev-2nd-B						
2º grau	0.109	0.095	0.109	0.076	0.062	0.070
3º grau	0.111	0.090	0.111	0.059	0.050	0.055
4º grau	0.079	0.067	0.079	0.043	0.031	0.038
5º grau	0.047	0.044	0.047	0.031	0.023	0.027
6º grau	0.048	0.041	0.048	0.024	0.017	0.021
7º grau	0.036	0.030	0.036	0.018	0.013	0.016
8º grau	0.032	0.025	0.032	0.014	0.012	0.013
9º grau	0.029	0.026	0.029	0.012	0.011	0.012
10º grau	0.024	0.024	0.024	0.011	0.011	0.011

Na comparação foram utilizadas 32 opções de investimento+expansão e 32 opções de investimento+contração. A taxa isenta de risco é de 5%, a taxa de dividendos 3% ou 5%, o tempo para a maturidade 3 ou 5 anos, o preço do activo subjacente 100 ou 110, a volatilidade 30% ou 40%. A primeira opção expira 2 anos antes da segunda. Quando a segunda opção é de expansão, os parâmetros são: $K_1 = 80$, $K_2 = 80$; $e_1 = 0.5$ e $e_2 = 0.5$ ou 0.25 . Quando a segunda opção é de contração, os parâmetros são: $K_1 = 160$, $K_2 = 80$; $e_1 = 1$ e $e_2 = 0.5$ ou 1 . O valor de referência foi obtido com o método binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979) com 10000 passos. A simulação foi realizada com variáveis antitéticas, sem "Brownian bridges" e 100000 caminhos. O gerador de números aleatórios (L'Ecuyer e Touzin, 2000) foi reinicializado em cada conjunto de estratégias alternativas, com a "semente" 12345 e variáveis normais geradas de acordo com Moro (1995). A regressão foi realizada utilizando a rotina SVDFIT com todos os caminhos.

3.D. A avaliação de opções compostas com o método LSM

Tabela 3.14: Comparação de diferentes métodos de simulação para avaliar opções americanas compostas

Método	Erro relativo máximo			RMSRE		
	Inv. +Exp.	Inv. +Cont.	Global	Inv. +Exp.	Inv. +Cont.	Global
LSM						
2000 caminhos	0.383	0.302	0.383	0.219	0.151	0.188
4000 caminhos	0.249	0.141	0.249	0.124	0.073	0.102
8000 caminhos	0.196	0.108	0.196	0.080	0.054	0.069
16000 caminhos	0.080	0.061	0.080	0.035	0.031	0.033
32000 caminhos	0.109	0.062	0.109	0.030	0.020	0.026
64000 caminhos	0.044	0.036	0.044	0.015	0.013	0.014
128000 caminhos	0.038	0.026	0.038	0.011	0.010	0.011
LSM com variáveis antitéticas						
2000 caminhos	0.585	0.457	0.585	0.241	0.145	0.199
4000 caminhos	0.336	0.231	0.336	0.134	0.094	0.116
8000 caminhos	0.200	0.119	0.200	0.069	0.047	0.059
16000 caminhos	0.099	0.091	0.099	0.043	0.036	0.040
32000 caminhos	0.064	0.050	0.064	0.024	0.021	0.023
64000 caminhos	0.058	0.037	0.058	0.019	0.014	0.017
128000 caminhos	0.033	0.031	0.033	0.011	0.009	0.010
LSM com sequências de Halton						
2000 caminhos	0.172	0.071	0.172	0.105	0.043	0.080
4000 caminhos	0.132	0.052	0.132	0.071	0.030	0.054
8000 caminhos	0.056	0.058	0.058	0.034	0.023	0.029
16000 caminhos	0.064	0.024	0.064	0.024	0.011	0.019
32000 caminhos	0.017	0.018	0.018	0.007	0.006	0.006
64000 caminhos	0.013	0.012	0.013	0.005	0.005	0.005
128000 caminhos	0.013	0.009	0.013	0.005	0.005	0.005
LSM com sequências de Faure						
2000 caminhos	0.495	0.489	0.495	0.233	0.193	0.214
4000 caminhos	0.141	0.140	0.141	0.065	0.059	0.062
8000 caminhos	0.096	0.161	0.161	0.041	0.079	0.063
16000 caminhos	0.062	0.118	0.118	0.028	0.052	0.042
32000 caminhos	0.059	0.087	0.087	0.021	0.034	0.028
64000 caminhos	0.066	0.065	0.066	0.030	0.025	0.028
128000 caminhos	0.029	0.019	0.029	0.015	0.010	0.013
LSM com sequências de Niederreiter						
2000 caminhos	0.221	0.136	0.221	0.126	0.091	0.110
4000 caminhos	0.188	0.097	0.188	0.090	0.054	0.074
8000 caminhos	0.114	0.047	0.114	0.054	0.026	0.042
16000 caminhos	0.040	0.042	0.042	0.025	0.017	0.021
32000 caminhos	0.016	0.015	0.016	0.007	0.006	0.007
64000 caminhos	0.011	0.013	0.013	0.004	0.005	0.005
128000 caminhos	0.013	0.013	0.013	0.006	0.006	0.006
LSM com sequências de Sobol - Bratley e Fox						
2000 caminhos	0.266	0.141	0.266	0.141	0.066	0.110
4000 caminhos	0.183	0.095	0.183	0.092	0.050	0.074
8000 caminhos	0.160	0.045	0.160	0.058	0.024	0.044
16000 caminhos	0.112	0.034	0.112	0.038	0.015	0.029
32000 caminhos	0.030	0.018	0.030	0.012	0.008	0.010
64000 caminhos	0.023	0.017	0.023	0.007	0.005	0.006
128000 caminhos	0.015	0.012	0.015	0.007	0.006	0.007
LSM com sequências de Sobol - Silva e Barbe						
2000 caminhos	0.476	0.193	0.476	0.215	0.098	0.167
4000 caminhos	0.287	0.116	0.287	0.111	0.067	0.092
8000 caminhos	0.143	0.092	0.143	0.067	0.042	0.056
16000 caminhos	0.081	0.048	0.081	0.039	0.023	0.032
32000 caminhos	0.030	0.020	0.030	0.012	0.009	0.010
64000 caminhos	0.017	0.014	0.017	0.007	0.004	0.006
128000 caminhos	0.015	0.012	0.015	0.006	0.006	0.006
LSM com método dos momentos - 1º momento						
2000 caminhos	0.365	0.250	0.365	0.200	0.129	0.168
4000 caminhos	0.268	0.115	0.268	0.119	0.064	0.095
8000 caminhos	0.165	0.106	0.165	0.074	0.045	0.062
16000 caminhos	0.074	0.069	0.074	0.035	0.027	0.031
32000 caminhos	0.082	0.044	0.082	0.027	0.018	0.023
64000 caminhos	0.034	0.034	0.034	0.013	0.011	0.012
128000 caminhos	0.036	0.027	0.036	0.010	0.009	0.009
LSM com método dos momentos - 1º e 2º momentos						
2000 caminhos	0.362	0.258	0.362	0.201	0.128	0.169
4000 caminhos	0.272	0.116	0.272	0.123	0.065	0.098
8000 caminhos	0.178	0.108	0.178	0.078	0.045	0.064
16000 caminhos	0.084	0.059	0.084	0.033	0.028	0.030
32000 caminhos	0.073	0.043	0.073	0.028	0.018	0.023
64000 caminhos	0.034	0.032	0.034	0.012	0.011	0.012

continua na página seguinte

3.D. A avaliação de opções compostas com o método LSM

continuação da página anterior

Método	Erro relativo máximo			RMSRE		
	Inv. +Exp.	Inv. +Cont.	Global	Inv. +Exp.	Inv. +Cont.	Global
128000 caminhos	0.036	0.025	0.036	0.010	0.009	0.009

Na comparação foram utilizadas 32 opções de investimento+expansão e 32 opções de investimento+contração. A taxa isenta de risco é de 5%, a taxa de dividendos 3% ou 5%, o tempo para a maturidade 3 ou 5 anos, o preço do activo subjacente 100 ou 110, a volatilidade 30% ou 40%. A primeira opção expira 2 anos antes da segunda. Quando a segunda opção é de expansão, os parâmetros são: $K_1 = 80$, $K_2 = 80$; $e_1 = 0.5$ e $e_2 = 0.5$ ou 0.25. Quando a segunda opção é de contração, os parâmetros são: $K_1 = 160$, $K_2 = 80$; $e_1 = 1$ e $e_2 = 0.5$ ou 1. O valor de referência foi obtido com o método binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979) com 10000 passos. A simulação foi realizada com "Brownian bridges" para os métodos QMC. O gerador de números aleatórios (L'Ecuyer e Touzin, 2000) foi reinicializado em cada conjunto de estratégias alternativas, com a "semente" 12345 e variáveis normais geradas de acordo com Moro (1995). A regressão foi realizada utilizando a rotina SVDFIT com todos os caminhos e polinómios Laguerre ponderados de grau 8.

3.D. A avaliação de opções compostas com o método LSM

Tabela 3.15: Avaliação de opções americanas compostas - exemplo com sequências QMC-Halton e 32000 caminhos.

S	σ	δ	T	e_1	e_2	Binomial	Simulação	Erro relativo
Investimento + Expansão								
100	0.2	0.03	4	0.50	0.50	1.364	1.341	-0.017
100	0.2	0.03	5	0.50	0.50	2.857	2.855	-0.001
100	0.2	0.05	4	0.50	0.50	0.899	0.907	0.009
100	0.2	0.05	5	0.50	0.50	1.858	1.849	-0.005
100	0.3	0.03	4	0.50	0.50	5.197	5.275	0.015
100	0.3	0.03	5	0.50	0.50	8.311	8.326	0.002
100	0.3	0.05	4	0.50	0.50	4.116	4.149	0.008
100	0.3	0.05	5	0.50	0.50	6.489	6.510	0.003
110	0.2	0.03	4	0.50	0.50	2.781	2.775	-0.002
110	0.2	0.03	5	0.50	0.50	4.917	4.896	-0.004
110	0.2	0.05	4	0.50	0.50	1.920	1.911	-0.005
110	0.2	0.05	5	0.50	0.50	3.341	3.340	-0.000
110	0.3	0.03	4	0.50	0.50	7.942	7.986	0.006
110	0.3	0.03	5	0.50	0.50	11.659	11.661	0.000
110	0.3	0.05	4	0.50	0.50	6.419	6.468	0.008
110	0.3	0.05	5	0.50	0.50	9.280	9.293	0.001
100	0.2	0.03	4	0.25	0.75	0.952	0.959	0.008
100	0.2	0.03	5	0.25	0.75	2.280	2.275	-0.002
100	0.2	0.05	4	0.25	0.75	0.650	0.652	0.003
100	0.2	0.05	5	0.25	0.75	1.529	1.520	-0.006
100	0.3	0.03	4	0.25	0.75	4.164	4.196	0.008
100	0.3	0.03	5	0.25	0.75	7.223	7.325	0.014
100	0.3	0.05	4	0.25	0.75	3.312	3.316	0.001
100	0.3	0.05	5	0.25	0.75	5.684	5.744	0.011
110	0.2	0.03	4	0.25	0.75	2.058	2.075	0.008
110	0.2	0.03	5	0.25	0.75	4.065	4.073	0.002
110	0.2	0.05	4	0.25	0.75	1.471	1.481	0.007
110	0.2	0.05	5	0.25	0.75	2.843	2.837	-0.002
110	0.3	0.03	4	0.25	0.75	6.554	6.573	0.003
110	0.3	0.03	5	0.25	0.75	10.315	10.343	0.003
110	0.3	0.05	4	0.25	0.75	5.329	5.316	-0.002
110	0.3	0.05	5	0.25	0.75	8.279	8.248	-0.004
Investimento + Contracção								
100	0.2	0.03	4	1.00	1.00	0.918	0.912	-0.006
100	0.2	0.03	5	1.00	1.00	2.234	2.221	-0.006
100	0.2	0.05	4	1.00	1.00	0.651	0.649	-0.003
100	0.2	0.05	5	1.00	1.00	1.531	1.525	-0.004
100	0.3	0.03	4	1.00	1.00	4.001	3.987	-0.004
100	0.3	0.03	5	1.00	1.00	7.058	7.034	-0.003
100	0.3	0.05	4	1.00	1.00	3.310	3.309	-0.000
100	0.3	0.05	5	1.00	1.00	5.689	5.707	0.003
110	0.2	0.03	4	1.00	1.00	1.999	1.995	-0.002
110	0.2	0.03	5	1.00	1.00	3.997	3.998	0.000
110	0.2	0.05	4	1.00	1.00	1.473	1.458	-0.010
110	0.2	0.05	5	1.00	1.00	2.845	2.846	0.000
110	0.3	0.03	4	1.00	1.00	6.337	6.335	-0.000
110	0.3	0.03	5	1.00	1.00	10.111	10.050	-0.006
110	0.3	0.05	4	1.00	1.00	5.329	5.341	0.002
110	0.3	0.05	5	1.00	1.00	8.289	8.254	-0.004
100	0.2	0.03	4	1.00	0.50	1.198	1.202	0.003
100	0.2	0.03	5	1.00	0.50	2.627	2.612	-0.006
100	0.2	0.05	4	1.00	0.50	0.913	0.922	0.010
100	0.2	0.05	5	1.00	0.50	1.898	1.916	0.010
100	0.3	0.03	4	1.00	0.50	4.894	4.892	-0.000
100	0.3	0.03	5	1.00	0.50	8.005	7.976	-0.004
100	0.3	0.05	4	1.00	0.50	4.198	4.208	0.002
100	0.3	0.05	5	1.00	0.50	6.641	6.623	-0.003
110	0.2	0.03	4	1.00	0.50	2.492	2.447	-0.018
110	0.2	0.03	5	1.00	0.50	4.576	4.564	-0.003
110	0.2	0.05	4	1.00	0.50	1.955	1.945	-0.005
110	0.2	0.05	5	1.00	0.50	3.416	3.423	0.002
110	0.3	0.03	4	1.00	0.50	7.541	7.562	0.003
110	0.3	0.03	5	1.00	0.50	11.287	11.269	-0.002
110	0.3	0.05	4	1.00	0.50	6.555	6.612	0.009
110	0.3	0.05	5	1.00	0.50	9.505	9.459	-0.005

Erro relativo máximo - Investimento+Expansão: 0.017
 Erro relativo máximo - Investimento+Contracção: 0.018
 Erro relativo máximo - Global: 0.018

RMSRE - Investimento+Expansão: 0.007
 RMSRE - Investimento+Contracção: 0.006
 RMSRE - Global: 0.006

A taxa isenta de risco é de 5%, a taxa de dividendos δ , o tempo para a maturidade t , o preço do activo subjacente s , a volatilidade σ , como indicado na tabela. A primeira opção expira 2 anos antes da segunda. Quando a segunda opção é de expansão, o parâmetros são: $K_1 = 80$, $K_2 = 80$; e_1 e e_2 conforme indicado na tabela. Quando a segunda opção é de contracção, os parâmetros são: $K_1 = 160$, $K_2 = 80$; e_1 e e_2 conforme indicado na tabela. O valor de referência foi obtido com o método binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979) com 10000 passos. A simulação foi realizada com "Brownian bridges" e 32000 caminhos. Foram utilizadas variáveis normais de Moro (1995). O algoritmo de regressão utilizado foi o SVDFIT com polinómios Laguerre ponderados do grau 8 e todos os caminhos.

3.E A avaliação de opções mutuamente exclusivas com o método LSM

Neste apêndice são apresentadas apenas algumas das tabelas que foram utilizadas para obter os resultados apresentados na secção 3.4.3 (página 57). A tabela 3.16 apresenta o resumo dos resultados para cada uma das 11 famílias de polinómios, do 2º ao 10º grau. Sumaria os resultados de 99 tabelas com 48 opções cada. A tabela 3.17 (página 85) é também um resumo dos resultados dos métodos de simulação. A tabela 3.18 (página 87) é um exemplar das 63 tabelas necessárias para obter a tabela anterior.

Tabela 3.16: Comparação dos métodos binomial e de simulação na avaliação de opções americanas mutuamente exclusivas vs famílias de polinómios

Polinómio	Erro relativo máximo			RMSRE		
	Exp. vs Exp.	Exp. vs Ab.	Global	Exp. vs Exp.	Exp. vs Ab.	Global
Potências						
2º grau	0.031	0.092	0.092	0.016	0.076	0.055
3º grau	0.028	0.059	0.059	0.012	0.038	0.028
4º grau	0.021	0.038	0.038	0.009	0.024	0.018
5º grau	0.016	0.028	0.028	0.008	0.017	0.013
6º grau	0.012	0.024	0.024	0.007	0.014	0.011
7º grau	0.012	0.020	0.020	0.006	0.012	0.010
8º grau	0.013	0.022	0.022	0.006	0.012	0.009
9º grau	0.012	0.019	0.019	0.006	0.010	0.008
10º grau	0.010	0.020	0.020	0.006	0.010	0.008
Legendre						
2º grau	0.031	0.092	0.092	0.016	0.076	0.055
3º grau	0.028	0.059	0.059	0.012	0.038	0.028
4º grau	0.021	0.038	0.038	0.009	0.024	0.018
5º grau	0.016	0.028	0.028	0.008	0.017	0.013
6º grau	0.012	0.024	0.024	0.007	0.013	0.011
7º grau	0.012	0.020	0.020	0.006	0.012	0.010
8º grau	0.013	0.022	0.022	0.006	0.012	0.009
9º grau	0.012	0.019	0.019	0.006	0.010	0.008
10º grau	0.014	0.022	0.022	0.007	0.011	0.009
Laguerre ponderados						
2º grau	0.034	0.042	0.042	0.013	0.023	0.019
3º grau	0.013	0.034	0.034	0.007	0.019	0.014
4º grau	0.011	0.023	0.023	0.007	0.013	0.010
5º grau	0.013	0.020	0.020	0.006	0.012	0.010
6º grau	0.010	0.023	0.023	0.006	0.009	0.008
7º grau	0.011	0.020	0.020	0.005	0.009	0.007
8º grau	0.010	0.020	0.020	0.005	0.008	0.007
9º grau	0.010	0.022	0.022	0.005	0.008	0.007
10º grau	0.011	0.022	0.022	0.005	0.008	0.007
Laguerre						
2º grau	0.031	0.092	0.092	0.016	0.076	0.055
3º grau	0.028	0.059	0.059	0.012	0.038	0.028
4º grau	0.021	0.038	0.038	0.009	0.024	0.018
5º grau	0.016	0.028	0.028	0.008	0.017	0.013
6º grau	0.012	0.024	0.024	0.007	0.013	0.011
7º grau	0.012	0.020	0.020	0.006	0.012	0.010
8º grau	0.012	0.022	0.022	0.006	0.012	0.009
9º grau	0.012	0.020	0.020	0.006	0.010	0.008
10º grau	0.010	0.021	0.021	0.006	0.010	0.008
Hermite-A						
2º grau	0.031	0.092	0.092	0.016	0.076	0.055
3º grau	0.028	0.059	0.059	0.012	0.038	0.028
4º grau	0.021	0.038	0.038	0.009	0.024	0.018
5º grau	0.016	0.028	0.028	0.008	0.017	0.013
6º grau	0.012	0.024	0.024	0.007	0.013	0.011
7º grau	0.012	0.020	0.020	0.006	0.012	0.010
8º grau	0.013	0.022	0.022	0.006	0.012	0.009
9º grau	0.012	0.019	0.019	0.006	0.010	0.008
10º grau	0.038	0.057	0.057	0.010	0.017	0.014

continua na página seguinte

3.E. A avaliação de opções mutuamente exclusivas com o método LSM

continuação da página anterior

Polinómio	Erro relativo máximo			RMSRE		
	Exp. vs Exp.	Exp. vs Ab.	Global	Exp. vs Exp.	Exp. vs Ab.	Global
Hermite-B						
2º grau	0.031	0.092	0.092	0.016	0.076	0.055
3º grau	0.028	0.059	0.059	0.012	0.038	0.028
4º grau	0.021	0.038	0.038	0.009	0.024	0.018
5º grau	0.016	0.028	0.028	0.008	0.017	0.013
6º grau	0.012	0.024	0.024	0.006	0.013	0.011
7º grau	0.012	0.020	0.020	0.006	0.012	0.010
8º grau	0.012	0.022	0.022	0.006	0.012	0.009
9º grau	0.012	0.020	0.020	0.006	0.010	0.008
10º grau	0.010	0.020	0.020	0.006	0.010	0.008
Chebyshev-1st-A						
2º grau	0.031	0.092	0.092	0.016	0.076	0.055
3º grau	0.028	0.059	0.059	0.012	0.038	0.028
4º grau	0.021	0.038	0.038	0.009	0.024	0.018
5º grau	0.016	0.028	0.028	0.008	0.017	0.013
6º grau	0.012	0.024	0.024	0.007	0.013	0.011
7º grau	0.012	0.020	0.020	0.006	0.012	0.010
8º grau	0.013	0.022	0.022	0.006	0.012	0.009
9º grau	0.012	0.019	0.019	0.006	0.010	0.008
10º grau	0.033	0.044	0.044	0.009	0.015	0.012
Chebyshev-1st-B						
2º grau	0.031	0.092	0.092	0.016	0.076	0.055
3º grau	0.028	0.059	0.059	0.012	0.038	0.028
4º grau	0.021	0.038	0.038	0.009	0.024	0.018
5º grau	0.016	0.028	0.028	0.008	0.017	0.013
6º grau	0.012	0.024	0.024	0.007	0.013	0.011
7º grau	0.012	0.020	0.020	0.006	0.012	0.010
8º grau	0.013	0.022	0.022	0.006	0.012	0.009
9º grau	0.012	0.019	0.019	0.006	0.010	0.008
10º grau	0.010	0.020	0.020	0.006	0.010	0.008
Chebyshev-1st-C						
2º grau	0.031	0.092	0.092	0.016	0.076	0.055
3º grau	0.028	0.059	0.059	0.012	0.038	0.028
4º grau	0.021	0.038	0.038	0.009	0.024	0.018
5º grau	0.016	0.028	0.028	0.008	0.017	0.013
6º grau	0.012	0.024	0.024	0.007	0.013	0.011
7º grau	0.012	0.020	0.020	0.006	0.012	0.010
8º grau	0.013	0.022	0.022	0.006	0.012	0.009
9º grau	0.012	0.019	0.019	0.006	0.010	0.008
10º grau	0.011	0.020	0.020	0.006	0.010	0.008
Chebyshev-2nd-A						
2º grau	0.031	0.092	0.092	0.016	0.076	0.055
3º grau	0.028	0.059	0.059	0.012	0.038	0.028
4º grau	0.021	0.038	0.038	0.009	0.024	0.018
5º grau	0.016	0.028	0.028	0.008	0.017	0.013
6º grau	0.012	0.024	0.024	0.007	0.013	0.011
7º grau	0.012	0.020	0.020	0.006	0.012	0.010
8º grau	0.013	0.022	0.022	0.006	0.012	0.009
9º grau	0.012	0.019	0.019	0.006	0.010	0.008
10º grau	0.019	0.043	0.043	0.007	0.016	0.012
Chebyshev-2nd-B						
2º grau	0.031	0.092	0.092	0.016	0.076	0.055
3º grau	0.028	0.059	0.059	0.012	0.038	0.028
4º grau	0.021	0.038	0.038	0.009	0.024	0.018
5º grau	0.016	0.028	0.028	0.008	0.017	0.013
6º grau	0.012	0.024	0.024	0.007	0.014	0.011
7º grau	0.012	0.020	0.020	0.006	0.012	0.010
8º grau	0.012	0.022	0.022	0.006	0.012	0.009
9º grau	0.012	0.019	0.019	0.006	0.010	0.008
10º grau	0.010	0.020	0.020	0.006	0.010	0.008

Na comparação foram utilizadas 24 opções de cada tipo (melhor de duas opções e expansão e melhor de uma opção de expansão e de uma opção de abandono). A taxa isenta de risco é de 5%, o preço do activo subjacente 90, 100 ou 110, a volatilidade 20% ou 40%, a taxa de dividendos 5% ou 10% e o tempo para a maturidade de 3 ou 5 anos. Quando a segunda opção é uma opção de expansão os parâmetros são: $K_3 = 35$, $e_3 = 0.4$, $K_2 = 50$, $e_2 = 0.5$. Quando a segunda opção é uma opção de abandono, os parâmetros são: $K_2 = 30$, $e_2 = 0.5$, $K_1 = 50$, $e_1 = 0.5$. O valor de referência foi obtido com o método binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979) com 10000 passos. A simulação foi realizada com o 100000 iterações com variáveis antitéticas e sem "Brownian bridges". O gerador de números aleatórios (L'Ecuyer e Touzin, 2000) foi reinicializado em cada conjunto de estratégias alternativas, com a "semente" 12345 e variáveis normais geradas de acordo com Moro (1995). A regressão foi realizada utilizando a rotina SVDFIT com apenas os caminhos "in-the-money".

3.E. A avaliação de opções mutuamente exclusivas com o método LSM

Tabela 3.17: Comparação de diferentes métodos de simulação para avaliar opções americanas mutuamente exclusivas

Polinômio	Erro relativo máximo			RMSRE		
	Exp. vs Exp.	Exp. vs Ab.	Global	Exp. vs Exp.	Exp. vs Ab.	Global
LSM						
2000 caminhos	0.145	0.108	0.145	0.069	0.044	0.057
4000 caminhos	0.074	0.057	0.074	0.036	0.025	0.031
8000 caminhos	0.041	0.026	0.041	0.017	0.013	0.015
16000 caminhos	0.031	0.020	0.031	0.011	0.009	0.010
32000 caminhos	0.018	0.026	0.026	0.008	0.010	0.009
64000 caminhos	0.017	0.020	0.020	0.008	0.010	0.009
128000 caminhos	0.013	0.017	0.017	0.007	0.009	0.008
LSM com variáveis antitéticas						
2000 caminhos	0.111	0.119	0.119	0.054	0.045	0.049
4000 caminhos	0.052	0.053	0.053	0.029	0.021	0.026
8000 caminhos	0.045	0.038	0.045	0.018	0.017	0.018
16000 caminhos	0.022	0.025	0.025	0.009	0.011	0.010
32000 caminhos	0.016	0.021	0.021	0.007	0.009	0.008
64000 caminhos	0.012	0.022	0.022	0.006	0.009	0.008
128000 caminhos	0.011	0.017	0.017	0.006	0.008	0.007
LSM com sequências de Halton						
2000 caminhos	0.039	0.037	0.039	0.021	0.018	0.020
4000 caminhos	0.032	0.020	0.032	0.014	0.011	0.013
8000 caminhos	0.026	0.017	0.026	0.010	0.008	0.009
16000 caminhos	0.015	0.017	0.017	0.009	0.008	0.009
32000 caminhos	0.011	0.016	0.016	0.006	0.007	0.006
64000 caminhos	0.011	0.016	0.016	0.006	0.007	0.006
128000 caminhos	0.010	0.015	0.015	0.005	0.007	0.006
LSM com sequências de Faure						
2000 caminhos	0.082	0.058	0.082	0.059	0.034	0.048
4000 caminhos	0.053	0.037	0.053	0.038	0.023	0.031
8000 caminhos	0.027	0.033	0.033	0.012	0.011	0.012
16000 caminhos	0.016	0.023	0.023	0.008	0.007	0.008
32000 caminhos	0.010	0.017	0.017	0.006	0.005	0.006
64000 caminhos	0.010	0.013	0.013	0.004	0.005	0.005
128000 caminhos	0.011	0.015	0.015	0.003	0.005	0.005
LSM com sequências de Niederreiter						
2000 caminhos	0.054	0.044	0.054	0.031	0.021	0.026
4000 caminhos	0.033	0.017	0.033	0.014	0.008	0.012
8000 caminhos	0.029	0.024	0.029	0.012	0.010	0.011
16000 caminhos	0.013	0.014	0.014	0.007	0.006	0.006
32000 caminhos	0.012	0.016	0.016	0.005	0.007	0.006
64000 caminhos	0.010	0.014	0.014	0.005	0.006	0.006
128000 caminhos	0.011	0.014	0.014	0.004	0.006	0.005
LSM com sequências de Sobol - Bratley e Fox						
2000 caminhos	0.073	0.042	0.073	0.029	0.021	0.026
4000 caminhos	0.060	0.017	0.060	0.020	0.009	0.016
8000 caminhos	0.015	0.017	0.017	0.005	0.007	0.006
16000 caminhos	0.009	0.014	0.014	0.005	0.006	0.005
32000 caminhos	0.008	0.015	0.015	0.004	0.007	0.005
64000 caminhos	0.010	0.014	0.014	0.004	0.006	0.005
128000 caminhos	0.010	0.013	0.013	0.004	0.007	0.006
LSM com sequências de Sobol - Silva e Barbe						
2000 caminhos	0.042	0.031	0.042	0.020	0.016	0.019
4000 caminhos	0.027	0.019	0.027	0.013	0.010	0.012
8000 caminhos	0.028	0.019	0.028	0.013	0.008	0.011
16000 caminhos	0.011	0.015	0.015	0.005	0.006	0.005
32000 caminhos	0.011	0.013	0.013	0.004	0.006	0.005
64000 caminhos	0.010	0.015	0.015	0.005	0.007	0.006
128000 caminhos	0.010	0.013	0.013	0.004	0.006	0.005
LSM com método dos momentos - 1º momento						
2000 caminhos	0.120	0.070	0.120	0.056	0.037	0.047
4000 caminhos	0.051	0.052	0.052	0.028	0.021	0.025
8000 caminhos	0.026	0.022	0.026	0.013	0.010	0.011
16000 caminhos	0.013	0.015	0.015	0.006	0.008	0.007
32000 caminhos	0.013	0.025	0.025	0.006	0.009	0.007
64000 caminhos	0.013	0.018	0.018	0.007	0.009	0.008
128000 caminhos	0.010	0.017	0.017	0.005	0.008	0.007
LSM com método dos momentos - 1º e 2º momentos						
2000 caminhos	0.083	0.063	0.083	0.049	0.036	0.043
4000 caminhos	0.066	0.045	0.066	0.030	0.019	0.025
8000 caminhos	0.028	0.023	0.028	0.012	0.009	0.011

continua na página seguinte

3.E. A avaliação de opções mutuamente exclusivas com o método LSM

continuação da página anterior

Polinómio	Erro relativo máximo			RMSRE		
	Exp. vs Exp.	Exp. vs Ab.	Global	Exp. vs Exp.	Exp. vs Ab.	Global
16000 caminhos	0.011	0.015	0.015	0.006	0.008	0.007
32000 caminhos	0.013	0.025	0.025	0.006	0.009	0.007
64000 caminhos	0.012	0.018	0.018	0.006	0.009	0.008
128000 caminhos	0.010	0.017	0.017	0.005	0.008	0.006

Na comparação foram utilizadas 24 opções de cada tipo (melhor de duas opções e expansão e melhor de uma opção de expansão e de uma opção de abandono). A taxa isenta de risco é de 5%, o preço do activo subjacente 90, 100 ou 110, a volatilidade 20% ou 40%, a taxa de dividendos 5% ou 10% e o tempo para a maturidade de 3 ou 5 anos. Quando a segunda opção é uma opção de expansão os parâmetros são: $K_3 = 35$, $e_3 = 0.4$, $K_2 = 50$, $e_2 = 0.5$. Quando a segunda opção é uma opção de abandono, os parâmetros são: $K_2 = 30$, $e_2 = 0.5$, $K_1 = 50$, $e_1 = 0.5$. O valor de referência foi obtido com o método binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979) com 10000 passos. A simulação foi realizada com "Brownian bridges" para os métodos QMC. O gerador de números aleatórios. O gerador de números aleatórios (L'Ecuyer e Touzin, 2000) foi reinicializado em cada conjunto de estratégias alternativas, com a "semente" 12345 e variáveis normais geradas de acordo com Moro (1995). A regressão foi realizada utilizando a rotina SVDFIT com apenas os caminhos "in-the-money" e polinómios Laguerre ponderados de grau 8.

3.E. A avaliação de opções mutuamente exclusivas com o método LSM

Tabela 3.18: Avaliação de opções americanas mutuamente exclusivas - exemplo com sequências QMC-Sobol - Silva e Barbe e 16000 caminhos.

S	σ	δ	T	Binomial	Simulação	Erro rel.
Expansão vs Expansão						
90	0.2	0.05	3	4.868	4.872	0.001
90	0.2	0.05	5	5.808	5.844	0.006
90	0.2	0.10	3	3.330	3.314	-0.005
90	0.2	0.10	5	3.625	3.616	-0.002
90	0.4	0.05	3	9.904	9.956	0.005
90	0.4	0.05	5	12.101	12.144	0.004
90	0.4	0.10	3	7.548	7.567	0.002
90	0.4	0.10	5	8.688	8.663	-0.003
100	0.2	0.05	3	7.334	7.350	0.002
100	0.2	0.05	5	8.219	8.245	0.003
100	0.2	0.10	3	5.713	5.686	-0.005
100	0.2	0.10	5	5.916	5.886	-0.005
100	0.4	0.05	3	12.706	12.717	0.001
100	0.4	0.05	5	14.960	15.049	0.006
100	0.4	0.10	3	9.981	9.941	-0.004
100	0.4	0.10	5	11.122	11.035	-0.008
110	0.2	0.05	3	10.248	10.300	0.005
110	0.2	0.05	5	11.022	11.007	-0.001
110	0.2	0.10	3	9.017	8.946	-0.008
110	0.2	0.10	5	9.065	8.964	-0.011
110	0.4	0.05	3	15.766	15.837	0.005
110	0.4	0.05	5	18.025	18.077	0.003
110	0.4	0.10	3	12.734	12.756	0.002
110	0.4	0.10	5	13.839	13.843	0.000
Expansão vs Abandono						
90	0.2	0.05	3	4.516	4.543	0.006
90	0.2	0.05	5	6.426	6.465	0.006
90	0.2	0.10	3	3.595	3.543	-0.015
90	0.2	0.10	5	5.441	5.397	-0.008
90	0.4	0.05	3	13.184	13.233	0.004
90	0.4	0.05	5	17.275	17.269	-0.000
90	0.4	0.10	3	11.988	11.993	0.000
90	0.4	0.10	5	15.460	15.466	0.000
100	0.2	0.05	3	6.541	6.531	-0.002
100	0.2	0.05	5	8.355	8.340	-0.002
100	0.2	0.10	3	4.889	4.842	-0.010
100	0.2	0.10	5	6.474	6.414	-0.009
100	0.4	0.05	3	15.254	15.307	0.003
100	0.4	0.05	5	19.395	19.499	0.005
100	0.4	0.10	3	13.582	13.535	-0.003
100	0.4	0.10	5	17.032	16.908	-0.007
110	0.2	0.05	3	9.266	9.276	0.001
110	0.2	0.05	5	10.880	10.922	0.004
110	0.2	0.10	3	7.190	7.161	-0.004
110	0.2	0.10	5	8.391	8.318	-0.009
110	0.4	0.05	3	17.745	17.763	0.001
110	0.4	0.05	5	21.846	21.791	-0.003
110	0.4	0.10	3	15.654	15.635	-0.001
110	0.4	0.10	5	18.989	18.895	-0.005

Erro relativo máximo - Expansão vs Expansão: 0.011
 Erro relativo máximo - Expansão vs Abandono: 0.015
 Erro relativo máximo - Global: 0.015

RMSRE - Expansão vs Expansão: 0.005
 RMSRE - Expansão vs Abandono: 0.006
 RMSRE - Global: 0.005

A taxa isenta de risco é de 5%, o preço do activo subjacente s , a volatilidade σ , a taxa de dividendos δ e o tempo para a maturidade T , como indicado na tabela. Quando a segunda opção é uma opção de expansão os parâmetros são: $K_3 = 35$, $e_3 = 0.4$, $K_2 = 50$, $e_2 = 0.5$. Quando a segunda opção é uma opção de abandono, os parâmetros são: $K_2 = 30$, $e_2 = 0.5$, $K_1 = 50$, $e_1 = 0.5$. O valor de referência foi obtido com o método binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979) com 10000 passos. A simulação foi realizada com "Brownian bridges" e 16000 passos. Foram utilizadas variáveis normais de Moro (1995). O algoritmo de regressão utilizado foi o SVDFIT com polinómios Laguerre ponderados do grau 8.

3.E. A avaliação de opções mutuamente exclusivas com o método LSM

Capítulo 4

Um modelo de avaliação da modularidade na perspectiva das opções reais

4.1 Introdução

O modelo de avaliação da modularidade de Baldwin e Clark (2000) identifica, pela primeira vez, como fontes do valor da modularidade, as opções reais por ela criadas. O pressuposto fundamental é de que uma carteira de opções, que corresponde ao projecto modular, terá mais valor do que a opção sobre uma carteira de activos correspondente à configuração não modular. Esta proposição havia já sido apresentada por Merton (1973a), com o pressuposto de que a distribuição agregada dos valores permaneça alterada.

