Universidade do Minho
Instituto de Educação

Cláudia Catarina Oliveira Ferreira

Abordagens analítica e gráfica na resolução de equações e inequações fracionárias por alunos de 11.º ano

outubro de 2018

Abordagens analítica e gráfica na resolução de equações e inequações fracionárias por alunos de 11.º ano
Cláudia Catarina Oliveira Ferreira
UMinho|2018

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Cláudia Catarina Oliveira Ferreira

Abordagens analítica e gráfica na resolução de equações e inequações fracionárias por alunos de 11.º ano

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho efetuado sob a orientação do
Doutor José António Fernandes

outubro de 2018

DECLARAÇÃO

Nome: Cláudia Catarina Oliveira Ferreira

Endereço Eletrónico: focclaudia@gmail.com

Telemóvel: 92288146

Número do Bilhete de Identidade: 13095948

Título do Relatório:

Abordagens analítica e gráfica na resolução de equações e inequações fracionárias por alunos de 11.º ano

Supervisor:

Doutor José António Fernandes

Ano de conclusão: 2018

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Universidade do Minho ___/___/___

Assinatura:____

AGRADECIMENTOS

Neste relatório quero deixar expresso o meu profundo agradecimento ao meu supervisor de estágio Professor Doutor José António Fernandes por toda a orientação, apoio, disponibilidade, persistência e empenho durante o estágio profissional e na realização deste relatório.

À professora Margarida, orientadora cooperante do estágio agradeço a dedicação e amizade ao longo deste ano. Agradeço também às minha colegas de estágio, Paula e Joana pela amizade e entreajuda.

À escola na qual fiz o estágio e seus professores, funcionários e queridos alunos agradeço o acolhimento e colaboração ao longo de um ano de trabalho.

Aos meus amigos Rita, Susana e Flávio por não me deixarem desistir dos meus objetivos.

Por último e não menos importante um especial obrigado aos meus pais e irmão por estarem sempre presentes.

ABORDAGENS ANALÍTICA E GRÁFICA NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES FRACIONÁRIAS POR ALUNOS DE 11º ANO

Cláudia Catarina Oliveira Ferreira
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário
Universidade do Minho, 2018

RESUMO

No âmbito do Estágio Profissional do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário foi desenvolvido um projeto em que pretendia estudar as abordagens analítica e gráfica na resolução de equações e inequações fracionárias por alunos de 11.º ano.

Esta investigação estruturou-se a partir dos três seguintes objetivos: (1) estabelecer uma abordagem analítica e gráfica para o ensino de equações e inequações fracionárias; (2) estudar as dificuldades dos alunos na resolução de equações fracionárias através das abordagens analítica e gráfica; (3) avaliar a aprendizagem dos alunos na resolução de equações e inequações fracionárias. Tendo em vista atingir os objetivos propostos, foi realizado um teste diagnóstico, implementada uma intervenção pedagógica, tendo sido feitas gravações em áudio e vídeo das aulas e fotocopiados os cadernos dos alunos, e, finalmente, avaliaram-se as aprendizagens dos alunos através da realização de uma questão-aula e algumas questões incluídas num teste sumativo.

Em termos de resultados, no teste diagnóstico observaram-se muitas lacunas nas aprendizagens dos alunos em anos anteriores, verificando-se dificuldades em isolar a incógnita numa equação ou inequação, cometiam muitos erros de contas e não assinalavam todas as soluções. Em relação à resolução gráfica de equações e inequações, os alunos não sabiam como usar as capacidades gráficas da calculadora.

Durante a intervenção pedagógica, uma das maiores dificuldades sentidas pelos alunos foi a visualização gráfica das funções e também saber usar corretamente as potencialidades da calculadora gráfica. Após a intervenção pedagógica, notaram-se algumas melhorias, embora alguns alunos ainda continuassem a cometer os mesmos tipos de erros. Em geral, os alunos desenvolveram as capacidades de resolução gráfica de equações e inequações fracionárias, perspetivando-a como uma abordagem complementar à abordagem analítica e tendo sempre em conta as limitações da calculadora gráfica.

Palavras-chave: equações fracionárias; inequações fracionárias; resolução gráfica; resolução analítica; 11.º ano.

APPROCHES ANALYTIQUES ET GRAPHIQUES DANS LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ET INÉGALITÉS FRACTIONNAIRES PAR DES ÉLÈVES DE LA 11E ANNÉE

Cláudia Catarina Oliveira Ferreira
Maitrise en Enseignement de Mathématique 3.º cycle de l'Enseignement base et Enseignement Secondaire
Universidade do Minho, 2018

RÉSUMÉ

Dans le cadre du stage professionnel du Master en enseignement des mathématiques du 3ème cycle de l'enseignement de base et de l'enseignement secondaire, un projet a été développé dans le but d'étudier des approches analytiques et graphiques dans la résolution d'équations et d'inégalités fractionnaires par des étudiants de 11ème année. .

Cette recherche était structurée à partir des trois objectifs suivants: (1) établir une approche analytique et graphique pour l'enseignement des équations et des inégalités fractionnaires; (2) étudier les difficultés des élèves à résoudre des équations fractionnaires par des approches analytiques et graphiques; (3) évaluer l'apprentissage des élèves en résolvant des équations fractionnaires et des inégalités. Afin d'atteindre les objectifs proposés, un test de diagnostic a été réalisé, une intervention pédagogique, des enregistrements audio et vidéo des cours et photocopiés des cahiers des élèves, et enfin un petit test et quelques questions incluses dans un test sommatif.

En termes de résultats, dans le test de diagnostic, il existait de nombreuses lacunes dans l'apprentissage des élèves des années précédentes. Des difficultés ont été rencontrées pour isoler la variable dans une équation ou une inégalité, ils ont commis de nombreuses erreurs de comptes et n'ont pas indiqué toutes les solutions. En ce qui concerne la résolution graphique des équations et des inégalités, les étudiants ne savaient pas utiliser les fonctionnalités graphiques de la calculatrice.

Lors de l'intervention pédagogique, l'une des plus grandes difficultés rencontrées par les étudiants a été de visualiser graphiquement les fonctions et de savoir utiliser correctement les fonctionnalités de la calculatrice graphique. Après l'intervention pédagogique, certaines améliorations ont été constatées, bien que certains élèves aient continué à commettre les mêmes types d'erreurs. En général, les étudiants ont développé les capacités de résolution graphique d'équations et d'inégalités fractionnaires, en la considérant comme une approche complémentaire de l'approche analytique et en prenant toujours en compte les limites de la calculatrice graphique.

Mots-clés: équations fractionnaires; inégalités fractionnaires; résolution graphique; résolution analytique; 11ème année.

ÍNDICE

Conteúdo

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo introdutório, está discriminado o âmbito deste relatório de estágio, qual a sua finalidade, o contexto onde se insere, a pertinência e as suas limitações, assim como uma breve descrição da sua estrutura.

1.1. Tema e objetivos

A temática escolhida para o presente Projeto de Intervenção Pedagógica centra-se no estudo de equações e inequações fracionárias, do tema Funções do 11° ano de escolaridade, através das abordagens analítica e gráfica.

O estudo da temática equações e inequações fracionárias, de acordo com a planificação da área de Matemática da Escola, desenvolve-se ao longo de 6 aulas de 90 minutos, tendo em conta as aprendizagens prévias seguintes: resolução de equações e inequações lineares e resolução de equações do 2.° grau, conteúdos estudados ao longo do 3.° ciclo do ensino básico. Assim, de novo no 11° ano trata-se, fundamentalmente, de aplicar esses conhecimentos, combinando-os, à resolução de equações e inequações do 1.° grau e de grau superior.

Em termos das abordagens para o seu estudo, para além da abordagem analítica, num mundo cada vez mais informatizado, é importante os alunos recorrerem também a uma abordagem gráfica. Estas duas abordagens devem assumir-se como complementares no estudo dos conteúdos matemáticos pois as limitações de uma delas podem ser ultrapassadas com recurso à outra.

Cada vez mais os alunos nos perguntam para que serve a matemática que aprendem na escola. Com o recurso às tecnologias podemos, portanto, tentar mostrar aos alunos o quão importante é esta disciplina no seu futuro. Com recurso a estas tecnologias torna-se mais exequível resolver problemas mais realistas (Fernandes & Vaz, 1998), uma vez que a resolução analítica, em geral, é mais trabalhosa ou até mesmo impossível nesse tipo de problemas. Em consequência, estes problemas mais realistas permitirão, certamente, aos alunos perceberem a aplicação e a utilidade da matemática no seu cotidiano. Esta perspetiva é salientada por Berry e Francis (1996), que simultaneamente problematizam a avaliação face ao uso da tecnologia, afirmando que "o uso da tecnologia como ferramenta para resolver problemas vai permitir resolver problemas mais realistas e o uso da tecnologia nos exames vai levar-nos a pensar sobre o que realmente estamos tentando avaliar" (p. 12).

Um dos principais objetivos da escola é preparar os seus alunos para os seus futuros empregos. Vivemos cada vez mais numa sociedade de competências, em que as tecnologias estão em constante desenvolvimento e em que cada vez mais tudo é feito a nível computacional, donde é necessário ensinar os alunos a usar corretamente essas tecnologias. Em contrapartida temos de ter presente que as tecnologias ainda não evoluíram ao ponto de resolver todo o tipo de problemas, cabendo-nos a nós ler o problema e encontrar qual a melhor forma de o resolver. Nas palavras de Scott (1996), "ainda não existe uma calculadora ou computador que leia um problema e estabeleça automaticamente a respetiva equação" (p. 184).

Num mundo cada vez mais informatizado, é importante os alunos conhecerem não só uma abordagem gráfica destas temáticas, usando novas tecnologias, mas também uma abordagem analítica, pois, por vezes, a abordagem gráfica ao problema não é a mais adequada.

O estudo da temática do presente relatório, desenvolveu-se com alunos do 11.º ano de escolaridade e estrutura-se a partir dos três seguintes objetivos:

1. Estabelecer uma abordagem analítica e gráfica para o ensino de equações e inequações fracionárias.

2. Estudar as dificuldades dos alunos na resolução de equações e inequações através das abordagens analítica e gráfica.

3. Avaliar a aprendizagem dos alunos na resolução de equações e inequações fracionárias.

1.2. Pertinência do estudo

Com base na minha experiência de aluna, tenho verificado que, ao longo dos anos, se vem dado mais importância à resolução analítica das equações e inequações, pondo de lado a sua resolução com a calculadora gráfica ou outra tecnologia com capacidades gráficas. Talvez seja devido a este fato que muitos alunos não sabem interpretar gráficos ou até mesmo ter uma noção da representação gráfica de diversos entes matemáticos, o que poderia facilitar, posteriormente, a resolução analítica de equações e inequações fracionárias.

Assim, o estudo dos erros e dificuldades sentidas pelos alunos do 11.º ano de escolaridade neste tema é muito importante visto que as equações e inequações fracionárias têm vindo a ser a ser abordadas principalmente numa perspetiva analítica apenas.

Compreender e conhecer as dificuldades e erros cometidos pelos alunos neste tema, pode, futuramente, ajudar os professores a delinear uma melhor estratégia de ensino, de forma a proporcionar aos alunos uma melhor aprendizagem, aprendendo com os erros passados, com vista a evitá-los.

No 11.º ano os alunos já se encontram um pouco familiarizados com o uso da calculadora gráfica na disciplina de Matemática, embora possam não conhecer todo o seu potencial, designadamente em relação às suas potencialidades em termos da resolução gráfica de equações e inequações fracionárias. Mesmo assim, a experiência prévia dos alunos com a calculadora gráfica recomenda a sua utilização em detrimento de outras tecnologias.

Um estudo realizado por Hembree e Dessart (1986), referido por Soares (p. 41), revela que os alunos que usaram calculadora obtiveram melhores resultados que os alunos que não tiveram acesso à calculadora. Revela ainda que as conceções que os tinham acerca da matemática eram significativamente melhores, tendo sido o único efeito negativo observado a questão do cálculo, cuja realização foi um pouco inferior quando os alunos usaram calculadora.

Estudos realizados pelos mesmos autores, envolvendo alunos do ensino secundário, revelam ainda que os alunos que tiveram acesso à calculadora gráfica tiveram um melhor desenvolvimento de habilidades concetuais e capacidade de resolução de problemas.

Um estudo efetuado por Rocha (2002), também referido por Soares (p. 44), revela que alunos do 10.º ano usavam a calculadora gráfica não só nos casos em que o enunciado pedia o gráfico da função, mas também na resolução de outras tarefas. Neste estudo verificou-se ainda que os alunos sentiram dificuldades na seleção da melhor estratégia de resolução de forma a chegarem ao seu objetivo e na compreensão da relação entre a janela de visualização e o aspeto gráfico da função e valores obtidos pela calculadora gráfica. Em geral, concluiu-se que os alunos usaram a calculadora devido a sua simplicidade e rapidez na obtenção das respostas.

1.3. Estrutura do Relatório

O presente relatório divide-se em cinco capítulos, que descreveremos resumidamente de seguida.

O capítulo 1, Introdução, está dividido em três subcapítulos onde se descrevem o tema e os objetivos do relatório, discute-se a pertinência do estudo e faz-se um breve resumo da estrutura e organização do relatório.

O Capítulo 2, de Enquadramento teórico, está dividido em dois subcapítulos, que constituem são o suporte teórico deste relatório, onde se abordam o ensino de equações e inequações fracionárias no ensino secundário e a utilização da calculadora gráfica no ensino da Matemática.

No Capítulo 3, de Enquadramento contextual, estabeleceram-se três subcapítulos, em que se apresentam a caracterização da escola e da turma onde foi realizada a intervenção pedagógica, bem como as estratégias de intervenção utilizadas e os métodos utilizados para a recolha de dados usados na realização deste relatório.

O Capítulo 54, da Intervenção pedagógica, que é o mais amplo, está dividido em três subcapítulos, onde se analisam o teste diagnóstico, a implementação da intervenção pedagógica e a avaliação das aprendizagens dos alunos.

Por último, no Capítulo 5, de Conclusões, implicações, recomendações e limitações, apresentam-se as conclusões, implicações, recomendações e limitações do estudo realizado, e encontra-se dividido em cinco subcapítulos onde se apresentam uma breve síntese do estudo, responde aos três objetivos formulados no estudo a partir dos principais resultados nele obtidos, concluindo-se com um subcapítulo sobre as limitações, recomendações e implicações decorrentes da realização do presente estudo.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo é apresentado o fundamento teórico deste relatório, que se organiza em dois subcapítulos: o primeiro é relativo ao ensino de equações e inequações fracionárias no currículo do ensino secundário e, por último, o segundo é relativo a calculadora gráfica no ensino da Matemática.

2.1. O ensino de equações e inequações fracionárias no currículo do ensino secundário.

As primeiras noções equações surgem logo no 3.º ciclo do ensino básico, onde estudam as equações lineares e do segundo grau, sistemas de duas equações lineares e as inequações lineares, sendo que todos estes conteúdos são mais aprofundados durante o ensino secundário.

A resolução de equações e inequações fracionárias é um dos temas abordados na disciplina de Matemática A, no 11.º ano do Ensino Secundário, no tema II – "Funções racionais e com radicais.

Uma função racional é uma função real de variável real definida por:

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$$

onde $n(x)$ e $d(x)$ são polinómios e $d(x)$ é diferente do polinómio nulo.

O domínio, D_f, de uma função racional, f, é o conjunto dos números reais que não anulam o denominador.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: d(x) \neq 0\}$$

Uma equação fracionária é uma equação que se pode descrever na forma $f(x) = 0$, sendo $f(x)$ a expressão de uma função racional com o denominador não constante.

Uma inequação fracionária é uma inequação que se pode reduzir à forma $f(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) \leq 0$, sendo $f(x)$ a expressão de uma função racional com denominador não constante.

No programa de Matemática A dos cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómica, é defendida uma abordagem às funções reais considerando o aspeto algébrico, numérico e gráfico. Sendo sempre que possível aplicar conhecimentos científicos na resolução de problemas reais. A utilização de tecnologias é referida, no programa de Matemática A do 10.º ano de 2001, como tema transversal e de uso obrigatório, devendo ser empregue "à medida que forem sendo necessárias e à medida que forem aumentando a compreensão sobre os assuntos em si" (p.2), considerando sempre as suas vantagens e limitações. É ainda considerada como uma fonte de investigação e aprendizagem sendo necessária para atingir os objetivos e competência deste programa.

Certas dimensões são atingidas quando o aluno é confrontado com uma grande quantidade e variedade de gráficos, sendo a calculadora uma das tecnologias empregues para esse efeito. Estas devem de ser consideradas não só como ferramentas de cálculo, mas também para instigar o espírito crítico e investigador do aluno. Segundo Demana e Waits (1994), as calculadoras podem ser usadas em duas perspetivas: começar por resolver equações e inequações graficamente e depois confirmar a resolução analiticamente ou começar por resolver equações e inequações analiticamente e depois confirmar a resolução graficamente. Além disso, as calculadoras podem constituir o único meio de resolver equações e inequações cuja a resolução analítica é impraticável.

Um estudo feito por Zucula (2016), com alunos do 11.º ano de Moçambique, revelou que os alunos empregavam mais o método de resolução analítica de inequações, tendo-se observado alguma interação entre o método de resolução analítica e gráfica em algumas inequações propostas. Observou-se, ainda, que os tipos de erros dependiam do tipo de inequação proposta, sendo que os erros mais comuns tinham origem na manipulação incorreta da representação algébrica. Zucula observou também que, muitas vezes, os alunos resolvem as inequações como se de equações se tratasse, o que ilustra uma transferência mecânica de procedimentos.

Zucula cita ainda dificuldades encontradas por Tsamir (1998), em que se verificou que os alunos excluíam o denominador, sendo que este era necessário para concluir acerca do domínio; frequentemente trocavam os conetivos lógicos "e" e "ou"; resolviam a inequação como se de uma equação se tratasse, isto é, trocavam o sinal de desigualdade pelo sinal de igualdade. Zucula refere ainda que, "o impacto das similaridades estruturais entre equações e inequações cria um forte sentimento intuitivo de que os procedimentos usados para resolver equações poderão ser usados, também, para inequações" (p. 3).

Zucula, recorre a Douady(1986), para identificar os seguintes métodos de resolução analítica e gráfica:

- Resolução exclusivamente analítica;
- Mistura de resolução analítica com a resolução gráfica;
- Mistura de resolução analítica e numérica.

Por último, Zucula refere que "O uso das diferentes representações, nomeadamente: algébrica, gráfica e numérica, de uma forma combinada no ensino de inequações poderá permitir que os alunos aprendam a resolver, de várias maneiras, problemas relacionados com inequações racionais fracionárias" (p. 10).

Um estudo feito por Almeida e Fernandes (2010), em relação à comunicação promovida por futuros professores na aula de Matemática, revela que,

> uma mentalidade mais aberta, um maior empenho e entusiasmo, uma maior capacidade de reflexão, uma maior vontade de mudança, uma visão da Matemática associada ao desenvolvimento de capacidades e à construção de conhecimentos e uma perspetiva de ensino centrado no aluno parecem ter contribuído, como referem Brendefur e Frykholm (2000), para a implementação de padrões de interação e modos de comunicação que impliquem a troca de ideias entre os alunos e a negociação de significados. (p. 42)

Estes autores referem ainda que as dificuldades dos futuros professores em desenvolverem um processo de questionamento adequado torna o ambiente de aprendizagem mais complexo e menos previsível.

Ponte (1997), a respeito da comunicação oral (citado por Almeida & Fernandes, 2008), refere que ela "é imprescindível para que os alunos possam exprimir as suas ideias e confrontá-las com as dos seus colegas" (p. 84).

Por outro lado, ainda segundo Almeida e Fernandes (2010), uma perspetiva de ensino/aprendizagem centrado no aluno parece ter contribuído para a implementação de padrões de interação e modos de comunicação que facilitam a troca de ideias entre os alunos e a negociação de significados entre os alunos e a professora.

Kieran (1992) classifica os métodos de resolução de equações pelos alunos em sete tipos: uso de fatores numéricos, uso de técnicas de contagem, "tapar", "desfazer", tentativa e erro, transposição e efetuar a mesma operação em ambos membros.

Os dois primeiros métodos têm origem no completamento de expressões do tipo $4 + \cdots = 9$ ou resolver a equação $3 + x = 7$ através do conhecimento de que 3 mais 4 é 7, seria usar fatos numéricos. Resolver a mesma equação contando $3,4,5,6,$ e 7 notando que foram nomeados quatro números, para chegar ao 7, seria um exemplo de resolução através contagem. O método "tapar", na equação $2x + 12 = 6x$, significa observar que se a soma $2x + 12$ é $6x$, então 12 terá de ser $4x$ porque $2x + 4x$ é igual a $6x$, logo x é 3. O método de 'desfazer' é semelhante à estratégia de 'andar para trás' usada na resolução de problemas aritméticos. Por exemplo, para resolver a equação $3x + 15 = 14$ podemos considerar o valor numérico do segundo membro e, seguindo da direita para a esquerda, desfazer cada operação, substituindo-a pela sua inversa. Assim, partimos do valor 14, subtraímos-lhe 5 (o que dá 9) e, finalmente, dividimos 9 por 3, obtendo-se o valor 3 para solução da equação. O método de 'tentativa e erro' consiste em experimentar diferentes valores até encontrar a solução da equação. O método de transposição consiste mudar de membro mudar de sinal e por último o método de efetuar a mesma operação nois dois membros da equação.

Hall (2002) refere vários erros e dificuldades cometidas pelos alunos na resolução de uma equação. Uma das maiores dificuldades do aluno reside na transição de uma perspetiva processual para uma perspetiva estrutural da álgebra. Uma outra dificuldade reside nos aspetos sintáticos e semânticos. Hall também refere a identificação de vários erros mais específicos, designadamente: o erro de eliminação; o erro de inversão, que traduz a confusão do aluno na seleção da operação inversa adequada para mudar de membro; o erro de transposição, que resulta da aplicação errada da regra mudar de membro mudar de sinal; e, por último, erros de cálculo, particularmente entre alunos mais jovens.

2.2. A calculadora gráfica no ensino

Comparativamente com os computadores, as calculadoras têm-se tornado também cada vez mais sofisticadas, fáceis de transportar e mais acessíveis em termos monetários.

Professores de Matemática e investigadores de Educação Matemática defendem a incorporação de novas tecnologias no ensino uma vez que permitem uma melhor compreensão, por parte dos alunos, especialmente em certos conteúdos pois "quando recorremos a tecnologia para ensinar/aprender (...) conseguimos uma aprendizagem mais significativa" (Fernandes & Vaz, 1998, p. 43) e a rapidez que nos permite formar exemplos, favorece a formulação de conjeturas, sendo posteriormente confirmadas com as devidas demonstrações lógica dedutivas. Segundo Ponte (1997), os professores demoram tempo a perceber como tirar partido das tecnologias como ferramentas de trabalho.

No caso das calculadoras, Bitter e Hatfield (1994) revelam que os professores consideram que a calculadora torna a matemática mais interessante, o que é confirmado também pelo estudo de Colpley, Williams, Huang e Waxman (1994), mas revelaram-se indecisos ou não concordavam em permitir que os alunos usassem calculadoras nos testes. Diferentemente, no estudo de Fernandes, Almeida, Viseu e Rodrigues (1999) praticamente todos os professores dos 10.º inquiridos manifestaram a opinião de que devia ser permitido o uso da calculadora nos testes de avaliação. Ainda revelaram que os professores atribuíram a não compreensão de *skills* básicos de cálculo e a diminuição das capacidades de cálculo mental ao uso da calculadora.

No caso da representação gráfica, Teixeira, Saraiva e Andrade (2010) defendem que:

> “o uso da representação gráfica tem um papel fundamental na compreensão do conceito de função e das suas propriedades. Neste sentido, as conexões entre as representações gráficas e as expressões algébricas trarão benefícios para a compreensão das equivalências e das diferenças existentes. (p. 11)

Estes autores também defendem que o trabalho a realizar com os alunos, aquando da resolução das tarefas, deve incluir uma interligação entre a resolução analítica, gráfica e numérica.

Sempre que se usa a calculadora gráfica, deve-se ter em atenção os erros comuns cometidos pelos alunos, tal como acontece na edição da expressão, em que se observam erros relacionados, essencialmente, com a introdução do sinal negativo ou dos parêntesis (Consciência, 2014). Esta autora refere ainda que:

> A representação gráfica na calculadora está associada à janela de visualização definida, pelo que os alunos necessitam desenvolver esquemas de enquadramento que lhes permitam observar as caraterísticas globais de determinada representação gráfica, ou analisar partes da representação nos casos em que uma única janela de visualização não permite observar o comportamento global do gráfico da função. (p. 487)

A autora observou ainda que, apesar de se observar uma representação gráfica aceitável, os alunos, usualmente, não recorrem a alterações da janela de modo a conseguirem interpretar melhor a representação gráfica na vizinhança de algum ponto relevante, o que pode levar a interpretações incorretas da representação gráfica. Analogamente, Hodges e Kissane (1994, citado por Silva & Seixas, 2010) referem que uma das dificuldades sentidas pelos alunos foi a escolha de uma janela de visualização adequada. A este respeito, num estudo de Rocha (2000, citado por Magalhães,2010) afirma-se que “a calculadora gráfica deve ser utilizada como um instrumento que desenvolva nos alunos a capacidade de refletirem, sendo críticos relativamente aos resultados obtidos no seu visor” (p.219). Consciência (2014) acrescenta ainda que alunos recorrem à calculadora gráfica não só para representar graficamente uma função ou analisar a situação a partir da representação gráfica da função, mas também para confirmar graficamente os resultados obtidos na resolução analítica da equação e para resolverem situações em que a resolução analítica seria impraticável. Finalmente, Silva e Seixas (2010) observaram ainda que os alunos sentiram dificuldades na interpretação dos resultados apresentados pela calculadora.

Apesar de se defender a utilização das novas tecnologias, isso não deve ser entendido como o abandono da abordagem analítica, antes deve ser vista numa perspetiva de complementaridade. Por exemplo, a calculadora gráfica apresenta muitas limitações no estudo do infinito, cálculo de valores exatos e representação gráfica. Focando-se nas limitações das tecnologias, Zbiek (1995) argumenta que a perfeição da matemática apenas pode ser atingida através de métodos analíticos. Assim, tal como referem Finney, Tomas, Demana e Waits (1994), coautores do livro Calculus, devemos recorrer às novas tecnologias e aos métodos analíticos no ensino da matemática numa perspetiva de complementaridade. Segundo Fernandes e Vaz (1998), "As tecnologias em geral, e as calculadoras em particular, têm limitações que quando não consideradas podem estar na origem da aprendizagem de ideias erradas" (p. 54), o que também é salientado por Burril et al. (2002, citado por Silva & Seixas, 2010).

No programa de Matemática A (2002) é defendida uma abordagem intuitiva ao estudo de funções fracionárias usando a calculadora gráfica. Segundo Fernandes e Soares (2003), parece adequado, em temos didáticos, centrar o uso da calculadora no professor, acompanhada de uma forte interação com os alunos e sem esquecer a escrita simbólica, pois a calculadora é muito limitada nesse aspeto. Também devemos promover o cálculo mental ou com papel e lápis de forma a desenvolver mais essa capacidade dos alunos (p. 2).

Um estudo feito por Tynan e Asp (1998), numa turma do 9.º ano, envolvendo o estudo de funções lineares, os alunos que tiveram acesso à calculadora tiveram mais sucesso do que aqueles que não tiveram acesso. De modo semelhante, no estudo realizado por Hembree e Dessart (1986), a partir de 79 relatórios de investigação relacionados com a utilização de calculadoras no ensino de matemática, em comparação com o grupo que não teve acesso à calculadora, verificou-se que o grupo que usou calculadora obteve melhores resultados, tanto no cálculo como na resolução de problemas. Os alunos que usaram calculadora revelaram ainda uma atitude mais positiva em relação à matemática.

A calculadora deve ser usada pelos alunos, não para efetuar cálculos simples, mas sim para facilitar a resolução de tarefas mais complexas. De entre as diferentes formas de integrar a calculadora no ensino da matemática, Fernandes e Vaz (1998) advogam três estratégias:

(1) começar por resolver um exercício ou problema com papel e lápis e, seguidamente, utilizar a calculadora para verificar a resolução; (2) começar por resolver um exercício ou problema com a calculadora e, depois confirmar ou completá-lo com papel e lápis e (3) resolver um exercício

ou problema apenas com a calculadora, pois a sua resolução por outros meios é impraticável ou mesmo impossível (p. 46).

Hembree e Dessart (1992) e o NCTM (1991) defendem que a calculadora, tal como o manual escolar, deve ser um instrumento sempre disponível para uso do aluno, seja na escola ou noutro lugar. Em consequência, contraria-se a ideia do uso esporádico das calculadoras, o que era frequente devido ao reduzido número de calculadoras disponíveis nos primeiros tempos da sua integração no ensino da matemática.

Em relação a metodologia de trabalho, no estudo realizado por Fernandes, Almeida, Viseu e Rodrigues (1999), em que os alunos trabalharam em pares e/ou grupos, verificou-se que quando os alunos usaram calculadoras, as interações foram mais frequentes em relação a aspetos técnicos da calculadora. Adicionalmente, o estudo realizado por Ellington (2003) mostrou que os alunos beneficiaram mais quando as calculadoras desempenharam um papel pedagógico na sala de aula, observando-se ainda que obtiveram melhores resultados na resolução de problemas e os seus *skills* não foram prejudicados. Por último, em jeito de recomendação, este autor advoga que o tempo de utilização da calculadora deve de aumentar com o nível de escolaridade.

CAPÍTULO 3

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL

Neste capítulo está descrito o contexto onde foi realizado o projeto de intervenção pedagógica, dando-se a conhecer a escola, a turma, os objetivos do estudo e as estratégias de intervenção e avaliação da ação.

3.1. A Escola

O Agrupamento de Escolas Sá de Miranda foi constituído em abril de 2013 e resultou da agregação da Escola Sá de Miranda com as escolas EB 2,3 de Palmeira e por um conjunto de escolas do Primeiro Ciclo do Ensino Básico e Educação Pré-escolar das freguesias Dume, Adaúfe, Crespos, Pousada, Santa Lucrécia de Algeriz e Navarra.

A Escola Sá de Miranda, outrora Liceu de Braga, foi criado por Passos Manuel a 17 de novembro de 1836 e situa-se na zona norte da cidade de Braga. Ao longo dos seus 178 anos de existência, acumulou um vasto espólio de material didático e mobiliário, que se encontra, em parte, exposto no museu da escola e na biblioteca. Esta escola possui ainda um teatro e uma quinta.

No interior existem espaços dedicados aos professores, tais como uma sala de convívio, uma sala de trabalho, uma sala destinada aos diretores de turma e uma sala para os cursos profissionais. Relativamente aos espaços dedicados aos alunos, existe uma sala de estudo, situada no Salão Nobre da escola, que é usada quando não é atribuída uma sala à turma para esse propósito. A escola tem também a preocupação de facultar aos alunos apoio ao estudo nas disciplinas a que vão ter exame, pois há muitos alunos que não têm possibilidade para pagarem explicações. Além disso, estão à disposição dos alunos diversos espaços de convívio dentro da escola. Por último, existem espaços para o atendimento aos encarregados de educação, entre outros serviços.

A Escola Sá de Miranda tem em conta a diversidade de estatutos sociais e económicos de origem dos seus alunos, e oferece um apoio diversificado e uma oferta educativa variada. Nesta escola podemos encontrar, essencialmente, um ensino secundário regular, mas também cursos profissionais e algumas turmas do 3.º ciclo do ensino básico.

