Universidade do Minho
Instituto de Educação

Letícia Gabriela Baptista Martins

A resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem numa turma do 11º ano de Ciências e Tecnologias

setembro de 2018

Letícia Gabriela Baptista Martins **A resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem numa turma do 11º ano de Ciências e Tecnologias**

UMinho | 2018

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Letícia Gabriela Baptista Martins

A resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem numa turma do 11º ano de Ciências e Tecnologias

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho realizado sob a orientação da
Doutora Maria Helena Martinho

setembro de 2018

DECLARAÇÃO

Nome: Letícia Gabriela Baptista Martins

Endereço eletrónico: lgb.martins@hotmail.com

Telefone: 930428929

Número do Cartão de Cidadão: 14793020

Título do Relatório:

A resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem numa turma do 11º ano de Ciências e Tecnologias

Supervisora:

Doutora Maria Helena Silva de Sousa Martinho

Ano de conclusão: 2018

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.° Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Universidade do Minho, 27 de setembro de 2018

Assinatura: ____

AGRADECIMENTOS

À minha supervisora, Doutora Maria Helena Martinho, por toda a disponibilidade e apoio ao longo de todo o mestrado, e mais especificamente durante o estágio profissional. E ainda por me orientar e desafiar, fazendo-me evoluir pessoal e profissionalmente. Eternamente grata por todas as oportunidades que me influenciou a agarrar!

Ao meu orientador, Professor António José Domingues, pela liberdade que me deu para trabalhar com os alunos das suas turmas, e à minha colega de estágio, Débora Alves, pela companhia e pela partilha de experiências.

A todos os alunos com quem tive o gosto de trabalhar ao longo do meu ano de estágio, por me terem proporcionado bons momentos e boas memórias, por alinharem nos meus desafios, por terem colaborado ao máximo em tudo, permitindo-me realizar esta investigação e apresentar a minha primeira comunicação num ProfMat. Ensinei-os, mostrei-lhes coisas novas e diferentes abordagens durante as aulas, mas eles ensinaram-me muito mais, em conjunto com todo o ambiente escolar.

Ao Professor Mário Roque, por ter sido o melhor professor que eu poderia ter no ensino secundário, por ter sido um grande apoio ao longo de todo o meu percurso académico e, acima de tudo, por ser um modelo de professor a seguir. Pela amizade, pelas palavras de motivação e pela confiança que deposita em mim.

Ao Professor José Paulo Viana, por me ter feito despertar ainda mais para a resolução de problemas, quer pelas suas publicações, quer pelo problema proposto no ProfMat, que me fez sentir desafiada e com vontade de desafiar os alunos. E ainda por ter abrilhantado o meu ano de estágio com uma conferência incrível, que deixou os alunos a pensar que, afinal, a Matemática tem mais coisas interessantes e engraçadas do que eles imaginam.

Aos colegas de mestrado, por todas as conversas e por todo o espírito positivo que conseguíamos encontrar quando estávamos juntos. Em especial à Ana Lomar e ao José Eduardo Faria, por serem os melhores companheiros de ProfMat que eu podia ter.

Por fim, à minha família, o verdadeiro pilar de tudo isto. Ao meu pai, por se ter sentado comigo num sábado à tarde, ainda no 1.º Ciclo, para me ajudar a resolver problemas. À minha mãe, por ter ouvido todas as minhas ansiedades e devaneios sobre este mestrado e sobre o futuro. Ao meu irmão, simplesmente por existir. Aos três em particular, e à restante família e amigos, agradeço por me terem feito lutar pelos meus objetivos, mostrando-me que nada se consegue sem trabalho e sem amor. Obrigada por me fazerem chegar aqui, e ser quem sou!

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM NUMA TURMA DO 11.º ANO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS

Letícia Gabriela Baptista Martins
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário
Universidade do Minho, 2018

RESUMO

O presente estudo incide na resolução de problemas, no processo de ensino e aprendizagem, e resulta de uma intervenção pedagógica com alunos de uma turma do 11.º ano, do curso de Ciências e Tecnologias, na disciplina de Matemática A, durante a lecionação de conteúdos do tópico Sucessões. Este estudo teve como questão principal perceber como seria a evolução dos alunos ao longo da intervenção pedagógica planeada. Para isso, formulei quatro objetivos estruturantes para esta investigação: 1. Identificar as estratégias de resolução de problemas que os alunos utilizam; 2. Reconhecer as dificuldades reveladas pelos alunos durante a resolução de problemas; 3. Caracterizar a comunicação escrita dos alunos na apresentação das resoluções de problemas; 4. Avaliar a evolução dos alunos ao longo do projeto.

Para conseguir dar resposta aos objetivos estabelecidos, recorri a diferentes instrumentos de recolha de dados: uma ficha de diagnóstico realizada no início da intervenção; nove problemas propostos ao longo da intervenção, cujas resoluções foram feitas individualmente e em grupo; uma ficha resolvida no final da intervenção; observação e gravação em áudio de todas as aulas; um questionário, ao qual os alunos responderam no final da intervenção.

No que a resultados diz respeito, a análise dos dados permitiu concluir que a estratégia mais utilizada pela turma em estudo foi a construção de esquemas ou figuras. Em contrapartida, as estratégias a que os elementos da turma recorreram menos foram a procura de um padrão e a generalização. Quanto às dificuldades reveladas pelos alunos, a dificuldade mais notória reside no nível de interpretação, quer seja dos resultados obtidos, quer seja do próprio enunciado. Um outro ponto no qual se notam dificuldades, passa pela comunicação escrita da resolução do problema. No que a esta comunicação diz respeito, foi percetível que o tipo de fundamentação das respostas mais utilizado foi o recurso à experimentação, e quanto aos tipos de representação, a representação simbólica foi a mais requisitada. Por fim, a evolução dos alunos foi notória em sala de aula, pois os alunos iniciaram a intervenção com uma postura mais derrotista, que foi sendo abandonada ao longo das aulas.

Palavras-chave: resolução de problemas; comunicação escrita; ensino secundário

LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DANS LE PROCESS D'ENSEIGNEMENT ET D'APPRENTISSAGE DANS UNE CLASS DE LA 1ère ANNÉE DE SCIENCE ET TECHNOLOGIE

Letícia Gabriela Baptista Martins
Maîtrise en Enseignement des Mathématiques dans le 3ème Cycle de l'Enseignement Primaire et dans l'Enseignement Secondaire
Université du Minho, 2018

RÉSUMÉ

La présent étude se concentre sur la résolution de problèmes, dans le process d'enseignement et d'apprentissage, et resulte d'une intervention pédagogique avec des étudants d'une classe de la 1ère année, du cours de science et technologie, en Mathématiques A, pendant l'enseignement de contenu de la rubrique Sucessions. Cette étude avait comme question principale comprendre comment évoluerait l'étudiant au cours de l'intervention pédagogique envisagée. Pour ce faire, j'ai formulé quatre objectifs structurants pour cette recherche: 1. Identifier les stratégies de résolution de problèmes utilisées par les élèves; 2. Reconnaître les difficultés rencontrées par les élèves lors de la résolution de problèmes; 3. caractériser la communication écrite des étudiants dans la présentation des résolutions de problèmes; 4. Évaluer les progrès des élèves tout au long du projet.

Afin de pouvoir répondre aux objectifs établis, j'ai utilisé différents instruments de collecte de données: un formulaire de diagnostic établi au début de l'intervention; neuf problèmes proposés lors de l'intervention, dont les résolutions ont été prises individuellement et en groupe; un fichier résolu à la fin de l'intervention; observation et enregistrement audio de toutes les cours; un questionnaire auquel les étudiants ont répondu à la fin de l'intervention.

En ce qui concerne les résultats, l'analyse des données a permis de conclure que la stratégie la plus utilisée par la classe étudié était la construction de schémas ou de chiffres. Par contre, les stratégies moins utilisées par les éléments de la classe étaient la recherche d'un motif et la généralisation. Quant aux difficultés révélées par les étudiants, la difficulté la plus frappante réside dans le niveau d'interprétation des résultats obtenus ou de la déclaration elle-même. Un autre point où les difficultés sont notées est la communication écrite de résolution de problèmes. En ce qui concerne cette communication, il était perceptible que le type de raisonnement le plus utilisé des réponses était le recours à l'expérimentation et, pour les types de représentation, la représentation symbolique était la plus demandée. Enfin, l'évolution des élèves était notoire dans la classe, car les étudiants ont commencé l'intervention avec une attitude plus défaitiste, qui a été abandonnée tout au long des cours.

Mots clefs: résolution de problèmes; communication écrite; enseignement secondaire

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE QUADROS

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Ao longo deste primeiro capítulo, que se encontra dividido em três secções, é apresentado o tema em estudo, assim como as finalidades e objetivos do mesmo. De seguida, é realçada a pertinência da escolha deste tema, terminando com uma secção na qual se faz uma breve descrição da estrutura geral deste relatório.

1.1. Tema, finalidades e objetivos

O tema que escolhi para desenvolver no âmbito do Projeto de Intervenção Pedagógica Supervisionada teve incidência na resolução de problemas e foi direcionado para o processo de ensino e aprendizagem numa turma do 11.º ano de Ciências e Tecnologias, com a intenção de responder à questão: *Como evoluem os alunos, na resolução de problemas, ao longo da minha intervenção pedagógica?*

A escolha deste tema prendeu-se com o reconhecimento da importância da resolução de problemas e também com um gosto pessoal pelo assunto. Segundo o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), os programas de ensino que vão desde o pré-escolar até ao final da escolaridade obrigatória deverão habilitar todos os alunos para a resolução de problemas que surjam em diferentes contextos.

Já nos *Princípios para a Ação* (NCTM, 2017) é possível perceber que um ensino mais eficaz da Matemática deverá ser feito com recurso à resolução de problemas e à discussão dos mesmos, pelo que devem ser selecionadas, de modo regular, tarefas que estimulem no aluno o raciocínio e a resolução de problemas, permitindo uma certa liberdade na abordagem que o aluno poderá seguir para chegar à solução pretendida. Para isto, o professor tem de entender a importância dos contextos em que os alunos estão inseridos, os seus interesses, as suas culturas, os seus conhecimentos e ainda a linguagem mais adequada a ser usada, de modo que os problemas selecionados para propor aos alunos sejam estimulantes e do seu interesse, e evitando que sejam uma barreira que os afasta da disciplina.

Assim, tendo tudo isto em consideração e de modo a conseguir responder à questão formulada, o presente Projeto de Intervenção Pedagógica Supervisionada tem como objetivos:

1. Identificar as estratégias de resolução de problemas que os alunos utilizam;
2. Reconhecer as dificuldades reveladas pelos alunos durante a resolução de problemas;
3. Caracterizar a comunicação escrita dos alunos na apresentação das resoluções de problemas;

4. Avaliar a evolução dos alunos ao longo do projeto.

1.2. Pertinência do estudo

A resolução de problemas, em conjunto com o raciocínio, constitui uma das dez áreas de competências consideradas no “Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória”, documento criado pelo Ministério da Educação e Ciência (MEC) em 2017. Ainda no mesmo documento, percebemos que uma das práticas docentes decisiva para o desenvolvimento desse perfil passa por “promover de modo sistemático e intencional, na sala de aula e fora dela, atividades que permitam ao aluno fazer escolhas, confrontar pontos de vista, resolver problemas e tomar decisões com base em valores” (MEC, 2017, p. 24). Esta importância na resolução de problemas é ainda realçada no Programa do Ensino Secundário de Matemática A (MEC, 2013), pois em todos os domínios encontramos a resolução de problemas no desenvolvimento dos seus conteúdos.

No contexto do PISA 2012, conseguimos reforçar a importância de desenvolver a capacidade de resolver problemas, sendo esta competência considerada essencial no mundo profissional. Como vivemos, cada vez mais, rodeados pela tecnologia, os alunos precisam de estar mais preparados para desenvolver estratégias de resolução de problemas, e não apenas do “domínio de um repertório de factos e procedimentos” (OECD, 2014, p. 26). Assim, a Matemática deve ser vista como algo mais do que um mero conjunto de exercícios em que se aplicam conhecimentos uma vez que, se um aluno realizar apenas tarefas rotineiras, a sua imaginação e a sua capacidade de raciocínio acabarão por ser bloqueadas, ou nem se desenvolver. Para Duarte (2000):

> Um problema pode demonstrar como o pensamento matemático nos ajuda a entender o mundo, a perceber padrões e regularidades que se podem organizar mentalmente e simbolicamente. A resolução de problemas promove o desenvolvimento de determinados comportamentos e atitudes (autoconfiança), que apontam para níveis cognitivos elevados (compreensão, aplicação) e não apenas para o conhecimento de factos e técnicas. Modelar, simbolizar, comunicar, explorar, analisar, generalizar e provar são atividades com sentido matemático proporcionadas pela resolução de problemas. (p. 99)

Wagner (2012) acrescenta ainda que é necessário que uma pessoa experimente, se interrogue e transforme essas interrogações em afirmações para que aprenda melhor e para que grave na memória aquilo que aprendeu. Realça também que é necessário duvidar, conjeturar, procurar estratégias e estimular o raciocínio, concluindo que “para aprender a resolver problemas é preciso resolver problemas” (Wagner, 2012, p. 12).

Atendendo ao que foi referido nos parágrafos anteriores, o uso da resolução de problemas na sala de aula é muito importante já que permite estimular o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Mais do que saber aplicar os seus conhecimentos, é essencial que saibam estabelecer estratégias para ultrapassar algum problema que tenham de enfrentar, tanto no ambiente escolar como, no futuro, a nível profissional. Para isto, desenvolver o raciocínio e a capacidade de resolver problemas são dois fatores de extrema importância e que podem ser trabalhados em simultâneo.

1.3. Estrutura do relatório

O presente Relatório de Estágio está organizado em cinco capítulos: introdução, enquadramento teórico, enquadramento contextual, apresentação de resultados e discussão e conclusões. No Capítulo I, *Introdução*, além da apresentação da estrutura do relatório, encontra-se ainda a apresentação do tema, finalidades e objetivos do estudo que fiz, e ainda a pertinência do mesmo.

No Capítulo II, *Enquadramento Teórico*, é feita uma revisão da literatura na qual se baseou esta investigação. Neste capítulo, é feito o levantamento da noção de problema e resolução de problemas por parte de vários autores, assim como as diferentes tipologias de problemas apresentadas e ainda as dificuldades e estratégias já reconhecidas através de outros estudos. Além disso, é ainda referido o modo como certos autores caracterizam a comunicação escrita dos alunos e também é estabelecido um enquadramento do tópico lecionado, aquando da intervenção pedagógica.

Já no Capítulo III, *Enquadramento Contextual*, apresenta-se o contexto onde ocorreu a intervenção pedagógica, as opções metodológicas da intervenção pedagógica e ainda as estratégias de investigação.

O Capítulo IV, *Apresentação de Resultados*, inclui a apresentação dos resultados obtidos através da análise dos dados recolhidos durante a intervenção. Assim, neste capítulo são apresentadas produções escritas dos alunos e também diálogos em sala de aula, que servem de auxílio à apresentação das estratégias e dificuldades que os alunos apresentam, e ainda à caracterização da sua comunicação escrita.

Finalmente, no Capítulo V, *Discussões e Conclusões*, apresentam-se e discutem-se as diferentes conclusões relativas a cada objetivo do estudo. Além disto, são ainda feitas algumas reflexões sobre este projeto e sua concretização, bem como, as limitações sentidas e recomendações para trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Este capítulo destina-se ao enquadramento teórico que serviu de base para este projeto, e encontra-se separado em três partes. A primeira parte é dedicada aos problemas e à sua resolução. Já na segunda parte, o foco é a comunicação escrita. Por fim, a última parte deste capítulo é destinada ao tópico lecionado durante a intervenção pedagógica, sucessões.

2.1. Problemas e resolução de problemas

Nesta secção, iremos começar por deixar claro o que é, afinal, um problema, e em que consiste a resolução de problemas. Num segundo ponto, classificaremos os diferentes tipos de problemas, percebendo as diferentes classificações atribuídas por diferentes autores e estabelecendo ligações entre elas. No terceiro ponto desta secção, elencamos dificuldades que ocorrem quando se resolvem problemas. Para terminar, iremos perceber quais são as estratégias às quais os alunos podem recorrer aquando da resolução de um problema.

2.1.1. Conceito de problema e a noção de resolução de problemas

Ao longo de toda a vida, enfrentamos problemas diariamente, desde os mais rotineiros até aos mais complexos, dentro e fora da sala de aula. A própria Matemática é uma ciência que se faz através de uma procura intensa de soluções para problemas. Mas, afinal, qual é o conceito de *problema*?

Conceito de problema

Vários são os autores que definem *problema* como sendo uma situação com a qual uma pessoa se defronta e que requer uma resolução, para a qual não se sabe de imediato qual é o caminho a seguir. Alguns desses autores são Kantowski, Posamentier e Krulik. De um modo mais generalizado, e não apenas focado no ensino e na Matemática, Kantowski (1980) refere que o conhecimento que um individuo detém deve ser utilizado de forma a encontrar uma nova forma de resolver o problema que lhe surge. Além disso, Posamentier e Krulik (1998) defendem que aquilo que fazemos e pensamos é baseado nas nossas experiências anteriores, na maioria das vezes. Isto influencia a forma como se "ataca" um certo problema.

A definição de Pires (2001) vai ao encontro da anterior, pois "teremos um problema quando temos um objetivo claramente formulado e perfeitamente definido (...) mas no qual o método de solução é desconhecido e está em aberto" (p. 62). A tudo isto, Vianna (2002) acrescenta que uma pessoa está perante um problema se estiver diante destas três situações: ter uma questão a resolver, querer uma resposta para a mesma, e não ter um caminho para essa resposta previamente definido. Este autor destaca ainda o facto de uma questão poder ser um problema para uma pessoa, mas não o ser para outra, pois se alguém resolveu um problema semelhante ao nosso, poderá saber de imediato como o solucionar.

Para Palhares (1997), um problema só existe quando temos um conjunto de informações sobre uma dada situação inicial e também sobre a situação final à qual se pretende chegar. Assim, uma pessoa enfrenta um problema quando existe uma barreira que a impede de obter uma solução de forma imediata, exigindo que se pense no assunto e se recorra a algum raciocínio que permita chegar à solução pretendida. O autor acrescenta ainda que, existindo um problema, a sua solução "existe à espera de ser descoberta" (Palhares, 1997, p. 167).

Na perspetiva de Ponte (1992), um *problema* é uma tarefa para a qual o aluno não possui um método previamente estudado para a resolver, mas na qual se deve empenhar para chegar à solução pretendida. A isto, acrescenta ainda que a distinção entre problema e exercício passa pelo facto de a resolução do exercício se tratar apenas de uma aplicação de um método já conhecido pelo aluno. Esta diferenciação é também feita por Krulik e Rudnik, referidos por Serrazina (n.d.), tendo como exercício uma "situação em que é necessário treinar ou reforçar algoritmos já aprendidos" (Serrazina, n.d., p. 2) e problema como algo em que é preciso estabelecer um raciocínio e relembrar os conhecimentos já aprendidos. Serrazina (n.d.) adianta também que uma tarefa pode ser simultaneamente um exercício e um problema, dependendo da fase de aprendizagem em que o indivíduo se encontra.

Por fim, nas *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1991) podemos ler que:

> Um problema genuíno é uma situação em que, para o indivíduo ou para o grupo em questão, uma ou mais soluções apropriadas precisam ainda de ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para constituir um desafio mas não tão complexa que surja como insolúvel. (p. 11)

No fundo, o conceito de problema, aplicado em sala de aula e na disciplina de Matemática, passa por ser uma tarefa proposta ao aluno em que este pretende resolver, mas não sabe previamente um método para o fazer. Além disto, acrescenta-se à definição a importância de se querer resolver a tarefa, pois caso contrário ela não será vista como um problema. É nesta definição que será baseada a investigação que consta neste trabalho.

Noção de resolução de problemas

O conceito de problema e de resolução de problemas é muitas vezes visto como sendo um só. O facto de a existência de um problema provocar a procura de uma solução, faz com que problemas e resoluções andem de mãos dadas, sendo, por isso, frequente a confusão em torno das suas definições. Em muitas situações, os autores afirmam que vão definir problema, mas acabam por referir apenas a resolução de problemas. Esta confusão não aconteceu com Palhares (1997) já que, após definir problema, tratou de esclarecer também o que seria resolução de problemas. Para este autor, a definição de resolução de problemas surge a partir da definição de problema. Assim, afirma que estamos perante a resolução de um problema quando nos confrontamos com um e decidimos resolvê-lo, tendo, para isso, de pensar num caminho para o fazer, sendo que este não surge de forma imediata mas sim através de algum raciocínio.

Tal como é complicado rotular o que é ou não um problema, definir resolução de problemas também não é tarefa fácil, já que é algo que faz parte do nosso dia a dia. O conceito de problema pode variar consoante a pessoa a quem perguntamos, pois, como escreveu Schoenfeld, com um ligeiro toque de humor, se "perguntarmos a sete professores de matemática para definir resolução de problemas, é provável que se obtenha pelo menos nove opiniões" (Schoenfeld, 1991, p. 2). Apesar disto, a grande maioria dessas opiniões vão ao encontro umas das outras.

Mason (1992) refere que a resolução de problemas tem por base a tentativa de resolver ou reformular questões para as quais a nossa mente não tem um método predefinido de resposta. Dentro da mesma ideia, o NCTM (2008) indica que "a resolução de problemas implica o envolvimento numa tarefa, cujo método de resolução não é conhecido antecipadamente" (p. 57). Os alunos devem, assim, explorar os seus conhecimentos, de forma a encontrar a solução. Deste modo, adquirem novas maneiras de pensar, tornam-se mais persistentes e curiosos, e ganham uma maior autoconfiança. Sendo que todas estas capacidades e características são úteis, não só dentro da aula de matemática, como também para o dia a dia e para a vida profissional que os alunos terão de enfrentar no futuro. Também nos resultados das provas do Programme for International Student Assessment (PISA), de 2012, é possível retirar uma definição para a resolução de problemas. Aqui, percebemos que resolver um problema requer um processamento cognitivo para entender e tentar resolver uma situação problemática, a qual não tem um método de resolução imediatamente definido.

Num artigo escrito por Wheatley e Wheatley (1984), resolução de problemas significa aquilo que fazemos quando não sabemos o que fazer. Já Kantowski (1977), apesar de não apresentar de modo claro uma definição, refere que a resolução de problemas é dividida em dois pontos essenciais: o processo – ou seja, todo o raciocínio que é feito e o caminho que é traçado para resolver o problema – e o produto – isto é, a solução.

Na perspetiva de Pólya (1980), resolver um problema é descobrir quais os meios necessários para chegar a um determinado fim previamente definido. Isto é, se esse objetivo final não nos indica de modo óbvio o caminho a seguir para lá chegarmos, e se temos de recorrer aos nossos conhecimentos e perceber quais podem ser úteis para resolver determinada situação, então aí estamos a resolver um problema. Assim, acrescenta, resolver um problema é encontrar um caminho, totalmente desconhecido, para uma dificuldade, para ultrapassar um obstáculo ou para alcançar determinado fim, não sendo um caminho atingido de modo imediato. Ainda segundo Pólya (1995), o professor terá um papel de grande importância na resolução de problemas por parte dos seus alunos. O docente deve partir em auxílio do estudante quando sente que tal é necessário, mas tendo o cuidado de não retirar a independência ao aluno, ajudando-o com naturalidade, colocando-se no lugar do aluno e no seu próprio pensamento e fazendo questões que poderiam ter surgido na cabeça do mesmo. Isto porque, na perspetiva de Pólya, se o aluno tiver um auxílio insuficiente pode não conseguir efetuar qualquer tipo de avanço, o que irá certamente desmotivá-lo, mas se receber demasiada ajuda por parte do professor, também não resta nada para o aluno fazer autonomamente, algo que reduz a sua autoconfiança.

A importância da resolução de problemas é também destacada por Ponte, escrevendo que “a força motora do desenvolvimento da ciência Matemática são os problemas” (Ponte, 1992) e é por esse motivo que a resolução de problemas deve ter um grande realce na orientação curricular para o ensino dessa disciplina. Acrescenta ainda que a resolução de problemas tem como objetivo permitir ao aluno lidar com situações complexas, nas quais tenha de enfrentar dificuldades e tomar decisões.

Como já foi dito anteriormente, neste estudo iremos assumir que um problema é uma tarefa que se quer resolver, mas para a qual não se sabe um método prévio de resolução. Portanto, a resolução de um problema será assumida como sendo o processo de descoberta desse método, isto é, a descoberta de um caminho, previamente desconhecido, para alcançar um determinado fim que está bem definido.

2.1.2. Tipologia de problemas

Como se viu na secção anterior, a noção de problema varia consoante os autores. Assim, é natural que a classificação de problemas também seja distinta. Alguns autores classificam apenas a diferente tipologia de problemas, enquanto outros fazem uma lista mais global, diferenciando o tipo de tarefas, e não apenas o tipo de problemas. Por esta razão, nesta secção começaremos, então, pela tipologia de tarefas, passando posteriormente para a tipologia de problemas, que é o foco principal.

No ponto anterior, já foram referidas distinções feitas entre problema e exercício. Ponte (2005) vai mais longe, e divide as diferentes tarefas em quatro grandes grupos: problemas, exercícios, investigações e explorações. É ainda realçada uma outra categoria, as tarefas de modelação, que estão inseridas dentro dos problemas ou das investigações, dependendo da tarefa apresentada. Por este motivo, considera-se apenas os quatro tipos de tarefas, não assumindo as tarefas de modelação como um tipo isolado. Mas a questão que se coloca é: como distinguir a tipologia de tarefas? O autor responde, referindo que as tarefas têm duas dimensões fundamentais: o grau de desafio/dificuldade matemática e o grau de estrutura. Assim, as tarefas dividem-se segundo o seu nível de dificuldade ser "reduzido" ou "elevado", e de acordo com a sua estrutura ser mais "fechada" ou "aberta", isto é, se está explicito aquilo que é dado e o que é pedido ou se existe "um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas" (Ponte, 2005), respetivamente. Intersetando as duas dimensões referidas, Ponte criou um esquema (Figura 1) onde se entende de modo mais claro as dimensões de cada tipo de tarefa.

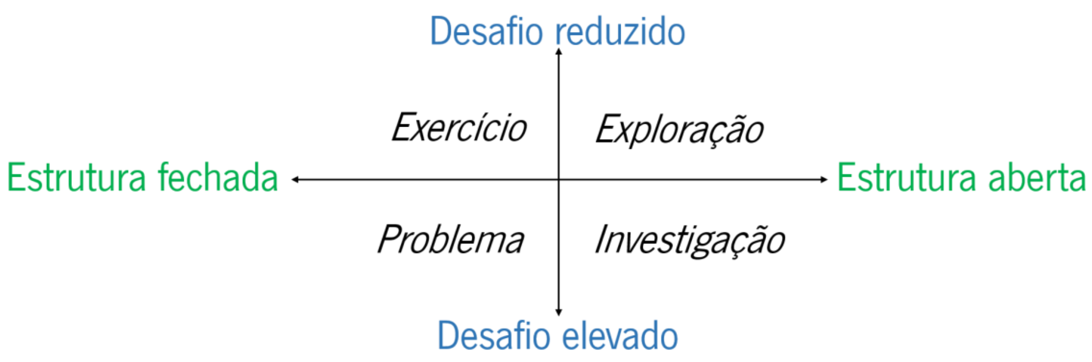


Figura 1. Posição dos diferentes tipos de tarefas de acordo com o grau de desafio e de estrutura (Ponte, 2005).

Através do esquema anterior, conseguimos entender que a distinção entre exercício e problema se baseia apenas no grau de desafio que é imposto, assim como a distinção entre exploração e investigação. Esta última distinção é estabelecida facilmente, pois se o aluno conseguir começar a tarefa no momento em que é proposta, sem necessidade de muito tempo para a planear, estaremos diante de uma exploração, caso contrário trata-se de uma investigação. Mas a primeira distinção, entre exercício e problema, não é tão pacifica, pois depende do conhecimento que o aluno dispõe. Podemos ter uma tarefa que surge como problema no 1.º Ciclo, e que, se for apresentada no 3.º Ciclo, já será apenas um exercício, como por exemplo a tarefa seguinte, retirada do Banco de Itens do IAVE e que tem o nome de "Festa de anos da Teresa":

Para a sua festa de anos, a Teresa vai encher 15 copos com sumo de laranja. Todos os copos levam a mesma quantidade de sumo. Para saber quantos litros de sumo vai ter de preparar, consultou a seguinte tabela:

1 copo	2 copos	3 copos	4 copos	5 copos
2,5 dl	5 dl	7,5 dl	10 dl	12,5 dl

Quantos litros de sumo precisa a Teresa de preparar, para encher os 15 copos?
Explica como encontraste a resposta.

Esta tarefa, proposta a um aluno do 1.º Ciclo, será vista como um problema pois ainda não tem conhecimentos relacionados com a proporcionalidade direta, ao contrário do que acontece com alunos do 3.º Ciclo, que já enfrentarão a tarefa como um simples exercício.

Um dos autores que refere uma tipologia de problemas, mas que nela insere tipos de exercícios, é Butts (1980). Para este autor, temos cinco tipos de problemas: exercícios de reconhecimento, exercícios algorítmicos, problemas de aplicação, problemas de pesquisa aberta e situações problemáticas. Quanto aos *exercícios de reconhecimento*, são tarefas nas quais se espera que se relembre uma certa definição ou um dado teorema, e se aplique esse conhecimento. Já os *exercícios algorítmicos* são, como o nome indica, tarefas onde se espera a aplicação de um certo procedimento, em que todos os passos já estão predefinidos a partir do momento em que se sabe o que é pedido. No que toca aos *problemas de aplicação*, são tarefas em que se espera uma aplicação de algoritmos. O autor refere que as tarefas que fazem um certo jogo de palavras se enquadram nesta categoria, sendo que a sua solução exige que se comece por formular o problema simbolicamente, e de seguida manipular os dados de acordo com certos algoritmos que nos levam à solução. Um exemplo desse jogo de palavras está na seguinte tarefa: "Se o comprimento e a altura de um retângulo forem aumentados em 20%, qual é a percentagem de aumento da sua área?" (Butt, 1980, p. 24). Os *problemas de pesquisa aberta*, são as tarefas em que não se sabe previamente qual a estratégia que deve ser usada para resolver o que é pedido. Por fim, as *situações problemáticas* são tarefas em que, mais do que um interesse em que se resolva algo, têm um interesse em pensar sobre alguma coisa.

Já Abrantes (1989) apresenta uma classificação de problemas em sete categorias: problema de palavras, problema para equacionar, problema para demonstrar, problema para descobrir, problema da vida real, situação problemática e situação. Os *problemas de palavras* são geralmente aplicados no 1.º Ciclo, já que são problemas cujo objetivo é atribuir significado às operações matemáticas. Quanto aos *problemas para equacionar* são, como o nome indica, problemas que se resolvem começando por os traduzir numa certa equação que deve ser resolvida. Estes dois tipos de problemas não podem, segundo o autor, ser repetidos muitas vezes, já que são problemas que rapidamente passam a ser exercícios, pois a estratégia usada é sempre semelhante. Um *problema para demonstrar* é um problema que nos leva a descobrir um caminho para mostrar uma dada conjetura lançada. Já para resolver um *problema para descobrir*, o resolvedor precisa de uma "ideia luminosa" para o fazer, sendo este tipo de problemas proposto mais vezes em concursos ou atividades extracurriculares, e não tanto dentro da sala de aula. No que toca aos *problemas da vida real*, são problemas em que se utiliza a Matemática com aplicação à realidade, como por exemplo no problema "Construir uma planta de um estádio – um campo de futebol e uma pista de atletismo." (Abrantes, 1989, p. 7). Quanto às duas últimas classificações, *situação problemática* e *situação*, são condições lançadas com o objetivo de se realizar uma exploração das mesmas, com a diferença que nas *situações problemáticas* se encontra uma questão ou uma ordem do que se deve explorar, enquanto nas *situações* essa ordem não existe.

Focando-se mais na tipologia de problemas, Charles, Lester e O'Daffer (1987) dividem-nos em quatro tipos: problemas de um passo, problemas de múltiplos passos, problemas de processo e problemas de aplicação. Os *problemas de um passo* e os *problemas de múltiplos passos* têm como base fazer uma escolha relativamente às operações a utilizar para resolver o problema proposto. Enquanto nos primeiros se faz apenas uma operação, e daí vir o nome de "um passo", nos segundos temos de utilizar pelo menos duas operações para resolver o problema. Já nos *problemas de processo*, não estamos perante uma mera decisão de qual operação utilizar, mas sim a nível de estratégia. Os autores dão ainda exemplos dessas estratégias, como o recurso a esquemas ou tabelas, fazer listas para organizar os dados ou até a tentativa e erro. O último tipo, *problemas de aplicação*, vai ao encontro das situações problemáticas referidas por Butts (1980). Charles, Lester e O'Daffer explicam que, neste tipo de problemas, os alunos têm de perceber de forma clara o que é pedido e identificar o que se quer fazer e os dados que são necessários para encontrar uma solução. Um exemplo de um problema deste tipo, é o seguinte, referido pelos autores: "Tu e um amigo decidem abrir uma barraca de limonada. Vocês precisam de decidir quanto vão cobrar por cada copo de limonada." (Charles, Lester & O'Daffer, 1987, p. 13).