O modelo identifica os seis operadores que estão na origem das opções reais criadas pela partição de um sistema interdependente em componentes mais pequenos - os módulos. O modelo assume ainda pressupostos simplificadores da realidade, que permitem obter soluções fechadas para o valor de um projecto modular. Tal foi também assinalado por Sullivan, Chalasani, Jha e Sazawal (1999) os quais argumentaram que o modelo se desenvolve mais a partir da perspectiva técnica da modularidade (com os conceitos de "estrutura de tarefas" e de "ocultação de informação") do que na perspectiva de opções reais.

Embora o modelo de Baldwin e Clark (2000) tenha sido aplicado, como pequenas adaptações, por Gaynor e Bradner (2001) na avaliação da standardização da tecnologia e por Sullivan, Griswold, Cai e Hallen (2001) na avaliação da modularidade do *software*, não foi proposto até ao momento um modelo que assuma pressupostos mais realistas e tenha uma abordagem mais orientada pelos modelos de opções reais.

No presente capítulo, propõe-se um modelo que, ultrapassando algumas das suas limitações, estende o modelo de Baldwin e Clark (2000) incorporando ainda alguns contributos dos modelos de opções reais, nomeadamente considerando que elas são opções do tipo americano e que o processo de desenvolvimento de um produto é um processo faseado, que cria opções compostas. O modelo aqui proposto endogeniza ainda algumas das decisões críticas do processo de modularização: o momento de modularizar e a configuração modular escolhida, assim como o número de ensaios que devem ser realizadas para cada módulo.

A modularidade cria uma carteira de opções dependentes de múltiplos activos ou variáveis-estado, que só pode ser, como vimos anteriormente, correctamente avaliada recorrendo à simulação. De acordo com a análise do capítulo anterior, o método LSM de Longstaff e Schwartz (2001) e a sua extensão por Gamba (2003), permitem avaliar, com uma precisão assinalável, carteiras de opções reais americanas dependentes de múltiplos activos. É, assim, um método adequado para avaliar um projecto modular, em particular, quando implementado com sequências de baixa discrepância e utilizando polinómios de Laguerre ponderados, tal como sugerido anteriormente.

A secção 4.2 apresenta, de forma sucinta, o modelo de Baldwin e Clark (2000) com ênfase nos operadores de divisão e substituição, bem assim como as suas principais limitações. Estas sugerem algumas extensões, que são incorporadas no modelo proposto nesta tese (secção 4.3 (página 97)), o qual permite avaliar as opções reais criadas pelos operadores de divisão e substituição. Alguns resultados numéricos e uma análise de sensibilidade são apresentados na mesma secção. Finalmente, na secção 4.4 (página 127), serão tecidas as considerações finais.

4.2 O modelo de Baldwin e Clark (2000)

Baldwin e Clark (1994, 1997, 2000) desenvolveram um modelo para avaliar a modularidade no *design*, com alguns contributos da teoria das opções reais. O processo de modularização dos *designs* proposto é composto por três fases (tabela 4.1 (página seguinte)) e o *design* final é criado por seis *operadores* modulares.

Na primeira fase, as *regras do design* são formuladas e os seis operadores podem ser utilizados para criar uma estrutura do *design* e a correspondente estrutura de tarefas, definindo o número, limites e interfaces dos módulos:

1. Se o *design* inicial é interdependente, o operador de *divisão* pode ser utilizado para criar um *design* modular;
2. *Substituição* de um módulo por outro;

3. *Aumento* do número de módulos, acrescentando novos módulos ao sistema;
4. *Exclusão* de um módulo do sistema;
5. *Inversão* para criar novas regras de *design*;
6. *Portabilidade* um módulo para outro sistema.

Tabela 4.1: Fases do modelo de Baldwin e Clark (2000)

	Fase 1	Fase 2	Fase 3
	Criação da estrutura de tarefas e das regras de <i>design</i>	Implementação da estrutura de tarefas	Teste, integração e avaliação do sistema
Acções	Escolha dos operadores	Implementação das tarefas	Teste dos resultados e exercício das opções
Eventos	Divisão, Substituição, Aumento, Exclusão, Inversão e Portabilidade	" <i>The Wheel Spins</i> "	O valor económico é revelado; Os melhores resultados são escolhidos
Benefícios	Um <i>payoff</i> na forma de uma variável aleatória é escolhido	Um resultado é retirado da distribuição da variável aleatória	O valor correspondente ao resultado da variável aleatória é revelado; quando existem opções, os melhores resultados são escolhidos
Custos	Custos de definição da estrutura de tarefas	Custos de implementação da estrutura de tarefas	Custos de teste e integração
Critério de escolha	Maior valor líquido da opção	Maior valor líquido da opção para a estrutura de tarefas criada	Maior valor para o resultado produzido e os testes realizados

Fonte: (Baldwin e Clark, 2000, p. 249)

A escolha de um *design*, e da sua estrutura de tarefas, corresponde à escolha

4.2. O modelo de Baldwin e Clark (2000)

de uma função *payoff* aleatória. Isto significa que o resultado (valor) de um *design* não é determinístico. A definição das suas regras não é gratuita: para criar uma estrutura modular é necessário incorrer em alguns custos, que aumentam com a complexidade do *design*.

A segunda fase corresponde à implementação da estrutura de tarefas criada na fase anterior. Uma vez terminada esta fase, o *design* está pronto a ser testado e integrado no sistema. Na última fase o valor do *design* é conhecido e as opções a ele associadas podem ser exercidas.

Um *design* é composto por um conjunto de N tarefas. Num *design* modular com j módulos, estas tarefas são divididas por estes, que podem ser simétricos (com igual número de tarefas) ou assimétricos. O número de módulos, j , é escolhido na primeira fase e é fixo nas outras duas fases. A complexidade do sistema e dos módulos pressupõe-se proporcional ao seu número de tarefas.

O valor do sistema, ou o seu "desempenho", representado por X , corresponde à soma do valor relativo ao sistema, S_0 e do valor dos j módulos (X_1, \dots, X_j):

$$X = S_0 + \sum_{i=1}^j X_i \quad (4.1)$$

O valor total do sistema pode, assim, ser maior do que a soma dos valores dos módulos. Apenas por razões de conveniência, se assume que o valor relativo ao sistema é nulo.

Após a modularização e a segunda fase, os valores dos módulos são conhecidos e comparados com os valores dos módulos existentes, criando uma variedade de possíveis combinações dos novos módulos com os módulos antigos. Por exemplo, um sistema com dois módulos permite criar quatro oportunidades diferentes e um sistema de três módulos cria oito opções.

A incerteza desempenha um papel central em qualquer modelo de opções reais. Existem duas fontes principais de incerteza: a incerteza técnica e a incerteza de mercado (económica). A primeira está relacionada com a complexidade do *design* e a segunda com o seu valor de mercado, sendo ambas desconhecidas no momento em que é realizada a avaliação.

Sendo um modelo simples, alguns pressupostos convenientes são assumidos:

- O valor de cada módulo tem uma distribuição de probabilidade normal, com uma variância proporcional à sua complexidade, medida pelo número de tarefas. Os valores dos diferentes módulos não são correlacionados. Estes pressupostos tornam possível a aditividade dos valores destes, dado que a soma de variáveis aleatórias com uma distribuição normal independente tem

também uma distribuição normal.

- O risco (variância) do valor dos módulos depende da complexidade associada ao seu tamanho, i.e. do número de tarefas. Para um módulo com n tarefas, a variância é $\sigma_n^2 = \sigma^2 n$, sendo σ^2 a medida de risco comum a todos os módulos. Assume-se que os *designs* maiores têm uma maior probabilidade de sucesso/insucesso.
- A modularização não altera a distribuição de probabilidade do valor do *design*, se o número de tarefas se mantiver inalterado.

Estes pressupostos são escolhidos de forma a manter o modelo simples, mas alguns deles, como por exemplo o pressuposto da independência dos valores dos módulos, raramente corresponderão à realidade.

4.2.1 O valor de um *design* interdependente

Antes da modularização, um *design* é uma estrutura de tarefas interdependente ou, de outra forma, um *design* com apenas um módulo. O valor de um *design* com um módulo, V_1 , com N tarefas, depende do valor relativo ao sistema, S_0 , e do valor de um novo módulo, X_N , que, de acordo com os pressupostos anteriores, tem uma distribuição normal de probabilidade com média zero¹ e variância igual a $\sigma^2 N$. O valor do novo 'design' é, portanto:

$$V_1 = S_0 + \mathbb{E}(X_N^+) \quad (4.2)$$

$\mathbb{E}(X_N^+)$ é o valor esperado do módulo. Dado que existe a opção de rejeitar o novo módulo se o seu valor for negativo, o valor esperado refere-se apenas aos valores positivos. Para uma distribuição normal padronizada este valor esperado é igual a 0.3989. Neste caso, $E(X_N^+) = 0.3989\sigma\sqrt{N}$.

Note-se que o tempo decorrido entre a definição das regras do *design* e a sua implementação não parece ter qualquer efeito no valor e incerteza do *design*, ou, pelo menos, tal não é considerado explicitamente pelo modelo.

4.2.2 O valor de divisão e substituição

As vantagens de um *design* modular estão sobretudo relacionadas com a sua maior flexibilidade e devem ser confrontadas com os custos que implica, associados à

¹O valor de um novo módulo é um valor relativo ao valor do módulo existente. O que se assume aqui é que o valor esperado do novo módulo é igual ao valor do módulo antigo.

definição das suas regras e à possibilidade do desempenho do novo *design* modular ser inferior ao do *design* interdependente existente.

A *divisão* e a *substituição* são os dois operadores principais de um *design* modular. Permitem criar uma carteira de opções, que deve ser avaliada para se encontrar a estratégia óptima, i.e. o número de módulos e de ensaios por módulo.

Uma carteira de opções tem maior valor do que uma opção sobre uma carteira (que corresponde a um sistema não modularizado), como foi demonstrado por Merton (1973a), desde que a distribuição agregada dos valores não seja alterada (tal como o modelo assume). Se os valores dos módulos não são perfeitamente correlacionados², a modularização faz aumentar o valor e maiores níveis de modularidade permitem ampliar este resultado. Este é também o caso quando a modularização altera a distribuição agregada para melhor³. Quando o contrário ocorre, o resultado final é desconhecido e pode ser um *design* com um valor inferior. No entanto, a decisão de dividir não deve ser adiada até que produza a mesma distribuição agregada. Alguma deterioração do valor agregado é compensada pelo valor das opções criadas pela modularidade.

O operador de substituição permite ao *designer* (ou ao utilizador) escolher o melhor de entre *designs* alternativos para o mesmo módulo, i.e. substituir o módulo actual pelo melhor desses. A substituição interage com a divisão: para cada módulo que é criado pela modularização, uma decisão deve ser tomada quanto ao número de ensaios paralelos que devem ser realizados.

No caso de módulo simétricos, o *valor líquido das opções de divisão e substituição* (NOV) de j módulos com k ensaios por módulo é dado por:

$$NOV(j, k) = S_0 + \sigma \sqrt{Nj} \mathcal{Q}(k) - c_j j - c_k k - T(j, k) \quad (4.3)$$

onde:

c_j = custo de definição das regras de *design* por módulo;

c_k = custo por ensaio;

$T(j, k)$ = custo de teste de j módulos com k ensaios por módulo;

$\mathcal{Q}(k)$ = valor da melhor de k ensaios⁴.

²O modelo assume que são independentes.

³Aumentando, por exemplo, o valor esperado.

⁴ $\mathcal{Q}(k)$ é o valor máximo de uma amostra de tamanho k . Para a distribuição normal padronizada é igual a:

$$\mathcal{Q}(k) = k \int_0^\infty z [N(z)]^{k-1} n(z) dz$$

onde $N(z)$ e $n(z)$ são, respectivamente, a distribuição cumulativa normal padronizada e a função densidade.

Tal como a equação sugere, os custos de definição das regras de *design* na primeira fase do processo, são proporcionais ao número de módulos e o custo de experimentação da segunda fase é proporcional ao número de ensaios. Dado que os módulos são simétricos, o número de ensaios por módulo é constante.

As opções de divisão e substituição são opções interdependentes, na medida em que a escolha do número óptimo de módulos, e de ensaios, não pode ser feita independentemente. A escolha de j e k é o resultado da maximização de NOV. A estrutura de custos do *design* pode conduzir a soluções diferentes para o problema de maximização, que não garantem a existência de um máximo global. Será o caso, por exemplo, se existir um custo fixo para *designs* com mais do que um módulo.

A evolução de um *design* é um processo contínuo de divisão e substituição. Após a primeira geração, o conhecimento das interdependências e da estrutura daquele aumenta e pode ser utilizado para iniciar um novo processo de divisão e substituição, permitindo a existência de uma segunda geração.

Os resultados anteriores pressupuseram que a modularização cria módulos simétricos com igual:

- número de tarefas (n);
- risco (σ);
- "visibilidade" para as outras partes do sistema.

Dado que o modelo permite a aditividade dos valores dos módulos, o valor do sistema pode ser expresso como a soma do valor líquido das opções de cada módulo:

$$V = S_0 + \sum_{i=1}^j NOV_i \quad (4.4)$$

Se for possível a existência de valores diferentes para estas características, o valor do sistema passa a ser:

$$V = S_0 + \sum_{i=1}^j \max_{k_i} [\sigma_i \sqrt{n_i} \mathcal{Q}(k_i) - C_i(n_i) k_i - Z_i] \quad (4.5)$$

onde:

$C_i(n_i)$ = Custos "próprios" do módulo i (custos de definição do *design*, experimentação e teste);

Z_i = custos de "visibilidade".

O número de módulos é obtido nesta fase, pela maximização da equação 4.5. Um análise desta expressão permite vislumbrar alguns dos factores que explicam o

4.2. O modelo de Baldwin e Clark (2000)

valor de um *design* modular. Ignorando os custos, os melhores módulos são aqueles com maior incerteza ou potencial, medidos por σ , com maior complexidade ou tamanho (n) e maior número de ensaios (k).

Os custos de experimentação e teste são divididos em custos "próprios" dos módulos e custos provocados noutros módulos. Quando um módulo tem regras de *design* "visíveis", que devem ser seguidas por outros módulos, o módulo tem custos de visibilidade (Z_i), que serão maiores quanto maior for a visibilidade (a qual pode ser medida pelo número de módulos afectados). Se o módulo for "oculto" não existem custos de visibilidade. Tal como anteriormente os custos "próprios" são uma função do tamanho do módulo e proporcionais ao número de ensaios.

Este modelo explica a existência de diferentes ritmos de investimento em módulos assimétricos. Os módulos ocultos são mais atractivos para o investimento do que os visíveis, o que facilita um maior ritmo de desenvolvimento de novas gerações. O número de ensaios dependerá dos custos de experimentação e de teste. Se se assumir que estes custos são proporcionais ao tamanho dos módulos, quanto menor for um módulo maior será o número de ensaios.

4.2.3 Limitações do modelo

O modelo de avaliação proposto por Baldwin e Clark (2000), tem como principal vantagem o facto de ser um modelo simples, o que é o resultado de uma escolha intencional de pressupostos que permitem a existência de soluções fechadas.

O pressuposto da independência dos valores dos módulos e da normalidade é uma escolha conveniente que permite que o valor de uma carteira de módulos seja simplesmente a soma dos valores individuais dos módulos. No entanto, o mais comum é a possibilidade de os módulos serem correlacionados entre si e com o sistema. O efeito de tais correlações não será negligenciável. Os próprios autores reconhecem que a possibilidade de os ensaios de um mesmo módulo serem correlacionados (e, portanto, não independentes) tem um efeito importante no número de ensaios que serão realizados (Baldwin e Clark, 2001).

A incerteza do valor dos módulos é, no modelo, independente do tempo. A duração de cada fase não é, por outro lado, considerada. Embora os autores admitam que o processo de *design* é uma sequência de exercícios de opções associadas a cada operador modular, o modelo parece sugerir que o exercício de tais opções se confina ao momento da avaliação. O número de módulos e ensaios por módulo são escolhidos, nesse momento, de forma a maximizar o NOV. Não é considerada, portanto, a natureza composta das diferentes opções. Tal possibilidade não é, contudo, ignorada pelos autores. Por exemplo, eles referem que a natureza composta e a recursividade do processo de *design* só pode ser avaliada com um modelo de

avaliação mais complexo.

4.3 Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade

O modelo de avaliação da modularidade proposto nesta tese considera apenas os operadores de divisão (secção 4.3.1) e de substituição (secção 4.3.2 (página 119)). A flexibilidade do método de avaliação permite, no entanto, sem dificuldades significativas, incorporar os outros operadores, mesmo aqueles que não foram objecto de avaliação no modelo de Baldwin e Clark (2000).

4.3.1 O valor criado pelo operador de divisão

O modelo aqui proposto é uma extensão do modelo de Baldwin e Clark (2000), por diversas vias:

- As opções associadas aos operadores modulares podem ser exercidas em diferentes momentos do tempo. A opção de divisão, a opção de desenvolvimento e a opção de implementação, criadas pela modularidade, podem ser adiadas. Isto significa que as opções são do tipo americano ou, pelo menos, bermudas.
- A configuração modular (número de módulos) e o número de ensaios por módulo são determinados endogenamente pelo modelo.
- O processo de desenvolvimento de um projecto (ou produto) modular é um processo sequencial.
- As variáveis subjacentes ao processo de modularização (os valores dos módulos e do sistema) não são independentes. A correlação entre as variáveis estocásticas é tratada explicitamente.

Tal como o modelo original, embora sem a tratar analiticamente, a concorrência desempenha um papel importante no processo de modularização. Tal como foi referido no capítulo 2, o facto de as opções serem partilhadas por concorrentes conduz, entre outros factores, a uma antecipação do investimento. No modelo aqui proposto, a concorrência não é tratada explicitamente embora, ao ser assumida uma taxa de fluxos de caixa perdidos, equivalente a uma taxa de dividendos, se possa dizer que a concorrência é implicitamente assumida, dado que tal pode resultar da entrada de novos concorrentes. Outras abordagens, mais explícitas e elaboradas⁵, podem ser, sem grandes dificuldades, incorporadas no modelo.

⁵Por exemplo, modelos que incorporam a possibilidade de existir um duopólio.

4.3. Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade

As opções têm, neste modelo, uma maturidade finita: o valor dos módulos/sistema pode ser totalmente eliminado pela entrada de concorrentes, ou pelo facto de o valor de mercado desaparecer depois de um determinado tempo.

Assume-se que o projecto de investimento modular, sob avaliação, tem as seguintes fases e opções⁶:

Fase 1 - Formulação do *design*: nesta fase a *opção de dividir* pode ser exercida. O número óptimo de módulos - incluindo a possibilidade de um sistema uni-modular - é o resultado desta fase. Os custos incorridos nesta fase dependem do número de módulos em que o sistema pode ser dividido. A opção de dividir pode ser adiada até ao início da fase seguinte.

Fase 2 - I&D: a *opção de desenvolvimento* (dos módulos) pode ser exercida com um determinado investimento. Esta fase requer um certo tempo após o qual o módulo está preparado para ser produzido e comercializado. A opção de desenvolvimento pode ser adiada até à maturidade do projecto, deduzida do tempo necessário para o desenvolvimento do módulo.

Fase 3 - Produção e comercialização: uma vez desenvolvido o módulo, a *opção de implementação* pode ser exercida, dando-se início à produção e lançamento do produto no mercado. Para simplificar, assume-se que a obtenção do valor do módulo é instantânea, i.e. ocorre logo que se exerce a opção.

Vamos assumir que o valor de um *design* interdependente (um sistema com um só módulo) é governado pelo seguinte processo estocástico geométrico Browniano:

$$dS(t) = (\mu - \delta) S(t) dt + \sigma S(t) dW \quad S(0) = S \quad (4.6)$$

onde $S(t) > 0$, μ e σ são, respectivamente, a medida de tendência e a volatilidade instantânea, δ a taxa de fluxos de caixa perdidos. Finalmente, dW representa um incremento de um processo de Wiener.

Pressupondo a existência de um mercado suficientemente completo, existe uma única medida neutral ao risco, sob a qual o processo estocástico é:

$$dS(t) = (r - \delta) S(t) dt + \sigma S(t) dW \quad S(0) = S \quad (4.7)$$

sendo r a taxa de juro isenta de risco.

⁶Modelos semelhantes de desenvolvimento faseado de produtos podem ser encontrados na literatura das opções reais (v.g.: Childs, Ott e Triantis, 1998).

O valor de cada módulo individual (i) evolui de acordo com um processo semelhante:

$$dM_i^{(m)}(t) = \left(\mu_i^{(m)} - \delta_i^{(m)} \right) M_i^{(m)}(t) dt + \sigma_i M_i^{(m)}(t) dW_i^{(m)} \quad M_i^{(m)}(0) = M_i^{(m)} \quad (4.8)$$

onde $M_i^{(m)}$ representa o valor do módulo i num sistema com m módulos, e $dW_i^{(m)}$ são incrementos de processos de Wiener.

Por conveniência de notação, a equação 4.6 pode ser expressa da seguinte forma:

$$dM_1^{(1)}(t) = \left(\mu_1^{(1)} - \delta_1^{(1)} \right) M_1^{(1)}(t) dt + \sigma M_1^{(1)}(t) dW_1^{(1)} \quad (4.9)$$

Estes processos (equação 4.8) são correlacionados: os valores dos módulos de cada configuração modular $\left(\mathbb{E} \left[dW_i^{(m)} dW_j^{(m)} \right] = \rho_{ij}^{(m)} dt \right)$; os valores dos módulos de diferentes configurações $\left(\mathbb{E} \left[dW_i^{(m)} dW_j^{(n)} \right] = \rho_{ij}^{(m)(n)} dt \right)$ e os valores dos módulos e do sistema $\left(\mathbb{E} \left[dW_i^{(m)} dW_1^{(1)} \right] = \rho_i^{(1)} dt \right)$.

Se um dado sistema pode apenas ser dividido em três módulos, teremos seis variáveis-estado:

$$\begin{aligned} dM_1^{(1)}(t) &= \left(\mu_1^{(1)} - \delta_1^{(1)} \right) M_1^{(1)}(t) dt + \sigma_1^{(1)} M_1^{(1)}(t) dW_1^{(1)} \\ dM_1^{(2)}(t) &= \left(\mu_1^{(2)} - \delta_1^{(2)} \right) M_1^{(2)}(t) dt + \sigma_1^{(2)} M_1^{(2)}(t) dW_1^{(2)} \\ dM_2^{(2)}(t) &= \left(\mu_2^{(2)} - \delta_2^{(2)} \right) M_2^{(2)}(t) dt + \sigma_2^{(2)} M_2^{(2)}(t) dW_2^{(2)} \\ dM_1^{(3)}(t) &= \left(\mu_1^{(3)} - \delta_1^{(3)} \right) M_1^{(3)}(t) dt + \sigma_1^{(3)} M_1^{(3)}(t) dW_1^{(3)} \\ dM_2^{(3)}(t) &= \left(\mu_2^{(3)} - \delta_2^{(3)} \right) M_2^{(3)}(t) dt + \sigma_2^{(3)} M_2^{(3)}(t) dW_2^{(3)} \\ dM_3^{(3)}(t) &= \left(\mu_3^{(3)} - \delta_3^{(3)} \right) M_3^{(3)}(t) dt + \sigma_3^{(3)} M_3^{(3)}(t) dW_3^{(3)} \end{aligned}$$

Para cada uma destas variáveis-estado é necessário estimar a variância e covariâncias com as outras variáveis. Quando o número máximo de módulos é de três, temos 6 variâncias e 15 covariâncias, que podem ter valores diferentes. Para permitir uma exemplificação mais intuitiva, assume-se os seguintes pressupostos:

- A variância dos módulos de uma mesma configuração é igual, i.e. $\sigma_i^{(m)} = \sigma_j^{(m)}$ e é um múltiplo da variância do sistema: $\sigma_i^{(m)} = \beta \sigma_1^{(1)}$;
- As correlações entre módulos da mesma configuração são iguais (ρ);
- As correlações entre módulos de diferentes configurações são iguais (ρ_m);
- As correlações entre os módulos e o sistema são iguais (ρ_s);

4.3. Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade

Com estes pressupostos reduzem a matriz de correlações passa a ser:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & M_1^{(1)} & M_1^{(2)} & M_2^{(2)} & M_1^{(3)} & M_2^{(3)} & M_3^{(3)} \\
 M_1^{(1)} & 1 & \rho_s & \rho_s & \rho_s & \rho_s & \rho_s \\
 M_1^{(2)} & \rho_s & 1 & \rho & \rho_m & \rho_m & \rho_m \\
 M_2^{(2)} & \rho_s & \rho & 1 & \rho_m & \rho_m & \rho_m \\
 M_1^{(3)} & \rho_s & \rho_m & \rho_m & 1 & \rho & \rho \\
 M_2^{(3)} & \rho_s & \rho_m & \rho_m & \rho & 1 & \rho \\
 M_3^{(3)} & \rho_s & \rho_m & \rho_m & \rho & \rho & 1
 \end{array}$$

O modelo só pode ser simulado se o número máximo de módulos (M) for definido *a priori*⁷.

O valor de um projecto modular com o operador de divisão, resulta de uma carteira de opções, que se apresentam de seguida, começando pelas opções de maior maturidade, e procedendo de forma retroactiva, até às de menor maturidade.

4.3.1.1 Opção de implementação

Começando pela maturidade do projecto (T), e retroactivamente, temos, para cada configuração (número de módulos escolhido nas fases anteriores), $m \leq M$ opções independentes de implementação, com um investimento de $K_i^{(m)}$ ⁸. Cada opção individual tem o seguinte *payoff*:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{I_i^{(m)}}(t, M_i^{(m)}(t)) &= \max \left[M_i^{(m)}(t) - K_i^{(m)}; 0 \right] \\
 & \quad i = 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, M
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

e o seguinte valor:

$$F_{I_i^{(m)}}(t, M_i^{(m)}(t)) \quad i = 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, M \tag{4.11}$$

Para cada opção, o valor e momento óptimo de paragem, são calculados independentemente, utilizando o método LSM. Dado que o módulo deve ter sido desenvolvido na fase anterior, que requer um tempo t_d , e que após T a oportunidade de investimento deixa de estar disponível, então a opção não tem valor para $t > T$ e $t < t_d$ ($\Pi_{I_i^{(m)}}(t, M_i^{(m)}(t)) = 0$).

⁷O número de activos (n) depende do número máximo de módulos em que o sistema pode ser dividido: $n = \frac{M(M-1)}{2}$.

⁸A tabela 4.2 (página 105) apresenta os parâmetros do caso-base, onde se pode ver uma descrição das diferentes variáveis.

4.3.1.2 Opção de desenvolvimento

A opção de desenvolvimento (de iniciar a fase de I&D), é uma opção composta, dado que dá o direito a exercer, em momento posterior, a opção de implementação. Temos, uma vez mais, para cada configuração, $m \leq M$ opções independentes de desenvolvimento, com um custo de investimento de $D_i^{(m)}$. Cada opção individual tem o seguinte *payoff*:

$$\Pi_{D_i^{(m)}} \left(t, M_i^{(m)}(t) \right) = \max \left[F_{I_i^{(m)}} \left(t, M_i^{(m)}(t) \right) - D_i^{(m)}; 0 \right] \quad (4.12)$$

$$i = 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, M$$

e a seguinte equação de Bellman:

$$F_{D_i^{(m)}} \left(t_n, M_i^{(m)}(t_n) \right) = \max \left\{ \Pi_{D_i^{(m)}} \left(t_n, M_i^{(m)}(t_n) \right), \right. \\ \left. e^{-r(t_{n+1}-t_n)} \mathbb{E}_{t_n}^* \left[F_{D_i^{(m)}} \left(t_{n+1}, M_i^{(m)}(t_{n+1}) \right) \right] \right\} \\ i = 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, M \quad (4.13)$$

A regra de decisão seguinte é utilizada para obter o momento óptimo de paragem ($\tau_{D_i^{(m)}}$), para esta opção, no momento t_n e para o caminho ω :

$$\text{se: } \Phi_{D_i^{(m)}} \left(t_n, M_i^{(m)}(t_n) (\omega) \right) \leq \Pi_{D_i^{(m)}} \left(t_n, M_i^{(m)}(t_n) (\omega) \right) \\ \text{então: } \tau_{D_i^{(m)}} (\omega) = t_n \quad (4.14)$$

$$i = 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, M$$

O valor de continuação, $\Phi_{D_i^{(m)}}$ é obtido utilizando o método LSM:

$$\Phi_{D_i^{(m)}} \left(t_n, M_i^{(m)}(t_n) (\omega) \right) = \mathbb{E}_{t_n}^* \left[\sum_{i=n+1}^N e^{-r(t_i-t_n)} \Pi_{D_i^{(m)}} \left(t_n, t_i, \tau, \cdot \right) \right] \quad (4.15)$$

$$i = 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, M$$

$\Phi_{D_i^{(m)}}$ é aproximado por $\Phi_{D_i^{(m)}}^J$ que pode ser estimado por uma regressão dos mínimos quadrados. O valor da opção de implementação no momento t_n foi já calculado:

$$F_{I_i^{(m)}} \left(t_n, M_i^{(m)}(t_n) \right) = \max \left[\Pi_{I_i^{(m)}} \left(t_n, M_i^{(m)}(t_n) \right), \right. \\ \left. \Phi_{I_i^{(m)}} \left(t_n, M_i^{(m)}(t_n) (\omega) \right) \right] \quad (4.16)$$

4.3. Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade

No entanto, esta expressão é apenas válida se a fase de I&D fosse instantânea. Como a fase de I&D tem uma duração de t_d , o valor da opção de implementação tem que ser estimado (por uma regressão), utilizando o valor actual da opção como variável dependente $\left(e^{-rt_d} F_{I_i^{(m)}}(t_n + t_d, M_i^{(m)}(t_n + t_d)(\omega)) \right)$ e funções-base das variáveis-estado no momento t_n como variáveis independentes.

4.3.1.3 Opção de dividir

A opção de dividir (ou opção de modularizar) é uma opção mutuamente exclusiva: uma vez exercida a opção de dividir um sistema em m módulos, as outras configurações alternativas deixam de estar disponíveis. A variável de controlo é agora uma variável dupla (τ, ζ) , onde τ é o momento de paragem $\in \mathcal{T}(t, T - t_d)$ e $\zeta \in \{1, 2, \dots, M\}$ o número óptimo de módulos.

Tal como propusemos no capítulo anterior, o algoritmo proposto por Gamba (2003) para avaliar este tipo de opções, poderia ser melhorado, não sendo necessário calcular o momento óptimo de paragem da opção de desenvolvimento, se se estivesse a avaliar a melhor de opções individuais. Esta melhoria traduz-se num algoritmo mais rápido, com uma convergência também mais rápida, e uma escolha correcta da melhor alternativa. O algoritmo proposto por Gamba (2003), pode ter como resultado uma escolha incorrecta da melhor alternativa, na região *out-the-money*, onde o valor de continuação estimado deveria ser nulo, mas a regressão pode produzir uma estimativa ligeiramente positiva. Isto significa que o algoritmo assume a escolha de uma opção, quando a escolha correcta seria outra opção ou mesmo nenhuma opção.

No entanto, no modelo aqui proposto, a melhor configuração modular corresponde à escolha entre uma opção individual de desenvolvimento do sistema e uma carteira de opções independentes de desenvolvimento dos módulos de cada configuração. Após a modularização não é necessário desenvolver, em simultâneo, todos os módulos da configuração (caso em que se poderia usar a alternativa proposta), mas pelo menos um dos módulos tem que ver iniciado o seu desenvolvimento. Caso contrário, seria óptimo adiar a divisão.

A divisão requer a definição das regras do *design*, que permitem a partição da estrutura de tarefas do sistema e a definição das interfaces entre os módulos. Implica, portanto, que o valor de cada configuração modular - a soma de m opções compostas independentes - deva ser confrontado com os custos necessários à definição das regras de *design*. O *payoff* da configuração com m módulos é dado

por:

$$\Pi_{C^{(m)}} \left(t, M_i^{(m)}(t) \right) = \max \left[\sum_{i=1}^m F_{D_i^{(m)}} \left(t, M_i^{(m)}(t) \right) - R^{(m)}, 0 \right] \quad (4.17)$$

$$i = 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, M$$

O custo das regras do *design* é nulo quando o sistema é escolhido ($R^{(1)} = 0$). No caso da opção de desenvolvimento do sistema, o cálculo do momento óptimo de paragem pode ser dispensado, substituindo $F_{D_1^{(1)}}$ pelo *payoff* da opção de desenvolvimento, dado que, se for escolhido o sistema, ele será imediatamente desenvolvido:

$$\Pi_{C^{(1)}} \left(t, M_1^{(1)}(t) \right) = F_{D_1^{(1)}} = \Pi_{D_1^{(1)}} \left(t, M_1^{(1)}(t) \right) \quad (4.18)$$

O valor da opção de escolha, da melhor configuração modular, é dado por:

$$F_S \left(t, M_i^{(m)}(t) \right) = \max_{(\tau, \zeta)} \left\{ e^{-r(\tau-t)} \mathbb{E}_t^* \left[F_{C^{(\zeta)}} \left(\tau, M_i^{(\zeta)}(\tau) \right) \right] \right\} \quad (4.19)$$

$$i = 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, M$$

A equação de Bellman para esta opção é:

$$F_S \left(t_n, M_i^{(m)}(t_n) \right) = \max \left\{ F_{C^{(1)}} \left(t_n, M_1^{(1)}(t_n) \right), \dots, F_{C^{(M)}} \left(t_n, M_i^{(M)}(t_n) \right), \right. \\ \left. e^{-r(t_{n+1}-t_n)} \mathbb{E}_{t_n}^* \left[F_S \left(t_{n+1}, M_i^{(m)}(t_{n+1}) \right) \right] \right\} \\ i = 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, M \quad (4.20)$$

A seguinte regra de decisão deve ser utilizada para obter o controlo óptimo (τ, ζ) no momento t_n , para o caminho ω :

$$\text{se: } \Phi_S \left(t_n, M_i^{(m)}(t_n)(\omega) \right) \leq \max_m \left\{ F_{C^{(m)}} \left(t_n, M_i^{(m)}(t_n)(\omega) \right) \right\} \quad (4.21)$$

$$\text{então: } (\tau, \zeta)(\omega) = (t_n, \bar{m})$$

onde:

$$\bar{m} = \arg \max_m \left\{ \Pi_{C^{(m)}} \left(t_n, M_i^{(m)}(t_n)(\omega) \right) \right\}$$

Para evitar uma escolha incorrecta da melhor configuração modular, a configuração óptima (\bar{m}) só deve ser actualizada se, pelo menos, uma das opções de desenvolvimento (da carteira m), for exercida, i.e. o seu valor de exercício dado pela equação 4.14 (página 101) for superior ao seu valor de continuação.

4.3. Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade

O valor de continuação é obtido utilizando o método LSM:

$$\Phi_S \left(t_n, M_i^{(m)}(t_n) \right) = \mathbb{E}_{t_n}^* \left[\sum_{i=n+1}^N e^{-r(t_i-t_n)} \Pi_S(t_n, t_i, \tau, \zeta, \cdot) \right]$$

com:

$$\Pi_S(t_n, s, \tau, \zeta, \cdot) = \begin{cases} F_{C_m} \left(t, M_i^{(m)}(s)(\omega) \right) & \text{se } s = \tau(\omega) \text{ e } m = \zeta(\omega) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O valor de continuação (Φ_S) é estimado por uma regressão de mínimos quadrados e depende de todos os activos (sistema e módulos de cada configuração), que devem ser utilizados como funções-base na regressão.

Quando a opção de dividir pode ser adiada, estamos a assumir que a opção de adiar as fases de implementação e de I&D estão também disponíveis. O valor da opção de adiar a divisão corresponde à diferença entre a opção de adiar o desenvolvimento, quando a opção de dividir está disponível, e o valor da opção de adiar o desenvolvimento de um sistema interdependente. A modularidade permite, portanto, um aumento de valor correspondente a esta diferença.

4.3.1.4 Resultados numéricos

A implementação do modelo, aqui proposto, implica algumas escolhas quanto ao método de simulação. As sequências de baixa discrepância (métodos quasi-Monte Carlo) produzem resultados mais precisos com um menor número de iterações. Com efeito, de acordo com a análise do capítulo anterior, a escolha do gerador das sequências recaiu sobre as sequências de Sobol, com a inicialização de Silva e Barbe (2003), por serem mais eficientes em problemas de maior dimensão. Dado que o objectivo principal da análise de sensibilidade é apenas comparar os diferentes valores das opções, não existe uma preocupação por encontrar o valor mais preciso de cada opção. Se fosse esse o objectivo, deveriam ser comparadas as diferentes sequências de baixa discrepância.