A escola procura ainda promover nos alunos alguns valores como o respeito pelos outros, o espírito de solidariedade, o humanismo e a convivência democrática. Não existem casos graves de violência e observa-se um bom relacionamento entre todos os membros da comunidade escolar, com respeito e atenção pelos direitos e deveres mútuos. Na avaliação externa da escola, declara-se que "Os alunos gostam da escola e os pais consideram que é uma escola segura que promove uma educação adequada" (Inspeção Geral de Educação, 2010, p. 3).

É uma escola heterogénea que pretende incutir nos seus alunos o respeito pelo outro, tanto a nível de religião, como de gênero e estrato social, que "Deverá nortear-se pelos princípios de respeito pelo outro, pela aceitação da diferença, da opinião, pela abertura, pela cooperação, pela tolerância e pelos princípios democráticos" (Escola Secundária Sá Miranda, 2010/2013).

A escola elegeu como prioridades a formação para a cidadania, o sucesso dos alunos, a melhoria do acompanhamento dos alunos e o complemento das aprendizagens, tendo para isso criado aulas de apoio dadas por professores das diferentes disciplinas.

A escola foi objeto de uma profunda remodelação, que ficou concluída em 2011, através do programa ministerial de Requalificação das Escolas.

Todas as salas estão equipadas com um computador, um quadro interativo e um projetor. Recorrendo à plataforma INOVAR, os professores podem disponibilizar aos seus alunos fichas com exercícios e fichas de avaliação, entre outros materiais. Para além desta plataforma, o agrupamento, na qual a escola se insere, tem uma página na internet (http://www.aesamiranda.pt), na qual se pode encontrar muita informação sobre a escola, sobre o que oferece e outras informações importantes para os alunos, tais como os horários, um blog, um webmail e um clube de robótica.

Para além das tecnologias informáticas, existe também um vasto espólio documental em um Arquivo, livros na biblioteca e material didático.

3.2. A turma

A intervenção pedagógica foi realizada numa turma do 11.º ano do curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias, da Escola Secundária Sá de Miranda. Esta turma era constituída por 28 alunos, dos quais 4 não frequentaram a disciplina de Matemática, pois 3 eram alunos com Necessidades Educativas Especiais e um tinha concluído já a disciplina de Matemática, encontrando-se a repetir o 11.º ano. Assim, a turma dos alunos que frequentaram a disciplina de Matemática era constituída por 24 alunos (A_1, A_2, ..., A_{22}), dos quais metade era do sexo masculino e a outra metade era do sexo feminino, com idades compreendidas entre os 16 e os 18 anos e uma média de aproximadamente 16 anos. Nesta turma existiam 6 alunos que estavam a repetir o 11.º ano.

Da análise feita ao questionário entregue no início do ano letivo, verificou-se que 5 alunos revelavam ter dificuldades na disciplina de matemática, sendo que um desses alunos vinha com uma classificação de 9 valores do 10.º ano. Já 13 alunos frequentaram o apoio no ano anterior e 3 frequentavam um centro de estudo, sendo que o tempo que estudavam para a disciplina era maioritariamente de 1h a 2h por semana.

Segundo os alunos, a matemática é importante, pois "está presente em tudo" (A1), "é a base para todas as disciplinas" (A2), "é importante para qualquer curso que siga" (A3) e "ajuda no dia-a-dia" (A7), mas também há quem acha que a matemática é importante "se precisar no futuro" (A20).

Todos os alunos têm acesso à internet em casa, usando essencialmente esses instrumentos para entretenimento, pesquisa e comunicação. A maioria dos alunos desta turma admite ter dificuldades na disciplina de Matemática, mas não é a disciplina de que menos gostam de estudar.

Relativamente aos seus futuros planos, todos tencionam frequentar um curso superior, na área de psicologia, saúde, desporto e engenharia.

Na primeira reunião de conselho de turma, as informações dadas acerca da turma foi de que se tratava de uma turma de alunos distraídos, que conviviam muito nas aulas, e por isso demoravam muito tempo a resolver as tarefas. Estes alunos pareciam não ter muita ambição, tinham pouco hábito de tirar apontamentos e tinham falta de iniciativa, autonomia e motivação. Alguns alunos frequentavam explicações, donde pensarem que sabiam tudo, embora na realidade não percebessem o porquê de se resolver uma dada tarefa daquela forma, não deixando os outros alunos aprenderem.

Ao longo das aulas apercebi-me que os alunos não eram participativos, pelo que eu fui tentando contornar a situação interrogando-os o mais possível de forma a guiá-los. Alguns alunos eram muito trabalhadores, mas a maioria deles não sabia como estudar matemática. Todavia, com a cooperação das minhas colegas de estágio e da professora cooperante, fomos indicando métodos de trabalho diferentes que poderiam seguir.

Relativamente à organização das atividades em sala de aula, os alunos formavam, espontaneamente, sempre os mesmos grupos, sendo que alguns preferiam trabalhar individualmente. Talvez por estarem habituados a esses grupos de trabalho, isso facilitava a discussão entre eles aquando da resolução das tarefas.

A seguir, na Tabela 1, pode observar-se o desempenho dos alunos na disciplina de Matemática ao longo dos três períodos letivos.

Tabela 1 — Desempenho da turma na disciplina de Matemática ao longo ano letivo

	1.º período	2.º período	3.º período
Média	9,7	10,3	11
Desvio padrão	2,2	2,3	2,6
Média negativas	8,2	7,6	7
Média positivas	11,9	11,5	11,9

Pela Tabela 1 verifica-se que a média das classificações dos alunos a Matemática aumentou do 1.º para o 2.º período e do 2.º período para o 3.º período. Este aumento é acompanhado pela diminuição da média das classificações negativas ao longo dos períodos, enquanto a média das classificações positivas começa por diminuir e aumenta de seguida.

3.3. Plano geral de intervenção

No estudo da temática do presente relatório, concretamente as abordagens analítica e gráfica na resolução de equações e inequações fracionária por alunos do 11.º ano, estabeleceram-se os três seguintes objetivos:

1. Estabelecer uma abordagem analítica e gráfica para o ensino de equações e inequações fracionárias;

2. Estudar as dificuldades dos alunos na resolução de equações e inequações através das abordagens analítica e gráfica;

3. Avaliar a aprendizagem dos alunos na resolução de equações e inequações fracionárias.

A concretização deste projeto teve por base a elaboração de um teste diagnóstico, a implementação de uma intervenção pedagógica ao longo de 6 aulas, uma questão aula e no final foram propostos alguns exercícios na ficha de avaliação sumativa. Com as questões aula pretendeu-se identificar e avaliar as abordagens analíticas e gráficas usadas pelos alunos, com o intuito de comparar os resultados obtidos e concluir qual das abordagens permite uma compreensão mais aprofundada dos respetivos conteúdos.

Nas tarefas exploradas nas aulas da intervenção pedagógica teve-se em conta os seguintes momentos: primeiro momento — apresentação da tarefa, onde cada aluno teve de a interpretar individualmente; segundo momento — exploração da tarefa, em que os alunos resolveram as tarefas e o professor foi circulando pela sala de aula, tirando dúvidas esporádicas que não comprometiam os objetivos do estudo; terceiro momento — discussão e síntese dos resultados obtidos, em que os alunos, no grupo-turma, partilharam e discutiram as suas estratégias de resolução, bem como a institucionalização do conhecimento matemático (este terceiro momento foi realizado numa outra aula, depois de terem sido entregues as produções dos alunos previamente corrigidas).

Finalmente, a ficha de avaliação sumativa foi realizada individualmente, para verificar em que medida os alunos aprenderam os conteúdos abordados e o tipo de abordagens (analítica e gráfica) por eles usadas na resolução das tarefas da ficha.

No Quadro 1 indicam-se os diferentes procedimentos de recolha de dados que foram usados no estudo dos diferentes objetivos de investigação.

Tabela 2 — Tipo de procedimento de recolha de dados segundo os objetivos da investigação

Objetivos	Observações	Observações das colegas de estágio	Gravações audiovisuais	Produções dos alunos	Ficha de avaliação
1	✓	✓	✓		
2		✓	✓	✓	✓
3					✓

CAPÍTULO 4

INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

O Capítulo 4 deste relatório, denominado de Intervenção Pedagógica, está dividido em três subcapítulos: Avaliação Diagnóstica, Ensino de equações e inequações fracionárias e Avaliação das Aprendizagens. Neste capítulo são aprofundadas questões relativas à minha intervenção pedagógica, e tendo em conta que não é possível aprofundar todos os pormenores, foi feita uma seleção rigorosa dos elementos mais importantes que deveriam estar presentes neste relatório. A escolha dos elementos da intervenção foi feita tendo em vista os objetivos propostos para a minha intervenção.

4.1. Avaliação diagnóstica

A análise realizada está dividida em três partes: na primeira parte trata da resolução analítica de equações (questões 1 e 3); na segunda, da resolução analítica de inequações (questão 2) e, por último, na terceira da resolução gráfica de equações e inequações (questões 4 e 5). Em cada uma das partes, apresenta-se uma tabela, onde se encontram as percentagens de respostas corretas, parcialmente corretas, incorretas e ininteligíveis nas diferentes questões, incluindo-se também as não respostas. Por fim, referem-se os erros e estratégias usadas pelos alunos.

Em todos os itens1a), 1b), 1c), 2a), 2b), 3, 4 e 5 considerou-se como resposta correta aquela em que os alunos chegaram ao resultado pretendido, mesmo que não tenham indicado o conjunto solução; considerou-se como reposta parcialmente correta, a resposta em que o aluno começou a resolver a questão, mas interrompeu o processo sem o completar; como resposta ininteligível aquela em que não se percebia qual era o raciocínio do aluno; e, finalmente, nas não respostas incluíram-se os alunos que não responderam ao item.

4.1.1. Resolução analítica de equações

Questão 1. Resolve, em IR, cada uma das equações seguintes e escreve, em extensão, o respetivo conjunto de solução:

a) $3(2x-5)=\frac{x}{2}$; **b)** $x^2=x$; **c)** $(z+2)^2=4$.

Questão 3. Escreve uma expressão matemática que traduz o seguinte problema e não o resolvas:

O José pensou num número, multiplicou-o por 7 e ao resultado obtido adicionou-lhe 13 unidades. No final obteve o número 790. Em que número pensou o José?

Na questão 1, o objetivo era resolver analiticamente as três equações, apresentando corretamente o conjunto solução; enquanto na questão três, o objetivo era traduzir o problema da linguagem corrente para linguagem simbólica.

Na Tabela 1 podem-se observar as percentagens dos tipos de respostas dadas pelos alunos nos itens 1a), 1b), 1c) e 3, bem como de não respostas.

Tabela 3 — Percentagens dos tipos de resposta nos itens 1a), 1b), 1c) e 3

Itens	Tipo de resposta				Não respondeu
	Correta	Parcialmente correta	Incorreta	Ininteligível	
1a)	48	13	39	0	0
1b)	30	9	52	0	9
1c)	39	9	39	9	4
3	83	4	4	0	9

No item 1a), nas resoluções consideradas como corretas, 5 alunos não indicaram o conjunto de solução. Em relação aos erros cometidos, observou-se que 3 alunos reduziram mal ao mesmo denominador, como se pode observar na Figura 1, e 1 aluno aplicou mal a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e comutativa da multiplicação. Pode observar-se ainda que nenhum aluno deixou de responder a esta alínea.

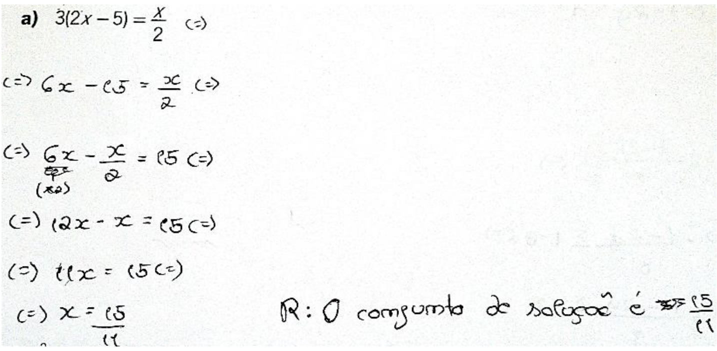


Figura 1. Resolução do item 1a) pelo aluno A14.

No item 1b), nas respostas corretas, um dos alunos não indicou o conjunto de solução. Ainda relativamente às respostas corretas, 2 alunos usaram a fórmula resolvente para resolver a equação e 4 alunos decompuseram o polinómio em fatores para aplicar a lei do anulamento do produto. Nas respostas incorretas pudemos observar que a maior dificuldade é isolar a variável (8 alunos), o erro de transposição (1 aluno), a substituição da variável por valores (2 alunos), o erro na decomposição do polinómio em fatores (1 aluno) e ainda a omissão de uma solução (2 alunos), como exemplifica a Figura 2. Observou-se ainda que 3 alunos não responderam à questão.

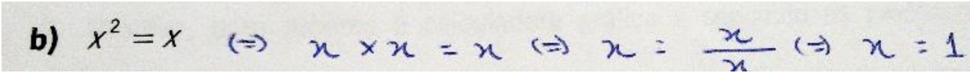


Figura 2. Resolução do item 1b) pelo aluno A22.

No item 1c), 9 alunos responderam corretamente, mas 3 não indicaram o conjunto de solução. Nas respostas corretas pode ainda observar-se que 5 alunos decompuseram o polinómio em fatores e 4 alunos usaram a fórmula resolvente para resolver a equação. Em relação aos erros cometidos, 1 aluno cometeu um erro de cálculo numa diferença e um outro aluno não conseguiu isolar a variável, como podemos observar na Figura 3.

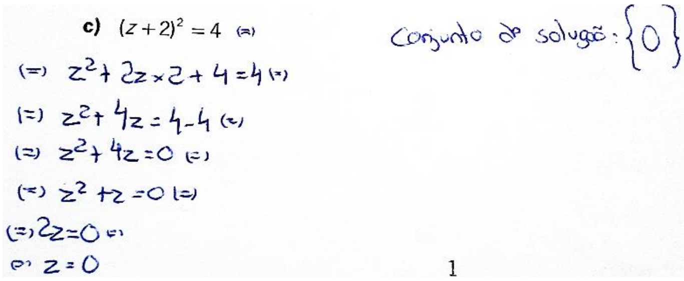


Figura 3. Resolução do item 1c) pelo aluno A5.

Ainda, 4 alunos aplicaram mal o quadrado do binómio, 3 alunos cometeram o erro da transposição, um aluno decompôs mal o polinómio em fatores e, por último, um dos alunos omitiu uma das soluções, como se pode observar da Figura 4.

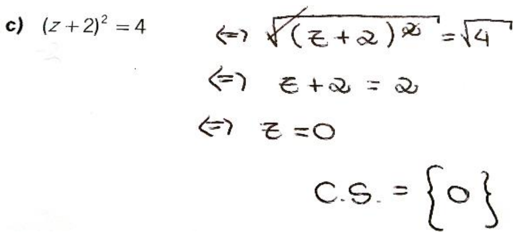


Figura 4. Resolução do item 1c) pelo aluno A23.

Na questão 3, 19 alunos responderam corretamente à questão, apesar de não terem indicado que a incógnita da equação era o número em que o José pensou. Um outro aluno respondeu de forma correta, tendo o aluno separado a equação pretendida em duas equações, como podemos observar na Figura 5.

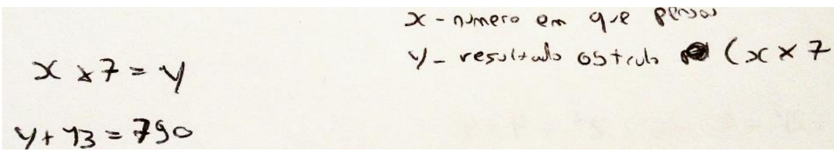


Figura 5. Resolução da questão 3 pelo aluno A16.

Para além de não ser claro o significado da letra y, deve notar-se que a consideração do sistema das duas equações lineares permite resolver corretamente a questão colocada, o que o aluno não referiu, talvez porque tenha não se tenha apercebido disso.

4.1.2. Resolução analítica de inequações

Questão 2. Resolve, em IR, cada uma das seguintes inequações, indicando o respetivo conjunto solução sob a forma de intervalo de números reais:
a) $-2y + 3 < 7$; **b)** $3 - \frac{1-2y}{3} \geq 1$.

Na questão 2, o objetivo era resolver analiticamente as duas inequações apresentadas.

Na Tabela 2 podem-se observar as percentagens dos diferentes tipos de respostas dadas pelos alunos nos itens 2a) e 2b), bem como das não respostas.

Tabela 4 — Percentagens dos tipos de resposta nos itens 2a) e 2b)

Itens	Tipo de Reposta			Não respondeu
	Correta	Parcialmente correta	Incorreto	
2a)	26	4	65	4
2b)	4	9	83	4

Na questão 2a) 6 alunos responderam corretamente à questão, dos quais 3 não indicaram o respetivo conjunto de solução. Dos 15 alunos que responderam incorretamente à questão, 13 cometeram o erro da propriedade da monotonia parcial da multiplicação em $\mathbb{R}$, como podemos observar na Figura 6, e outros 2 cometeram o erro de representação dos intervalos respetivos, tal como podemos observar na Figura 7. Por último, pode ainda observar-se que apenas um aluno não respondeu à questão.

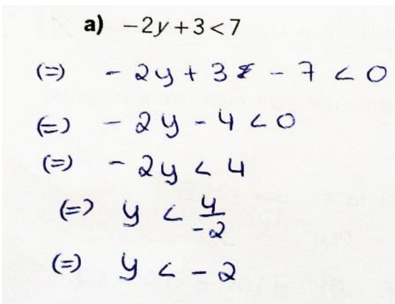


Figura 6. Resolução do item 2a) pelo aluno A1.

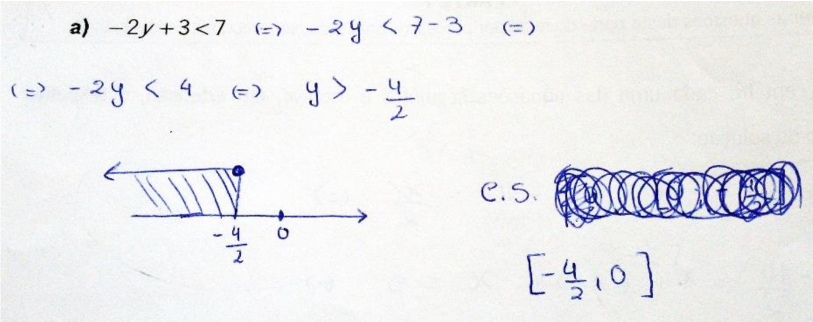


Figura 7. Resolução do item 2a) pelo aluno A2.

No item 2b) pode observar-se que apenas um aluno respondeu corretamente à pergunta, não apresentando o respetivo conjunto solução. Dos alunos com resposta incorreta, 14 cometeram um erro de sinal, como se pode observar na Figura 8, 2 alunos reduziram mal ao mesmo denominador, outros 2 alunos cometeram o erro da propriedade da monotonia parcial da multiplicação em *IR* e outro considerou uma equação em vez da inequação dada.

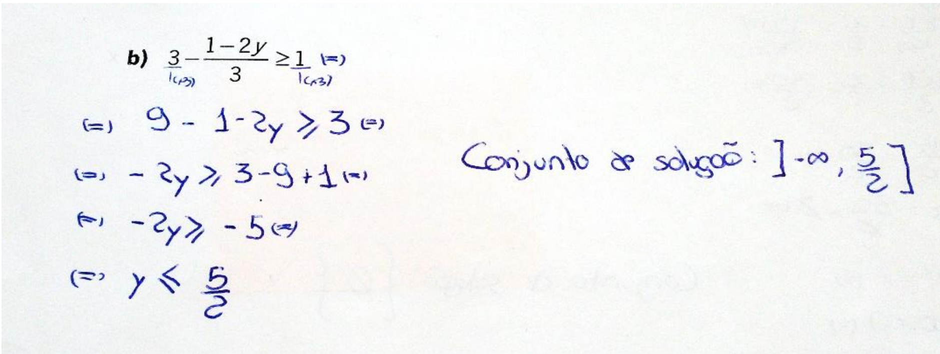


Figura 8. Resolução do item 2b) pelo aluno A5.

4.1.3. Resolução gráfica de equações e inequações

PARTE II

Usa a calculadora gráfica para responderes às questões desta parte do teste.

Na resposta deves:

- transcrever para a tua folha de papel o(s) gráfico(s) necessários para responder à pergunta, devidamente identificados e assinalando os eixos do referencial utilizado;
- descrever o processo utilizado para obter a resposta;
- assinalar a solução ou soluções no(s) gráfico(s) reproduzidos anteriormente;
- apresentar a resposta

Questão 4. Resolve, com recurso à calculadora gráfica e seguindo os procedimentos anteriores definidos, a equação $2x - 1 = 3$. Na tua resposta apresenta o ecrã da calculadora, a janela de visualização e indica a solução da equação.

Questão 5. Resolve, com recurso à calculadora gráfica e seguindo os procedimentos anteriores definidos, a inequação $x^2 \geq 6$. Apresenta o conjunto solução sob a forma de intervalos de números reais. Na tua resposta apresenta o ecrã da calculadora e a janela de visualização.

Nas questões 4 e 5, o objetivo era resolver graficamente a equação e a inequação dadas, com o suporte da calculadora gráfica, em que o aluno, para além de ter de apresentar a resposta, também tinha de apresentar a respetiva janela de visualização, assim como a equação usada e o esboço do gráfico.

Na Tabela 3 podem-se observar as percentagens de respostas dadas pelos alunos, nas questões 4 e 5, bem como das não respostas.

Tabela 5 — Percentagem dos tipos de respostas obtidas nas questões 4 e 5

Questão	Tipo de Reposta			Não respondeu
	Correta	Parcialmente correta	Incorreta	
4	22	9	52	17
5	0	13	17	70

Nestas questões, para além do que que é referido no início do capítulo, considerou-se como resposta correta aquela em que os alunos apresentaram o esboço correto do gráfico, assim como a respetiva janela de visualização e o conjunto solução; como parcialmente correta, a resposta com o esboço do gráfico incompleto (devido à janela de visualização) ou que não apresentavam o conjunto de solução; como resposta incorreta considerou-se a resposta com um esboço do gráfico incorreto, um conjunto solução incorreto ou uma equação incorreta.

Como se pode observar na Tabela, muitos alunos não responderam a estas questões, o que talvez se deva a que eles não sabem como usar as capacidades gráficas da calculadora para resolver este tipo de questões.

Na questão 4, nas 5 respostas consideradas corretas, os alunos indicaram corretamente o conjunto solução, indicaram a janela de visualização e 2 alunos recorreram ainda à resolução analítica da equação. Nas respostas parcialmente corretas, 2 alunos fizeram um esboço correto do gráfico, mas não indicaram os pontos importantes, nem a solução da equação. Numa das resoluções que considerei parcialmente correta, um aluno recorreu à resolução analítica da equação, apresentando um esboço do gráfico correto, mas acrescentou que "Quando y é 0 o x é 2, logo a reta irá passar pelo ponto $A(2,0)$" (A13), o que revela que o aluno não percebeu bem o que se pretende com a resolução gráfica da equação, como podemos observar na Figura 9. Nas respostas incorretas, 7 alunos resolveram analiticamente a equação, 3 deles desenharam a reta de equação $x = 2$ e outro a reta de equação $x = 0$, tendo cometido um erro de cálculo aquando da resolução analítica da equação, e 2 desenharam a reta de equação $y = 2$. Um aluno não fez o esboço correto da reta, não chegando a nenhuma resposta. E ainda dentro das respostas incorretas, um aluno cometeu um erro de transposição quando estava a calcular a expressão que ia inserir na calculadora, obtendo assim um gráfico incorreto. Pode ainda observar-se que 4 alunos não responderam à questão.

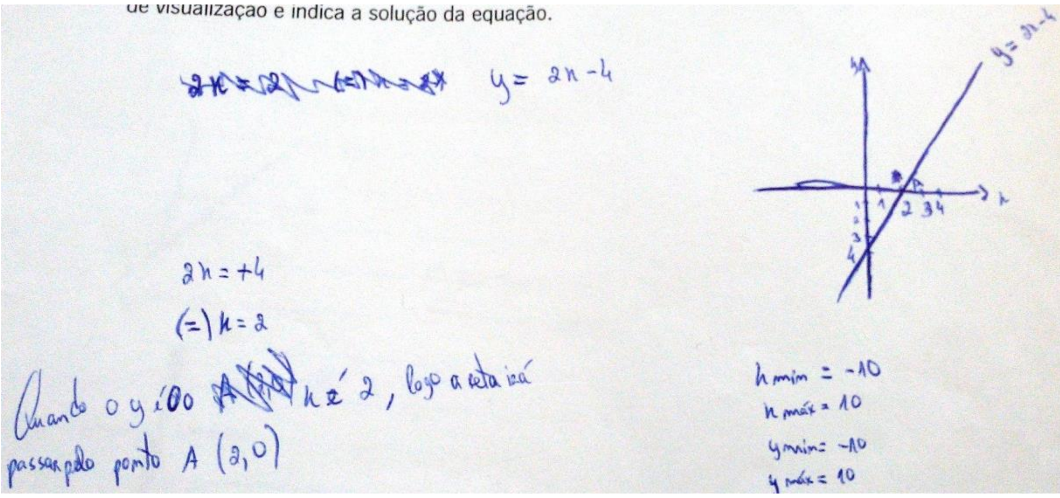


Figura 9. Resolução da questão 4 pelo aluno A13.

Na questão 5, podemos observar, através da Tabela 3, que nenhum aluno respondeu corretamente à questão. Nas 3 respostas parcialmente corretas, um dos alunos, fez o esboço correto do gráfico, mas apenas considerou parte dele, tendo obtido um conjunto solução incompleto, e os outros dois, devido à janela de visualização usada, só puderam visualizar parte do gráfico, chegando também a uma resposta incompleta, como mostra a Figura 10.

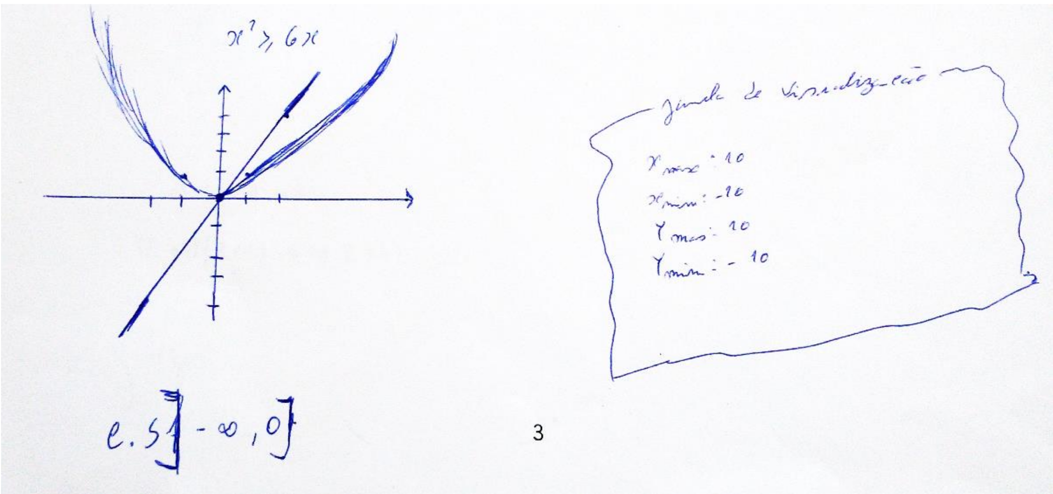


Figura 10. Resolução da questão 5 pelo aluno A10.

Nas 4 respostas incorretas, dois dos alunos resolveram incorretamente a inequação, analiticamente, chegando assim a uma conclusão incorreta e a um gráfico incorreto, como se pode observar na Figura 11.

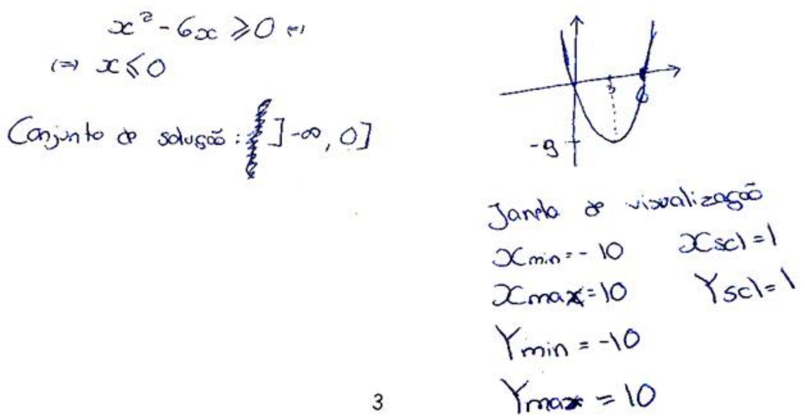


Figura 11. Resolução da questão 5 pelo aluno A5.

Dos dois restantes alunos, um fez o esboço incorreto do gráfico e outro, apesar de ter um esboço correto do gráfico, indicou um conjunto de solução incorreto. Por fim, salienta-se ainda que 16 alunos não responderam a esta questão

4.2. Ensino de equações e inequações fracionárias

Neste subcapítulo será feita uma análise das aulas lecionadas ao longo da intervenção pedagógica. A intervenção foi feita ao longo de 6 blocos de 90 minutos cada, nos quais foi lecionado o tema "Operações com funções racionais. Equações e inequações fracionárias", incluído no programa de 11.º ano de Matemática A, de 2002. Na Tabela 6 são apresentadas as aulas lecionadas e os conteúdos abordados em cada uma delas.

Tabela 6 — Planificação da intervenção do projeto

Data	**Conteúdos abordados.**
21 Janeiro	Teste diagnóstico. Revisões.
4 Fevereiro	Exercícios sobre equações fracionárias. Utilização da calculadora gráfica.
11 Fevereiro	Inequações fracionárias. Utilização da calculadora gráfica.
15 Fevereiro	Exercícios sobre a matéria dada na aula anterior. Aplicação do estudo das funções racionais (e em particular de equações e inequações) a situações concretas. Utilização da calculadora gráfica.
17 Fevereiro	Aula prática. Questão aula.
29 Fevereiro	Teste de avaliação.

Das 6 aulas lecionadas, 4 serão analisadas neste subcapítulo, pois a aula referente ao teste diagnóstico foi analisada na primeira secção deste capítulo e as referentes à questão aula (parte dessa aula) e ao teste de avaliação serão analisadas nos subcapítulos seguintes.

4.2.1. Resolução analítica e gráfica de equações fracionárias

Para iniciar o estudo das equações fracionárias, foi previamente abordada a resolução de equações simples, passando depois para a resolução de equações fracionárias. No decorrer das aulas, foram feitas perguntas diretas aos alunos tendo em vista que eles ultrapassassem as dificuldades encontradas no teste diagnóstico e no decorrer da observação das aulas.

Por decisão minha e da orientadora foi estabelecido não mandar nenhum aluno ao quadro na primeira aula, devido ao tempo e às dificuldades dos alunos, tendo sido eu a escrever as resoluções das tarefas no quadro.

A análise seguinte foi feita tarefa a tarefa para perceber melhor o desenvolvimento dos alunos, sendo que não foram apenas selecionadas aquelas onde houve mais interação entre os alunos e a professora. Para tal, foram apresentadas as seguintes tarefas aos alunos:

Tarefa 1. Resolva as seguintes equações:

a) $\frac{2x-6}{3} = 4$;

b) $\frac{2x-6}{x-2} = 0$;

c) $\frac{x^2-5x+6}{x-2} = 0$;

d) $\frac{-2x}{x^2-9} = \frac{1}{x^2+3x}$;

Como se pode observar, a tarefa foi iniciada pela resolução de uma equação simples, de forma a introduzir, posteriormente uma equação fracionária.

a) $\frac{2x-6}{3} = 4$

Professora: Como se resolve este tipo de equações?
A20: Isolamos o x.
A19: Passamos o 4 para o outro lado e reduzimos ao mesmo denominador.