As classificações vistas até aqui, têm coisas em comum com as estabelecidas por Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008), nomeadamente nos nomes atribuídos. Para estes autores, os problemas podem ser separados de acordo com o seu enunciado e com o processo de resolução, com a seguinte nomenclatura: problemas de cálculo, problemas de processo e problemas abertos. Os *problemas de cálculo* são os problemas em que a decisão do caminho a seguir na resolução passa apenas por escolher as operações necessárias para chegar à resposta, ou seja, são os problemas a que Charles, Lester e O'Daffer (1987) chamavam de *problemas de um passo* ou *problemas de múltiplos* *passos*. Quanto aos *problemas de processo,* definem exatamente o mesmo tipo que os seus homónimos dos autores anteriores. Por fim, os *problemas abertos*, que também são designados como *investigações,* são problemas em que, além de admitirem variados caminhos para chegar à solução, também podem ter mais de uma resposta correta. Os alunos, para resolverem este tipo de problemas, devem fazer explorações, de forma a perceberem se há existência de algum padrão e até mesmo formular possíveis conjeturas, que posteriormente tentarão mostrar se são válidas ou não. Este último tipo de problemas é aquele que estimula mais o "desenvolvimento do raciocínio, do espírito crítico e da capacidade de reflexão" (Boavida et al., 2008, p. 20).

Ainda com uma classificação concisa, mas um pouco mais distinta das anteriores, temos a perspetiva de Tao (2008), que distingue três tipos principais de problemas, embora não lhes dê um nome específico. Assim, Tao (2008) separa os problemas da seguinte forma: questões do tipo «mostre que...» ou «calcule...», questões do tipo «encontre...» ou «encontre todos...» e questão do tipo «existe ou não...». Os problemas de *«mostre que...»* são aqueles em que se pretende provar que uma dada afirmação é verdadeira. Já as questões do tipo *«encontre...»* têm como objetivo determinar um ou mais objetos que satisfaçam determinadas condições. Por fim, o *«existe ou não...»* é um caso particular dos dois tipos de questão anteriores, já que é o tipo de questão em que se tem de mostrar se uma afirmação é verdadeira ou apresentar um contraexemplo que mostre que a mesma é falsa.

Uma classificação mais exaustiva é feita por Palhares (1997). A classificação feita por este autor, distingue problemas da seguinte forma: problemas de processo, problemas de conteúdo, problemas de capacidades, problemas tipo puzzle, problemas de aplicação, problemas abertos e problemas de aparato experimental. Os *problemas de processo* são, tal como nas classificações anteriores, os que requerem o uso de certas estratégias de resolução. Já os *problemas de conteúdo* exigem o uso de conhecimentos matemáticos específicos, quer sejam recentemente adquiridos, quer não estejam, ainda, adquiridos na sua totalidade. No que toca aos *problemas de capacidades*, estes são referentes a problemas em que se recorre ao cálculo mental ou a estimativas para serem resolvidos. Já os *problemas tipo puzzle* são aqueles em que precisamos de alargar o nosso espaço de resolução, como por exemplo com o problema "Com seis fósforos, formar quatro triângulos equiláteros" (Palhares, 1997, p. 168), em que temos de recorrer à terceira dimensão para o conseguir solucionar. Quanto aos *problemas de aplicação*, são uma repetição dos problemas com o mesmo nome referidos por Charles, Lester e O'Daffer (1987), assim como os *problemas abertos* têm o mesmo significado que os problemas com a mesma classificação de Boavida et al. (2008). Finalmente, os *problemas de aparato experimental* são problemas que requerem uma certa investigação, de certo modo semelhante ao que acontece em investigações das ciências experimentais, em que se reúnem certos dados e se fazem determinadas experiências, com o objetivo de retirar daí dados novos.

Tal como acontece com a classificação de uma determinada tarefa, sendo que uma certa tarefa pode ser, simultaneamente, um exercício e um problema, dependendo do individuo que a enfrenta, o mesmo acontece com a classificação de um problema. Palhares (1997) salienta que o mesmo problema pode estar em diferentes categorias, consoante aquilo que o resolvedor sabe de conhecimentos anteriores e de experiências já passadas.

2.1.3. Dificuldades na resolução de problemas

No nosso dia a dia, é importante conseguirmos reconhecer as dificuldades que vamos sentindo, com o objetivo de as tentar superar. No ensino, detetar estas dificuldades é ainda mais importante, e quanto mais cedo, melhor. Isto porque adquirir novos conhecimentos, tendo dificuldades nos anteriores, será uma tarefa mais complicada. No caso da resolução de problemas, o facto de uma pessoa sentir dificuldades pode causar desmotivação e uma diminuição da confiança nas suas capacidades e, por isso, devem ser reconhecidas essas mesmas dificuldades para que possam ser superadas. Desta forma, a pessoa poderá envolver-se mais e melhor na resolução de um problema, sentir mais vontade de o fazer e confiar mais nos seus conhecimentos e capacidades para o resolver.

Apesar de cada indivíduo ter as suas próprias dificuldades, há dificuldades que são mais frequentes e, por isso, são mais fáceis de detetar e enfrentar. Tambychik e Meerah (2010) fazem uma lista com cinco dificuldades relativas a capacidades matemáticas e resolução de problemas. Essas capacidades são relativas a: números, aritmética, informação, linguagem e visão espacial. A capacidade para os *números* está relacionada essencialmente com a matemática mais elementar, aprendida maioritariamente no início da escolaridade obrigatória. Já a *aritmética*, refere-se à precisão necessária ao longo de um desenvolvimento matemático. Quanto à *informação*, é a capacidade relativa à extração da informação e à relação estabelecida entre conceitos, e ainda, a destreza para traduzir um problema numa condição matemática. Diretamente relacionada com esta, está a *linguagem,* que permite descodificar os termos matemáticos e perceber qual é a informação relevante a ser retirada. Por fim, a visão espacial, que é a capacidade de vermos a parte abstrata da Matemática, a nível de conceitos, ou a nível de manipulação de formas geométricas, ou a nível da noção de espaço. Sem estas capacidades bem trabalhadas, os autores defendem que há uma maior possibilidade de cometer erros e confusões durante o processo de resolução de um problema, o que acaba por se tornar uma dificuldade na conclusão do mesmo.

Com uma visão mais focada na resolução de problemas, e não apenas nas capacidades matemáticas, Phonapichat, Wongwanich e Sujiva (2013) referem sete tipos de dificuldades, embora apenas três delas sejam relativas aos alunos, sendo as restantes relacionadas com o papel do professor. A primeira passa pela dificuldade de *compreensão do problema*, na sua totalidade ou apenas em certas partes, devido à falta de imaginação. A segunda é relativa à *leitura, seleção da informação e organização da mesma*, de modo a conseguir traduzir as palavras para símbolos matemáticos. A terceira refere a *falta de interesse dos alunos*, que pode ser devido à extensão do problema ou à complexidade do mesmo, o que é um fator de desmotivação. Quanto às restantes dificuldades referidas pelos autores, passam pelos professores não utilizarem problemas relacionados com o quotidiano dos alunos e com a sua realidade e trabalharem demasiado a ideia de memorização, de seguir exemplos e repeti-los e ainda descartar todo o processo de pensar no problema.

Uma dificuldade também pode ser vista como sendo um obstáculo. E é nesta ideia que Sternberg (1998) se concentra, referindo três grandes obstáculos na resolução de problemas, que podem aparecer de forma isolada ou em simultâneo: configuração e fixação mental, fixação funcional e transferência negativa. O obstáculo *configuração e fixação mental* aparece quando, na resolução de um problema, estamos focados em aplicar uma estratégia específica que funcionou numa outra situação, mas que não funciona no problema que estamos a enfrentar e estamos, portanto, "fixados" na utilização daquela estratégia, não conseguindo encontrar outra. A *fixação funcional* traduz o obstáculo de não saber aplicar os conhecimentos aprendidos noutros contextos, a contextos novos. Ou seja, uma pessoa pode ter ao seu dispor um leque de ferramentas muito completo e diversificado, mas ter dificuldade em perceber qual ferramenta deve usar naquela situação. Por último, a *transferência negativa* está relacionada com os conhecimentos anteriores. Caso esse conhecimento não esteja bem cimentado, as novas aprendizagens serão feitas de modo mais complicado, o que causa dificuldades em adquirir e armazenar os novos conhecimentos.

Apesar de não referir de modo explícito as dificuldades na resolução de problemas, D'Ambrósio (1989) faz o levantamento de dois aspetos que se deve ter em atenção na atitude dos alunos: a adequação das soluções a situações reais e a persistência. Para a autora, o facto de os alunos lidarem constantemente com a característica formal da Matemática, cria neles uma perda de autoconfiança na sua própria intuição matemática. Com isto, os alunos perdem o seu "bom senso" matemático, afastando-os da relação existente entre a Matemática e as situações do dia a dia. Por este motivo, uma dificuldade presente na resolução de problemas poderá ser a *adequação da solução a uma situação real*. Outra dificuldade será a *ausência de persistência*, que muitas vezes é motivada pelo hábito excessivo de resolver apenas exercícios. D'Ambrósio (1989) afirma que é muito comum um aluno desistir quando está perante a resolução de um problema matemático, com a justificação de "não ter aprendido como resolver aquele tipo de questão" (D'Ambrósio, 1989, p. 15). Esta fundamentação é motivada pelo facto de o aluno não conseguir reconhecer de imediato qual é o processo de resolução que deve utilizar.

Para esta investigação, serão consideradas dificuldades em quatro níveis distintos: persistência, interpretação, seleção de informação e estratégia. A nível de *persistência* serão incluídas dificuldades em iniciar a resolução do problema e também em concluí-lo, já que há alunos que conseguem começar um processo de resolução, mas não sabem como o concluir, desistindo. Já as dificuldades a nível de *interpretação* serão vistas sob dois pontos de vista: a interpretação do problema e a interpretação do resultado. A interpretação do problema incide no facto de o resolvedor compreender o que é pedido e os dados do problema, enquanto a interpretação do resultado estará relacionada com a atribuição de significado às soluções que se vão obtendo, tanto no contexto do problema como no contexto real. O terceiro nível enunciado, a *seleção de informação*, será relativo à dificuldade que poderá existir diante da recolha de dados do problema. Finalmente, a dificuldade a nível de *estratégia*, está presente tanto na escolha da estratégia como na sua execução.

2.1.4. Estratégias de resolução de problemas

Apesar de as dificuldades referidas na secção anterior se centrarem, na sua maioria, nas capacidades matemáticas e de leitura dos alunos, também é possível perceber, pela classificação de Sternberg, que a escolha da estratégia também é complicada. Torna-se, portanto, importante perceber quais as principais estratégias a que podemos recorrer.

Musser e Shaughnessy (1980) elaboraram uma lista com cinco estratégias de base que podemos utilizar, quando estamos perante um problema: tentativa e erro, padrões, resolver um problema mais simples, resolver do fim para o início e simulação. A *tentativa e erro* é a estratégia mais utilizada, sendo também o método mais direto para resolver um problema. É uma estratégia que consiste, como o próprio nome indica, em pensar em possíveis soluções, e tentar perceber se estas obedecem às informações do problema e ao objetivo do mesmo. Quanto à estratégia dos *padrões*, esta seleciona e examina pequenas secções do problema, de maneira a encontrar algum tipo de padrão. Quando é encontrado esse padrão, então a solução desse problema surge fazendo uma generalização do mesmo. *Resolver um problema mais simples* é uma estratégia que nos obriga a resolver casos especiais do problema proposto, mais simples. É uma estratégia muito semelhante à anterior, dos *padrões*, em que de uma solução para um problema mais simples, conseguimos retirar a solução do problema principal. No que toca a *resolver do* *fim para o início,* a ideia é exatamente essa: começar pelo fim, ou seja, pelo objetivo do problema, até chegar ao início, isto é, ao que é dado. A última estratégia, a *simulação*, é mais relacionada com os problemas que surgem em ciências experimentais. Esta estratégia é utilizada quando estamos perante um problema que envolve a realização de alguma experiência, com a respetiva recolha de dados, da qual temos de tirar alguma conclusão. Assim, a simulação pode substituir a realização da experiência, quando tal nos é impossível de fazer.

Uns anos mais tarde, Posamentier e Krulik (1998) estabeleceram uma lista de estratégias um pouco mais completa, com o dobro das estratégias listadas por Musser e Shaughnessy, sendo que quatro delas são comuns: tentativa e erro, padrões, resolver um problema mais simples e resolver do fim para o início. As restantes seis estratégias são: diferente ponto de vista, considerar casos extremos, fazer um desenho, contabilização de todas as possibilidades, organização de dados e raciocínio lógico.

A primeira estratégia consiste em olhar para o problema com um *diferente ponto de vista*, e não focar apenas no objetivo. Vejamos o exemplo dado pelos autores, para que seja mais percetível a ideia desta estratégia: vamos supor que nos perguntam quantos jogos existiram num certo torneio de ténis, com 25 jogadores, e sendo que esse torneio é de eliminação direta, ou seja, quem perde um jogo deixa de participar no torneio. Para resolver este problema, poderíamos fazer um esquema, em que percebíamos quantos jogos havia em cada ronda, fazendo a soma dos jogos de todas as rondas. Mas, se utilizarmos a estratégia do *diferente ponto de vista*, basta pensarmos que, nesse torneio, haverá apenas um vencedor, e vinte e quatro derrotados. Portanto, sendo que de cada jogo sai um derrotado, e também que um jogador só é derrotado após um jogo, significa que houve um total de vinte e quatro jogos, já que o número de derrotados e de jogos tem de ser igual.

A estratégia seguinte, *considerar casos extremos*, é algo que usamos muitas vezes quando nos confrontamos com um problema do quotidiano. Por exemplo, quando estamos na rua e começa a chover, devemos correr ou andar, para ficarmos o menos molhados possível? (Posamentier & Krulik, 1998). Já num caso mais específico de Matemática, os autores dão o exemplo do seguinte problema: qual é a diferença de tamanho de duas circunferências, com o mesmo centro, que estão a 10 unidades de distância? (Posamentier & Krulik, 1998). Se considerarmos o menor tamanho possível para a circunferência mais pequena, percebemos que esta terá um raio quase nulo, o que significa que o raio da circunferência maior será quase igual a 10 unidades. Basta, então, fazer a diferença entre os perímetros das duas circunferências. Como uma delas tem perímetro quase nulo, significa que a resposta ao problema será o perímetro da circunferência maior.

De seguida, temos a estratégia *fazer um desenho*, que consiste em elaborar uma representação visual da informação que se retira do problema. Quanto à *contabilização de todas as possibilidades*, o nome já indica a base da estratégia: pensar em todas as respostas possíveis para o problema, e ir eliminando as que não podem ser solução do mesmo. Já a *organização de dados* tem por base retirar os dados do problema e organizá-los de maneira a que se torne mais claro perceber aquilo que se pretende e aquilo que se sabe. Por fim, o *raciocínio lógico* é a estratégia que utilizamos quando fazemos sucessivas deduções, começando por pegar na informação dada pelo enunciado e utilizando ligações lógicas até chegar à solução final.

Já Lopes (2002) refere as seguintes categorias básicas: construir um modelo; construir uma tabela; tentar, conferir e rever; simplificar; eliminar; encontrar padrões. Globalmente falando, as estratégias são as mesmas que foram referidas anteriormente. Na nomenclatura de Lopes, estamos a *construir um modelo* quando recorremos a uma "equação, algoritmo, fórmula, esquema, esboço, desenho, diagrama" (Lopes, 2002, p. 24). Já *construir uma tabela* é a estratégia em que recorremos à elaboração de um gráfico. Quanto a *tentar, conferir e rever* é o equivalente à tentativa e erro, e *encontrar padrões* é igual à estratégia *padrões* de Musser e Shaughnessy. No que toca a *simplificar*, inclui a decomposição do problema em problemas mais simples ou ainda trabalhar do fim para o início. E por fim, *eliminar*, é o equivalente a três estratégias referidas por Posamentier e Krulik: contabilização de todas as possibilidades, organização de dados e raciocínio lógico.

Um dos objetivos desta investigação passa por identificar as estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos. Assim, torna-se importante definir de modo claro qual é a classificação que será assumida daqui em diante. Neste trabalho, serão consideradas algumas estratégias de resolução de problemas já referidas pelos autores assinalados, como por exemplo tentativa e erro, procura de um padrão, generalização, dedução, resolução do fim para o início, construção de esquemas ou figuras, construção de tabelas e construção de um modelo. Além destas, um resolvedor de problemas pode ainda recorrer a três estratégias: resolução por partes, aplicação de fórmulas e exaustão. Os seus nomes ajudam a que se perceba a base de cada estratégia. A *resolução por partes* consiste em resolver o problema por etapas bem definidas e independentes umas das outras. Quanto à *aplicação de fórmulas* é exatamente uma estratégia em que se recorrem a fórmulas previamente conhecidas, como seria o caso de utilizar a fórmula resolvente quando um problema envolve a resolução de uma equação do 2.º grau, por exemplo. Já a *exaustão* baseia-se num processo em que se analisa exaustivamente todas as possibilidades, fazendo uma lista das mesmas e usando argumentos para excluir algumas delas, chegando a uma só, considerada como sendo a resposta correta.

2.2. Comunicação escrita

Para resolver um problema, principalmente em grupo, a comunicação é um fator muito importante. É preciso que os elementos do grupo saibam comunicar entre si, de forma a apresentarem e defenderem as suas ideias, e ainda aceitar as ideias dos restantes colegas. Além disso, é também necessário conseguir passar todas essas ideias para o papel, para que haja um registo escrito dessa resolução, de forma a que outras pessoas, que não assistiram à discussão dentro do grupo e a todo o processo de resolução, possam ver o processo que o grupo seguiu e a solução a que chegou.

No Programa de Matemática A (MEC, 2013) encontramos um realce à importância da comunicação na resolução de problemas. Neste programa, está referido que os alunos devem ser estimulados a expor as suas ideias, fazer comentários relativamente ao que é exposto pelos colegas e ainda colocar as suas dúvidas. E quanto à comunicação escrita, ainda no mesmo documento, percebemos que há indicação para a relevância de incentivar os alunos a redigir as suas respostas, apresentando da melhor forma possível o seu raciocínio e as conclusões que retiraram. Além disso, essa escrita deve ser feita "em português correto e evitando uma utilização inapropriada de símbolos matemáticos como abreviaturas estenográficas" (MEC, 2013, p.7).

Mas o que é, de facto, comunicação? Segundo Alves (2012), a comunicação humana tem por base uma noção de troca de informações e de conhecimentos, que é feita através da fala, de gestos ou da escrita. Já para Menezes (1996), a comunicação, focada na aula de Matemática, é o conjunto de todas as interações verbais, quer oralmente quer por escrito, que são estabelecidas entre professor e alunos, recorrendo à língua materna e à linguagem Matemática.

Assim, é percetível a existência de duas grandes componentes da comunicação verbal: a oral e a escrita. Apesar de neste projeto o foco ser na comunicação escrita, a comunicação oral não é totalmente deixada de parte, já que faz parte de todo o processo da resolução de problemas. Antes de passarem ao registo escrito das suas ideias e conclusões, os alunos, quando trabalhavam em grupo, tinham obrigatoriamente de trocar ideias entre si, de modo a definirem o caminho a seguir. Além disso, na fase de discussão, já após todos os grupos terem realizado as suas resoluções, a comunicação oral volta a estar presente, uma vez que os alunos expõem as ideias do seu grupo ao resto da turma, defendem as mesmas e argumentam com os colegas que possam ter alguma dúvida ou crítica a fazer. Portanto, os dois tipos de comunicação estão sempre de mãos dadas, no que toca ao processo de resolução de problemas e discussão de resultados.

Um dos objetivos desta investigação passa por caracterizar a comunicação escrita dos alunos na apresentação das resoluções de problemas. Para isso, torna-se necessário definir critérios para realizar essa análise. No seu estudo, Santos e Semana (2014) elaboraram uma lista com três pontos a ter em consideração quando se analisa a comunicação escrita: a interpretação do objetivo da tarefa, as justificações apresentadas e as representações usadas. No primeiro ponto, a *interpretação do objetivo da tarefa*, as autoras consideram duas partes: a declaração da meta, onde se inclui a identificação do objetivo da tarefa e a completude da informação recolhida, e a linguagem utilizada, na qual se analisa o formato, ou seja, se a declaração da meta é transcrita ou se é reescrita utilizando as próprias palavras, e a precisão da linguagem. No segundo ponto, as *justificações apresentadas*, considera-se o tipo de justificação e a correção e completude da mesma. Os tipos de justificação apresentados pelas autoras são: vaga (justificação pouco clara ou pouco informativa), regra (justificação com uso exclusivo de regras, algoritmos ou definições), procedimental (justificação do que é feito em determinada etapa, mas sem explicar a validade da mesma) e relacional (justificação da validade de um passo, incluindo ou não a justificação do que é feito em determinada etapa, dando espaço a que haja um entendimento relacional). No último ponto, as *representações usadas*, são considerados os tipos de representação e a precisão e completude da mesma. Os tipos de representação avançados por Santos e Semana (2014) são: linguagem verbal (a linguagem natural, feita pelas palavras dos alunos e com a terminologia matemática), representação icónica (utilização de esquemas ou desenhos) e representação simbólica (recurso a símbolos numéricos e/ou algébricos).

Outros autores referem tipologias de representação diferentes das apresentadas por Santos e Semana (2014). Bruner (1999) distingue três representações do conhecimento: ativa, icónica e simbólica. A primeira, a *representação ativa*, caracteriza-se pelas ações feitas para se alcançar um determinado resultado. A segunda, a *representação icónica*, passa pelo uso de imagens ou gráficos que, apesar de não definirem totalmente um certo conceito, conseguem representá-lo. A última, a *representação simbólica*, caracteriza-se por um conjunto "de proposições simbólicas ou lógicas extraídas de um sistema simbólico que é regido por regras ou leis para a formação e transformação de proposições" (Bruner, 1999, p. 66).

Numa outra perspetiva, Pirie (1998) vai mais longe, referindo que a linguagem que alunos e professores utilizam na sala de aula pode ser dividida em seis tipos: linguagem comum, linguagem verbal matemática, linguagem simbólica, representação visual, suposições não ditas mas partilhadas e linguagem quase-matemática. A *linguagem comum* é aquela que as pessoas utilizam normalmente no seu dia a dia, com o seu vocabulário habitual, que é diferente consoante a idade e estádios de compreensão. Já a *linguagem verbal matemática* refere-se ao vocabulário próprio da Matemática, englobando o uso de palavras, quer sejam faladas ou escritas. A *linguagem simbólica* é, como o próprio nome indica, a comunicação feita por escrito, com o uso de símbolos matemáticos. No que toca à *representação visual,* a autora escreve que "apesar de não ser exatamente uma linguagem, este é certamente um meio poderoso de comunicação matemática" (Pirie, 1998, p. 8), sendo que aqui se inclui o recurso a desenhos, gráficos e tabelas. Outra categoria que não pode ser vista rigorosamente como uma linguagem, é a de *suposições não ditas mas partilhadas*, que acontece quando os alunos conversam entre si, trocando significados sem que os digam de forma explicita. Por fim, a *linguagem quase-matemática* é aquela a que recorremos quando fazemos algumas analogias entre a Matemática e outros assuntos do quotidiano. Para se entender melhor esta linguagem, a autora deixa o exemplo comum da aprendizagem de equações algébricas, em que se usa a ideia da balança de dois pratos, em que temos de manter o equilíbrio num prato e noutro, tal como o fazemos em cada membro da equação.

Outra lista, mais específica para a resolução de problemas, é lançada por Nobre, Amado e Ponte (2011), citando Preston e Garner, cuja classificação é a seguinte: linguagem natural, representação pictórica, representação aritmética, representação gráfica e representação algébrica. A *linguagem natural* é aquela que se utiliza para explicar o raciocínio e as estratégias seguidas, de forma a complementar a resposta. A *representação pictórica* é usada quando se incluem desenhos ou imagens que possam apresentar ou resumir a informação. Nos casos em que se recorre à estratégia de tentativa e erro ou ainda ao uso de tabelas, é a *representação aritmética* que está presente. No que toca à *representação gráfica* é, como o nome indica, a representação com recurso a gráficos de variáveis, contínuas ou discretas. E por último, a *representação algébrica* corresponde ao uso da linguagem simbólica matemática.

Nesta investigação, para caracterizar a comunicação escrita dos alunos na resolução dos problemas, serão tidos em conta os seguintes pontos, tendo por base o modelo de Santos e Semana (2014), e as alterações realizadas por Martinho e Rocha (2017):

1. Compreensão do problema – o aluno:
    - mostra que entendeu o que é pedido?
    - recolheu bem e de forma completa a informação?
    - transcreveu o objetivo e as informações do problema, ou reescreveu com as suas próprias palavras?
2. Fundamentação da resposta apresentada:
    - consoante o nível de fundamentação:
        - correção
        - clareza

        - completude
    - consoante o tipo de fundamentação:
        - vaga, pouco clara ou pouco informativa
        - uso exclusivo de regras, algoritmos ou definições
        - recurso à experimentação
        - procedimental (justificação do que é feito numa das etapas, sem explicar a validade da mesma)
        - relacional (justificação da validade de uma etapa)
3. Representações utilizadas:
    - linguagem verbal (linguagem natural com utilização de palavras próprias do dia a dia ou com terminologia matemática)
    - representação icónica (utilização de esquemas ou desenhos)
    - representação simbólica (utilização de símbolos algébricos)

Seguindo este modelo, poder-se-á fazer uma caracterização da comunicação escrita dos alunos na resolução dos problemas propostos de forma mais estruturada.

2.3. O estudo das Sucessões no currículo

Desde tenra idade, somos confrontados com regularidades, formas e padrões, quer seja através de brinquedos manipuláveis, puzzles ou até mesmo números. Assim, o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) refere a importância de explorar situações relacionadas com regularidades, principalmente em sequências de números ou padrões que podem ser representados geométrica ou numericamente, a partir do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Nesse programa, podemos ler que o "trabalho com regularidades generalizáveis, segundo regras que os alunos podem formular por si próprios, ajuda a desenvolver a capacidade de abstração e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico" (ME, 2007).

No Programa de Matemática do Ensino Básico atualmente em vigor, as sucessões são referidas explicitamente, pela primeira vez, no 3.º Ciclo, inseridas no domínio Funções, Sequências e Sucessões. Deste modo, os alunos têm um primeiro contacto com o termo "sucessão" apenas no 7.º ano de escolaridade, ficando a saber o que é uma sequência e uma sucessão, e ainda representando gráficos de sequências. No Programa de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013), essa é a única vez que os alunos ouvem falar explicitamente sobre sequências e sucessões, voltando a referir o assunto apenas no ensino secundário, dependendo do percurso que escolhem.

Olhando apenas para os Programas de Matemática do Ensino Secundário para Cursos Científico-Humanísticos, percebemos que os alunos que frequentem o curso de Ciências Sociais e Humanas, ou seja, alunos de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, não voltam a referir sucessões de modo explicito. Quanto aos alunos matriculados em Matemática B e, portanto, alunos do curso de Artes Visuais, estes aprendem sobre sucessões, aquando da aprendizagem sobre modelos discretos.

Como os alunos que colaboraram com esta investigação frequentam a disciplina de Matemática A, interessa saber com mais pormenor o que é lecionado sobre sucessões no programa desta disciplina. Após terem falado sobre sucessões no 7.º ano de escolaridade, estes alunos voltam ao tema no 11.º ano. A turma que participou neste estudo, recomeçou a aprendizagem de sucessões falando sobre os conjuntos minorados, majorados e limitados, percebendo também a noção de máximo e mínimo de um conjunto. De seguida, aprendeu sobre alguns assuntos mais genéricos, como as definições de sucessões numéricas, monótonas, majoradas, minoradas e limitadas. Daqui, passaram diretamente para a lecionação de limites de sucessões, deixando para o final o conteúdo lecionado na minha Intervenção Pedagógica: o Princípio de Indução Matemática e as progressões aritméticas e geométricas.

Para lecionar o Princípio de Indução Matemática, nenhum pré-requisito específico era necessário, além de noções básicas de lógica, que os alunos apendem no 10.º ano, e a manipulação algébrica de expressões. Além disto, era benéfico que os alunos percebessem a importância que a demonstração tem na Matemática, e o rigor que a mesma exige. Já no que toca às progressões, os pré-requisitos necessários eram apenas os aprendidos imediatamente antes, ou seja, as generalidades acerca de sucessões.

CAPÍTULO III

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL

Este terceiro capítulo encontra-se dividido em três secções. Na primeira, descreve-se o contexto de intervenção, nomeadamente a caracterização da escola e da turma. Já na segunda secção, encontra-se o plano geral de intervenção, onde constam as metodologias de ensino e de aprendizagem escolhidas e ainda a planificação da intervenção pedagógica supervisionada. Por fim, na última secção, apresentam-se as estratégias de investigação usadas durante a intervenção pedagógica e ainda um esclarecimento de como será feita a organização da análise de dados do capítulo seguinte.

3.1. Contexto de intervenção

Nesta secção, encontra-se a caracterização da escola e da turma onde se desenvolveu o estudo para a realização deste relatório.

3.1.1. Caracterização da escola

A minha Intervenção Pedagógica foi realizada na escola sede de um agrupamento de escolas do distrito de Braga. Este agrupamento é constituído por quatro escolas e abrange a escolaridade desde o pré-escolar até ao ensino secundário.

A escola está localizada num centro urbano e já conta com mais de 130 anos de existência, tendo sofrido uma remodelação nos últimos 10 anos, com obras de requalificação relacionadas com o Programa de Modernização do Parque Escolar. Após esta remodelação, todas as salas passaram a estar equipadas com um computador na mesa destinada ao professor, um projetor e quadro branco, havendo também salas com quadros eletrónicos. Além disso, a escola possui diferentes espaços adequados às aulas que são lecionadas, já que além das salas de aula consideradas normais, tem também salas mais adequadas para o ensino das artes, laboratórios de biologia, química e informática e, ainda, para promover um ensino profissional mais adequado, salas de mecânica, eletricidade e refrigeração.

Após uma leitura do seu Projeto Educativo, fica-se a saber que esta escola é frequentada por mais de mil e quinhentos alunos, divididos entre cursos cientifico-humanísticos, turmas de ensino recorrente e ainda turmas de ensino profissional. Quanto a docentes, a grande maioria pertence aos quadros do agrupamento e, pela última avaliação externa realizada ao agrupamento, percebe-se que o corpo docente é experiente, já que mais de 97% leciona há, pelo menos, 10 anos.

A escola assume, ainda no seu Projeto Educativo, que a sua principal missão é o sucesso dos seus alunos, e pressupõe o prosseguimento de certos princípios e valores definidos nesse documento. Na lista desses princípios encontramos, por exemplo, a necessidade de oferecer um ensino que prepare os alunos para a sua vida, quer eles queiram prosseguir os seus estudos ou ingressar no mercado de trabalho no final da escolaridade obrigatória, a indicação para se desenvolver um ensino com base na inovação, experimentação e recorrendo a novas metodologias e tecnologias, a promoção de hábitos de vida saudáveis, responsáveis, autónomos e solidários, o estreitar de relações entre a escola e a comunidade, entre outros.

Já no seu Plano Anual de Atividades, encontramos uma lista com várias visitas de estudo, para todos os níveis de ensino do agrupamento, que têm como objetivo conciliar as aprendizagens promovidas pela escola com atividades realizadas no exterior da mesma. A estas visitas de estudo, juntam-se também atividades relacionadas com a cidade onde a escola está situada, com o objetivo de transmitir a cultura da mesma para que esta não se perca, bem como atividades relacionadas com as épocas festivas do país. Além disso, tendo como estratégia proporcionar aos alunos atividades que sejam um complemento curricular aos domínios que são aprendidos nas aulas, há também projetos como ateliês e clubes ligados às artes, e ainda palestras, colóquios e *workshops* organizados pelos diferentes departamentos. Mais relacionado com a Matemática, a escola tem como tradição participar no Canguru Matemático, nas Olimpíadas Portuguesas da Matemática, no PmatE e no Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos.

Na última avaliação externa realizada ao agrupamento, este obteve a classificação *bom* nos três domínios avaliados, sendo este o terceiro nível de classificação numa escala com cinco níveis, em que o mínimo é *insuficiente* e o máximo *excelente*. Neste documento, ficamos a saber que o agrupamento recorre a diferentes estratégias de valorização do trabalho e dos resultados dos alunos, nomeadamente realizando exposições de trabalhos e incentivando à participação em concursos ou outros eventos. Além disto, essa valorização é feita através da premiação anual dos alunos com bom desempenho académico ou com participação nos concursos referidos e até mesmo em provas no âmbito do desporto escolar, conciliando estas participações com um comportamento exemplar.

3.1.2. Caracterização dos alunos da turma

O desenvolvimento da minha prática pedagógica foi realizado numa turma de 11.º ano do curso de Ciências e Tecnologias. A turma é composta por 22 alunos, doze raparigas e dez rapazes, sendo que dois dos elementos da turma estão a repetir o 11.º ano e os restantes nunca tiveram uma retenção. As idades dos alunos, no final do 1.º período, variavam entre os 16 e os 17 anos, sendo que a média das mesmas ronda os 16 anos.

Através de um inquérito realizado por mim, usando a plataforma *GoogleForms*, no final do 1.º período, foi possível recolher mais dados sobre a turma. Relativamente à disciplina de Matemática, oito alunos referem-na como sendo a sua preferida, enquanto seis dos restantes catorze alunos revelam que é a disciplina na qual sentem mais dificuldades. Além da Matemática, alguns alunos manifestam ter dificuldades na disciplina de Português. Esta informação é relevante tendo em conta que, para a resolução de problemas, a comunicação escrita e as capacidades de interpretação e compreensão são essenciais.

Pensando no futuro, todos os alunos da turma referiram que pretendem frequentar o ensino superior, apesar de seis ainda não saberem que profissão desejam ter no futuro. Além disso, sete mostram tendência para a área da saúde, quatro para a área de tecnologia (mais especificamente cursos de engenharia), três para a área do desporto, um para a área da agricultura e recursos naturais e um para a área de direito.