O valor obtido pelo método LSM, converge para o valor correcto de uma opção americana, aumentando o número de funções-base, o número de iterações e o número de oportunidades de exercício. Uma vez que o esforço computacional aumenta significativamente, com qualquer destes parâmetros, escolhemos avaliar opções bermudas, que podem ser exercidas, no exemplo proposto, dez vezes por ano. Como funções-base, utilizam-se polinómios Laguerre ponderados, uma vez mais de acordo com a análise efectuada no capítulo anterior. No caso da opção de implementação, dado ser contingente apenas numa variável (o valor do sis-

4.3. Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade

tema/módulo) é utilizada uma constante e polinómios até ao quinto grau⁹. Para a opção de dividir, que depende dos valores de todos os activos (no exemplo que se segue, seis, no caso-base) é utilizada uma constante, polinómios Laguerre ponderados até ao terceiro grau para cada um dos activos e pares de produtos cruzados dos activos (o que significa 40 factores no caso-base).

Os parâmetros para o caso-base são apresentados na tabela 4.2.

Tabela 4.2: Parâmetros do caso-base

Símbolo	Valor	Descrição
M	3	Número máximo de módulos
$M_1^{(1)}$	100	Valor actual do sistema
$M_i^{(m)}$	$\frac{M_1^{(1)}}{m}$	Valor actual do módulo i quando o sistema é dividido em m módulos, com $i = 1, \dots, m; \quad m = 2, \dots, M$
$K_1^{(1)}$	75	Custo de implementação do sistema
$D_1^{(1)}$	25	Custo de desenvolvimento do sistema
$D_i^{(m)}$	$\gamma \frac{D_1^{(1)}}{m}$	Custo de desenvolvimento do módulo i , quando o sistema é dividido em m módulos, com: $i = 1, \dots, m; \quad m = 2, \dots, M$
$K_i^{(m)}$	$\gamma \frac{K_1^{(1)}}{m}$	Custo de implementação do módulo i , quando o sistema é dividido em m módulos, com: $i = 1, \dots, m; \quad m = 2, \dots, M$
γ	1.2	Multiplicador dos custos
R	5	Custo de definição das regras do <i>design</i> por módulo
$R^{(m)}$	$\gamma \times R \times m$	Custo de definição quando o sistema é dividido em m módulos, com: $m = 2, \dots, M$
$\sigma_1^{(1)}$	0.3	Desvio padrão (risco) das rendibilidades do sistema
$\sigma_i^{(m)}$	$\beta \sigma_1^{(1)}$	Desvio padrão (risco) das rendibilidades do módulo i , com: $i = 1, \dots, m; \quad m = 2, \dots, M$
β	1.0	Multiplicador do risco
ρ	0.5	Correlação entre as rendibilidades dos módulos da mesma configuração
ρ_m	0.5	Correlação entre as rendibilidades dos módulos de configurações diferentes
ρ_s	0.5	Correlação entre as rendibilidades do sistema e dos módulos
T	5	Horizonte temporal do projecto (anos)
t_d	1	Duração da fase de I&D (anos)
r	0.05	Taxa isenta de risco

continua na página seguinte

⁹Como referimos no capítulo anterior, as análises de outros autores sugerem que a utilização de mais do que 5 termos dos polinómios não produz resultados significativamente mais precisos.

4.3. Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade

continuação da página anterior

Símbolo	Valor	Descrição
$\delta_i^{(m)}$	0.1	Taxa de fluxos de caixa perdidos $i = 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, M$

A tabela 4.3, apresenta alguns resultados numéricos para o valor do projecto modular, comparando este para o caso das opções serem de tipo europeu ou bermudas. Como esperado, podemos verificar que o prémio, pela possibilidade de exercício antecipado, das opções é pouco significativo quando o projecto está *out-the-money* (valores mais baixos do sistema e dos módulos) e quando os fluxos de caixa perdidos são reduzidos. Todas as opções descritas anteriormente, são "opções de compra" que não têm um prémio de exercício antecipado quando a taxa de dividendos (neste caso, taxa de fluxos de caixa perdidos) é nula. Se o projecto puder ser adiado, sem qualquer perda de fluxos de caixa, então será apenas óptimo investir no último momento disponível (matutidade).

Tabela 4.3: Valor de um projecto modular

S	δ	T	σ	ρ	Opções europeias	Opções bermudas	Prob. não investir	Prob. sistema	Prob. modular
90	0.05	5.0	0.20	0.25	6.024	6.377	0.69	0.15	0.16
90	0.05	5.0	0.20	0.75	6.981	7.436	0.69	0.15	0.16
90	0.05	5.0	0.30	0.25	15.375	16.734	0.55	0.18	0.27
90	0.05	5.0	0.30	0.75	17.427	19.087	0.57	0.18	0.24
90	0.10	5.0	0.20	0.25	1.554	2.082	0.88	0.07	0.05
90	0.10	5.0	0.20	0.75	1.808	2.481	0.88	0.07	0.05
90	0.10	5.0	0.30	0.25	6.716	8.711	0.72	0.12	0.15
90	0.10	5.0	0.30	0.75	7.611	9.970	0.74	0.13	0.14
100	0.05	5.0	0.20	0.25	9.771	10.266	0.56	0.21	0.23
100	0.05	5.0	0.20	0.75	11.296	11.922	0.57	0.21	0.22
100	0.05	5.0	0.30	0.25	20.872	22.517	0.47	0.22	0.31
100	0.05	5.0	0.30	0.75	23.662	25.609	0.49	0.22	0.29
100	0.10	5.0	0.20	0.25	2.859	3.844	0.80	0.11	0.09
100	0.10	5.0	0.20	0.75	3.325	4.520	0.80	0.11	0.09
100	0.10	5.0	0.30	0.25	9.701	12.360	0.64	0.16	0.19
100	0.10	5.0	0.30	0.75	10.993	14.127	0.66	0.16	0.18
110	0.05	5.0	0.20	0.25	14.506	15.123	0.44	0.27	0.29
110	0.05	5.0	0.20	0.75	16.716	17.522	0.46	0.26	0.28
110	0.05	5.0	0.30	0.25	26.997	28.924	0.39	0.26	0.35
110	0.05	5.0	0.30	0.75	30.596	32.949	0.42	0.26	0.33
110	0.10	5.0	0.20	0.25	4.722	6.318	0.70	0.17	0.13
110	0.10	5.0	0.20	0.75	5.479	7.401	0.70	0.17	0.13
110	0.10	5.0	0.30	0.25	13.214	16.723	0.57	0.21	0.23
110	0.10	5.0	0.30	0.75	14.975	19.087	0.58	0.21	0.21

A taxa isenta de risco é 5%, o custo de desenvolvimento do sistema 25 e o custo da regras de *design* por módulo de 5. Os multiplicadores da volatilidade e dos custos são de 1 e 1.2 respectivamente. O valor actual do sistema s , a sua volatilidade σ , o coeficiente de correlação entre os módulos da mesma configuração ρ , a taxa de fluxos de caixa perdidos δ e o tempo para a maturidade T são os indicados na tabela. A simulação foi realizada com 50000 caminhos. A rotina de geração de número aleatórios, MRG31k3p de L'Ecuyer e Touzin (2000), foi reinicializada para cada opção com a "semente" 12345 e foram utilizadas variáveis normais de Moro (1995). A regressão foi realizada com a rotina SVDFIT e polinómios Laguerre ponderados.

O número elevado de variáveis, que determinam o valor do projecto e as estratégias óptimas, permitem uma análise de sensibilidade bastante detalhada, quer

ao nível das variáveis explicativas, quer ao nível dos resultados obtidos. É possível analisar, por exemplo, o acréscimo de valor induzido pela possibilidade das opções serem exercidas ao longo do tempo e não apenas na maturidade (opções bermudas vs opções europeias) e as probabilidades de cada estratégia de modularização, i.e. a probabilidade de ocorrência de uma determinada configuração. Note-se que, todas as probabilidades apresentadas, são probabilidades neutrais ao risco. Por motivos de espaço e facilidade de leitura, optou-se por apresentar apenas alguns dos resultados mais significativos, sendo possível encontrar no apêndice 4.A (página 130) resultados mais detalhados.

Conforme se pode ver na figura 4.1 (página seguinte), quanto maior o valor do sistema (e dos módulos, uma vez que assumimos uma relação linear) maior o valor do projecto modular e maior o prémio de exercício antecipado (figura 4.1(a)¹⁰). À medida que o projecto vai ficando mais *in-the-money*, i.e. o valor dos activos excede significativamente os custos do investimento, há uma maior probabilidade de investimento, quer no sistema interdependente quer nas configurações modulares: nalguns casos, em que seria óptimo não investir se a opção de dividir não estiver disponível, é agora óptimo investir numa configuração modular ou no sistema interdependente (figura 4.1(b)). Dado que se assume que os custos das configurações modulares são superiores (multiplicador de custos igual a 1.2, no exemplo), verifica-se que o investimento no sistema interdependente aumenta mais do que o investimento nas configurações modulares.

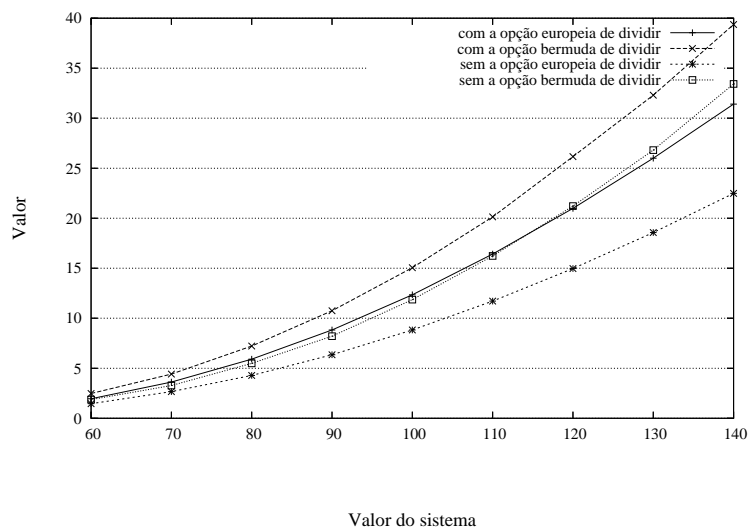
A figura 4.2 (página 109) evidencia o impacto do multiplicador dos custos. À medida que os custos de investimento, de I&D e de definição das regras de *design* aumentam, o valor de um projecto modular converge para o valor de um projecto não modular (figura 4.2(a)). O custo de investimento num projecto modular pode ser, mesmo, mais do dobro do custo de investimento no sistema, sem que tal elimine totalmente o acréscimo de valor do projecto modular. Outras variáveis afectam esta possibilidade de aumentar os custos com a modularização, nomeadamente a relação entre o risco dos módulos e o risco do sistema (conforme se pode verificar na figura 4.4 (página 111)).

Por outro lado, e ainda de acordo com a mesma figura, uma pequena redução dos custos, necessários à modularização (embora possa ser uma situação pouco comum), aumenta significativamente a probabilidade de escolha de um projecto modular (figura 4.2(b)). Pelo contrário, os custos da modularização devem aumentar significativamente para eliminar qualquer probabilidade de escolha de um projecto modular.

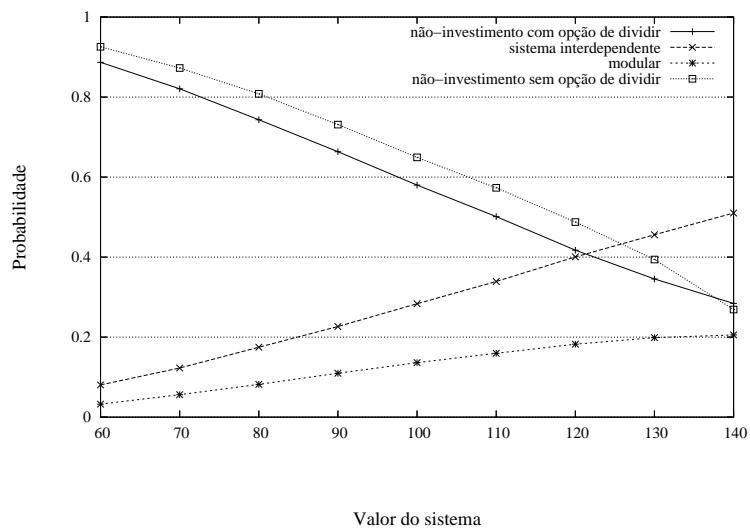
¹⁰Nos gráficos que se seguem omitir-se-ão os valores relativos às opções europeias que estão, no entanto, presentes nos apêndices deste capítulo, neste caso, no apêndice 4.A (página 130).

4.3. Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade

Figura 4.1: Valor de um projecto modular com o operador de divisão - o efeito do valor do sistema/módulos



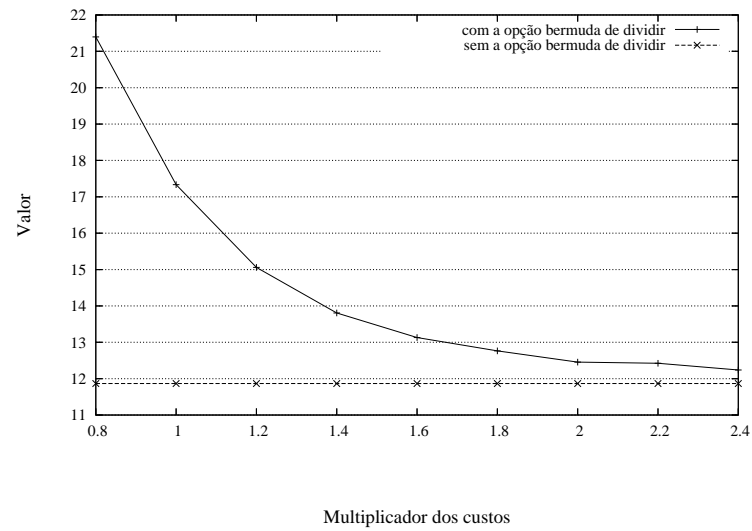
(a) Valor de um projecto modular



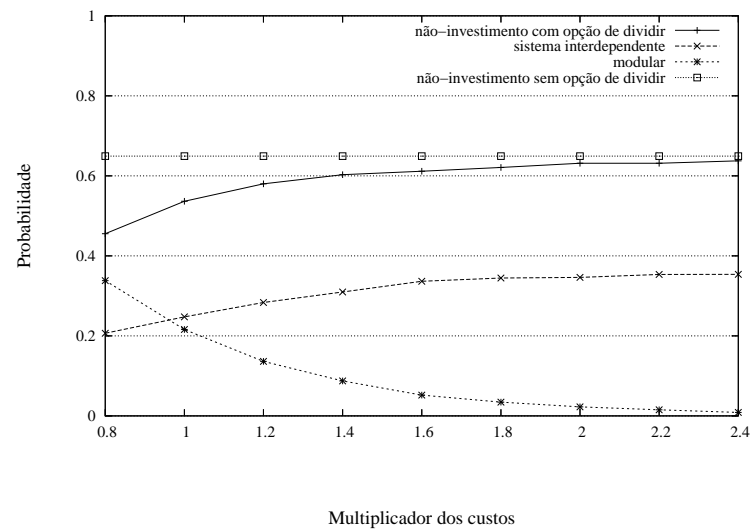
(b) Probabilidades associadas a cada estratégia

4.3. Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade

Figura 4.2: Valor de um projecto modular com o operador de divisão - o efeito do multiplicador dos custos



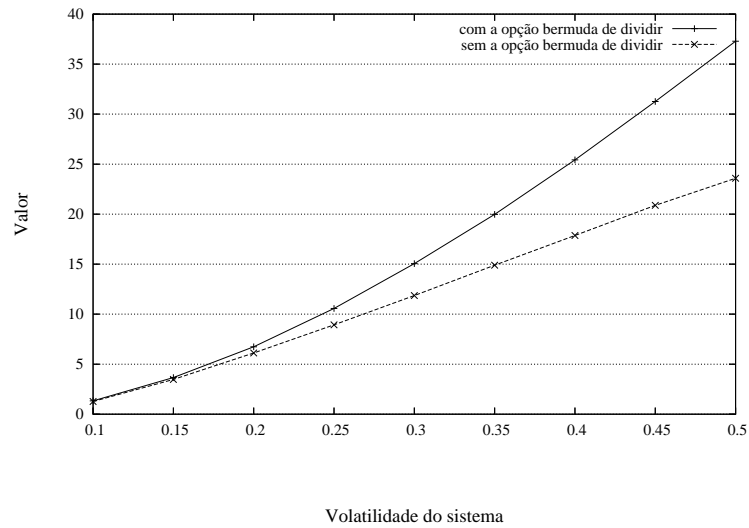
(a) Valor de um projecto modular



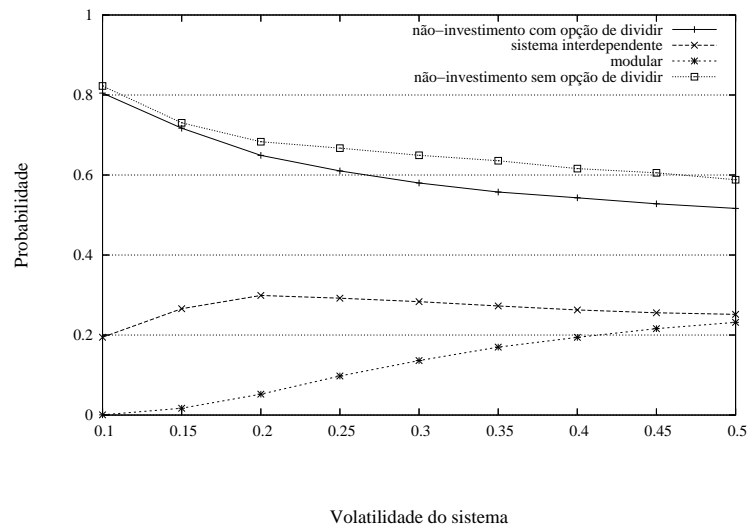
(b) Probabilidades associadas a cada estratégia

4.3. Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade

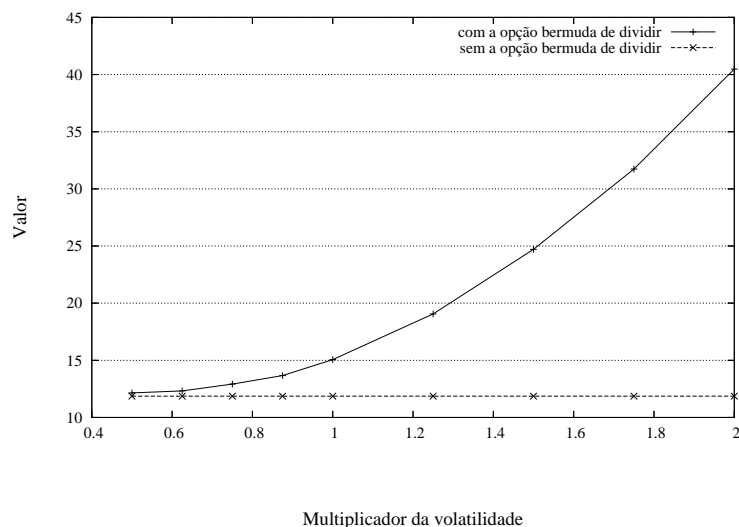
Figura 4.3: Valor de um projecto modular com o operador de divisão - o efeito da volatilidade do sistema



(a) Valor de um projecto modular



(b) Probabilidades associadas a cada estratégia

Figura 4.4: Valor de um projecto modular vs Multiplicador da volatilidade

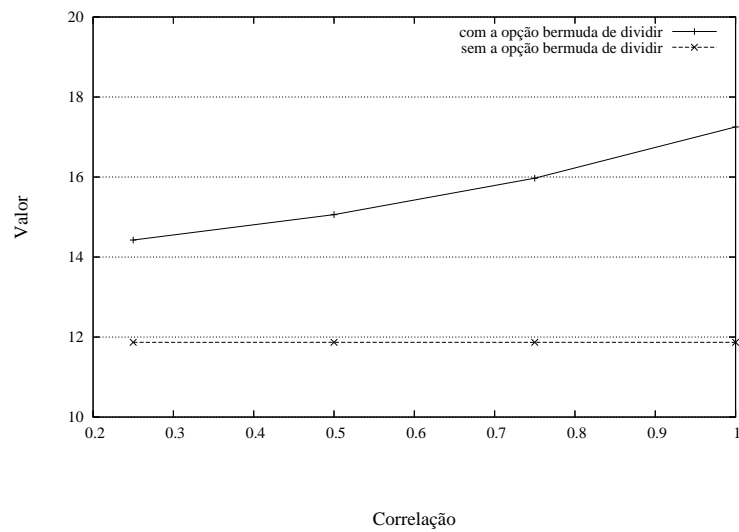
Como se pode constatar na figura 4.3 (página anterior), a opção de adiar o investimento (como qualquer opção), perde totalmente o seu valor se a incerteza desaparecer (figura 4.3(a)). À medida que a incerteza aumenta, a probabilidade de escolher um projecto modular aumenta também (figura 4.3(b)). Embora a carteira dos módulos tenha, para os parâmetros escolhidos, uma volatilidade inferior à do sistema, para correlações inferiores a um, um maior risco implica um maior investimento numa configuração modular, não apenas devido à maior probabilidade de investimento mas também ao facto de ser preferível investir numa configuração modular em vez de investir num sistema interdependente. Mesmo no caso em que a incerteza de cada módulo é menor que a incerteza do sistema, existe ainda um incentivo à modularização a menos que ela seja significativamente inferior (figura 4.4).

As correlações têm também algum impacto na estratégia óptima de modularização (figura 4.5 (página seguinte)¹¹). Em primeiro lugar, uma maior correlação entre os módulos da mesma configuração parece fazer aumentar o valor de um projecto modular (figura 4.5(a)). Este resultado parece ser contraditório com o sugerido pelo modelo de Baldwin e Clark (2000). Quando o valor agregado do sistema permanece inalterado com a modularização, tal como no modelo dos autores anteriormente referidos, os benefícios da modularidade aumentam com a redução da correlação entre os módulos. Tal não é o caso no nosso modelo. No entanto, se se assumir que a volatilidade da carteira dos módulos de uma configuração é

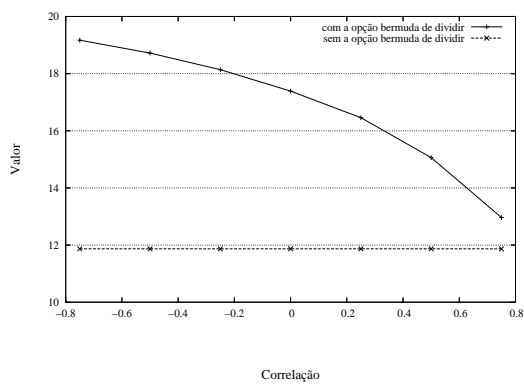
¹¹Os gráficos da figura 4.5 (e das demais figuras relativas às correlações) apresenta o valor de 1 no eixo horizontal, embora, na verdade, o valor seja de 0.99. Um valor de 1 para a correlação impossibilita a decomposição de Cholesky necessária para gerar os caminhos correlacionados.

4.3. Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade

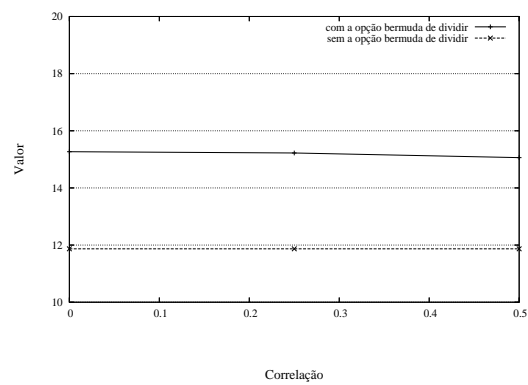
Figura 4.5: Valor de um projecto modular com o operador de divisão - o efeito das correlações



(a) Correlação entre os módulos da mesma configuração

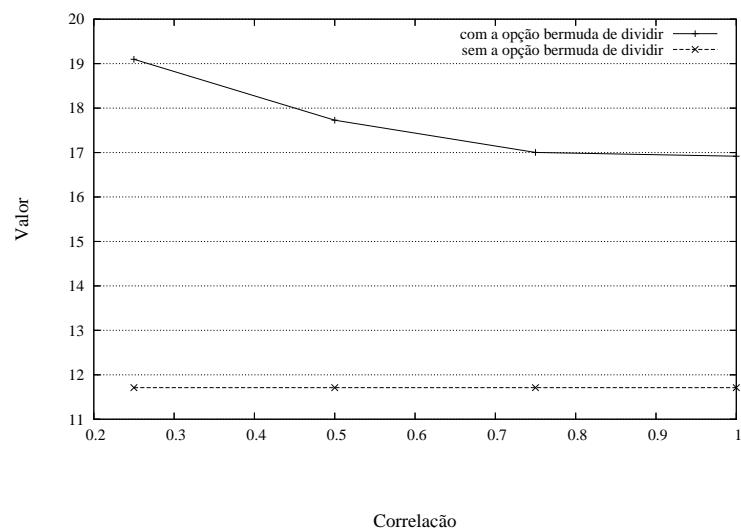


(b) Correlação entre os módulos e o sistema



(c) Correlação entre módulos de diferentes configurações

Figura 4.6: Valor de um projecto modular vs Correlação entre os módulos da mesma configuração - Igual volatilidade das carteiras de módulos



igual à do sistema, é possível observar uma relação semelhante (figura 4.6). Neste caso, uma menor correlação implica que, devido ao efeito da diversificação, cada módulo tenha uma maior volatilidade. Acrescente-se que, como veremos adiante na secção 4.3.1.6 (página 115), se for apenas considerado o valor líquido da divisão, a relação sugerida no modelo de Baldwin e Clark (2000) verifica-se no nosso modelo.

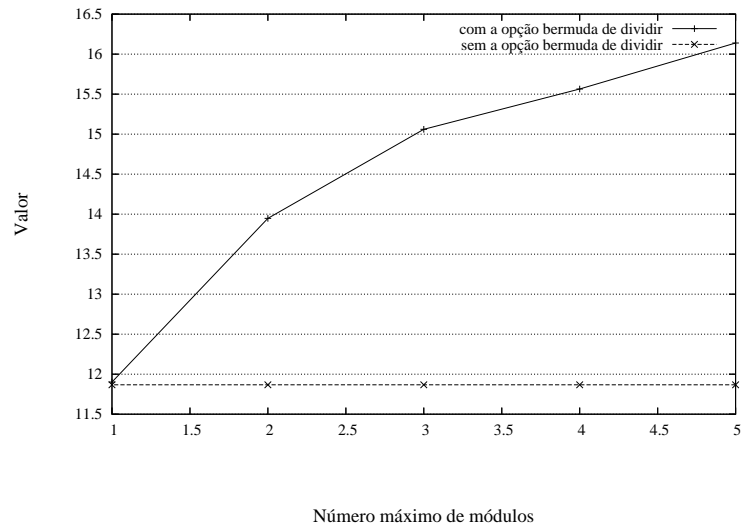
Note-se que, mesmo no caso em que a correlação entre os módulos de uma mesma configuração é perfeita, o projecto modular tem ainda um valor superior ao projecto não modular (figura 4.6). São necessárias condições adicionais para que não haja qualquer incentivo para modularizar como veremos na secção seguinte.

As correlações entre módulos de diferentes configurações têm um impacto reduzido no valor do projecto (figura 4.5(c)), enquanto que uma maior correlação entre os módulos e o sistema reduz o valor de um projecto modular (figura 4.5(b)). Quanto maior for esta correlação, mais semelhantes serão a configuração modular e o sistema interdependente, pelo que se reduz o valor da modularidade.

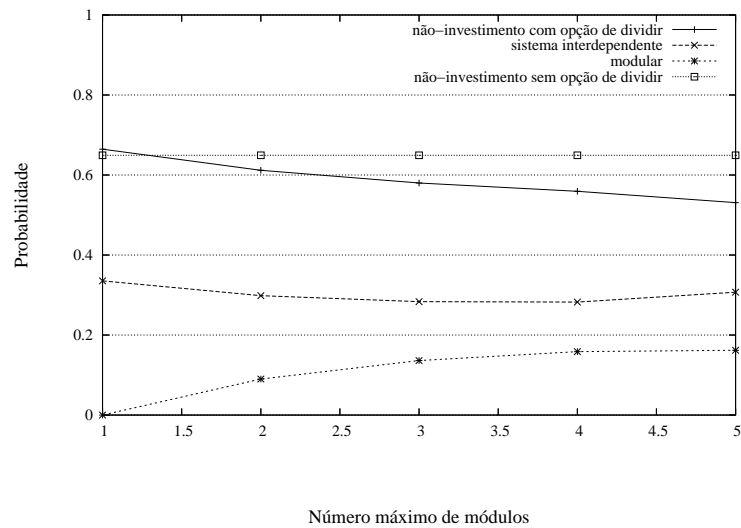
Embora existam situações em que a modularidade não acrescenta valor (por exemplo, maiores custos relativos de investimento, menores valores relativos dos activos ou activos perfeitamente correlacionados), normalmente a possibilidade de maiores graus de modularidade proporciona um maior valor do projecto (figura 4.7 (página seguinte)). Para os parâmetros do caso-base, em que se assume que os custos da modularização aumentam linearmente com o número de módulos, tal ocorre a um ritmo decrescente (figura 4.7(a)). Verifica-se ainda que, com a possibilidade de escolha de uma maior grau de modularidade, a probabilidade de

4.3. Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade

Figura 4.7: Valor de um projecto modular com o operador de divisão - o efeito do número máximo de módulos



(a) Valor de um projecto modular



(b) Probabilidades associadas a cada estratégia

investimento aumenta, precisamente porque aumenta a probabilidade de investimento nas configurações modulares (figura 4.7(b)).

4.3.1.5 O caso particular dos módulos perfeitamente correlacionados

No caso extremo em que todas as volatilidades (dos módulos e do sistema) são iguais e em que todos os activos (sistema e módulos de todas as configurações possíveis) são perfeitamente correlacionados, o incentivo para a escolha de uma configuração modular desaparece (figura 4.8 (página seguinte)), a menos que exista uma "vantagem de dimensão", i.e. valores relativos maiores ou custos relativos menores dos módulos induzam algum incentivo à modularização (figura 4.8(b)).

4.3.1.6 O valor líquido de dividir

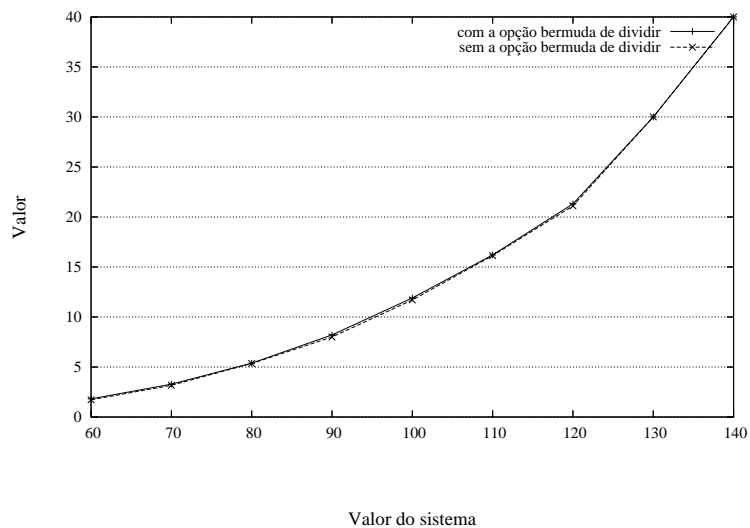
Quando se analisa, com maior detalhe, os factores que proporcionam ao projecto modular um maior valor do que ao projecto não modular, é possível verificar que um dos factores principais não reside propriamente na natureza modular do produto. Um dos factores principais da vantagem de um projecto modular, reside na possibilidade de abandonar os módulos que revelem ter um valor inferior ao custo de investimento, não se exercendo a opção de implementação ou mesmo de desenvolvimento desses módulos. Pelo contrário, num sistema interdependente só é possível exercer uma opção: a de investir na totalidade do produto. O verdadeiro valor da modularidade reside, portanto, nesta diferença: a que existe entre o valor da carteira das opções subjacente à estrutura modular e a do valor da opção única subjacente à estrutura não modular.

No modelo aqui proposto, e nos resultados até agora apresentados, o valor do projecto modular, com o operador de divisão, tem uma componente adicional. Numa estrutura modular, o desenvolvimento e implementação de todos os módulos de uma configuração, pode ser necessário para que o produto tenha valor, i.e. um módulo só terá valor se todos os restantes forem implementados. Se o valor agregado dos módulos for diferente do valor do sistema, ou sendo iguais não forem perfeitamente correlacionados, existe uma fonte de valor associada à escolha do melhor de dois produtos: um produto não modular e um produto que, embora modular, só tem valor como um todo. Esta situação é semelhante à possibilidade de se escolher entre a melhor de duas alternativas para o mesmo produto não modular¹². Neste contexto, este tipo de projecto poder-se-á designar por "quasi-modular". Esta fonte de valor não advirá, portanto, da natureza modular do projecto, não devendo ser atribuída à modularidade.

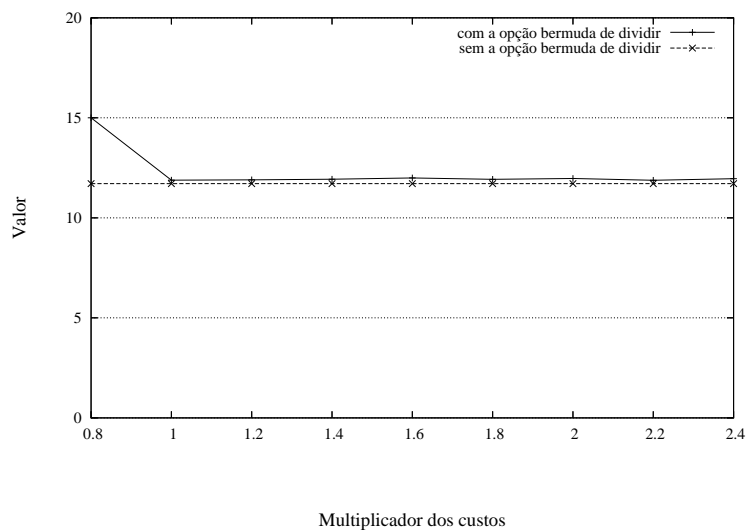
¹²O modelo de Childs, Ott e Triantis (1998) permite avaliar este tipo de problemas, comparando o desenvolvimento paralelo e sequencial de projectos correlacionados.

4.3. Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade

Figura 4.8: Valor de um projecto modular com o operador de divisão - activos perfeitamente correlacionados



(a) Valor do sistema/módulos

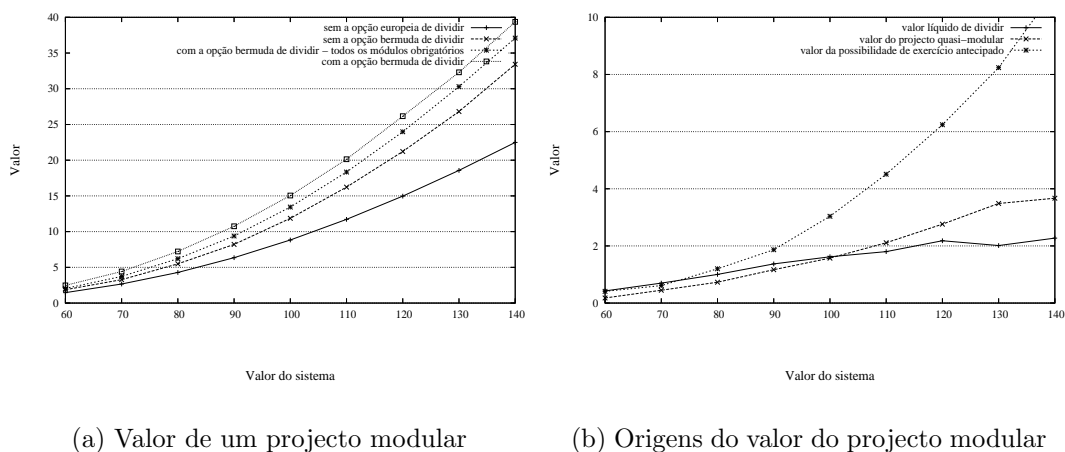


(b) Multiplicador dos custos

Será então possível calcular o valor líquido da modularidade (da opção de dividir) subtraindo ao valor de um projecto modular o valor do mesmo projecto em que a implementação de todos módulos de uma configuração é obrigatória.