Neste diálogo, podemos observar que o aluno 20 usa cegamente o método de transposição referido por Kieran (1992), não operando sobre a equação como um objeto matemático.

b) $\frac{2x-6}{x-2} = 0$

A alínea b) foi abordada de forma a que os alunos percebessem a diferença ou o que distingue as equações fracionárias das equações simples (Figura 12). Nesse sentido, foi enfatizado que na resolução de equações fracionárias temos de ter em atenção o domínio da função.

Professora: Que equação é esta?
A7: É uma equação fracionária.
Professora: E o que a distingue das equações que estamos habituados a resolver?

A7: O x está a dividir.
Professora: E ter o x no denominador vai interferir com alguma coisa?
Professora: Neste caso, temos de ter em atenção o domínio da função, pois nem todas as soluções que encontramos podem pertencer ao domínio.

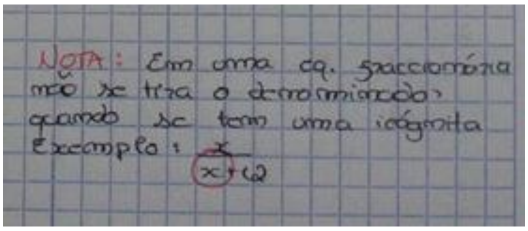


Figura 12. Reprodução do caderno do aluno A14.

c) $\frac{x^2-5x+6}{x-2} = 0$

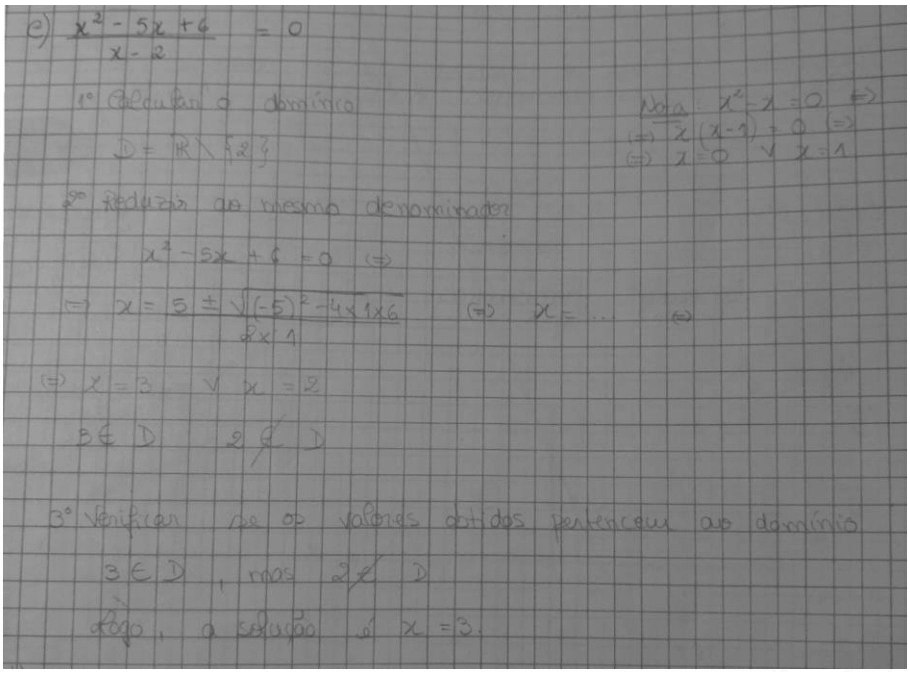


Figura 13. Reprodução do caderno do aluno A22.

Nesta alínea foi feita uma síntese, com a colaboração dos alunos, sobre os procedimentos de resolução de equações fracinárias, em teriam de calcular o domínio, passar todos os elementos da equação para um dos membros, reduzir ao mesmo denominador, resolver a equação e por último verificar se as soluções obtidas pertenciam ao domínio. Também se pode constatar que foi feita uma observação acerca da resolução de equações do segundo grau, onde se enfatiza que não é sempre necessário usar a fórmula resolvente para a resolução das mesmas, dando-se o exemplo que um aluno referiu.

Professora: Esta equação do segundo grau é completa ou incompleta? E como a podemos resolver?
A22: Icompleta. Aqui podemos pôr o x em evidência.

Esta observação foi feita pois, no teste diagnóstico, os alunos usavam sempre a fómula resolvente, mesmo na equações do segundo grau imcompletas, o que conduzia frequentemente a erros nos cálculos.

d) $\frac{-2x}{x^2-9} = \frac{1}{x^2+3x}$

Aquando do cálculo do domínio da equação, um aluno fez a seguinte pergunta:

A19: Se é 0 ou -3 porque aparecem os dois na exceção do domínio?
Professora: Porque ambos anulam o denominador.

Ao longo da exploração desta tarefa, foi ainda feita uma revisão dos casos notáveis, tal como se pode observara na Figura 14.

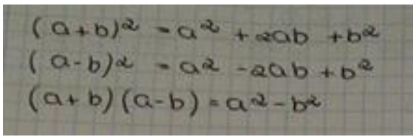


Figura 14. Reprodução do caderno do aluno A22.

Tarefa 2. Na Figura 1 está representada, num referencial o.n. Oxy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

As retas de equação $x = 2$ e $y = -1$ são as assíntotas do gráfico da função f.

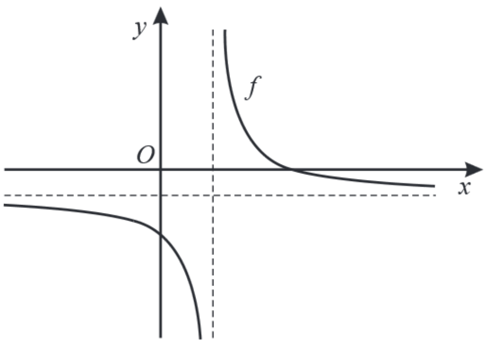


Figura 1

Qual é o valor de k, para o qual a equação $f(x) = k$ é impossível?

(Teste intermédio, março de 2013)

Nesta tarefa os alunos tiveram dúvidas se consideravam $k = -1$ ou $k = 2$. Assim, foi então feita uma análise acerca das assíntotas do gráfico da função, o que levou os alunos a responderam corretamente. Seguidamente foi colocada a seguinte questão:

Professora: Existe alguma imagem cujo o objeto é 2?
A20: Não. Sim.

Em seguida, a professora apontou para o gráfico dando um exemplo de um objeto cuja a imagem é 2.

Professora: O que representa o $f(x)$?
Alunos: o y.
Professora: Então? Qual é o valor de k?
A3: -1
A20: Como assim?
Professora: O que representa o $f(x)$?
A20: y.
Professora: exatamente! Ou seja, a imagem. Então qual é a imagem que não tem objeto?
A20: Há! O -1.

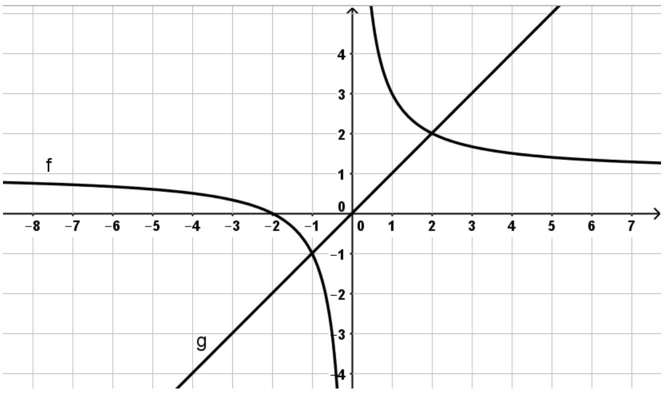
Aqui podemos observar a confunsão dos alunos com objetos e imagens.

Numa outra aula foi usada a seguinte ficha de trabalho, que foi previamente enviada para os alunos. Em relação a essa aula, foi previsto que os alunos não saberiam como usar as capacidades gráficas da calculadora para resolver este tipo de tarefas.

Tarefa 1. No referencial o.n. Oxy da figura estão representadas as funções f e g definidas por

$$f(x) = \frac{x+2}{x} \ e \ g(x) = x$$

Os pontos A e B são pontos de interseção dos dois gráficos, sendo A um ponto de ordenada negativa, e C é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox.



a) Localiza, nos gráficos das funções f e g, os pontos A, B e C.

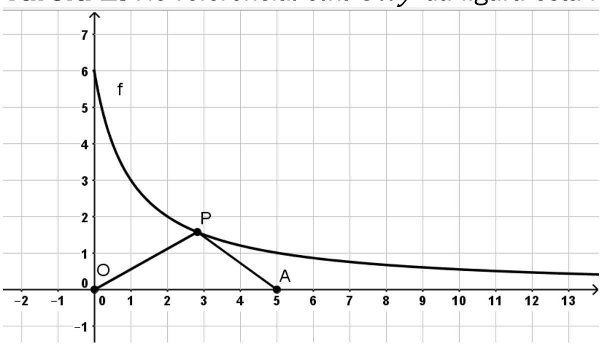
b) Determina analiticamente as coordenadas dos pontos A, B e C.

c) Utiliza a calculadora gráfica, para determinar os resultados obtidos na alínea anterior.

Neste caso, a tua resposta deve incluir uma composição matemática que contenha:

- a expressão que traduz o problema;
- gráfico ou gráficos, devidamente assinalados, que permitem resolver o problema, bem como a janela de visualização utilizada;
- assinalar no(s) gráfico(s) o(s) ponto(s) que permitem responder ao problema;
- a solução do problema.

Tarefa 2. No referencial o.n. Oxy da figura está representado um triângulo $[AOP]$.



O vértice P tem abcissa positiva e desloca-se ao longo do gráfico f, função definida por $f(x) = \frac{6}{x+1}$.

Simultaneamente, o ponto A desloca-se ao longo do semieixo positivo Ox de tal modo que a abcissa de A excede a abcissa de P em duas unidades.

Designe por g a função que à abcissa x do ponto P faz corresponder a àrea do triângulo $[AOP]$.

a) Mostre que $g(x) = \frac{3x+6}{x+1}$.

b) Determine as coodenadas de A e P de forma a que a área do triângulo $[AOP]$seja igual a $\frac{21}{4}$.

b₁) Resolve esta alínea analiticamente.

b₂) Com recurso à calculadora gráfica.

Neste caso, apresenta a composição como foi pedido no exercício anterior.

Esta tarefa foi realizada, questionando repetidamente a turma, de forma a chegar-se a uma conclusão aceite por todos. As alíneas foram resolvidas no quadro pelos alunos e discutidas na turma. Em termos dos objetivos das tarefas, pretendeu-se perceber se os alunos conseguem resolver problemas envolvendo equações fracionárias e perceber quais as equações a usar.

Relativamente à alínea a), foi observado o seguinte diálogo:

Professora: Onde fica o ponto C?
A19: Na origem.
A8: No -2.
Professora: Onde fica o ponto C, A21?
A21: Não sei.
Professora: Então lê o enunciado.
A21: C é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox.
Professora: Então onde fica o ponto C? Onde é que o gráfico de f interseta o eixo Ox?

A21: É no -2.

Neste diálogo podemos concluir que a dificuldade dos alunos em encontar a localização do ponto C está na má interpretação do gráfico.

Para localizar os restantes dois pontos foi o aluno A8 ao quadro, tendo sido depois discutidas na turma as suas respostas .

Na alínea b) foi usado o mesmo método de questionar os alunos acerca do método de resolução, tendo-se veridicado que usaram o método correto de resolução, provavelmente influenciados pela localização do ponto na alínea a).

Professora: Como vamos determinar as coordenadas dos pontos?
A1: Igualamos.
Professora: Igualamos o quê?
A1: $f(x) = g(x)$.
Professora: Portanto, a vossa colega está a sugerir para igualar $f(x)$ a $g(x)$. Todos concordam?
Alunos: Sim.
Professora: Esta expressão vai servir para determinar que pontos?
Alunos: A e B. Os pontos de interseção.

Ao longo da resolução analítica desta alínea foi enfatizado que a multiplicação de dois números negativos dá um número positivo, pois foi um dos erros cometidos pelos alunos no teste diagnóstico.

Professora: Reparei aqui numa coisa que se esqueceram. Antes de começar a resolver este tipo de equações, o que é que temos de calcular?
Alunos: O domínio.
Professora: Calcular o domínio.
A6: É obrigatório?

Professora: Sim, porque as soluções podem não pertencer ao domínio. Imagina que ao resolveres a equação obtinhas três soluções e uma das soluções não pertencia ao domínio. Como é que sabias quais eram a abcissas dos pontos A e B?
A8: Olhando para o gráfico.
Professora: Imagina que não tinhas o gráfico da função. Não saberias quais das soluções eram as abcissas dos pontos. Neste caso é importante saber o domínio para eliminar uma solução.

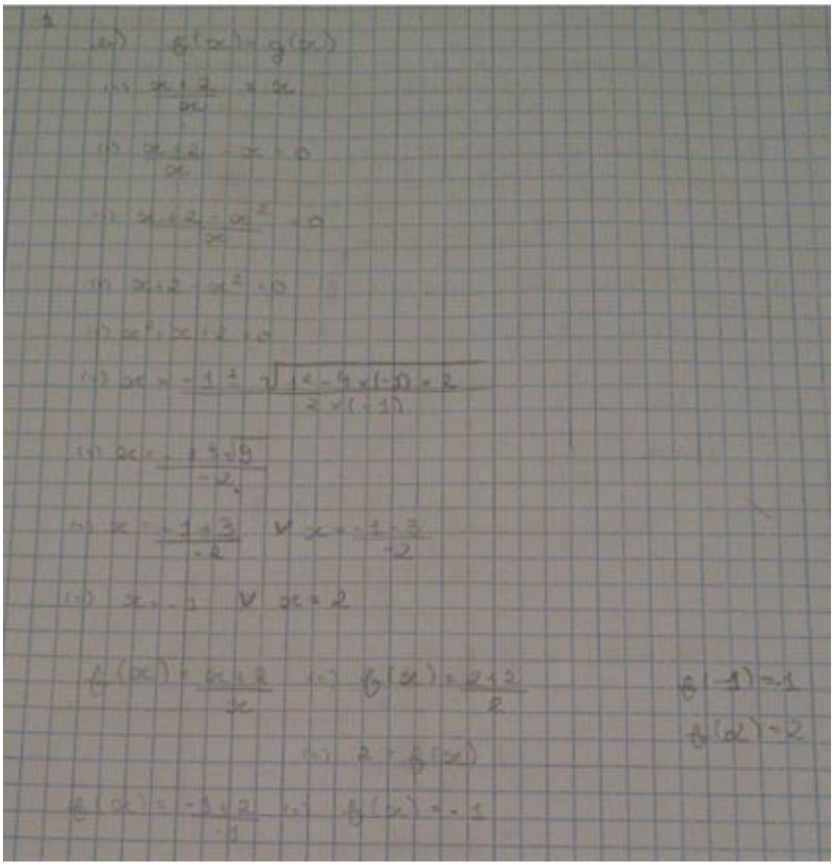


Figura 15. Reprodução do caderno do aluno A20.

Podemos observar na Figura 15 que o aluno A20 não calculou o domínio da função.

A alínea c) foi resolvida em conjunto (na turma) de forma a que os alunos se entreajudassem no uso da calculadora, isto é, de forma a saberem quais os comandos que deviam ser usados. Assim, os alunos foram questionados sobre quais as funções a introduzir na calculadora e de que formam conseguiam chegar ao resultado pretendido, isto é, às coordenadas dos pontos. Nesta alínea ainda era pedido uma pequena composição matemática que mostrasse como chegaram ao resultado.

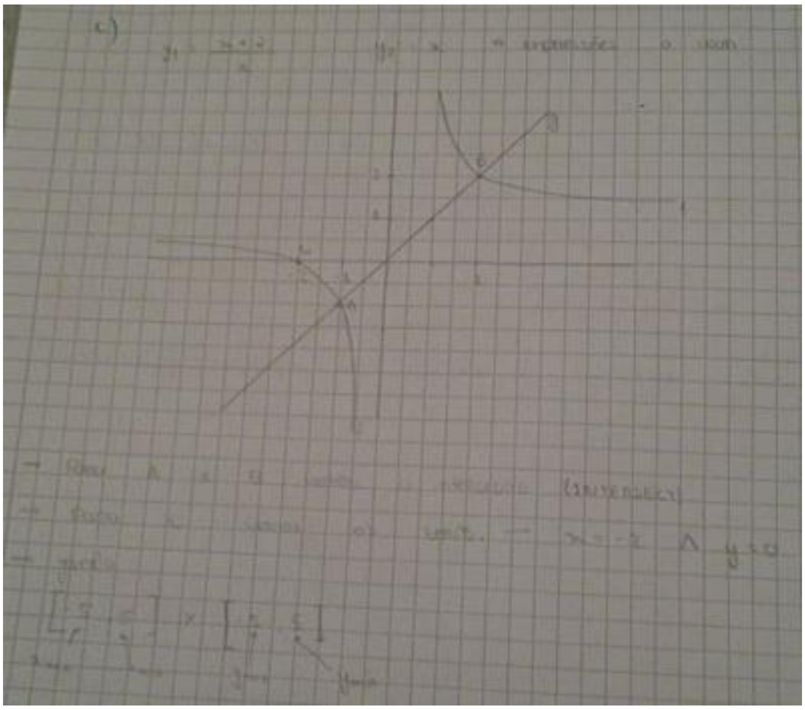


Figura 16. Reprodução do caderno do aluno A21.

Como se pode observar na Figura 16, o aluno A21 fez uma composição matemática onde constavam as funções introduzidas na calculadora, gráficos das funções devidamente assinaladas, assim como os pontos importantes para a resolução da tarefa, a estratégia usada e a janela de visualização devidamente assinalada.

> *A5:* Como faço uma composição matemática?
> *Professora:* Ora vamos ver o que diz o enunciado. Diz aqui "a expressão que traduz o problema". Quais foram as expressões introduzidas na calculadora?
> Alunos: $y_1 = \frac{x+2}{x}$ e $y_2 = x$.
> *Professora:* Então na resolução temos de escrever isso mesmo. E depois vamos seguir os passos indicados no enunciado e construindo a nossa composição.

Ao longo da resolução desta alínea também foi observado que os alunos tinham dificuldades em introduzir corretamente as funções na calculadora e também não sabiam como indicar a janela de visualização, como foi observado também no teste diagnóstico.

A tarefa 2 foi iniciada discutindo a fórmula da área do triângulo, pois $g(x)$ é a expressão que traduz a área do triângulo. Tendo em vista definir a base do triângulo, questionaram-se os alunos sobre as coordenadas dos pontos A e P, enfatizando a relação entre as suas abcissas, obtendo-se assim a base o triângulo. Em seguida, os alunos foram questionados em relação à ordenada do ponto P, sendo que esta corresponde à altura do triângulo.

Professora: Como fazemos para calcular a ordenada do ponto P? Sabemos que ele se desloca ao longo da função f. Se a abcissa do ponto P é x, a que é igual a ordenada?
A7: $f(x)$.
Professora: E, neste caso, a que é igual $f(x)$?
A7: $\frac{6}{x+1}$.

Assim, os alunos puderam concluir acerca da altura do triângulo e definir a equação de $g(x)$.

Relativamente à alínea b_1), os alunos conseguiram concluir que para calcular as coordenadas dos pontos A e P tinham de resolver a equação $g(x) = \frac{21}{4}$, obtendo, assim, as abcissas dos pontos. De seguida, faltando calcular a ordenada do ponto P, pois já tinham concluído que a ordenada do ponto A era 0,recorreram à função $f(x)$ para calcularem a ordenada do ponto P. No cálculo da abcissa do ponto P foi abordada a regra do pneu de forma a recordarem essa mesma regra, pois foi necessário aplicar essa regra.

A abordagem da alínea b_2) foi idêntica à adotada na tarefa 1c) da questão anterior, em termos de processos de resolução na calculadora. Para tal, os alunos consideraram a função $g(x)$ e a função constante $\frac{21}{4}$ e determinaram as coordenadas do ponto de interseção dos gráficos correspondentes. Deste modo, os alunos associaram, erradamente, as coordenadas dos pontos obtidos na calculadora às coordenadas dos pontos pretendidos, pois $g(x)$ é a função que define a área do triângulo e não a função esboçada no enunciado. Assim, perante esta dificuldades, foi necessário esclarecer os alunos do seu erro e calcular novamente a ordenada do ponto P.

4.2.1. Resolução analítica e gráfica de inequações fracionárias

Para iniciar o estudo das inequações fracionárias, foi previamente abordada a resolução de inequações simples, usando um exemplo do teste diagnóstico, passando-se depois para a resolução das equações fracionárias. Nesta abordagem começou-se por usar processos analíticos e, seguidamente, processos gráficos. Adicionalmente, no decorrer das aulas, foram colocadas questões diretas, tendo em vista que os alunos ultrapassassem as dificuldades encontradas no teste diagnóstico e no decorrer da observação das aulas.

Análise seguinte foi feita tarefa a tarefa para perceber melhor as dificuldades e as estratégias adotadas pelos alunos.

Inicialmente, foi apresentada a seguinte tarefa aos alunos:

Tarefa 1. Considere a inequação $3-\frac{1-2x}{3}\geq 1$, resolva-a e escreva o respetivo conjunto de solução sob a forma de intervalos de números reais:

1. Por processos analíticos;
2. Com recurso à calculadora gráfica, confirme o resultado anteriormente obtido. Para tal, apresente um esboço do(s) gráfico(s) adequados à resolução do problema, incluindo as assíntotas.

Na exploração da tarefa 1a) verificou-se o seguinte diálogo:

Professora: Primeiro, o que tenho de fazer para resolver esta inequação?
Alunos: Reduzir tudo ao mesmo denominador.
Professora: Depois de reduzir ao mesmo denominador...
Professora: E agora?
Alunos: Cortam-se os 3.
Professora: Os denominadores.

Nesta tarefa também foi salientado que o sinal menos antes do traço fração vai alterar os sinais do numerador da fração, depois de se eliminarem os denominadores, o que se deveu ao fato de muitos alunos terem errado no cálculo dos sinais nesta tarefa. Os alunos também foram questionados em relação ao sinal de desigualdade quando a incógnita tinha o sinal negativo (Figura 17).

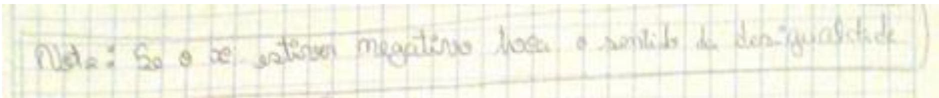


Figura 17. Reprodução do caderno do aluno A10.

A alínea b) foi abordada fazendo uma comparação com a resolução gráfica de equações. Assim, os alunos concluíram que tinham de introduzir as equações $y_1=3-\frac{1-2x}{3}$ e $y_{2=}1$, calcular a interseção dos gráficos e fazer uma composição matemática onde teriam de constar as expressões usadas, o gráfico ou gráficos, devidamente assinalados, bem como a janela de visualização utilizada, o ponto de interseção dos gráficos, a estratégia usada e o conjunto solução do problema.

Ainda sobre a resolução gráfica, os alunos questionaram se podiam passar tudo para o primeiro membro e ter apenas uma equação, ao que a professora respondeu que podiam, ressalvando que seriam contas desnecessárias pois o objetivo era resolver a inequação apenas graficamente, sendo, por isso, desnecessário efetuar cálculos. No caso em que os alunos obtiveram apenas uma equação, eles concluíram que teriam de calcular os zeros e ver onde é que a função tomava valores superiores ou iguais a zero.

Os alunos também questionaram se na calculadora não dava para alterar o sinal de igualdade pelo sinal de desigualdade, ao qual a professora respondeu que era uma outra possível forma de resolução. Simultaneamente, foi também salientado que nem sempre a calculadora gráfica nos dá valores exatos, que neste caso difere da resolução analítica, que nos dá um valor exato, tal como se pode observar na figura seguinte.

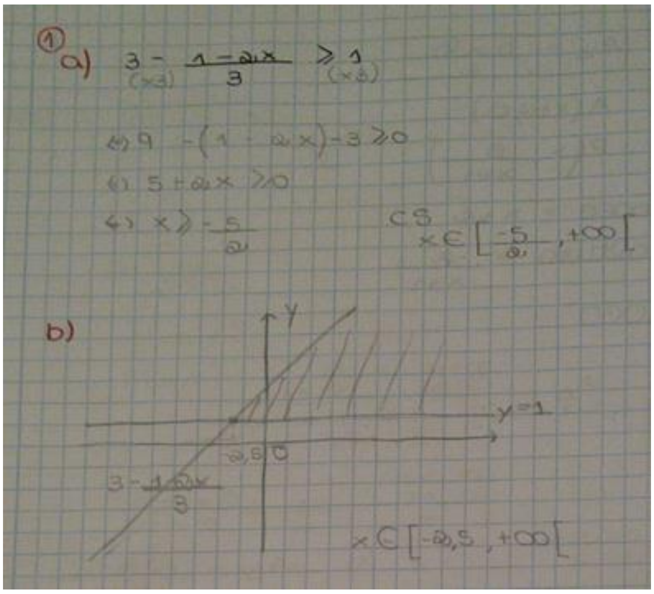
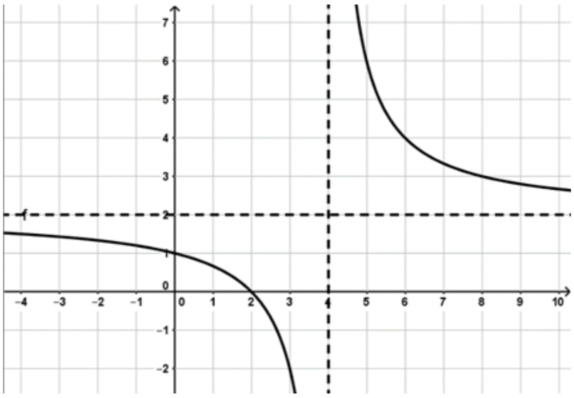


Figura 18. Resolução da alínea 1a) pelo aluno A22.

Na Figura 18 podemos observar a resolução da tarefa 1 pelo aluno A22. Em relação à alínea b), podemos observar que o aluno tracejou o gráfico da função de forma a concluir acerca do conjunto solução. Também se pode ainda observar que o aluno não assinalou a janela de visualização nem a estratégia usada.

De seguida foi proposta a seguinte tarefa:

Tarefa 2. Considere o seguinte gráfico de uma função f:



a) Determine sob a forma de intervalo de números reais, os valores de x para os quais $f(x) \geq 0$.

b) Sabendo que $y = \frac{2x-4}{x-4}$ é uma expressão analítica de f, resolva, analiticamente, a inequação $\frac{2x-4}{x-4} \geq 0$.

Objetivo da alínea a) desta tarefa era responder à questão observando somente o gráfico dado e concluir acerca do conjunto solução da inequação, seguindo-se a resolução analítica na alínea b). Aqui podemos observar que o processo de resolução da inequação foi inverso ao da tarefa 1, começando pela resolução gráfica e confirmando com a resolução analítica.

Relativamente a alínea a), a questão foi debatida com o grupo turma, tendo todos contribuído para a sua resolução e concluído acerca dos do conjunto solução. O maior debate ocorreu sobre se o valor 2 é, ou não, elemento do conjunto solução, tendo os alunos conluído, por fim, que seria solução da inequação.

Professora: O que é que peço? Os valores de x para os quais a função é maior ou igual a zero. Qual é a imagem do ponto $x = 2$?
Alunos: É 0.
Professora: Então é aberto ou fechado no 2?
Alunos: Fechado.
Professora: E em 4 é aberto ou fechado?
Alunos: Aberto.
Professora: Porquê?
Alunos: Porque o 4 não pertence ao domínio.

Relativamente à alínea b), os alunos foram questinados acerca do tipo de função, concluindo que era uma função fracionária.

Professora: Quando temos equações fracionárias, temos de ter em atenção a quê?

A1: Ao domínio.
Professora: Portanto, no caso da resolução de inequações deste tipo, será que podemos tirar os denominadores?
A13: Não porque precisamos para o domínio.
A19. Então se eu calcular o domínio já posso tirar o denominador.
Professora: Nas equações inteiras, porque é que nós podemos tirar o denominador? Porque o conjunto solução não se altera. Agora imagina que eu tenho isto assim ($3 > 2$), isto é verdade. Se eu multiplicar ambos por um número positivo?
Alunos: Continua a ser verdade.
Professora: E agora se eu multiplicar por um número negativo.
Alunos: Já não é verdade.
Professora: Aquilo que eu fazia na resolução de equações, quer se multiplique por um número negativo quer se multiplique por um número positivo a igualdade continua. No caso das desigualdades, se eu multiplicar por um número positivo o que é que acontece ao sentido da desigualdade?
Alunos: Fica igual.
Professora: E se eu multiplicar por um número negativo?
Alunos: Inverte.
Professora: Agora vamos ver quando eu tenho $\frac{4}{x} > 1$, eu tenha de multiplicar por quanto?
Alunos: Por x.
Professora: Então mantenho o sentido da desigualdade ou troco?
Alunos: Não se sabe.
A19: Então como resolvemos.
Professora: Vamos ter de resolver sem tirar o denominador, a não ser que eu conheça o sinal.

Neste diálodo é evidente a dificuldade dos alunos em perceber que o domínio altera o conjunto solução. Assim, os alunos concluíram que no caso da resolução de inequações fracionárias não podiam retirar os denominadores.

De seguida, estudaram-se os sinais do numerador e do denominador, construindo uma tabela de sinais. Nesta fase foi sentida alguma dificuldade pelos alunos acerca do estudo da função, pois não tinham a noção do aspeto gráfico das funções, mais precisamente, tinham dificuldade em associar o declive de uma função afim ao sinal dessa função.

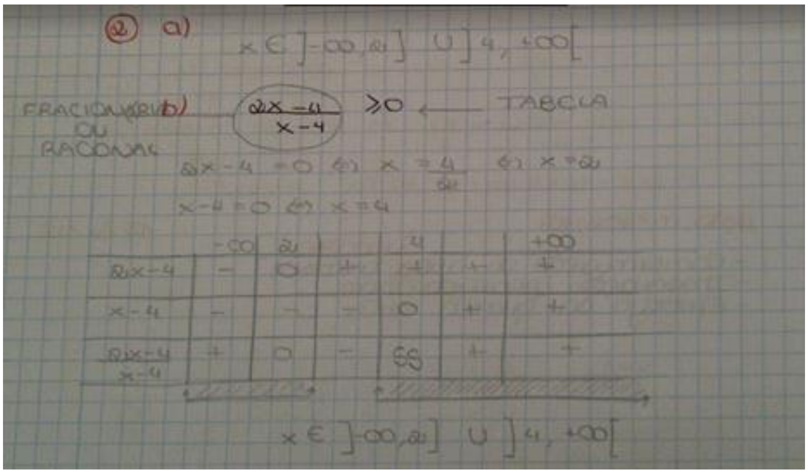


Figura 19. Resolução da tarefa 2 pelo aluno A22.

Em termos da metodologia de resolução analítica de inequações fracionárias, na Figura 19 podemos observar que o aluno referiu o uso de uma tabela de sinais , tal como foi concluído em conjunto com a turma. Ainda nesta alínea, os alunos foram questinados acerca dos zeros e dos valores sem sigifiacado da função fracinária.

Tarefa 3. Resolve a seguinte inequação fracionária:

$$\frac{x}{x+12} \geq \frac{x+1}{20}$$

Por processos analíticos.