Através da observação de aulas, apercebi-me que a turma é calma e sossegada e, ainda, que não está habituada a ser desafiada e expor dúvidas. Por um lado, as aulas não deixam espaço para a discussão entre os alunos ou entre o professor e a turma, e as tarefas são maioritariamente compostas por exercícios – os alunos estão pouco habituados a resolver problemas. Este fator acabou por enriquecer a minha investigação, já que foi mais percetível uma evolução na postura dos alunos face aos problemas e ainda um maior envolvimento na resolução dos mesmos à medida que as aulas iam avançando. Por outro lado, como a turma é sossegada, quando os alunos trabalham em grupo, mantêm-se sossegados e empenhados na resolução das tarefas propostas. Esta característica facilitou a implementação do projeto, dado que o ambiente na sala de aula foi mais simples de gerir e organizar.

A turma manteve-se do ano letivo anterior, com exceção de quatro alunos: os dois que se encontram a frequentar de novo o 11.º ano, um aluno que foi transferido de outra escola e um aluno brasileiro a residir em Portugal apenas neste ano letivo. Relativamente ao desempenho anterior dos alunos da turma que vieram juntos do ano letivo anterior – e, portanto, foram avaliados diante dos mesmos critérios – a média das notas do final do 10.º ano era de 14,28 valores, sendo que apenas um dos alunos teve uma nota negativa e sete obtiveram classificação entre 16 e 19 valores, o que era um indicador de que a turma teria bons conhecimentos matemáticos do ano anterior. Já no que toca ao ano letivo da minha Intervenção Pedagógica, as médias das classificações da turma, e os respetivos desvios padrão, em cada período, podem ser observadas no quadro 1.

Quadro 1

Desempenho dos alunos da turma ao longo do ano letivo

1.º Período		2.º Período		3.º Período	
$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s
13,23	3,12	14,14	3,03	14,05	3,36

(Legenda: $\bar{x}$ representa a média e s o desvio-padrão)

Através do quadro 1, conseguimos concluir que a turma evoluiu positivamente, entre o primeiro período e o último. Além disso, no final do ano letivo, cinco alunos obtiveram notas entre 16 e 19 valores, e dois elementos da turma obtiveram a classificação máxima de 20. Relativamente a notas negativas, apenas dois alunos tiveram uma avaliação inferior a 10 valores.

Para não comprometer a identidade dos alunos, foi atribuída, a cada um, uma numeração do tipo Ax, sendo x um número natural entre um e vinte e dois. Cada aluno tem numerações distintas, atribuídas de uma forma completamente aleatória. Já a numeração dos grupos estabelecidos para resolver alguns problemas, será do tipo Gy, com y natural entre um e sete. A constituição de cada grupo pode ser vista no quadro 2.

Quadro 2

Constituição dos grupos na resolução de problemas

Grupos	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7
Elementos	A1 A14 A17 A22	A2 A13 A18	A3 A12 A15	A4 A11 A19	A5 A10 A20	A6 A9 A16	A7 A8 A21

A constituição dos grupos ficou a cargo dos alunos, sendo que a única indicação era referente à quantidade de elementos. Os alunos deviam estar separados em seis grupos de três, e um grupo de quatro elementos.

3.2. Plano geral de intervenção

Nesta secção, dividida em duas partes, pretende-se apresentar o que foi feito durante a lecionação das aulas, nomeadamente as metodologias de ensino e aprendizagem escolhidas e a motivação dessas escolhas e, ainda, a forma como foram organizadas as aulas da intervenção.

3.2.1. Metodologias de ensino e aprendizagem

Os alunos devem aperfeiçoar o seu discurso através de apresentações orais e, ainda, trabalhar individualmente ou em colaboração com os colegas de modo a desenvolver competências matemáticas, de acordo com o NCTM (1998). Tendo isto em consideração, a minha intervenção contou com momentos de trabalho individual, de trabalho em grupo e ainda de apresentação de ideias e defesa das mesmas.

Na primeira aula da intervenção, os alunos foram desafiados a formar grupos de três, com exceção de um grupo de quatro elementos. Estes grupos tinham como objetivo propor uma tarefa especial (Anexo 1) que consistia em escolher três problemas, de uma lista de dez, para resolver fora da sala de aula. Foi marcada uma data em que cada grupo teria de entregar as resoluções dos problemas, que seriam sujeitas a um *feedback* e, posteriormente, cada grupo escolheria um dos problemas para aperfeiçoar a resposta e apresentar à turma a sua resolução, na fase final da intervenção. Com este trabalho, houve uma possibilidade de os alunos aperfeiçoarem a sua resolução de problemas, permitindo avaliar a sua evolução ao longo do projeto de intervenção, que é o quarto objetivo desta investigação. Além deste objetivo, esta atividade permitiu também detetar as dificuldades sentidas pelos alunos e corrigi-las através do *feedback*, melhorar a comunicação escrita chamando a atenção para certos pormenores nas respostas dadas na primeira versão do trabalho e, ainda, apresentar um leque distinto de estratégias de resolução de problemas realizadas por cada grupo.

Ao longo das restantes aulas, houve momentos de desenvolvimento de matéria relacionada com o tópico Sucessões, nomeadamente o Princípio de Indução Matemática (PIM), Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas. No primeiro ponto lecionado, foi salientada a importância da demonstração em matemática e os alunos tiveram a oportunidade de visualizar um pequeno vídeo que relacionava o "efeito dominó" com o PIM, o que se revelou uma grande ajuda para a compreensão do conteúdo. Ao lecionar a matéria relacionada com as progressões, o PIM e a importância da demonstração tiveram um uso constante, uma vez que foi usado o PIM para mostrar a igualdade entre uma dada sucessão definida por recorrência e o respetivo termo geral, e a turma foi incentivada a demonstrar as fórmulas das somas dos n primeiros termos de uma dada progressão (tanto aritmética como geométrica). Na introdução e desenvolvimento dos temas, a turma foi desafiada a chegar às definições e fórmulas pretendidas, sempre com a orientação da professora e com base em exemplos prévios e em demonstrações quando tal era possível. Ao demonstrarem aquilo que aprendem, os alunos deixam de ver a matemática como uma simples aplicação de muitas regras e começam a perceber de onde vêm essas "regras", atribuindo um sentido maior à aprendizagem. De acordo com o NCTM (2008), nos anos do ensino secundário, os professores de matemática devem "esforçar-se por criar um ambiente no qual todos debatam, questionem e ouçam. Os professores deverão esperar que os alunos procurem, formulem e critiquem explicações" (NCTM, 2008). Foi com foco neste esforço que incentivei a turma a criar conjeturas, fazendo com que todos as aceitassem e, posteriormente, que as demonstrassem.

Quanto à disposição dos alunos na sala de aula, durante a lecionação dos conteúdos os alunos trabalhavam de modo individual, embora houvesse uma grande interação entre a professora e o grupo turma e ainda entre os elementos da mesma. Esta opção deveu-se ao facto de os alunos estarem habituados a essa organização desde o início do ano letivo e não considerei que fosse benéfico alterar isso. Isto porque a turma já seria chamada a intervir para a construção dos seus conhecimentos, algo a que não estavam habituados, e submetê-los a mais mudanças poderia comprometer o decorrer das aulas e, ainda, a aprendizagem.

Já durante a resolução de problemas, houve momentos em que o trabalho foi individual e outros em que o trabalho foi realizado em grupo, mantendo os grupos formados para a tarefa especial. Inicialmente, e porque alguns dos problemas propostos tinham como objetivo introduzir certas matérias, a sua resolução foi efetuada de modo individual. Mas isto revelou-se pouco sustentável e produtivo, já que os alunos demoravam muito tempo e exigia um momento de discussão mais alongado. Por este motivo, e também para promover a colaboração entre colegas de turma e chegarem a ideias mais pensadas e concretas, os problemas passaram a ser resolvidos em grupo.

Segundo Freitas e Freitas (2003), optar por uma estratégia de ensino baseada apenas na interação entre o professor e o grupo turma força a aprendizagem individualizada e, para os alunos que têm mais dificuldades na compreensão da matéria, pode ser motivo para estes perderem a motivação. Por esta razão, os autores referem que "tudo poderá ser diferente se, em vez de colocar o aluno, sistematicamente, na situação de aprender sozinho, lhe dermos a ajuda de poder aprender integrado num grupo" (Freitas & Freitas, 2003, p. 25). No entanto, é bom ter em atenção que formar um grupo não é apenas juntar um certo número de alunos e atribuir uma tarefa, deve sim, aliado a isso, haver regras bem definidas. No caso do trabalho em grupo durante a intervenção, foi esclarecido que todos os elementos do grupo deveriam ser capazes de apresentar a resolução realizada e que, se alguém quisesse expor uma dúvida, esta deveria ser uma dúvida de todo o grupo e não apenas algo individualizado. Deste modo, todos os elementos de cada grupo tinham de se empenhar na resolução do problema, de modo a perceber tudo o que era feito, uma vez que era um trabalho de grupo e, por isso, se alguém não soubesse apresentar devidamente o trabalho realizado, todo o grupo seria colocado em questão.

Além da passagem do trabalho individual para o trabalho de grupo, mudou-se também o foco dos problemas propostos. Inicialmente, houve uma tentativa de utilizar apenas problemas relacionados com a matéria lecionada, o que se revelou algo pouco rico a nível de diversidade de estratégias. Isto porque todos os alunos começavam a resolução com a ideia de que teriam de aplicar a matéria dada, portanto todos os grupos seguiam o mesmo percurso durante a resolução. Assim, optou-se por propor problemas sem ligação a nenhum conteúdo matemático específico, o que enriqueceu as discussões no final da resolução.

Como todos os problemas eram propostos com o objetivo de existir uma discussão final sobre os mesmos, as aulas foram pensadas seguindo uma prática de ensino exploratório. Assim, procurei seguir as cinco fases propostas por Stein, Engle, Smith e Hughes (2008). Estes autores sugerem que se comece por antecipar as respostas dos alunos à tarefa que vai ser lançada. De seguida, o professor deve "monitorizar as respostas dos alunos às tarefas durante a fase de exploração" (Stein *et al.*, 2008, p. 321) e, posteriormente, selecionar os alunos que irão apresentar as suas respostas na fase de discussão. Após esta seleção, os autores indicam que deve ser estabelecida uma "sequência propositada das respostas" (Stein *et al.*, 2008, p.321) que serão apresentadas. Por fim, devem ser feitas as conexões entre as diferentes respostas apresentadas.

3.2.2. Planificação da intervenção pedagógica

A planificação de aulas é uma fase importante do processo de ensino, pois trata-se do momento em que o professor toma decisões sobre vários aspetos a considerar para que a aula decorra do melhor modo possível (Superfine, 2008). Assim, o processo de planificação é uma mais valia para qualquer professor, já que permite pensar previamente em todos os aspetos da aula, evitando imprevistos. Além disso, o facto de se pensar em cada ponto da aula permite-nos antecipar possíveis dificuldades e planear o modo de as combater, caso tal seja necessário, algo que se revela ainda mais importante em aulas com resolução de problemas. Isto porque se forem antecipadas as dificuldades que os alunos podem sentir, também podem ser pensadas previamente as dicas que podem vir a ser dadas, e ainda as questões a ser colocadas, de forma a ajudar os alunos, sem lhes dar imediatamente a resposta.

No quadro 3 apresenta-se a organização da intervenção pedagógica supervisionada, estando na primeira coluna a numeração da aula com a respetiva duração, está ainda presente a data em que a aula foi lecionada, seguida de uma coluna com o sumário da aula e, por fim, os problemas realizados, nos casos em que tal aconteceu.

Quadro 3

Organização da intervenção pedagógica supervisionada

Aula	Data	Sumário	Problemas
1 90 minutos	09/02/2018	- Ficha de Diagnóstico - Proposta da tarefa especial	- Ficha de Diagnóstico
2 90 minutos	20/02/2018	- Princípio de Indução Matemática	
3 90 minutos	21/02/2018	- Progressões aritméticas: conceito e termo geral	
4 45 minutos	21/02/2018	- Progressões aritméticas: soma dos N primeiros termos	- *Toldos de praia*
5 90 minutos	23/02/2018	- Resolução de problemas	- *O número de Rita* - *O salário do Henrique*
6 90 minutos	27/02/2018	- Progressões geométricas: conceito e termo geral	
7 90 minutos	28/02/2018	- Progressões geométricas: soma dos N primeiros termos	- *A empresa do Sr. Ernesto*
8 45 minutos	28/02/2018	- Monotonia de progressões aritméticas e geométricas	
9 90 minutos	02/03/2018	- Resolução de problemas	- *Problema sem falta de memória*
10 90 minutos	06/03/2018	- Aula prática	
11 90 minutos	07/03/2018	- Ficha de avaliação	
12 45 minutos	07/03/2018	- Resolução de problemas	- *O número da minha casa*
13 90 minutos	09/03/2018	- Resolução de problemas	- *Ai, tantos testes para corrigir*
14 90 minutos	13/03/2018	- Resolução de problemas	- *Miss Simpatia*
15 90 minutos	14/03/2018	- Resolução de problemas	- *Cortes na pizza*
16 90 minutos	16/03/2018	- Apresentações orais dos problemas da tarefa especial	
17 90 minutos	20/03/2018	- Ficha Final - Aplicação do questionário	- Ficha Final
18 90 minutos	21/03/2018	- Resolução do problema da revista	- Educação e Matemática, n.º 145

É importante salientar que os alunos resolveram exercícios ao longo das aulas que decorreram antes da Ficha de Avaliação. Nesses exercícios, pretendia-se que os alunos aplicassem os conhecimentos aprendidos, de forma a que os interiorizassem melhor. Estas tarefas não constam no quadro anterior, pois o foco deste estudo é a resolução de problemas sendo, por isso, apenas os problemas a ter lugar de destaque.

Na última aula da intervenção, quis que os alunos tivessem uma aula com um objetivo um pouco diferente. Como a aula foi realizada na *semana aberta*, ou seja, uma semana em que a escola fornece aos alunos várias atividades extracurriculares ao longo dos dias, considerei que seria benéfico entrar no espírito fornecido pela escola e brindar a turma com uma aula mais leve e com um objetivo distinto do das anteriores. Por isso, e sem deixar a resolução de problemas de lado, foi dada a oportunidade aos alunos de resolver o problema proposto na revista Educação e Matemática, edição número 145. A resolução foi feita em discussão com todo o grupo turma e tinha como objetivo enviar posteriormente uma resposta para o professor José Paulo Viana, autor da secção "O problema deste número" da revista Educação e Matemática. Deste modo, os alunos tiveram uma aula em que resolveram um problema em conjunto, discutiram as suas ideias e chegaram a uma resposta final que foi escrita e enviada, permitindo que a turma deixasse uma pequena marca na revista lançada pela Associação de Professores de Matemática.

3.3. Estratégias de investigação e avaliação da ação

Neste subcapítulo, constam as estratégias de investigação, onde se explicitam os instrumentos de recolha de dados utilizados durante a intervenção, e que ajudaram a realizar este estudo. Além disso, será ainda referido o modo como foram analisados os dados e como serão apresentados os resultados no próximo capítulo, esclarecendo, em particular, como foi feita a seleção desses mesmos dados.

3.3.1. Instrumentos de recolha de dados

Esta investigação tem como objeto de estudo a turma de 11.º ano já caracterizada anteriormente, o que significa que se aproxima de um estudo de caso. Isto porque, de acordo com Coutinho e Chaves (2002), esta abordagem metodológica tem como característica principal o facto de ser uma investigação "que envolve o estudo intensivo e detalhado de uma entidade bem definida" (Coutinho & Chaves, 2002, p. 223), sendo que a turma é a entidade deste estudo. Assim, durante a minha intervenção, apliquei uma ficha de diagnóstico na primeira aula da intervenção, observei a postura dos alunos face aos problemas propostos ao longo das aulas e, na fase final da intervenção, propus a realização de uma ficha final e o preenchimento de um questionário. Para complementar todos os dados obtidos, recorri também à gravação áudio das aulas.

Ficha de Diagnóstico

Neste projeto, comecei por aplicar uma ficha de diagnóstico (Anexo 2), composta por três problemas, com um objetivo inicial de analisar a postura dos alunos relativamente à resolução de problemas – isto é, se desistiam facilmente de os resolver ou se persistiam até conseguir, se tentavam fazer alguns passos ou se nem sequer se notava qualquer tipo de tentativa de resolução – e a forma como escreviam matematicamente. Além disto, a Ficha de Diagnóstico permitiu perceber quais as dificuldades iniciais visíveis na resolução dos alunos, de modo a que, nas seguintes aulas da intervenção, houvesse um foco maior na ultrapassagem dessas mesmas dificuldades. Esta perceção das dificuldades iniciais foi mais completa devido ao facto de a realização desta ficha ter sido individual, sem permitir qualquer tipo de entreajuda entre os elementos da turma.

Problemas propostos ao longo da intervenção

Como um dos objetivos deste estudo passava por avaliar uma possível evolução dos alunos no que toca à resolução de problemas, era importante que fossem resolvidos o maior número de problemas possível durante as aulas da intervenção. Assim, procurei aplicar problemas em três fases distintas, que se complementam: a introdução do tópico, o desenvolvimento e ainda na sua avaliação. Mas, por considerar importante a resolução de problemas que não estejam associados a tópicos específicos, "simplesmente como forma de desenvolver e comparar os vários tipos de raciocínio" (Viana, 2012), também propus problemas sem relação direta com a matéria que estava a ser lecionada.

Todos os problemas, num total de nove, propostos durante o projeto e que podem ser encontrados no Apêndice 1, foram fornecidos a todos os alunos, um problema por folha, de modo a que a resolução pudesse ser realizada no enunciado. Estes problemas tiveram resoluções individuais ou em grupo, sendo que no caso dos problemas realizados em grupo, todos os alunos tinham o seu enunciado, entregando apenas uma resolução final do grupo. Em todas as aulas em que foram resolvidos problemas, os alunos entregaram as suas resoluções antes de ser realizada uma discussão sobre como o problema poderia ter sido resolvido. Estas discussões permitiram que os alunos tomassem conhecimento de outras estratégias de resolução e que desenvolvessem uma maior capacidade de expor o seu raciocínio (ou do seu grupo), defender as suas ideias e também aceitar e compreender as ideias dos outros, tendo a possibilidade de levantar questões sobre aquilo que, à partida, poderia não estar tão claro nas apresentações dos colegas.

Ficha Final

Na fase final deste projeto, apliquei uma nova ficha (Anexo 3), de modo a que pudesse ser comparada com a Ficha de Diagnóstico e permitisse detetar uma possível evolução na resolução de problemas por parte dos alunos. Esta ficha, que eu designei de "Ficha Final", tinha quatro problemas que deviam ser resolvidos individualmente. O objetivo desta ficha passava por ter uma recolha de dados com a qual pudesse ser comparada a persistência e escrita dos alunos no inicio e no fim da intervenção, de modo a perceber se houve algum tipo de evolução.

Observação e gravação de aulas

A observação da postura dos alunos nas aulas foi um processo muito importante nesta investigação. Isto porque permitiu perceber a posição dos alunos face à resolução de problemas – inicialmente, alguns alunos não se deixavam desafiar pelos problemas, mostrando uma atitude derrotista e sem sequer tentarem compreender o problema. Sem esta observação, não era possível perceber esta postura reticente de alguns alunos, já que nas produções escritas não dá para retirar estas situações, deixando espaço apenas para ver possíveis ausências de respostas, que poderiam ter várias interpretações (nomeadamente, o facto de o aluno poder ter pensado no problema e ter-se empenhado, mas não conseguir chegar a uma resposta). Além disto, a observação permitiu também perceber que esta atitude por parte dos alunos foi mudando, chegando a haver momentos na sala de aula em que os alunos não queriam ouvir os palpites dos outros grupos por quererem tirar conclusões sozinhos, sem se sentirem influenciados pelas respostas dos colegas.

Para não perder informação sobre os diálogos em sala de aula, tanto entre professor e alunos como dentro dos grupos (nos casos em que as resoluções dos problemas eram em grupo), todas as aulas tiveram gravação de áudio, com as respetivas autorizações dos encarregados de educação (Anexo 4). Quando a turma se agrupava, era colocado um gravador em cada grupo, de modo a ser mais percetível o caminho que o grupo seguiu para chegar à resolução do problema e também a atitude de cada elemento do grupo, nomeadamente, perceber quem poderia tomar a posição de "líder", quem mostrava interesse em perceber o raciocínio dos restantes elementos do grupo, quem tentava ter uma escrita mais clara, entre outros fatores.

Questionário

De modo a complementar a informação recolhida através da observação da postura dos alunos face à resolução de problemas e também das produções dos mesmos, foi aplicado um questionário (Anexo 5) com o objetivo de conhecer as perceções dos alunos relativamente à resolução de problemas. Este questionário é composto por 84 afirmações/questões, divididas em três grandes grupos: dados pessoais, apreciação global e resolução de problemas.

No primeiro grupo, encontra-se a identificação do aluno, através do seu nome e idade, questionando também quais são as suas perspetivas profissionais e a quantidade de horas utilizadas no estudo da Matemática, semanalmente. No segundo grupo, pretende-se obter um conhecimento sobre a perspetiva dos alunos quanto às aulas e quanto à disciplina, nomeadamente sobre o que mais e menos gostam de fazer nas aulas e ainda qual a atitude face à resolução de problemas. No último grupo, o objetivo é recolher informação relativamente ao que os alunos consideram ser um "problema matemático", o que sentem quando resolvem problemas, quais as suas dificuldades e estratégias mais utilizadas e ainda a importância atribuída à resolução de problemas. Por fim, ainda neste grupo, consta uma pergunta que ajuda a perceber se os alunos sentiram alguma evolução pessoal na sua capacidade de resolver problemas.

No quadro 4 pode ver-se com mais clareza e de forma resumida quais foram os instrumentos de recolha de dados que ajudaram a responder a cada um dos objetivos deste estudo.

Quadro 4
Instrumentos de recolha de dados para responder aos objetivos estabelecidos

Instrumentos / Objetivos	Ficha de Diagnóstico	Observação e gravação de aulas	Problemas propostos	Ficha Final	Questionário
Objetivo 1	✓	✓	✓	✓	✓
Objetivo 2	✓	✓	✓	✓	✓
Objetivo 3	✓		✓	✓	
Objetivo 4	✓	✓		✓	✓

3.3.2. Análise dos dados

Durante a intervenção pedagógica, foram recolhidos vários dados, nomeadamente a nível da resolução de problemas. A turma resolveu um total de 16 problemas, individualmente ou em grupo, dentro da sala de aula. Como este trabalho tem uma dimensão limitada, seria impossível apresentar resultados da análise de todos esses problemas. É, portanto, importante selecionar os problemas a considerar, de forma a ter uma análise mais diversificada, completa e que mostre diferentes fases da intervenção realizada.

Os problemas propostos podem ser divididos em quatro grupos: problemas da Ficha de Diagnóstico, problemas relacionados com o conteúdo lecionado, problemas sem relação a conteúdos específicos e problemas da Ficha Final. No primeiro grupo, *problemas da Ficha de Diagnóstico*, constam três problemas, dos quais se analisou o primeiro deles. Já no último, *problemas da Ficha Final*, num total de quatro problemas, a escolha recaiu no último. Estas duas decisões foram feitas pelo facto de estes problemas serem o primeiro e o último problema da intervenção, respetivamente, com os quais os alunos tiveram contacto. No que toca aos *problemas relacionados com o conteúdo lecionado*, foram propostos cinco problemas com relação direta aos tópicos de progressões aritméticas e geométricas. Destes problemas, foi selecionado apenas um deles, no qual se notou uma maior diversidade de respostas, embora esta continue a ser reduzida. No entanto, o facto de os alunos não estarem habituados a resolver problemas, fez com que muitos deles encarassem os problemas deste grupo como sendo apenas exercícios um pouco mais trabalhosos. Por este motivo, muitas das respostas obtidas eram muito semelhantes, já que todos procuravam aplicar a matéria aprendida durante a intervenção pedagógica. Isto foi uma dificuldade que teve de ser contornada, já que era percetível o impacto pouco significativo que esse tipo de problemas estava a causar junto dos alunos, e também por se tornar complicado ter dados diversificados para analisar. Assim, foi necessário alterar um pouco a estrutura inicialmente pensada para a intervenção pedagógica, surgindo o grupo dos *problemas sem relação a conteúdos específicos*. Neste grupo, foram propostos quatro problemas, sendo que para a apresentação de resultados foram selecionados dois: *Ai, tantos testes para corrigir!*, que foi o segundo problema sem relação ao conteúdo resolvido pela turma, e *Cortes na pizza*, o último problema abordado antes da Ficha Final. Estes foram os dois problemas em que os alunos recorreram a estratégias mais variadas, sem que se tenham centrado exclusivamente na estratégia de tentativa e erro. Além disso, no caso do problema *Cortes na pizza*, quase todos os grupos apresentaram uma resposta diferente, o que tornou a discussão deste problema mais rica em sala de aula.

A apresentação de resultados, no próximo capítulo, será elaborada em cinco secções. Quatro delas são destinadas aos problemas, com a separação por cada grupo de problemas, e a última está reservada para as perceções dos alunos, obtidas através do Questionário que cada um preencheu. Nas secções dos problemas, todas começam com a apresentação dos problemas escolhidos. De seguida, cada secção é dividida em três partes: estratégias desenvolvidas pelos alunos na resolução do problema, dificuldades dos alunos na resolução do problema e comunicação escrita dos alunos na apresentação da resolução do problema. A única exceção é feita na secção destinada ao problema relacionado com o conteúdo lecionado, no qual a análise realizada não justifica essa separação da secção, como ficará percetível ao leitor.

CAPÍTULO IV

APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

Neste quarto capítulo serão apresentados os resultados obtidos através da análise dos dados recolhidos ao longo de intervenção pedagógica. Assim, este capítulo está dividido em cinco secções. Como a intervenção se iniciou com uma ficha de diagnóstico, a primeira secção deste capítulo terá a apresentação dos resultados da análise feita à resolução de um problema dessa ficha – nomeadamente, as estratégias utilizadas, as dificuldades detetadas e o modo como comunicam por escrito. Na segunda secção, constam os resultados da resolução de um problema com relação direta à matéria lecionada durante a intervenção, sendo que na terceira secção estarão os resultados da resolução de dois problemas sem essa relação ao conteúdo. Na secção número quatro, os resultados apresentados são referentes à resolução de um problema da Ficha Final. Por fim, temos uma secção com a perceção dos alunos relativamente à sua evolução pessoal no processo de resolução de problemas.

4.1. Problema da Ficha de Diagnóstico

No início da minha intervenção, a turma realizou uma ficha de diagnóstico com três problemas distintos. Nesta secção, irei apresentar os resultados obtidos na análise feita a um desses problemas, relativamente às estratégias utilizadas pelos alunos, as dificuldades que estes demonstraram e ainda o modo como apresentaram as suas respostas. A análise foi feita às respostas ao problema 1 da Ficha de Diagnóstico, que tinha o seguinte enunciado[1]:

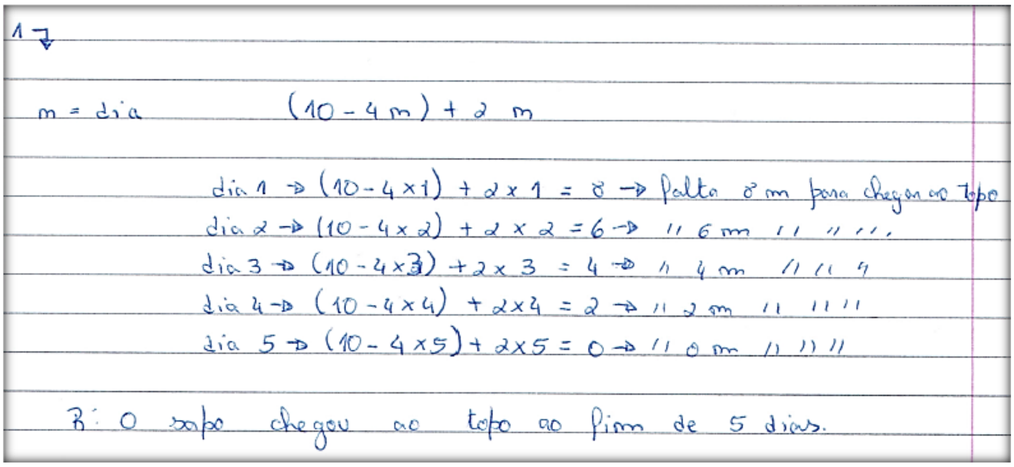
> *Um sapo está no fundo de um poço com 10 metros de profundidade. Durante o dia, o sapo sobe 4 metros através da parede do poço, mas, durante a noite, e enquanto dorme, escorrega e desce 2 metros. Desta forma, quantos dias levará o sapo a atingir o cimo do poço?*

Todos os alunos da turma resolveram este problema, embora apenas nove tenham dado a resposta correta. Os restantes treze chegaram a conclusões erradas devido a dificuldades e erros que cometeram ao longo da sua resolução, algo que veremos mais à frente. Antes disso, vejamos as estratégias que foram utilizadas na resolução deste problema.

Estratégias desenvolvidas pelos alunos na resolução do problema

[1] Retirado de Lester, F. (1993). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In D. Fernandes, A. Borralho & G. Amaro (Eds), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 13-34). Lisboa: IEE.

Na resolução deste problema, as estratégias mais utilizadas foram a construção de modelos que pudessem responder ao problema e o recurso a esquemas. No que toca aos *modelos construídos*, estratégia utilizada por quase 50% da turma, a sua maioria era semelhante ao modelo contruído pelo aluno A17, apresentado na figura 2.



1.

m = dia (10 - 4m) + 2 m

dia 1 → (10 - 4 x 1) + 2 x 1 = 8 → Falta 8 m para chegar ao topo
dia 2 → (10 - 4 x 2) + 2 x 2 = 6 → " 6 m " " " "
dia 3 → (10 - 4 x 3) + 2 x 3 = 4 → " 4 m " " "
dia 4 → (10 - 4 x 4) + 2 x 4 = 2 → " 2 m " " "
dia 5 → (10 - 4 x 5) + 2 x 5 = 0 → " 0 m " " "

R: O sapo chegou ao topo ao fim de 5 dias.

Figura 2. Resolução do problema 1 da Ficha de Diagnóstico pelo aluno A17.

Já no que toca aos *esquemas*, houve uma variedade na sua utilização. Quase todos usaram esquemas em forma de desenho, como é o caso do aluno A8 (Figura 3).

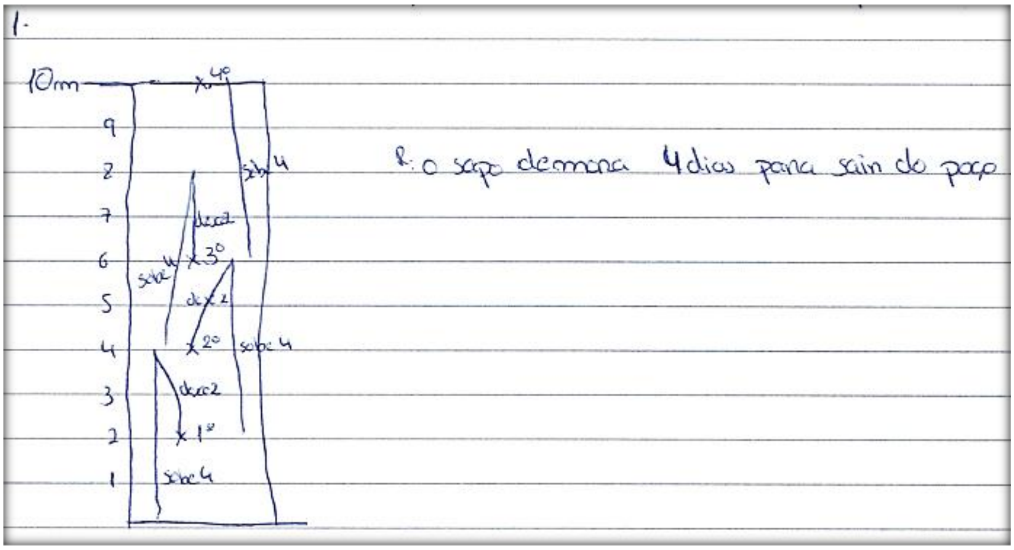


Figura 3. Resolução do problema 1 da Ficha de Diagnóstico pelo aluno A8.

Apesar de a maioria dos esquemas utilizados serem semelhantes aos da figura 3, um membro da turma recorreu a um esquema diferente, um diagrama (Figura 4).