As figuras 4.9, 4.10 (página seguinte) e 4.11 (página seguinte)¹³ permitem verificar que a fonte mais importante de valor de um projecto modular reside, por vezes, precisamente na opção de escolha entre um projecto modular e uma alternativa quasi-modular. No entanto, é possível verificar que uma maior *moneyness*, seja pela via do valor dos activos (figura 4.9) seja pela via do multiplicador dos custos (figura 4.10) contribui para o aumento do valor da modularidade. Interessante é ainda constatar que, mesmo com os pressupostos assumidos quando à relação entre as variâncias do sistema e das carteiras de módulos, se verifica a relação sugerida por Baldwin e Clark (2000) entre a correlação dos módulos de uma mesma configuração e o valor da modularidade: uma maior correlação faz diminuir o valor da modularidade, eliminando-o quando a correlação é perfeita (figura 4.11).

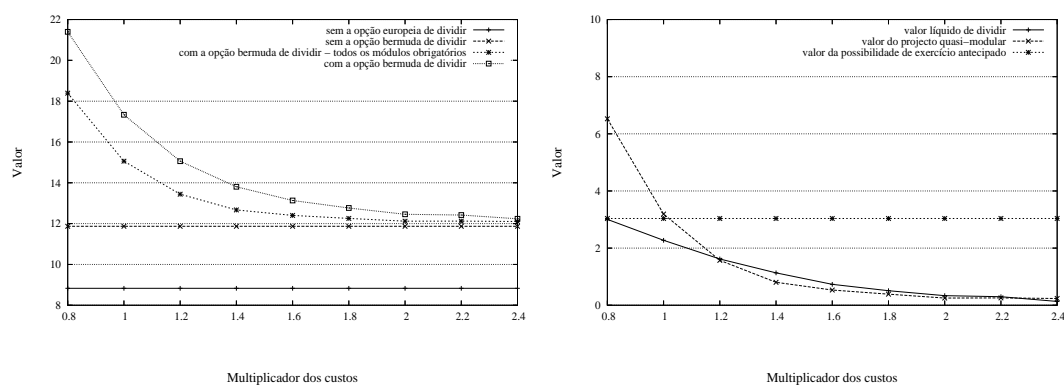
Figura 4.9: O valor líquido da modularidade - o efeito do valor do sistema/módulos



¹³Uma análise do efeito das outras variáveis pode ser encontrada no apêndice 4.A.2 (página 142).

4.3. Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade

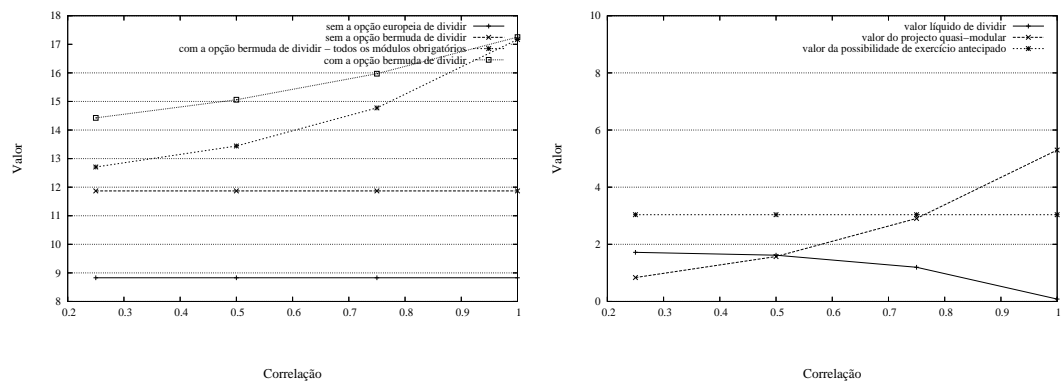
Figura 4.10: O valor líquido da modularidade - o efeito do multiplicador dos custos



(a) Valor de um projecto modular

(b) Origens do valor do projecto modular

Figura 4.11: O valor líquido da modularidade - o efeito da correlação entre os módulos da mesma configuração



(a) Valor de um projecto modular

(b) Origens do valor do projecto modular

4.3.2 O valor criado pelos operadores de divisão e de substituição

A possibilidade de fazer vários ensaios para cada módulo na fase de I&D - o operador *substituição* - cria uma opção adicional: a opção de escolha da ensaio de maior valor, uma vez terminado o desenvolvimento dos módulos. O operador de substituição pode consistir em equipas adicionais de desenvolvimento do mesmo módulo ou no desenvolvimento de diferentes normas para o mesmo módulo: módulos que, apesar de "diferentes", têm a mesma utilização no sistema¹⁴.

A opção de escolha do melhor ensaio, só pode ser exercida no início da fase de produção. O número óptimo de ensaios deve ser decidido, contudo, no início da fase de I&D, o que significa que temos, naquele momento, uma decisão adicional a tomar: para além do número de módulos, o número de ensaios por módulo.

Quando é possível mais do que um ensaio por módulo, o número de variáveis estocásticas aumenta. Assume-se que cada um dos valores dos ensaios é governado pelo seguinte processo geométrico Browniano:

$$dM_{ij}^{(m)}(t) = \left(\mu_{ij}^{(m)} - \delta_{ij}^{(m)} \right) M_{ij}^{(m)}(t) dt + \sigma_i M_{ij}^{(m)}(t) dW_{ij}^{(m)} \quad M_{ij}^{(m)}(0) = M_{ij}^{(m)} \quad (4.22)$$

onde:

$M_{ij}^{(m)}$ representa o valor do ensaio j , do módulo i , num sistema com m módulos;
 $dW_{ij}^{(m)}$ são incrementos de processos de Wiener.

Uma vez mais, o modelo só pode ser implementado se se definir *a priori* o número máximo de módulos (M) e o número máximo de ensaios por módulo (A), que se assume constante para todos os módulos. O número de variáveis estocásticas e a matriz de co-variâncias aumentam significativamente¹⁵.

Todos os custos (preços de exercício) e variâncias têm agora um índice adicional, j , que representa o ensaio. Tal como anteriormente, assume-se que todos os ensaios são correlacionados: com o sistema (ρ_s), com ensaios de outras configurações modulares (ρ_m) e com ensaios da mesma configuração modular (ρ). A matriz de correlações (para um máximo de 3 módulos e 2 ensaios por módulo), passa a ser:

¹⁴Por exemplo, o desenvolvimento de unidades de DVD com diferentes protocolos (-R ou +R).

¹⁵O número de activos já agora de $\frac{M(M-1)}{M}A$.

4.3. Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade

	$M_{11}^{(1)}$	$M_{12}^{(1)}$	$M_{11}^{(2)}$	$M_{12}^{(2)}$	$M_{21}^{(2)}$	$M_{22}^{(2)}$	$M_{11}^{(3)}$	\dots
$M_{11}^{(1)}$	1	ρ	ρ_s	ρ_s	ρ_s	ρ_s	ρ_s	\dots
$M_{12}^{(1)}$	ρ	1	ρ_s	ρ_s	ρ_s	ρ_s	ρ_s	\dots
$M_{11}^{(2)}$	ρ_s	ρ_s	1	ρ	ρ	ρ	ρ_m	\dots
$M_{12}^{(2)}$	ρ_s	ρ_s	ρ	1	ρ	ρ	ρ_m	\dots
$M_{21}^{(2)}$	ρ_s	ρ_s	ρ	ρ	1	ρ	ρ_m	\dots
$M_{22}^{(2)}$	ρ_s	ρ_s	ρ	ρ	ρ	1	ρ_m	\dots
$M_{11}^{(3)}$	ρ_s	ρ_s	ρ_m	ρ_m	ρ_m	ρ_m	1	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

O valor de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição, resulta de uma carteira de opções, que se apresentam de seguida, começando pelas opções de maior maturidade, e procedendo de forma retroactiva, até às de menor maturidade.

4.3.2.1 Opção de implementação de cada ensaio alternativo

Cada um dos a ensaios alternativos (escolhidos anteriormente), para o módulo i numa configuração de m módulos, tem uma opção de implementação com o seguinte *payoff*:

$$\Pi_{I_{ij}^{(m)}} \left(t, M_{ij}^{(m)}(t) \right) = \max \left[M_{ij}^{(m)}(t) - K_{ij}^{(m)}; 0 \right] \quad (4.23)$$

$i = 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, M; \quad j = 1, \dots, a; \quad a = 1, \dots, A$

e valor:

$$F_{I_{ij}^{(m)}} \left(t, M_{ij}^{(m)}(t) \right) \quad i = 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, M; \quad j = 1, \dots, a; \quad a = 1, \dots, A \quad (4.24)$$

Cada opção individual e os respectivos momentos óptimos de paragem, podem ser determinados independentemente, utilizando o método LSM. No entanto, como sugerimos no capítulo anterior, tal não é necessário dado que estas opções são mutuamente exclusivas para cada módulo e uma vez escolhida o melhor ensaio, ele será de imediato implementado.

4.3.2.2 Opção de escolha do melhor ensaio

A decisão imediatamente anterior à implementação do ensaio é, precisamente, a escolha do melhor de entre os diferentes ensaios desenvolvidos. A opção de escolha do melhor ensaio é uma opção mutuamente exclusiva, que pode ser exercida uma vez terminado o desenvolvimento, que se assume simultâneo, de todos os en-

saio de cada módulo. Uma vez escolhido o melhor ensaio, os restantes ensaios alternativos deixam de ser relevantes. A variável de controlo é uma variável dupla $(\tau_{B_i^{(m)(a)}}, \xi_{B_i^{(m)(a)}})$, onde $\tau_{B_i^{(m)(a)}}$ é o momento de paragem e $\xi_{B_i^{(m)(a)}} \in \{1, \dots, a\}$ é o melhor ensaio, ambos para o módulo i quando são desenvolvidos a ensaios do módulo, numa configuração de m módulos. O valor da opção de escolha do melhor ensaio, para o módulo i , quando são desenvolvidos a ensaios, numa configuração de m módulos¹⁶, é dado por:

$$\begin{aligned}
 & F_{B_i^{(m)(a)}} \left(t, M_{ij}^{(m)}(t) \right) = \\
 & = \max_{\left(\tau_{B_i^{(m)(a)}}, \xi_{B_i^{(m)(a)}} \right)} \left\{ e^{-r \left(\tau_{B_i^{(m)(a)}} - t \right)} \mathbb{E}_t^* \left[F_{I_{i\xi_{B_i^{(m)(a)}}}^{(m)}} \left(\tau_{B_i^{(m)(a)}}, M_{i\xi_{B_i^{(m)(a)}}}^{(m)} \left(\tau_{B_i^{(m)(a)}} \right) \right) \right] \right\} \\
 & \quad i = 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, M; \quad j = 1, \dots, a; \quad a = 1, \dots, A \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

Quando esta opção é exercida, a opção de implementação do melhor ensaio é simultaneamente exercida, o que significa que o valor da equação 4.25 é equivalente a:

$$\begin{aligned}
 & F_{B_i^{(m)(a)}} \left(t, M_{ij}^{(m)}(t) \right) = \\
 & = \max_{\tau_{B_i^{(m)(a)}}} \left\{ e^{-r \left(\tau_{B_i^{(m)(a)}} - t \right)} \mathbb{E}_t^* \left[\Pi_{B_i^{(m)(a)}} \left(\tau_{B_i^{(m)(a)}}, M_{ij}^{(m)} \left(\tau_{B_i^{(m)(a)}} \right) \right) \right] \right\} \\
 & \quad i = 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, M; \quad j = 1, \dots, a; \quad a = 1, \dots, A \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

O *payoff* desta opção corresponde ao máximo das a opções de implementação de cada módulo:

$$\Pi_{B_i^{(m)(a)}} \left(t_n, M_{ij}^{(m)}(t_n) \right) = \max_j \left[\Pi_{I_{ij}^{(m)}} \left(t_n, M_{ij}^{(m)}(t_n) \right) \right] \quad (4.27)$$

¹⁶Recorde-se que a e m são escolhidos previamente.

4.3. Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade

A equação de Bellman para este tipo de opção é dada por:

$$\begin{aligned}
 F_{B_i^{(m)(a)}} \left(t_n, M_{ij}^{(m)}(t_n) \right) &= \max \left\{ \Pi_{B_i^{(m)(a)}} \left(t_n, M_{ij}^{(m)}(t_n) \right), \right. \\
 &\quad \left. e^{-r(t_{n+1}-t_n)} \mathbb{E}_{t_n}^* \left[F_{B_i^{(m)(a)}} \left(t_{n+1}, M_{ij}^{(m)}(t_{n+1}) \right) \right] \right\} \\
 i &= 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, M; \\
 j &= 1, \dots, a; \quad a = 1, \dots, A
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

A seguinte regra é utilizada para determinar o controlo óptimo $(\tau_{B_i^{(m)(a)}}, \xi_{B_i^{(m)(a)}})$, no momento t_n , para o caminho ω :

$$\begin{aligned}
 \text{se: } \quad &\Phi \left(t_n, M_{ij}^{(m)}(t_n)(\omega) \right) \leq \Pi_{B_i^{(m)(a)}} \left(t_n, M_{ij}^{(m)}(t_n)(\omega) \right) \\
 \text{então: } \quad &\left(\tau_{B_i^{(m)(a)}}, \xi_{B_i^{(m)(a)}} \right) (\omega) = (t_n, \bar{j})
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

onde:

$$\bar{j} = \arg \max_j \left\{ \Pi_{I_{ij}^{(m)}} \left(t_n, M_{ij}^{(m)}(t_n)(\omega) \right) \right\}$$

O valor de continuação (Φ) é estimado por uma regressão dos mínimos quadrados.

4.3.2.3 Opção de desenvolvimento de cada módulo

Ao se iniciar a fase de I&D, temos, agora, uma decisão adicional a tomar: o número óptimo de ensaios por módulo. Para além da decisão quanto ao momento óptimo de paragem $(\tau_{D_i^{(m)}} \in \mathcal{T}(t, T - t_d))$ da opção de iniciar a fase de I&D, temos agora uma outra variável de controlo: $\theta_i^{(m)}$ - o número óptimo de ensaios para o módulo i , numa configuração de m módulos, com: $m \leq M$ e $\theta_i^{(m)} \leq A$. Cada opção de desenvolvimento é uma opção composta independente com o seguinte *payoff*:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{D_i^{(m)}} \left(t, M_{ij}^{(m)}(t_n) \right) &= \max_{\theta_i^{(m)}} \left[F_{B_i^{(m)(\theta_i^{(m)})}} \left(t, M_{ij}^{(m)}(t) \right) - \sum_{j=1}^{\theta_i^{(m)}} D_{ij}; 0 \right] \\
 i &= 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, M; \quad j = 1, \dots, \theta_i^{(m)}; \quad \theta_i^{(m)} = 1, \dots, A
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

$D_{ij}^{(m)}$ representa o custo de desenvolvimento do ensaio j , do módulo i , numa configuração de m módulos. O valor da opção de desenvolvimento, é dado por:

$$\begin{aligned}
 F_{D_i^{(m)}}(t, M_{ij}^{(m)}(t)) = \\
 \max_{(\tau_{D_i^{(m)}}, \theta_i^{(m)})} \left\{ e^{-r(\tau_{D_i^{(m)}} - t)} \mathbb{E}_t^* \left[F_{B_i^{(m)}(\theta_i^{(m)})}(\tau_{D_i^{(m)}}, M_{ij}^{(m)}(\tau_{D_i^{(m)}})) \right] \right\} \\
 i = 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, M; \quad j = 1, \dots, \theta_i^{(m)}; \quad \theta_i^{(m)} = 1, \dots, A \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

A equação de Bellman, para esta opção é dada por:

$$\begin{aligned}
 F_{D_i^{(m)}}(t_n, M_{ij}^{(m)}(t_n)) = \max \left\{ F_{B_i^{(m)}(1)}(t_n, M_{ij}^{(m)}(t_n)), \dots, F_{B_i^{(m)}(A)}(t_n, M_{ij}^{(m)}(t_n)), \right. \\
 \left. e^{-r(t_{n+1} - t_n)} \mathbb{E}_{t_n}^* \left[F_{D_i^{(m)}}(t_{n+1}, M_{ij}^{(m)}(t_{n+1})) \right] \right\} \\
 i = 1, \dots, m; \quad m = 1, \dots, M; \\
 j = 1, \dots, a; \quad a = 1, \dots, A \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

A regra seguinte é utilizada para determinar o controlo óptimo, $\tau_{D_i^{(m)}}$ e $\theta_i^{(m)}$, no momento t_n , para o caminho ω :

$$\begin{aligned}
 \text{se: } \Phi(t_n, M_{ij}^{(m)}(t_n)(\omega)) \leq \max_a \left\{ F_{B_i^{(m)}(a)}(t_n, M_{ij}^{(m)}(t_n)(\omega)) \right\} \\
 \text{então: } (\tau_{D_i^{(m)}}, \theta_i^{(m)})(\omega) = (t_n, \bar{a}) \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

onde

$$\bar{a} = \arg \max_a \left\{ F_{B_i^{(m)}(a)}(t_n, M_{ij}^{(m)}(t_n)(\omega)) \right\}$$

O valor de continuação é estimado, uma vez mais, por uma regressão dos mínimos quadrados.

4.3.2.4 Opção de dividir

Finalmente, a última a opção disponível (a primeira em termos temporais) é a opção de dividir ou de modularizar. Cada configuração modular corresponde à soma de m opções compostas independentes, cujo valor é dado pela equação 4.17 (página 103). A opção de dividir é avaliada de acordo com as equações 4.19 a 4.21.

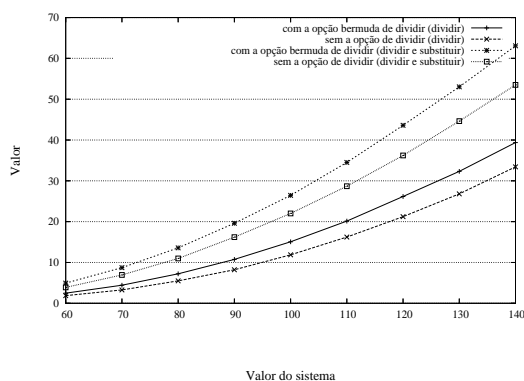
4.3.2.5 Resultados numéricos

Os parâmetros utilizados na análise de sensibilidade são os mesmos da tabela 4.2 (página 105), sendo necessário, apenas, definir, agora, o número máximo de ensaios por módulo ($A = 2$).

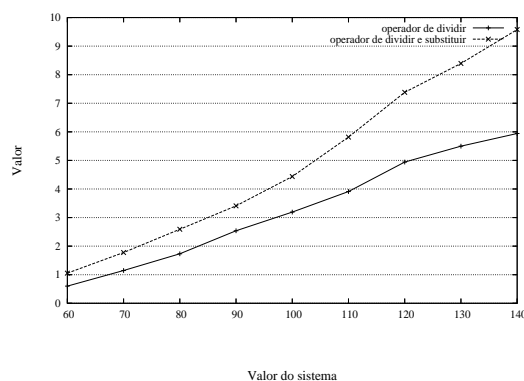
4.3. Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade

A figuras 4.12 a 4.14 (página 126) apresentam alguns dos resultados da análise de sensibilidade de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição¹⁷.

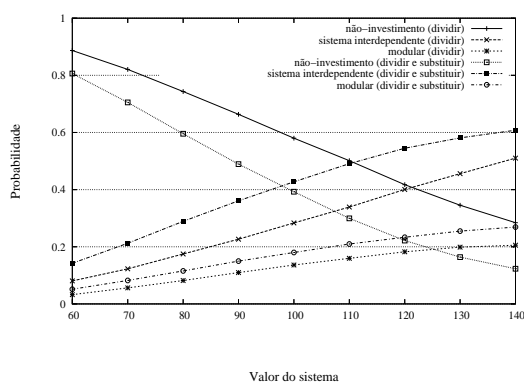
Figura 4.12: A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do valor do sistema/módulos



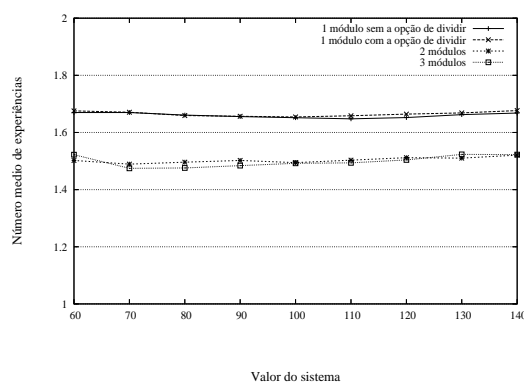
(a) Valor de um projecto modular



(b) Valor criado por cada operador



(c) Probabilidades associadas a cada estratégia



(d) Número médio de ensaios por módulo

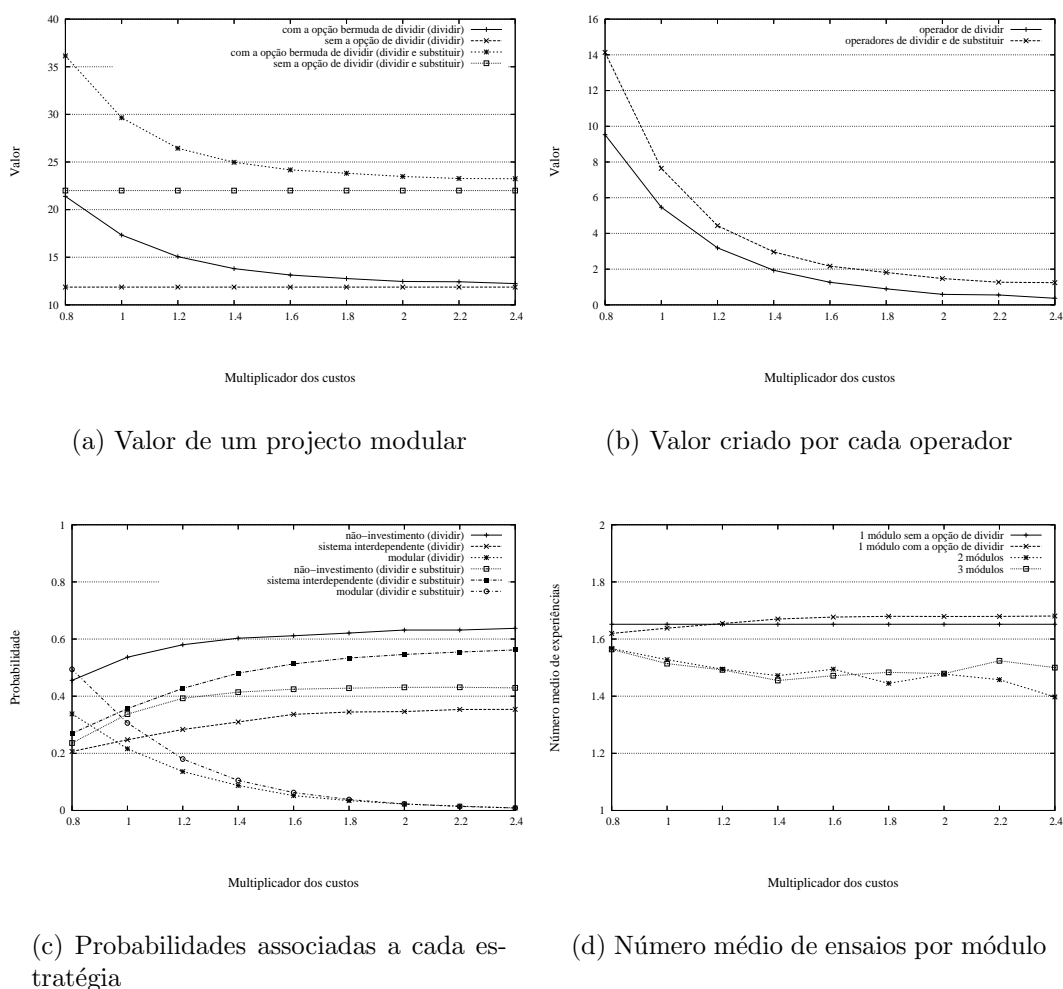
A possibilidade de escolher o melhor de vários ensaios para o mesmo módulo permite acrescentar valor ao projecto modular (v.g.: as subfiguras (a) e (b) dos gráficos anteriormente mencionados). Reduz-se a probabilidade de não investir, aumentando quer a probabilidade de investimento numa configuração modular quer no sistema, dado que se admite também a possibilidade de realizar vários ensaios para o sistema não modularizado (v.g.: as subfiguras (c) dos mesmos gráficos).

¹⁷O apêndice 4.B.1 (página 148) apresenta, com maior detalhe, os resultados da análise de sensibilidade para todas as variáveis. A comparação dos valores do projecto modular com os dois operadores ou apenas com o operador de divisão pode ser encontrada no apêndice 4.B.2 (página 161)

4.3. Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade

Esta última possibilidade é, aliás, responsável por grande parte do acréscimo de valor, tal como já havíamos referido anteriormente a propósito do que chamamos "valor líquido da divisão" (secção 4.3.1.6 (página 115)) .

Figura 4.13: A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do multiplicador dos custos



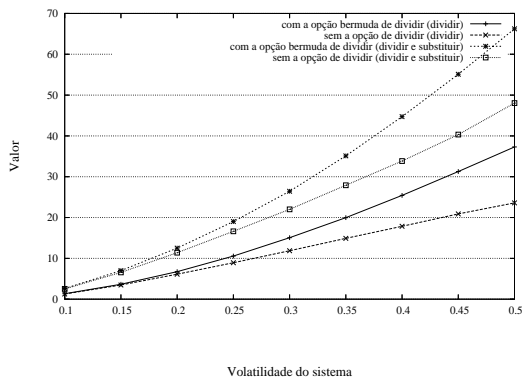
O número médio de ensaios por módulo não parece ser muito sensível ao valor do sistema e dos módulos (figura 4.12(d)). Já no que diz respeito ao multiplicador dos custos, verifica-se que, até a um determinado multiplicar (1,4), ocorre uma redução do número médio de ensaios por módulo, nas configurações modulares, e um aumento dos ensaios para o sistema (figura 4.13(d)). Se o desenvolvimento dos módulos é relativamente mais oneroso, do que o desenvolvimento do sistema, é espectável que aumente o número de ensaios deste e diminua o daqueles. Note-se ainda que a introdução do operador de substituição, a partir do multiplicador de

4.3. Um modelo de avaliação das opções reais da modularidade

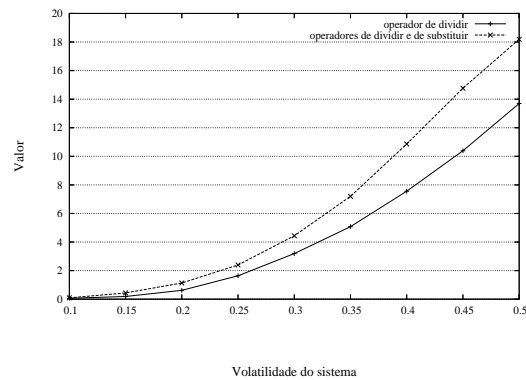
1,6, tem um impacto quase nulo na probabilidade de escolha de uma configuração modular (figura 4.13(c)).

Quanto maior a incerteza, maior será o valor acrescentado pelo operador de substituição, de resto como esperado (figura 4.14(a) e (b)). A incerteza aumenta o incentivo a adiar a decisão de modularização, aumentando a probabilidade de escolha de uma configuração modular (figura 4.14(c)) e aumentando o número médio de ensaios por módulo nas configurações modulares (figura 4.14(d)).

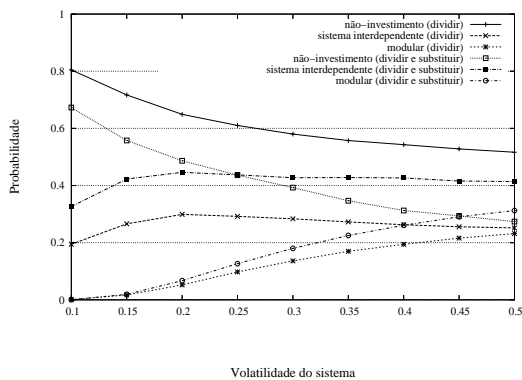
Figura 4.14: A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito da volatilidade do sistema



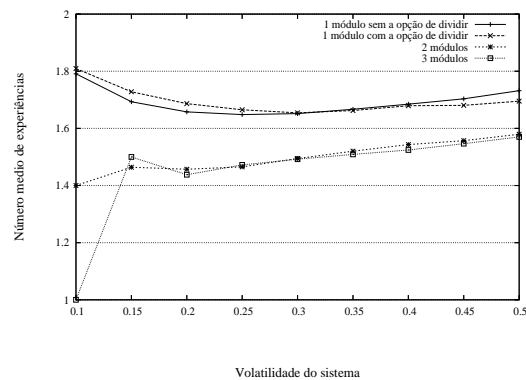
(a) Valor de um projecto modular



(b) Valor criado por cada operador



(c) Probabilidades associadas a cada estratégia



(d) Número médio de ensaios por módulo

4.4 Considerações finais

Neste capítulo, foi proposto um modelo de avaliação das opções reais criadas pelos operadores de divisão e substituição de um projecto modular. Desenvolvido com base no modelo de Baldwin e Clark (2000), incorpora a correlação entre os módulos e o sistema, a possibilidade de adiar a opção de dividir um sistema em módulos e o desenvolvimento faseado de produtos modulares. Utilizando o método LSM permite, assim, avaliar a carteira de opções criadas pela modularidade e determinar a melhor estratégia quer quanto ao momento de modularização, quer quanto ao número de módulos e quer ao número de ensaios por módulo.

A probabilidade de escolha de um projecto modular, em alternativa a um sistema interdependente, depende dos valores relativos dos módulos e do sistema, dos custos relativos e risco de cada configuração modular. Qualquer uma destas variáveis pode, para valores extremos, eliminar qualquer vantagem da modularidade. Mesmo sendo provável que a modularização faça aumentar os custos de definição das regras do *design*, do desenvolvimento e da implementação dos projectos, eles devem aumentar significativamente para eliminar qualquer possibilidade da modularização aumentar o valor do projecto. Maiores graus de modularidade, para a estrutura de custos assumida no modelo, proporcionam um maior valor do projecto ainda que a um ritmo decrescente. Quando os módulos são perfeitamente correlacionados entre si e com o sistema, e têm o mesmo risco e valor inicial, não há qualquer incentivo para modularizar.

Uma parte significativa do valor acrescentado pela modularização de um produto deve-se, no modelo proposto, à possibilidade de escolher entre o sistema interdependente e o conjunto de módulos de uma configuração: quando estes têm que ser todos implementados, tal assemelha-se à possibilidade de escolher entre dois sistemas alternativos. Na nossa perspectiva tal valor não deverá ser atribuído à modularidade, pelo que analisamos o "valor líquido" desta, que resulta da diferença entre o valor de um projecto modular e o valor do projecto com a possibilidade de escolha imediatamente antes referida.

A possibilidade de fazer vários ensaios para cada módulo, atribuindo, por exemplo, a várias equipas de I&D o desenvolvimento do mesmo módulo - o operador de substituição - permite a escolha do ensaio que se vier a revelar ter um valor superior. As opções criadas pelo operador de substituição acrescentam valor ao projecto modular, sendo a proporção de valor atribuído aos dois operadores analisados - o de substituição e o de divisão - variável em função dos parâmetros do modelo.

Num contexto de maior incerteza, aumenta o incentivo a adiar em decisão de

4.4. Considerações finais

modularizar e a escolha de uma configuração modular, aumentando, também, o número médio de ensaios por módulo.

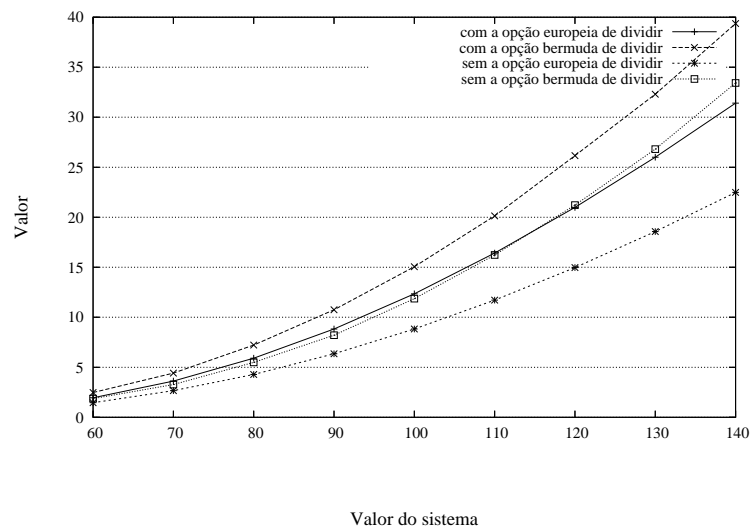
O modelo proposto pode ser modificado de diferentes formas, acrescentando outros pressupostos, sem grandes dificuldades. Esta é, aliás, uma das principais vantagens dos métodos de simulação.