Nesta questão foi dado tempo aos alunos para a resolverem individualmente no lugar ou discutindo com o colega do lado, podendo ainda recorrer à ajuda da professora e das professoras assistentes.

Nesta tarefa foi observado que os alunos continuavam a resolver esta inequação fracionária como se de uma inequação inteira se tratasse, isto é, tirando os denominadores, mostrando assim falta de atenção. Também foi observado que alguns alunos continuavam a não ter em atenção o sinal menos antes do traço fração, não trocando os sinais dos termos do numerador, de também não saberem associar a concavidade da parábola ao sinal do coeficiente de grau dois.

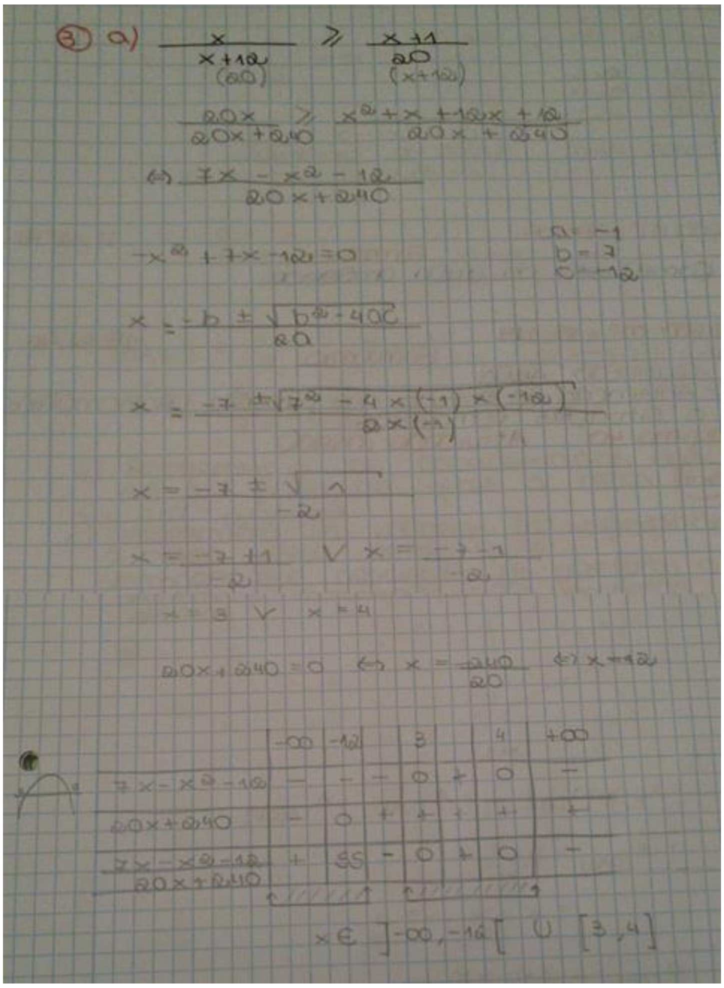


Figura 20. Resolução da tarefa 3 pelo aluno A22.

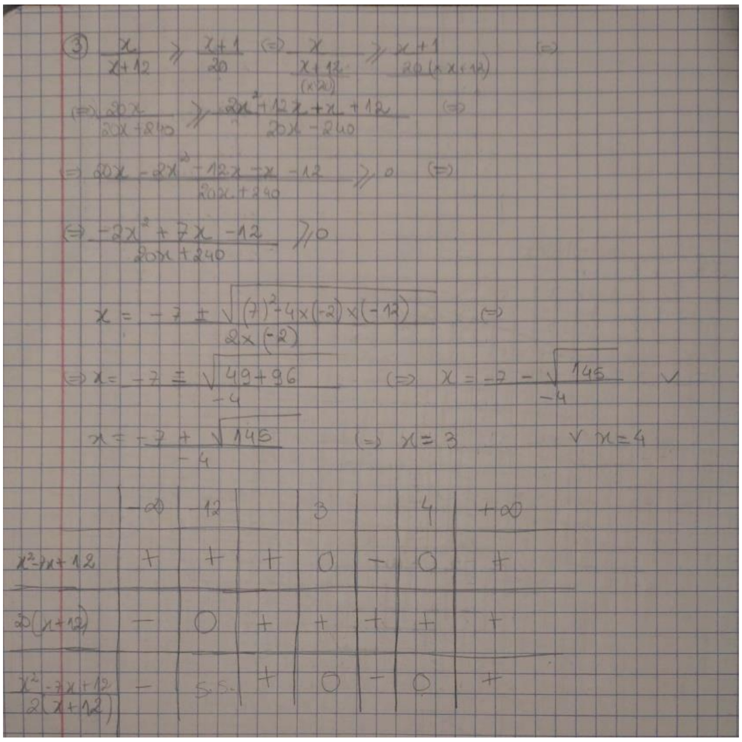


Figura 21. Resolução da tarefa 3 pelo aluno A21.

Nas Figuras 20 e 21 podemos observar dois tipos de resolução: o aluno A22 passou todos os termos para o primeiro membro da inequação, enquanto o aluno A21 passou todos os termos para o segundo membro da inequação. Estes dois tipos de resolução, foram abordados no quadro e discutidos com a turma de forma a perceberam que pode existir várias formas de resolver a mesma inequação.

Na aula seguinte exploraram-se mais alguns exemplos de inequações, como se exemplifica a seguir:

Tarefa 1. Resolve, analítica e graficamente, cada uma das seguintes inequações:

a) $7 + 5x \geq 1$

b) $\frac{1}{x} > 2$

c) $\frac{x^2-1}{x^2-8} \geq 0$

Esta tarefa foi entregue aos alunos para a resolverem em casa. O objetivo era resolverem as inequações analiticamente e confirmarem graficamente. Contudo, como podemos observar na Figura 22, os alunos apenas resolveram a tarefa analiticamente, não apresentando em nenhuma alínea qualquer esboço gráfico.

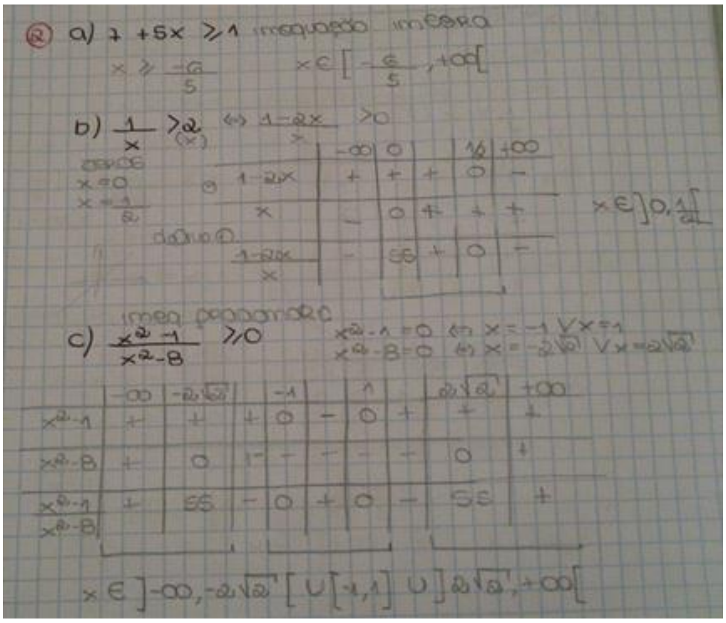


Figura 22. Resolução da tarefa 2 pelo aluno A21.

Apesar desta tarefa ter sido corrigida no quadro e discutida em conjunto com a turma, na aula seguinte constatou-se que muitos alunos apenas corrigiram a parte referente à resolução analítica das inequações e não passaram a resolução gráfica.

Relativamente à alínea 2a), na aula seguinte, foi pedido a um aluno para a resolver no quadro, tendo sido apresentada a resolução seguinte:

$$7 + 5x \geq 1 \Leftrightarrow 7 - 1 + 5x \geq 0 \Leftrightarrow 6 + 5x \geq 0 \Leftrightarrow 5x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq \frac{6}{5}$$

No final a resolução foi perguntado aos alunos se estava certo e como não estava, perguntou-se onde tinha errado. Os alunos concluíram que o sinal do 6 tinha de ser negativo pois tinha passado para o outro membro.

Na parte referente à resolução gráfica, os alunos foram questionados acerca do método de resolução, tendo respondido que tinham de introduzir as equações $y_1 = 7 + 5x$ e $y_2 = 1$, calcular a interseção e concluir acerca do conjunto solução. Foi ainda salientado que, na resolução gráfica, a calculadora nem sempre nos dá uma solução exata, sendo a resolução analítica o método a seguir para obter o valor exato e a calculadora gráfica um método para confirmar o resultado antes obtido, ainda que em termos aproximados.

Na alínea 2b) os alunos foram questionados acerca do tipo de inequação, ao que eles responderam tratar-se de uma inequação racional. Seguidamente, foram questionados acerca da metodologia a seguir neste tipo de inequações e qual era à diferença com a metodologia de resolução de inequações inteiras. No final da discussão foi feita uma síntese, que se pode observar na figura seguinte.

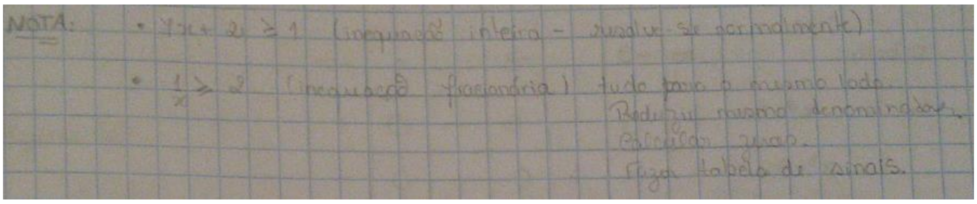


Figura 23. Reprodução do caderno do aluno A6.

Na resolução gráfica desta alínea foram seguidos os mesmos procedimentos, com a diferença de terem sido questionados acerca da representação gráfica da função $\frac{1}{x}$, pois ao longo das aulas notou-se uma grande dificuldade por parte dos alunos em visualizarem o aspeto gráfico das funções.

Nesta alínea também foi salientado, em conjunto com a turma, que um número positivo a dividir por zero não tinha significado e que zero a dividir por um número positivo era zero.

A seguir à correção do trabalho de casa, foram ainda propostas algumas tarefas em que os alunos tinham de resolver inequações. Em cada alínea foi pedido a um aluno que a resolvesse no quadro, seguindo-se a discussão na turma.

Apresenta-se, a seguir, a inequação que causou mais discussão, que tinha sido proposta antes no teste diagnóstico.

d. $x^2 > 9$

Nesta alínea os alunos foram questionados acerca do tipo da inequação, referindo eles tratar-se de uma inequação inteira do segundo grau.

Professora: Que inequação é esta?
A19: Inteira do segundo grau.
Professora: E agora, como faço para resolver este tipo de inequação?
A3: $x > 3 \vee x > -3$
A19: Não.
Professora: Pois não. Imagina que eu digo que $x = -5$. Aqui, o teu conjunto solução é $]-3; +\infty[$. Logo se eu disser que $x = -5$, $x^2 = 25$ não é maior que 9?
Alunos: É.
Professora: Então o que afirmaste não é verdade. Portanto, como posso resolver este tipo de inequações? (...) Neste tipo de inequações também usamos uma tabela de sinais.
A19: Professora é calcular os zeros e depois estudar os sinais...
Professora: Exatamente!

De seguida procedeu-se à resolução no quadro, sempre discutindo com o grupo turma. Ainda nesta alínea, os alunos perguntaram se podiam resolver fazendo um esboço do gráfico, ao que a professora respondeu que era outro método que poderiam usar, tal como se pode observar na figura seguinte.

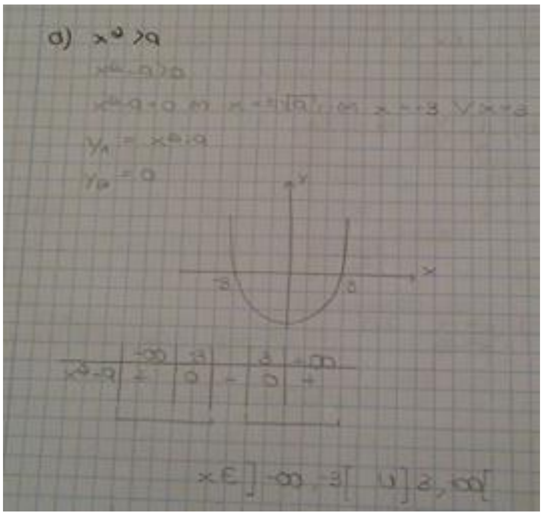


Figura 24. Resolução da alínea 2d) pelo aluno A6.

No final desta tarefa, em jeito síntese, observou-se o seguinte diálogo:

Professora: Portanto, posso resolver analiticamente todas as inequações da mesma forma?

A3: Não.
Professora: Logo, se eu tiver uma inequação inteira do primeiro grau?
A3: Normalmente, passo a incógnita para um membro o resto para o outro e resolvo.
Professora: E se for uma inequação inteira do segundo grau?
A1: Fazemos o gráfico ou a tabela.
A3: Mas primeiro temos de calcular os zeros.
Professora: Exatamente! E uma inequação fracionária?
Alunos: Passamos tudo para o primeiro membro, reduzimos ao mesmo denominador, calculamos os zeros e fazemos a tabela.
Professora: Exatamente! Então está tudo esclarecido!

4.3. Avaliação das aprendizagens

4.3.1. Questão aula

A questão aula foi pontuada com o total de 50 pontos, sendo que o resultado obtido por cada aluno poderia ou não ser usado no final do período caso o aluno precisasse de mais alguns pontos para subir a nota. Esta questão também permitiu aos alunos perceberem onde erraram para posteriormente melhorarem o seu desempenho no teste de avaliação sumativa. Para tal, aquando da correção da questão, foram feitas observações que levassem os alunos a reconhecer e a refletir sobre as suas dificuldades.

A análise da questão aula está dividida em duas partes: na primeira trata-se da resolução analítica de inequações (questão 1) e na segunda trata-se da resolução gráfica de uma inequação (questão 5).

De seguida, apresenta-se a primeira questão, os critérios de correção usados, assim como um pequeno resumo das cotações obtidas. Por último, apresentam-se os erros e estratégias usadas pelos alunos.

Questão 1: Resolva analiticamente cada uma das seguintes inequações, indicando o conjunto solução sob a forma de intervalo de números reais:

a) $\frac{x^2-16}{2x^2-8x} \geq 0$;

b) $\frac{x+2}{x} - \frac{3x}{x^2-2} < 1$.

Nesta questão o objetivo era resolver analiticamente a inequação dada, apresentando corretamente o seu conjunto solução.

Os critérios de avaliação usados na questão 1a) foram:

(15 pontos)

- Determina o zero do numerador; (2 pontos)
- Determina o zero do denominador; (2 pontos)

- Constrói a tabela de sinais; (7 pontos):
    - Coloca corretamente os sinais do numerador; (1 ponto)
    - Coloca corretamente os sinais do denominador; (1 ponto)
    - Coloca corretamente os sinais da fração; (3 pontos)
    - Conclui que os pontos $x = 0$ e $x = 4$ não pertencem ao domínio (2 pontos)
- Apresenta o conjunto solução sob a forma de intervalo. (4 pontos)

A média das classificações obtidas pelos alunos foi de 10,1 pontos (num total de 15 pontos), em que 2 alunos obtiveram a pontuação máxima, 16 tiveram entre 8 e 14 pontos e 4 tiveram entre 0 e 7 pontos.

Na questão 1a), 4 alunos usaram a fórmula resolvente para calcular os zeros do denominador, embora se tratasse de uma incompleta, e trocaram o sentido da concavidade da parábola, 1 resolveu como se tratasse de uma equação, 3 cometeram o erro de $\frac{0}{0} = 0$ (zero sobre zero é zero), 2 cometeram o erro de $\frac{0}{+} = ss$ (zero sobre um número positivo não tem significado), ou seja, que não pertence ao domínio, 1 cometeu o erro de $\frac{-}{0} = 0$ (um número negativo a dividir por zero é zero) 4 incluíram o $x = 4$ no domínio, 1 não deixou espaços na tabela entre os zeros e os infinitos ($-\infty$ e $+\infty$), 3 erros de cálculo e 1 não mostra como calculou os zeros. Nas Figuras 25 a 30 exemplificam-se os erros e as estratégias usadas pelos alunos na resolução desta alínea.

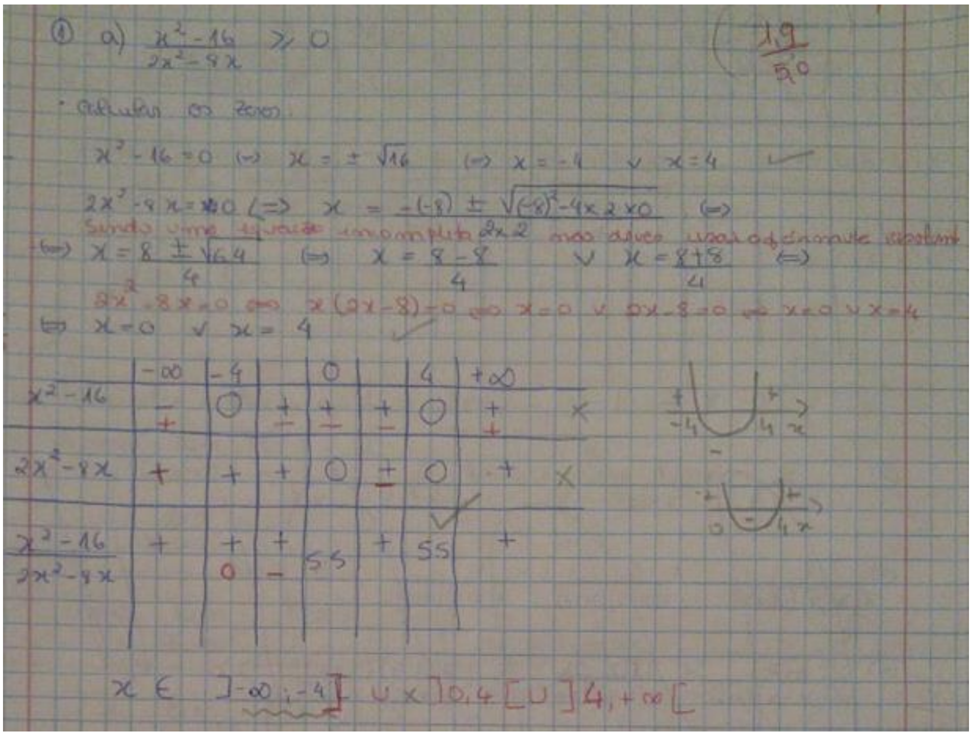


Figura 25. Resolução da questão 1a) pelo aluno A2.

Como podemos observar, na Figura 25, o aluno usou a fórmula resolvente para calcular os zeros do denominador, sendo que não era necessário pois trata-se de uma equação do segundo grau incompleta; os sinais do numerador na tabela estão trocados, o que leva a pensar que o aluno trocou o sentido da concavidade da parábola; e também se pode observar que o aluno considerou que $\frac{0}{+} = 0$ (zero sobre um número positivo é zero).

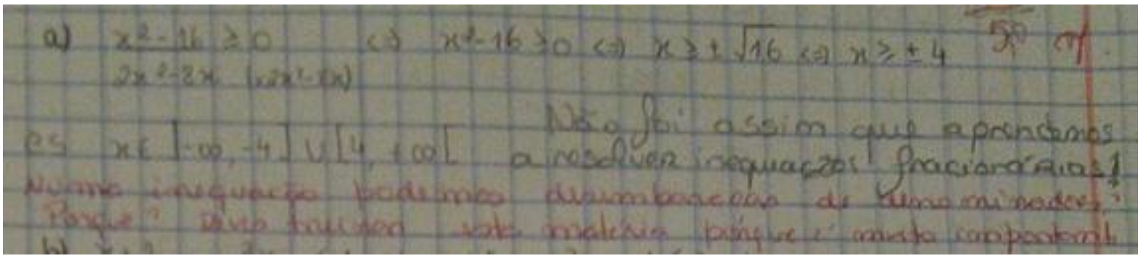


Figura 26. Resolução da questão 1a) pelo aluno A6.

Aqui, podemos observar que o aluno resolve a inequação como se tratasse de uma equação.

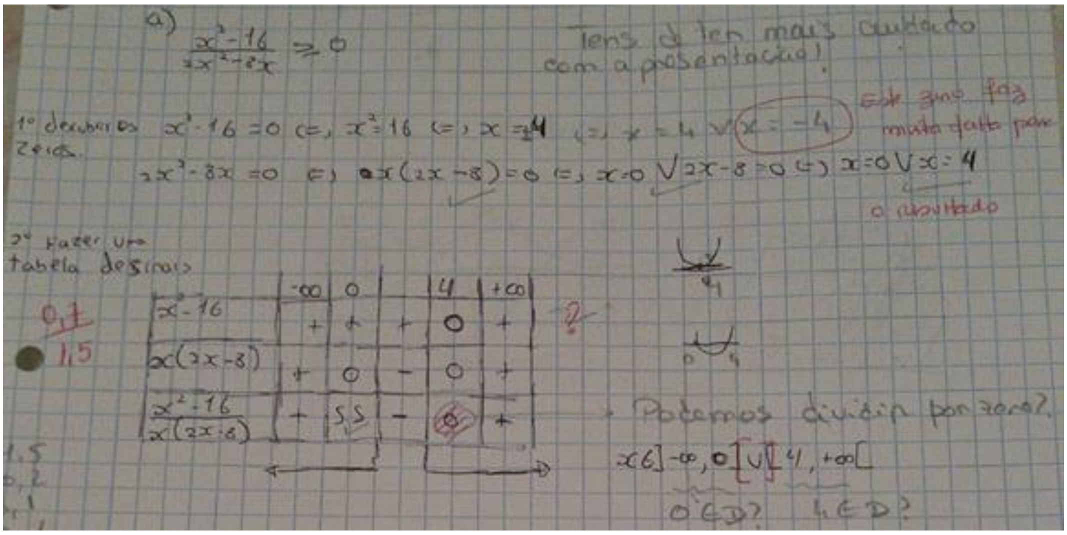


Figura 27. Resolução da questão 1a) pelo aluno A16.

Na Figura 27, podemos observar que o aluno apenas determinou o zero positivo do numerador e considerou que $\frac{0}{0} = 0$.

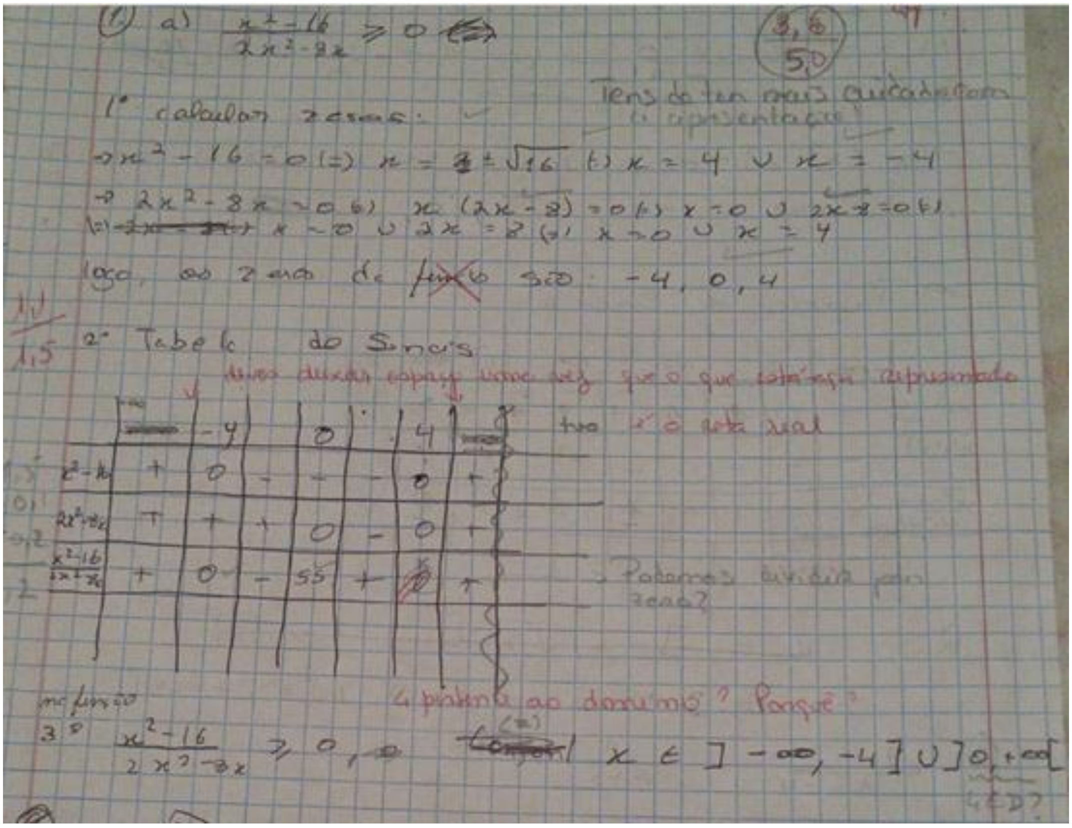


Figura 28. Resolução da questão 1a) pelo aluno A19.

Nesta resolução do aluno podemos observar que ele afirmou que os zeros do denominador e do numerador são zeros da função, não respeitou corretamente os espaços na tabela e considerou $\frac{0}{0} = 0$.

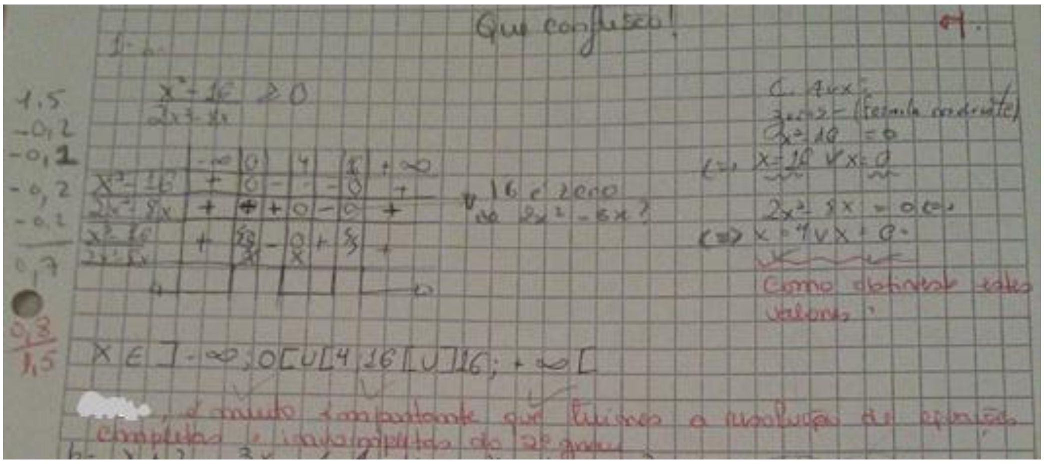


Figura 29. Resolução da questão 1a) pelo aluno A20.

Aqui podemos observar que o aluno não apresenta como calculou os zeros do numerador e do denominador, podendo os ter calculado usando a calculadora gráfica, e fê-lo incorretamente.

Também podemos observar que considerou $\frac{0}{+} = ss$ e que $\frac{-}{0} = 0$ (um número negativo sobre zero é zero).

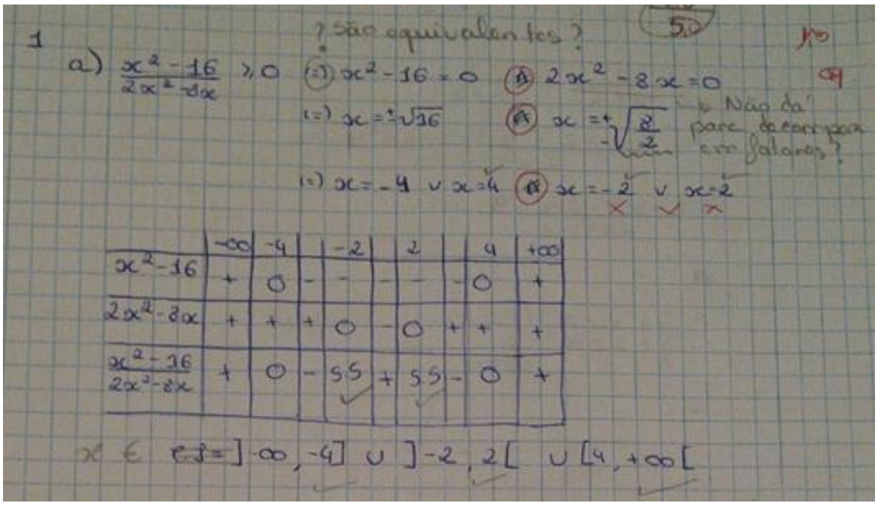


Figura 30. Resolução da questão 1a) pelo aluno A21.

Neste exemplo podemos observar que o aluno cometeu um erro de notação ao considerar a inequação equivalente à conjunção de duas equações.

Agora, no caso da questão 1b), os critérios de avaliação usados foram:

(15 pontos)

- Passa todos os termos para o 1° membro; (1 ponto)
- Reduz ao mesmo denominador; (1 ponto)
- Obtém $\frac{-x^2-4}{x(-x^2-2)} \geq 0$ (ou equivalente); (3 pontos)
- Determina o zero do numerador; (1 ponto)
- Determina o zero do denominador; (1 ponto)
- Constrói a tabela de sinais; (6 pontos):
  - Coloca corretamente os sinais do numerador; (1 ponto)
  - Coloca corretamente os sinais do denominador; (1 ponto)
  - Coloca corretamente os sinais da fração; (2 ponto)
  - Conclui que os pontos $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$ e $x = \sqrt{2}$ não pertencem ao domínio (2 pontos)
- Apresenta o conjunto solução sob a forma de intervalo. (2 pontos)

A média dos alunos foi de 8,2 pontos (num total de 15 pontos), em que 15 alunos tiveram entre 8 e 14 pontos, e os restantes 7 alunos entre os 0 e 7 pontos.

Nesta questão, 7 alunos erraram ao calcular o mínimo múltiplo comum entre os denominadores, 11 cometeram erros de cálculo, mais concretamente nos sinais, 1 cometeu outro tipo de erro de cálculo que será mostrado mais abaixo, 1 omitiu parte de um dos denominadores, 4 incluíram o valor $x = 0$ no seu conjunto solução e 1 concluiu erradamente o conjunto solução. Seguidamente apresentam-se exemplos dos erros e das estratégias dos alunos.