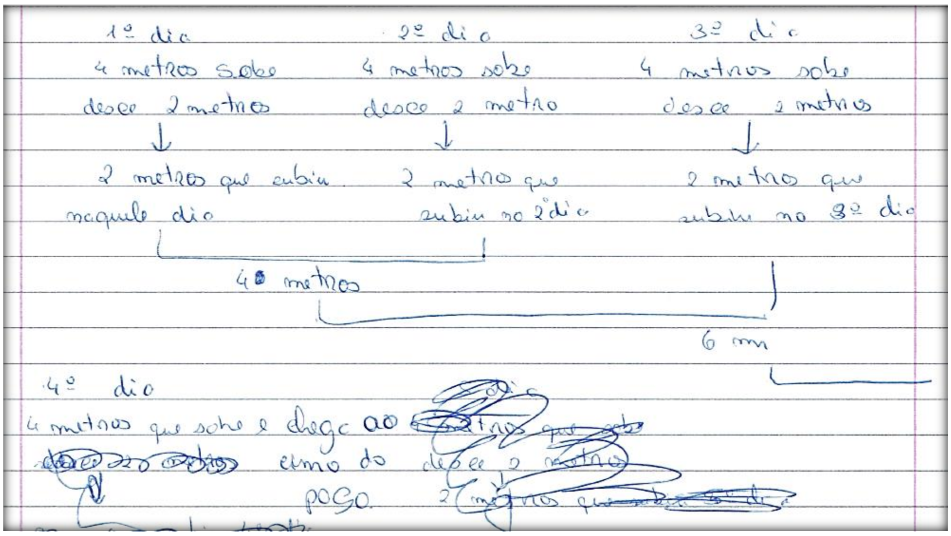
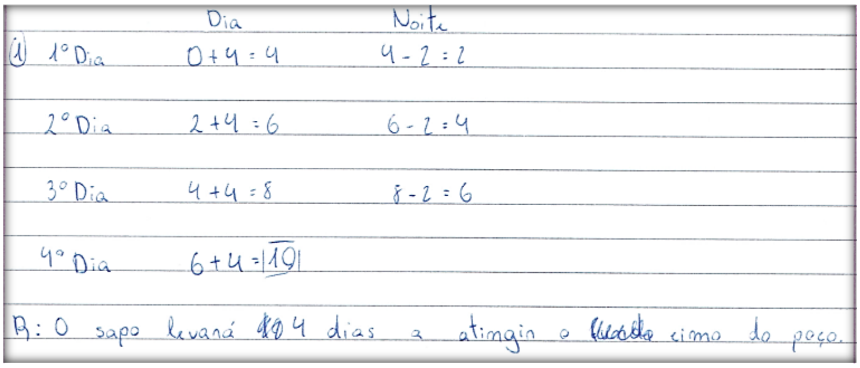

1º dia — 4 metros sobe — desce 2 metros — 2 metros que subiu naquele dia
2º dia — 4 metros sobe — desce 2 metro — 2 metro que subiu no 2º dia
3º dia — 4 metros sobe — desce 2 metros — 2 metro que subiu no 3º dia
4 metros
6 m
4º dia
4 metros que sobe e chega ao cimo do poço.

Figura 4. Resolução do problema 1 da Ficha de Diagnóstico pelo aluno A15.

Uma outra estratégia foi seguida por apenas dois alunos da turma, e foi a *construção de uma tabela* para organizar a informação. A resolução de um desses alunos pode ser vista na figura 5.



1	Dia	Noite
1º Dia	0+4=4	4-2=2
2º Dia	2+4=6	6-2=4
3º Dia	4+4=8	8-2=6
4º Dia	6+4=10	

R: O sapo levará 4 dias a atingir o cimo do poço.

Figura 5. Resolução do problema 1 da Ficha de Diagnóstico pelo aluno A7.

Além das três estratégias já mencionadas, ou seja, a construção de um modelo, o recurso a um esquema e a elaboração de uma tabela, houve um aluno que utilizou uma fórmula que, na sua perspetiva, poderia ajudar a resolver o problema. Nesse caso, a fórmula utilizada foi a *regra de três simples*, como é possível ver na figura 6.

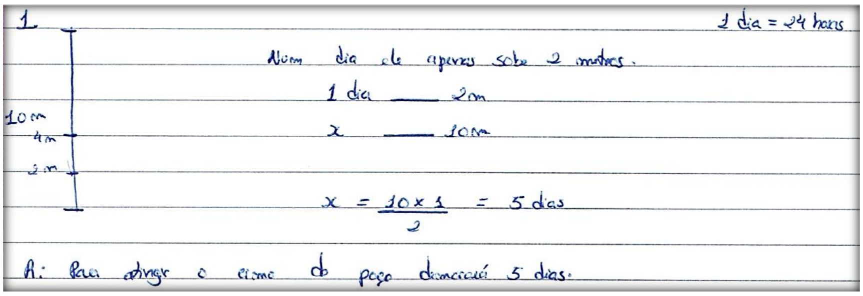

1
1 dia = 24 horas
Num dia ele apenas sobe 2 metros.
1 dia — 2m
x — 10m
$x = \frac{10 \times 1}{2} = 5$ dias
R: Para atingir o cimo do poço demorará 5 dias.

Figura 6. Resolução do problema 1 da Ficha de Diagnóstico pelo aluno A1.

Finalmente, em três das resoluções foi percetível que o problema foi *resolvido por partes*. Os três alunos começaram por utilizar um modelo que lhes permitisse chegar a uma resposta mas, após obterem um valor com esse modelo, relacionaram o número obtido com a situação do problema e reformularam uma resposta com um valor distinto. Um exemplo da resolução por partes pode ser visto na figura 7.

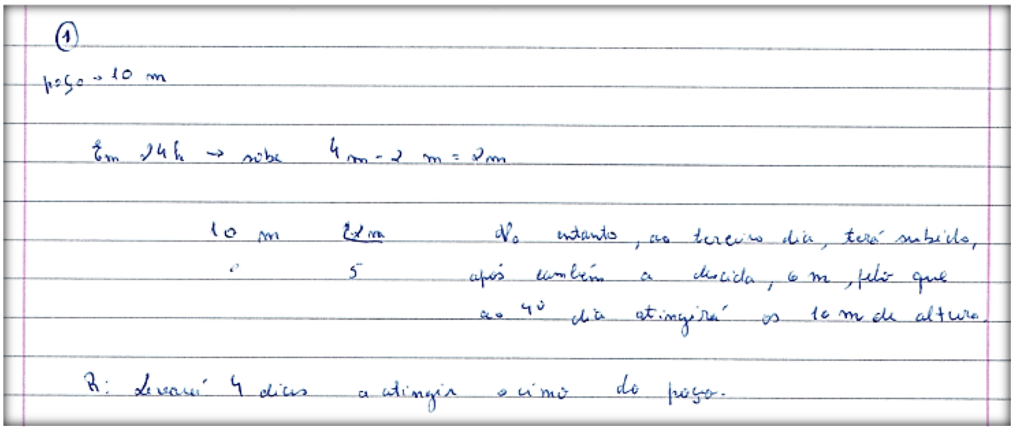


Figura 7. Resolução do problema 1 da Ficha de Diagnóstico pelo aluno A14.

Na figura 7, percebe-se que o aluno começou por pensar num modelo. Esse modelo consistia em dividir os 10 metros de profundidade do poço pelos 2 metros que resultam da diferença entre aquilo que o sapo sobe durante o dia e aquilo que desce durante a noite. Assim, esta foi a primeira parte da resolução do problema. Já na segunda parte, vê-se que o aluno voltou a pensar no problema, concluindo uma resposta inferior àquela que tinha obtido inicialmente, tendo mantido a resposta obtida na primeira parte como uma referência.

Dificuldades dos alunos na resolução do problema

Na análise das resoluções dos alunos, foram detetadas dificuldades na interpretação dos resultados obtidos, na escolha da estratégia e ainda no desenvolvimento da mesma. De seguida, apresentam-se resoluções que exemplificam essas dificuldades.

No que à *interpretação de resultados* diz respeito, verificou-se o caso de um aluno que, apesar de apresentar uma estratégia adequada, conclui de forma errada. Na figura 8, percebe-se que o aluno, na sua resposta, confundiu as representações: assumiu que u_n seria o número de dias, em vez de o fazer para o valor de n.

① $\begin{cases} u_1 = 4-2 \\ u_{n+1} = u_n + 4 - 2 \end{cases}$

$u_1 = 4-2 = 2$

$u_2 = u_1 + 4 - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$

$u_3 = u_2 + 4 - 2 = 4 + 4 - 2 = 6$

$u_4 = u_3 + 4 - 2 = 6 + 4 - 2 = 8$

$u_5 = u_4 + 4 - 2 = 8 + 4 - 2 = 10$

R: O sapo levará 10 dias a atingir o cimo do poço

Figura 8. Resolução do problema 1 da Ficha de Diagnóstico pelo aluno A21.

Além disso, ainda na figura 8, é possível ver uma resolução em que o *desenvolvimento da estratégia escolhida* não foi bem conseguido. Isto porque o aluno, à semelhança de alguns colegas que seguiram uma estratégia semelhante, não se apercebeu que, no cálculo do termo de ordem 4, passou pela resposta correta, já que "6+4" já resultaria no número 10, que era o valor pretendido. Este tipo de dificuldade verificou-se em estratégias baseadas em cálculos, mas também em resoluções feitas com o recurso a esquemas, como é o caso do exemplo da figura 9.

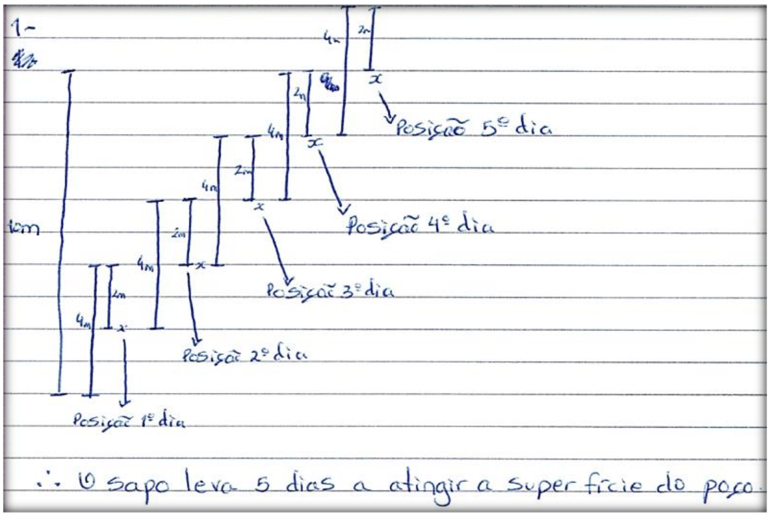


Figura 9. Resolução do problema 1 da Ficha de Diagnóstico pelo aluno A5.

Na figura 9, é possível reparar que, entre aquilo que o aluno assume ser a posição do 3º dia e a posição do 4º dia, o sapo já chegou ao cimo do poço, o que resolveria de imediato o problema. Mas, tal como aconteceu nas estratégias que envolveram cálculos, o aluno só termina o raciocínio quando o sapo completa o ciclo "dia-noite", ou seja, quando o sapo sobe e desce de seguida. Assim, a dificuldade que os alunos demonstraram no desenvolvimento da estratégia, deveu-se ao facto de estarem demasiado "presos" à ideia de que a posição do sapo, no dia n, era obtida apenas após o sapo descer durante a noite, não considerando a respetiva posição após a subida durante o dia.

O último exemplo de dificuldades encontradas pode ser visto na resolução do aluno A1, já apresentada na figura 6. Nessa resposta, pode ver-se que a *estratégia escolhida* poderá não ter sido a melhor. Isto porque, ao contrário do que aconteceu com as estratégias observadas nas figuras 8 e 9, aqui não foi possível passar pelo resultado correto ao longo do processo.

Comunicação escrita dos alunos na apresentação da resolução do problema

A análise da comunicação escrita começa pela compreensão do problema, por parte dos alunos. Neste aspeto, todos os alunos demonstraram ter entendido o que era pedido e também recolheram devidamente e de modo completo a informação. Além disso, todos reescreveram os dados recolhidos com a sua própria linguagem, não se limitando a transcrever do problema. Um exemplo disso está presente na figura 10:

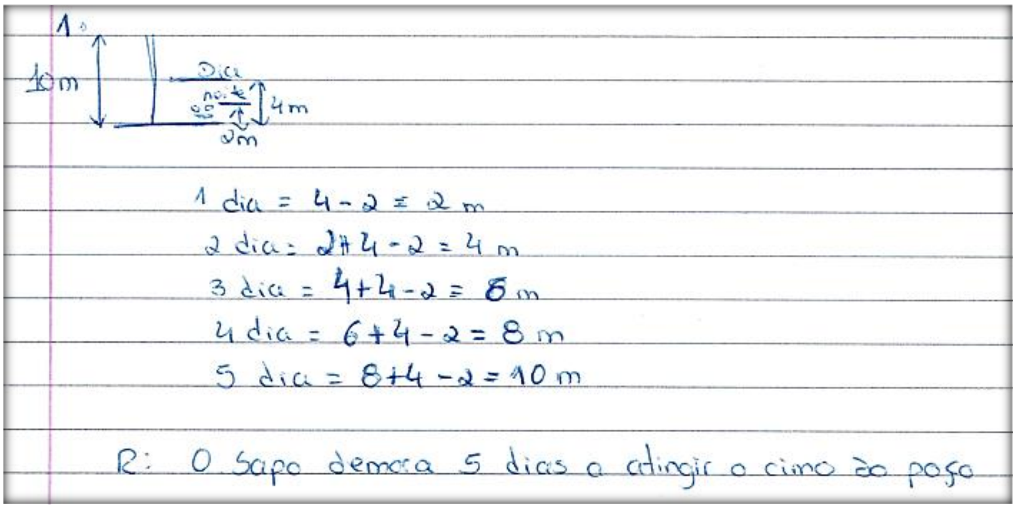


Figura 10. Resolução do problema 1 da Ficha de Diagnóstico pelo aluno A22.

Nesta figura, vê-se, no canto superior esquerdo, que o aluno recolheu a informação do problema e a escreveu sob a forma de um esquema, não fazendo apenas uma transcrição da informação.

Relativamente à fundamentação da resposta apresentada, já foi referido que apenas nove alunos apresentaram uma resposta correta: o sapo levará quatro dias a atingir o cimo do poço. Um exemplo desta resposta pode ser visto na figura 7. Entre as restantes respostas, um aluno refere que o sapo levaria dez dias a atingir o cimo do poço (Figura 8), nove respostas indicavam que seria cinco dias, à semelhança do que vemos na figura 10, e ainda duas respostas em que o sapo demoraria quatro dias e doze horas. Finalmente, um dos alunos não indicou qualquer resposta, tendo sido o único a apresentar uma resolução sem resposta e, portanto, incompleta, como se percebe pela figura 11.

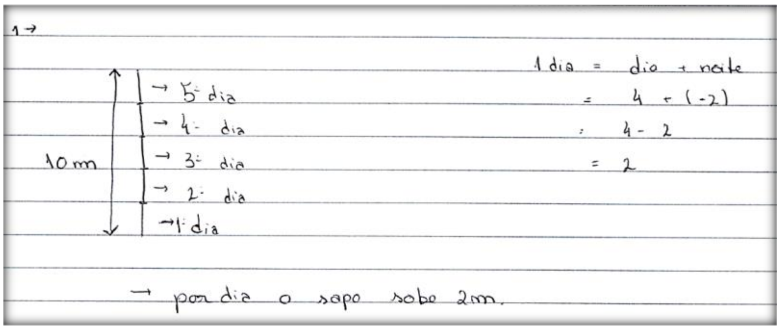


Figura 11. Resolução do problema 1 da Ficha de Diagnóstico pelo aluno A9.

Ainda dentro do nível de fundamentação da resposta, resta apresentar os resultados a nível de clareza. Apesar de alguns alunos conseguirem explicar de forma clara aquilo que pensaram para resolver o problema, isso não é um processo fácil para todos, principalmente quando não recorrem à representação simbólica ou a esquemas. Por exemplo, recorrendo aos exemplos já utilizados, na figura 8 o aluno deixou claro o seu raciocínio através de uma sucessão definida por recorrência. O mesmo acontece na figura 9, em que o esquema utilizado deixa claro o modo como o aluno pensou. No entanto, tal não acontece na resposta apresentada na figura 12.

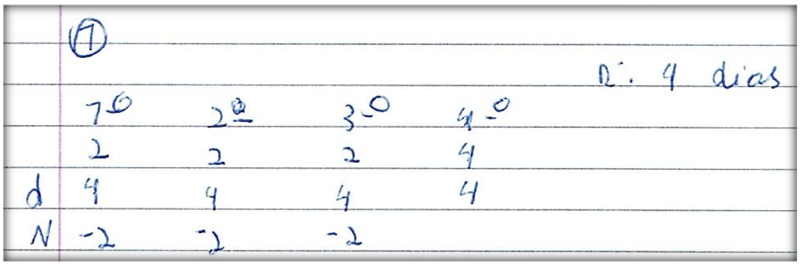


Figura 12. Resolução do problema 1 da Ficha de Diagnóstico pelo aluno A18.

Nesta figura, o aluno mostra ter dificuldades em explicar e apresentar de forma compreensível o seu raciocínio, mesmo tendo elaborado uma tabela. Já no que toca ao tipo de fundamentação da resposta, podemos então concluir que esta resolução é um pouco vaga a esse nível, pois o aluno não deixa muita informação sobre o seu raciocínio. O mesmo pode ser visto na figura 11, sendo que, além destes dois alunos, houve mais uma resposta cuja fundamentação foi pouco clara.

O tipo de fundamentação da resposta que foi mais vezes encontrado na resolução deste problema foi o recurso à experimentação. Isto pode ser visto, por exemplo, nas figuras 9 e 10, sendo que estes alunos foram fazendo cálculos ou desenhos que lhes permitiram chegar a uma resposta. Estes processos foram desenvolvidos através de uma experimentação que consistia em fazer com que o sapo subisse quatro unidades, e descesse duas, até chegar ao resultado esperado. Apesar de o recurso à experimentação ter sido o tipo de fundamentação mais encontrado, utilizado por doze alunos, três resoluções mostravam um uso exclusivo de regras ou algoritmos. Este grupo de alunos usou exclusivamente regras conhecidas previamente, mas não justificaram as etapas seguidas nem a validade das mesmas. Um exemplo disso pode ser visto na figura 13.

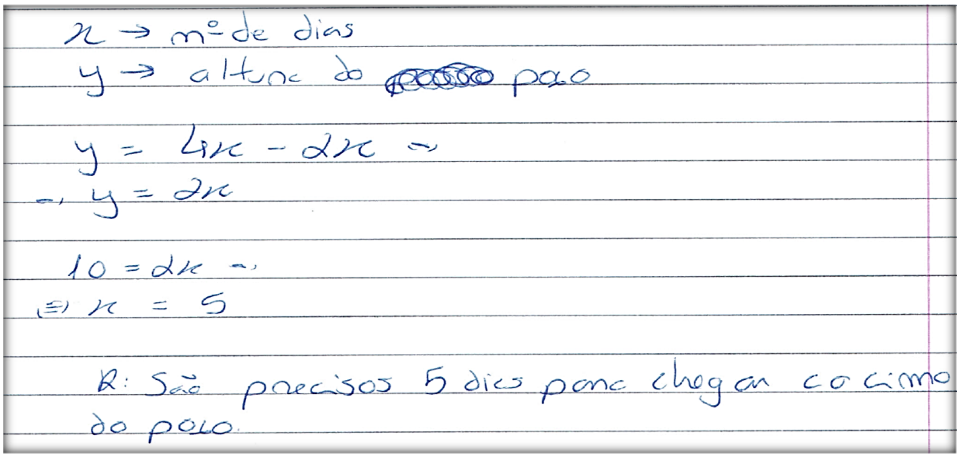

x → nº de dias
y → altura do poço
$y = 4x - 2x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = 2x$
$10 = 2x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 5$
R: São precisos 5 dias para chegar cá cima do poço.

Figura 13. Resolução do problema 1 da Ficha de Diagnóstico pelo aluno A6.

Já no que diz respeito à fundamentação procedimental, não foi detetada em nenhuma das vinte e duas resoluções, mas a fundamentação relacional foi apresentada por quatro alunos da turma. Um exemplo deste tipo de fundamentação é encontrado na resolução do aluno A16 (Figura 14).

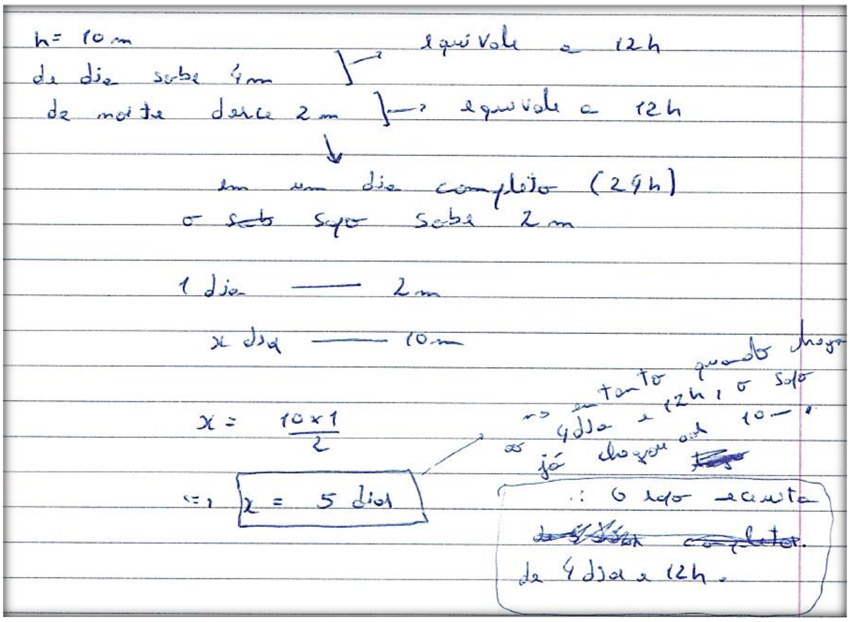

h = 10 m
de dia sobe 4 m → equivale a 12 h
de noite desce 2 m → equivale a 12 h
em um dia completo (24 h) o ~~sob~~ sapo sobe 2 m
1 dia —— 2 m
x dias —— 10 m
$x = \frac{10 \times 1}{2}$
$\Leftrightarrow \boxed{x = 5 \text{ dias}}$
no entanto quando chega aos 4 dias e 12 h, o sapo já chegou aos 10 m
∴ O sapo [illegible] completo de 4 dias e 12 h.

Figura 14. Resolução do problema 1 da Ficha de Diagnóstico pelo aluno A16.

Na resolução da figura 14, o aluno seguiu uma estratégia que fez com que chegasse a uma primeira resposta: “5 dias”. Mas acabou por responder ao problema com “O sapo necessita de 4 dias e 12h.”. No entanto, entre essas duas respostas, estabeleceu uma justificação para a validade dessa passagem de uma resposta para outra.

Ao longo desta apresentação de resultados, foram sendo referidas as representações utilizadas pelos alunos. No quadro 5, encontram-se as percentagens de utilização de cada uma das representações. É importante referir que, nas resoluções a este problema, apenas se está a considerar que o aluno utilizou linguagem verbal, se esta foi utilizada ao longo do processo de resolução, e não exclusivamente na sua conclusão.

Quadro 5
Representações utilizadas nas resoluções do problema 1 da Ficha de Diagnóstico

Tipo de representação	Frequência Absoluta	Frequência Relativa (em %)
Linguagem verbal	5	23%
Representação icónica	11	50%
Representação simbólica	14	64%

Pelo que já foi visto anteriormente, apenas um aluno não apresentou uma resposta completa para o problema. Mas, apesar de quase todos os alunos terem dado uma resposta, no final do processo de resolução do problema, esta foi apenas uma frase onde concluíam o resultado a que chegaram. Ao longo do processo, a turma deu preferência ao uso de desenhos, esquemas, tabelas e algoritmos matemáticos, deixando de parte a justificação através de linguagem verbal.

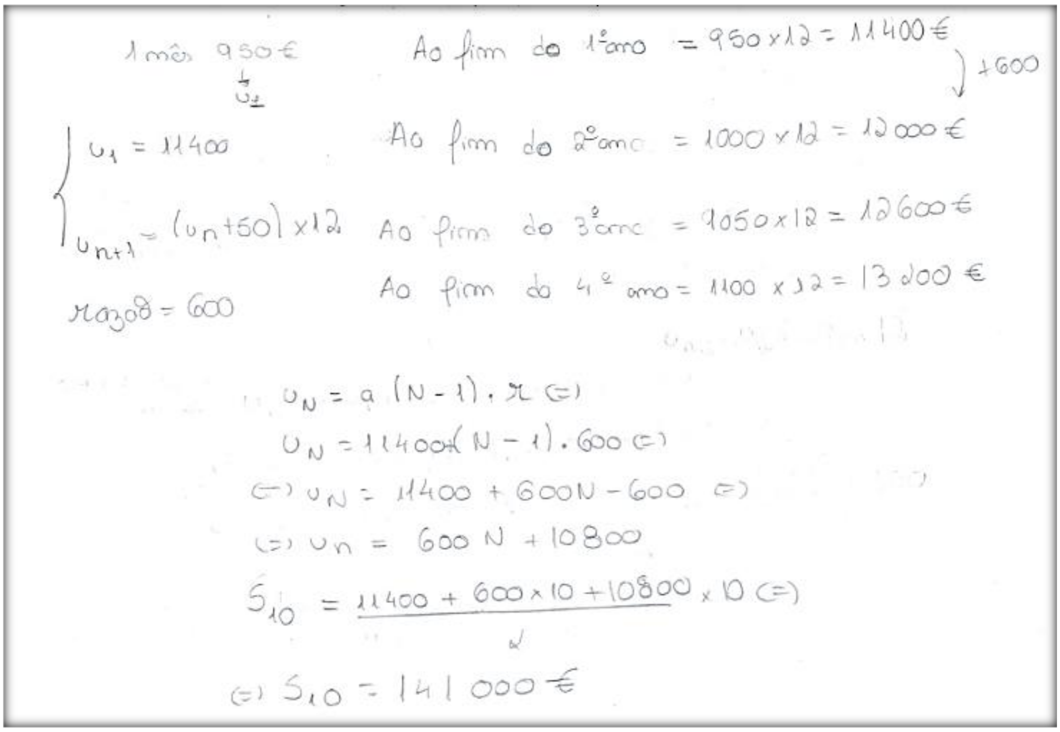
4.2. Problema relacionado com o conteúdo lecionado

Nas primeiras aulas da minha intervenção pedagógica, os problemas propostos aos alunos eram relativos à matéria que estava a ser lecionada. No entanto, o facto de a turma já esperar que a matéria lecionada fosse aplicada aos problemas, empobrecia as discussões após a resolução dos mesmos. Além disso, para alguns alunos, o problema passava a ser quase um exercício um pouco mais complexo, e não um verdadeiro problema.

Nesta secção, vou apresentar os resultados obtidos relativamente ao problema *O salário do Henrique*. Este problema foi proposto na aula imediatamente após ter sido lecionado o conceito de progressão aritmética, assim como o respetivo termo geral e ainda a fórmula que permite calcular a soma dos seus N primeiros termos. O enunciado do problema é[2]:

> *O Henrique tem um salário de 950€ mensais e, em cada ano, recebe um aumento de 50€ mensais. Quanto dinheiro ganhará o Henrique durante os próximos 10 anos?*

A resolução deste problema foi feita individualmente, tendo sido obtidas resoluções por parte de todos os alunos da turma. Apesar de existirem vinte e duas respostas a este problema, dezasseis delas são muito semelhantes. Isto porque, tal como já foi referido anteriormente, o facto de os alunos não estarem habituados a resolver problemas, acaba por deixá-los demasiado "presos" aos conceitos aprendidos imediatamente antes de resolverem o problema. Um exemplo de uma dessas dezasseis respostas, pode ser visto na figura 15.


1 mês 950€ → u_1

$\begin{cases} u_1 = 11400 \\ u_{n+1} = (u_n + 50) \times 12 \end{cases}$

razão = 600

Ao fim do 1.º ano = 950 × 12 = 11400 €

+600

Ao fim do 2.º ano = 1000 × 12 = 12000 €

Ao fim do 3.º ano = 1050 × 12 = 12600 €

Ao fim do 4.º ano = 1100 × 12 = 13200 €

$u_N = a(N-1) \cdot r \Leftrightarrow$

$u_N = 11400 + (N-1) \cdot 600 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_N = 11400 + 600N - 600 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n = 600N + 10800$

$S_{10} = \frac{11400 + 600 \times 10 + 10800}{2} \times 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{10} = 141000$ €

Figura 15. Resolução do problema *O salário do Henrique* pelo aluno A2.

Todos esses alunos começaram por definir uma sucessão que representasse o problema, recorrendo ao seu termo geral. De seguida, utilizaram a fórmula para a soma dos N primeiros termos de uma progressão aritmética, apesar de apenas um dos alunos ter referido que a sucessão era, de facto, uma progressão aritmética. Mas, apesar de 73% da turma ter seguido os mesmos passos no seu processo de

---

2 Adaptado de Matesfacil (n.d.). *Progresiones o sucesiones*. Consultado em setembro 15, 2018 em: https://www.matesfacil.com/ESO/progresiones/ejercicios-resueltos-sucesiones.html.

resolução, nem todos chegaram à resposta correta. Dos dezasseis alunos, seis não chegaram ao número correto, devido a erros de cálculo e ainda por falta de espírito critico, que os impediu de perceber que faltaria algum pormenor na sua resolução (Figura 16).

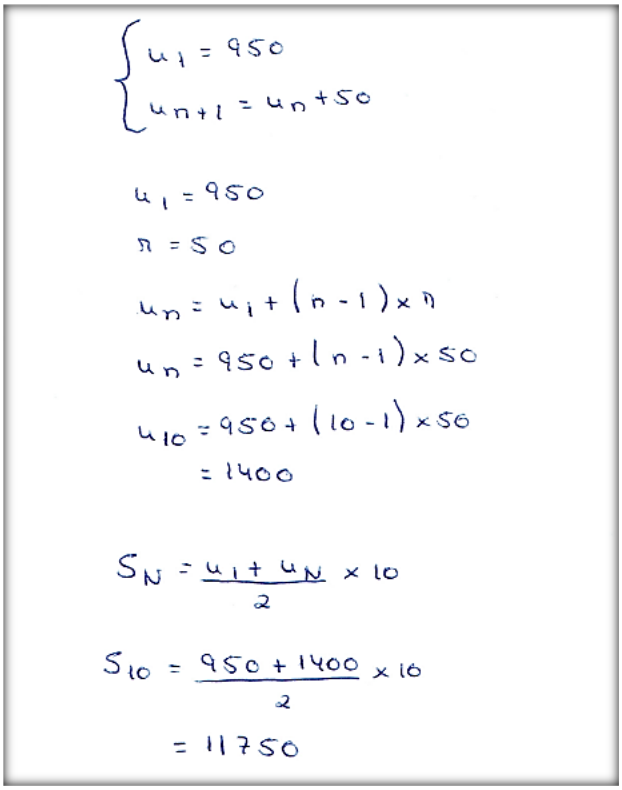

$$\begin{cases} u_1 = 950 \\ u_{n+1} = u_n + 50 \end{cases}$$
$$u_1 = 950$$
$$r = 50$$
$$u_n = u_1 + (n-1) \times r$$
$$u_n = 950 + (n-1) \times 50$$
$$u_{10} = 950 + (10-1) \times 50 = 1400$$
$$S_N = \frac{u_1 + u_N}{2} \times 10$$
$$S_{10} = \frac{950 + 1400}{2} \times 10 = 11750$$

Figura 16. Resolução do problema *O salário do Henrique* pelo aluno A13.

O aluno que escreveu esta resolução, percebeu qual seria o termo geral da sua sucessão e aplicou a fórmula da soma que já foi referida anteriormente. O que o impediu de chegar à resposta correta, foi o facto de não ter percebido que o seu processo estava incompleto. Isto porque, desta forma, estávamos apenas a considerar o dinheiro ganho em dez salários, com um aumento de 50€ por cada mês, que não é a informação retirada do problema.

Dos restantes seis alunos da turma, dois apresentaram o termo geral da sucessão, tal como o que é referido na figura 16, e calcularam os dez primeiros termos dessa sucessão. Como não tiveram tempo de realizar os restantes cálculos, terminaram a resposta com a explicação de quais seriam os procedimentos seguintes. Na figura 17, pode ler-se um exemplo dessa parte final da resolução.

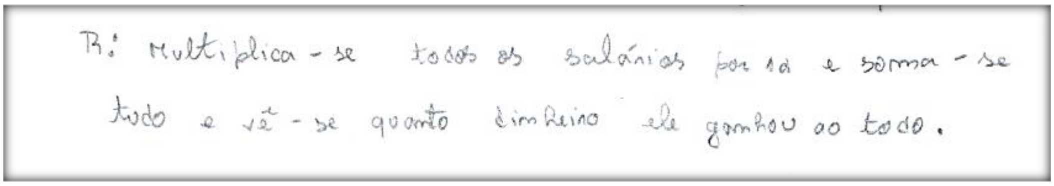

R: Multiplica-se todos os salários por 10 e soma-se todo e vê-se quanto dinheiro ele ganhou ao todo.

Figura 17. Extrato da resolução do problema *O salário do Henrique* pelo aluno A17.

Os quatro alunos que ainda não foram referidos, fizeram os seus cálculos sem relacionar com as sucessões. Calcularam o valor de cada salário de forma exaustiva, como pode ser visto na figura 18.

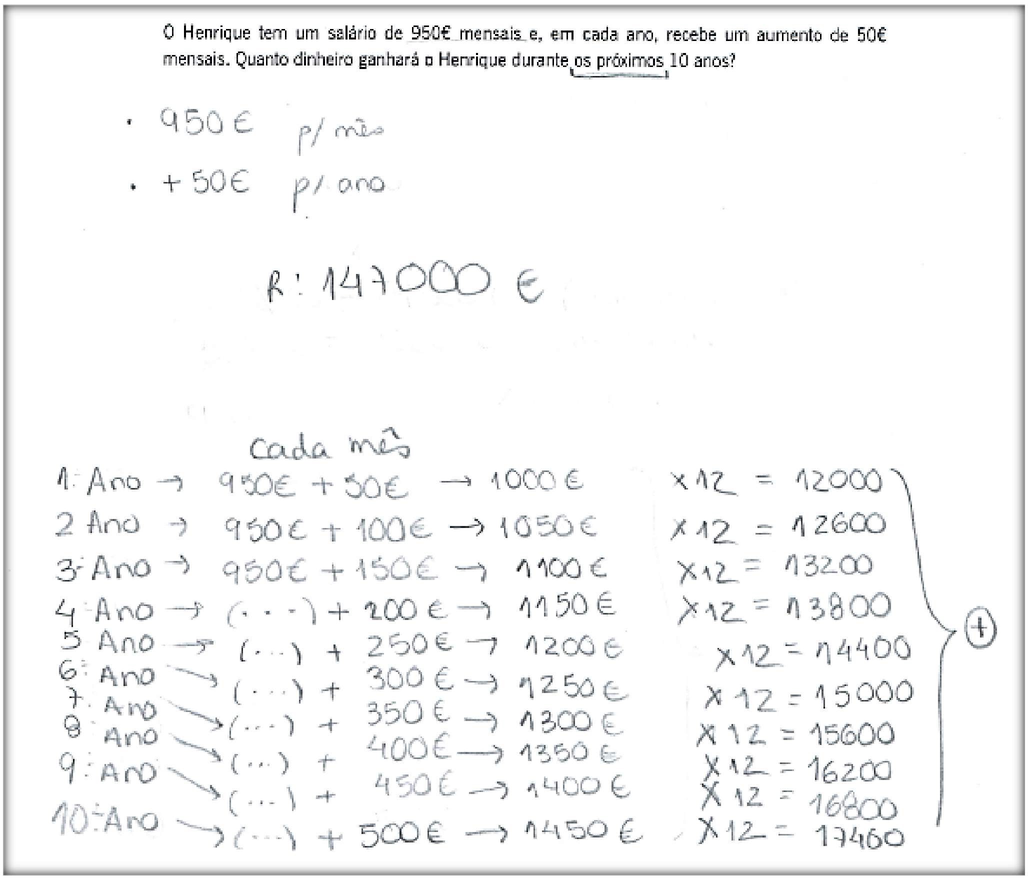


Figura 18. Resolução do problema *O salário do Henrique* pelo aluno A19.