Apêndices do capítulo 4

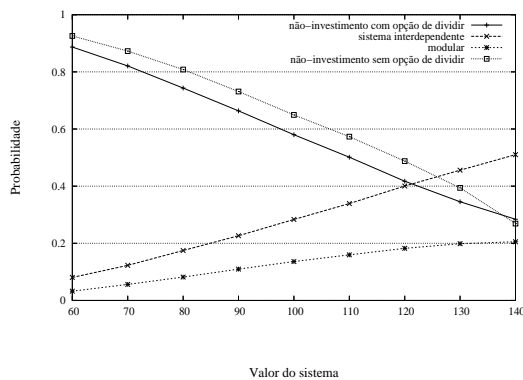
4.A A avaliação de um projecto modular com o operador de divisão

4.A.1 Análise de sensibilidade

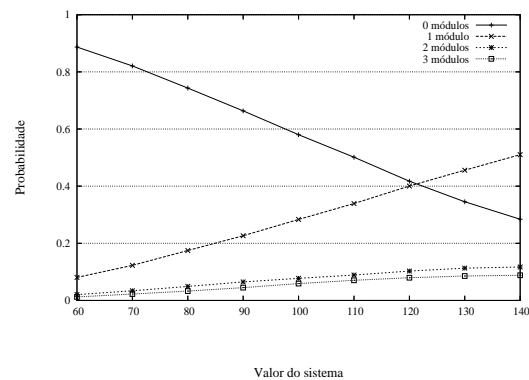
Figura 4.15: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do valor do sistema/módulos



(a) Valor de um projecto modular



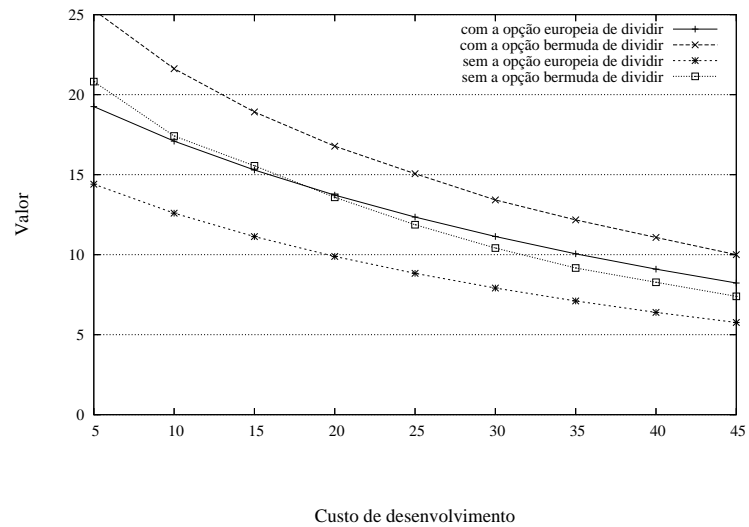
(b) Probabilidades associadas a cada estratégia



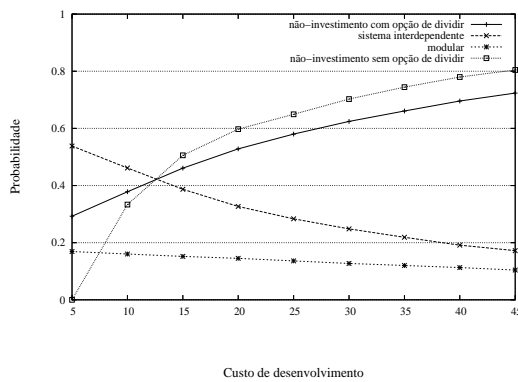
(c) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.A. A avaliação de um projecto modular com o operador de divisão

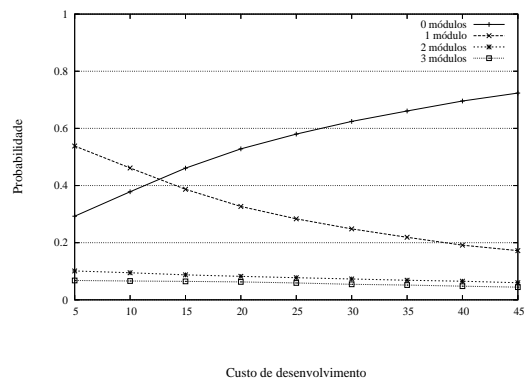
Figura 4.16: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do custo de desenvolvimento



(a) Valor de um projecto modular



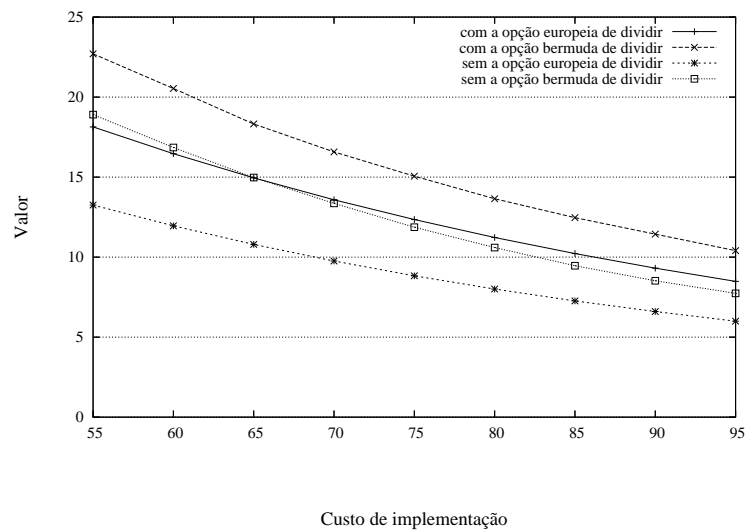
(b) Probabilidades associadas a cada estratégia



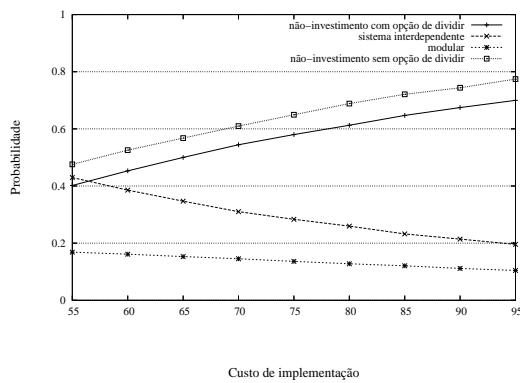
(c) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.A. A avaliação de um projecto modular com o operador de divisão

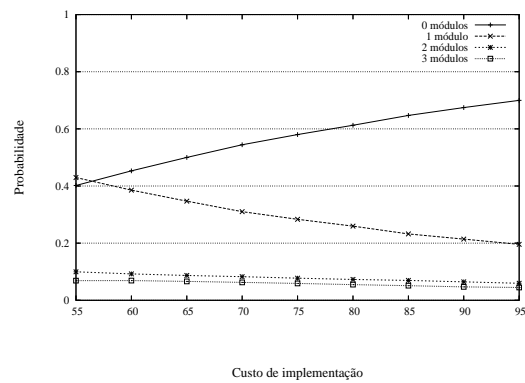
Figura 4.17: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do custo de implementação



(a) Valor de um projecto modular



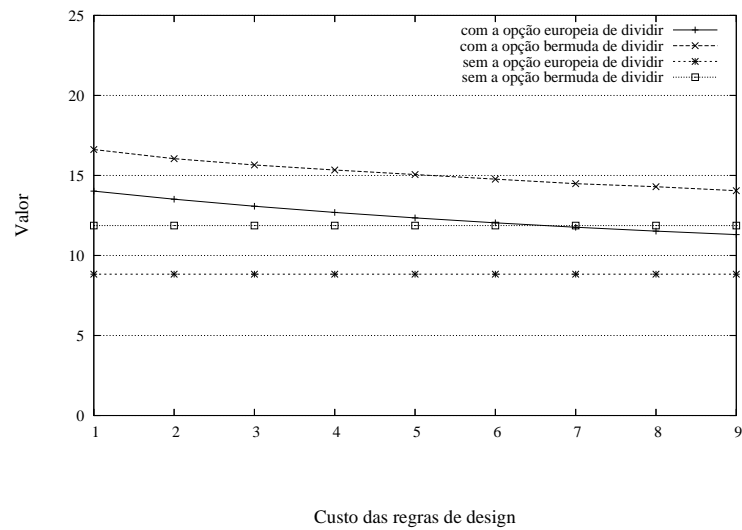
(b) Probabilidades associadas a cada estratégia



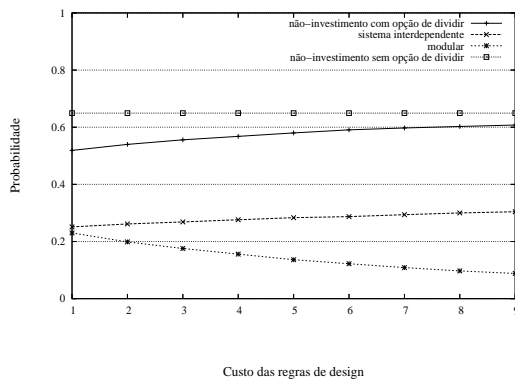
(c) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.A. A avaliação de um projecto modular com o operador de divisão

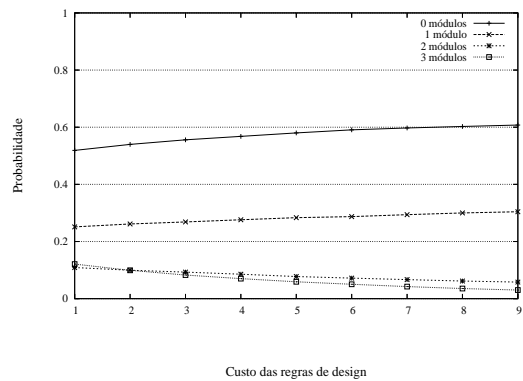
Figura 4.18: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do custo das regras de *design*



(a) Valor de um projecto modular



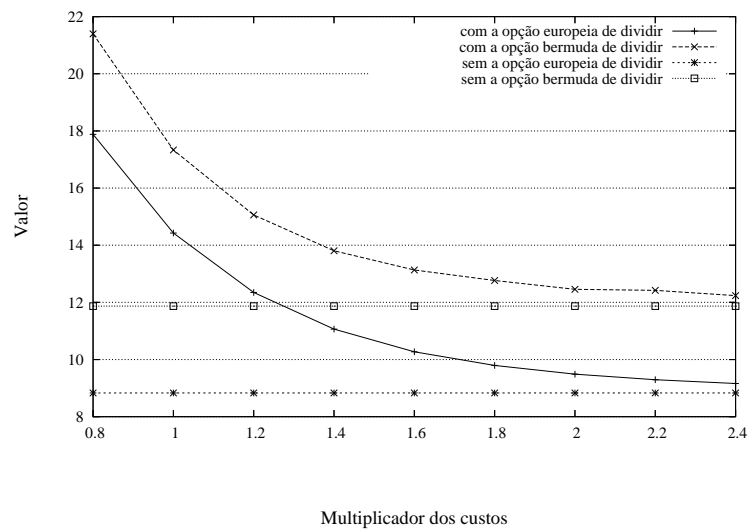
(b) Probabilidades associadas a cada estratégia



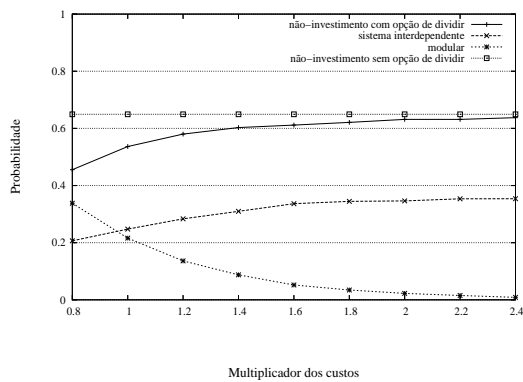
(c) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.A. A avaliação de um projecto modular com o operador de divisão

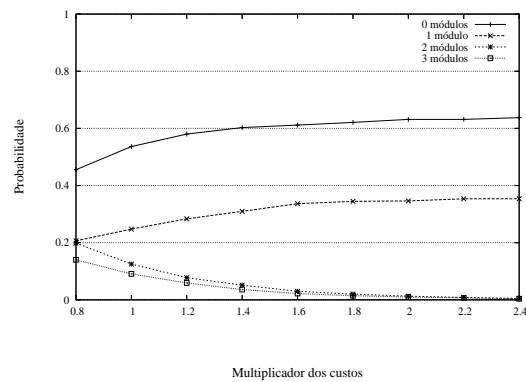
Figura 4.19: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do multiplicador dos custos



(a) Valor de um projecto modular



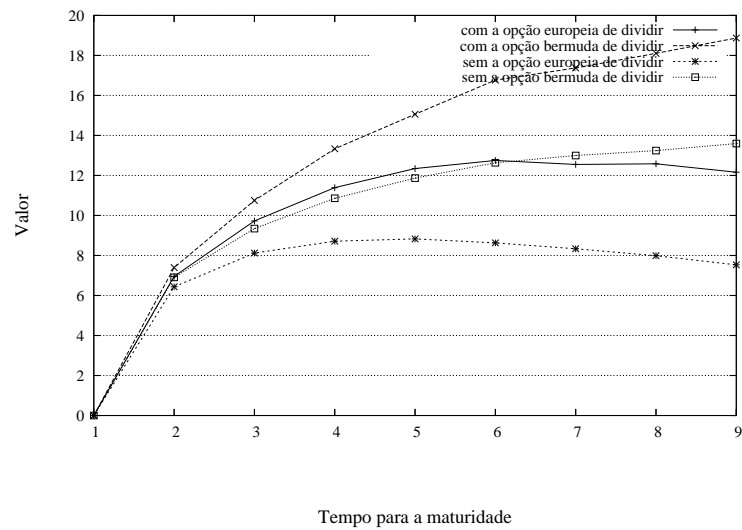
(b) Probabilidades associadas a cada estratégia



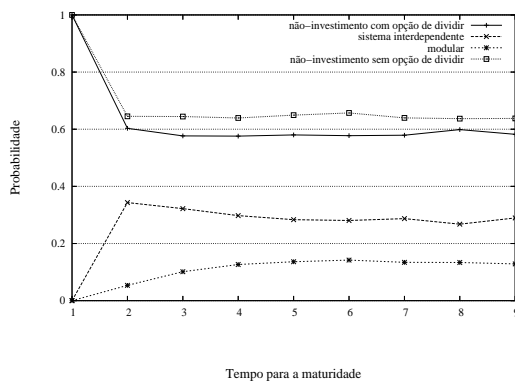
(c) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.A. A avaliação de um projecto modular com o operador de divisão

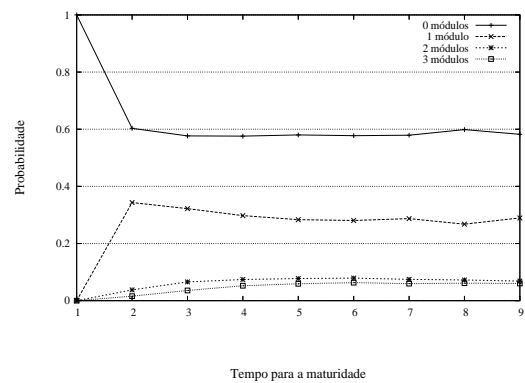
Figura 4.20: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do horizonte temporal do projecto



(a) Valor de um projecto modular



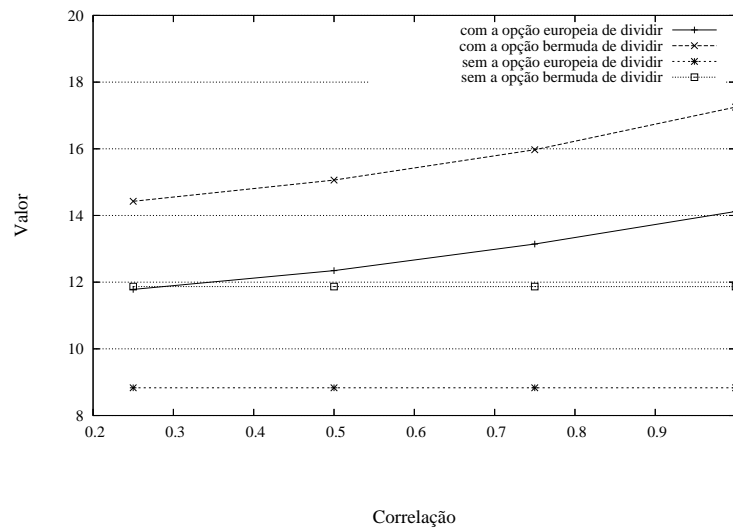
(b) Probabilidades associadas a cada estratégia



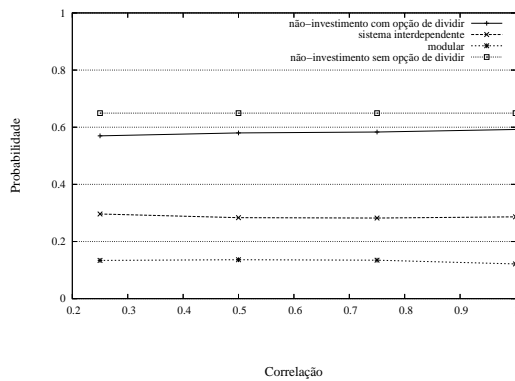
(c) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.A. A avaliação de um projecto modular com o operador de divisão

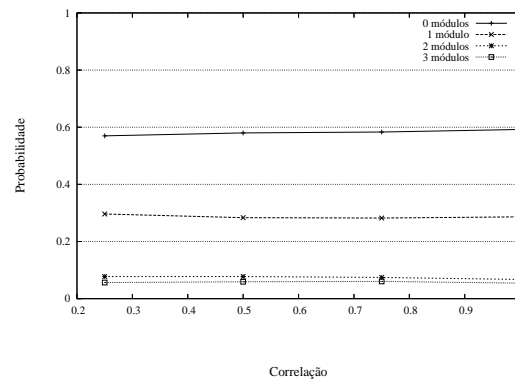
Figura 4.21: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito da correlação entre os módulos da mesma configuração



(a) Valor de um projecto modular



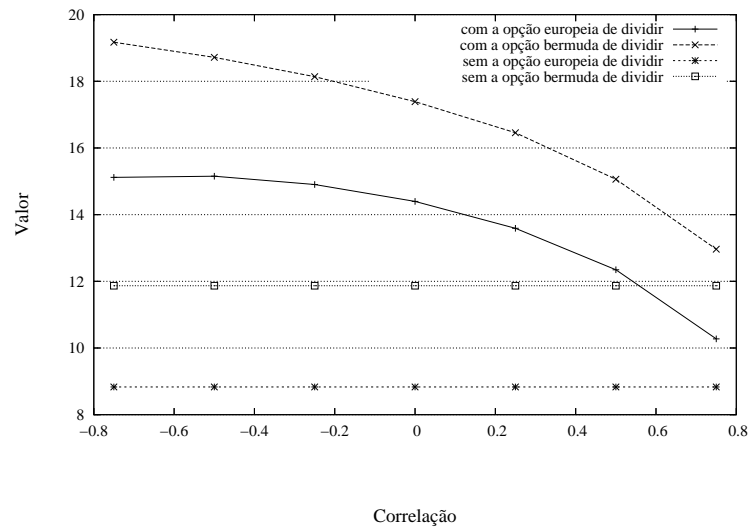
(b) Probabilidades associadas a cada estratégia



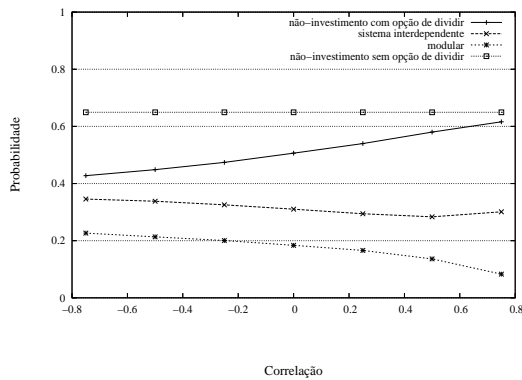
(c) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.A. A avaliação de um projecto modular com o operador de divisão

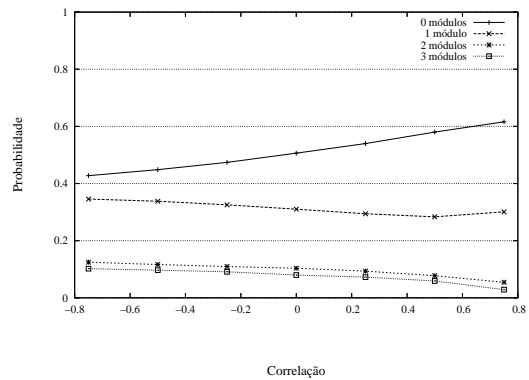
Figura 4.22: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do correlação entre os módulos e o sistema



(a) Valor de um projecto modular



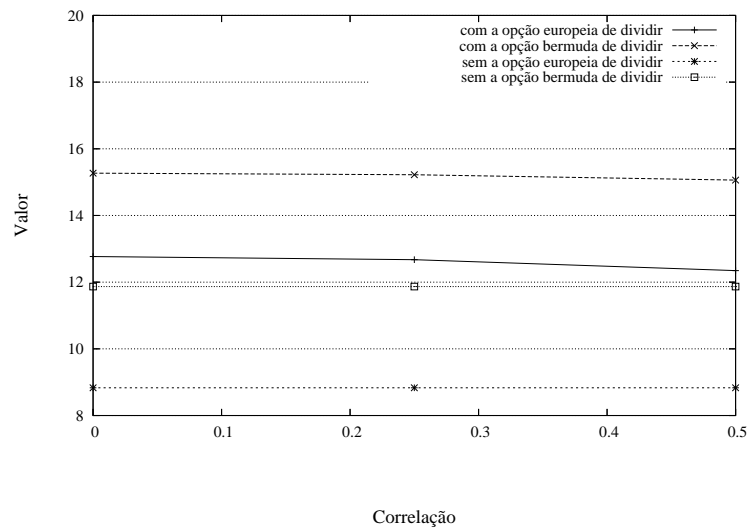
(b) Probabilidades associadas a cada estratégia



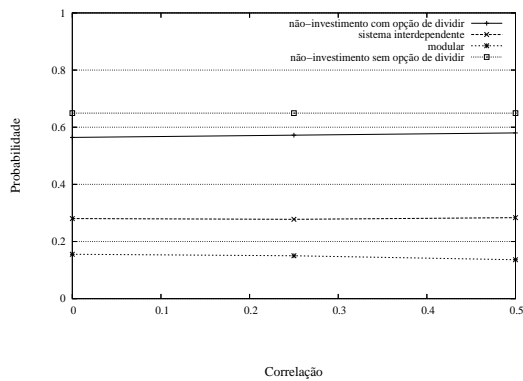
(c) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.A. A avaliação de um projecto modular com o operador de divisão

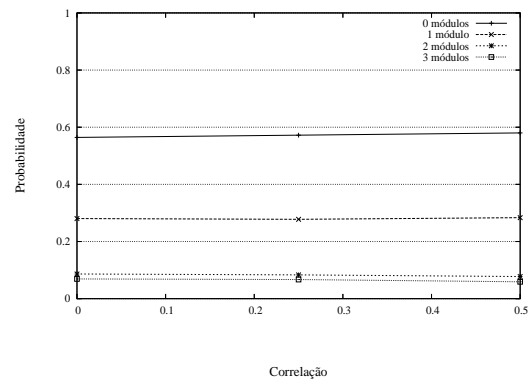
Figura 4.23: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do correlação entre módulos de diferentes configurações



(a) Valor de um projecto modular



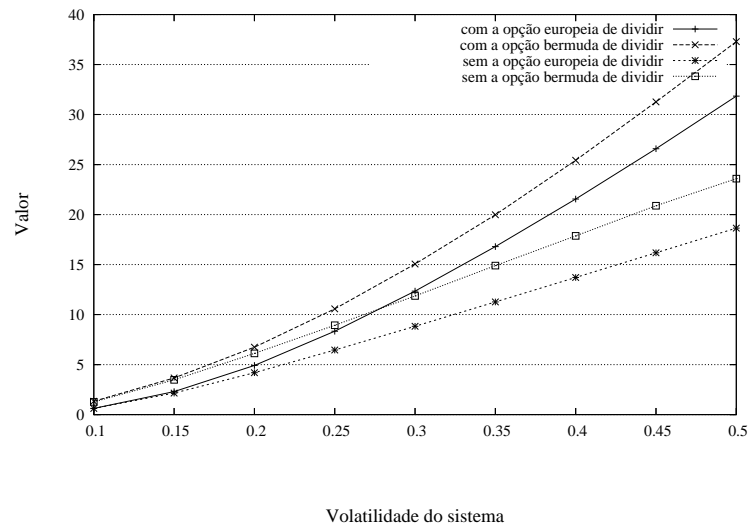
(b) Probabilidades associadas a cada estratégia



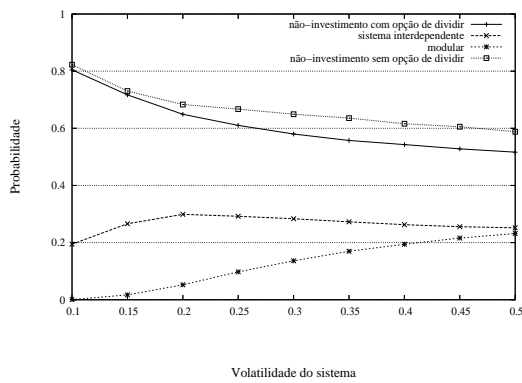
(c) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.A. A avaliação de um projecto modular com o operador de divisão

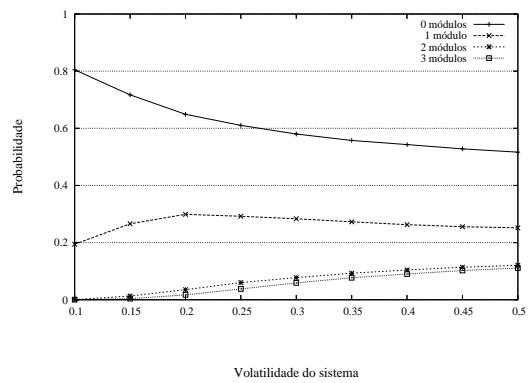
Figura 4.24: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito da volatilidade do sistema



(a) Valor de um projecto modular



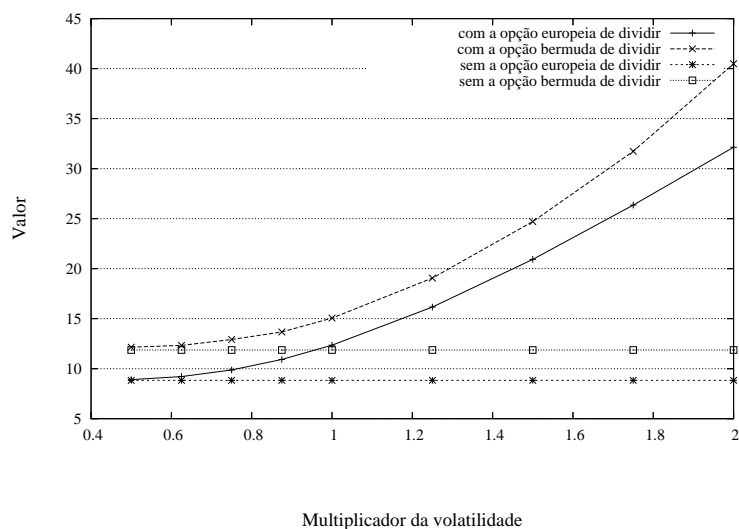
(b) Probabilidades associadas a cada estratégia



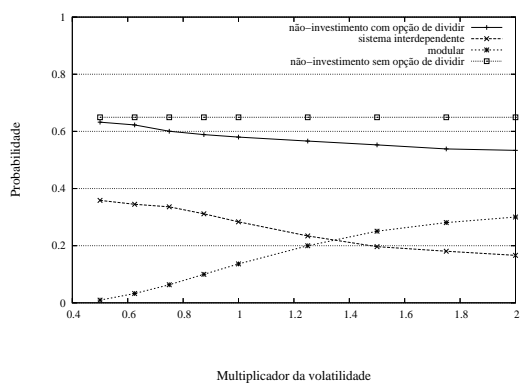
(c) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.A. A avaliação de um projecto modular com o operador de divisão

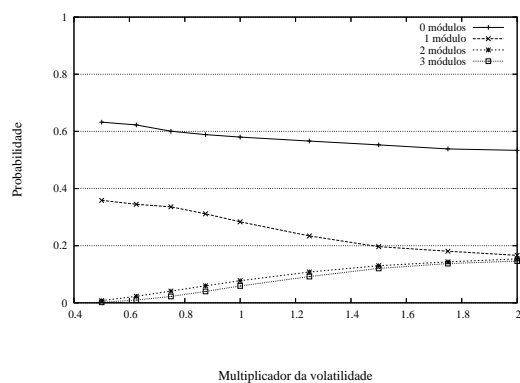
Figura 4.25: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do multiplicador da volatilidade



(a) Valor de um projecto modular



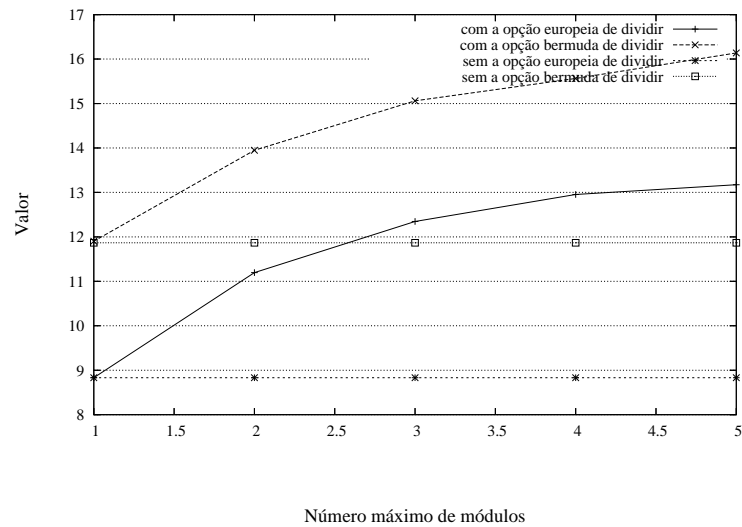
(b) Probabilidades associadas a cada estratégia



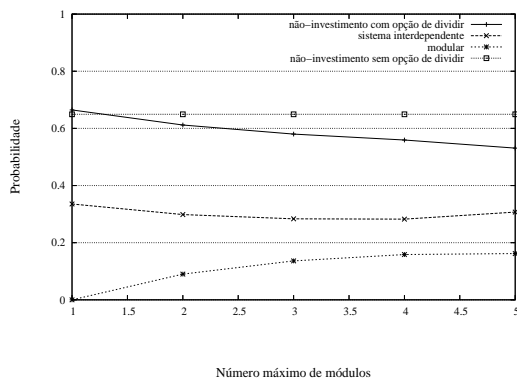
(c) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.A. A avaliação de um projecto modular com o operador de divisão

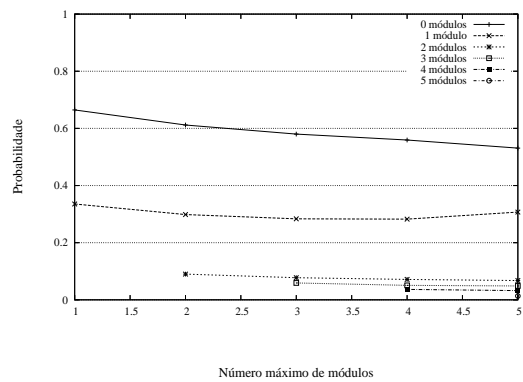
Figura 4.26: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - o efeito do número máximo de módulos



(a) Valor de um projecto modular



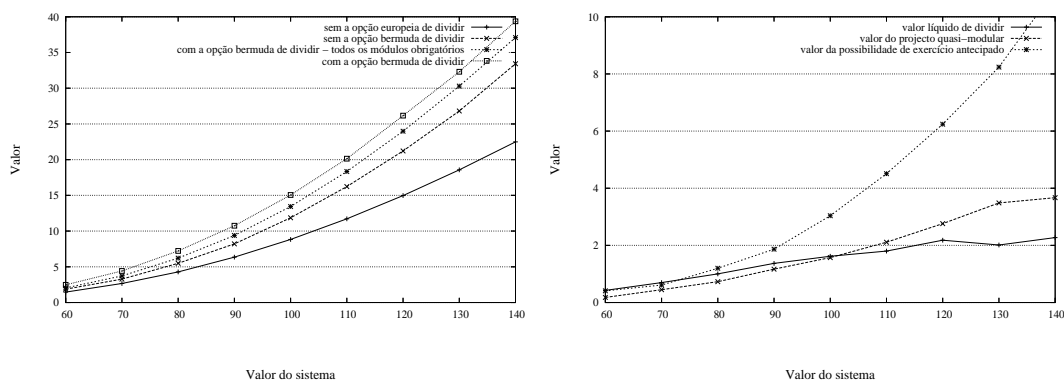
(b) Probabilidades associadas a cada estratégia



(c) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.A.2 O valor líquido do operador de divisão

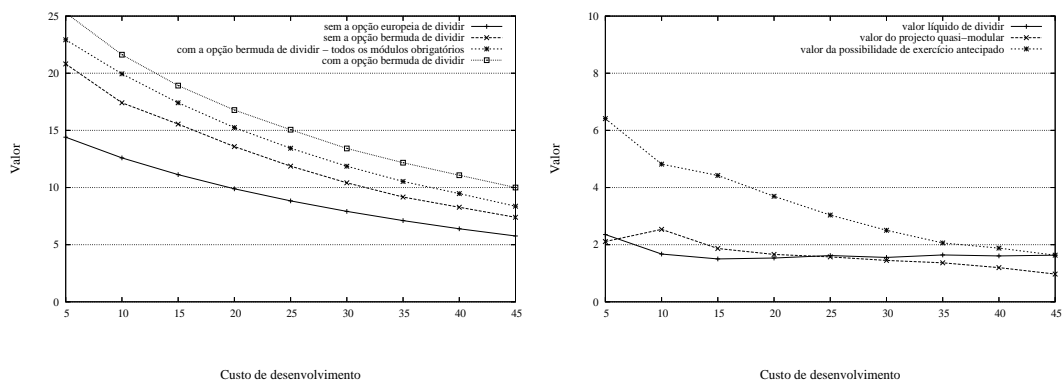
Figura 4.27: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito do valor do sistema/módulos



(a) Valor de um projecto modular

(b) Origens do valor do projecto modular

Figura 4.28: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito do custo de desenvolvimento

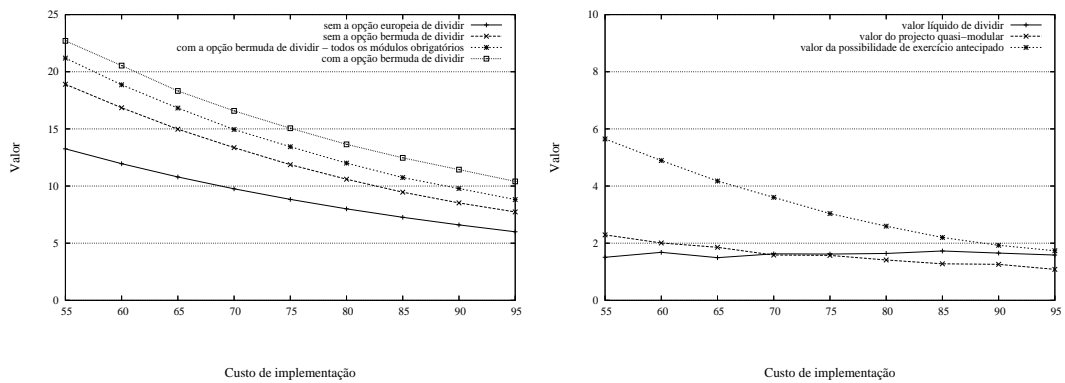


(a) Valor de um projecto modular

(b) Origens do valor do projecto modular

4.A. A avaliação de um projecto modular com o operador de divisão

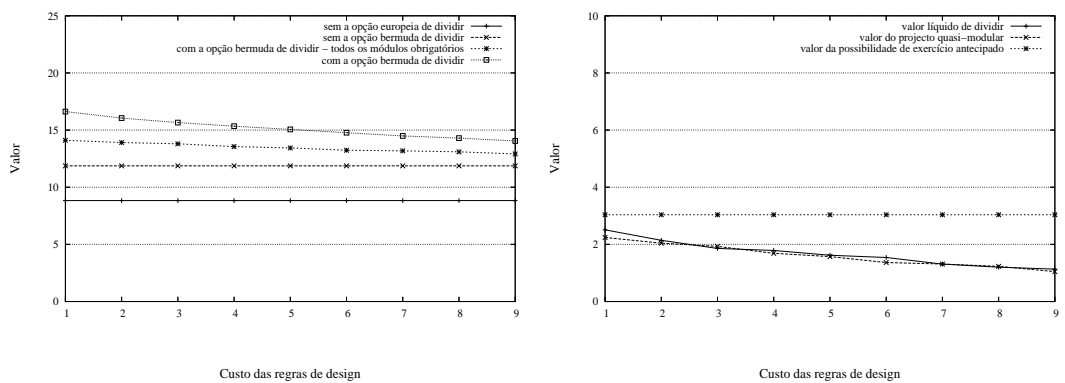
Figura 4.29: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito do custo de implementação



(a) Valor de um projecto modular

(b) Origens do valor do projecto modular

Figura 4.30: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito do custo das regras de *design*

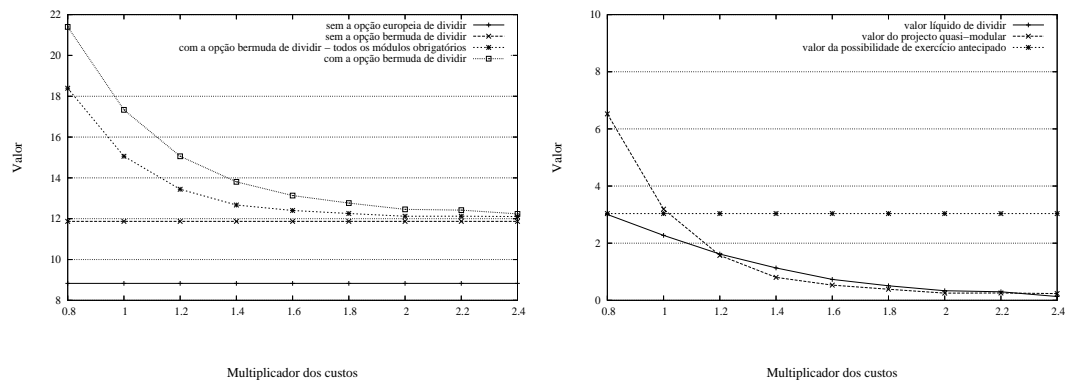


(a) Valor de um projecto modular

(b) Origens do valor do projecto modular

4.A. A avaliação de um projecto modular com o operador de divisão

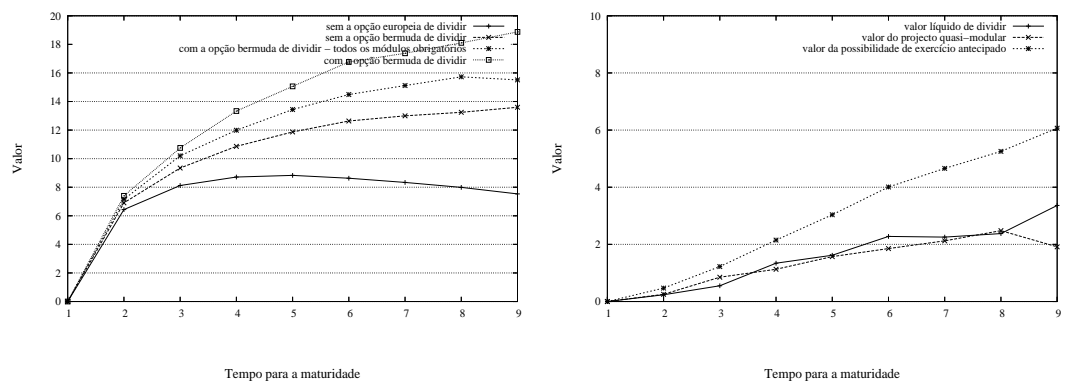
Figura 4.31: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito do multiplicador dos custos



(a) Valor de um projecto modular

(b) Origens do valor do projecto modular

Figura 4.32: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito do horizonte temporal do projecto