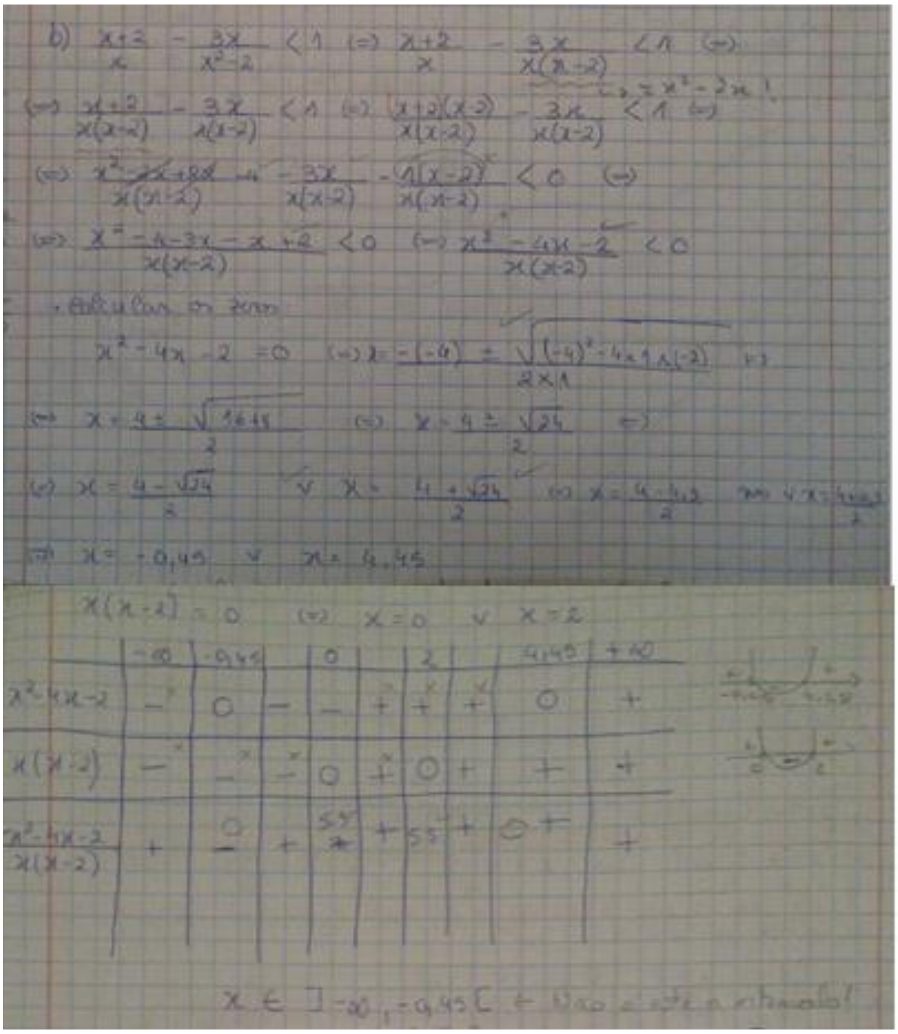


Figura 31. Resolução da questão 1b) pelo aluno A2.

Na Figura 31, podemos observar que o aluno fatorizou incorretamente o denominador da segunda fração, levando-o a reduzir mal os outros fatores. Para além deste erro de cálculo, o aluno não multiplicou corretamente os fatores todos da primeira fração quando reduziu ao mesmo denominador. Quando preencheu o sinal de cada fator do 2.º grau (parábola), na tabela, não colocou corretamente todos os sinais, devendo ter confundido com os zeros. Considerou, ainda, que $\frac{0}{-} = -$ (zero sobre um número negativo é um número negativo) e $\frac{0}{+} = +$(zero sobre um número positivo é um número positivo). No final não concluiu corretamente o conjunto solução.

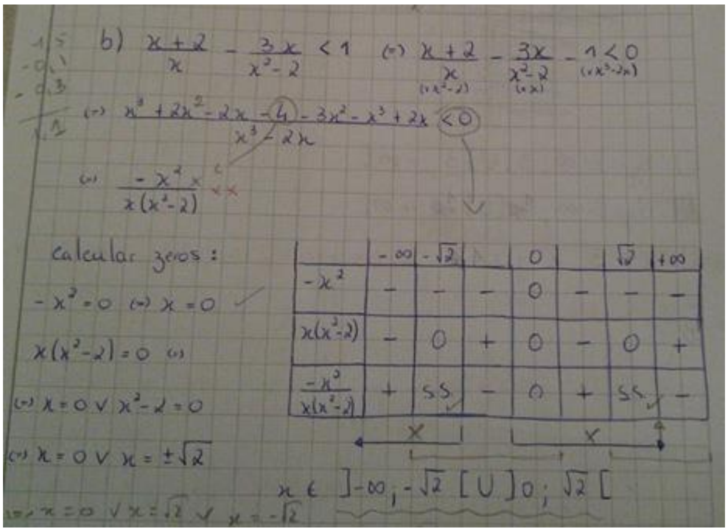


Figura 32. Resolução da questão 1b) pelo aluno A4.

Podemos observar que o aluno A4 (Figura 32) cometeu um erro de omissão, ignorando o -4 da equação. Quando foi concluir o conjunto solução o aluno trocou o sinal de desigualdade, devendo ter sido um erro de distração.

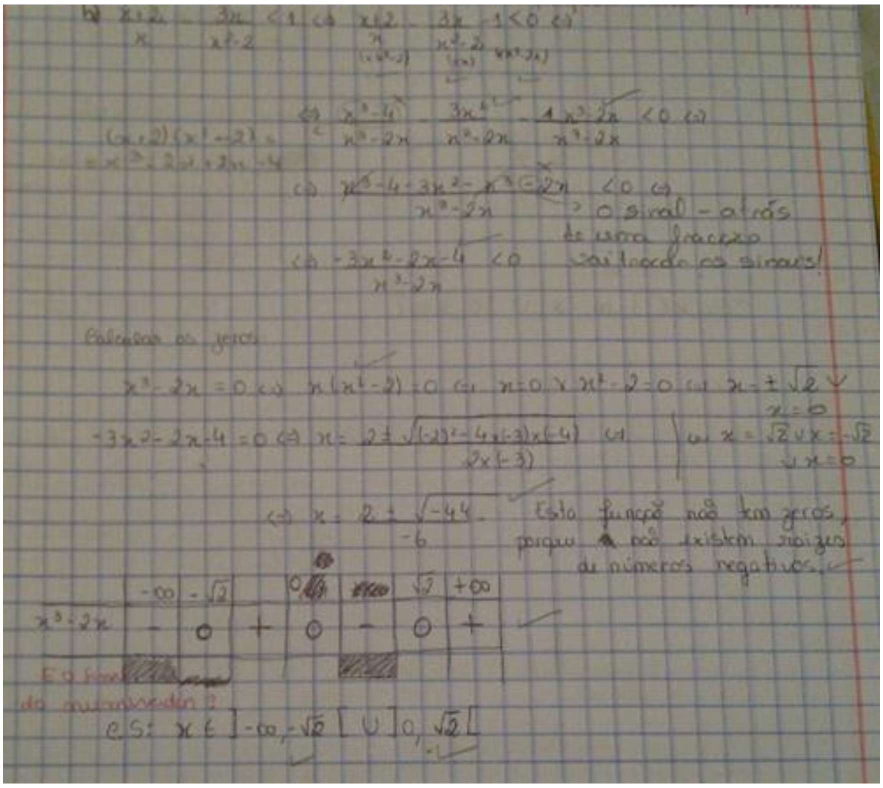


Figura 33. Resolução da questão 1b) pelo aluno A6.

Nesta resolução, da autoria do aluno A6 (Figura 33), podemos observar que ele concluiu mal o mínimo múltiplo comum entre os denominadores, o que complicou os cálculos. Não efetuou corretamente as multiplicações dos fatores e não trocou todos os sinais na última fração. Também pode observar-se que na tabela de sinais não incluiu o numerador, tendo usados apenas o denominador para concluir acerca do conjunto solução.

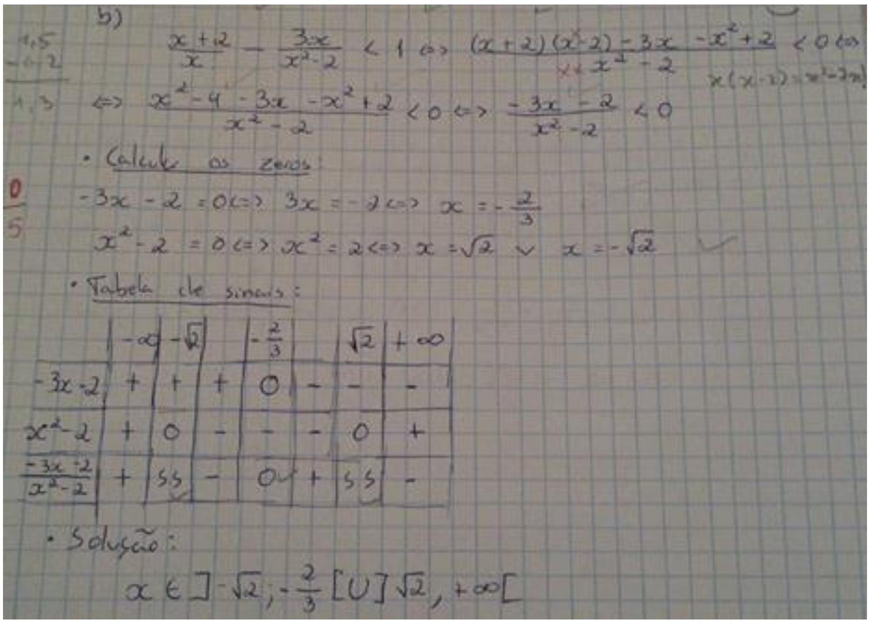


Figura 34. Resolução da questão 1b) pelo aluno A8.

Nesta resolução, da autoria do aluno A8 (Figura 34), podemos observar que ele não calculou corretamente o mínimo múltiplo comum entre os denominadores, tendo feito uma decomposição errada do denominador da segunda fração.

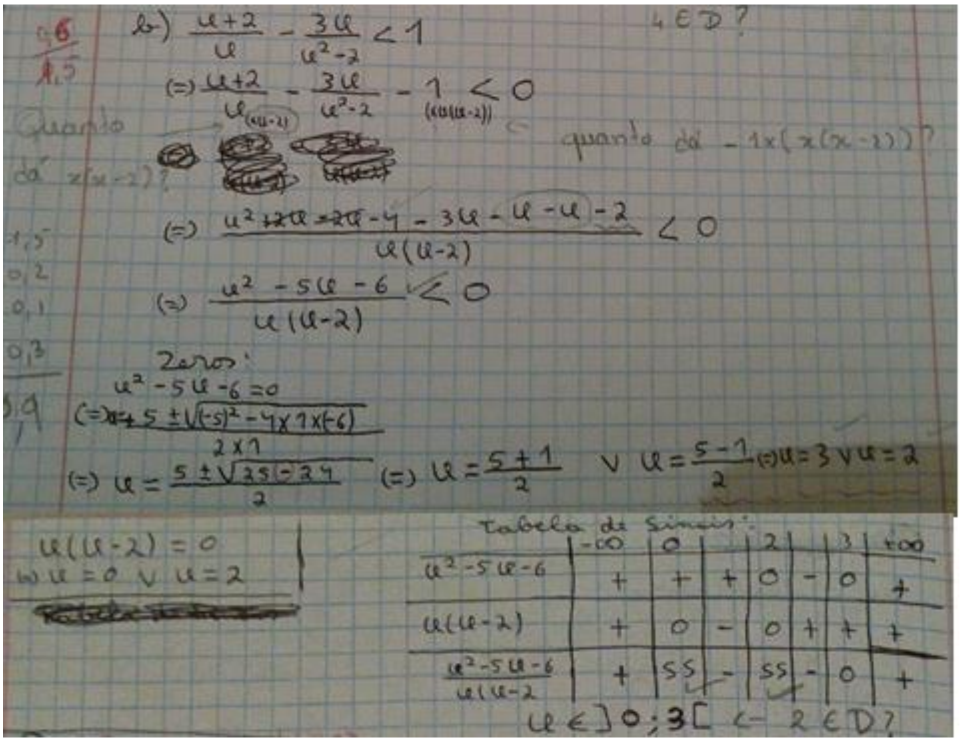


Figura 35. Resolução da questão 1b) pelo aluno A15.

Nesta resolução, realizada pelo aluno A15 (Figura35), pode observar-se que ele não decompôs corretamente o denominador da segunda fração, o que resultou num mínimo múltiplo comum dos denominadores errado. Quando multiplicou -1 pelo mínimo múltiplo comum omitiu erradamente os parênteses que tinha e, por último, quando concluiu acerca do conjunto solução, incluiu erradamente (face à sua resolução) o valor $x = 2$ no domínio.

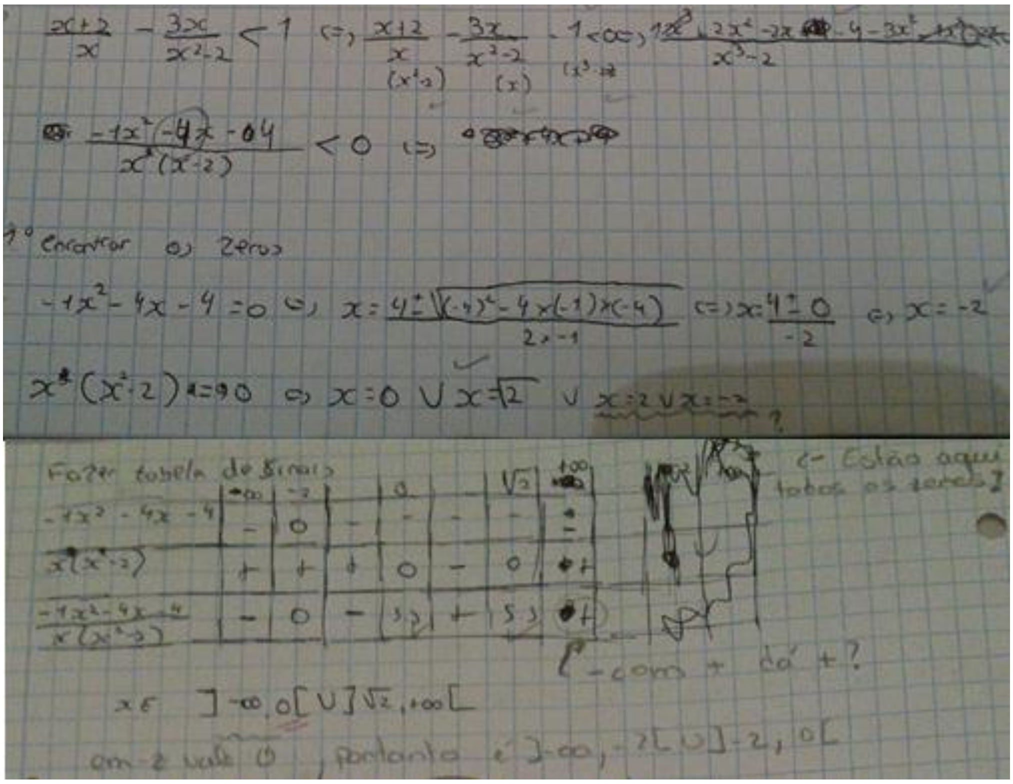


Figura 36. Resolução da questão 1b) pelo aluno A16.

Podemos observar que o aluno A16 (Figura36) não concluiu corretamente acerca do mínimo múltiplo comum entre os denominadores, o que dificultou as contas. Trocou o coeficiente do monómio de grau 2 e que conclui que Na tabela o aluno não incluiu os zeros todos e afirma erradamente que $\frac{-}{+} = +$ (um número negativo sobre um número positivo é igual a um número positivo). Quando conclui acerca do conjunto solução inclui o valor zero.

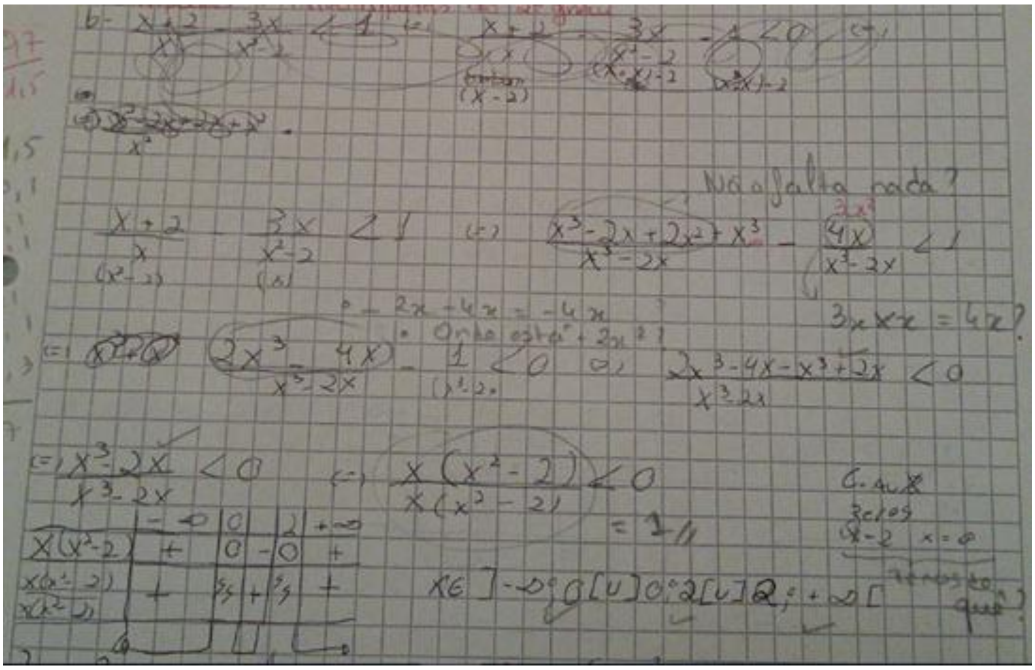


Figura 37. Resolução da questão 1b) pelo aluno A20.

Podemos observar que o aluno A20 (Figura 37) não aplicou corretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica omitindo alguns números, o que o levou a obter a proposição falsa $1 < 0$. Também se pode observar que não especificou de que função calculou os zeros.

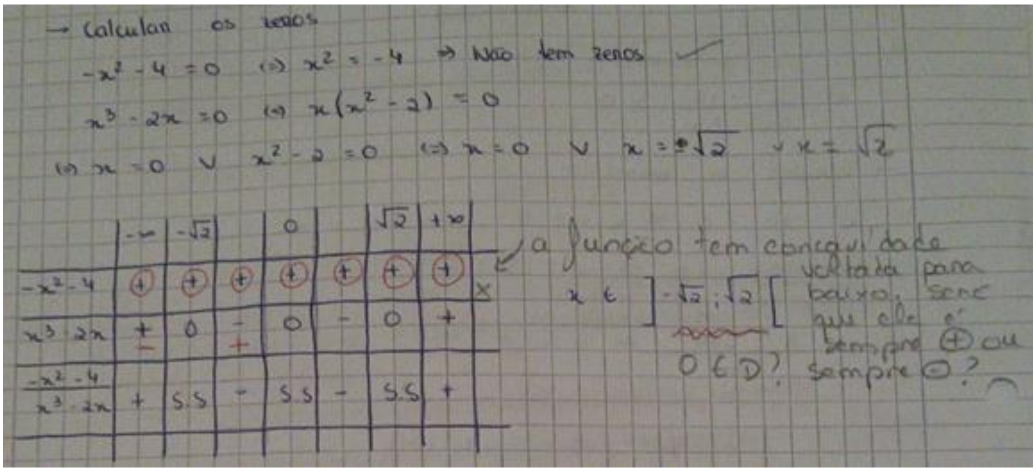


Figura 38. Resolução da questão 1 b) pelo aluno A22.

Nesta resolução, realizada pelo aluno A22 (Figura 38), podemos observar que ele conclui erradamente acerca do sentido de concavidade da parábola e troca alguns sinais do denominador, podendo isso dever-se ao desconhecimento do aspeto gráfico de uma função de grau 3.

Questão 2: Usando exclusivamente as capacidades da sua calculadora gráfica, resolva a seguinte inequação:

$$\frac{2}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}>1$$

Na sua resposta deve incluir:

- A função ou funções a utilizar;
- O esboço do(s) gráfico(s), devidamente assinalado(s);
- Os pontos importantes para resolução da inequação;
- A janela de visualização;
- O conjunto solução sob a forma de intervalos de números reais.

Nesta questão, usaram-se os seguintes critérios de avaliação (20 pontos):

- Escrever todos os tópicos; (3 pontos)
- Indicar janela de visualização; (2 pontos)
- Representação gráfica: (11 pontos)
  - de $\frac{2}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}$, incluindo as assíntotas; (3 pontos)
  - de $y=1$ (2 pontos)
  - assinalar os gráficos; (2 pontos)
  - assinalar os eixos coordenados (2 pontos)
  - as coordenadas dos dois pontos de interseção; (2 pontos)
- Indicar a estratégia de resolução; (1 ponto)
- Apresentar a resposta sob a forma de intervalos. (3 pontos)

A média dos alunos foi de 7,5 pontos (num total de 20 pontos), em que 1 aluno obteve a pontuação máxima, 8 tiveram entre 10 e 19 pontos, 10 tiveram entre 0 e 6 pontos e 3 alunos não apresentaram qualquer resolução. De seguida, apresentam-se os erros e estratégias usadas pelos alunos.

Nesta questão, 5 alunos não assinalaram quais as funções usadas, 8 não usaram a janela de visualização mais adequada, 2 não apresentaram todos os pontos de interseção, 3 não assinalaram os eixos e a origem do referencial, 3 não assinalaram a estratégia usada, 1 esboçou apenas parte do gráfico da função, 4 cometeram erros de contas, não concluindo a resolução, e 2 resolveram analiticamente a questão.

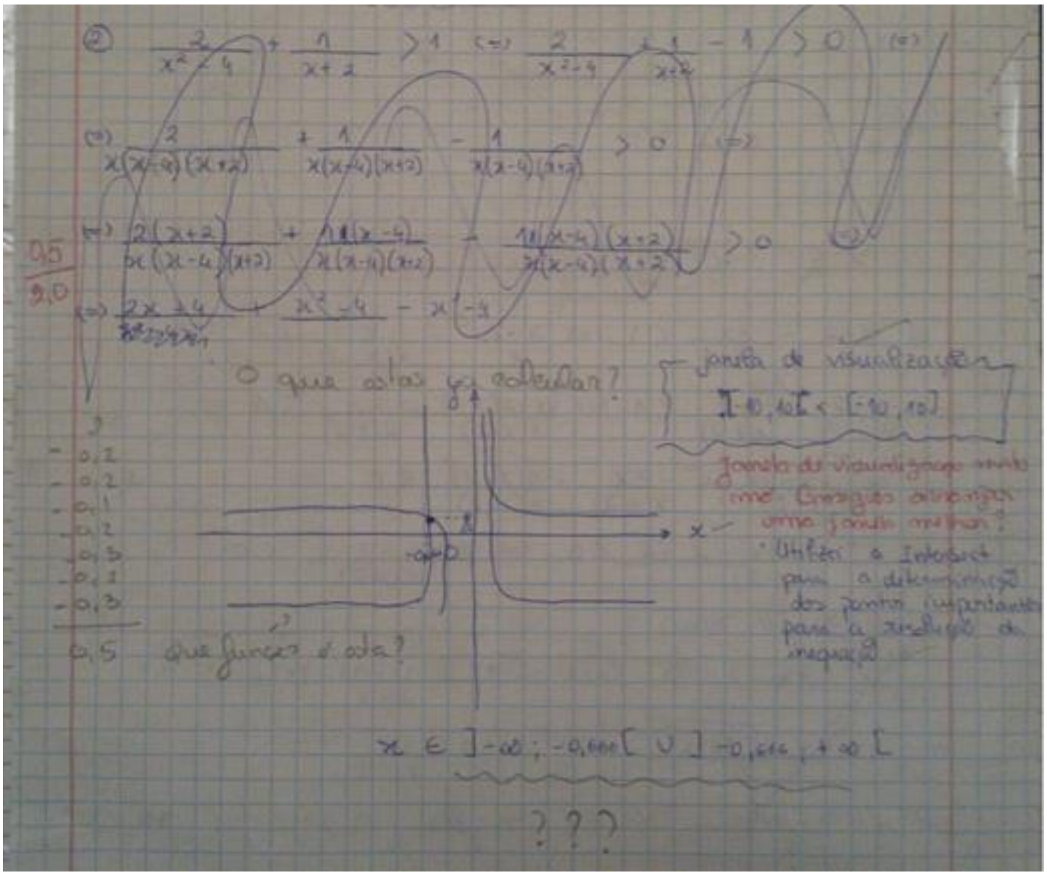


Figura 39. Resolução da questão 2 pelo aluno A2.

Nesta resolução, efetuada pelo aluno A2 (Figura 39), podemos observar que o aluno não indica quais as funções usadas, a janela de visualização não é a mais adequada e falta assinalar um ponto de interseção. Também podemos observar que inicialmente ia resolver analiticamente a questão, mas depois riscou e resolveu analiticamente.

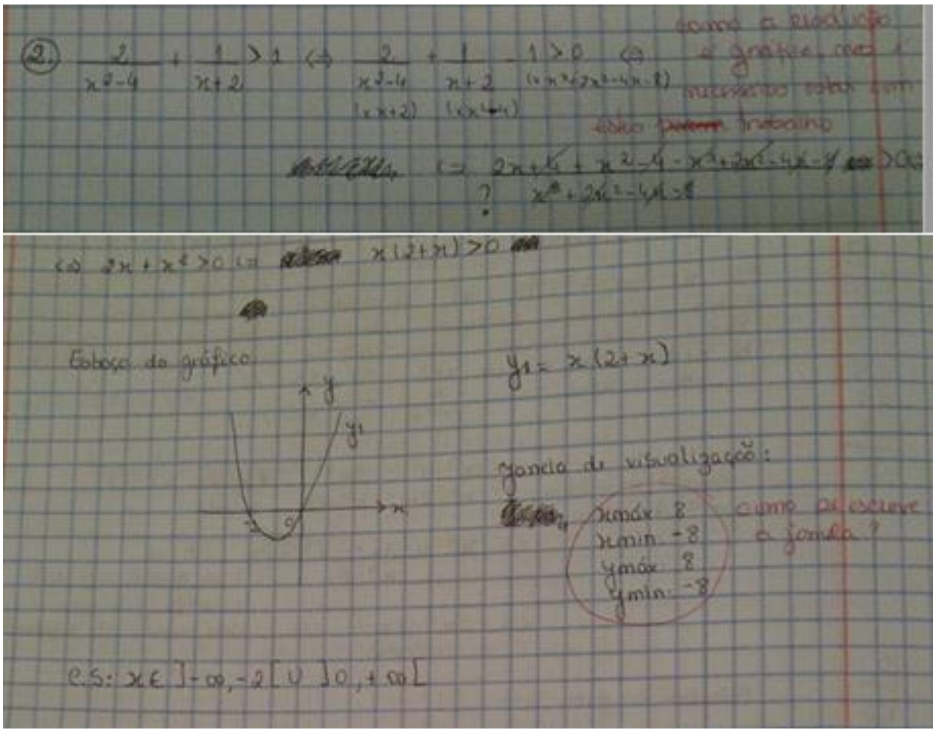


Figura 40. Resolução da questão 2 pelo aluno A6.

Na resolução do aluno A6 (Figura 40), podemos observar que o aluno efetuou cálculos desnecessários, cometendo, assim, alguns erros de cálculos. Também podemos observar que a forma como apresenta a janela de visualização não é a mais adequada.

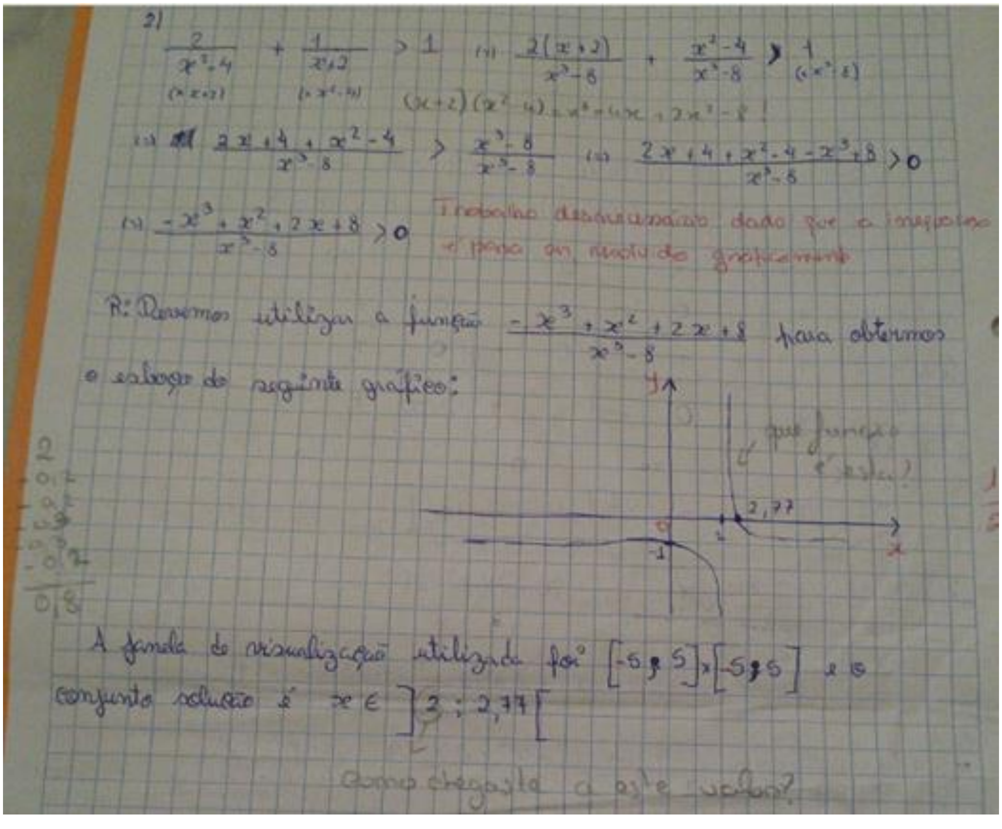


Figura 41. Resolução da questão 2 pelo aluno A10.

Na resolução do aluno A10 (Figura 41), pode observar-se que este aluno, tal como aconteceu com o aluno A6, efetuou algumas operações que não eram necessárias, tendo também cometido alguns erros de contas. Também se pode observar que o aluno não inclui as assíntotas no esboço do gráfico e não é claro como chegou ao conjunto solução.

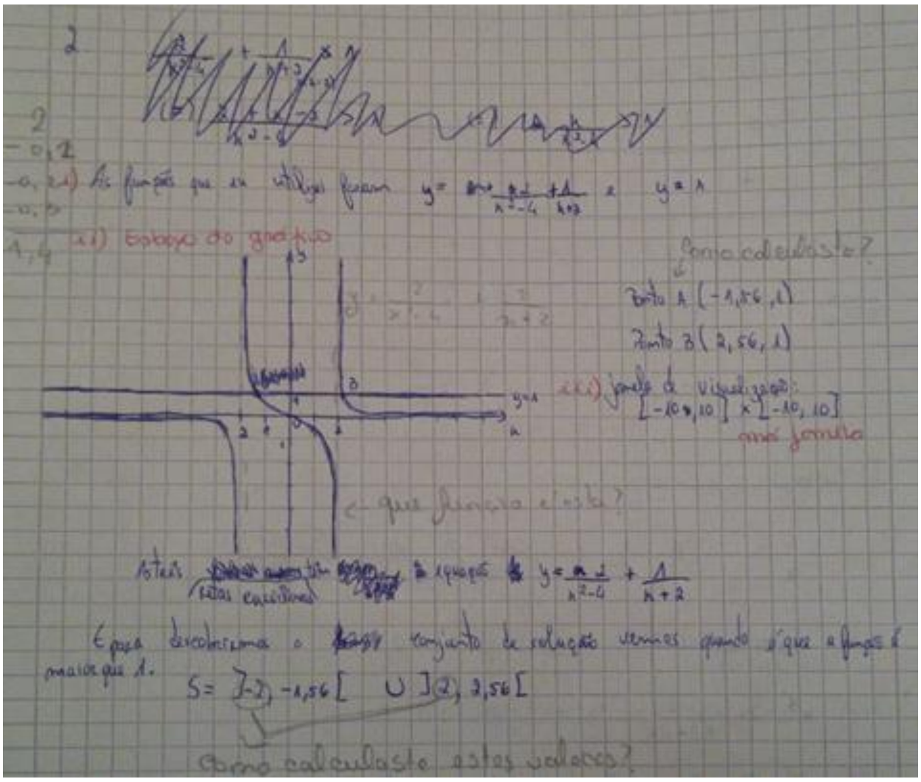


Figura 42. Resolução da questão 2 pelo aluno A13.