Ao contrário do que aconteceu no problema da Ficha de Diagnóstico, a resolução deste problema não permitiu que surgissem dificuldades a nível de estratégia, já que grande parte da turma seguiu uma estratégia em que aplicavam os conhecimentos aprendidos mais recentemente. As únicas *dificuldades* encontradas incidiram na *interpretação*, tanto a nível de resultados, como se vê na figura 16, como a nível de compreensão do enunciado. Esta última dificuldade é encontrada na figura 18. O aluno percebeu que “os próximos 10 anos” não incluíam o ano inicial, no qual o Henrique receberia 950€ mensais. Esta confusão fez com que a resposta obtida não fosse a correta.

Relativamente à *comunicação escrita*, quase toda a turma mostrou ter compreendido o problema, com exceção dos alunos A13 (ver figura 16) e A19 (ver figura 18). O primeiro porque não recolheu os dados de forma completa, faltando-lhe a questão de, em cada um dos dez anos, o Henrique receber doze salários. O segundo porque não entendeu o que era pedido. Já no que diz respeito ao nível de fundamentação, 50% das respostas estavam corretas, 14% não chegaram a uma resposta, mas esclareceram quais eram os passos que fariam caso tivessem mais tempo, e os restantes chegaram a respostas incorretas. No que toca à completude, metade dos alunos não deu respostas completas, já que não apresentaram uma resposta à questão colocada, escrevendo apenas o processo de resolução. Quanto ao tipo de fundamentação, todos os alunos recorreram exclusivamente a regras e algoritmos. As representações utilizadas também vão ao encontro desse tipo de fundamentação, já que toda a turma utilizou, quase exclusivamente, a representação simbólica para resolver este problema. As únicas situações em que esse tipo de representação não foi único, concentram-se nas resoluções dos três alunos que não tiveram tempo de realizar os seus cálculos, e tiveram a necessidade de utilizar linguagem verbal para explicar o que fariam para concluir a sua resolução.

Por fim, a síntese das *estratégias* utilizadas vem reforçar o que já foi referido nos resultados da comunicação escrita. Assim, no que toca às estratégias utilizadas, dezasseis alunos recorreram à *aplicação de fórmulas*, como já foi referido anteriormente, enquanto os restantes seis seguiram um *processo de exaustão*, como aquele que encontramos na figura 18.

4.3. Problemas sem relação a conteúdos específicos

Após ter sido lecionada a matéria prevista, foram propostos problemas à turma, sem ligação a conteúdos matemáticos específicos. Nesta secção, serão apresentados os resultados da análise feita às resoluções de dois desses problemas. O primeiro, *Ai, tantos testes para corrigir!*, foi o segundo problema proposto à turma, sem ligação a conteúdos específicos. Já o segundo, *Cortes na pizza*, foi o quarto, e último, problema a ser proposto, antes da realização da Ficha Final.

4.3.1. Problema *Ai, tantos testes para corrigir!*

O problema cujas resoluções foram analisadas, é o seguinte[3]:

> *Um professor tinha uma enorme pilha de testes para corrigir. Na 2.ª feira, cheio de energia, despachou metade dos testes. Na 3.ª feira já só viu um terço dos que tinham sobrado. Na 4.ª feira corrigiu apenas um quarto dos que faltavam. Na 5.ª feira, já saturado, viu um quinto dos que tinha para ver. Na 6.ª feira, verificando que lhe faltavam menos de duas dúzias, resolveu acabar com o suplício e corrigiu tudo. Quantos testes tinha o professor?*

[3] Retirado de Viana, J. P. (2005). O problema deste número: Ai, tantos testes para corrigir. *Educação e Matemática, 84,* 41.

A turma resolveu este problema em grupos, e todos chegaram à resposta correta. No entanto, o processo de resolução não foi o mesmo em todos os grupos, e foi nesse aspeto que se tornou pertinente a discussão realizada em grupo turma. Pelo mesmo motivo, tornou-se um problema interessante para analisar as resoluções dos alunos.

Estratégias desenvolvidas pelos alunos na resolução do problema

Ao resolverem este problema, todos os grupos o fizeram por partes. Desta forma, conciliaram mais do que uma estratégia, sendo que as mais utilizadas foram a dedução e a tentativa e erro, como podemos ver no quadro 6.

Quadro 6
Estratégias utilizadas nas resoluções do problema Ai, tantos testes para corrigir!

Estratégia utilizadas	Frequência Absoluta	Frequência Relativa (em %)
Tentativa e erro	5	71%
Resolução por partes	7	100%
Dedução	7	100%
Construção de esquemas/figuras	1	14%

Todos os grupos recorreram a deduções, principalmente relacionadas com os múltiplos de determinados números, tal como aconteceu com o grupo G6. Um extrato da resolução deste grupo onde é possível ver essa *dedução*, é visível na figura 19.

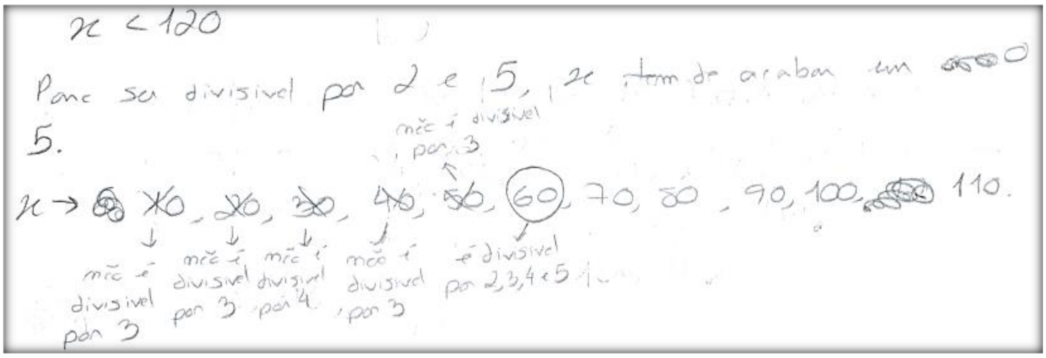


Figura 19. Extrato da resolução do problema *Ai, tantos testes para corrigir!* pelo grupo G6.

Após fazerem esta dedução, alguns grupos recorreram à tentativa e erro para perceber qual das hipóteses que tinham em mãos seria a correta.

Quanto à estratégia da *construção de esquemas/figuras*, o único grupo que o fez foi o G7, e pode ver-se um extrato da parte final da sua resolução na figura 20.

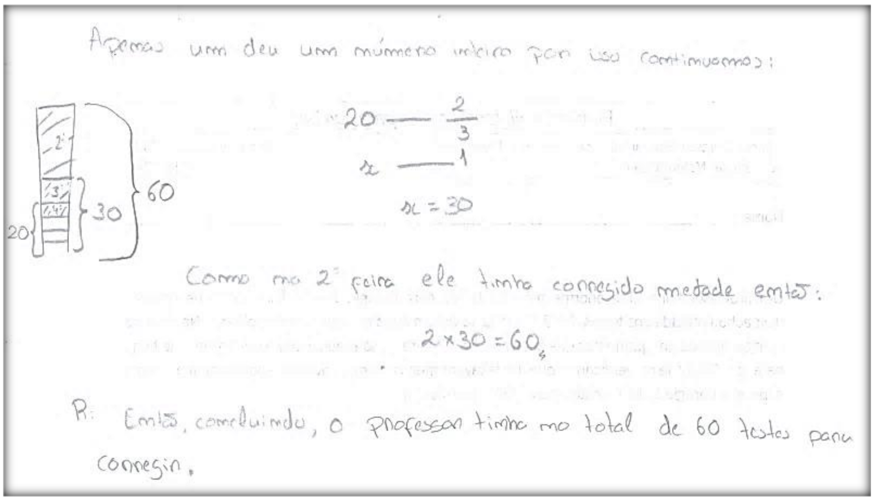


Figura 20. Extrato 1 da resolução do problema *Ai, tantos testes para corrigir!* pelo grupo G7.

Este grupo recorreu a esquemas ao longo da sua resolução, mais do que uma vez, apresentando esta figura final com toda a informação recolhida ao longo do processo.

Dificuldades dos alunos na resolução do problema

Uma das grandes vantagens de permitir que os alunos trabalhem em grupo, é o facto de se entreajudarem de forma a colmatar dificuldades. Assim, nestes casos, a maior dificuldade que os alunos demonstram está na estruturação da sua resposta e na forma de a apresentarem.

Na resolução deste problema, a única dificuldade detetada era ao nível da *recolha de dados*, encontrada em dois grupos. Um dos grupos assumiu que faltarem "menos de duas dúzias", invalidava que o professor, na 6.ª feira, tivesse corrigido apenas dois testes, por exemplo. Podemos ver isto num extrato da resolução do grupo G5, na figura 21.

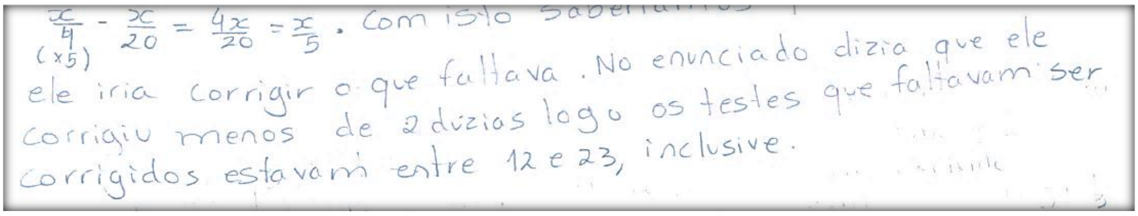


Figura 21. Extrato da resolução do problema *Ai, tantos testes para corrigir!* pelo grupo G5.

Esta dificuldade poderia ter impedido este grupo de encontrar a resposta correta. Isto porque, depois de fazerem esta dedução, os elementos deste grupo testaram todos os valores entre 12 e 23, para daí concluir quantos seriam os testes corrigidos na 6.ª feira. Caso a resposta não se encontrasse nesse intervalo, o grupo poderia não ter conseguido concluir a sua resolução, ou então poderia ter-se apercebido que a sua dedução foi feita sem que nada no enunciado o indicasse.

Na figura 22 encontramos a dificuldade na recolha de dados, por parte de outro grupo.

Testes de 6ª feira : $x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x\right)\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x\right)\right)\right)$

sendo x o nº de testes

Testes de 6ª feira < 24

Figura 22. Extrato da resolução do problema *Ai, tantos testes para corrigir!* pelo grupo G1.

Os elementos do grupo G1 resolveram escrever uma expressão algébrica que lhes permitisse perceber quantos testes faltavam corrigir na 6.ª feira. Apesar de não explicarem o seu procedimento, conseguimos perceber, pelo contexto, que x representa a quantidade total de testes. A dificuldade é encontrada na quarta e quinta parcelas, que correspondem à quantidade de testes corrigidos na 4.ª feira e na 5.ª feira, respetivamente. Focando na quarta parcela, o grupo está a assumir que o professor corrigiu um quarto da quantidade corrigida no dia anterior, quando o problema revela que corrigiu um quarto da quantidade que falta corrigir.

Comunicação escrita dos alunos na apresentação da resolução do problema

Todos os grupos mostraram ter compreendido o problema, tendo reescrito a informação dada no enunciado por palavras ou símbolos próprios. Além disso, toda a turma recolheu corretamente os dados do problema, havendo apenas um grupo que fez deduções que o enunciado não permite, tal como já foi referido nas dificuldades.

Já foi supracitado que todos os grupos apresentaram uma resposta correta ao problema. No entanto, nem todos o fizeram de forma completa, já que três, dos sete grupos, não apresentaram uma conclusão ao problema. Limitaram-se a terminar os seus cálculos e o seu raciocínio, sem apresentar uma frase conclusiva de tudo o que foi feito. Ainda dentro do nível de fundamentação da resposta, apenas um dos grupos, G2, não o faz de forma muito clara, como vemos na figura 23.

número de testes -> x

Segunda -> $\frac{x}{2}$

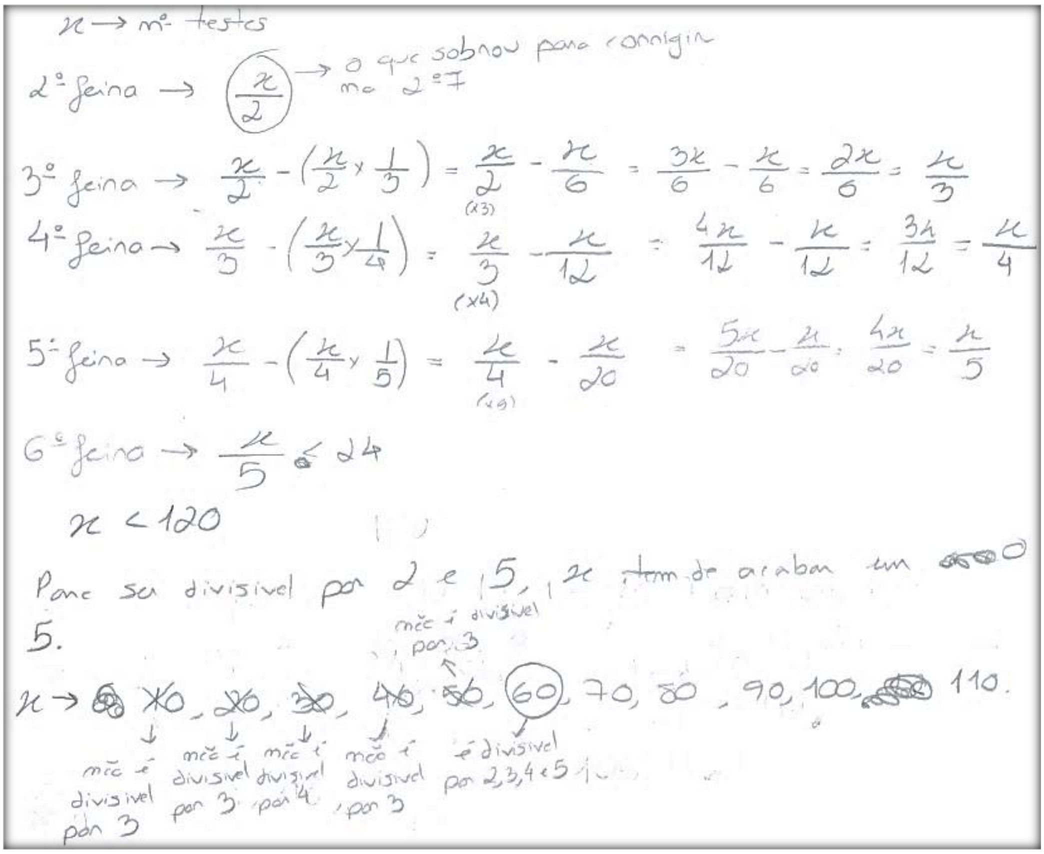
terça -> $\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{x}{3}$

quarta -> $\frac{x}{3} - \left(\frac{x}{3} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{x}{4}$

quinta -> $\frac{x}{4} - \left(\frac{x}{4} \times \frac{1}{5}\right) = \frac{x}{5}$

Figura 23. Extrato da resolução do problema *Ai, tantos testes para corrigir!* pelo grupo G2.

No extrato representado na figura 23, vê-se que o grupo escreveu a informação do problema em forma de fração, assumindo a incógnita x para representar o número de testes. No entanto, não é percetível se as frações obtidas fornecem o número de testes que o professor corrigiu em cada dia, o número de testes que fica a faltar corrigir após cada dia, ou outro tipo de informação. No que diz respeito ao tipo de fundamentação da resposta, apenas dois grupos fundamentaram de forma vaga e pouco informativa, faltando mais indicações sobre aquilo que fizeram e sobre o porquê de o fazerem, como vemos na figura 24.


$x \to$ nº testes

2ª feira $\to \frac{x}{2} \to$ o que sobrou para corrigir na 2ª f

3ª feira $\to \frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \underset{(\times 3)}{\frac{x}{2}} - \frac{x}{6} = \frac{3x}{6} - \frac{x}{6} = \frac{2x}{6} = \frac{x}{3}$

4ª feira $\to \frac{x}{3} - \left(\frac{x}{3} \times \frac{1}{4}\right) = \underset{(\times 4)}{\frac{x}{3}} - \frac{x}{12} = \frac{4x}{12} - \frac{x}{12} = \frac{3x}{12} = \frac{x}{4}$

5ª feira $\to \frac{x}{4} - \left(\frac{x}{4} \times \frac{1}{5}\right) = \underset{(\times 5)}{\frac{x}{4}} - \frac{x}{20} = \frac{5x}{20} - \frac{x}{20} = \frac{4x}{20} = \frac{x}{5}$

6ª feira $\to \frac{x}{5} < 24$

$x < 120$

Para ser divisível por 2 e 5, x tem de acabar em 0

5.

$x \to$ 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110.

não é divisível por 3 / não é divisível por 3 / não é divisível por 4 / não é divisível por 3 / não é divisível por 3 / é divisível por 2, 3, 4 e 5

Figura 24. Resolução do problema *Ai, tantos testes para corrigir!* pelo grupo G6.

Desta forma, alguém que não tenha pensado previamente no problema, não consegue compreender aquilo que os grupos fizeram para o resolver. Os restantes cinco grupos já fundamentaram de forma relacional, justificando melhor os passos que davam e também o porquê de o fazerem.

No que às representações diz respeito, o único grupo que não recorreu à linguagem verbal de forma significativa foi o grupo G6 (Figura 24). Os restantes, recorreram à linguagem verbal para explicarem procedimentos ou para concluir algumas deduções. Quanto à representação simbólica, todos os grupos a utilizaram, sendo que seis grupos o fizeram na escrita das frações que representavam os testes corrigidos em cada dia, ou os que faltavam corrigir, como vemos na figura 24. O único grupo que não utilizou desta forma a representação simbólica, recorreu a ela para indicar *regras de três simples*, como vemos na figura 25.

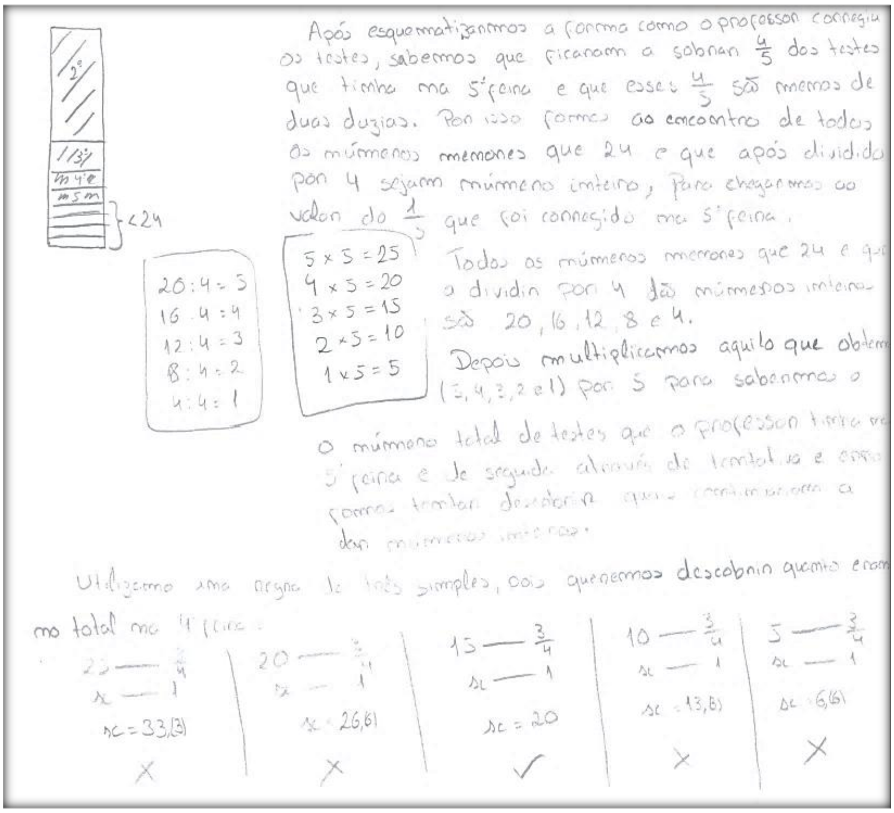


Figura 25. Extrato 2 da resolução do problema *Ai, tantos testes para corrigir!* pelo grupo G7.

Também foi este grupo o único a utilizar a representação icónica, fazendo desenhos que auxiliavam o seu processo de resolução, como conseguimos ver no canto superior esquerdo da figura 25.

4.3.2. Problema *Cortes na pizza*

Nesta secção, serão apresentados os resultados da análise feita ao problema *Cortes na pizza*, que foi o último problema que a turma resolveu em grupo. O seu enunciado é[4]:

> *Numa pizzaria, um grupo de amigos fez o seguinte pedido:*
> "Queremos uma pizza circular, com apenas 8 cortes e o máximo de fatias possível."
> ***1.*** *Assumindo que as fatias podem ter diferentes tamanhos e que os cortes têm de ser efetuados em linha reta, quantas fatias se pode obter para satisfazer o pedido do grupo?*
> ***2.*** *E se o grupo tivesse pedido a pizza com n cortes? Qual seria o número máximo de fatias?*

[4] Adaptado de Oliveira, H., Canavarro, A. P., & Menezes, L. (2013). Cortes na piza (ensino secundário) – caso multimédia. In Site do Projeto P3M, Práticas Profissionais de Professores de Matemática. Disponível em http://p3m.ie.ul.pt/caso-4-cortes-na-piza-ensino-secundario.

Este é o único problema apresentado nesta análise que está dividido em duas alíneas. No entanto, o foco principal será a primeira alínea, já que a segunda alínea apenas teve resposta por parte de dois dos grupos. Os restantes não conseguiram ter tempo de concluir, e as suas resoluções feitas na alínea **1.** também não ajudavam a que respondessem à alínea **2.**. Assim, ao contrário do que aconteceu no problema anterior, nem todos os grupos apresentaram uma resposta correta, tendo apenas um deles lá chegado. Mesmo que a base da resolução feita por todos os grupos seja muito semelhante, este problema levou a uma boa discussão em grupo turma, já que se obtiveram seis respostas diferentes, num total de sete grupos.

Estratégias desenvolvidas pelos alunos na resolução do problema

Para resolver este problema, todos os grupos utilizaram a estratégia de *construção de figuras*. No entanto, nenhum dos grupos utilizou essa estratégia de modo exclusivo. Através da figura 26, percebemos que o grupo G2 recorreu também à estratégia de *tentativa e erro*.

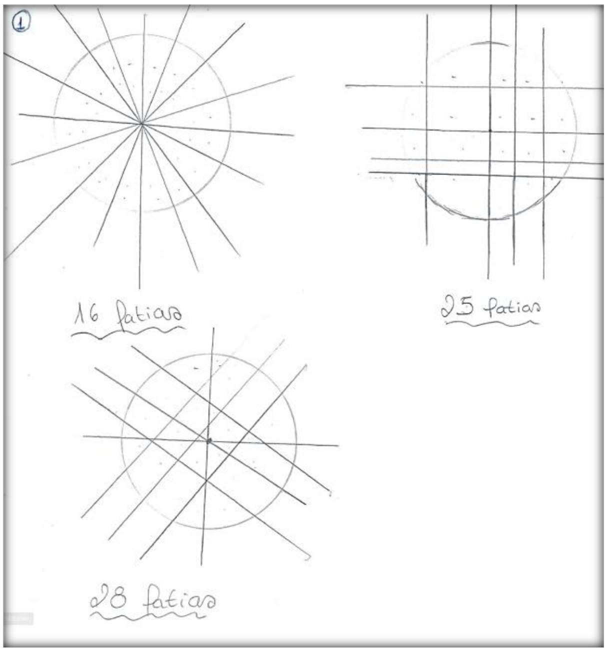
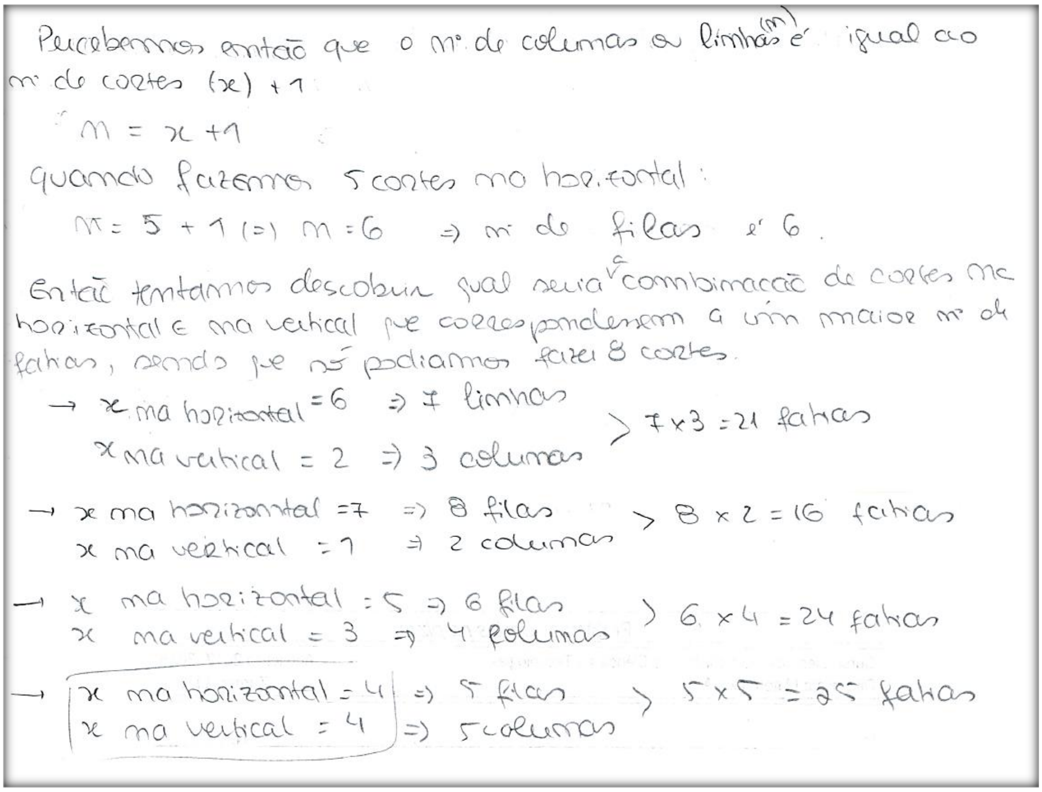


Figura 26. Resolução do problema *Cortes na pizza* pelo grupo G2.

Esta conjugação de estratégias foi seguida também por outro grupo, G5. No entanto, outros grupos juntaram a estas duas estratégias, uma outra. Um dos grupos, G3, procedeu também a uma estratégia de tentativa e erro para verificar a sua resposta, mas antes tinha *construído um modelo* para chegar àquela resposta, como podemos ver pela figura 27.


Percebemos então que o nº de colunas ou linhas (m) é igual ao nº de cortes (x) + 1

$m = x + 1$

quando fazemos 5 cortes no horizontal:

$m = 5 + 1 \Leftrightarrow m = 6 \Rightarrow$ nº de filas é 6.

Então tentamos descobrir qual seria a combinação de cortes na horizontal e na vertical que correspondessem a um maior nº de fatias, sendo que nós podíamos fazer 8 cortes.

→ x na horizontal = 6 ⇒ 7 linhas
x na vertical = 2 ⇒ 3 colunas > 7 × 3 = 21 fatias

→ x na horizontal = 7 ⇒ 8 filas
x na vertical = 1 ⇒ 2 colunas > 8 × 2 = 16 fatias

→ x na horizontal = 5 ⇒ 6 filas
x na vertical = 3 ⇒ 4 colunas > 6 × 4 = 24 fatias

→ x na horizontal = 4 ⇒ 5 filas
x na vertical = 4 ⇒ 5 colunas > 5 × 5 = 25 fatias

Figura 27. Extrato 1 da resolução do problema Cortes na pizza pelo grupo G3.

Dois dos grupos (G1 e G4) conciliaram as figuras construídas com uma estratégia de tentativa e erro e ainda com a *procura de um padrão*. Apesar de esta procura de um padrão não ser visível através das resoluções, foi algo percetível através das gravações efetuadas e, no caso do grupo G1, também pelo rascunho que o grupo entregou (Figura 28).

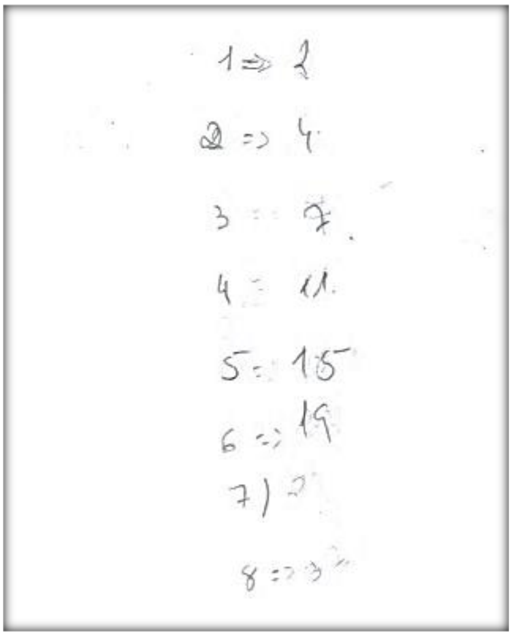

1 ⇒ 2
2 ⇒ 4
3 = 7
4 = 11
5 = 15
6 ⇒ 19
7)
8 ⇒ 3

Figura 28. Extrato do rascunho do grupo G1.

A22: Olha aí... de 2 para 4 vão dois, de 4 para 7 vão três, de 7 para 11 vão quatro... depois, no quinto, vão ter 11+5, o sexto vai ter essa soma mais 6...

A14: Deixa-me ver se vão cinco, realmente... [fazem o corte, começam a contar, e chegam a 15 fatias]. Provavelmente haverá alguma maneira de dar 16...

A22: Se conseguíssemos ver para cinco, se dá 16, depois os outros, se calhar...

Como o grupo não conseguiu fazer o quinto corte de forma a obter dezasseis fatias, não conseguiu confirmar a conjetura que estaria a ser levantada. No entanto, percebe-se a tentativa do grupo encontrar um padrão entre o número de cortes e as fatias obtidas, mesmo não tendo conseguido chegar à resposta correta. Já o grupo G7 conseguiu concretizar essa conjetura, como se vê pela figura 29.

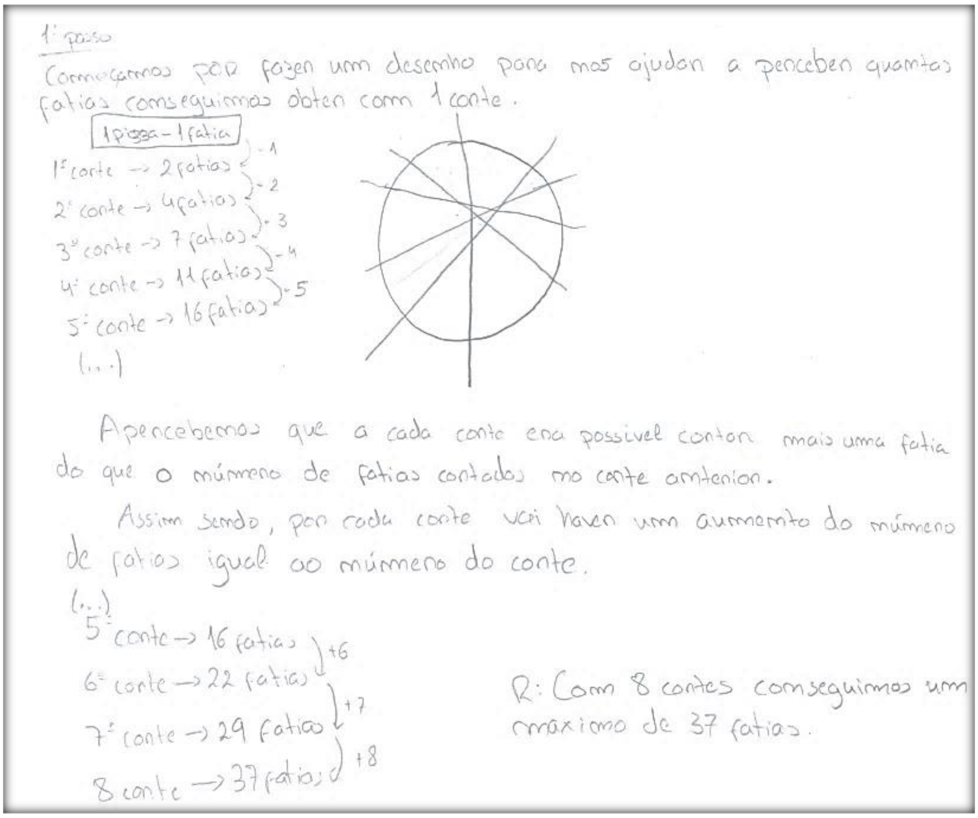


Figura 29. Resolução da alínea **1.** do problema *Cortes na pizza* pelo grupo G7.