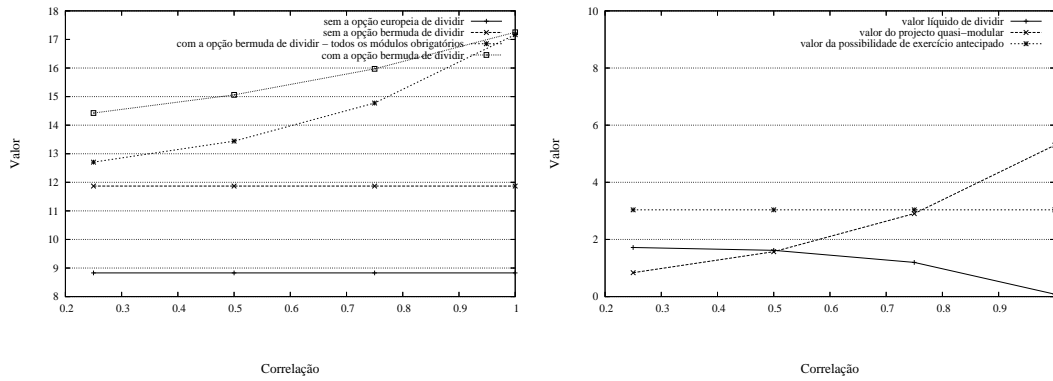


(a) Valor de um projecto modular

(b) Origens do valor do projecto modular

4.A. A avaliação de um projecto modular com o operador de divisão

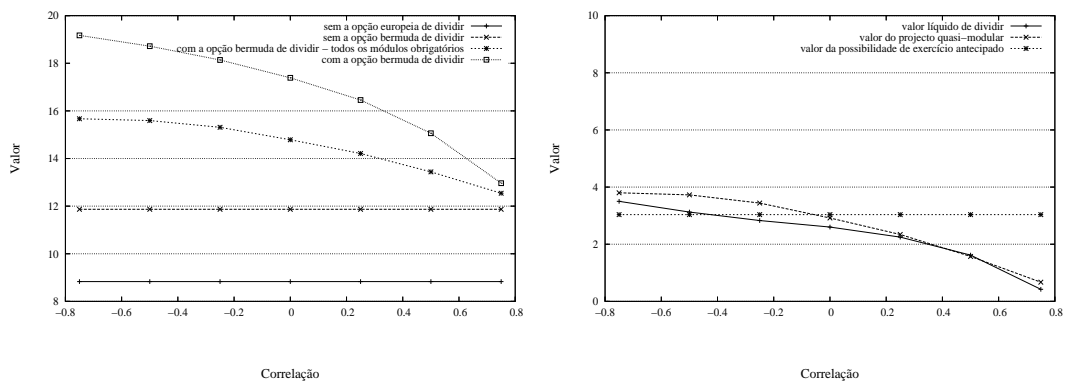
Figura 4.33: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito da correlação entre os módulos da mesma configuração



(a) Valor de um projecto modular

(b) Origens do valor do projecto modular

Figura 4.34: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito da correlação entre os módulos e o sistema

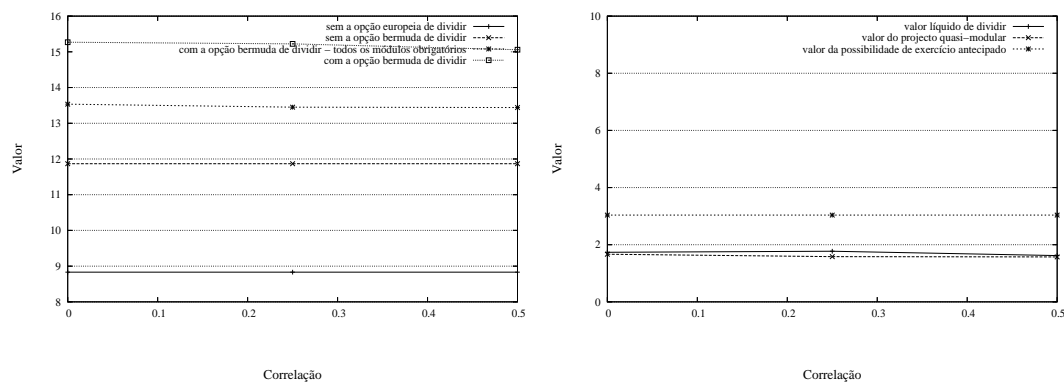


(a) Valor de um projecto modular

(b) Origens do valor do projecto modular

4.A. A avaliação de um projecto modular com o operador de divisão

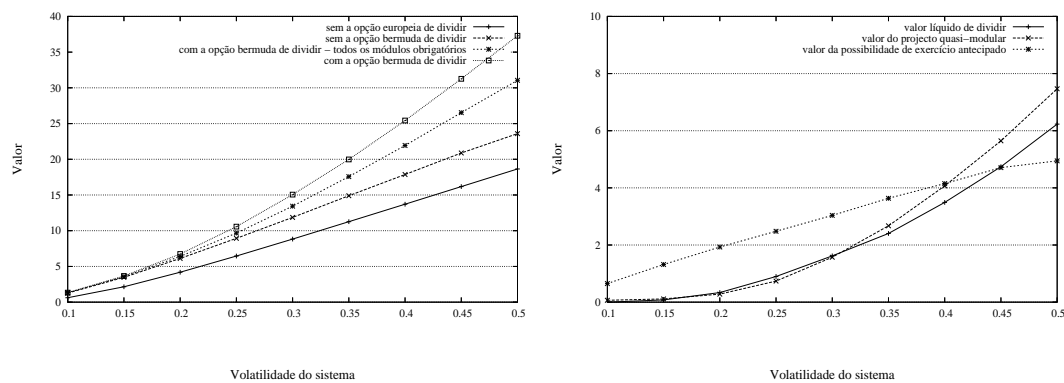
Figura 4.35: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito da correlação entre módulos de diferentes configurações



(a) Valor de um projecto modular

(b) Origens do valor do projecto modular

Figura 4.36: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito da volatilidade do sistema

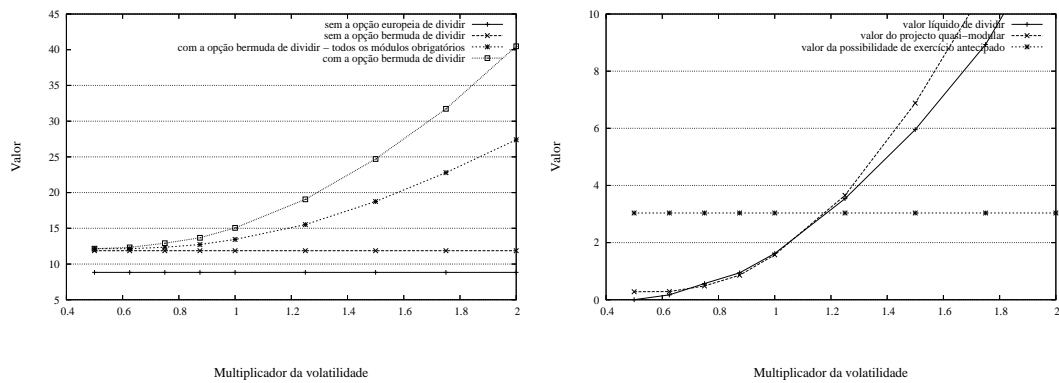


(a) Valor de um projecto modular

(b) Origens do valor do projecto modular

4.A. A avaliação de um projecto modular com o operador de divisão

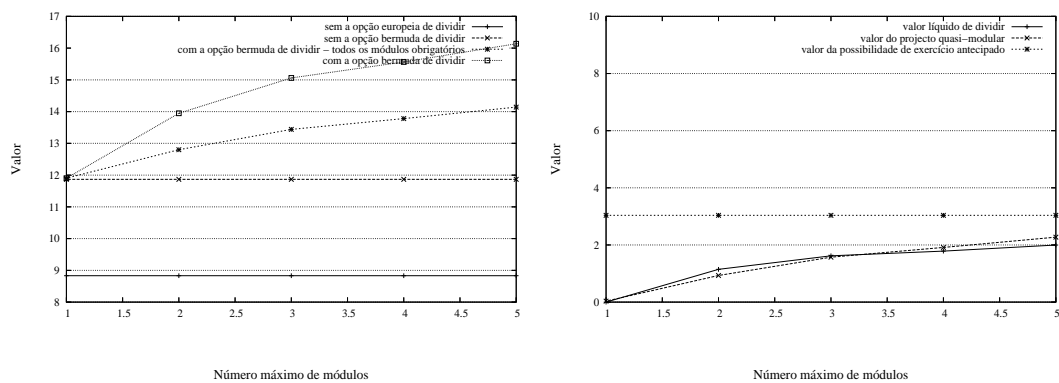
Figura 4.37: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito do multiplicador da volatilidade



(a) Valor de um projecto modular

(b) Origens do valor do projecto modular

Figura 4.38: A avaliação de projectos modulares com o operador de divisão - valor líquido de dividir - o efeito do número máximo de módulos



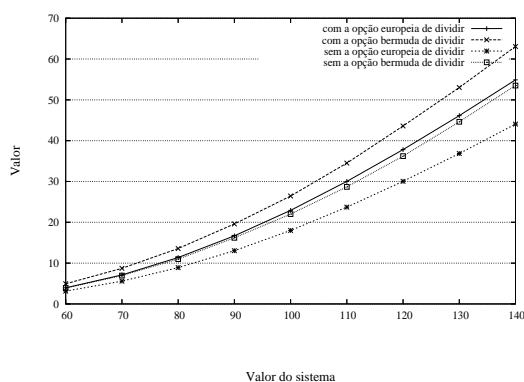
(a) Valor de um projecto modular

(b) Origens do valor do projecto modular

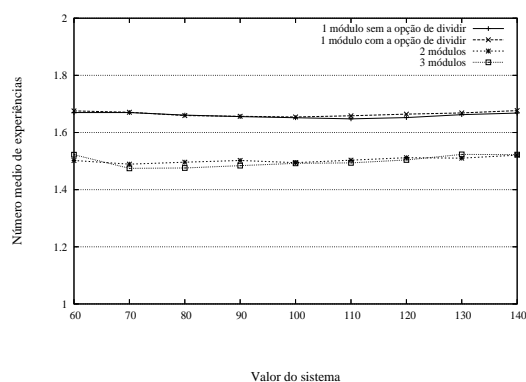
4.B A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

4.B.1 Análise de sensibilidade

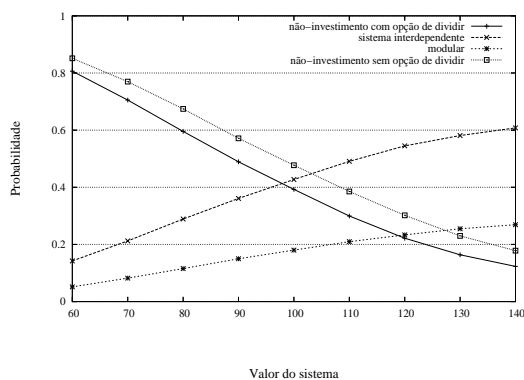
Figura 4.39: A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do valor do sistema/módulos



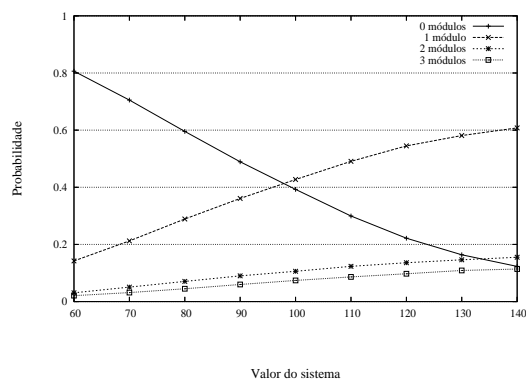
(a) Valor de um projecto modular



(b) Número médio de ensaios por módulo



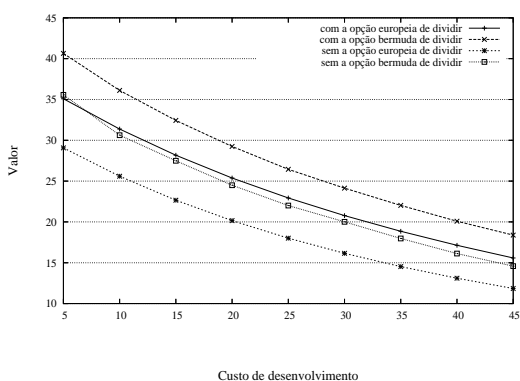
(c) Probabilidades associadas a cada estratégia



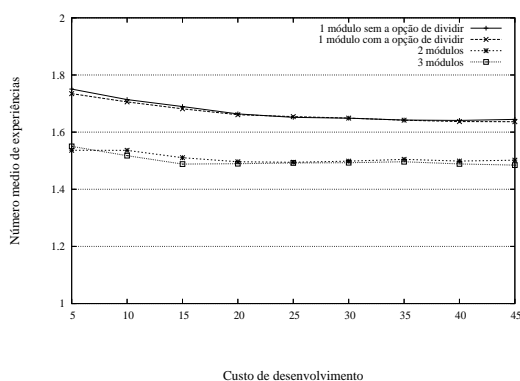
(d) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

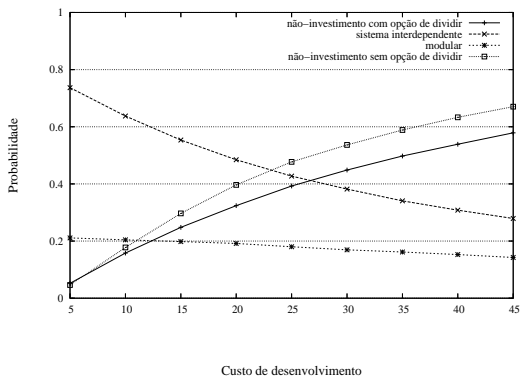
Figura 4.40: A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do custo de desenvolvimento



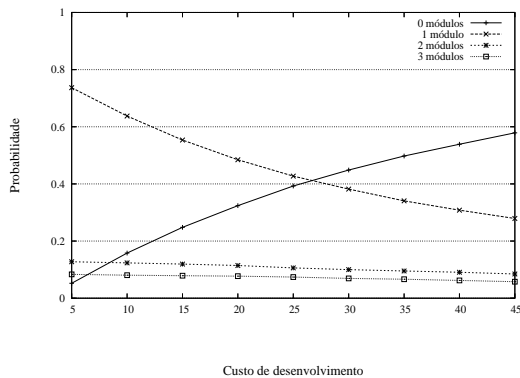
(a) Valor de um projecto modular



(b) Número médio de ensaios por módulo



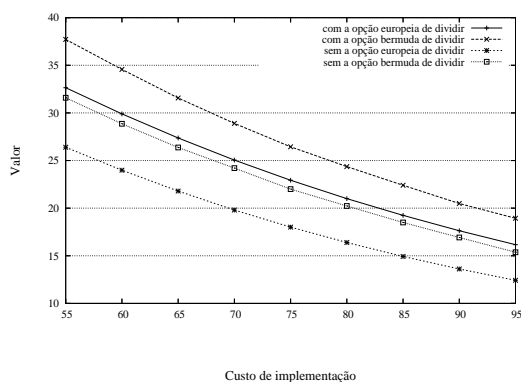
(c) Probabilidades associadas a cada estratégia



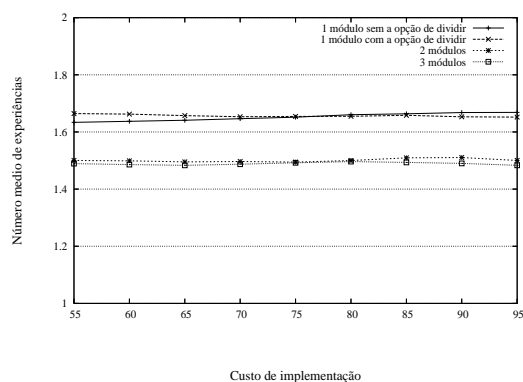
(d) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

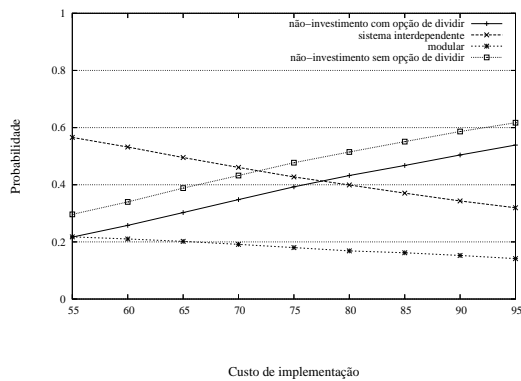
Figura 4.41: A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do custo de implementação



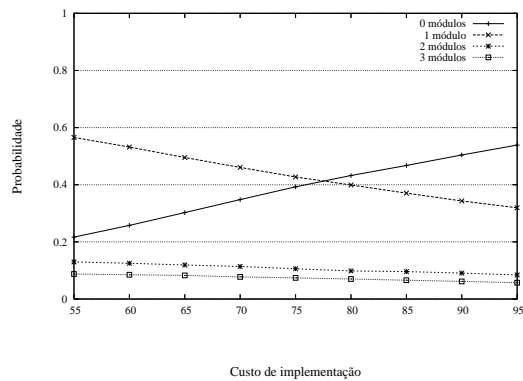
(a) Valor de um projecto modular



(b) Número médio de ensaios por módulo



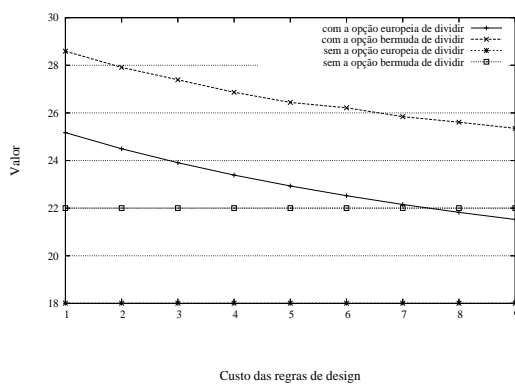
(c) Probabilidades associadas a cada estratégia



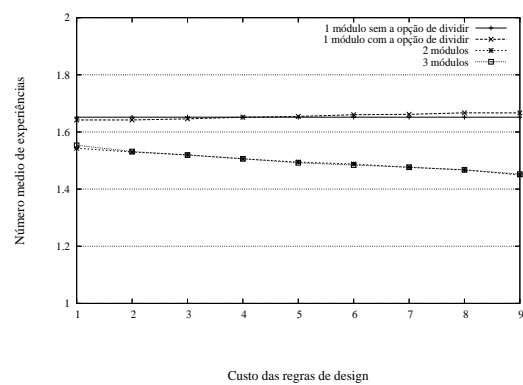
(d) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

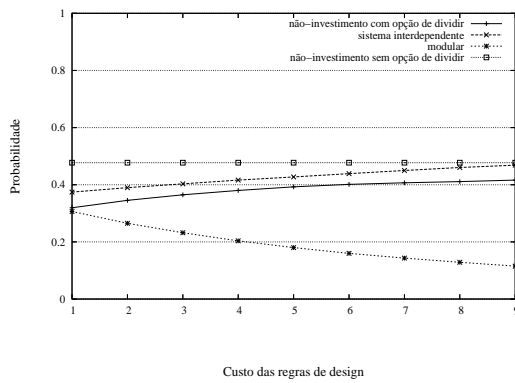
Figura 4.42: A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do custo das regras de *design*



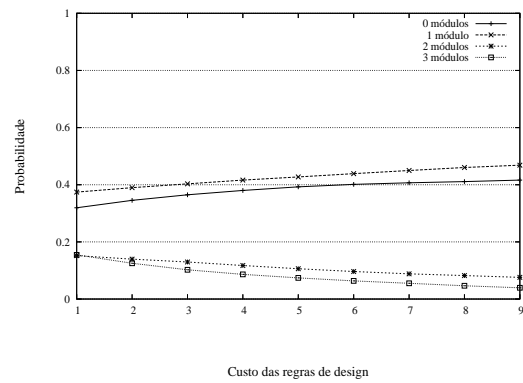
(a) Valor de um projecto modular



(b) Número médio de ensaios por módulo



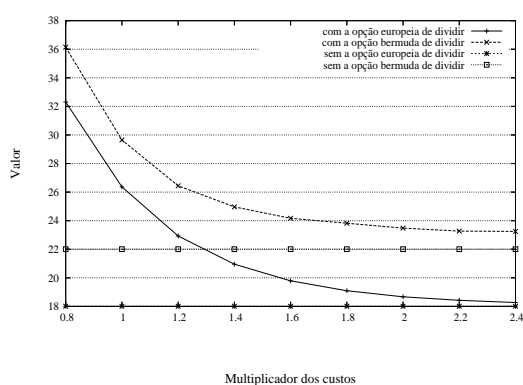
(c) Probabilidades associadas a cada estratégia



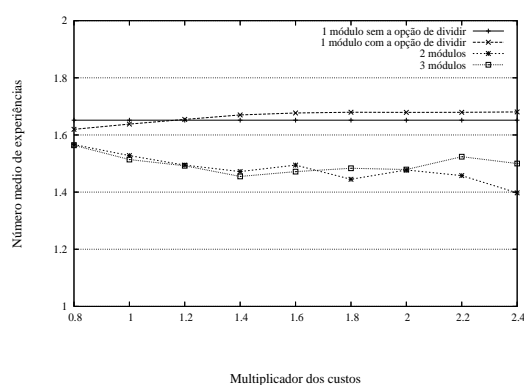
(d) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

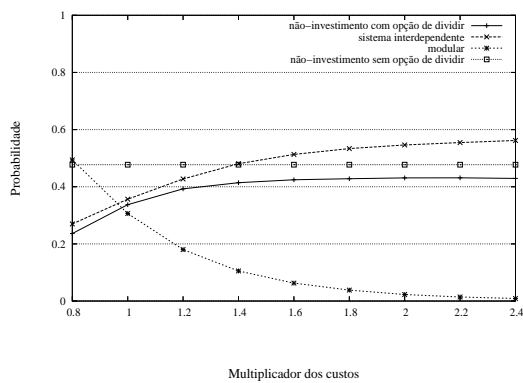
Figura 4.43: A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do multiplicador dos custos



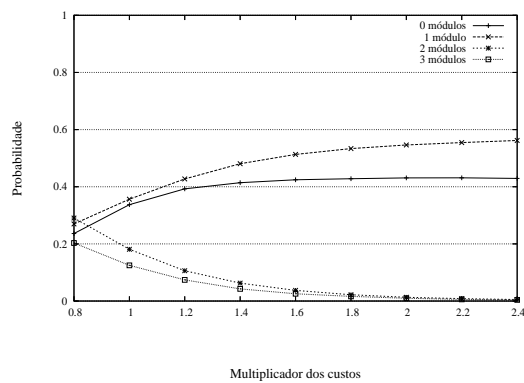
(a) Valor de um projecto modular



(b) Número médio de ensaios por módulo



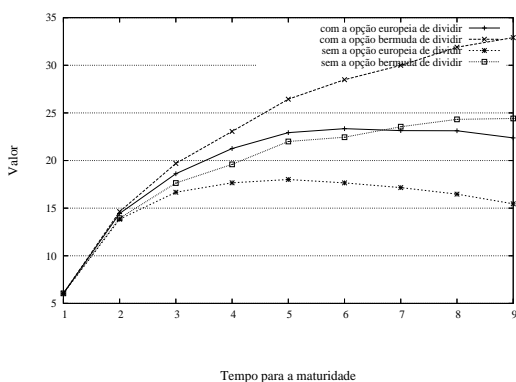
(c) Probabilidades associadas a cada estratégia



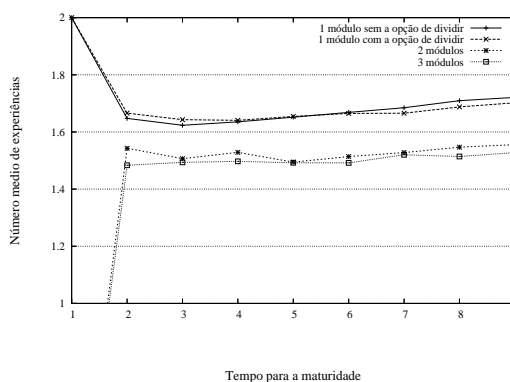
(d) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

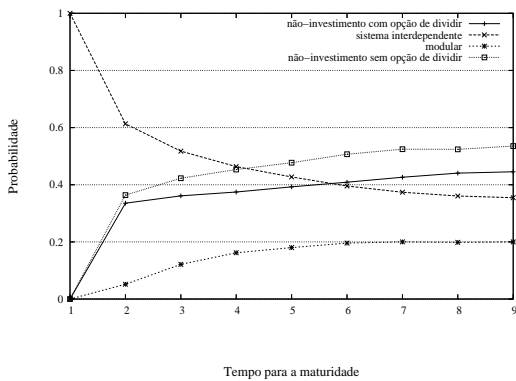
Figura 4.44: A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do horizonte temporal do projecto



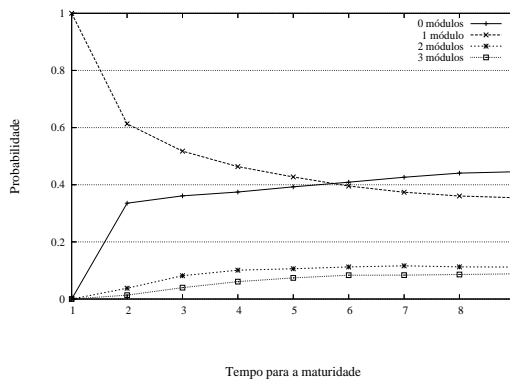
(a) Valor de um projecto modular



(b) Número médio de ensaios por módulo



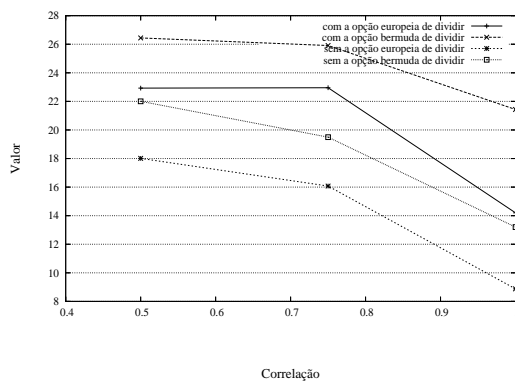
(c) Probabilidades associadas a cada estratégia



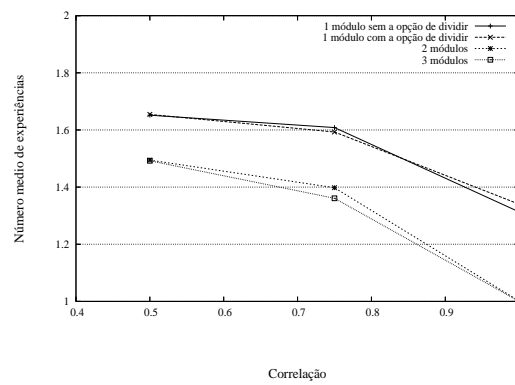
(d) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

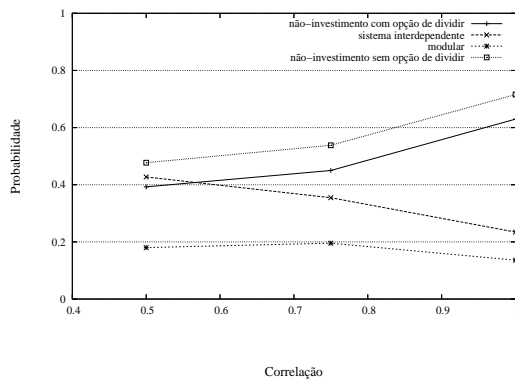
Figura 4.45: A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito da correlação entre os módulos da mesma configuração



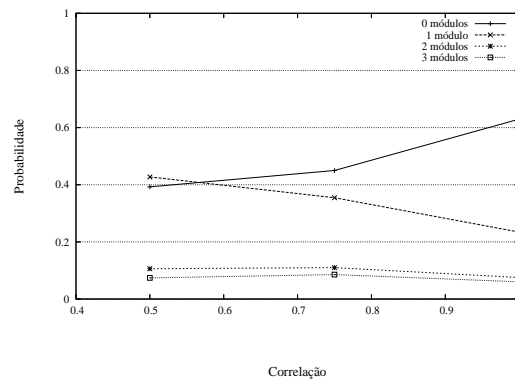
(a) Valor de um projecto modular



(b) Número médio de ensaios por módulo



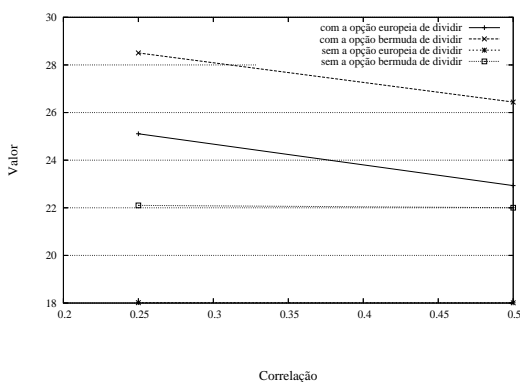
(c) Probabilidades associadas a cada estratégia



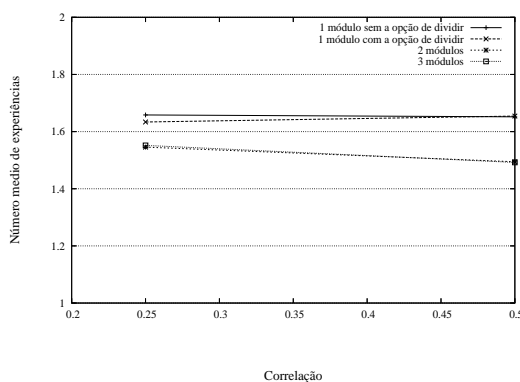
(d) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

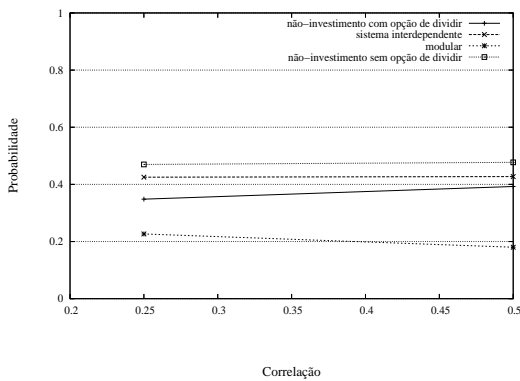
Figura 4.46: A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do correlação entre os módulos e o sistema



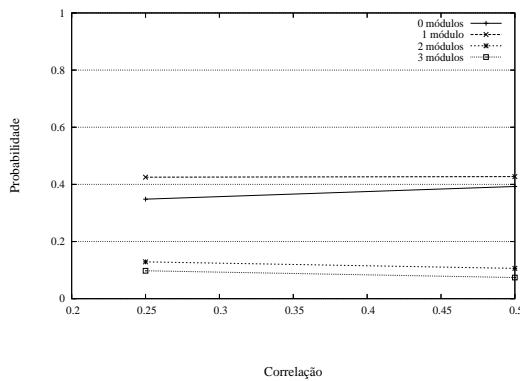
(a) Valor de um projecto modular



(b) Número médio de ensaios por módulo



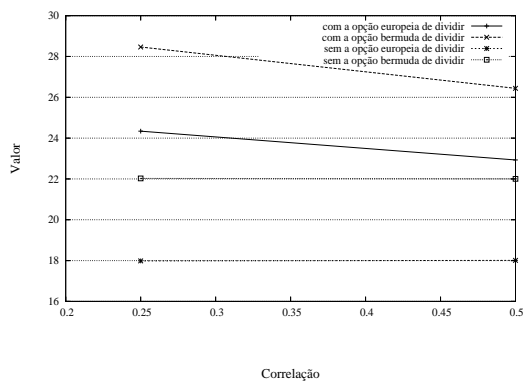
(c) Probabilidades associadas a cada estratégia



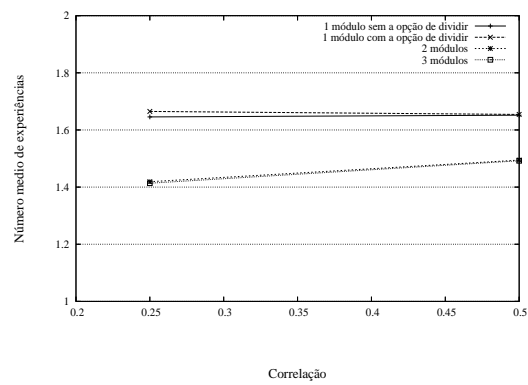
(d) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

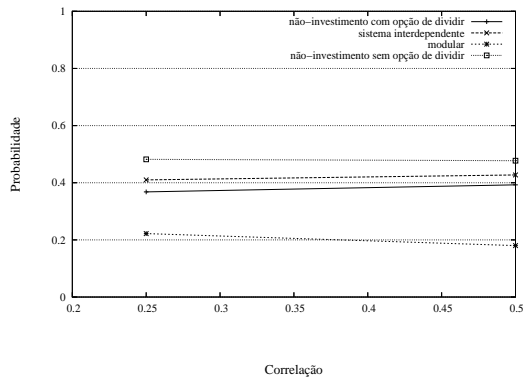
Figura 4.47: A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do correlação entre módulos de diferentes configurações



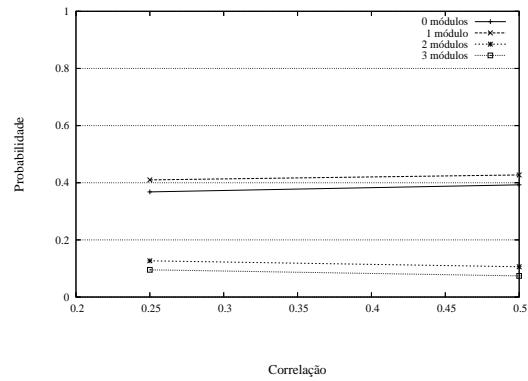
(a) Valor de um projecto modular



(b) Número médio de ensaios por módulo



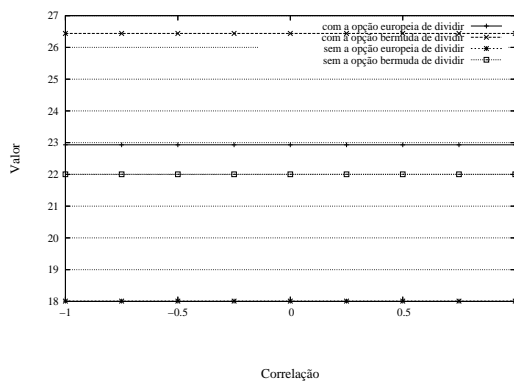
(c) Probabilidades associadas a cada estratégia



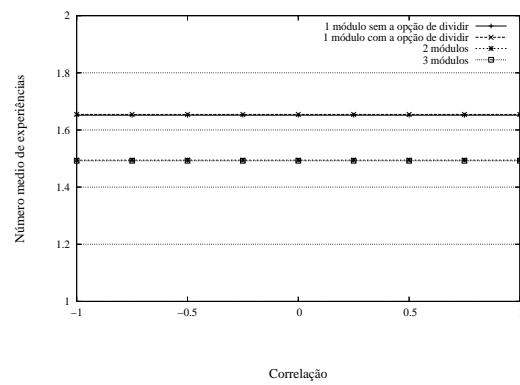
(d) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

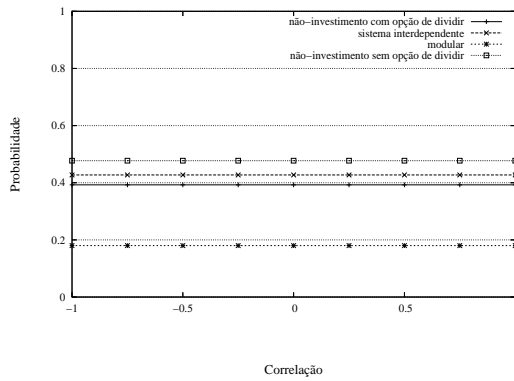
Figura 4.48: A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - the effect of the correlation between experiments of each module



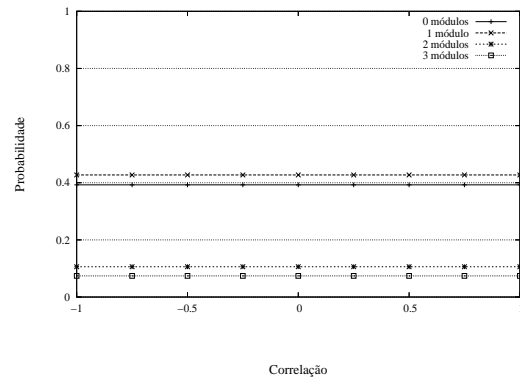
(a) Valor de um projecto modular



(b) Número médio de ensaios por módulo



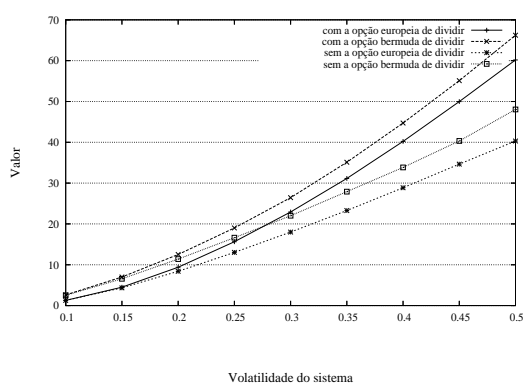
(c) Probabilidades associadas a cada estratégia