Na resolução do aluno A13 (Figura 42), pode observar-se que ele não assinalou as funções no esboço do gráfico, assim como as assíntotas. Assinalou os pontos de interseção, mas não disse como chegou às suas coordenadas. Por último, a janela de visualização usada por este aluno não foi a mais adequada.

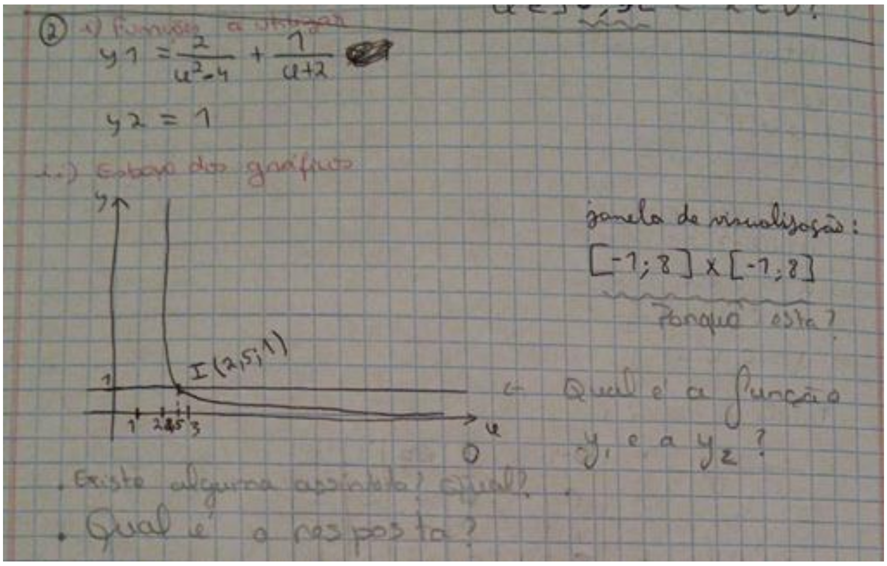


Figura 43. Resolução da questão 2 pelo aluno A15.

Na resolução do aluno A15 (Figura 43), pode observar-se que ele esboçou apenas parte da função, o que pode dever-se à má escolha da janela de visualização. Ainda no esboço do gráfico, ele não assinalou a função. Também não referiu qual a estratégia usada para chegar ao ponto de interseção. Por último, não concluiu nada acerca do conjunto solução.

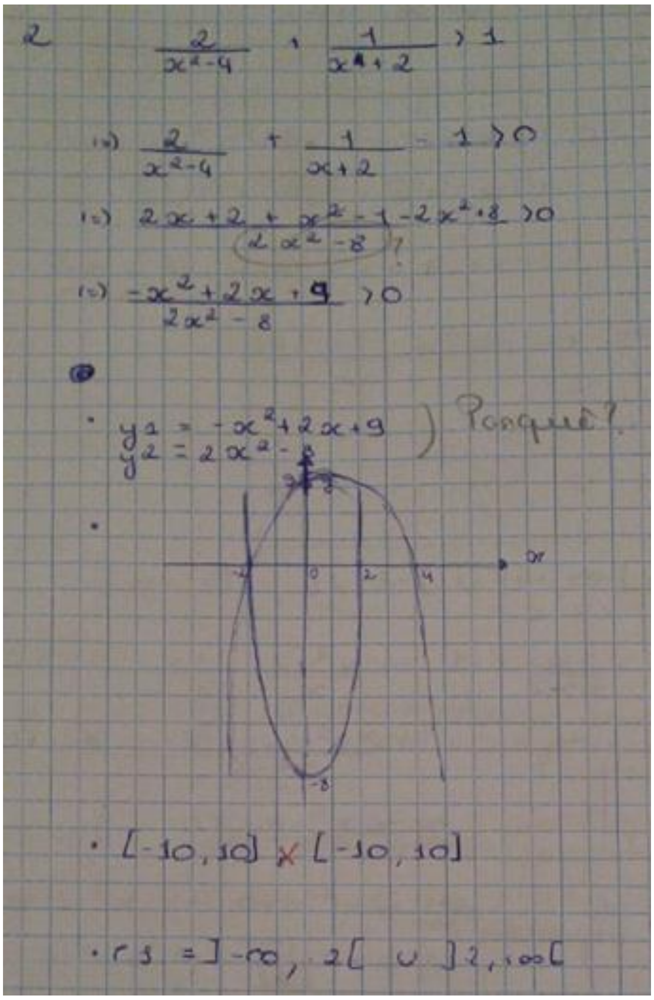


Figura 44. Resolução da questão 2 pelo aluno A21.

Na resolução do aluno A21 (Figura 44), pode observar-se que, tal como aconteceu com os alunos A6 e A10, ele efetuou algumas operações que não eram necessárias, tendo também cometido alguns erros de contas. No final escolheu, erradamente, o numerador para uma função e o denominador para outra.

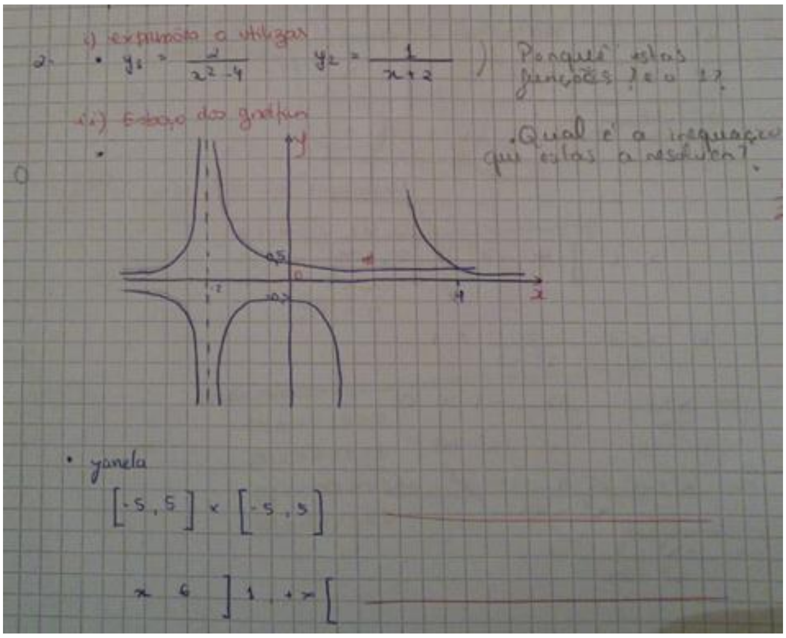


Figura 45. Resolução da questão 2 pelo aluno A22.

Na resolução do aluno A22 (Figura 45), pode observar-se, tal como no caso do aluno A21, uma má escolha das funções a introduzir na calculadora. Neste caso, o aluno também não indicou qual a estratégia usada e no esboço do gráfico não indicou as funções, a origem e o nome dos eixos, assim como o ponto de interseção.

4.3.2. Teste de avaliação sumativa

A análise do teste de avaliação sumativa está dividida em três partes: a primeira trata da resolução analítica de equações e inequações (questões 3 e 4c)); a segunda envolve uma resolução analítica e a interpretação de um gráfico dado (questão 4d)); por último, a terceira, trata da resolução gráfica de uma inequação (questão 5).

Em cada parte, apresenta-se o enunciado da respetiva questão, os critérios de correção usados, assim como um pequeno resumo das cotações obtidas. Por último, apresentam-se exemplos dos erros e estratégias usadas pelos alunos.

Questão 3: Resolve, em $\mathbb{R}$, a equação $\frac{x^2-4}{x(x-2)} = \frac{1}{x}$ e escreve, em extensão, o conjunto solução.

Nesta questão o objetivo era resolver analiticamente a equação dada, apresentando corretamente o conjunto solução no final.

Os critérios de avaliação usados nesta questão foram:

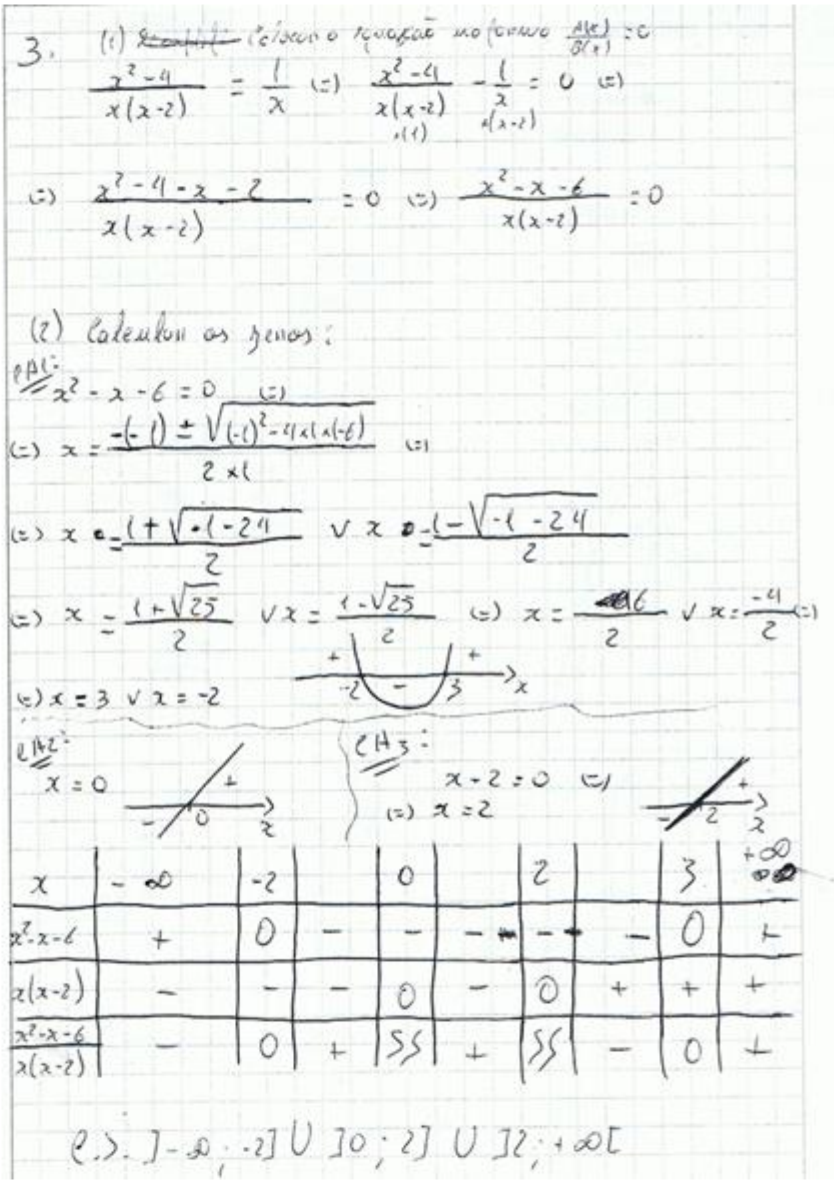
(14 pontos)

- Determina o domínio em que é válida a equação; (2 pontos)

- Determina o m. m. c.; (2 pontos)
- Desembaraça denominadores; (2 pontos)
- Escreve a equação na forma canónica; (2 pontos)
- Obtém as soluções da equação anterior; (2 pontos)
- Indica a solução da equação dada; (3 pontos)
- Define, em extensão, o conjunto solução. (1 ponto)

A média dos alunos foi de 9,4 pontos (num total de 14 pontos), em que 2 alunos obtiveram a pontuação máxima, 13 tiveram entre 8 e 13 pontos e 7 tiveram entre 0 e 6 pontos.

Nesta questão os alunos não determinaram corretamente o mínimo múltiplo comum entre os denominadores, 11 não calcularam o domínio, 9 não multiplicaram bem o numerador da segunda fração pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores, 2 não escreveram o conjunto solução, 2 transformaram a equação numa inequação, 1 "cortou" elementos do numerador e do denominador quando não podia e 2 omitiram um elemento na equação. Estes três últimos erros serão mais discutidos abaixo.



3. (1) Coloco a equação na forma $\frac{A(x)}{B(x)}=0$

$\frac{x^2-4}{x(x-2)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x(x-2)} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-4-x-2}{x(x-2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-6}{x(x-2)} = 0$

(2) Calculou os zeros:

C.A.1: $x^2-x-6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-6)}}{2\times1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{1-24}}{2} \vee x = \frac{1-\sqrt{1-24}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{25}}{2} \vee x = \frac{1-\sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \vee x = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$

C.A.2: $x = 0$

C.A.3: $x-2=0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	-2		0		2		3	$+\infty$
x^2-x-6	+	0	−	−	−	−	−	0	+
$x(x-2)$	−	−	−	0	−	0	+	+	+
$\frac{x^2-x-6}{x(x-2)}$	−	0	+	SS	+	SS	−	0	+

C.S. $]-\infty;-2] \cup]0;2] \cup]2;+\infty[$

Figura 46. Resolução da questão 3 pelo aluno A11.

Podemos observar que o aluno A11 (Figura 46) errou quando multiplicou o numerador da segunda fração, isto é, quando fez a operação $(-1)(x-2)$. Ainda na Figura 12 pode observar-se que o aluno não calculou o domínio e resolveu a equação como sendo uma desigualdade.

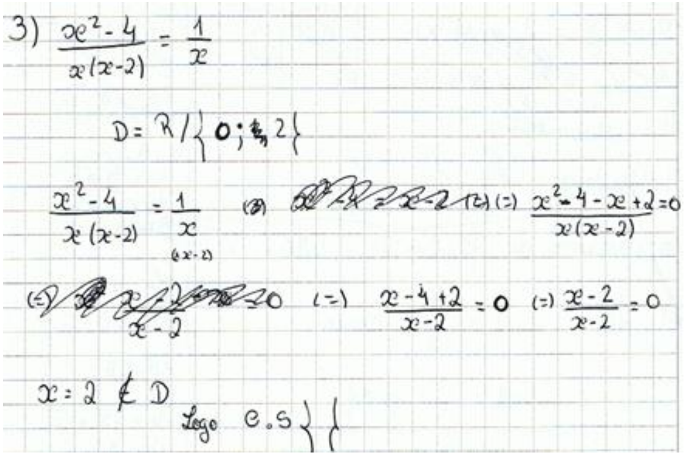
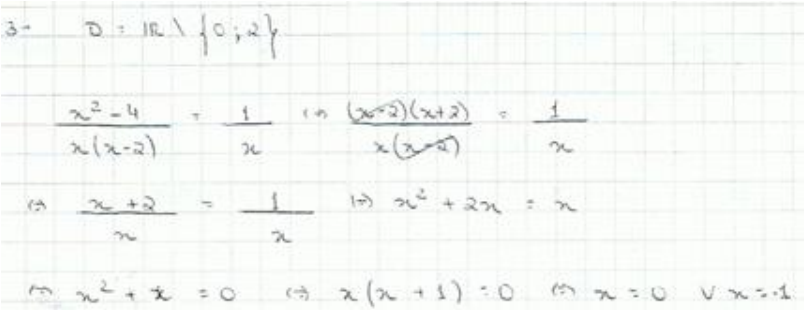


Figura 47. Resolução da questão 3 pelo aluno A1.

Como podemos observar, o aluno A1 (Figura 47) "cortou" o x^2 do numerador com o x do denominador, não tendo em atenção que só se podem simplificar fatores.

Figura 48. Resolução da questão 3 pelo aluno A17.

Podemos observar que o aluno A17 (Figura 48) não determinou corretamente o mínimo múltiplo comum entre os denominadores, não calculou o domínio e "cortou" o binómio $(x^2 - 4)$, tanto no numerador como no denominador, quando no numerador tinha uma adição algébrica.



3- $D: \mathbb{R} \setminus \{0;2\}$

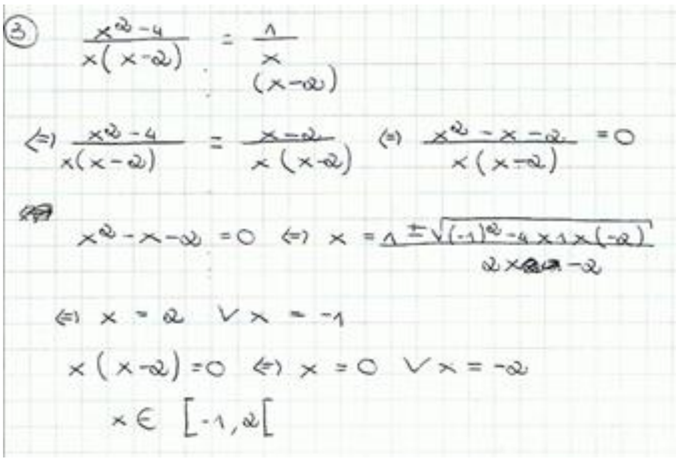
$$\frac{x^2-4}{x(x-2)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2+2x = x$$

$$\Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$$

Figura 49. Resolução da questão 3 pelo aluno A21.

Podemos observar um outro método de resolução. Aqui, o aluno A21 (Figura 49) decompõe o numerador do primeiro membro e corta $(x-2)$ do numerador e do denominador, a seguir multiplica desnecessariamente (pois já tinham o mesmo denominador) ambos os numeradores por x e não indica o conjunto solução.



3

$$\frac{x^2-4}{x(x-2)} = \frac{1}{x} \quad (x-2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x(x-2)} = \frac{x-2}{x(x-2)} \Leftrightarrow \frac{x^2-x-2}{x(x-2)} = 0$$

$$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}$$

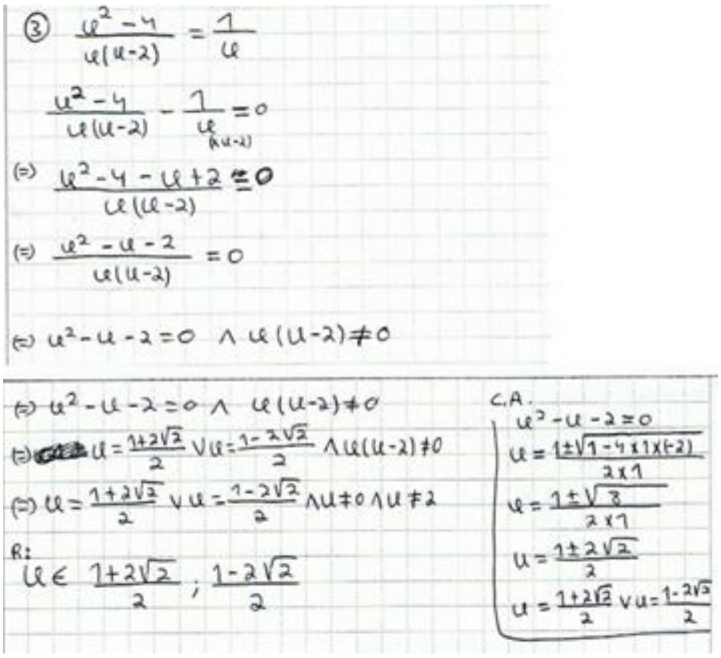
$$\Leftrightarrow x=2 \vee x=-1$$

$$x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2$$

$$x \in [-1,2[$$

Figura 50. Resolução da questão 3 pelo aluno A22.

O aluno A22 (Figura 50), apresenta o conjunto solução como sendo o intervalo cujos limites são os zeros do numerador da fração. Embora tenha também calculado os zeros do denominador, um deles errado, não tira quaisquer consequências desses valores.



$$③ \quad \frac{u^2-4}{u(u-2)} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{u^2-4}{u(u-2)} - \frac{1}{u}_{(u-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{u^2-4-u+2}{u(u-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{u^2-u-2}{u(u-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow u^2-u-2=0 \wedge u(u-2)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow u^2-u-2=0 \wedge u(u-2)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow u=\frac{1+2\sqrt{2}}{2} \vee u=\frac{1-2\sqrt{2}}{2} \wedge u(u-2)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow u=\frac{1+2\sqrt{2}}{2} \vee u=\frac{1-2\sqrt{2}}{2} \wedge u\neq 0 \wedge u\neq 2$$

R:

$$u \in \frac{1+2\sqrt{2}}{2} ; \frac{1-2\sqrt{2}}{2}$$

C.A.

$$u^2-u-2=0$$

$$u=\frac{1\pm\sqrt{1-4\times1\times(-2)}}{2\times1}$$

$$u=\frac{1\pm\sqrt{8}}{2\times1}$$

$$u=\frac{1\pm2\sqrt{2}}{2}$$

$$u=\frac{1+2\sqrt{2}}{2} \vee u=\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$$

Figura 51. Resolução da questão 3 pelo aluno A15.

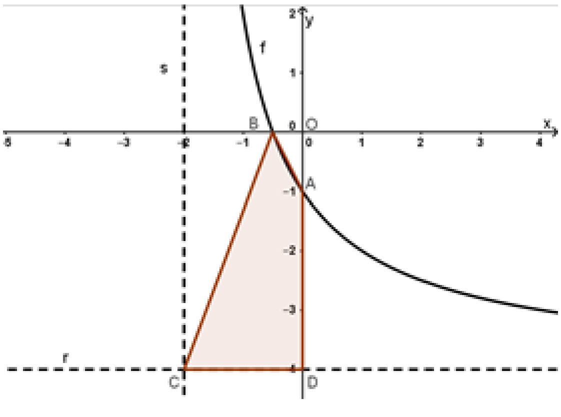
Pode observar-se que o aluno A15 (Figura51) erra nos cálculos auxiliares quando determina os zeros do numerador, omitindo o valor 1 no binómio discriminante.

Questão 4: Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, definida por $f(x) = -4 + \frac{6}{x+2}$.

a) Indique o domínio de f.

b) Escreva, recorrendo exclusivamente a intervalos de números reais, o conjunto dos números reais x que verificam a condição $f(x) \geq 3$.

c) Na figura, estão representados, num referencial o.n. xOy:



- parte do gráfico de função f;
- as retas r e s, assíntotas do gráfico de f;
- o quadrilátero $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- A e B são pontos de intersecção do gráfico da função f com os eixos coordenados;

- C é o ponto de intersecção das retas r e s.
- D é o ponto de interseção da reta r com o eixo Oy.

Determine a área do quadrilátero $[ABCD]$.

O objetivo na questão 4a) era calcular os zeros do denominador e concluir acerca do domínio da função. Na questão 4b) tratava-se de resolver a inequação por processos analíticos. Na questão 4c) esperava-se concluir que a área do quadrilátero $[ABCD]$ podia ser obtida através da área do trapézio $[OBCD]$ menos a área do triângulo $[OAB]$, efetuando os cálculos necessários.

Os critérios de avaliação usados nesta questão foram:

a) (6 pontos)

- Identifica o zero do denominador; (2 pontos)
- Escreve o domínio (que pode ou não ser escrito sob a forma de intervalo de números reais). (4 pontos)

b) (15 pontos)

- Passa todos os membros para o 1° membro; (1 ponto)
- Reduz ao mesmo denominador; (2 pontos)
- Obtém $\frac{-7x-8}{x+2} \geq 0$ (ou equivalente); (2 pontos)
- Determina o zero do numerador; (1 ponto)
- Determina o zero do denominador; (1 ponto)
- Constrói a tabela de sinal; (6 pontos):
  - Coloca corretamente os sinais do numerador; (2 pontos)
  - Coloca corretamente os sinais do denominador; (2 pontos)
  - Coloca corretamente os sinais da fração; (2 pontos)
- Apresenta o conjunto solução sob a forma de intervalo. (2 pontos)

c) (15 Pontos)

- Reconhecer que $C(-2,-4)$; (1 ponto)
- Concluir que $A(0,-1)$; (1 ponto)
- Calcular as coordenadas do ponto B: (3 pontos)
  - Escreve $f(x) = 0$ e refere que $D = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$; (1 ponto)
  - Conclui que $x = -\frac{1}{2}$ e refere que $B(-\frac{1}{2}, 0)$; (2 pontos)

- Calcula a área do trapézio: (6 pontos)
    - Escreve corretamente a fórmula; (2 pontos)
    - Conclui que $\overline{CD} = 2$; (1 ponto)
    - Conclui que $\overline{OB} = \frac{1}{2}$; (1 ponto)
    - Conclui que altura é 4; (1 ponto)
    - Determina o valor da área; (1 ponto)
- Calcula a área do triângulo: (3 pontos)
    - Conclui que $\overline{OB} = \frac{1}{2}$; (1 ponto)
    - Conclui que $\overline{OA} = 1$; (1 ponto)
    - Determina a área do triângulo; (1 ponto)
- Determina a área do quadrilátero $[ABCD]$. (1 ponto)

Na questão 4a) a média obtida pelos alunos foi de 4,3 pontos (num total de 6 pontos), em que 14 alunos obtiveram a pontuação máxima, 4 obtiveram 0 pontos e os restantes 4 obtiveram 3 pontos.

Ainda sobre esta questão podemos observar que dos alunos que obtiveram 3 e 0 pontos, 1 considerou que as retas de equação $x = -2$ e $y = -4$, respetivamente a assíntota vertical e a assíntota horizontal da função, interferiam no seu domínio (Figura 52), 1 que apenas a assíntota horizontal interferia no domínio da função (Figura 53), 2 erraram ao interpretarem o significado da assíntota vertical (Figura 54), 1 considerou parte da função e 2 não consideraram qualquer assíntota (Figuras 55 e 56). Nas Figuras 52, 53 e 54 os alunos podem ter interpretado mal o esboço do gráfico que lhes era proporcionado no enunciado.

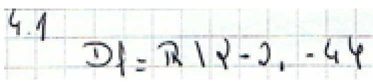


Figura 52. Resolução da questão 4a) pelo aluno A3.

Figura 53. Resolução da questão 4a) pelo aluno A5.

Figura 54. Resolução da questão 4a) pelo aluno A10.

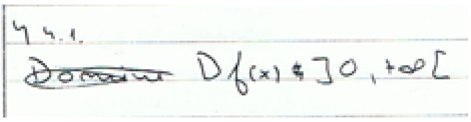


Figura 55. Resolução da questão 4a) pelo aluno A18.

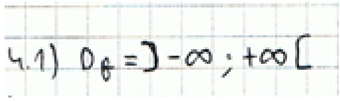


Figura 56. Resolução da questão 4a) pelo aluno A15.

Na questão 4b) a média obtida pelos alunos foi de 10,32 pontos (num total de 15 pontos), em que 10 alunos obtiveram a pontuação máxima, 6 obtiveram entre 10 e 14 pontos e os restantes 6 obtiveram entre 0 e 2 pontos, e destes últimos 3 não responderam.

Dos alunos que não obtiveram a pontuação total, 3 trocaram a ordem dos zeros do denominador e do numerador na tabela de sinais (Figura 57), 1 cometeu uma erro de transposição ao calcular os zeros do numerador (Figura 58), 1 apenas apresentou um conjunto solução, que estava errado, o que leva a supor que usou calculadora gráfica (Figura 59), 1 cometeu um erro de cálculo (Figura 60), 1 resolveu como se se tratasse de uma igualdade, mas escreveu o conjunto solução corretamente, o que leva a supor que possa ter usado calculadora gráfica (Figura 61), 1 determinou mal o sinal do numerador na tabela de sinais (Figura 62) e outro resolveu como se fosse uma mistura entre uma inequação e uma equação fracionária (Figura 63).

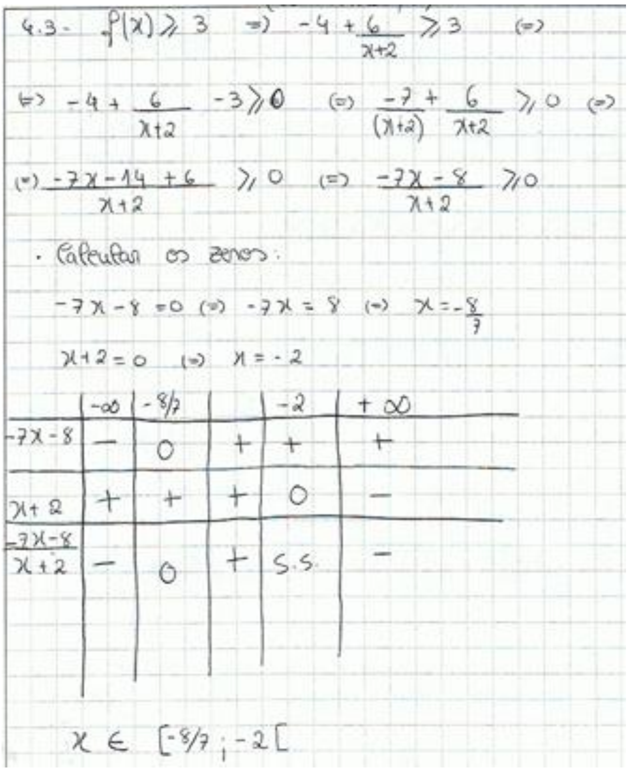


Figura 57. Resolução da questão 4b) pelo aluno A2.

Como podemos observar na Figura 57, o aluno trocou a ordem dos zeros $-\frac{8}{7}$ e -2 na tabela de variação de sinal.

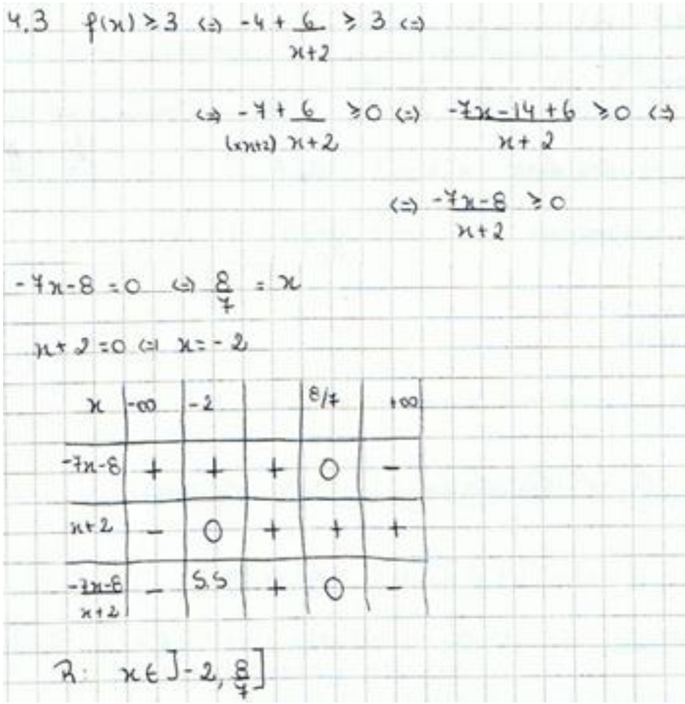


Figura 58. Resolução da questão 4b) pelo aluno A6.

Na Figura 58, podemos observar que o aluno A6 ao calcular o zero do numerador, passou o coeficiente de x a dividir, mas também alterou o seu sinal.

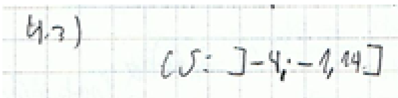


Figura 59. Resolução da questão 4b) pelo aluno A7.

Na Figura 59 podemos observar que o aluno A7 apenas apresentou o conjunto solução, que estava errado, o que leva a supor que possa ter usado a calculadora gráfica para resolver esta alínea.