Assim, este grupo seguiu quatro estratégias: resolução por partes, procura de um padrão, construção de figuras e construção de um modelo. A estas estratégias, juntou-se ainda a estratégia de *generalização*, que permitiu ao grupo apresentar uma resposta à alínea **2.**, como se pode ver na figura 30.

Figura 30. Resolução da alínea **2.** do problema *Cortes na pizza* pelo grupo G7.

De forma a fazer um apanhado de todas as estratégias utilizadas, no quadro 7 estão referidas todas as estratégias utilizadas, assim como a quantidade de grupos que a elas recorreu.

Quadro 7
Estratégias utilizadas nas resoluções do problema Cortes na pizza

Estratégia utilizadas	Frequência Absoluta	Frequência Relativa (em %)
Tentativa e erro	5	23%
Procura de um padrão	3	14%
Resolução por partes	1	5%
Generalização	2	9%
Construção de esquemas/figuras	7	100%
Construção de um modelo	2	9%

Tal como foi referido, e como era de esperar neste problema, todos os alunos recorreram a desenhos para representar a pizza e os respetivos cortes. De seguida, a estratégia mais vezes utilizada foi a tentativa e erro, já que os alunos foram fazendo sucessivos testes relativamente ao tipo de cortes que deviam fazer, de forma a obterem o maior número de fatias que conseguissem. Quanto à estratégia de generalização, foi apenas utilizada pelos grupos que tentaram apresentar uma resposta para a segunda alínea do problema.

Dificuldades dos alunos na resolução do problema

Tal como no problema anterior, também neste se sentiram poucas dificuldades durante a resolução. Isto porque, quando os alunos resolvem problemas em grupo, vão expondo as suas ideias e ouvindo as ideias e argumentos dos restantes elementos, ultrapassando possíveis dificuldades. Desta forma, as únicas dificuldades encontradas nas resoluções deste problema foram ao nível da *recolha de dados*.

A dificuldade na recolha de dados foi sentida na sala de aula, apesar de não ter sido passada para o papel. No entanto, pelas gravações que foram feitas durante a aula em que os alunos resolveram este problema, três dos grupos tiveram dúvidas sobre as formas que as fatias de pizza poderiam ter, como se mostra no seguinte diálogo, com um elemento do grupo G2:

A18: Oh professora, as fatias têm de ter a mesma forma geométrica?

Prof.: Diz aí?

A18: Não…

Prof: Pronto, está respondido. Se fosse necessário terem a mesma forma, teria de estar aí.

O grupo G3 também questionou se as fatias teriam de ser triangulares. O diálogo foi semelhante, embora o grupo tenha ficado um pouco confuso quando lhes referi que as fatias de pizza não costumam ser em forma de triângulo.

A3: As fatias têm de ser triangulares?

Prof.: Diz aí?

A3: Não!

A15: Diz que elas podem nem ser do mesmo tamanho…

Prof.: Então se não diz aí… até porque isso pode nem ser bem triangular. Será mais um setor circular.

A15: Pois, porque isto aqui faz assim, olha! Isto é redondo!

A3: Ah… como é que lhe chamou?

A15: Setor circular!

Também o grupo G6 teve uma dúvida semelhante, questionando se as fatias poderiam ser quadradas. A essa pergunta, respondi com outra questão: "diz aí que não podem?".

Este tipo de dificuldade é muito frequente, já que os alunos ficam demasiado "presos" a certos conceitos. Neste caso, a ideia que eles tinham de como são, normalmente, as fatias de pizza, criou neles uma dúvida sobre a possibilidade de as fatias terem formatos diferentes. Com o esclarecimento destas dúvidas, o objetivo principal era que todos percebessem que devem restringir-se apenas ao que é fornecido pelo enunciado, e trabalhar a partir dessa base.

Comunicação escrita dos alunos na apresentação da resolução do problema

A compreensão do problema foi um processo simples para todos os grupos, tendo existido apenas a dúvida quanto à forma geométrica de uma fatia, como foi referido anteriormente. Já no que toca à fundamentação da resposta apresentada, apenas um dos grupos apresentou a resposta correta, e dois deles não escreveram uma resposta completa, já que faltava a conclusão de todo o processo de resolução. Um exemplo disto pode ser visto na figura 31.

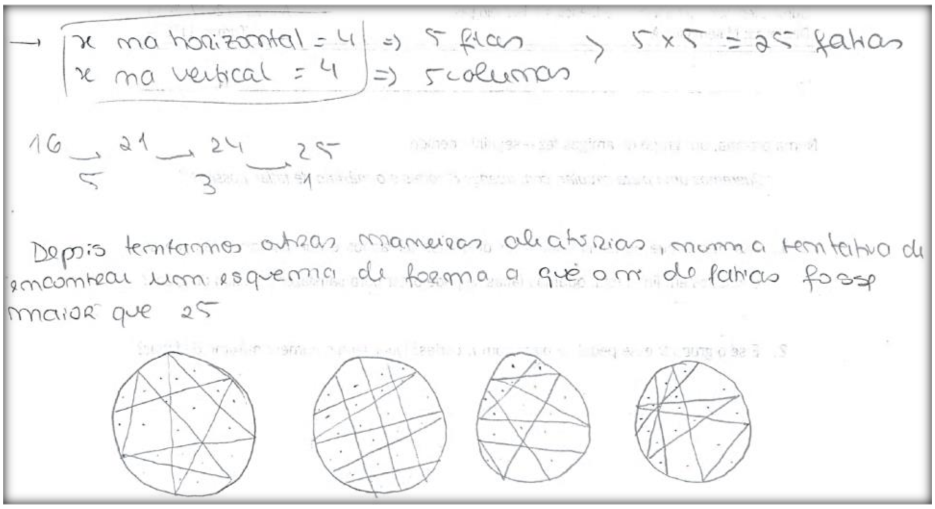


Figura 31. Extrato 2 da resolução do problema *Cortes na pizza* pelo grupo G3.

O grupo G3 escreveu o seu processo de resolução, chegando a uma resposta, mas não apresentando a sua conclusão. Este grupo terminou a sua resolução referindo que tentaram outras divisões da pizza de forma a terem mais do que 25 fatias, registaram os desenhos realizados, e ficou assim encerrada a resolução, sem uma conclusão devidamente escrita.

Relativamente ao tipo de fundamentação, apenas um grupo apresentou uma justificação vaga e pouco informativa (Figura 32), enquanto os restantes recorreram à experimentação, como conseguimos ver na figura 31, por exemplo.

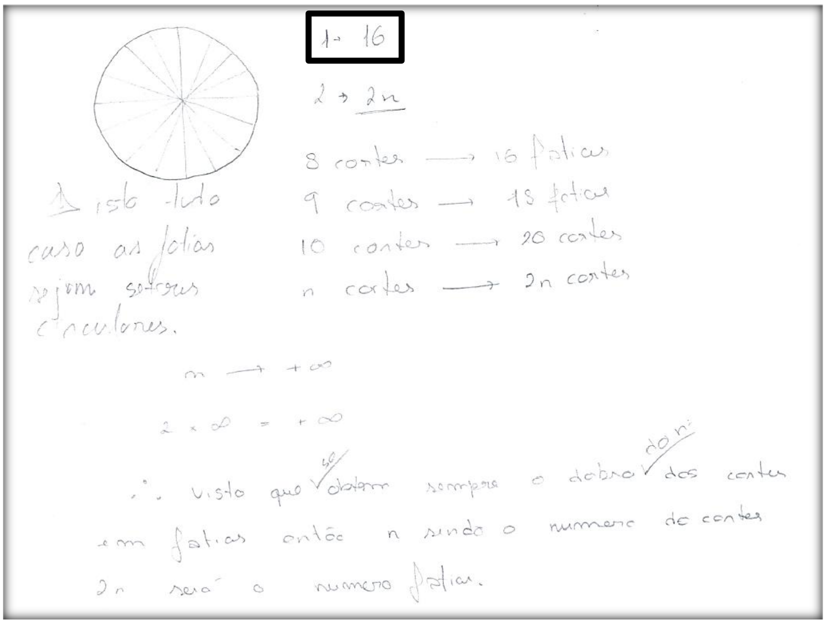


Figura 32. Resolução do problema *Cortes na pizza* pelo grupo G6.

Na figura 32, vemos que a única resposta que o grupo dá para a primeira parte do problema, consiste apenas no desenho apresentado e na resposta que consta no retângulo preto. Daí concluir-se que é uma fundamentação pouco informativa já que, ao contrário dos restantes grupos, este nem sequer tentou experimentar outros cortes para testar se aquele seria, de facto, o número máximo de fatias.

Passando para as representações, todos os grupos recorreram a representações icónicas, já que todos fizeram os desenhos dos cortes da pizza para darem a sua resposta ao problema. Esta informação está em conformidade com o facto de todos os grupos terem recorrido à estratégia de construção de figuras. Além disso, com exceção do grupo G2 (Figura 26), todos utilizaram também uma linguagem verbal, com a qual explicaram um pouco do seu raciocínio.

4.4. Problema da Ficha Final

A recolha de dados desta investigação terminou com a realização de uma ficha final por parte dos alunos. Essa Ficha Final tinha quatro problemas distintos, para serem resolvidos individualmente. Nesta secção, serão apresentados os resultados obtidos através da análise realizada a um desses problemas. A análise foi feita ao problema 4, que tem o seguinte enunciado[5]:

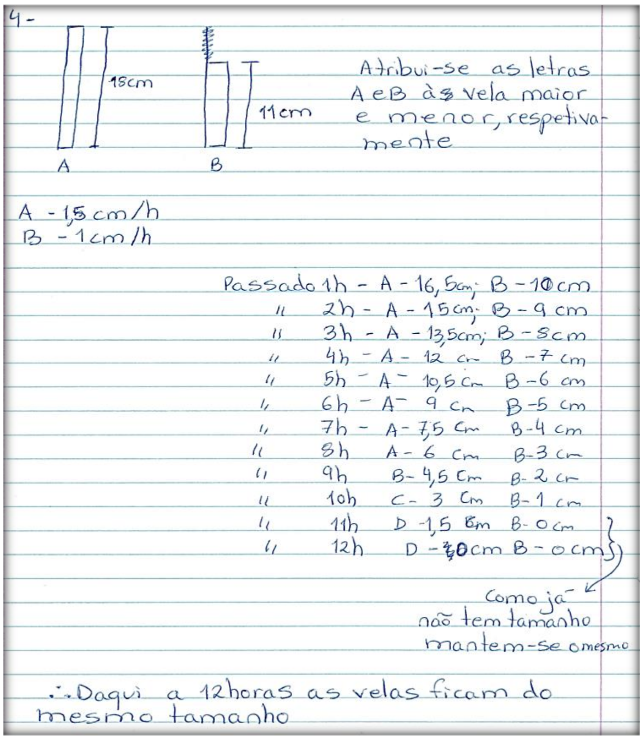
> *Temos duas velas, uma de 18 centímetros de altura e outra de 11. A mais alta arde 1,5 centímetros por hora. A menor arde 1 centímetro no mesmo intervalo de tempo. Acendemos as duas em simultâneo. Daqui a quanto tempo as duas velas ficam do mesmo tamanho?*

Ao contrário do que aconteceu nos problemas anteriormente analisados, nem todos os alunos resolveram este problema. Por essa razão, estamos perante uma dificuldade que ainda não tinha sido registada nas análises anteriores.

Estratégias desenvolvidas pelos alunos na resolução do problema

Tal como aconteceu no problema da Ficha de Diagnóstico, também neste problema uma das estratégias mais utilizadas foi a *construção de esquemas/figuras*, sendo que oito alunos recorreram a ela. A outra estratégia mais utilizada foi o *processo de exaustão*, com nove alunos a utilizá-lo. Desses alunos, quatro conciliaram as duas estratégias, como por exemplo o aluno A5 (Figura 33).

[5] Retirado de Viana, J. P. (2012). Uma simples questão de velas. In Viana, J. P., *Uma Vida Sem Problemas – A Matemática nos desafios do dia a dia* (p. 178). Lisboa: Clube do autor.



4 -

18cm

11cm

A B

Atribui-se as letras A e B às vela maior e menor, respetivamente

A - 1,5 cm/h
B - 1cm/h

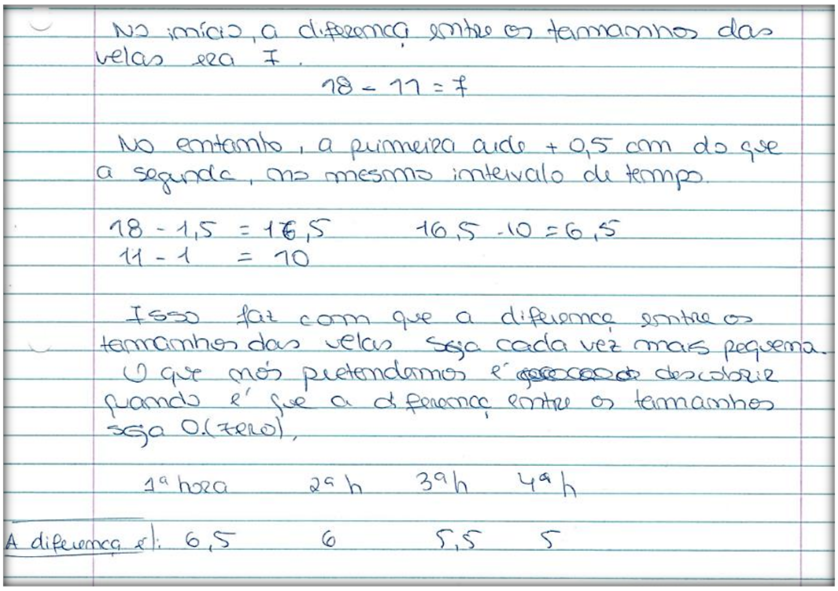
Passado 1h - A - 16,5cm; B - 10 cm
" 2h - A - 15cm; B - 9 cm
" 3h - A - 13,5cm; B - 8cm
" 4h - A - 12 cm B - 7 cm
" 5h - A - 10,5 cm B - 6 cm
" 6h - A - 9 cm B - 5 cm
" 7h - A - 7,5 cm B - 4 cm
" 8h A - 6 cm B - 3 cm
" 9h B - 4,5 cm B - 2 cm
" 10h C - 3 cm B - 1 cm
" 11h D - 1,5 cm B - 0 cm
" 12h D - 0cm B - 0 cm

Como já não tem tamanho mantem-se o mesmo

∴ Daqui a 12horas as velas ficam do mesmo tamanho

Figura 34. Resolução do problema 4 da Ficha Final pelo aluno A5.

Enquanto que os restantes cinco alunos que seguiram o processo de exaustão o utilizaram de modo exclusivo, dos restantes quatro que construíram esquemas/figuras, apenas dois o fizeram exclusivamente. Os restantes dois alunos que construíram figuras, conciliaram-nas com uma estratégia de *dedução*, no caso do aluno A3, e com uma estratégia de *construção de um modelo*, no caso do aluno A7. Na figura 34, encontramos um extrato da resolução do aluno A3, no qual se vê o uso da dedução.



No início, a diferença entre os tamanhos das velas era 7.

18 - 11 = 7

No entanto, a primeira arde + 0,5 cm do que a segunda, no mesmo intervalo de tempo.

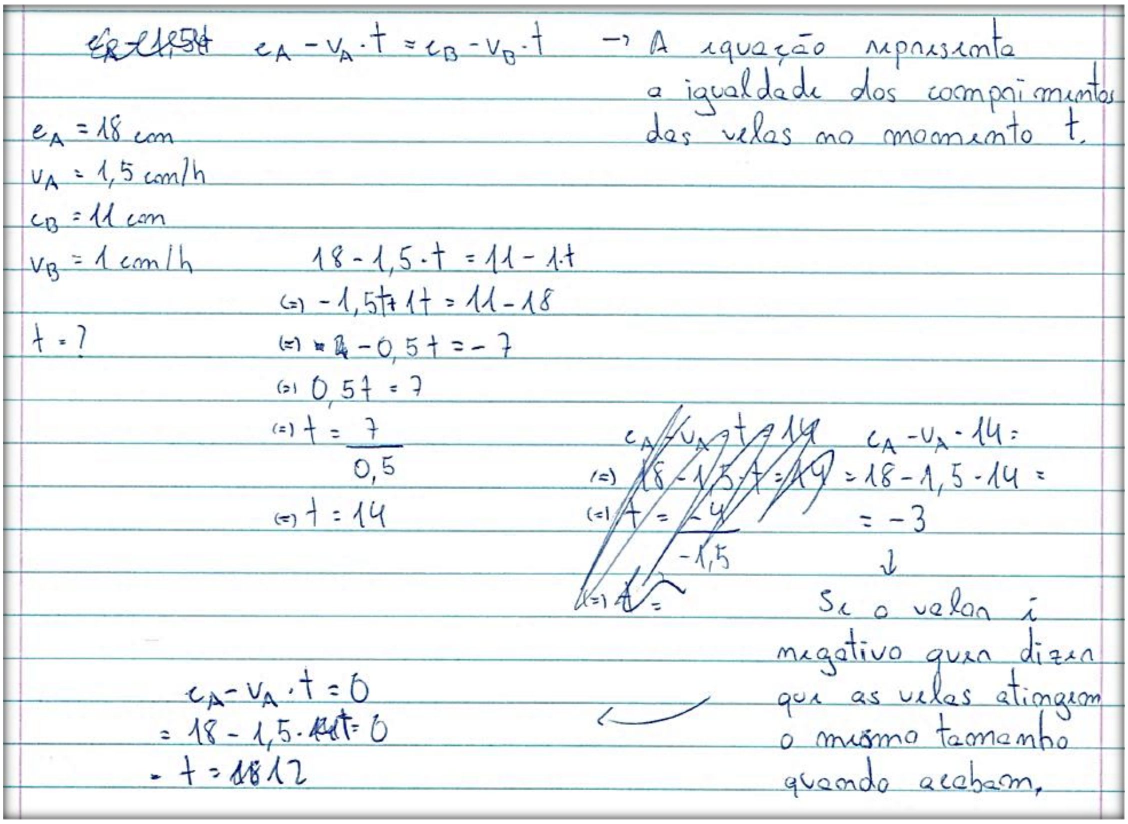
18 - 1,5 = 16,5 16,5 - 10 = 6,5
11 - 1 = 10

Isso faz com que a diferença entre os tamanhos das velas seja cada vez mais pequena. O que nós pretendemos é descobrir quando é que a diferença entre os tamanhos seja 0 (zero),

	1ª hora	2ª h	3ª h	4ª h
A diferença é:	6,5	6	5,5	5

Figura 33. Extrato da resolução do problema 4 da Ficha Final pelo aluno A3.

A estratégia de dedução foi apenas encontrada na resolução do aluno A3. Já a construção de um modelo foi utilizada por seis alunos, sendo que apenas o aluno A7 conciliou esta estratégia com outra, como já foi referido anteriormente. Na figura 35, é possível ver um extrato da resolução do aluno A7, onde se vê o modelo construído por este aluno.



$c_A - v_A \cdot t = c_B - v_B \cdot t$ → A equação representa a igualdade dos comprimentos das velas no momento t.

$c_A = 18$ cm
$v_A = 1,5$ cm/h
$c_B = 11$ cm
$v_B = 1$ cm/h
$t = ?$

$18 - 1,5 \cdot t = 11 - 1 \cdot t$
$(\Leftrightarrow) -1,5t + 1t = 11 - 18$
$(\Leftrightarrow) -0,5t = -7$
$(\Leftrightarrow) 0,5t = 7$
$(\Leftrightarrow) t = \frac{7}{0,5}$
$(\Leftrightarrow) t = 14$

$c_A - v_A \cdot 14 = 18 - 1,5 \cdot 14 = -3$

Se o valor é negativo quer dizer que as velas atingem o mesmo tamanho quando acabam.

$c_A - v_A \cdot t = 0$
$= 18 - 1,5 \cdot t = 0$
$= t = 12$

Figura 35. Extrato da resolução do problema 4 da Ficha Final pelo aluno A7.

As outras estratégias encontradas foram: tentativa e erro, aplicação de fórmulas e construção de tabelas.

Dificuldades dos alunos na resolução do problema

Três alunos, apesar de mostrarem que pensaram no problema, não o conseguiram resolver ou concluir. Como nenhum elemento da turma referiu que precisaria de mais tempo para terminar de resolver a Ficha Final, exclui-se a hipótese de os alunos não terem tempo para terminar a sua resolução. Um dos alunos começou por fazer um desenho que representava as duas velas, assinalando as respetivas alturas, sendo os únicos elementos presentes na sua resposta. Já na figura 36, vemos o que escreveu outro desses alunos.

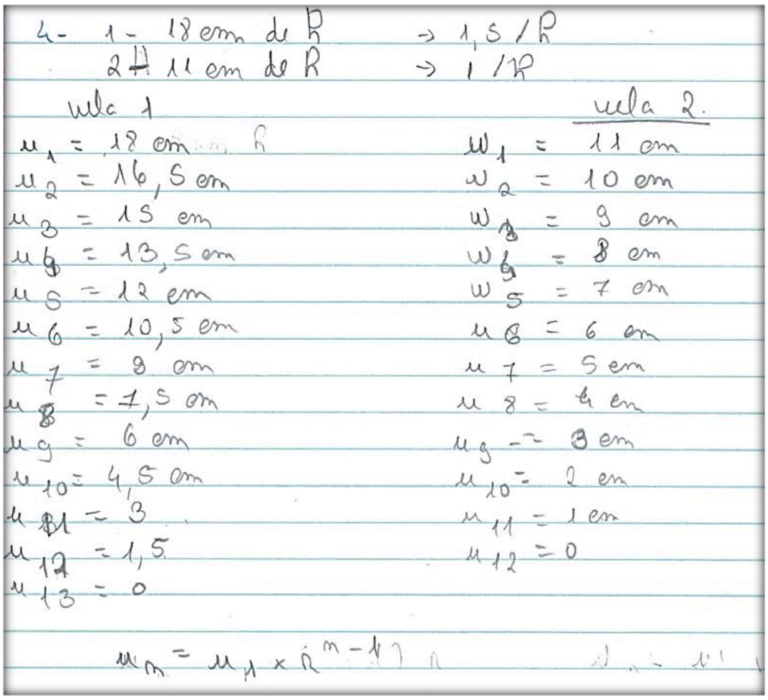

4- 1- 18 cm de h → 1,5 / h
2 11 cm de h → 1 / h
vela 1
vela 2
$u_1 = 18$ cm | $w_1 = 11$ cm
$u_2 = 16,5$ cm | $w_2 = 10$ cm
$u_3 = 15$ cm | $w_3 = 9$ cm
$u_4 = 13,5$ cm | $w_4 = 8$ cm
$u_5 = 12$ cm | $w_5 = 7$ cm
$u_6 = 10,5$ cm | $u_6 = 6$ cm
$u_7 = 9$ cm | $u_7 = 5$ cm
$u_8 = 7,5$ cm | $u_8 = 4$ cm
$u_9 = 6$ cm | $u_9 = 3$ cm
$u_{10} = 4,5$ cm | $u_{10} = 2$ cm
$u_{11} = 3$ | $u_{11} = 1$ cm
$u_{12} = 1,5$ | $u_{12} = 0$
$u_{13} = 0$
$u_n = u_1 \times r^{n-1}$

Figura 36. Resolução do problema 4 da Ficha Final pelo aluno A15.

Pelo que se observa na figura 36, o aluno começou por perceber o tamanho de cada vela, consoante o passar das horas. Quando alcançou o valor "0", parou os seus cálculos, mostrando ter noção da realidade, já que as velas não poderiam ter alturas negativas. Apesar disso, não conseguiu interpretar o resultado a que chegou, tentando aplicar, de alguma forma, os conhecimentos aprendidos durante a minha intervenção pedagógica.

Na figura 37, encontramos a resposta do terceiro aluno que não concluiu a sua resolução. Conseguimos perceber que o aluno A17 (Figura 37) tentou seguir um processo de tentativa e erro, e ir experimentando. No entanto, como errou no cálculo assinalado com uma seta preta, não conseguiu continuar o seu raciocínio. Isto porque, como os seus cálculos davam a informação de que a vela maior estaria mais pequena do que a vela menor, passadas quatro horas, a continuação do processo ficou comprometida. Se este erro não tivesse sido cometido, talvez o aluno conseguisse concluir a resolução.

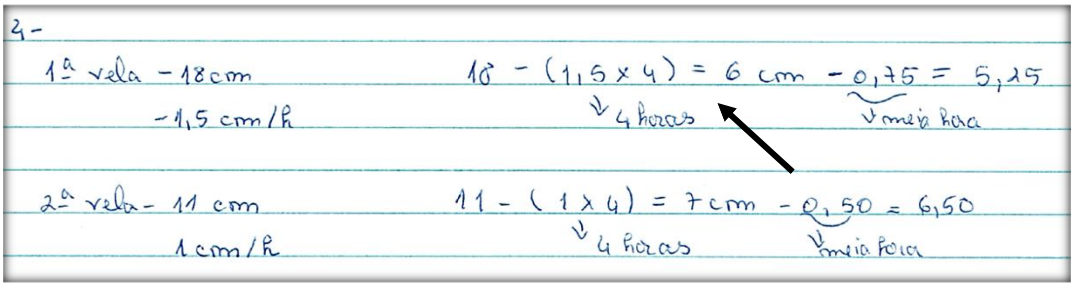
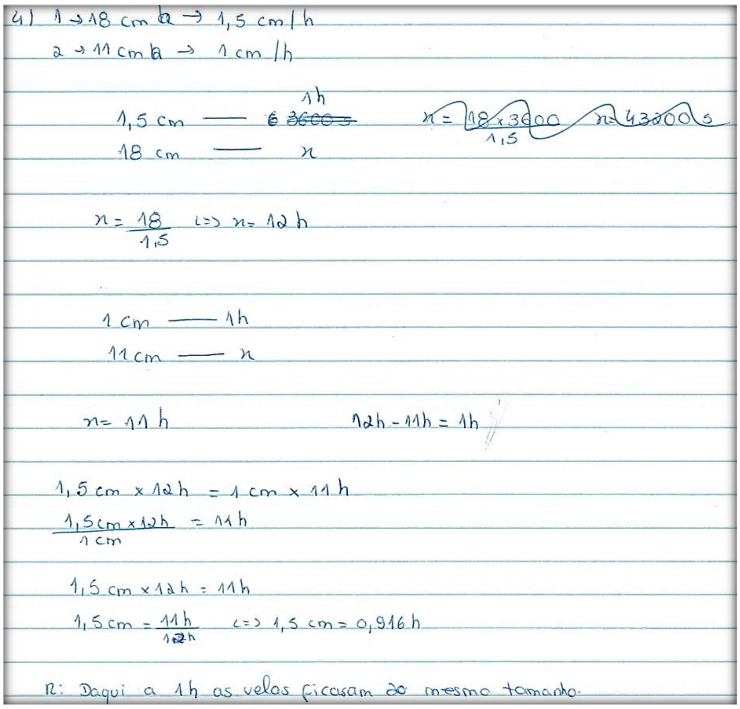

4-
1ª vela - 18 cm
-1,5 cm/h
$18 - (1,5 \times 4) = 6$ cm $- 0,75 = 5,25$
4 horas
meia hora
2ª vela - 11 cm
1 cm/h
$11 - (1 \times 4) = 7$ cm $- 0,50 = 6,50$
4 horas
meia hora

Figura 37. Resolução do problema 4 da Ficha Final pelo aluno A17.

Ainda na figura 37, encontramos outra dificuldade, relativamente ao abuso da linguagem matemática. Isto porque o aluno escreve uma expressão numérica, coloca o símbolo "=" e apresenta o respetivo resultado. Mas, em vez de pegar nesse resultado e fazer uma outra expressão, acrescenta diretamente no seguimento da que já está feita, originando uma "frase matemática" logicamente inválida.

Uma outra dificuldade detetada foi a nível da interpretação dos resultados obtidos ao longo do processo de resolução. O aluno A22 (Figura 38) estava a seguir um determinado processo de resolução, mas, talvez por não ter bem definida a sua estratégia e o que iria obter, acabou por não interpretar devidamente os resultados.


4) 1 → 18 cm → 1,5 cm/h

2 → 11 cm → 1 cm/h

1,5 cm —— 1 h ~~3600 s~~

18 cm —— x

~~$x = \frac{18 \times 3600}{1,5}$ $x = 43200$ s~~

$x = \frac{18}{1,5} \Leftrightarrow x = 12$ h

1 cm —— 1 h

11 cm —— x

$x = 11$ h   12h − 11h = 1h

1,5 cm × 12 h = 1 cm × 11 h

$\frac{1,5\text{ cm} \times 12\text{ h}}{1\text{ cm}} = 11$ h

1,5 cm × 12 h = 11 h

1,5 cm = $\frac{11\text{ h}}{12\text{ h}}$ <=> 1,5 cm = 0,916 h

R: Daqui a 1h as velas ficavam ao mesmo tamanho.

Figura 38. Resolução do problema 4 da Ficha Final pelo aluno A22.

O aluno não se apercebeu que, com a utilização das duas regras de três simples, estaria a obter o tempo que cada vela demoraria a derreter por completo. Não tendo percebido esse significado, não soube o que fazer com a informação a que chegou. Por esse motivo, encontramos a subtração desses dois resultados, e ainda uma tentativa de criar uma espécie de equação sem qualquer incógnita.

Comunicação escrita dos alunos na apresentação da resolução do problema

Apesar de três alunos não terem conseguido concluir o problema, toda a turma mostrou tê-lo compreendido, fazendo uma boa e completa recolha de dados. No que toca à completude das respostas, e com a exceção dos três elementos que não concluíram a resolução, apenas um dos restantes alunos não completou a sua resposta. Apresentou apenas uma tabela, na qual foi escrevendo a altura de cada vela com o passar das horas, assinalando com uma seta o momento em que as alturas das duas velas são iguais. Os restantes dezoito alunos apresentaram uma resposta completa. Já para analisar a correção das respostas, vejamos o quadro 8, com as diferentes respostas obtidas.

Quadro 8

Diferentes respostas apresentadas nas resoluções do problema 4 da Ficha Final

Resposta	Frequência Absoluta	Frequência Relativa (em %)
1 hora	1	5%
9 horas	1	5%
12 horas	12	55%
14 horas	1	5%
Nunca	4	18%
Não responde	3	14%

Através do quadro 8, concluímos de imediato que mais de metade da turma alcançou a resposta correta. Mas as respostas mais interessantes, nem sempre são as corretas, e é importante perceber o que levou os alunos a chegar a outras respostas. A primeira resposta, “1 hora”, já foi vista na figura 38, e surgiu da dificuldade em atribuir significado ao resultado, como referido anteriormente. Já a resposta “9 horas” foi obtida apenas por erros de cálculo por parte do aluno. Se estes erros não tivessem ocorrido, o aluno chegaria ao resultado de “14 horas”. A partir daqui, poderia apresentar essa mesma resposta ou aperceber-se que, passado esse tempo, as velas já tinham derretido, tal como aconteceu com alguns dos seus colegas. O aluno que chegou a esse resultado, “14 horas”, seguiu um processo idêntico, mas sem erros de cálculo, como podemos ver na figura 39.

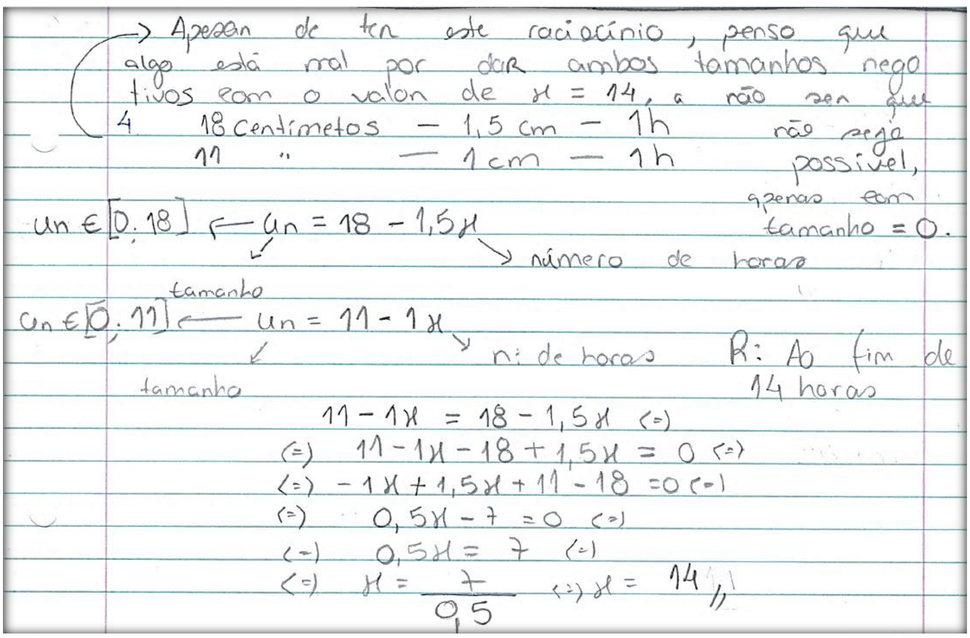


Figura 39. Resolução do problema 4 da Ficha Final pelo aluno A19.