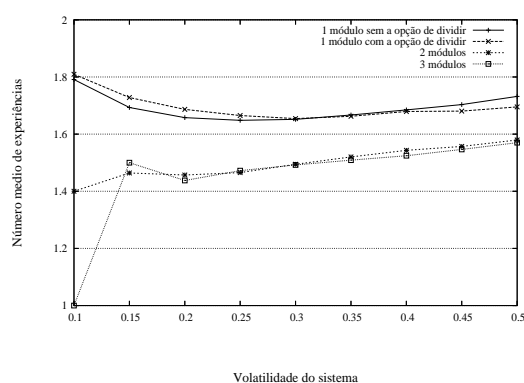
(d) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

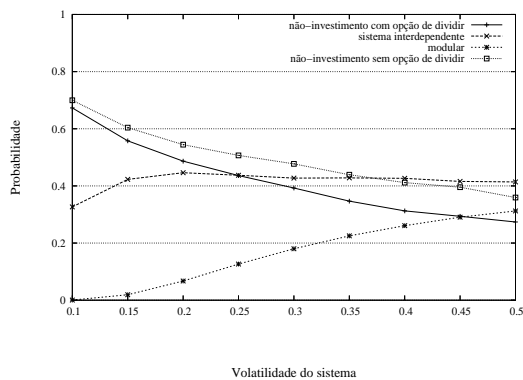
Figura 4.49: A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito da volatilidade do sistema



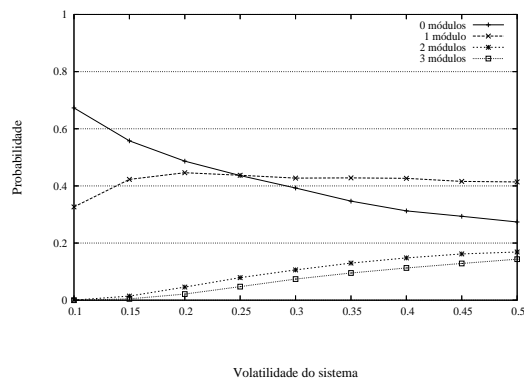
(a) Valor de um projecto modular



(b) Número médio de ensaios por módulo



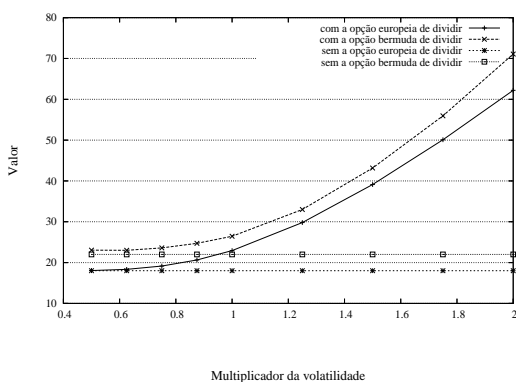
(c) Probabilidades associadas a cada estratégia



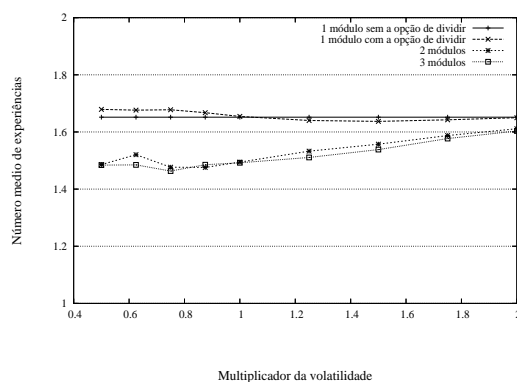
(d) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

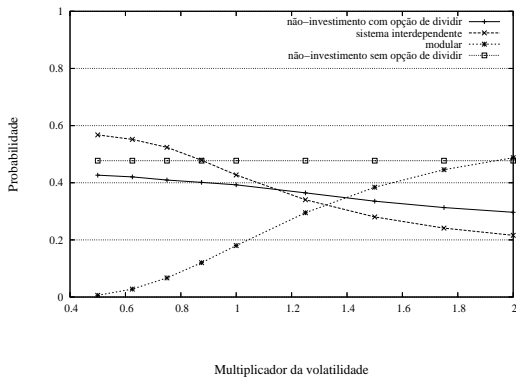
Figura 4.50: A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do multiplicador da volatilidade



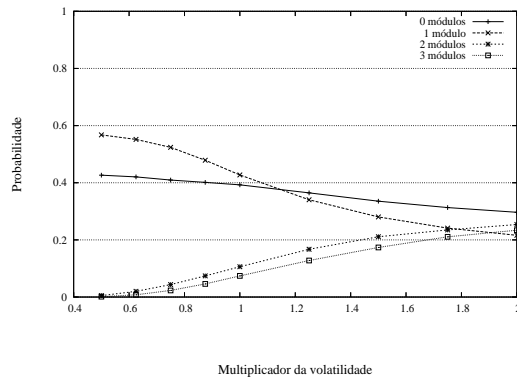
(a) Valor de um projecto modular



(b) Número médio de ensaios por módulo



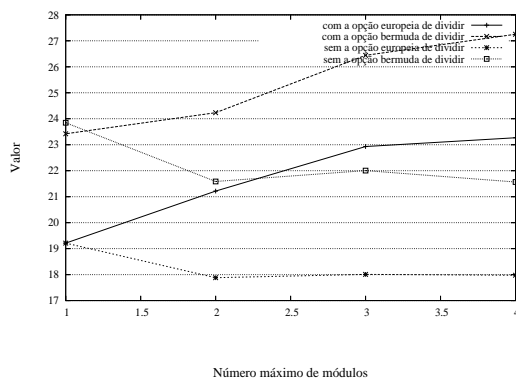
(c) Probabilidades associadas a cada estratégia



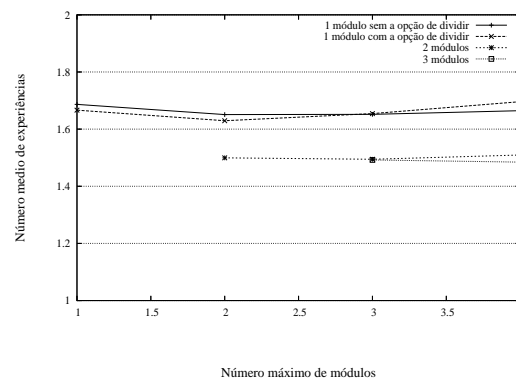
(d) Probabilidades associadas a cada configuração modular

4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

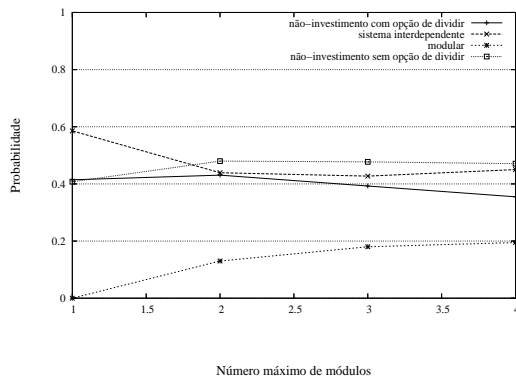
Figura 4.51: A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição - o efeito do número máximo de módulos



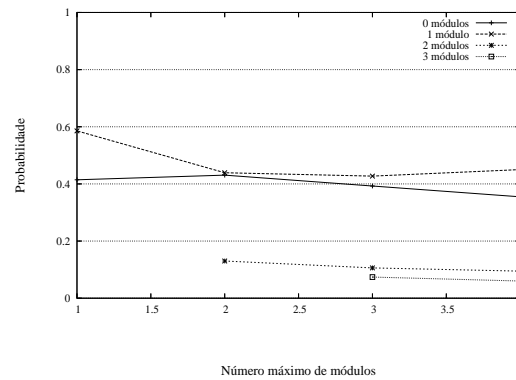
(a) Valor de um projecto modular



(b) Número médio de ensaios por módulo



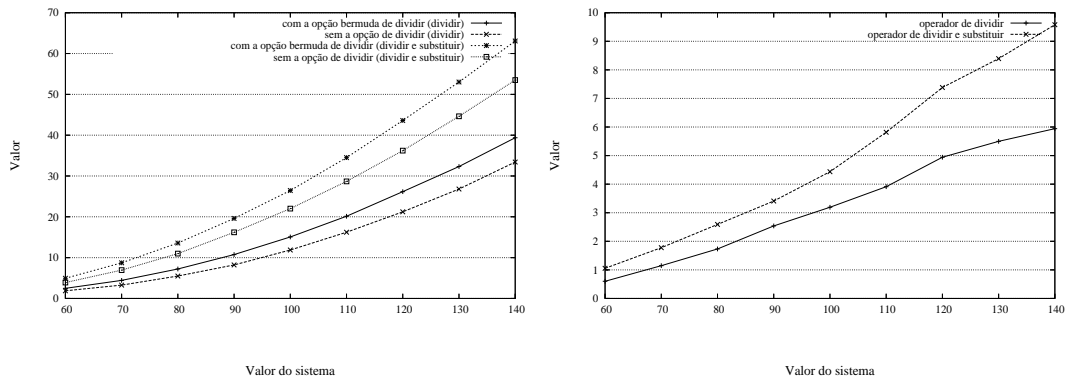
(c) Probabilidades associadas a cada estratégia



(d) Probabilidades associadas a cada configuração modular

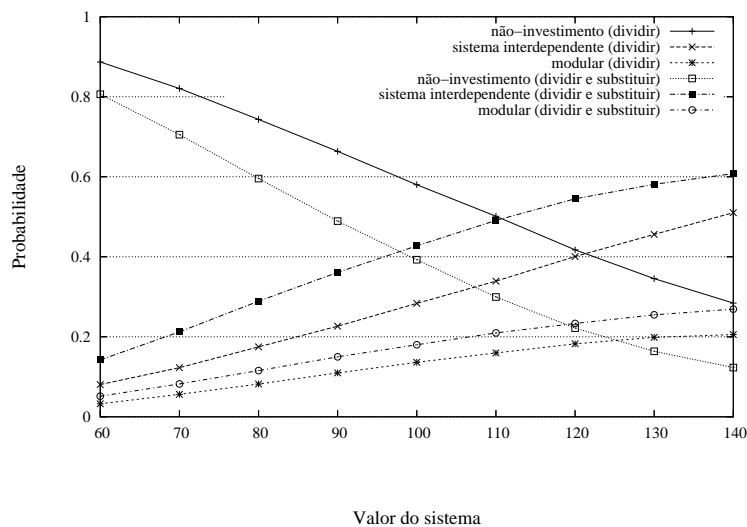
4.B.2 A comparação entre os operadores de substituição e de divisão

Figura 4.52: A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do valor do sistema/módulos



(a) Valor de um projecto modular

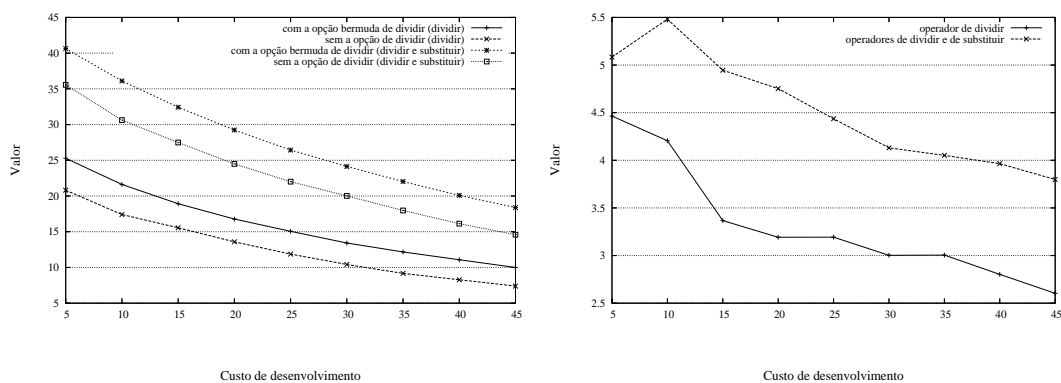
(b) Valor criado por cada operador



(c) Probabilidades associadas a cada estratégia

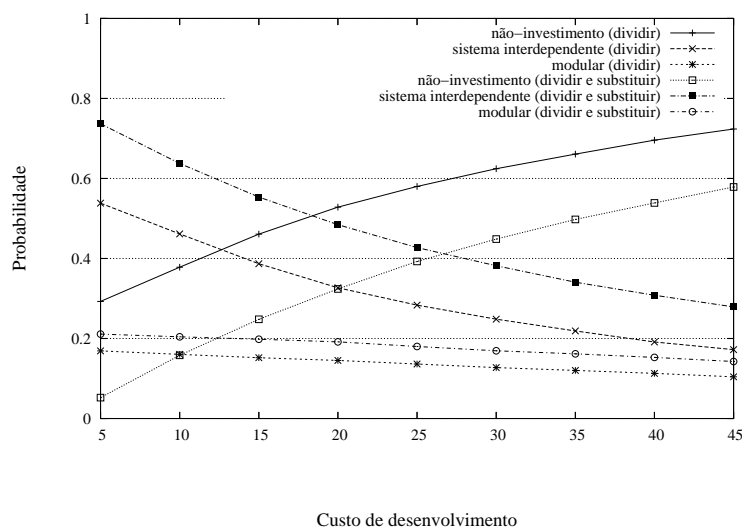
4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

Figura 4.53: A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do custo de desenvolvimento



(a) Valor de um projecto modular

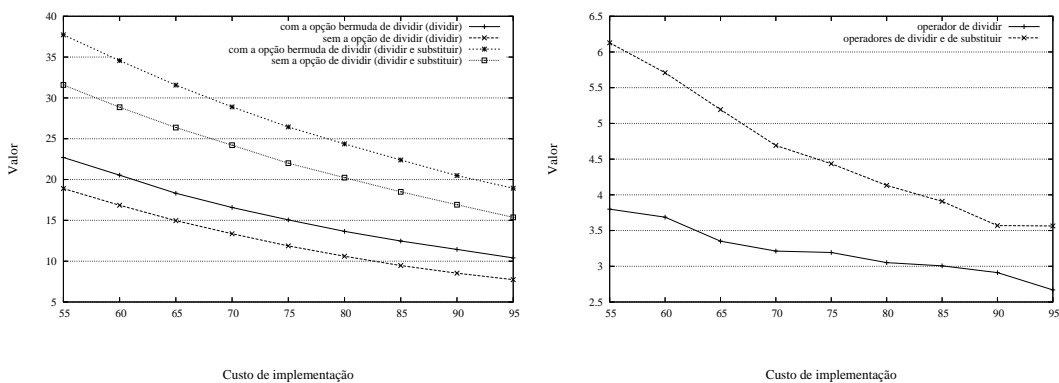
(b) Valor criado por cada operador



(c) Probabilidades associadas a cada estratégia

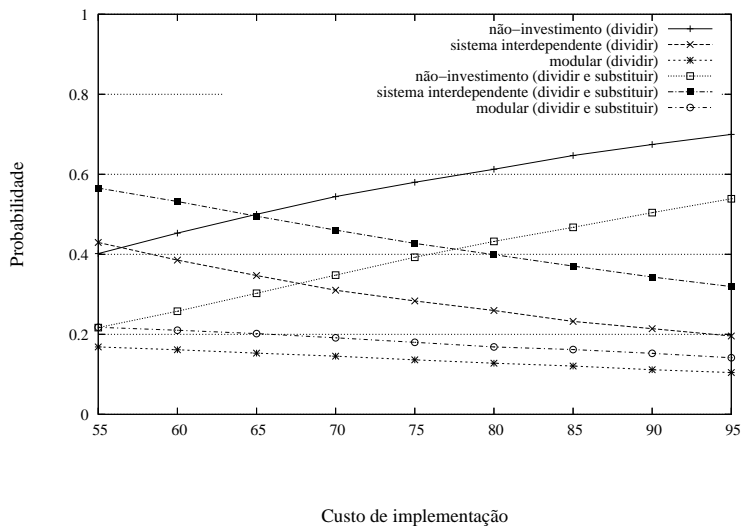
4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

Figura 4.54: A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do custo de implementação



(a) Valor de um projecto modular

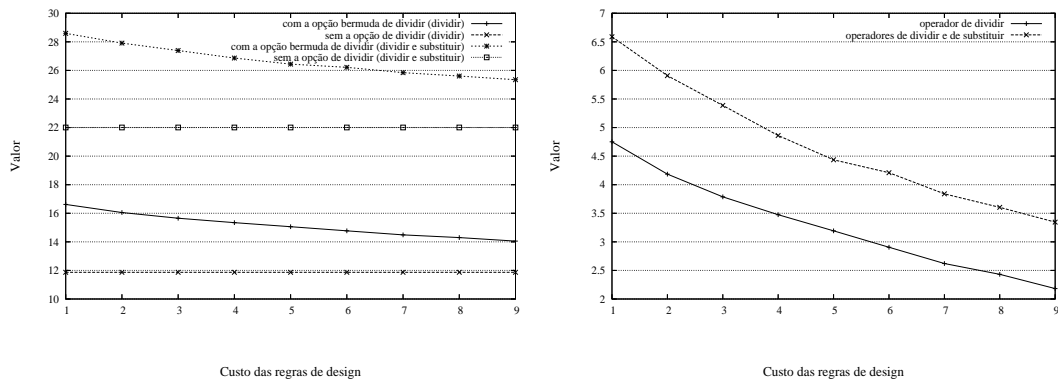
(b) Valor criado por cada operador



(c) Probabilidades associadas a cada estratégia

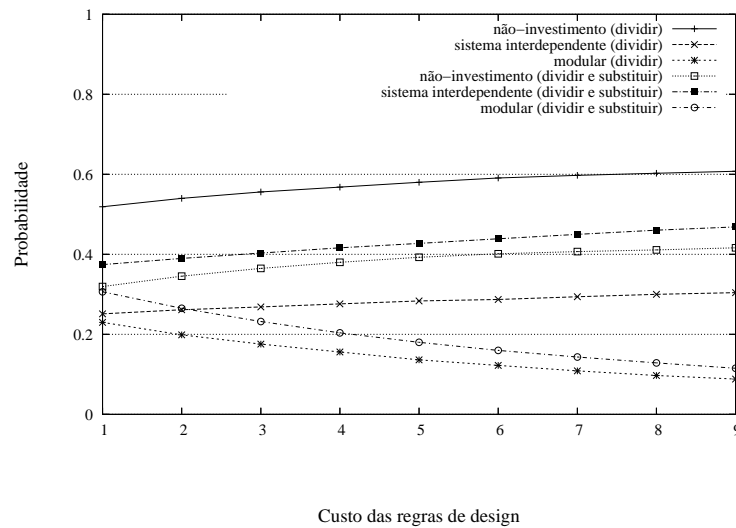
4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

Figura 4.55: A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do custo das regras de *design*



(a) Valor de um projecto modular

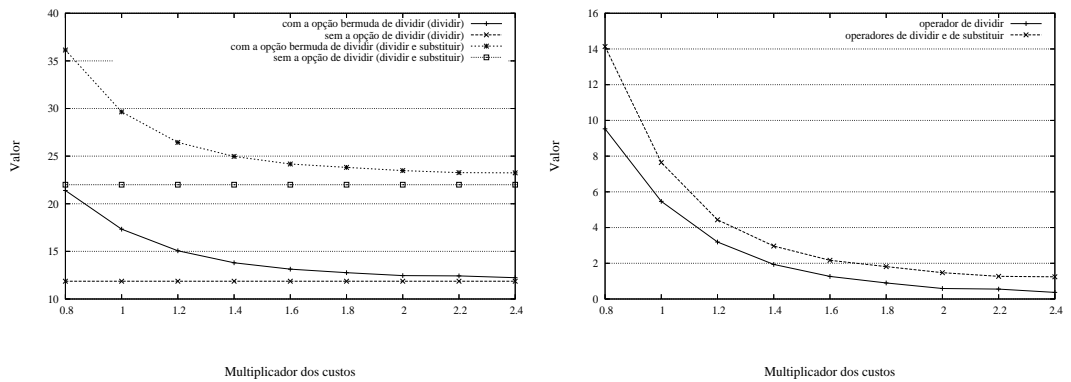
(b) Valor criado por cada operador



(c) Probabilidades associadas a cada estratégia

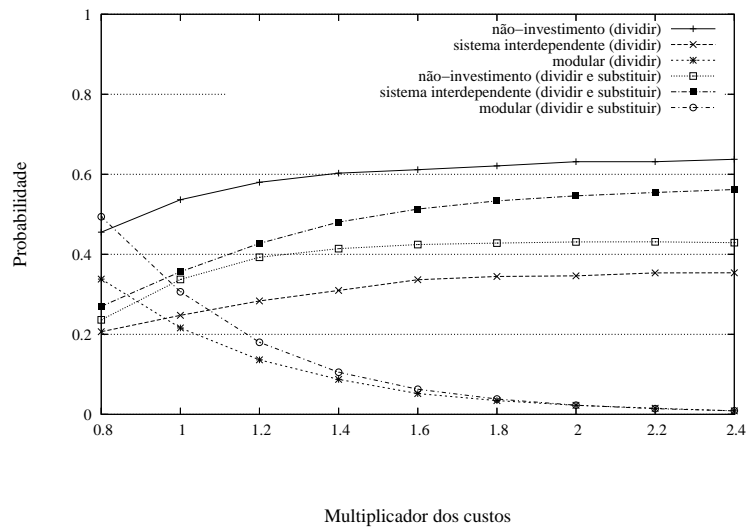
4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

Figura 4.56: A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do multiplicador dos custos



(a) Valor de um projecto modular

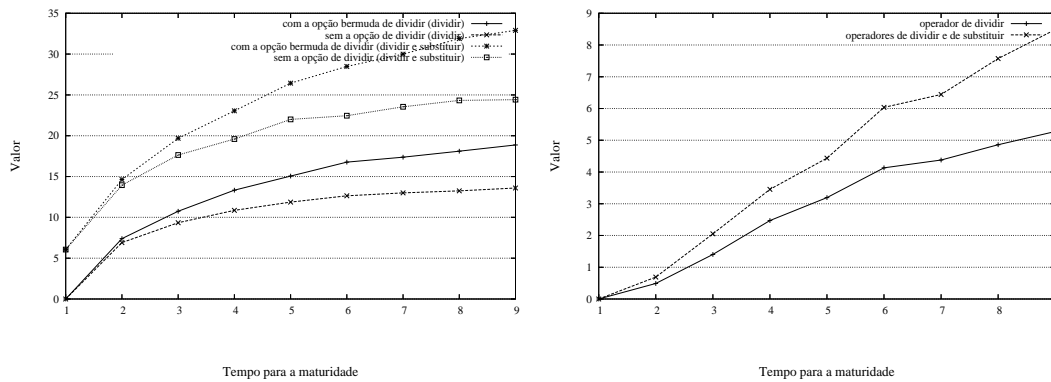
(b) Valor criado por cada operador



(c) Probabilidades associadas a cada estratégia

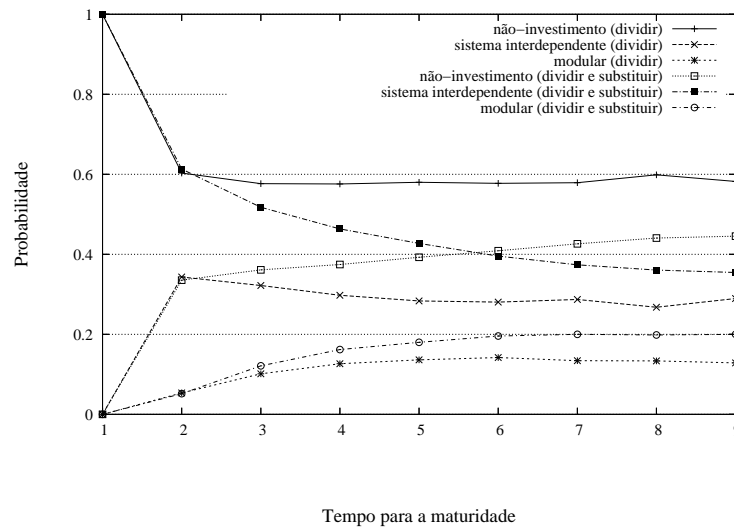
4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

Figura 4.57: A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do horizonte temporal do projecto



(a) Valor de um projecto modular

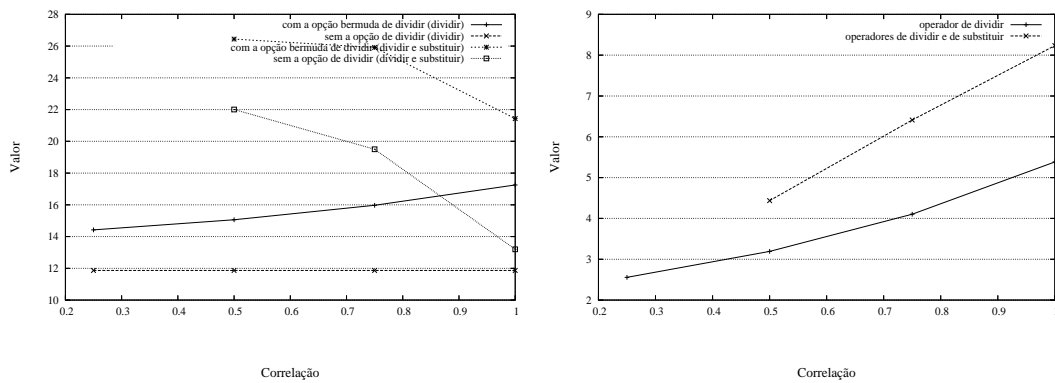
(b) Valor criado por cada operador



(c) Probabilidades associadas a cada estratégia

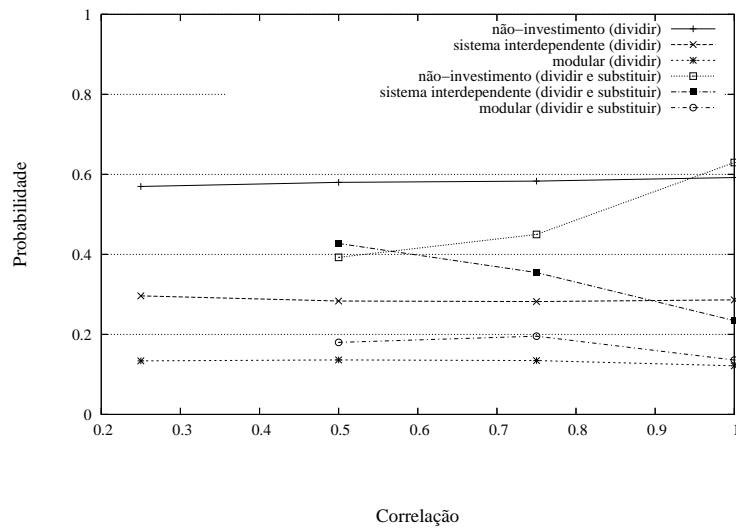
4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

Figura 4.58: A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito da correlação entre os módulos da mesma configuração



(a) Valor de um projecto modular

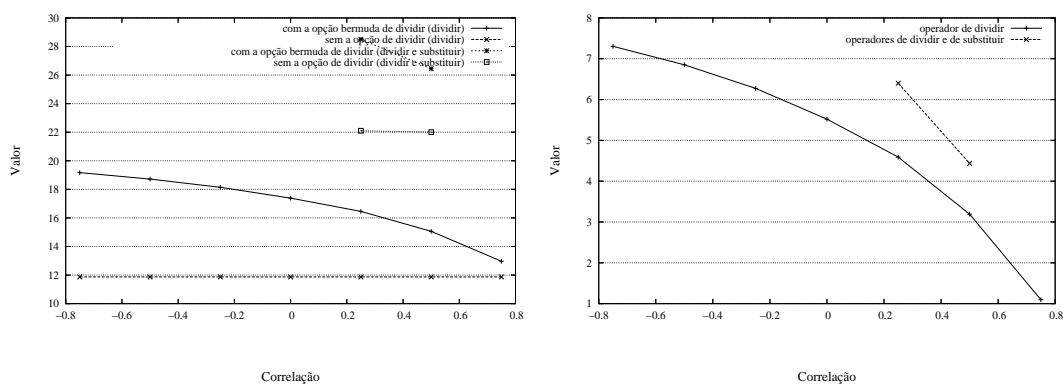
(b) Valor criado por cada operador



(c) Probabilidades associadas a cada estratégia

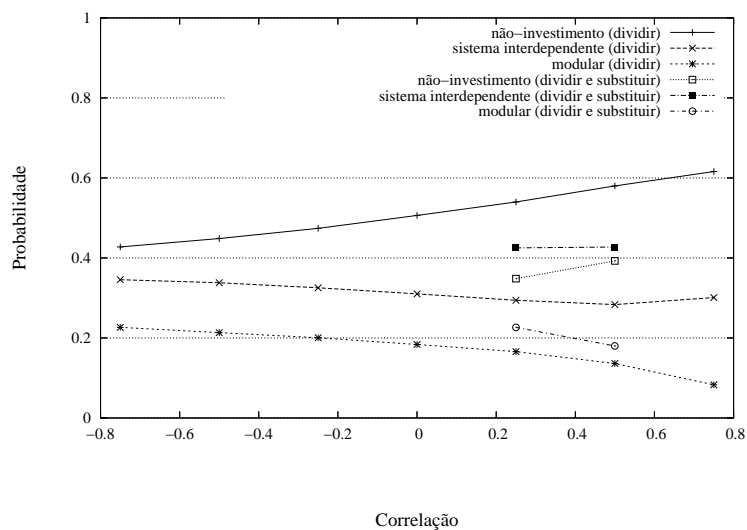
4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

Figura 4.59: A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do correlação entre os módulos e o sistema



(a) Valor de um projecto modular

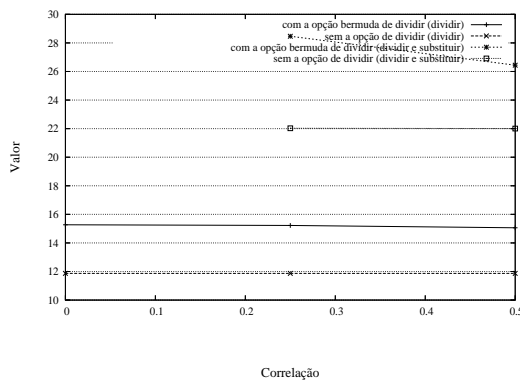
(b) Valor criado por cada operador



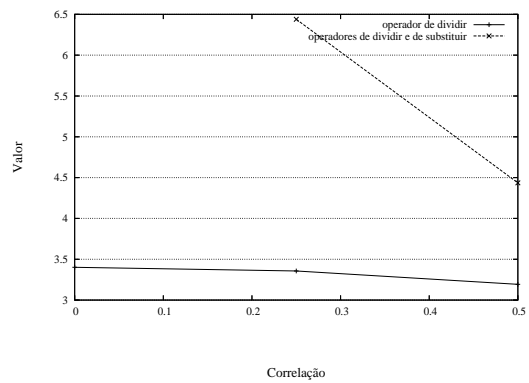
(c) Probabilidades associadas a cada estratégia

4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

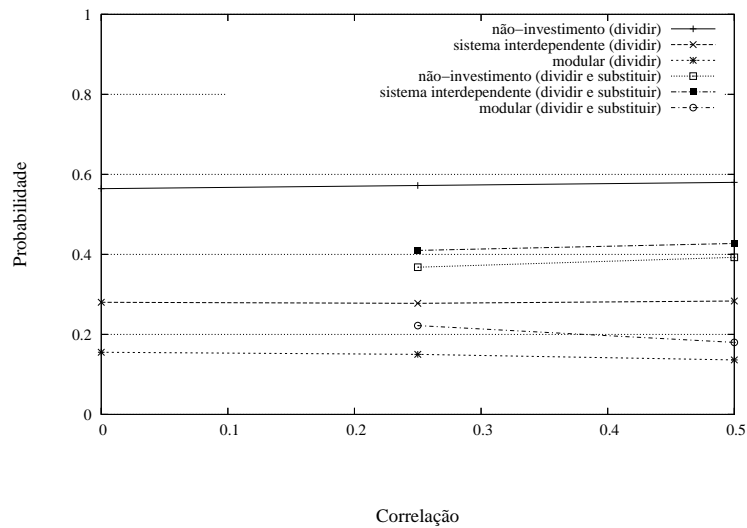
Figura 4.60: A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do correlação entre módulos de diferentes configurações



(a) Valor de um projecto modular



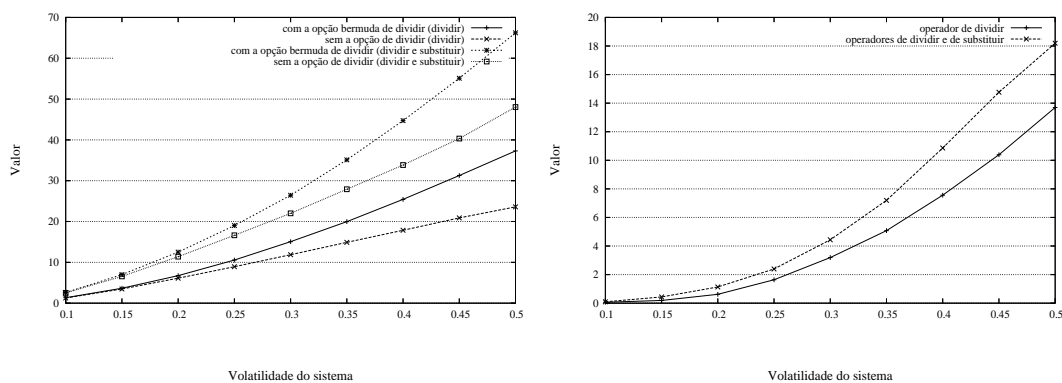
(b) Valor criado por cada operador



(c) Probabilidades associadas a cada estratégia

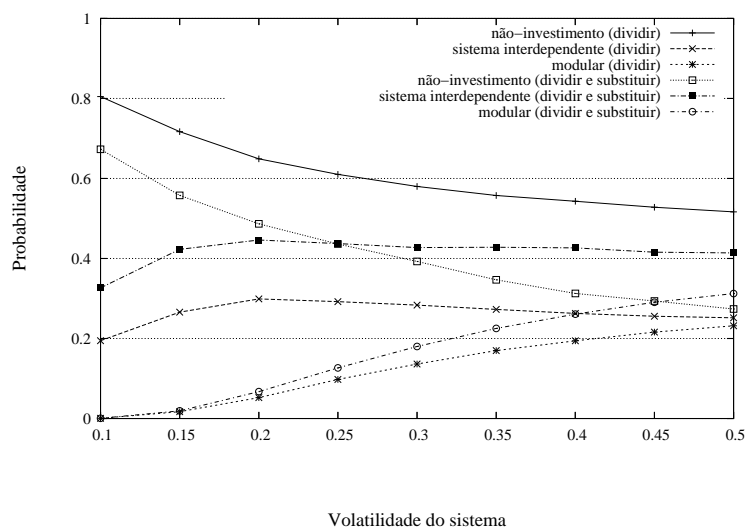
4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

Figura 4.61: A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito da volatilidade do sistema



(a) Valor de um projecto modular

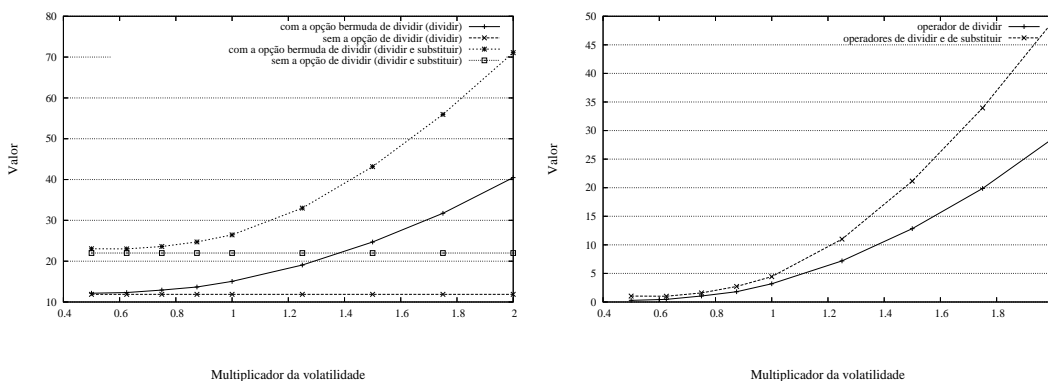
(b) Valor criado por cada operador



(c) Probabilidades associadas a cada estratégia

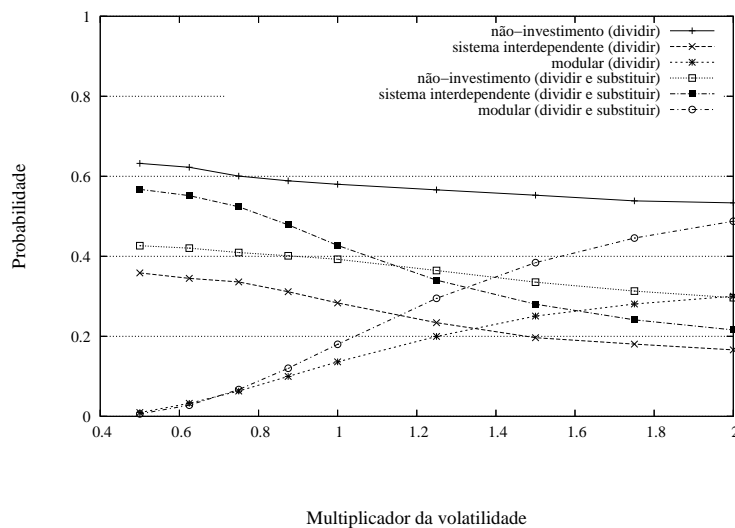
4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

Figura 4.62: A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do multiplicador da volatilidade



(a) Valor de um projecto modular

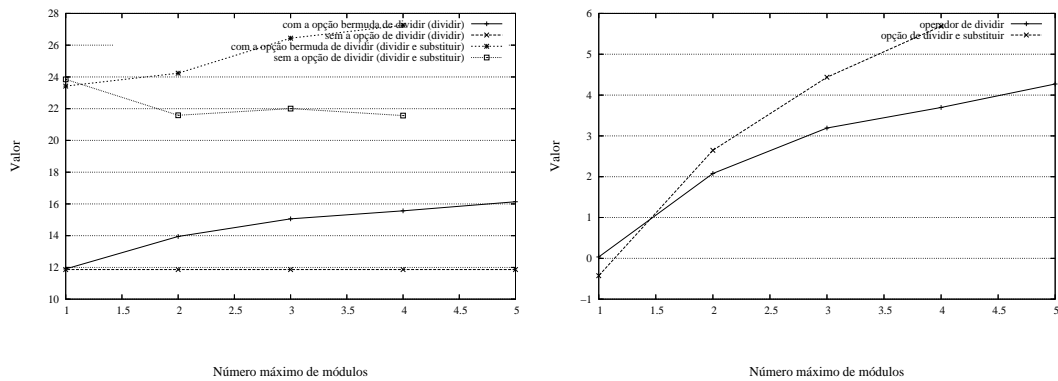
(b) Valor criado por cada operador



(c) Probabilidades associadas a cada estratégia

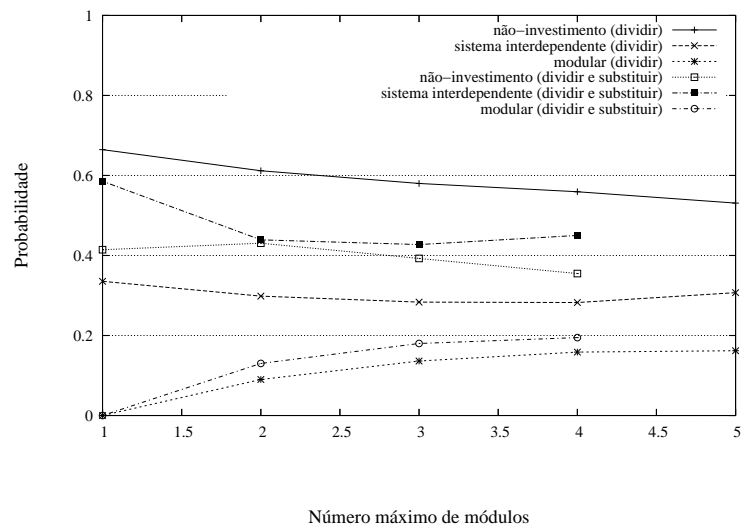
4.B. A avaliação de um projecto modular com os operadores de divisão e substituição

Figura 4.63: A avaliação de um projecto modular: comparação entre os operadores de divisão e substituição - o efeito do número máximo de módulos



(a) Valor de um projecto modular

(b) Valor criado por cada operador



(c) Probabilidades associadas a cada estratégia

Capítulo 5

Conclusões, limitações e sugestões para investigação futura

5.1 Principais conclusões

A modularidade é cada vez mais uma característica fundamental, por exemplo, de muitos produtos e projectos de investimento. O modelo de avaliação de projectos modulares proposto nesta tese, sendo uma extensão do modelo de Baldwin e Clark (2000), fundamenta-se na ideia central de que a modularidade cria uma carteira de opções reais que, num contexto de incerteza, permitem uma maior flexibilidade no desenho, produção e utilização dos produtos.