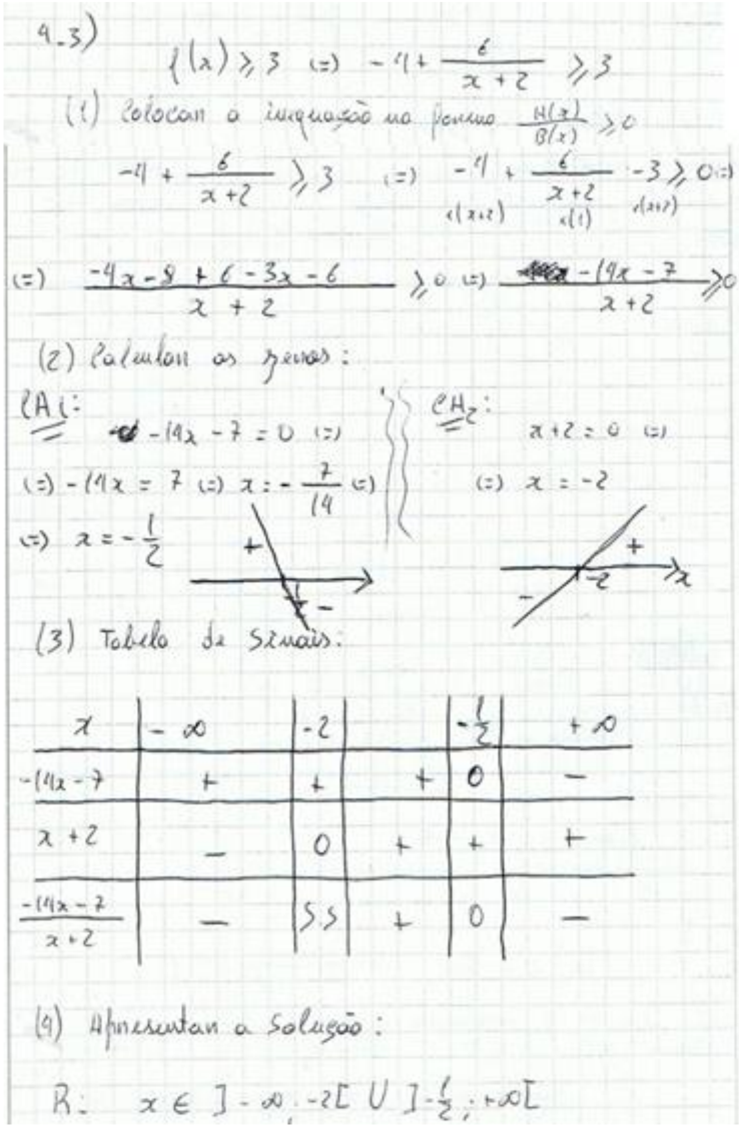


Figura 60. Resolução da questão 4b) pelo aluno A11.

Na Figura 60, podemos observar que o aluno A11 cometeu um erro de cálculo ao juntar os termos do numerador.

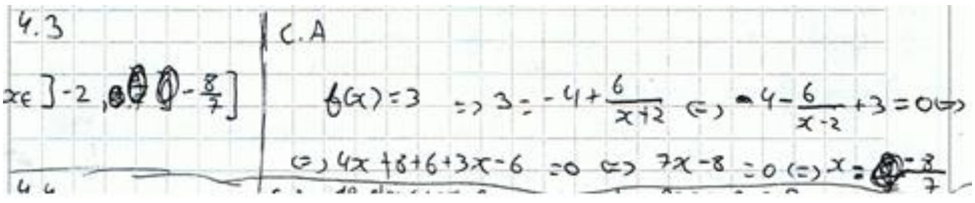


Figura 61. Resolução da questão 4b) pelo aluno A16.

Na Figura 61, podemos observar que o aluno A16 resolveu a inequação como se de uma equação se tratasse, apresentando, no entanto, o conjunto solução sobe a forma de intervalo de números reais.

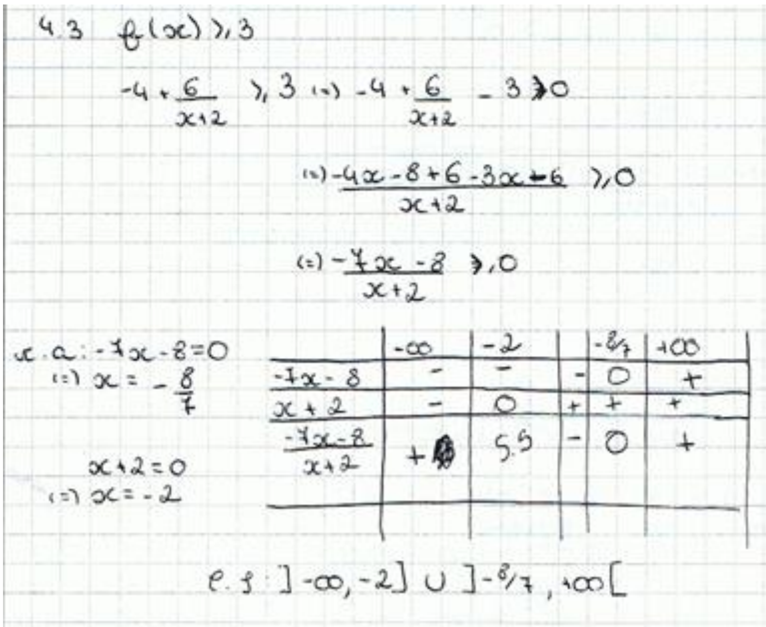


Figura 62. Resolução da questão 4b) pelo aluno A20.

Na Figura 62, podemos observar que o aluno A20, determinou erradamente o sinal do numerador, isto é, determinou o sinal como se a reta tivesse declive positivo.

Figura 63. Resolução da questão 4b) pelo aluno A21.

Na Figura 63 podemos observar que o aluno A21 resolveu a equação como se fosse um misto entre equação e inequação, isto é, retirou o denominador aquando da resolução da inequação, embora tenha excluído o zero do denominador do conjunto solução.

Na questão c) a média obtida pelos alunos foi de 5,9 pontos (num total de 15 pontos), em que 2 alunos obtiveram a pontuação máxima, 6 obtiveram entre 8 e 14 pontos e os restantes 14 obtiveram entre 0 e 7 pontos.

Ainda sobre esta questão, 4 alunos não responderam à questão, 5 determinaram apenas algumas coordenadas de pontos, 2 consideraram o quadrilátero $[ABCD]$ como sendo um trapézio (Figura 64), um calculou a área como sendo a soma de quatro vetores (Figura 67), outro como sendo a multiplicação do comprimento dos quatro lados (Figura 68), 3 erraram a fórmula da área do trapézio ou do triângulo (Figura 69 e 71), 3 cometeram erros de contas esclarecidos mais abaixo (Figuras 66, 68, 69 e 70), 2 usaram os zeros da função obtida na alínea anterior para calcular a abcissa do ponto B (Figura 70 e 71) e, por último, 6 usaram um processo de resolução diferente do esperado, que também são mostrados mais abaixo (Figuras 65, 66, 70 e 71). Seguidamente apresentam-se exemplos que ilustram os erros e as estratégias de resolução dos alunos.

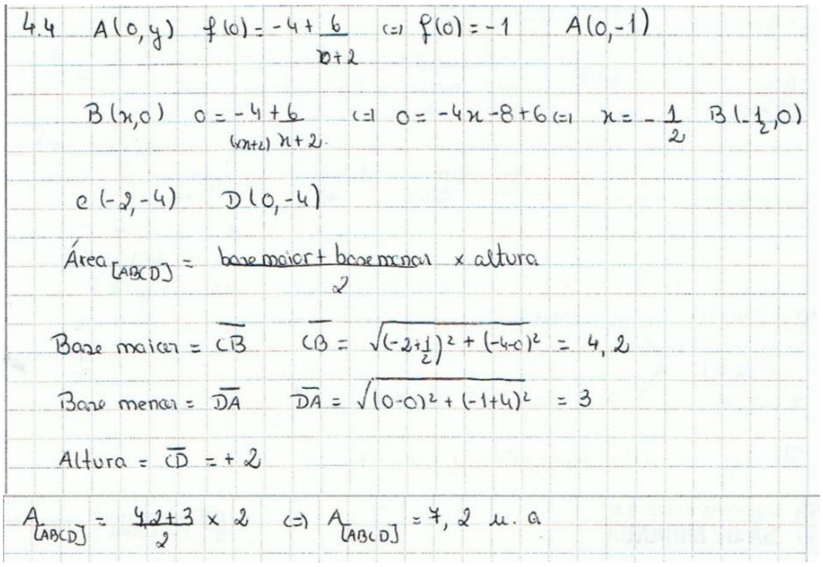


Figura 64. Resolução da questão 4c) pelo aluno A6.

Nesta figura, podemos observar que o aluno A6 calculou a área do quadrilátero $[ABCD]$ como se tratasse de um trapézio.

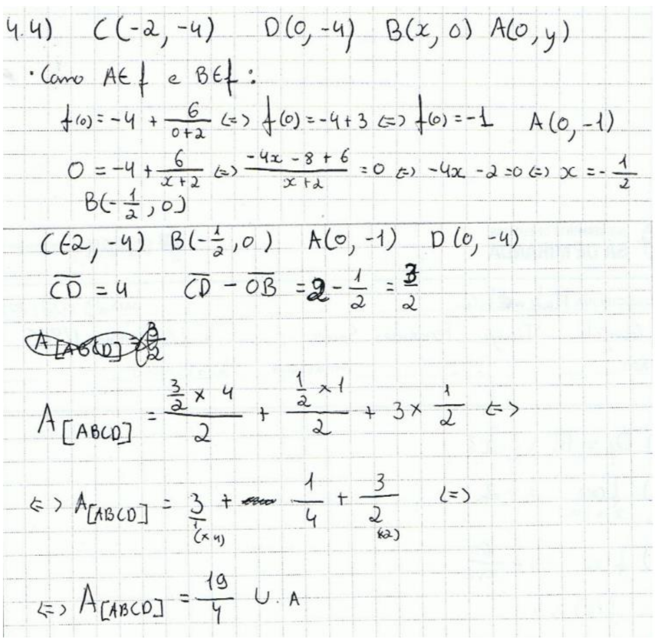
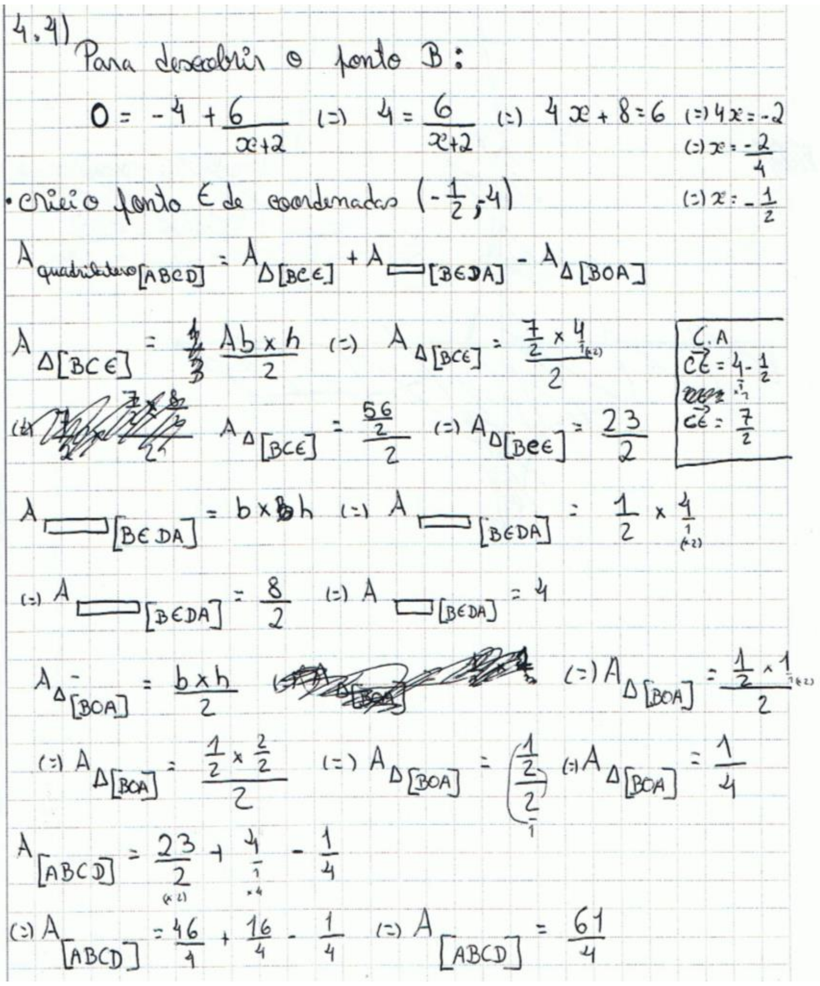


Figura 65. Resolução da questão 4c) pelo aluno A8.

Na Figura 65, podemos observar que o aluno A8 dividiu o quadrilátero em dois triângulos e um retângulo.


4.4)

Para descobrir o ponto B:

$0 = -4 + \frac{6}{x+2} \Leftrightarrow 4 = \frac{6}{x+2} \Leftrightarrow 4x + 8 = 6 \Leftrightarrow 4x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

• crieio ponto E de coordenadas $(-\frac{1}{2}, 4)$

$A_{quadrilátero[ABCD]} = A_{\Delta[BCE]} + A_{▭[BEDA]} - A_{\Delta[BOA]}$

$A_{\Delta[BCE]} = \frac{Ab \times h}{2} \Leftrightarrow A_{\Delta[BCE]} = \frac{\frac{7}{2} \times 4}{2}$

C.A. $\overline{CE} = 4 - \frac{1}{2}$; $\overline{CE} = \frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow A_{\Delta[BCE]} = \frac{\frac{56}{2}}{2} \Leftrightarrow A_{\Delta[BCE]} = \frac{23}{2}$

$A_{▭[BEDA]} = b \times h \Leftrightarrow A_{▭[BEDA]} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1}$

$\Leftrightarrow A_{▭[BEDA]} = \frac{8}{2} \Leftrightarrow A_{▭[BEDA]} = 4$

$A_{\Delta[BOA]} = \frac{b \times h}{2} \Leftrightarrow A_{\Delta[BOA]} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{2}$

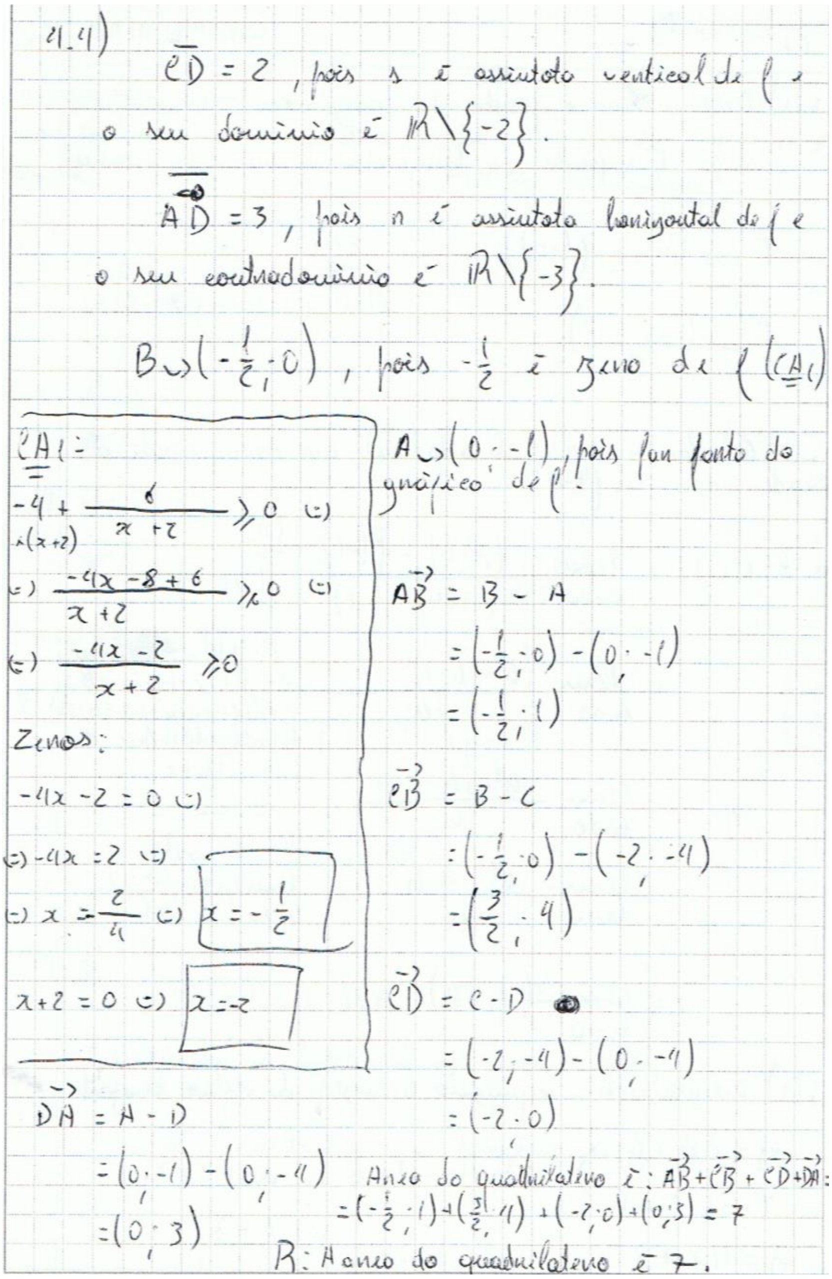
$\Leftrightarrow A_{\Delta[BOA]} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{2}}{2} \Leftrightarrow A_{\Delta[BOA]} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{1}} \Leftrightarrow A_{\Delta[BOA]} = \frac{1}{4}$

$A_{[ABCD]} = \frac{23}{2} + \frac{4}{1} - \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow A_{[ABCD]} = \frac{46}{4} + \frac{16}{4} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow A_{[ABCD]} = \frac{61}{4}$

Figura 66. Resolução da questão 4c) pelo aluno A10.

Na Figura 66 podemos observar que o aluno considerou a área de dois triângulos e de um retângulo. De seguida, adicionou a área do retângulo com a de um triângulo e, por último, à soma obtida retirou a área do outro triângulo que tinha calculado antes. Para além desta divisão da figura, podemos observar que o aluno cometeu o mesmo tipo de erro quando calculava a área dos triângulos. Ao multiplicar $\frac{7}{2}$ por 4, primeiro reduziu os dois números ao mesmo denominador 2 e, de seguida, multiplicou apenas os numeradores.



4.4) $\overline{CD} = 2$, pois s é assíntota vertical de f e o seu domínio é $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

$\overline{AD} = 3$, pois r é assíntota horizontal de f e o seu contradomínio é $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

$B \rightsquigarrow \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, pois $-\frac{1}{2}$ é zero de f (CA1)

CA1:

$-4 + \frac{6}{x+2} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-4x - 8 + 6}{x+2} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-4x - 2}{x+2} \geqslant 0$

Zeros:

$-4x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{4} \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$

$x + 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -2}$

$A \rightsquigarrow (0; -1)$, pois faz ponto do gráfico de f!

$\overrightarrow{AB} = B - A$
$= \left(-\frac{1}{2}; 0\right) - (0; -1)$
$= \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$

$\overrightarrow{CB} = B - C$
$= \left(-\frac{1}{2}; 0\right) - (-2; -4)$
$= \left(\frac{3}{2}; 4\right)$

$\overrightarrow{CD} = C - D$
$= (-2; -4) - (0; -4)$
$= (-2; 0)$

$\overrightarrow{DA} = A - D$
$= (0; -1) - (0; -4)$
$= (0; 3)$

Área do quadrilátero é: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$:
$= \left(-\frac{1}{2}; 1\right) + \left(\frac{3}{2}; 4\right) + (-2; 0) + (0; 3) = 7$

R: A área do quadrilátero é 7.

Figura 67. Resolução da questão 4c) pelo aluno A11.

Na Figura 67 podemos observar que para calcular as abcissas do ponto B, o aluno usou uma inequação e para calcular a área do quadrilátero adicionou os quatro vetores definidos pelos vértices do quadrilátero.

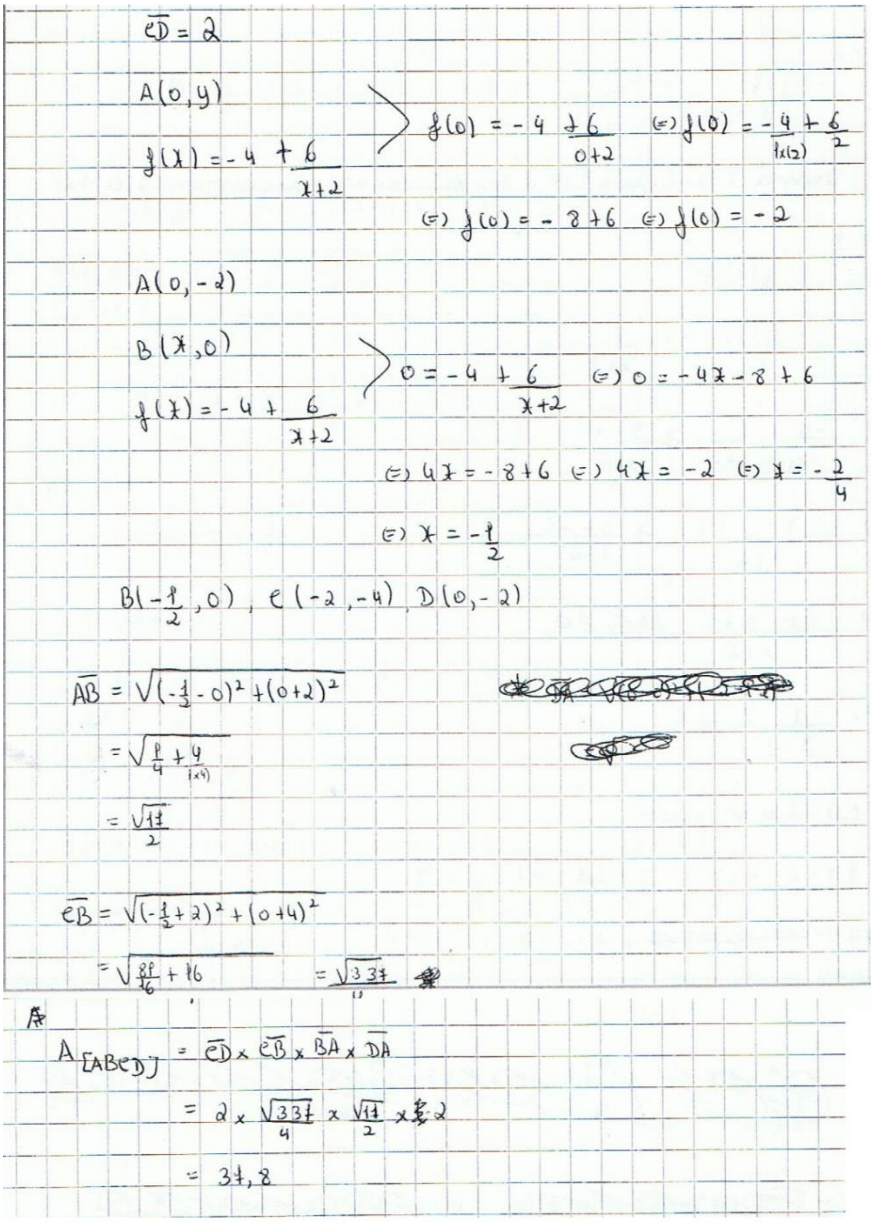


Figura 68. Resolução da questão 4c) pelo aluno A12.

Podemos observar que, ao calcular a ordenada do ponto A, o aluno A12 omitiu os denominadores, após ter reduzido as parcelas ao mesmo denominador. Por último, multiplicou o comprimento dos quatro lados para calcular a área do quadrilátero $[ABCD]$.

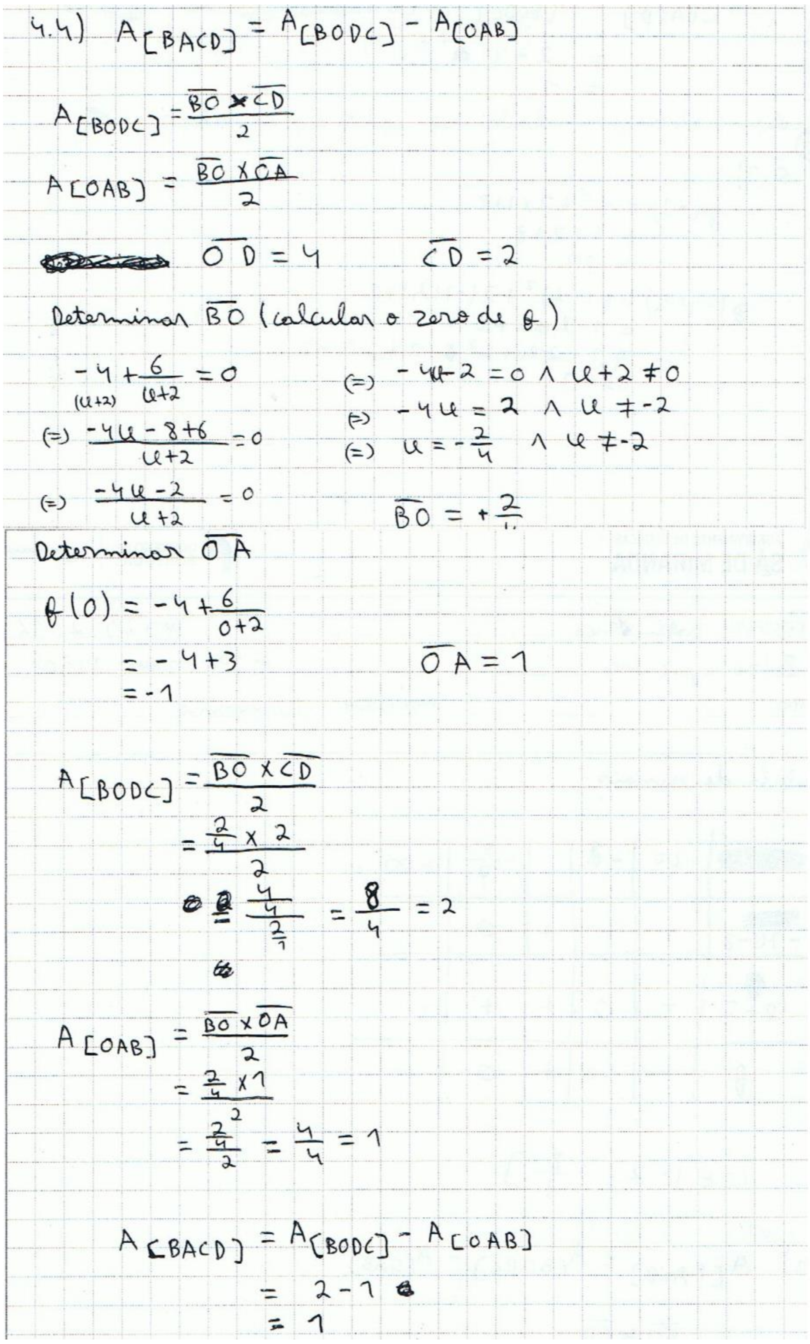
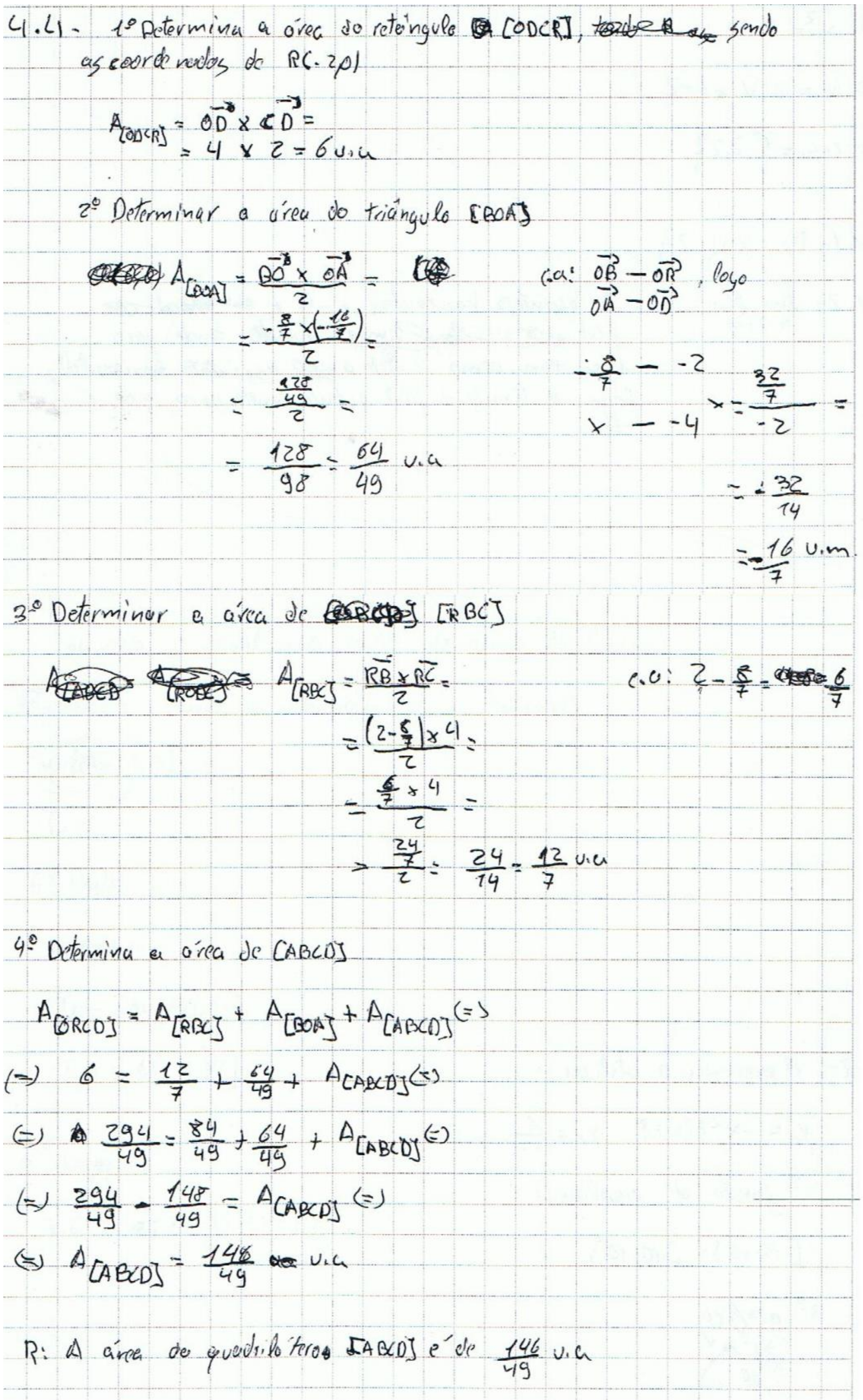


Figura 69. Resolução da questão 4c) pelo aluno A15.

Na Figura 69 podemos observar que a fórmula da área do trapézio que o aluno A15 escreveu está errada. Além disso, também ao calcular a divisão de duas frações usou mal a "regra do pneu".