O aluno construiu uma sucessão para a altura de cada uma das velas, passadas n horas, tendo depois igualado as sucessões e chegado à solução "14". No entanto, ao fazer a verificação para perceber que tamanho teriam as velas passadas 14 horas, apercebeu-se de que obtinha valores negativos, o que causou alguma confusão. Como não conseguiu compreender melhor a situação a que chegou, acabou por não chegar à resposta correta. Apesar disso, mostra alguma noção do contexto real do problema, percebendo que não faria sentido que os tamanhos das velas fossem valores negativos. Na figura 39 vemos ainda uma falha na linguagem matemática, já que, na escrita das sucessões, o aluno não faz correspondência entre a letra que coloca em índice (n) e a incógnita utilizada (x). Isto revela que o aluno pode não ver a sucessão como sendo uma função, em que o valor em índice será o mesmo que a incógnita.

Relativamente aos alunos que responderam que as velas nunca ficam do mesmo tamanho, essa resposta surgiu por considerarem que, se as velas derretem totalmente, deixamos de considerar o seu tamanho. O aluno A12 (Figura 40), por exemplo, realizou os seus cálculos, retirando os respetivos centímetros a cada uma das velas, de modo a perceber o tamanho de cada uma com o passar das horas. Como, passadas 11 horas, uma das velas já tinha derretido por completo, o aluno concluiu que, nesse caso, já seria impossível as velas terem o mesmo tamanho.

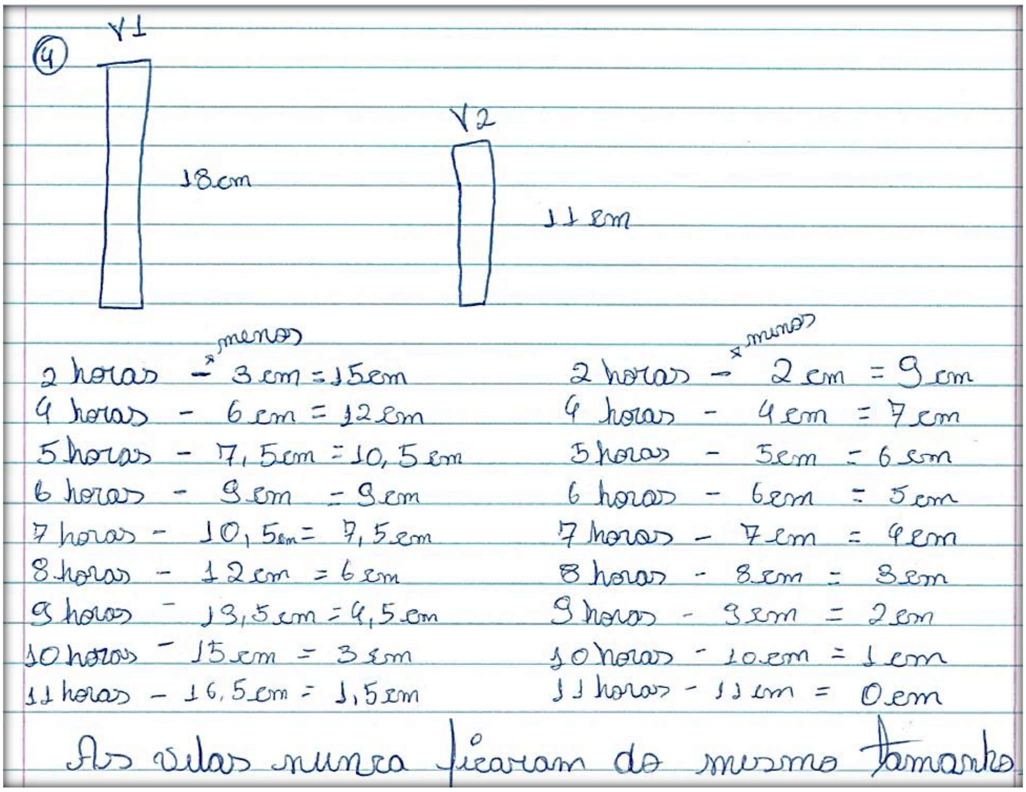


Figura 40. Resolução do problema 4 da Ficha Final pelo aluno A12.

Ainda relativamente à fundamentação da resposta, mas desta vez quanto ao tipo, treze elementos da turma recorreram à experimentação. Um exemplo dessa experimentação pode ser visto na figura 40, em que o aluno foi tentando perceber quais seriam as alturas das velas em diferentes tempos. Além disso, um aluno apresentou uma resposta vaga e cinco usaram exclusivamente regras, como foi o caso do aluno A19 (Figura 39), por exemplo. Os restantes três alunos, justificaram a sua resposta de forma relacional. Já no que toca às representações, três alunos conciliaram os três tipos de representação na sua resposta, enquanto metade da turma utilizou exclusivamente a representação simbólica, algo que vai ao encontro do tipo de fundamentação que utilizaram. Dos restantes elementos da turma, quatro recorreram apenas a uma representação icónica, sendo através de tabelas, de desenhos ou esquemas, como aquele que fez o aluno A8 (Figura 41).

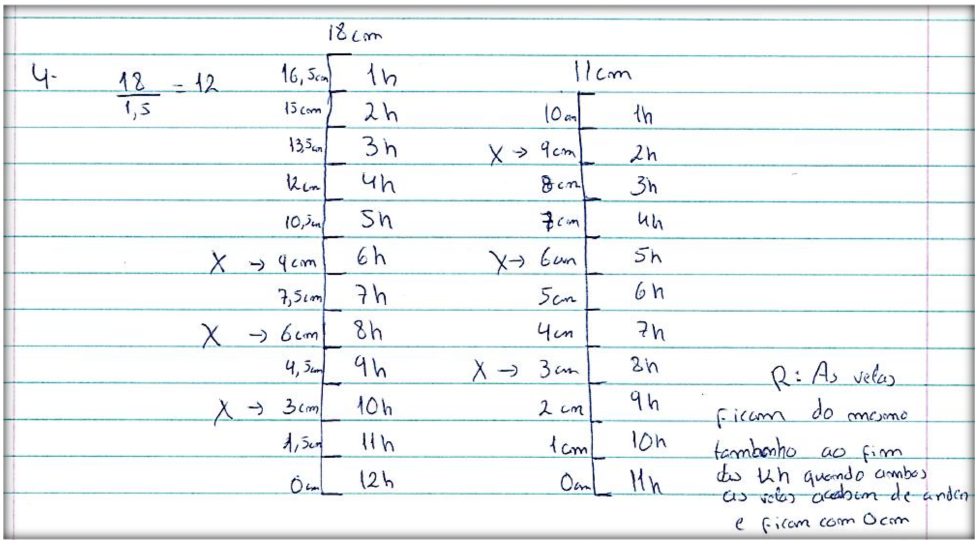


Figura 41. Resolução do problema 4 da Ficha Final pelo aluno A8.

Os restantes quatro alunos, dividem-se entre duas conjugações de representações. Dois deles juntam a linguagem verbal com a representação simbólica (Figura 39), enquanto os outros dois utilizam apenas representação icónica e simbólica (Figura 40).

4.5. Perceções dos alunos relativamente à sua evolução pessoal

Na fase final da minha intervenção pedagógica, os alunos responderam a um questionário (Anexo 5), na aula de 20 de março de 2018. A partir desse questionário, foi possível perceber algumas perceções que a turma tem, tanto no que toca à resolução de problemas, como também a nível de desempenho pessoal. Tal como já foi referido no capítulo anterior, este questionário está dividido em três grandes grupos: dados pessoais, apreciação global e resolução de problemas. Nesta secção, apresentarei os resultados da análise feita a certos elementos do terceiro grupo do questionário, mais focado no tema deste relatório.

Na parte final do questionário, é colocada a questão "Sentes que evoluíste de alguma forma no modo como resolves problemas? Porquê?". Considero que esta é a questão mais importante de todo o questionário, já que a evolução pessoal é um aspeto complicado de avaliar num espaço de tempo tão curto. Apesar de se notarem diferenças na atitude dos alunos dentro da sala de aula, nada melhor do que dar voz aos alunos para admitirem se sentem, ou não, alguma diferença.

Dos 22 alunos que constituem a turma, apenas um deles refere que não sentiu evolução. No entanto, a justificação que dá para essa resposta, é apenas pelo facto ter resolvido a maioria dos problemas utilizando a estratégia de tentativa e erro. Como o aluno assume que essa estratégia não é tão válida como as outras, sente que só teria existido evolução se tivesse deixado de a utilizar. Os restantes elementos da turma, respondem que evoluíram de alguma forma, realçando diferentes aspetos. Um desses aspetos é a persistência, que três alunos referem ter notado melhoras pessoais. Estes alunos mencionam que, no início, sentem que "desistia[m] quase de imediato" (A1) se não conseguissem resolvê-lo de forma automática, sendo que um deles realça que "nem conseguia resolver um problema até ao fim" (A17), algo que foi mudando.

Um aspeto em que quase todos parecem concordar, está no facto de, quanto mais se resolvem problemas, mais o nosso raciocínio se desenvolve e mais aptos ficamos para resolver problemas futuros. Um dos alunos chega a referir que já está "mais apto para resolver problemas de dificuldade elevada. Mas sinto que posso melhorar as minhas aptidões por isso vou procurar fazer mais problemas." (A21). Além disso, mais de metade da turma referiu que, após a resolução de todos os problemas da intervenção, aprenderam novas formas de resolver problemas e diferentes maneiras de pensar num problema. Dois alunos referem, ainda, ter passado por uma evolução pessoal no que toca à recolha da informação. Um deles diz ter aprendido a restringir-se "mais afincadamente ao que é dito exatamente no enunciado" (A14), e outro menciona que o facto de ter começado a escrever os dados recolhidos na folha de resposta, tornou-se uma grande ajuda.

Três elementos da turma mostram, através da sua resposta, que avaliaram a sua evolução pessoal consoante a autoconfiança que sentiram, e que foi aumentando gradualmente com cada problema resolvido. Este aspeto é muito importante, já que um desses alunos tem média de 10 à disciplina de Matemática, mas mostrou-se um bom resolvedor de problemas. O facto de a turma não estar habituada a resolver problemas, fez com que as distinções habituais entre alunos fossem apenas baseadas em notas de testes. Mas implementando coisas novas, como foi o caso dos jogos matemáticos, com os quais a turma teve contacto para participar no campeonato nacional, ou o caso dos problemas, começam a surgir novos "critérios" de distinção. Um aluno deixa de ser visto como bom ou mau apenas pela sua média final, que normalmente é obtida essencialmente através de resolução de exercícios, e pode também ser avaliado pelo seu domínio estratégico para ganhar um jogo, ou pela sua forma de resolver problemas.

CAPÍTULO V

DISCUSSÕES E CONCLUSÕES

Este último capítulo encontra-se separado em três secções. Na primeira, estão as conclusões da investigação, na qual se apresentam as diferentes conclusões de cada objetivo proposto para a realização deste estudo. Na segunda secção, constam pequenas reflexões sobre a aprendizagem pessoal que me foi permitida com a elaboração e realização deste projeto. Por fim, há uma última secção destinada às limitações sentidas ao longo deste trabalho, juntamente com sugestões para investigações futuras.

5.1. Conclusões da investigação

Este subcapítulo encontra-se dividido em quatro secções, uma por cada objetivo proposto para a realização deste estudo.

5.1.1. Identificar as estratégias de resolução de problemas que os alunos utilizam

No Capítulo II, foi apresentada a lista de estratégias de resolução de problemas que se iriam considerar neste trabalho. Assim, tendo por base essa lista de onze estratégias e os dados recolhidos ao longo da intervenção pedagógica, apresenta-se um quadro síntese (quadro 9) para se perceber quais foram as estratégias mais utilizadas pela turma, nos diferentes problemas analisados.

Como é possível ver através do quadro 9, o único problema, que foi resolvido individualmente, com o uso da estratégia *aplicação de fórmulas* por mais de 50% dos alunos, foi o problema *O salário do Henrique*. Além disso, este foi o problema em que a turma recorreu a um menor número de estratégias, sendo que as resoluções se centraram na *aplicação de fórmulas* e na *exaustão*. É importante notar que, nestas resoluções, ao contrário do que aconteceu nos restantes problemas, não houve conciliação de estratégias, o que significa que cada aluno seguiu uma e uma só estratégia. Sendo que este problema estava inserido no grupo de problemas com relação ao conteúdo lecionado, todas estas conclusões vêm reforçar o porquê de ter sido necessária uma mudança do foco dos problemas. Deste modo, permitiu-se que os alunos tivessem contacto com tarefas que iriam assumir como problemas, e não tarefas que eram vistas como exercícios.

Quadro 9

Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas

Problemas / Estratégias	Problema 1 da Ficha de Diagnóstico	Problema *O salário do Henrique*	Problema *Ai, tantos testes para corrigir!*	Problema *Cortes na pizza*	Problema 4 da Ficha Final
Tentativa e erro	-	-	71% 5 grupos	71% 5 grupos	5% 1 aluno
Procura de um padrão	-	-	-	14% 3 grupos	-
Generalização	-	-	-	9% 2 grupos	-
Resolução por partes	14% 3 alunos	-	100% 7 grupos	-	-
Construção de esquemas/figuras	41% 9 alunos	-	14% 1 grupo	100% 7 grupos	36% 8 alunos
Construção de tabelas	9% 2 alunos	-	-	-	5% 1 aluno
Aplicação de fórmulas	18% 4 alunos	73% 16 alunos	-	-	5% 1 aluno
Construção de um modelo	41% 9 alunos	-	-	9% 2 grupos	27% 6 alunos
Dedução	-	-	100% 7 grupos	-	5% 1 aluno
Exaustão	-	27% 6 alunos	-	-	41% 9 alunos

As estratégias menos utilizadas pelos alunos foram a *procura de um padrão* e a *generalização*. Estas estratégias foram utilizadas apenas num dos problemas analisados e, tal como referiram Musser e Shaughnessy (1980), a segunda estratégia surge como um seguimento da primeira. Tal como os autores referiram, os grupos que utilizaram estas estratégias começaram por partir em busca de algum padrão e, após o encontrarem, a solução do problema surgiu através da generalização do mesmo.

A nomenclatura das estratégias seguida neste trabalho, incluía as estratégias seguidas pela turma, e ainda uma outra, que não foi utilizada nas resoluções dos problemas analisados, a resolução do fim para o início. Esta ausência é também assumida pelos alunos no preenchimento do questionário, já que apenas um dos alunos assinalou que utilizava *frequentemente* essa estratégia, enquanto o resto da turma se dividiu entre os níveis 1, 2 e 3, isto é, *nunca*, *raramente* e *às vezes*. Além disso, 45% dos alunos referiu que nunca recorreu a essa estratégia. Esta foi a estratégia com maior percentagem de nível 1 assinalado, sendo que, nas restantes, este nível não foi assinalado mais do que duas vezes.

Já a estratégia mais utilizada foi a *construção de esquemas/figuras*, a qual se encontrou em todos os problemas resolvidos, com exceção do problema relacionado com o conteúdo lecionado. Uma vez mais, esta preferência também se percebe pelas respostas ao questionário, já que apenas um aluno assinalou um nível inferior a 3 e cerca de 68% da turma referiu que usa esta estratégia *frequentemente* ou *sempre*.

5.1.2. Reconhecer as dificuldades reveladas pelos alunos durante a resolução de problemas

Nesta investigação, as dificuldades foram divididas em quatro níveis distintos: persistência, interpretação, seleção de informação e estratégia. Destes níveis, aquele que foi sentido em mais problemas analisados foi o nível de interpretação. Nos dois primeiros problemas cujos resultados foram apresentados, o problema 1 da Ficha de Diagnóstico e o problema *O salário do Henrique*, e ainda no problema analisado da Ficha Final, uma das dificuldades foi na interpretação dos resultados obtidos. Além desta dificuldade, na resolução do problema *O salário do Henrique*, houve também uma situação em que se notou alguma falha na compreensão do enunciado.

As dificuldades a nível de persistência foram sentidas apenas no problema da Ficha Final, já que um dos alunos praticamente não iniciou uma resolução ao problema e outros dois não o conseguiram concluir. No que toca ao nível da estratégia, sentiram-se dificuldades no problema da Ficha de Diagnóstico, pois alguns alunos não escolheram devidamente a estratégia a seguir e outros, apesar de terem boas estratégias, tiveram dificuldades na execução da mesma, passando pela resposta correta sem se aperceberem disso.

Já nos restantes dois problemas, *Ai, tantos testes para corrigir!* e *Cortes na pizza*, as dificuldades incidiram na recolha de dados, ou seja, ao nível de seleção de informação. Esta dificuldade foi sendo combatida pois os alunos foram aprendendo a assumir aquilo que está no enunciado, sem assumirem algo extra que não consta no problema. Era por causa de certas suposições feitas pelos alunos, que depois surgiam dificuldades em resolver um problema. Por exemplo, no caso do problema *Ai, tantos testes para corrigir!*, houve um grupo que assumiu que, quando falamos que o número de testes era menor do que duas dúzias, então isso também significa que seria maior do que uma dúzia, o que é uma suposição falsa. Já no caso do problema *Cortes na pizza*, vários grupos questionaram se as fatias da pizza teriam, obrigatoriamente, a mesma forma geométrica, quando nada no enunciado remetia para isso. No quadro 10 é possível ver uma síntese das dificuldades sentidas em cada problema analisado nesta investigação.

Quadro 10

Dificuldades reveladas pelos alunos na resolução dos problemas

Dificuldades \ Problemas		Problema 1 da Ficha de Diagnóstico	Problema *O salário do Henrique*	Problema *Ai, tantos testes para corrigir!*	Problema *Cortes na pizza*	Problema 4 da Ficha Final
A nível de persistência	Em iniciar a resolução do problema	-	-	-	-	5% 1 aluno
	Em concluir a resolução do problema	-	-	-	-	9% 2 alunos
A nível de interpretação	*Em interpretar o enunciado*	-	9% 2 alunos	-	-	-
	Em compreender o que é pedido	-	-	-	-	-
	Em interpretar/atribuir significado ao resultado	5% 1 aluno	14% 3 alunos	-	-	9% 2 alunos
A nível de seleção de informação	Em recolher os dados	-	-	29% 2 grupos	43% 3 grupos	-
	Em organizar os dados	-	-	-	-	-
A nível de estratégia	Na escolha da estratégia	36% 8 alunos	-	-	-	-
	Na execução da estratégia	23% 5 alunos	-	-	-	-

Um dos obstáculos que se sentiu em muitas situações, é também referido por Sternberg (1998), que lhe chamou de configuração e fixação mental. Alguns alunos revelaram sentir este obstáculo, já que estavam demasiado presos a certas estratégias e conceitos. Um exemplo de uma estratégia que mostrava este obstáculo, estava na aplicação de uma *regra de três simples*, à qual alguns alunos recorreram e chegaram a um ponto em que não conseguiam atribuir significado à resposta que obtinham, ou simplesmente essa estratégia tornava-se enganadora para a obtenção da resposta pretendida. Quanto a conceitos e ideias, foi bastante visível essa prisão na análise das respostas ao problema 1 da Ficha de Diagnóstico. Isto porque a maioria dos alunos considerou que, só depois de se considerar todo o ciclo dia-noite, se poderia verificar a distância que faltava para o sapo sair do poço. Foi o facto de estarem presos a este "conceito", que impediu a existência de mais respostas corretas a este problema.

Nas respostas ao questionário, a única dificuldade assumida por mais de 50% da turma reside no estabelecimento de uma estratégia. Este facto vai ao encontro do que é dito por Lopes (2012), que acredita que a etapa mais difícil da resolução de um problema passa pela seleção da estratégia. Ainda no preenchimento do questionário, é possível ver que cerca de 45% atribui as suas dificuldades às poucas experiências em resolver problemas, sendo esta a razão com a qual maior percentagem de alunos concordou. De seguida, está a falta de confiança, com seis alunos a concordar com o facto de ser um fator que promove as suas dificuldades. Já a falta de concentração é um fator que causa dificuldades apenas a 23% da turma. Por fim, com a mesma quantidade de concordância, estão a falta de bases e a falta de interesse pela disciplina, assinaladas por três alunos, tendo sido os mesmos a concordar com ambas as afirmações.

5.1.3. Caracterizar a comunicação escrita dos alunos na apresentação das resoluções de problemas

A comunicação escrita poderá ser vista como mais uma dificuldade que os alunos enfrentam quando resolvem problemas. Isto porque é notório que, para alguns alunos, o processo de escrita daquilo que pensaram é algo muito complicado. Nas respostas aos problemas analisados, foi percetível que, no geral, os alunos compreendem bem o problema, mostrando que entenderam o que é pedido e fazendo uma boa recolha de dados. No entanto, não explicitam essa compreensão através da escrita, sendo algo apenas percetível pelo seu processo de resolução, tal como aconteceu no estudo de Martinho e Rocha (2017). Já no que diz respeito à fundamentação da resposta, mais especificamente quanto ao nível da mesma, alguns alunos, em certos problemas, não apresentaram respostas completas, esquecendo-se de escrever uma resposta conclusiva de todo o processo de resolução. Isto mostra que alguns alunos, apesar de valorizarem a resolução de problemas, assumem que o processo de resolução deve ser registado, mas que a resposta final não é assim tão importante. Essa valorização que os alunos atribuem à resolução de problemas é notória pelo questionário, já que nenhum aluno da turma discordou do facto de a resolução de problemas ser importante para desenvolver o raciocínio lógico e ainda a capacidade de discutir e defender ideias, sendo que o máximo de respostas de nível *indiferente* nas três afirmações foi três.

Quanto ao tipo de fundamentação da resposta, encontra-se uma maior variedade nas resoluções individuais, com a exceção do problema relacionado com o conteúdo lecionado, como se vê pelo quadro 11. Aqui temos, uma vez mais, a justificação para se ter alterado o foco dos problemas propostos, pois todos os alunos se limitaram ao uso exclusivo de regras na resolução do problema *O salário do Henrique*.

Nos restantes problemas individuais, e ainda no problema *Cortes na pizza*, o tipo de fundamentação das respostas incidiu maioritariamente no recurso à experimentação, o que vai ao encontro do uso das estratégias *tentativa e erro*, *construção de esquemas/figuras* e ainda *exaustão*. Mas é importante realçar que os problemas eram propícios ao uso desse tipo de fundamentação.

Quadro 11
Distribuição da turma pelos tipos de fundamentação da resposta apresentada a cada problema

Problemas / Fundamentação	Problema 1 da Ficha de Diagnóstico	Problema *O salário do Henrique*	Problema *Ai, tantos testes para corrigir!*	Problema *Cortes na pizza*	Problema 4 da Ficha Final
Vaga, pouco clara ou pouco informativa	14% 3 alunos	-	29% 2 grupos	14% 1 grupo	5% 1 aluno
Uso exclusivo de regras	14% 3 alunos	100% 22 alunos	-	-	23% 5 alunos
Recurso à experimentação	55% 12 alunos	-	-	86% 6 grupos	59% 13 alunos
Procedimental	-	-	-	-	-
Relacional	18% 4 alunos	-	23% 5 grupos	-	14% 3 alunos

Ao contrário do que aconteceu no estudo de Martinho e Rocha (2017), não encontrei qualquer relação entre o tipo de fundamentação da resposta e a correção da mesma, já que houve respostas vagas que permitiram aos alunos alcançar a solução correta, e até fundamentações relacionais que levaram os alunos a soluções erradas. A fundamentação da resposta pode revelar as dificuldades que alguns alunos têm em expressar o seu pensamento matemático de forma clara, mas não posso concluir que está diretamente relacionado com a capacidade de resolver um problema.

Por fim, no quadro 12 consta um resumo da distribuição das respostas pelos diferentes tipos de representação.

Quadro 12

Distribuição da turma pelos tipos de representação utilizados em cada problema

Problemas / Representação	Problema 1 da Ficha de Diagnóstico	Problema *O salário do Henrique*	Problema *Ai, tantos testes para corrigir!*	Problema *Cortes na pizza*	Problema 4 da Ficha Final
Linguagem verbal	23% 5 alunos	-	86% 6 grupos	86% 6 grupos	23% 5 alunos
Representação icónica	50% 11 alunos	-	14% 1 grupo	100% 7 grupos	41% 9 alunos
Representação simbólica	64% 14 alunos	100% 22 alunos	100% 7 grupos	-	82% 18 alunos

Apenas num dos problemas, as resoluções apresentaram um único tipo de representação. Esse problema foi aquele que estava relacionado com o conteúdo lecionado, *O salário do Henrique*. Esta exclusividade no uso de uma representação, mais especificamente representação simbólica, vai ao encontro do facto de, neste problema, todos os alunos terem recorrido ao uso exclusivo de regras e fórmulas. Como os alunos queriam aplicar o que foi aprendido, direcionaram a sua resolução apenas para os algoritmos que tinham de realizar para responder ao problema. Assim, não recorreram a qualquer tipo de representação icónica, e a linguagem verbal estava apenas na resposta que concluía a resolução e, portanto, não foi considerada.

5.1.4. Avaliar a evolução dos alunos ao longo do projeto

A evolução dos alunos é um pouco complicada de perceber através das respostas dos mesmos, principalmente pelo facto de ter sido uma intervenção realizada num curto espaço de tempo. No entanto, através do questionário preenchido pelos alunos, foi percetível que quase todos os elementos da turma notaram uma evolução pessoal, sendo que apenas um aluno referiu não ter evoluído. Esta evolução foi justificada com diferentes aspetos, nomeadamente com um aumento da persistência, o desenvolvimento do raciocínio e da aptidão para resolver problemas, uma capacidade maior para recolher informação do enunciado e ainda uma autoconfiança crescente em cada problema resolvido.

Apesar desta perceção dos alunos, também em sala de aula se notou diferenças na postura dos mesmos e na forma como encaravam os problemas. No geral, a turma mostrava-se mais envolvida na resolução dos problemas, com uma postura de quem se sentia mais desafiado, ao contrário do que aconteceu nas primeiras propostas, em que era notória a postura derrotista de alguns elementos, principalmente dos que se rotulavam como "maus alunos". Através da resolução de problemas, foi possível ver esses alunos, com classificações mais baixas, a empenhar-se de forma cada vez mais ativa na resolução dos problemas, mostrando qualidades que, com aulas mais rotineiras e focadas em resolução de exercícios, seriam ofuscadas. Como referiu Lopes (2002), alunos que se veem como sendo maus na Matemática, e que até referem não gostar da disciplina, aplicam a Matemática de forma exemplar em situações de resolução de problemas.

Por fim, uma outra alteração notória da postura dos alunos foi vista na troca de informações entre grupos. Numa situação de sala de aula, enquanto um grupo me tentava explicar o seu raciocínio, de forma a perceberem se estariam a seguir o caminho acertado, o grupo ao lado mostrou-se muito incomodado porque estavam a conseguir ouvir o pensamento dos colegas. Como os alunos queriam pensar no modo como iam resolver o problema, o facto de terem ouvido uma parte do raciocínio dos colegas já iria afetar o seu próprio raciocínio. Como referiu um aluno do grupo, resolver o problema já não teria a mesma "piada", se não pensassem nele sem orientações exteriores ao grupo.

5.2. Reflexões sobre o projeto

Todo o processo de elaboração e realização deste projeto permitiu perceber de forma mais nítida todo o trabalho que está por trás de uma aula e também a importância de permitir que os alunos resolvam problemas. Ao longo deste trabalho, ganhei mais competência para planear uma aula e executá-la, e ainda fazer ajustes nas aulas seguintes, mediante a turma que se enfrenta e os resultados que se pretendem obter. Além disso, apercebi-me do quão difícil é fazer uma boa seleção dos problemas a propor aos alunos, já que tudo depende do objetivo que pretendemos. Se queremos um problema que tenha alguma relação com o conteúdo lecionado, temos de ter o cuidado de perceber se aquilo é, de facto, um problema, ou se passará a ser um exercício. Se queremos fazer uma discussão mais rica após a resolução de um problema, devemos propor um problema com diferentes tipos de resolução. E, nessa discussão, o papel do professor é muito importante para selecionar quais são os grupos que devem apresentar as suas resoluções, e em que ordem. Esta deve começar por respostas erradas ou incompletas, e só numa fase final apresentar uma resolução mais correta, permitindo a todo o grupo turma perceber que é normal haver falhas e é bom olhar para resoluções menos corretas, para aprendermos com os erros de todos os elementos da turma. Além disso, a discussão é importante para mostrar à turma as diferentes estratégias que poderiam ser utilizadas, expondo as diferentes ferramentas que os alunos têm ao seu dispor quando resolvem um problema. Tudo isto está relacionado com a prática de ensino exploratório, seguindo as cinco fases propostas por Stein, Engle, Smith e Hughes (2008).

Apesar de este trabalho estar mais centrado na resolução de problemas, não deve ser assumido que este é o único tipo de tarefa importante dentro da sala de aula. Deve haver espaço para todo o tipo de tarefas, e todas satisfazem o seu propósito. Aliás, o NCTM (2017) refere que as tarefas que se centram na "aplicação de procedimentos têm, de facto, um lugar no currículo e são necessárias para desenvolver a fluência processual" (p. 23). No entanto, este não deve ser o único tipo de tarefas, já que não privilegiam o raciocínio, ao contrário do que acontece com os problemas.

Finalmente, é de extrema importância conhecer os alunos, perceber as suas limitações e tentar desafiá-los a superar as suas dificuldades. No entanto, esse desafio deve ser feito tendo em conta essas mesmas limitações, tal como a ajuda prestada aos alunos. Isto porque, segundo Pólya (1995), o docente deve ajudar o estudante quando sente que tal é necessário, mas tendo o cuidado de não lhe retirar a independência, fazendo questões adequadas ao pensamento do aluno e levando-o a um certo raciocínio, de forma a que este sinta que as ideias partiram da sua própria cabeça. Ainda na perspetiva de Pólya, se o aluno sentir que a ajuda foi insuficiente, este pode não conseguir avançar na resolução do problema, o que poderá desmotivá-lo. No entanto, se essa ajuda for excessiva, o aluno também não terá nada para fazer de modo autónomo, o que irá reduzir a sua autoconfiança.

5.3. Limitações e recomendações

No desenvolvimento e implementação deste projeto, surgiram algumas limitações. A limitação principal foi o fator tempo, já que, de facto, o tempo para implementação do projeto foi curto e concentrado. Teria sido mais benéfico se fosse uma intervenção mais espaçada no tempo, não sendo algo tão intensivo e permitindo aos alunos maturar um pouco mais a sua capacidade de resolução de problemas, em aulas mais espaçadas. Deste modo, permitiria perceber se a resolução de problemas também influenciaria o próprio desempenho dos alunos quando resolviam exercícios. Uma outra limitação foi relativa ao facto de os alunos não estarem habituados a resolver problemas, algo que influenciou bastante na mudança de rumo da intervenção, mudando o foco dos problemas.

As limitações devem ser vistas como aprendizagens para o futuro. Assim, a primeira limitação pode ser estudada num trabalho futuro, tentando perceber se uma intervenção menos concentrada no tempo ajudaria a retirar melhores resultados, tanto na postura dos alunos quanto à resolução de problemas como também no seu desempenho em geral. Quanto à limitação suscitada pela falta de hábito dos alunos e o facto de isso ter suscitado uma mudança na intervenção, também se pode apresentar uma proposta para trabalhos futuros. Neste estudo, os problemas inicialmente propostos tinham relação direta com o conteúdo lecionado, mas, como os alunos os viam como exercícios, surgiu e necessidade de mudar para problemas sem qualquer relação a conteúdos específicos. Assim, num estudo próximo, poderá ser investigada a reação dos alunos com uma ordem inversa. Isto é, começar por habituar os alunos a resolver problemas sem relação direta com o conteúdo que está a ser trabalhado, passando depois a propor problemas com relação ao que se quer lecionar.

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só). *Educação e Matemática, 8,* 7-10.

Alves, C. S. F. (2012). *Comunicação escrita de alunos do 6.º ano de escolaridade quando resolvem tarefas envolvendo proporcionalidade direta.* Curso de Mestrado em Educação: Especiaidade Didática da Matemática e das Ciências. Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Boavida, A. M. R., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico – Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação.* Lisboa: Relógia D'Água.

Butts, T. (1980). Posing Problems Properly. In S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics* (pp. 23-33). Reston, Virgínia: NCTM.

Charles, R., Lester, F., & O'Daffer, P. (1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving.* Reston, Virgínia: NCTM.

Coutinho, C. P., & Chaves, J. H. (2002). O estudo de caso na investigação em Tecnologia Educativa em Portugal. *Revista Portuguesa de Educação, 15*(1) (pp. 221-243). Disponível em: http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/492/1/ClaraCoutinho.pdf.

D'Ambrósio, B. S. (1989). Como ensinar matemática hoje?. *SBEM, 4*(2), 15-19.

Duarte, J. (2000). A resolução de problemas no ensino da Matemática. *Educação & Comunicação, 4,* 97-100.

Freitas, L. V., & Freitas C. V. (2003). *Aprendizagem cooperativa.* Lisboa: Edições ASA.

Kantowski, M. G. (1977). Processes Involved in Mathematical Problem Solving. *Journal for Research in Mathematics Education, 8*(3), 163-180.

Kantowski, M. G. (1980). Some thoughts on Teaching for Problem Solving. In S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics* (pp. 195-203). Reston, Virgínia: NCTM.

Lopes, C. A. (2002). *Estratégias e métodos de resolução de problemas em matemática.* Lisboa: Edições ASA.

Martinho, M. H., & Rocha, H. (2017). A escrita matemática na resolução de um problema de geometria por alunos de Licenciatura em Educação Básica. EIEM.

Mason, J. (1992). Researching problem solving from the inside. In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information Technologies* (pp. 17-39). Berlin: Springer-Verlag.

Matesfacil (n.d.). *Progresiones o sucesiones*. Consultado em setembro 15, 2018 em: https://www.matesfacil.com/ESO/progresiones/ejercicios-resueltos-sucesiones.html.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: ME, DGIDC.