Como referimos no capítulo 2, a avaliação das opções reais de um projecto não requer pressupostos adicionais em relação à avaliação estática. No entanto, na presença de incerteza, flexibilidade e irreversibilidade parcial do investimento, apenas no contexto das opções reais se pode definir, consistentemente, a estratégia e determinar o valor de um projecto de investimento. Na presente tese, assumiu-se que os mercados são suficientemente completos, i.e. é possível replicar o risco não sistemático no mercado dos activos transaccionados. Tal não significa que se ignore que, muitas vezes, tal não se verificará. No entanto, o estudo das consequências, quer a nível teórico quer prático, da existência de mercados incompletos, é ainda uma área de investigação embrionária, se se quiser manter na avaliação a "disciplina" dos mercados. Se se prescindir desta é sempre possível a avaliação das opções reais, de acordo com as preferências individuais dos agentes. Sublinhamos, uma vez mais, que esta (a avaliação subjectiva) seria também necessária numa avaliação, na presença de mercados incompletos.

A avaliação de opções com múltiplos activos ou variáveis-estado subjacentes, implica, geralmente, a necessidade de recorrer a métodos que não sofram da

5.1. Principais conclusões

”maldição da dimensionalidade”. Recorrendo à simulação é possível avaliar estas opções que, no contexto das opções reais, são, muito frequentemente, do tipo americano ou bermudas.

A possibilidade de avaliar carteiras de opções com interacções entre si, como acontece nos projectos modulares, tal como se mostrou no capítulo 3 foi significativamente facilitada por Gamba (2003) que estendeu o método de simulação de Longstaff e Schwartz (2001).

Foram vários os contributos propostos nesta tese, a saber: uma análise empírica sobre a precisão do método LSM e da sua extensão, um algoritmo alternativo ao de Gamba (2003) para avaliar opções mutuamente exclusivas e um modelo de avaliação de opções reais criadas pela modularidade, estendendo do modelo de Baldwin e Clark (2000), considerando os operadores de divisão e de substituição.

Realizou-se, no capítulo 3, uma análise empírica, bastante detalhada, da precisão do método LSM e da extensão de Gamba (2003), na avaliação de opções sobre o máximo de vários activos, de opções compostas e de opções mutuamente exclusivas. A análise da precisão da extensão de Gamba (2003) na avaliação de carteiras de opções, não tinha sido, até ao momento, realizada. Analisou-se, ainda, a convergência do método para diferentes famílias de polinómios e diferentes métodos de simulação.

Em termos gerais, o método LSM permite obter avaliações bastante precisas. No entanto, a sua precisão depende do tipo de opções sob avaliação e dos seus parâmetros.

Conforme se evidenciou no capítulo 3, os testes numéricos realizados sugerem que a utilização de polinómios Laguerre ponderados, produz resultados mais precisos do que a utilização das outras famílias de polinómios, particularmente na avaliação de carteiras de opções. Aumentar o número de funções-base permite obter resultados mais precisos, embora a um ritmo decrescente, ou seja, aumenta cada vez menos. Para obter resultados bastante precisos não é necessário utilizar um grande número de termos dos polinómios. Verificou-se, ainda, que o método converge aumentando o número de caminhos simulados, uma vez mais a um ritmo decrescente.

A utilização apenas dos caminhos *in-the-money*, melhora substancialmente a precisão na avaliação de opções sobre o máximo de vários activos, não tendo um efeito significativo na avaliação das restantes opções analisadas.

As sequências de baixa discrepância tendem a produzir resultados mais precisos. Por exemplo, as sequências de Faure produzem, muitas vezes, resultados menos precisos do que os métodos pseudo-aleatórios. Verificou-se que as sequências de

baixa discrepância, em particular as de Sobol, com a inicialização de Silva e Barbe (2003), produzem resultados bastante mais precisos que os métodos de simulação pseudo-aleatórios. Uma vez mais, os resultados dependem do problema em análise.

Uma outra contribuição diz respeito ao algoritmo proposto para avaliar opções mutuamente exclusivas, que permite obter resultados mais precisos que o algoritmo de Gamba (2003), com recurso a um menor número de funções-base. Possibilita, ainda, identificar com maior rigor a melhor estratégia disponível.

No capítulo 3, concluiu-se que o método LSM é bastante preciso para as opções analisadas. Não é, contudo, possível replicar a análise para opções mais complexas. Qualquer análise deste género implica a existência de um valor de referência ("benchmark") preciso para o valor da opção. Ora, a simulação é precisamente um método com mais vantagens quando não existem outros métodos para calcular o valor da opção, ou quando existindo não permitem obter soluções em tempo útil, devido, por exemplo, à conhecida "maldição da dimensionalidade". É este o caso das opções criadas pela modularidade.

O modelo proposto, no capítulo 4, utiliza o método LSM para avaliar as opções criadas pelos operadores de divisão e substituição da modularidade. Trata-se de um modelo com pressupostos bem menos restritivos do que o modelo de Baldwin e Clark (2000), tendo-se desenvolvido na perspectiva das opções reais. Ao se ter admitido a possibilidade de correlação entre os módulos e o sistema, o desenvolvimento faseado dos projectos e a possibilidade de adiar a modularização, permitiu o desenvolvimento de um modelo de avaliação da modularidade mais realista.

Assim, o modelo permite, entre outros, obter o valor do projecto modular e determinar a estratégia óptima a seguir, no que respeita ao momento de modularização, ao número de módulos (incluindo a possibilidade de escolher um sistema interdependente, ou mesmo nada fazer) e ao número de ensaios por módulo.

No mesmo capítulo 4, a análise de sensibilidade realizada permitiu, também, identificar algumas das variáveis críticas neste tipo de projectos, nomeadamente os valores, os custos e os riscos relativos das diversas configurações modulares. O impacto das correlações, como se verificou, pode ser significativo e não deve, portanto, ser ignorado. A possibilidade de um projecto ser modularizado não significa necessariamente que o deva ser. Também não significa que, mesmo que essa seja a melhor escolha no momento, deva ser já modularizado, na medida em que a possibilidade de adiar a decisão permite aproveitar a informação, que se vier a revelar, sobre o valor de cada estratégia. No caso particular em que os módulos e o sistema têm os mesmos valores e custos de investimento, e são perfeitamente correlacionados, desaparece qualquer incentivo à modularização. Em qualquer outro caso existe, quase sempre, algum incentivo em adiar a decisão de

investir, dada a possibilidade de, face à evolução estocástica dos valores, poder vir a ser escolhida uma configuração modular.

Mostrou-se, ainda, que, a modularidade permite, mesmo aumentando os custos, que o valor do projecto seja superior à situação em que só é possível investir num produto não modular. Sendo possível a escolha entre várias alternativas para o mesmo módulo, pela via do operador de substituição, verifica-se também um acréscimo de valor. Note-se, no entanto, que tal como se evidenciou na secção 4.3.1.6 (página 115), uma parte significativa do valor resulta, não tanto da modularidade mas da possibilidade de escolha entre duas alternativas para o mesmo produto: ou o sistema interdependente, ou o conjunto de módulos de uma configuração, quando estes têm que ser todos implementados. O mesmo valor poderia ser obtido sem recurso à modularização, dado que esta situação se assemelha à escolha entre duas alternativas para o sistema interdependente.

5.2 Limitações e sugestões para investigação futura

Os modelos de avaliação das opções reais assumem, quase sempre, um de dois pressupostos: a existência de mercados suficientemente completos ou a neutralidade face ao risco. O modelo de avaliação proposto nesta tese assumiu a existência de mercados suficientemente completos. Tal não significa que se ignore que tal não será a realidade, muitas vezes. No entanto, as consequências da existência de mercados incompletos foram ainda pouco estudadas. Sendo, porventura, esta uma limitação, deste e da maioria dos modelos de opções reais, ela não invalida a utilização da destes modelos. Será necessário, no entanto, utilizar uma avaliação subjectiva da incerteza, sem a "disciplina do mercado". Enquanto limitação é, simultaneamente, um desafio importante para a investigação futura, também na avaliação da modularidade.

No modelo proposto nesta tese, foram apenas considerados os operadores modulares da divisão e da substituição. Um modelo que incorpore outros operadores, será, necessariamente, mais complexo mas também mais realista. O compromisso entre a complexidade e o realismo é sempre necessário e será certamente dependente do problema em análise. Nos exemplos propostos na componente empírica desta tese, assumiu-se que os módulos são simétricos, mas a flexibilidade do método permite qualquer outro pressuposto que reflecta eventuais assimetrias de valor, custo e risco entre os módulos, que terão, obviamente, impacto sobre a estratégia a desenvolver.

A aplicação do modelo a um projecto concreto, implica a necessidade de se considerarem os problemas associados à estimação dos parâmetros necessários. No modelo proposto merecerá certamente uma atenção particular a matriz de covariâncias dos módulos. A "calibração" dos modelos é uma das áreas de investigação que tem sido algo descurada na literatura das opções reais.

Finalmente, a introdução de modelos de equilíbrio que considerem o efeito da concorrência é, certamente, uma das possibilidades de investigação futura. O facto de as opções reais não serem um direito exclusivo, sendo partilhado por outros agentes, tem efeitos importantes nas decisões estratégicas inerentes aos projectos modulares.

5.2. Limitações e sugestões para investigação futura

Bibliografia

- ABRAMOWITZ, M e STEGUN, I A (1972) *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York.
- ALBERTÍ, Meritxell, LEÓN, Ángel e LLOBET, Gerard (2003) “Evaluation of a Taxi Sector Reform: a Real Options Approach”, CEMFI.
- ANDERSON, Leif e BROADIE, Mark (2004) “Primal-Dual Simulation Algorithm for Pricing Multidimensional American Options”, *Management Science*, vol. 50(9); pp. 1222–1234.
- AREAL, Nelson e TAYLOR, Stephen J (2005) “Improvements to the Least Squares Monte Carlo (LSMC) Option Valuation Method”, Working Paper.
- BALDWIN, Carliss Y e CLARK, Kim B (1994) “Modularity-In-Design: an Analysis Based on the Theory of Real Options”, Harvard Business School.
- BALDWIN, Carliss Y e CLARK, Kim B (1997) “Managing in an Age of Modularity”, *Harvard Business Review*; pp. 84–93.
- BALDWIN, Carliss Y e CLARK, Kim B (2000) *Design Rules - Volume 1: the Power of Modularity*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- BALDWIN, Carliss Y e CLARK, Kim B (2001) “Modularity after the Crash”, Harvard Business School.
- BARRAQUAND, J e MARTINEAU, D (1995) “Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 30; pp. 383–405.
- BLACK, Fisher e SCHOLES, Myron (1973) “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, vol. 81(3); pp. 637–654.
- BOLLEN, Nicolas P B (1999) “Real Options and Product Life Cycles”, *Management Science*, vol. 45; pp. 670–684.
- BOYLE, Phelim P (1977) “Options: a Monte Carlo Approach”, *Journal of Financial Economics*, vol. 4; pp. 323–338.
- BOYLE, Phelim P, BROADIE, Mark e GLASSERMAN, Paul (1997) “Monte Carlo Methods for Security Pricing”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 21(8); pp. 1267–1321.

- BOYLE, Phelim P, EVNINE, Jeremy e GIBBS, Stephen (1989) “Numerical Evaluation of Multivariate Contingent Claims”, *The Review of Financial Studies*, vol. 2(2); pp. 241–250.
- BRATLEY, Paul e FOX, Bennett L (1988) “Algorithm 659: Implementing Sobol’s Quasirandom Sequence Generator”, *ACM Transaction on Mathematical Software*, vol. 14(1); pp. 88–100.
- BREALEY, Richard A e MYERS, Stewart C (2003) *Principles of Corporate Finance*, Mc Graw-Hill, 7^a ed.
- BRENNAN, Michael J e SCHWARTZ, Eduardo S (1977) “The Valuation of American Put Options”, *Journal of Finance*, vol. 32(2); pp. 449–462.
- BRENNAN, Michael J e SCHWARTZ, Eduardo S (1985) “Evaluating natural resource investments”, *Journal of Business*, vol. 58(2); pp. 135–157.
- BRENNAN, Michael J e TRIGEORGIS, Lenos (2000) *Project Flexibility, Agency, and Competition: New Developments in the Theory and Application of Real Options*, Oxford University Press, Oxford.
- BROADIE, Mark e DETEMPLE, Jerome (1996) “American Option Valuation: New Bounds, Approximation, and a Comparison of Existing Methods”, *Review of Financial Studies*, vol. 9(4); pp. 1211–1250.
- BROADIE, Mark e DETEMPLE, Jerome (2004) “Option Pricing: Valuation Models and Applications”, *Management Science*, vol. 50(9); p. 1145–1177.
- BROADIE, Mark e GLASSERMAN, Paul (1997a) “Pricing American-Style Securities Using Simulation”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 21(8); pp. 1323–1352.
- BROADIE, Mark e GLASSERMAN, Paul (1997b) “A Stochastic Mesh Method for Pricing High-Dimensional American Options”, Columbia University.
- CARRIÈRE, J F (1996) “Valuation of Early-Exercise Price of Options Using Simulation and Nonparametric Regression”, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 19(1); pp. 19–30.
- CARRIÈRE, J F (2001) “Linear Regression and Standardized Quasi-Monte Carlo for Approximating Optimal Stopping Times”, University of Alberta, Canada.
- CHILDS, Paul D, OTT, Steven H e TRIANTIS, Alexander J (1998) “Capital Budgeting for Interrelated Projects: a Real Options Approach”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 33(3); pp. 305–334.
- CHILDS, Paul D e TRIANTIS, Alexander J (1999) “Dynamic R&D Investment Policies”, *Management Science*, vol. 45(10); pp. 1359–1377.
- CLÉMENT, Emmanuelle, LABERTON, Damien e PROTTER, Philip (2002) “An Analysis of a Least Squares Regression Method for American Option Pricing”, *Finance and Stochastics*, vol. 6(4); pp. 449–471.

- CORTAZAR, Gonzalo, GRAVET, Miguel e URZUA, Jorge (2005) “The Valuation of Multidimensional American Real Options using Computer-Based Simulation”, Pontificia Universidad Católica de Chile.
- COX, John C, INGERSOLL, Jonathan E e ROSS, Stephen A (1985) “An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices”, *Econometrica*, vol. 53(2); pp. 363–384.
- COX, John C, ROSS, Sheldon M e RUBINSTEIN, Mark (1979) “Option Pricing: a Simplified Approach”, *Journal of Financial Economics*, vol. 7; pp. 229–263.
- DIXIT, Avinash K e PINDYCK, Robert S (1994) *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, New Jersey.
- FAURE, Henri (1982) “Discrépance de Suites Associées à un Système de Numération (en Dimension s)”, *Acta Arithmetica*, vol. 41(4); pp. 337–351.
- FU, Michael C, LAPRISE, Scott B, MADAN, Dilip B, SU, Yi e WU, Rongwen (2000) “Pricing American Options: a Comparison of Monte Carlo Simulation Approaches”, University of Maryland.
- GAMBA, Andrea (2003) “Real Options Valuation: a Monte Carlo Approach”, University of Verona.
- GARCIA, D (2003) “Convergence and Biases of Monte Carlo Estimates of American Option Prices Using a Parametric Exercise Rule”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 27(10); pp. 1855–1879.
- GAYNOR, M. e BRADNER, S. (2001) “Using Real Options to Value Modularity in Standards”, *Knowledge, Technology & Policy*, vol. 14(2); pp. 41–66.
- GLASSERMAN, Paul e YU, Bin (2004) “Number of Paths Versus Number of Basis Functions in American Option Pricing”, *The Annals of Applied Probability*, vol. 14(4); pp. 2090–2119.
- GONÇALVES-PINTO, Luís e AZEVEDO-PEREIRA, José A (2005) “Stock Valuation Using a Contingent Claims Approach: the Case of Portugal Telecom”, ISEG - School of Economics and Management, Technical University of Lisbon.
- HALTON, J H (1960) “On the Efficiency of Certain Quasi-Random Sequences of Points in Evaluating Multi-Dimensional Integrals”, *Mumerische Mathematik*, vol. 2; pp. 84–90.
- HARRISON, J M e KREPS, D M (1979) “Martingales and Arbitrage in Multiperiods Securities Markets”, *Journal of Economic Theory*, vol. 20(3); pp. 381–408.
- HARRISON, J M e PLISKA, S R (1981) “Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading”, *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 11; pp. 261–271.
- HAUGH, Martin B e KOGAN, Leonid (2004) “Pricing American Options: A Duality Approach”, *Operations Research*, vol. 52(2); pp. 258–270.

- HENDERSON, Vicky (2004) "Valuing the Option to Invest in an Incomplete Market", Princeton University.
- HERTZ, David B (1964) "Risk Analysis in Capital Investment", *Harvard Business Review*; pp. 95–106.
- IBAÑEZ, A e ZAPATERO, F (2004) "Monte Carlo Valuation of American Options Through Computation of the Optimal Exercise Frontier", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 39(2); pp. 253–275.
- JACKEL, Peter (2002) *Monte Carlo Methods in Finance*, John Wiley & Sons.
- JUDD, K (1998) *Numerical Methods in Economics*, MIT Press, Cambridge.
- KEPPO, Jussi e SAMILA, Sampsa (2004) "The Options View of Products", University of Michigan.
- KESTER, W Carl (1984) "Today's Options for Tomorrow's Growth", *Harvard Business Review*; pp. 153–160.
- KULATILAKA, Nalin (1995) "The Value of Flexibility: a General Model of Real Options", *em* TRIGEORGIS, Lenos (Ed.), "Real Options in Capital Investment: Models, Strategies, and Applications", Praeger, Westport, Connecticut, pp. 89–107.
- KULATILAKA, Nalin e TRIGEORGIS, Lenos (1994) "The General Flexibility to Switch: Real Options Revisited", *International Journal of Finance*, vol. 6(2); pp. 778–798.
- LANGLOIS, Richard N (2002) "Modularity in Technology and Organization", *Journal of Economic Behavior & Organization*, vol. 1466; pp. 1–20.
- L'ECUYER, Pierre e TOUZIN, Renée (2000) "Fast Combined Multiple Recursive Generators with Multipliers of the Form $a = +2q + 2r$ ", *em* JOINES, J A, BARTON, R R, KANG, K e FISCHWICK, P A (Eds.), "Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference", pp. 683–689.
- LINT, Onno e PENNING, Enrico (2001) "An Option Approach to the New Product Development Process: a Case Study at Philips Electronics", *R&D Management*, vol. 31(2); pp. 163–163.
- LONGSTAFF, Francis A e SCHWARTZ, Eduardo S (2001) "Valuing American Options by Simulation: a Simple Least-Squares Approach", *Review of Financial Studies*, vol. 14(1); pp. 113–147.
- MAGEE, John F (1964) "How to Use Decision Trees in Capital Investment", *Harvard Business Review*, vol. 42(4); pp. 79–96.
- MCDONALD, Robert e SIEGEL, Daniel (1985) "Investment and the Valuation of Firms When There Is an Option to Shut Down", *International Economic Review*, vol. 26(2); pp. 331–349.

- MCDONALD, Robert e SIEGEL, Daniel (1986) “The Value of Waiting to Invest”, *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 101(4); pp. 707–727.
- MERTON, Robert (1973a) “An Intertemporal Capital Asset Pricing Model”, *Econometrica*, vol. 41(5); pp. 867–887.
- MERTON, Robert (1973b) “Theory of Rational Option Pricing”, *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4(1); pp. 141–183.
- MERTON, Robert (2001) “Applications of Option-Pricing Theory: Twenty-Five Years Later”, em SCHWARTZ, Eduardo S e TRIGEORGIS, L (Eds.), “Real Options and Investment Under Uncertainty: Classical Readings and Recent Contributions”, Cambridge, Massachusetts, pp. 623–632.
- MORENO, Manuel e NAVAS, Javier F (2003) “On the Robustness of Least-Squares Monte Carlo (LSM) for Pricing American Derivatives”, *Review of Derivatives Research*, vol. 6(2); pp. 107–128.
- MORO, Boris (1995) “The full monte”, *Risk*, vol. 8(2); pp. 57–58.
- MYERS, Stewart C (1975) “A note on the Determinants of Corporate Debt Policy”, London Graduate School of Business Studies.
- MYERS, Stewart C (1976) “Determinants of Corporate Borrowing”, Sloan School of Management - Massachusetts Institute of Technology.
- MYERS, Stewart C (1977) “Determinants of Corporate Borrowing”, *Journal of Financial Economics*, vol. 5(2); pp. 144–175.
- MYERS, Stewart C (1987) “Finance theory and financial strategy”, *Midland Corporate Finance Journal*, vol. 5(1); pp. 6–13.
- MYERS, Stewart C e MAJD, Saman (1990) “Abandonment Value and Project Life”, *Advances in Futures and Options Research*, vol. 4; pp. 1–21.
- MYERS, Stewart C e TURNBULL, Stuart M (1977) “Capital Budgeting and the Capital Asset Pricing Model: Good News and Bad News”, *Journal of Finance*, vol. 2(32); pp. 321–333.
- NEWTON, D, PAXSON, Dean A e PEARSON, A (1996) “Real R&D Options”, em BELCHER, A, HASSARD, J e PROCTER, S J (Eds.), “R&D Decisions: Strategy, Policy and Innovations”, Routledge, London, pp. 273–282.
- NIEDERREITER, H (1988) “Low-Discrepancy and Low-Dispersion Sequences”, *Journal of Number Theory*, vol. 30(1); pp. 51–70.
- PARNAS, D L (1972) “On the Criteria to Be Used in Decomposing Systems Into Modules”, *Communications of the ACM*, vol. 15(12); pp. 1053–1058, ISSN 0001-0782.
- PEREIRA, Paulo e ARMADA, Manuel J Rocha (2005) “As Opções Reais em Contexto de Incerteza e Concorrência entre Empresas - Uma Revisão da Literatura”, Universidade do Minho.

- PIKE, Richard H (1996) “A Longitudinal Survey on Capital Budgeting Practices”, *Journal of Business Finance and Accounting*, vol. 23(1); pp. 79–92.
- PINDYCK, Robert S (1988) “Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm”, *American Economic Review*, vol. 78(5); pp. 969–985.
- PIZZI, C e PELLIZZARI, P (2002) “Monte Carlo Pricing of American Options Using Nonparametric Regression”, Economics Working Paper Archive.
- PRESS, W H, TEUKOLSKY, S A, VETTERLING, W T e FLANNEY, B P (1992) *Numerical Recipes in C: the Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge.
- RASMUSSEN, N. Sondergaard (2002) “Improving the Least-Squares Monte-Carlo Approach”, Univerisity of Aahrus.
- RAYMAR, Steven B e ZWECHER, Michael J (1997) “Monte Carlo Estimation of American Call Options on the Maximum of Several Stocks”, *Journal of Derivatives*, vol. 5(1); pp. 7–23.
- RENDLEMAN, Richard J e BARTTER, Brit J (1979) “Two-State Option Pricing”, *Journal of Finance*, vol. 34(5); pp. 1093–1110.
- ROBERTS, K e WEITZMAN, M L (1981) “Funding Criteria for Research, Development and Exploration Projects”, *Econometrica*, vol. 49(1); pp. 1261–1288.
- RODRIGUES, Artur J (1999) *Uma Contribuição para o Estudo das Práticas Relativas à Análise de Projectos de Investimento com uma Aplicação à Realidade Portuguesa*, Dissertação de {M}estrado em {G}estão de {E}mpresas, Universidade do Minho.
- ROGERS, L C G (2002) “Monte Carlo Valuation of American Options”, *Mathematical Finance*, vol. 12(3); pp. 271–286.
- ROSS, Stephen A (1995) “Uses, Abuses, and Alternatives to the Net-Present-Value Rule”, *Financial Management*, vol. 24(3); pp. 96–102.
- SCHILLING, Melissa A e STEENSMA, H Kevin (2001) “The Use of Modular Organizational Forms: an Industry-Level Analysis”, *Academy of Management Journal*, vol. 44(6); pp. 1149–1168.
- SCHWARTZ, Eduardo S (2004) “Patents and R&D as Real Options”, *Economic Notes*, vol. 33(1); pp. 23–54.
- SCHWARTZ, Eduardo S e MOON, Mark (2000) “Evaluating Research and Development Investments”, em BRENNAN, Michael J e TRIGEORGIS, Lenos (Eds.), “Project Flexibility, Agency, and Competition - New Developments in the Theory and Application of Real Options”, Oxford University Press, New York, pp. 85–106.
- SILVA, Marcos Eugenio e BARBE, Thierry (2003) “Quasi Monte Carlo in Finance: Extending for High Dimensional Problems”, Universidade de São Paulo.

- SOBOL, I M (1967) “On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 7(4); pp. 86–112.
- STENTOFT, Lars (2004a) “Assessing the Least Squares Monte-Carlo Approach to American Option Valuation”, *Review of Derivatives Research*, vol. 7(2); pp. 129–168.
- STENTOFT, Lars (2004b) “Convergence of the Least Squares Monte Carlo Approach to American Option Valuation”, *Management Science*, vol. 50(9); pp. 1193–1203.
- SULLIVAN, Kevin J, CHALASANI, Prasad, JHA, Somesh e SAZAWAL, Vibha (1999) “Software Design as an Investment Activity: a Real Options Perspective”, *em* TRIGEORGIS, Lenos (Ed.), “Real Options and Business Strategy: Applications to Decision Making”, Risk Books, pp. 215–262.
- SULLIVAN, Kevin J, GRISWOLD, William G, CAI, Yuanfang e HALLEN, Ben (2001) “The Structure and Value of Modularity in Software Design”, *em* “9th ACM SIGSOFT International Symposium on Foundations of Software Engineering”, Foundations of Software Engineering - Proceedings of the 8th European Software Engineering Conference held jointly with 9th ACM SIGSOFT International Symposium on Foundations of Software Engineering, ACM Press, Vienna, Austria, pp. 99–108.
- TAN, Ken Seng e BOYLE, Phelim P (2000) “Applications of Randomized Low Discrepancy Sequences to the Valuation of Complex Securities”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 24; pp. 1747–1782.
- TAUDES, Alfred (1998) “Software Growth Options”, *Journal of Management Information Systems*, vol. 15(1); pp. 165–185.
- TILLEY, J. A. (1993) “Valuing American Options in a Path Simulation Model”, *Transaction of the Society of Actuaries*, vol. 45; pp. 83–104.
- TRIGEORGIS, Lenos (1993) “The Nature of Option Interactions and the Valuation of Investments with Multiple Real Options”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 28(1); pp. 1–20.
- TRIGEORGIS, Lenos (1996) “Evaluating Leases with Complex Operating Options”, *European Journal of Operational Research*, vol. 91(2); pp. 315–329.
- TRIGEORGIS, Lenos e MASON, Scott P (1987) “Valuing Managerial Flexibility”, *Midland Corporate Finance Journal*, vol. 5(1); pp. 14–21.
- TSITSIKLIS, J e VAN ROY, B (1999) “Optimal Stopping of Markov Processes: Hilbert Space Theory, Approximation Algorithms, and an Application to Pricing High-Dimensional Financial Derivatives”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45(10); pp. 83–104.

Bibliografia

TSITSIKLIS, John N e VAN ROY, Benjamin (2001) “Regression Methods for Pricing Complex American-Style Options”, *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 12(4); pp. 694–703.

WEEDS, Helen (1999) “Reverse Hysteresis’: R&D Investment with Stochastic Innovation”, University of Warwick.

Índice

- Abramowitz e Stegun (1972), 41
Albertí *et al.* (2003), 24
Anderson e Broadie (2004), 17
Areal e Taylor (2005), 24, 35, 37–39, 64
Baldwin e Clark (1994), 5, 20, 90
Baldwin e Clark (1997), 20, 90
Baldwin e Clark (2000), v, vi, xii, xiii, 1–3, 5–8, 20, 21, 89–97, 111, 113, 117, 127, 173–175
Baldwin e Clark (2001), 96
Barraquand e Martineau (1995), 17
Black e Scholes (1973), 9, 14, 38
Bollen (1999), 21
Boyle *et al.* (1989), xi, 41, 42, 44–47, 50–52, 70–72, 74, 76, 77
Boyle *et al.* (1997), 42
Boyle (1977), 17, 23
Bratley e Fox (1988), 42, 47, 49–52, 56, 63
Brealey e Myers (2003), 9, 15
Brennan e Schwartz (1977), 16
Brennan e Schwartz (1985), 11
Brennan e Trigeorgis (2000), 8
Broadie e Detemple (1996), 17
Broadie e Detemple (2004), 17
Broadie e Glasserman (1997a), 17
Broadie e Glasserman (1997b), 17, 40
Carrière (1996), 17, 23, 26, 35
Carrière (2001), 17, 23, 37
Childs *et al.* (1998), 19, 21, 98, 115
Childs e Triantis (1999), 21
Clément *et al.* (2002), 24, 33, 34
Cortazar *et al.* (2005), 24
Cox *et al.* (1979), 16, 55–57, 60–64, 70, 71, 79, 81, 82, 84, 86, 87
Cox *et al.* (1985), 15
Dixit e Pindyck (1994), 11, 15, 18, 19
Faure (1982), 42
Fu *et al.* (2000), 17
Gamba (2003), v, 2, 3, 17, 22, 24, 28–30, 49, 57, 64, 65, 90, 102, 174, 175
Garcia (2003), 17
Gaynor e Bradner (2001), 20, 89
Glasserman e Yu (2004), 33, 34
Gonçalves-Pinto e Azevedo-Pereira (2005), 24
Halton (1960), 42
Harrison e Kreps (1979), 15
Harrison e Pliska (1981), 15
Haugh e Kogan (2004), 17, 37
Henderson (2004), 16, 19
Hertz (1964), 9
Ibañez e Zapatero (2004), 17
Jackel (2002), 36, 37
Judd (1998), 40
Keppo e Samila (2004), 21
Kester (1984), 18
Kulatilaka e Trigeorgis (1994), 17
Kulatilaka (1995), 17
L’Ecuyer e Touzin (2000), 42, 44–47, 55, 56, 60–63, 74, 76, 77, 79, 81, 84, 86, 106
Langlois (2002), 7
Lint e Pennings (2001), 21
Longstaff e Schwartz (2001), v, 2, 3, 17, 22–27, 33–36, 38–41, 43, 45, 48, 65, 90, 174
Magee (1964), 9
McDonald e Siegel (1985), 11
McDonald e Siegel (1986), 11, 21
Merton (1973a), 20, 89, 94
Merton (1973b), 10, 14
Merton (2001), 10
Moreno e Navas (2003), 24, 33, 35, 36, 38–40, 43, 48, 65
Moro (1995), 42, 44–47, 55–57, 60–64,

Índice

- 74, 76, 77, 79, 81, 82, 84, 86, 87,
106
- Myers e Majd (1990), 11, 18
- Myers e Turnbull (1977), 10
- Myers (1975), 10
- Myers (1976), 10
- Myers (1977), 10, 17
- Myers (1987), 10
- Newton *et al.* (1996), 21
- Niederreiter (1988), 42
- Parnas (1972), 8
- Pereira e Armada (2005), 18
- Pike (1996), 9
- Pindyck (1988), 11
- Pizzi e Pellizzari (2002), 27, 35
- Press *et al.* (1992), 34, 38, 42
- Rasmussen (2002), 33, 36, 37
- Raymar e Zwecher (1997), 17
- Rendleman e Bartter (1979), 16
- Roberts e Weitzman (1981), 21
- Rodrigues (1999), 9
- Rogers (2002), 17
- Ross (1995), 20
- Schilling e Steensma (2001), 7
- Schwartz e Moon (2000), 21
- Schwartz (2004), 24
- Silva e Barbe (2003), v, 42, 47, 56, 63,
66, 104, 175
- Sobol (1967), 42
- Stentoft (2004a), 24, 33, 36, 38–40, 42,
43
- Stentoft (2004b), 24, 34
- Sullivan *et al.* (1999), 5, 8, 20, 89
- Sullivan *et al.* (2001), 20, 89
- Tan e Boyle (2000), 37
- Taudes (1998), 21
- Tilley (1993), 17
- Trigeorgis e Mason (1987), 11
- Trigeorgis (1993), 17, 19
- Trigeorgis (1996), 19
- Tsitsiklis e Van Roy (1999), 17, 23, 26
- Tsitsiklis e Van Roy (2001), 17, 23
- Weeds (1999), 21