ME – Departamento do Ensino Secundário (2001). *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais.* Lisboa: ME - DES.

ME – Departamento do Ensino Secundário (2001). *Matemática B – 10.º Ano.* Lisboa: ME - DES.

MEC (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico.* Lisboa: MEC.

MEC (2013). *Programa de Matemática A.* Lisboa: MEC.

MEC (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória.* Lisboa: MEC.

Menezes, L. (1996). *A importância da pergunta do professor na aula de Matemática.* Escola Superior de Educação de Viseu.

Musser, G. L., & Shaughnessy, J. M. (1980). Problem-solving Strategies in School Mathematics. In S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics* (pp. 136-145). Reston, Virgínia: NCTM.

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

NCTM (1998). *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

NCTM (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

NCTM (2017). *Princípios para a Ação*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Nobre, S., Amado, N., & Ponte, J. P. (2011). Representações na aprendizagem de sistemas de equações. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale & J. P. Ponte (Eds.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 239-259). Póvoa de Varzim: EIEM.

OECD (2014). *PISA 2012 Results: Creative Problem Solving – Students' Skills in Tackling Real-Life Problems (Volume V).* Disponível em: https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-volume-V.pdf.

Oliveira, H., Canavarro, A. P., & Menezes, L. (2013). Cortes na piza (ensino secundário) – caso multimédia. In Site do Projeto P3M, Práticas Profissionais de Professores de Matemática. Disponível em http://p3m.ie.ul.pt/caso-4-cortes-na-piza-ensino-secundario.

Palhares, P. (1980). Histórias com Problemas Construídas por Futuros Professores de Matemática. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho & I. Vale (Orgs.), *Resolução de Problemas na Fomação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos Contextos e Perspetivas* (pp. 159-188). Aveiro: Grupo de Investigação em Resolução de Problemas.

Phonapichat, P., Wongwanich, S. & Sujiva, S. (2013). An analysis of elementary school students' difficulties in mathematical problem solving. *Procedia Social and Behavioral Sciences 116 (2014),* 3169-3174.

Pires, M. M. S. (2001). *A diversificação de tarefas em matemática no ensino secundário: um projeto de investigação-ação.* Lisboa: APM.

Pirie, S. E. B. (1998). Crossing the Gulf between Thought and Symbol: Language as (Slippery) Stepping-Stones. In H. Steinbring, M. G. B. Bussi & A. Sierpinska (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom* (pp. 7-29). Reston, Virgínia: NCTM.

Pólya, G. (1980). On Solving Mathematical Problems in High School. In S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics* (pp. 1-2). Reston, Virgínia: NCTM.

Pólya, G. (1995). *A Arte de Resolver Problemas: Um novo aspecto do método matemático.* Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P. (1992). Problemas de matemática e situações da vida real. *Revista de educação, 2*(2)*,* 95-107.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Posamentier, A. S., & Krulik, S. (1998). *Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions: A resource for the mathematics teacher.* Thousand Oaks, Califórnia: Corwin Press, Inc.

Santos, L., & Semana, S. (2014). Developing mathematics written communication through expository writing supported by assessment strategies.*Educational Studies in Mathematics, 8*(1), 65-87*.*

Schoenfeld, A. H. (1991). What's all the fuss about problem soliving?.*Zentrallblatt fur didaktik der mathematic, 91*(1), 4-8*.*

Serrazina, L. (n.d.). *Resolução de problemas.* Disponível em: http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/COORDENADORES/Materiais%20Coordenad/Textos/Problemas_texto_Coord.pdf.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Sternberg, R. J. (1998). *In search of the human mind*. Orlando, Flórida: Harcout Brace & Company.

Superfine, A. C. (2008). Planning for Mathematics Instruction: A Model of Experienced Teacher's Planning Processes in the Context of a Reform Mathematics Curriculum. *The Mathematics Educator, 18*(2), 11-22.

Tambychik, T., & Meerah, T. S. M. (2010). Students' Difficulties in Mathematics Problem-Solving: What do they Say?. *Procedia Social and Behavioral Sciences 8 (2010),* 142-151.

Tao, T. (2008). *Como Resolver Problemas Matemáticos – Uma Perspetiva Pessoal.* Lisboa: Texto Editores.

Viana, J. P. (2005). O problema deste número: Ai, tantos testes para corrigir. Educação e Matemática, 84, 41.

Viana, J. P. (2012). *Uma Vida Sem Problemas – A Matemática nos Desafios do Dia a Dia*. Lisboa: Clube do Autor.

Vianna, C. R. (2002). Resolução de Problemas. *Temas em Educação I, o livro das Jornadas de 2002,* 401-410.

Wagner, E. (2012). *10 matemáticos, 100 problemas.* Lisboa: Gradiva.

Wheatley, C. L., & Wheatley, G., H. (1984). Problem Solving in the Primary Grades. *The Arithmetic Teacher, 31*(8), 22-25.

APÊNDICES

APÊNDICE 1

Lista dos problemas propostos nas aulas

Toldos de Praia

Numa praia, um banheiro tem de colocar 20 toldos em fila. O armazém está a dez metros do local onde o primeiro toldo tem de ser colocado, alinhado com a fila de toldos. Imagine que o banheiro só transporta um toldo de cada vez e que os toldos estão distanciados entre si cinco metros. Quantos metros percorrerá o banheiro para colocar todos os toldos?

O número da Rita

A Rita pensou num número com cinco algarismos, com as seguintes condições:

- Os algarismos estão colocados seguindo uma progressão aritmética;
- A soma dos algarismos é igual a 20;
- O primeiro algarismo é o dobro do terceiro.

Em que número pensou a Rita?

O salário do Henrique

O Henrique tem um salário de 950€ mensais e, em cada ano, recebe um aumento de 50€ mensais. Quanto dinheiro ganhará o Henrique durante os próximos 10 anos?

A empresa do Sr. Ernesto

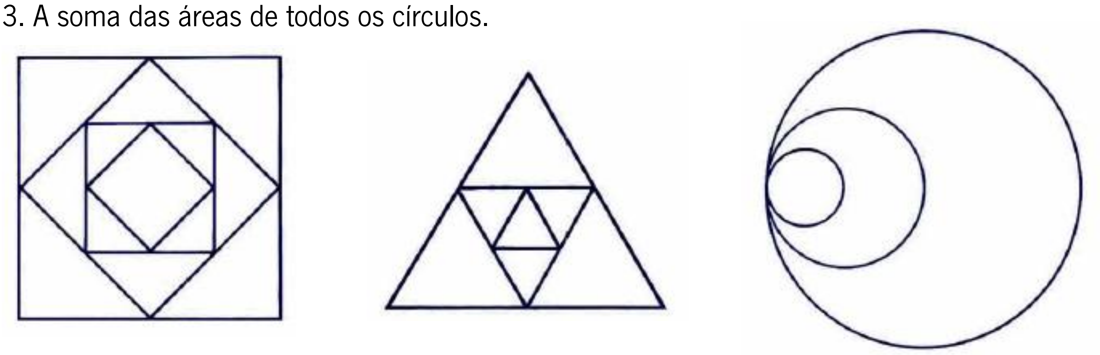
O Sr. Ernesto tem uma empresa que produz componentes para tratores agrícolas. A empresa produziu, no ano 2000, 5000 componentes. A partir desse ano, houve um aumento anual de 12% na produção.

1. Quantas componentes foram produzidas em 2010?
2. Qual será o número total de componentes produzidas pela fábrica até ao ano 2012 (inclusive)?

Problema sem falta de memória

Em cada uma das sequências de figuras, a lei de formação vai repetir-se indefinidamente, obtendo-se, em cada caso, figuras cada vez mais pequenas. Calcula:

1. A soma das áreas de todos os quadrados.
2. A soma das áreas de todos os triângulos.
3. A soma das áreas de todos os círculos.



O número da minha casa

Se o número da minha casa for múltiplo de 3, então está entre 50 e 59, inclusive.
Se o número da minha casa não for um múltiplo de 4, então está entre 60 e 69, inclusive.
Se o número da minha casa não for um múltiplo de 6, então está entre 70 e 79, inclusive.
Qual é o número da minha casa?

Ai, tantos testes para corrigir!

Um professor tinha uma enorme pilha de testes para corrigir. Na 2.ª feira, cheio de energia, despachou metade dos testes. Na 3.ª feira já só viu um terço dos que tinham sobrado. Na 4.ª feira corrigiu apenas um quarto dos que faltavam. Na 5.ª feira, já saturado, viu um quinto dos que tinha para ver. Na 6.ª feira, verificando que lhe faltavam menos de duas dúzias, resolveu acabar com o suplício e corrigiu tudo. Quantos testes tinha o professor?

Miss Simpatia

No baile de finalistas da escola realizou-se a eleição para Miss Simpatia.
As pessoas votaram em três candidatas, pela ordem que as preferiam.
A vencedora foi a Inês com 113 pontos, correspondentes a 10 primeiros lugares, 15 segundos e 8 terceiros.
Em cada voto, quantos pontos valia o primeiro lugar? E o segundo? E o terceiro?

Cortes na pizza
Numa pizzaria, um grupo de amigos fez o seguinte pedido:

"Queremos uma pizza circular, com apenas 8 cortes e o máximo de fatias possível."

1. Assumindo que as fatias podem ter diferentes tamanhos e que os cortes têm de ser efetuados em linha reta, quantas fatias se pode obter para satisfazer o pedido do grupo?

2. E se o grupo tivesse pedido a pizza com n cortes? Qual seria o número máximo de fatias?

Nota bibliográfica sobre os problemas:

Toldos de praia
Adaptado de Teixeira, J. H. M. (2013). *A resolução de problemas: uma experiência com alunos de uma turma de 11.º de MACS*. Relatório de Estágio do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário. Braga: Universidade do Minho.

O número da Rita e ***O salário do Henrique***
Adaptados de Matesfacil (n.d.). *Progresiones o sucesiones*. Consultado em setembro 15, 2018 em: https://www.matesfacil.com/ESO/progresiones/ejercicios-resueltos-sucesiones.html.

A empresa do Sr. Ernesto
Retirado de Costa, A., Trocado, A., Teixeira, H., Oliveira L., Santos, J. M. & Sales, M. J. (2014). *iMat12 – Matemática A – Ensino Secundário*. Portugal: Edição de Autor.

Problema sem falta de memória
Retirado de Loureiro, C. (1989). Exercícios e problemas sem falta de memória. *Educação e Matemática, 8,* 31.

O número da minha casa
Retirado de Viana, J. P. (2001). O problema deste número: O número da minha casa. *Educação e Matemática, 65,* 39.

Ai, tantos testes para corrigir!
Retirado de Viana, J. P. (2005). O problema deste número: Ai, tantos testes para corrigir. *Educação e Matemática, 84,* 41.

Miss Simpatia
Retirado de Viana, J. P. (2001). O problema deste número: Miss Simpatia. *Educação e Matemática, 64,* 30.

Cortes na pizza
Adaptado de Oliveira, H., Canavarro, A. P., & Menezes, L. (2013). Cortes na piza (ensino secundário) – caso multimédia. In Site do Projeto P3M, Práticas Profissionais de Professores de Matemática. Disponível em http://p3m.ie.ul.pt/caso-4-cortes-na-piza-ensino-secundario.

ANEXOS

ANEXO 1

Tarefa Especial

Problema 1: ***Três lógicos e oito discos***

Encontrei três matemáticos brilhantes, capazes dos melhores raciocínios lógicos.

Mostrei-lhes oito discos: quatro vermelhos e quatro pretos. Depois, coloquei dois discos nas costas de cada um e escondi os dois que sobraram. Cada matemático podia ver os discos dos outros, mas, claro, não conseguia ver os seus.

A seguir, fui-lhes perguntando sucessivamente se sabiam que discos tinham nas costas. Cada um, depois de ouvir as respostas anteriores e de pensar um pouco, foi respondendo:

Augusto – *Não.*

Beatriz – *Não.*

Carlos – *Não.*

Augusto – *Não.*

Beatriz – *Sim.*

Como é que a Beatriz descobriu e que discos tem ela?

Problema 2: ***Os cartões da Teresa e do António***

A Teresa e o António têm, cada um, um cartão em que estão escritas seis frases relativas à verdade ou falsidade de outras frases do mesmo cartão.

Quais são as frases verdadeiras no cartão da Teresa?

No cartão do António caiu um borrão de tinta que tapou parte da sexta frase. O que estava lá escrito?

TERESA

Neste cartão:

1. A frase 2 é falsa.
2. A frase 3 é falsa.
3. A frase 4 é falsa.
4. A frase 5 é falsa.
5. A frase 6 é falsa.
6. As frases 1 e 2 são falsas.

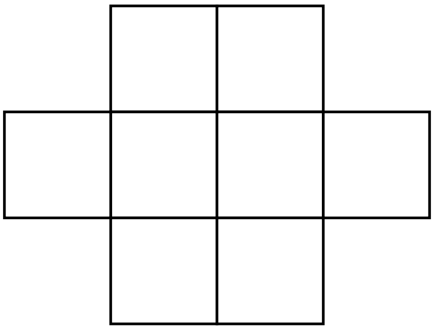
ANTÓNIO

Neste cartão:

1. A frase 2 é falsa.
2. A frase 3 é verdadeira.
3. A frase 4 é falsa.
4. Esta frase e a frase 5 são ambas falsas.
5. A frase 6 é falsa.
6. A frase 1 é 

Problema 3: ***Vizinhanças incompatíveis***

Colocar os números de 1 a 8, um em cada casa, de tal modo que números consecutivos não se toquem nem sequer por um vértice.



Problema 4: ***Soma para 2009***

Descobre as parcelas desta soma, em que cada letra corresponde a um só algarismo e vice-versa. Além disso, nenhum número começa por 0.

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ & D & E & F \\ + & G & H & I \\ \hline 2 & 0 & 0 & 9 \end{array}$$

Problema 5: ***Triângulos* quase *iguais***

Se dois triângulos são geometricamente iguais, então têm obrigatoriamente seis elementos iguais: os três lados de um são iguais aos três lados do outro, e o mesmo acontece com os três ângulos.

A Ana Rita afirmou:

- Desenhei dois triângulos diferentes, embora tenham cinco elementos iguais.

Será possível?

Problema 6: ***Números incríveis***

A Graça diz que arranjou dois números tais que: se os somar, se os multiplicar ou se dividir um pelo outro, os resultados são sempre iguais.

Quais são esses números?

Problema 7: ***No regresso às aulas***

Pendurado na parede principal do pavilhão de entrada da escola estava este cartaz. Como completar os quatro espaços em branco com números (escritos na sua forma decimal) de modo que todas as afirmações sejam verdadeiras?

15 de Setembro
ANO LETIVO DE 2011-2012
Neste cartaz existem
______ números pares
______ números ímpares
______ algarismos pares
______ algarismos ímpares

Problema 8: ***Um quadro autorreferente***

Completa os espaços em branco com números escritos na forma decimal de modo a que todas as frases deste quadro sejam verdadeiras.

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 0
Neste quadro
Há ______ múltiplos de 2
Há ______ múltiplos de 3
Há ______ múltiplos de 4
Há ______ múltiplos de 5

Problema 9: ***As idades dos meninos***

– A soma das idades dos meus filhos é 14 – disse-me aquela mãe, orgulhosa. – E o produto é precisamente o número que tenho estampado aqui na camisola. Como gostas de resolver problemas, vê lá se consegues descobrir quantos anos tem cada um.

Olhei para a camisola e fiz uns cálculos.

– Só assim não chego lá.

– Pois então digo-te que o do meio ficou hoje em casa porque está com gripe.

– Ah, então já sei!

Quais são as idades dos três rapazes?

Problema 10: *Seis caixas do mesmo tamanho*

A Marisa tem seis caixas do mesmo tamanho, etiquetadas de A a F, cujos pesos, não obrigatoriamente pela mesma ordem, são 1, 2, 3, 4, 5 e 6 quilos.

Usando uma balança de pratos, verificou que:

- As caixas A, B e C pesam tanto como as D e E;

- As caixas A, E e F têm o mesmo peso que as D e B;

- A caixa B é mais pesada do que as C e D juntas.

Qual é o peso de cada caixa?

Nota bibliográfica sobre os problemas:

Problema 1: *Três lógicos e oito discos* e **Problema 9: *As idades dos meninos***
Retirado de Viana, J. P. (2012). Problemas «impossíveis». In Viana, J. P., *Uma Vida Sem Problemas – A Matemática nos desafios do dia a dia* (pp. 127-133). Lisboa: Clube do autor.

Problema 2: *Os cartões da Teresa e do António*
Retirado de Viana, J. P. (2012). Os cartões da Teresa e do António. In Viana, J. P., *Uma Vida Sem Problemas – A Matemática nos desafios do dia a dia* (p. 193). Lisboa: Clube do autor.

Problema 3: *Vizinhanças incompatíveis* e **Problema 4: *Soma para 2009***
Retirado de Viana, J. P. (2012). Cinco problemas simples. In Viana, J. P., *Uma Vida Sem Problemas – A Matemática nos desafios do dia a dia* (pp. 93-105). Lisboa: Clube do autor.

Problema 5: *Triângulos* quase *iguais*
Retirado de Viana, J. P. (2012). Cinco problemas simples. In Viana, J. P., *Uma Vida Sem Problemas – A Matemática nos desafios do dia a dia* (pp. 107-112). Lisboa: Clube do autor.

Problema 6: *Números incríveis*
Retirado de Viana, J. P. (2012). Números incríveis. In Viana, J. P., *Uma Vida Sem Problemas – A Matemática nos desafios do dia a dia* (p. 200). Lisboa: Clube do autor.

Problema 7: *No regresso às aulas* e **Problema 8: *Números incríveis***
Retirado de Viana, J. P. (2012). Problemas autorreferentes. In Viana, J. P., *Uma Vida Sem Problemas – A Matemática nos desafios do dia a dia* (pp. 103-126). Lisboa: Clube do autor.

Problema 10: *Seis caixas do mesmo tamanho*
Retirado de Viana, J. P. (2012). Seis caixas do mesmo tamanho. In Viana, J. P., *Uma Vida Sem Problemas – A Matemática nos desafios do dia a dia* (p. 170). Lisboa: Clube do autor.

ANEXO 2

Ficha de Diagnóstico

Ficha de Diagnóstico

Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias — Ano letivo 2017/2018

Disciplina: Matemática A — Turma: 11ºCT4

Duração: 45 minutos

Nome: ____ N.º: _______

Na resolução de cada um dos seguintes problemas, apresenta todos os cálculos ou esquemas que necessites para justificar devidamente o teu raciocínio.

1. Um sapo está no fundo de um poço com 10 metros de profundidade. Durante o dia, o sapo sobe 4 metros através da parede do poço, mas, durante a noite, e enquanto dorme, escorrega e desce 2 metros. Desta forma, quantos dias levará o sapo a atingir o cimo do poço?

2. Num teste laboratorial, são feitas contagens do número de bactérias, em milhares, de uma colónia A; na n-ésima contagem após o início da experiência, esse número é dado, por:

$$A_n = \frac{20}{n+1}$$

2.1. Determina, em percentagem e arredondado às unidades, a redução do número de bactérias da colónia A da 1ª para a 2ª contagem.

2.2. Se o teste laboratorial se prolongasse por tempo indefinido, e admitindo que a expressão para A_n continuava válida, o que aconteceria à população dessa colónia?

2.3. Certo dia, começaram a fazer contagens do número de bactérias de uma outra colónia, B. A quantidade de bactérias, em milhares, obtida na contagem número x, é dada por $f(x) = \frac{20x-5}{x}$. Há algum momento em que a contagem é igual a 17 700 bactérias?

3. Estávamos oito pessoas na sala. O Gilberto cumprimentou toda a gente. A Isabel cumprimentou seis pessoas e a Beta cinco. A Gui cumprimentou quatro e o Manuel três. O Rogério cumprimentou duas pessoas e a Alcina, apenas uma. Quem é que eu cumprimentei, assumindo que todos os cumprimentos foram com apertos de mão?[6]

[6] Inicialmente, este problema foi proposto aos alunos sem a última suposição. Como tal causou discussão relativamente ao facto de o cumprimento ser uma ação recíproca entre duas pessoas, ou não, surge a necessidade de especificar um tipo de cumprimento.

Nota bibliográfica sobre as tarefas:

Tarefa 1.

Retirada de Lester, F. (1993). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In D. Fernandes, A. Borralho & G. Amaro (Eds), Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular (pp. 13-34). Lisboa: IEE.

Tarefa 2.

Adaptada do Manual Novo Espaço – Matemática A, 11.º ano, Parte 2, Porto Editora, 2016, p. 89.

Tarefa 3.

Adaptada de Viana, J. P. (2012). Cinco problemas simples. In Viana, J. P., *Uma Vida Sem Problemas – A Matemática nos desafios do dia a dia* (p. 96). Lisboa: Clube do autor.

ANEXO 3

Ficha de Final

Ficha Final

Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias	Ano letivo 2017/2018
Disciplina: Matemática A	Turma: 11°CT4

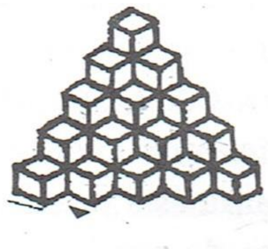
Duração: 45 minutos

Nome: ____ N.º: _______

Na resolução de cada um dos seguintes problemas, apresenta todos os cálculos ou esquemas que necessites para justificar devidamente o teu raciocínio.

1. Num lago, há um campo de nenúfares. Todos os dias o campo duplica de tamanho. Se são precisos 48 dias para que o campo cubra o lago todo, quanto tempo demoraria para o campo cobrir metade do lago?

2. Esta torre de 5 "andares" é formada por 35 cubos. Quantos cubos serão necessários para construir uma torre semelhante de 10 andares?



3. Num determinado dia, um grupo de amigos decidiu formar uma associação desportiva. Durante o primeiro mês, eles foram fazendo várias contagens para perceberem quantos sócios tinha a associação. Admite que, na c-ésima contagem após a constituição da associação, o número de sócios, N, é dado por:

$$N(c) = 20(1+c)^2$$

Ao fim de quantas contagens se ultrapassou 360 sócios?

Se, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, três casas decimais.

4. Temos duas velas, uma de 18 centímetros de altura e outra de 11. A mais alta arde 1,5 centímetros por hora. A menor arde 1 centímetro no mesmo intervalo de tempo. Acendemos as duas em simultâneo. Daqui a quanto tempo as duas velas ficam do mesmo tamanho?

Nota bibliográfica sobre os problemas:

Tarefa 1.

Retirado de Ferreira, M. L. (2016, fevereiro 22). Teste: 83% das pessoas não consegue responder a estas perguntas. *Observador.* Consultado em setembro 15, 2018 em: https://observador.pt/2016/02/22/teste-83-das-pessoas-nao-consegue-responder-estas-perguntas/.

Tarefa 2.

Retirado de Vale, I. (1980). Desempenhos e Concepções de Futuros Professores de Matemática na Resolução de Problemas. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho & I. Vale (Orgs.), *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos Contextos e Perspetivas* (pp. 1-37). Aveiro: Grupo de Investigação em Resolução de Problemas.

Tarefa 3.

Adaptado de Teixeira, J. H. M. (2013). *A resolução de problemas: uma experiência com alunos de uma turma de 11.º de MACS*. Relatório de Estágio do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário. Braga: Universidade do Minho.

Tarefa 4.

Retirado de Viana, J. P. (2012). Uma simples questão de velas. In Viana, J. P., *Uma Vida Sem Problemas – A Matemática nos desafios do dia a dia* (p. 178). Lisboa: Clube do autor.

ANEXO 4

Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Logótipo da escola onde foi realizada a intervenção pedagógica

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Exmº Senhor(a) Encarregado(a) de Educação,

Eu, Letícia Martins, Professora Estagiária de Matemática na escola frequentada pelo seu educando, no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade do Minho, pretendo desenvolver uma investigação em Educação Matemática, intitulada ***A resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem numa turma do 11.º ano de Ciências e Tecnologias***. Com esta experiência de ensino pretende-se atingir os seguintes objetivos:

1. Identificar as estratégias de resolução de problemas que os alunos utilizam;
2. Reconhecer as dificuldades reveladas pelos alunos durante a resolução de problemas;
3. Caracterizar a comunicação escrita dos alunos na apresentação das resoluções de problemas;
4. Avaliar a evolução dos alunos ao longo do projeto.

Para realizar esta investigação, há a necessidade de efetuar uma recolha de dados que, no meu estudo, pretendo que seja feita com recurso a **gravações de áudio e vídeo**, para facilitar a posterior análise dos dados recolhidos. Para esse fim, venho, desta forma, solicitar a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio e vídeo das aulas de Matemática A em que decorrerá a intervenção pedagógica.

Salvaguardo, desde já, que serei a única pessoa com acesso a esses dados, comprometendo-me a usar os mesmos apenas para fins académicos. Além disso, a identidade de qualquer aluno será sempre preservada, já que nunca serão referidos os nomes dos alunos nem será identificada a escola no trabalho a realizar.

Grata pela atenção,
Com os melhores cumprimentos,

_________________, ___ de fevereiro de 2018

A Professora Estagiária,

____

(Letícia Gabriela Baptista Martins)

Eu, ____,

encarregado(a) de educação do(a) aluno(a) ________________________________,

da turma _______, autorizo/não autorizo a gravação de áudio e autorizo/não autorizo a gravação de vídeo das aulas de Matemática A inseridas na intervenção pedagógica.

_________________, ___ de fevereiro de 2018

ANEXO 5

Questionário

Questionário – Resolução de Problemas

Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias — Ano letivo 2017/2018
Disciplina: Matemática A — Turma: 11°CT4

Este questionário tem como objetivo perceber a tua opinião sobre alguns pontos gerais das aulas lecionadas pela professora estagiária Letícia Martins e também a tua posição sobre a resolução de problemas. Este questionário é confidencial, tal como todos os dados recolhidos durante as aulas, sendo utilizado apenas para fins de carácter investigativo.
Pede-se que as respostas sejam dadas do modo mais sincero possível. Não há respostas erradas.
Muito obrigada pela tua colaboração.

I – Dados pessoais

Nome: ______________________________

Idade (em anos): _______

Quais são as tuas perspetivas profissionais? ______________________________

Quantas horas estudas, em média, semanalmente, para a disciplina de Matemática A?

Não estudo ☐	Menos de 1 hora ☐	1 a 2 horas ☐
2 a 3 horas ☐	3 a 4 horas ☐	Mais de 4 horas ☐

II – Apreciação global

Escreve algum comentário ou opinião que diga respeito:

- Ao modo como os tópicos foram trabalhados.

____
____
____

- Ao ambiente criado nas aulas.

____
____
____

- Ao que mais gostaste nas aulas.

____
____
____

- Ao que menos gostaste nas aulas.

____

____

____

Nas afirmações seguintes, assinala com X no quadrado que se adequa à tua opinião, considerando a seguinte escala:
DT – Discordo Totalmente; D – Discordo; I – Indiferente; C – Concordo; CT – Concordo Totalmente

	DT	D	I	C	CT
Gosto de matemática.	☐	☐	☐	☐	☐
Tenho uma atitude otimista quando resolvo problemas.	☐	☐	☐	☐	☐
Quando não sei a resposta, tento adivinhá-la.	☐	☐	☐	☐	☐
Procuro terminar as tarefas que inicio.	☐	☐	☐	☐	☐
Desisto facilmente quando sinto dificuldades.	☐	☐	☐	☐	☐
Preocupo-me com a exatidão.	☐	☐	☐	☐	☐
Quando não estou confiante na resposta, prefiro não apresentar qualquer raciocínio.	☐	☐	☐	☐	☐

Gosto de momentos nas aulas em que:	DT	D	I	C	CT
O professor expõe a matéria.	☐	☐	☐	☐	☐
O professor propõe a resolução de exercícios.	☐	☐	☐	☐	☐
O professor nos estimula a descobrir a matéria.	☐	☐	☐	☐	☐
Realizo trabalho individual.	☐	☐	☐	☐	☐
Realizo trabalho em grupo.	☐	☐	☐	☐	☐
Demonstro as fórmulas que aprendo.	☐	☐	☐	☐	☐
Percebo a utilidade da matemática.	☐	☐	☐	☐	☐
Resolvo problemas.	☐	☐	☐	☐	☐
Explico aquilo que faço.	☐	☐	☐	☐	☐
Ouço algum colega a partilhar uma resolução.	☐	☐	☐	☐	☐
Troco ideias com os colegas.	☐	☐	☐	☐	☐

Outro: ____

III – Resolução de problemas

Nas afirmações seguintes, assinala com X no quadrado que se adequa à tua opinião, considerando a seguinte escala:
DT – Discordo Totalmente; D – Discordo; I – Indiferente; C – Concordo; CT – Concordo Totalmente

Um problema matemático é:	DT	D	I	C	CT
Uma tarefa de dificuldade elevada.	☐	☐	☐	☐	☐
Uma tarefa desafiante.	☐	☐	☐	☐	☐
Uma situação que pretendemos resolver sem saber qual o método de resolução.	☐	☐	☐	☐	☐
Um enunciado formulado para introduzir matéria nova.	☐	☐	☐	☐	☐
Um enunciado formulado para consolidar a matéria dada.	☐	☐	☐	☐	☐
Uma tarefa com um objetivo bem definido.	☐	☐	☐	☐	☐

Outro: ____

Na resolução de problemas matemáticos sinto:	DT	D	I	C	CT
Falta de motivação.	☐	☐	☐	☐	☐
Satisfação pelo desenvolvimento do raciocínio.	☐	☐	☐	☐	☐
Que aplico conhecimentos das minhas experiências pessoais	☐	☐	☐	☐	☐
Gosto pelo desafio.	☐	☐	☐	☐	☐
Ansiedade.	☐	☐	☐	☐	☐
Necessidade de algum silêncio para pensar no problema.	☐	☐	☐	☐	☐
Vontade de desistir quando não percebo de imediato o caminho a seguir.	☐	☐	☐	☐	☐
Vontade de desistir quando a minha primeira estratégia não resulta.	☐	☐	☐	☐	☐

Outro: ____

Quando resolvo problemas procuro:	DT	D	I	C	CT
Ler várias vezes o enunciado até perceber o que é pedido.	☐	☐	☐	☐	☐
Registar os dados que parecem importantes.	☐	☐	☐	☐	☐
Começar por resolver as partes do problema que me parecem mais fáceis.	☐	☐	☐	☐	☐
Voltar atrás sempre que me ocorrem dúvidas.	☐	☐	☐	☐	☐
Resolver tudo seguido.	☐	☐	☐	☐	☐
Verificar a resposta no final.	☐	☐	☐	☐	☐
Analisar se as respostas se adequam ao problema/realidade.	☐	☐	☐	☐	☐
Associar a outros problemas que já resolvi anteriormente.	☐	☐	☐	☐	☐

Outro: ____

Quando resolvo problemas sinto dificuldades:	DT	D	I	C	CT
Na interpretação do enunciado.	☐	☐	☐	☐	☐
Na recolha dos dados.	☐	☐	☐	☐	☐
Na organização dos dados.	☐	☐	☐	☐	☐
No estabelecimento de uma estratégia.	☐	☐	☐	☐	☐
Na execução da estratégia.	☐	☐	☐	☐	☐
Na explicação do processo de resolução.	☐	☐	☐	☐	☐
Na interpretação/justificação dos resultados.	☐	☐	☐	☐	☐
Na escrita das conclusões.	☐	☐	☐	☐	☐
No modo de iniciar a resolução do problema.	☐	☐	☐	☐	☐
Na compreensão do que é pedido.	☐	☐	☐	☐	☐

Outro: ____

As minhas dificuldades devem-se a:	DT	D	I	C	CT
Poucas experiências em resolução de problemas.	☐	☐	☐	☐	☐
Falta de bases a matemática.	☐	☐	☐	☐	☐
Falta de concentração.	☐	☐	☐	☐	☐
Falta de interesse pela disciplina de matemática.	☐	☐	☐	☐	☐
Falta de confiança nas minhas capacidades.	☐	☐	☐	☐	☐

Outro: ____

A resolução de problemas matemáticos é importante para:	DT	D	I	C	CT
O meu dia a dia.	☐	☐	☐	☐	☐
Desenvolver o raciocínio lógico.	☐	☐	☐	☐	☐
Aceder ao ensino superior.	☐	☐	☐	☐	☐
Desenvolver o gosto pela matemática.	☐	☐	☐	☐	☐
Desenvolver a comunicação escrita.	☐	☐	☐	☐	☐
Desenvolver a comunicação oral.	☐	☐	☐	☐	☐
Desenvolver a capacidade de discutir ideias.	☐	☐	☐	☐	☐
Desenvolver a capacidade de defender ideias.	☐	☐	☐	☐	☐

Outro: ____

Nas afirmações seguintes, assinala com X no quadrado que se adequa à tua opinião, considerando a seguinte escala de 1 a 5:
1 – Nunca; 2 – Raramente; 3 – Às vezes; 4 – Frequentemente; 5 – Sempre

Na resolução de problemas uso:	1	2	3	4	5
Tentativa e erro.	☐	☐	☐	☐	☐
Procura de um padrão.	☐	☐	☐	☐	☐
Resolução por partes.	☐	☐	☐	☐	☐
Eliminação.	☐	☐	☐	☐	☐
Dedução.	☐	☐	☐	☐	☐
Generalização.	☐	☐	☐	☐	☐
Resolução do fim para o início.	☐	☐	☐	☐	☐
Construção de esquemas/figuras.	☐	☐	☐	☐	☐
Construção de tabelas.	☐	☐	☐	☐	☐
Aplicação de fórmulas.	☐	☐	☐	☐	☐
Construção de um modelo.	☐	☐	☐	☐	☐

Outro: ____

Sentes que evoluíste de alguma forma no modo como resolves problemas? Porquê?

Gostarias de deixar algum comentário, sugestão ou opinião? Podes fazê-lo no espaço seguinte.