4.4. 1º Determinar a área do retângulo [ODCR], sendo as coordenadas de R(-2,0)

$A_{[ODCR]} = \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{CD} =$

$= 4 \times 2 = 6$ u.a

2º Determinar a área do triângulo [BOA]

$A_{[BOA]} = \dfrac{\overrightarrow{BO} \times \overrightarrow{OA}}{2} =$

$= \dfrac{-\frac{8}{7} \times \left(-\frac{16}{7}\right)}{2} =$

$= \dfrac{\frac{128}{49}}{2} =$

$= \dfrac{128}{98} = \dfrac{64}{49}$ u.a

c.a: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OR}$, logo $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}$

$-\frac{8}{7} \quad - \quad -2$

$x \quad - \quad -4$

$x = \dfrac{\frac{32}{7}}{-2} =$

$= -\dfrac{32}{14}$

$= -\dfrac{16}{7}$ u.m

3º Determinar a área de [RBC]

$A_{[RBC]} = \dfrac{\overrightarrow{RB} \times \overrightarrow{RC}}{2} =$

$= \dfrac{\left(2-\frac{8}{7}\right) \times 4}{2} =$

$= \dfrac{\frac{6}{7} \times 4}{2} =$

$= \dfrac{\frac{24}{7}}{2} = \dfrac{24}{14} = \dfrac{12}{7}$ u.a

c.a: $2 - \frac{8}{7} = \frac{6}{7}$

4º Determinar a área de [ABCD]

$A_{[ORCD]} = A_{[RBC]} + A_{[BOA]} + A_{[ABCD]} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6 = \frac{12}{7} + \frac{64}{49} + A_{[ABCD]} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{294}{49} = \frac{84}{49} + \frac{64}{49} + A_{[ABCD]} \Leftrightarrow$

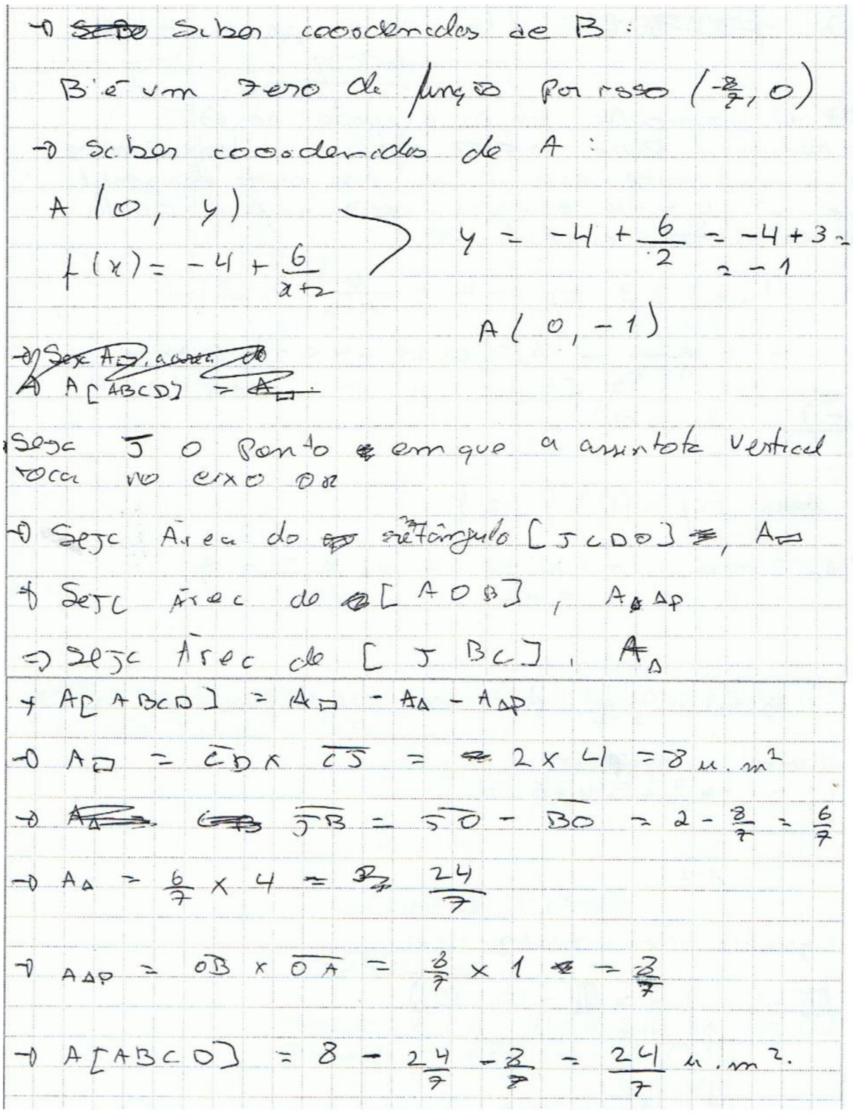
$\Leftrightarrow \frac{294}{49} - \frac{148}{49} = A_{[ABCD]} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A_{[ABCD]} = \frac{146}{49}$ u.a

R: A área do quadrilátero [ABCD] é de $\frac{146}{49}$ u.a

Figura 70. Resolução da questão 4c) pelo aluno A17.

Podemos observar que o aluno A17 usou uma regra de três simples para calcular a abcissa do ponto A e usou os zeros calculados na alínea anterior para definir a ordenada do ponto B. A estratégia usada por este aluno consistiu em calcular a área do retângulo $[ORCD]$, considerando as coordenadas do ponto $R(-2,0)$, e, de seguida, subtrair as áreas dos triângulos $[BRC]$ e $[OBA]$.


→ ~~Sabe~~ Saber coordenadas de B:

B é um zero da função por isso $(-\frac{8}{7}, 0)$

→ Saber coordenadas de A:

$A(0, y)$

$f(x) = -4 + \frac{6}{x+2}$ → $y = -4 + \frac{6}{2} = -4 + 3 = -1$

$A(0, -1)$

→ ~~Seja A área do~~

→ $A[ABCD] = \cancel{A_{\square}}$

Seja J o ponto em que a assintota vertical toca no eixo Ox

→ Seja Área do retângulo [JCDO], $A_{\square}$

→ Seja área do [AOB], $A_{\Delta p}$

→ Seja Área de [JBC], A_{Δ}

→ $A[ABCD] = A_{\square} - A_{\Delta} - A_{\Delta p}$

→ $A_{\square} = \overline{CD} \times \overline{CJ} = 2 \times 4 = 8$ u.m²

→ $\overline{JB} = \overline{JO} - \overline{BO} = 2 - \frac{8}{7} = \frac{6}{7}$

→ $A_{\Delta} = \frac{6}{7} \times 4 = \frac{24}{7}$

→ $A_{\Delta p} = \overline{OB} \times \overline{OA} = \frac{8}{7} \times 1 = \frac{8}{7}$

→ $A[ABCO] = 8 - \frac{24}{7} - \frac{8}{7} = \frac{24}{7}$ u.m².

Figura 71. Resolução da questão 4c) pelo aluno A19.

Na Figura 71 podemos observar que o aluno A19 usou os zeros calculados na alínea anterior para definir a ordenada do ponto B, aplicou uma fórmula errada para o cálculo da área do triângulo e usou a mesma estratégia de resolução que o aluno anterior (A17).

Questão 5: Considere a função g definida por $g(x) = -x^2 + 2x + 8$.

Determine os valores de x para os quais se verifica $g(x) \geq \frac{1}{x-2}$.

Resolva este exercício com **calculadora gráfica**, apresentando o resultado com **aproximação às centésimas**.

A sua resposta deve conter os tópicos para uma composição matemática que inclua:

i) A expressão ou expressões matemáticas a utilizar para resolver o problema;

ii) A janela de visualização;

iii) Uma representação gráfica da função (ou funções) que permite(m) resolver o problema, devidamente assinaladas;

iv) A estratégia utilizada para a resolução do problema;

v) A representação do(s) ponto(s) que permite(m) obter as soluções do problema, no gráfico representado em iii);

vi) A resposta, sempre que possível, sob a forma de intervalos reais.

O objetivo desta questão era usar a calculadora gráfica para resolver a inequação fracionária, indicando todos os tópicos assinalados.

Os critérios de avaliação usados nesta questão foram:

(16 pontos)

- Escrever todos os tópicos; (3 pontos)
- Indicar a janela de visualização; (1 ponto)
- Representação gráfica: (4 pontos)
    - de g; (1 ponto)
    - de $y = \frac{1}{x+2}$; (2 pontos)
    - assinalar os gráficos; (1 ponto)
- Indicar a estratégia de resolução; (1 ponto)
- Determinar as abcissas dos três pontos de interseção; (3 pontos)
- Assinalar nos gráficos as abcissas dos pontos de interseção; (1 ponto)
- Apresentar a resposta sob a forma de intervalos reais. (3 pontos)

Nesta questão a média obtida pelos alunos foi de 6,6 pontos (num total de 16 pontos), em que nenhum aluno obteve a pontuação máxima, metade dos alunos teve uma pontuação entre 8 e 12 pontos e a outra metade entre os 0 e 7 pontos, dos quais 4 alunos não resolveram a questão.

Podemos ainda observar que houve 1 aluno que não escreveu o conjunto solução, 10 que não assinalaram a assíntota vertical nos seus esboços gráficos (Figuras 72, 76 e 78), 8 determinaram apenas um ou dois dos três pontos de interseção (Figura 73), 1 não determinou qualquer ponto de interseção (Figura 78), 1 não indicou qual a estratégia que usou, 5 não assinalaram as funções ou eixos (Figuras 74 e 76), 1 não concluiu a questão, 3 não indicaram a janela de visualização ou esta não era adequada (Figuras 76 e 77), 1 tinha o esboço do gráfico incompleto (Figura 77), 4 começaram por resolver analiticamente obtendo uma só função (Figuras 74, 76, 77 e 79), 1 não introduziu corretamente a função na calculadora (Figura 78), 7 assinalaram o conjunto solução errado (Figura 75) e outro separou o numerador e o denominador da função e introduziu-os separadamente na calculadora gráfica, como se fossem funções distintas (Figura 79). De seguida, apresentam-se exemplos de erros e estratégias de resolução dos alunos.

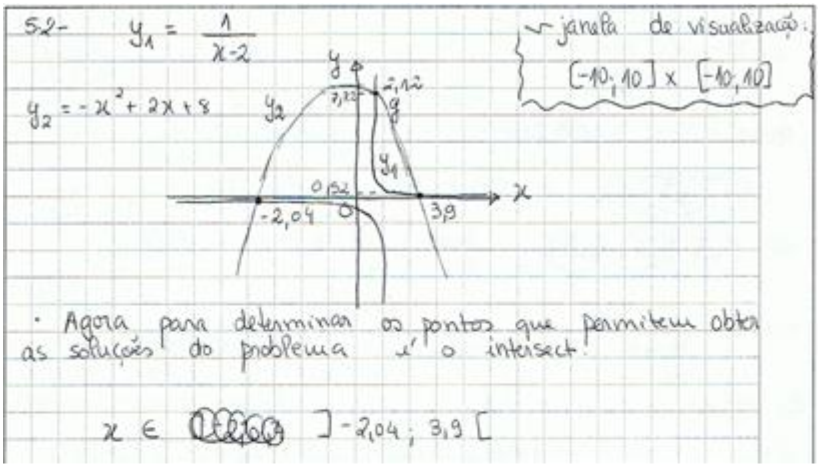


Figura 72. Resolução da questão 5 pelo aluno A2.

Podemos observar a ausência da assíntota vertical, o que pode ter levado o aluno a uma errada interpretação do gráfico e, em consequência, a escrever o conjunto solução errado.

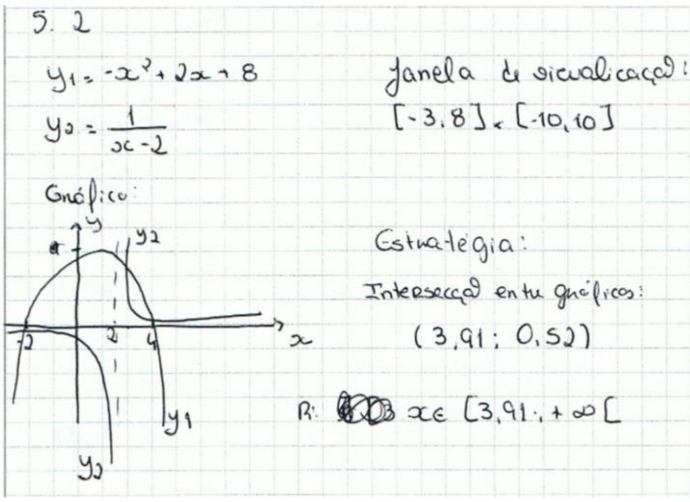


Figura 73. Resolução da questão 5 pelo aluno A3.

Podemos observar pela Figura 73 que o aluno A3 apenas determinou um ponto de interseção.

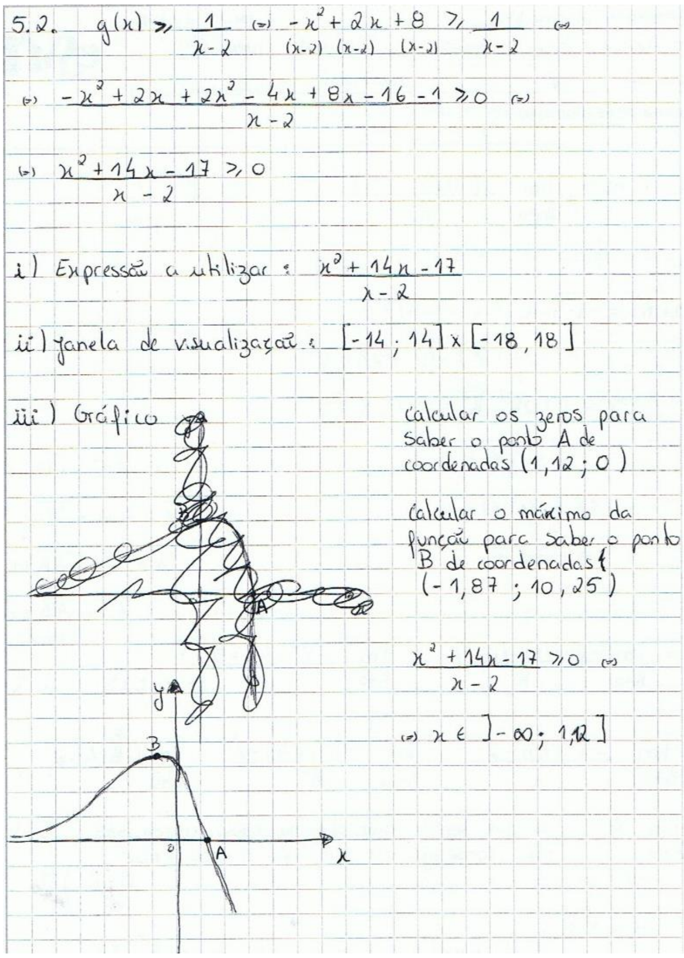


Figura 74. Resolução da questão 5 pelo aluno A4.

Na Figura 74 podemos observar que o aluno seguiu uma estratégia de resolução diferente, começando por tentar obter uma só função. Contudo, o aluno errou ao reduzir ao mesmo denominador os termos da inequação, tendo errado especificamente no grau do monómio $x^2(x-2)$.

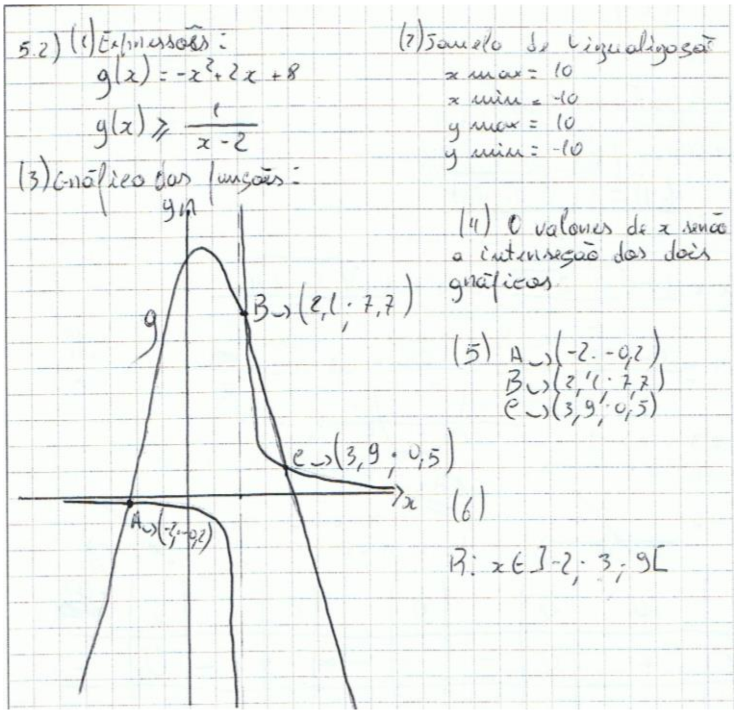


Figura 75. Resolução da questão 5 pelo aluno A11.

Na Figura75 podemos observar que, apesar de ter todos os dados para conseguir concluir acerca do conjunto solução, o aluno A11 escreveu-o erradamente, o que nos leva a concluir uma interpretação errada desses dados.

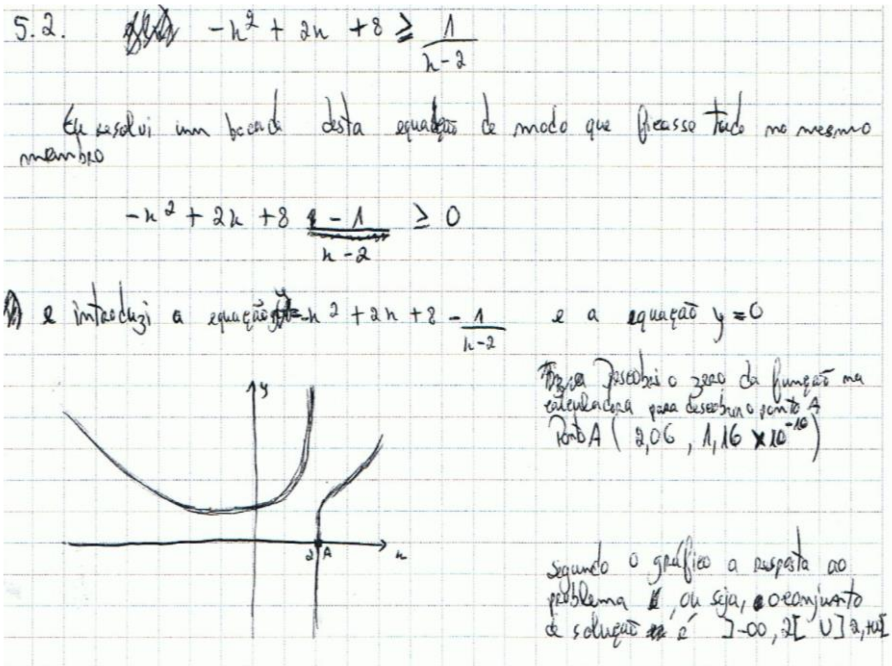


Figura 76. Resolução da questão 5 pelo aluno A13.

Pela Figura 76 verifica-se que o aluno A13 optou por usar apenas uma função, mas não indica qual a janela de visualização usada, nem a assíntota, o que o leva a concluir erradamente o conjunto solução.

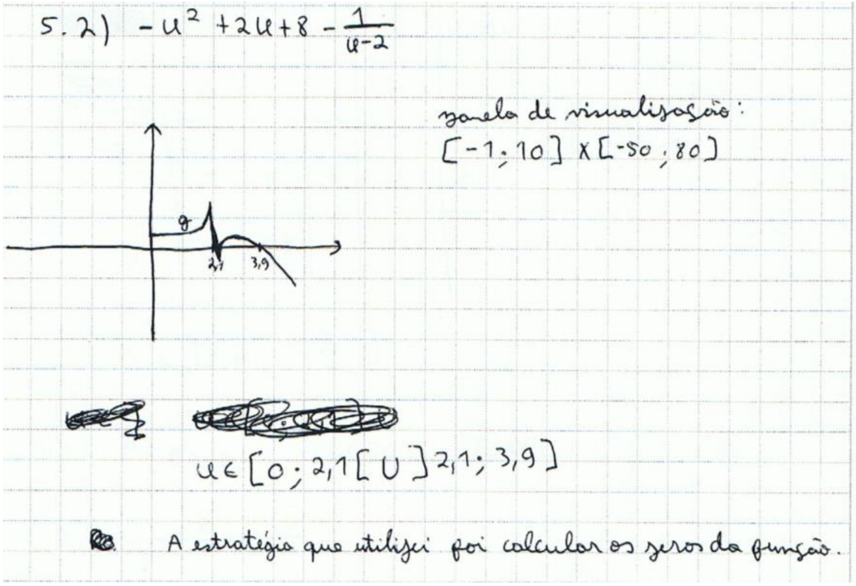


Figura 77. Resolução da questão 5 pelo aluno A15.

Na Figura 77 podemos observar que a janela de visualização estabelecida não foi a mais adequada, fazendo com que pareça que a assíntota do gráfico faz parte do próprio gráfico. Também podemos observar que o aluno omitiu uma parte do gráfico.

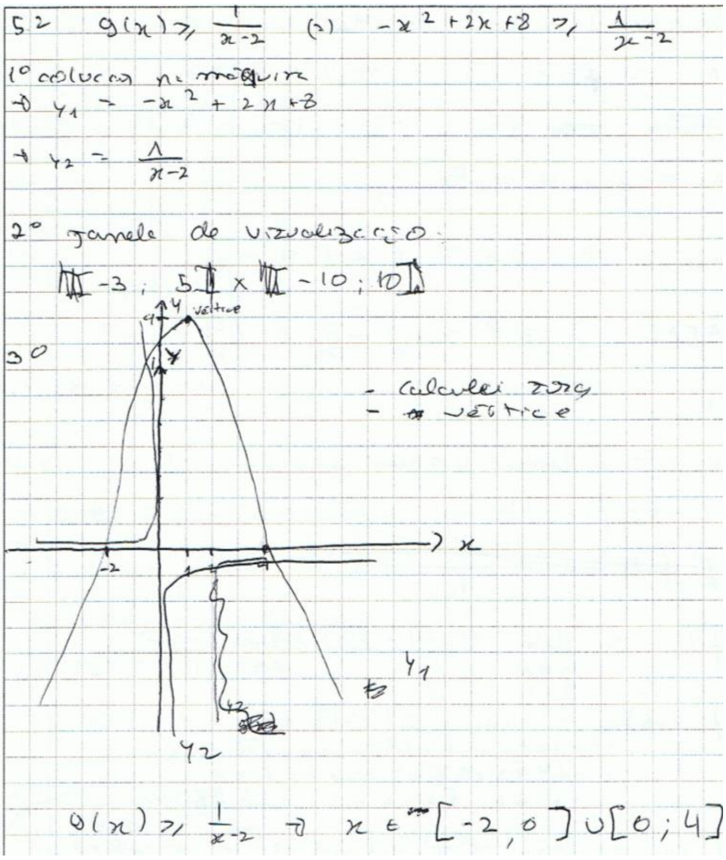


Figura 78. Resolução da questão 5 pelo aluno A19.

Na Figura 78 podemos observar que o esboço do gráfico da função $\frac{1}{x-2}$ localiza-se nos quadrantes pares, quando devia situar-se nos quadrantes ímpares, o que leva a supor que o aluno tenha introduzido incorretamente na calculadora a respetiva expressão. Para além disso, o aluno também não calculou os pontos de interseção, o que leva a supor que ele não percebeu o objetivo do exercício.

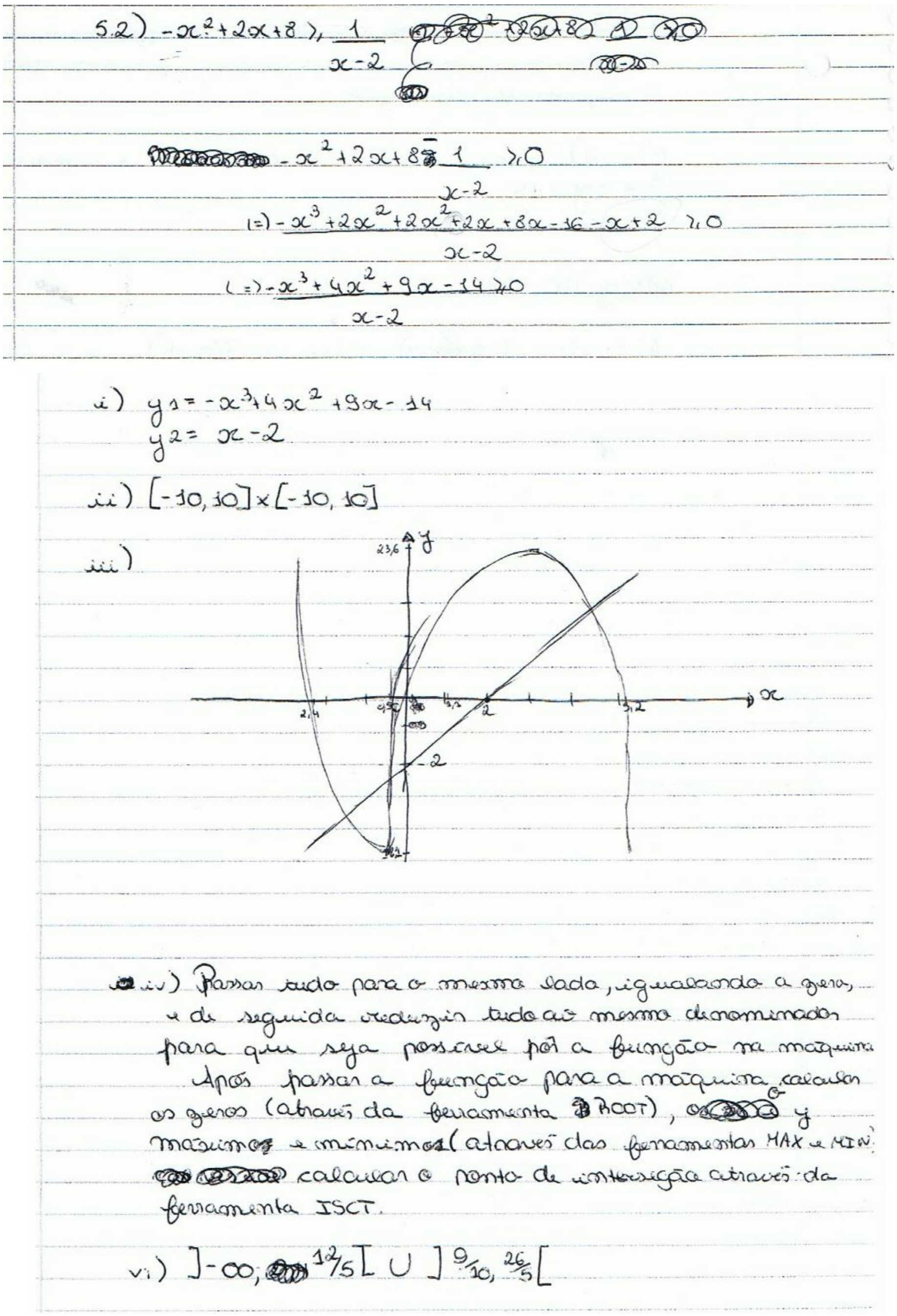


Figura 79. Resolução da questão 5 pelo aluno A20.

Na Figura 79, podemos observar que o aluno começou por tentar obter apenas uma função, mas nesse processo errou num sinal. De seguida, ao invés de pôr a função obtida na calculadora, separou o numerador e o denominador em duas funções.

Finalmente, em termos globais, a média dos alunos no teste foi de 9,2 valores, sendo que a média das positivas foi de 11,4 valores e a média das negativas de 6,5 valores. Por outro lado, 54.5% dos alunos obteve classificação positiva e 45,5% obteve classificação negativa.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES, IMPLICAÇÕES, RECOMENDAÇÕES E LIMITAÇÕES

Este capítulo está dividido em cinco subcapítulos. No primeiro subcapítulo faz-se uma breve síntese do estudo, relembrando os objetivos e as estratégias usadas para atingir esses mesmos objetivos. O segundo, terceiro e quarto subcapítulos tratam dos resultados principais obtidos na intervenção pedagógica, organizados em torno dos respetivos, objetivos confrontando-os, sempre que possível, com a literatura. Por último, no quinto subcapítulo, apresentam-se implicações, recomendações e limitações deste projeto.

5.1. Síntese do Estudo

O principal objetivo deste projeto de intervenção pedagógica era desenvolver as capacidades de resolução analítica e gráfica de equações e inequações fracionárias dos alunos de uma turma do 11.º ano. Para tal, foram propostos três objetivos a atingir:

1. Estabelecer uma abordagem analítica e gráfica para o ensino de equações e inequações fracionárias.
2. Estudar as dificuldades dos alunos na resolução de equações e inequações através das abordagens analítica e gráfica.
3. Avaliar a aprendizagem dos alunos na resolução de equações e inequações fracionárias.

Para avaliar a consecução destes objetivos recorreu-se a diversos métodos de recolha de dados. No caso do objetivo 1, foram estudadas e preparadas cuidadosamente seis aulas, de noventa minutos cada. Relativamente ao objetivo 2, foram realizados trabalhos de casa, que foram corrigidos e discutidos no grupo turma nas aulas seguintes, assim como foram realizadas diversas tarefas durante as aulas da intervenção pedagógica. Relativamente ao objetivo 3, focado na avaliação das aprendizagens dos alunos sobre a resolução de equações e inequações fracionárias, foram elaboradas e aplicadas duas formas de avaliação: uma questão-aula, proposta com o intuito dos alunos melhorarem as suas prestações na avaliação sumativa, e três questões incluídas no teste de avaliação sumativa (Anexos III e IV). Para documentar devidamente as atividades, procedeu-se à gravação audiovisual das aulas, assim como a fotocópias dos cadernos diários dos alunos, da questão aula e do teste sumativo.

As estratégias utilizadas tiveram em conta o contexto no qual foi feita a intervenção pedagógica, assim como a leitura de vários livros e artigos relacionados com o tema em estudo, que permitiram um melhor desenvolvimento do projeto. Ao longo da intervenção, os alunos trabalharam individualmente, em pequenos grupos e em no grupo turma, tendo sido avaliados no final da intervenção pedagógica.

Seguidamente apresentam-se os principais resultados obtidos no estudo, organizados segundo cada um dos objetivos propostos.

5.2. Objetivo 1. Estabelecer uma abordagem analítica e gráfica para o ensino de equações e inequações fracionárias

Nas tarefas exploradas nas aulas da intervenção pedagógica teve-se em conta os três momentos referidos na estratégia de intervenção: no primeiro fez-se a apresentação da tarefa, onde cada aluno teve de a interpretar individualmente; no segundo os alunos resolveram a tarefa individualmente ou em pequenos grupos e a professora foi circulando pela sala de aula, observando o trabalho desenvolvido pelos alunos; e, por último, no terceiro foi feita a discussão e a síntese dos resultados obtido, tendo em vista a institucionalização do conhecimento matemático.

Antes de iniciar o estudo das equações fracionárias foi abordada a resolução de equações simples. Seguidamente, depois de recordada a resolução de equações simples, passou-se para a resolução de equações fracionárias, salientando que no caso destas últimas equações tínhamos de ter em conta o domínio da função, pois algumas das soluções encontradas poderiam não pertencer ao domínio. Depois de resolvidas as tarefas, procedeu-se à discussão da sua resolução a partir da apresentação das resoluções representativas dos alunos. Concluída a discussão das tarefas relacionadas com a resolução analítica de equações fracionárias, foi feita uma síntese, com a colaboração da turma, sobre os procedimentos de resolução de equações fracionárias numa ótica institucional.

Seguidamente foi abordada a resolução de problemas, em que os alunos tinham de aplicar os seus conhecimentos adquiridos aquando da resolução analítica de equações fracionárias e aquando da resolução gráfica deste tipo de equações. A estratégia usada na resolução gráfica de equações, basicamente, consistiu em introduzir na calculadora a função ou funções que nos permitem resolver o problema, calcular o ponto ou pontos de intersecção e concluir acerca do conjunto solução.

Na resolução gráfica de equações foi sugerido ao alunos que escrevessem uma pequena composição matemática, onde tinham de incluir: a expressão que traduzia o problema; o gráfico ou gráficos, devidamente assinalados, que permitissem resolver o problema, bem como a janela de visualização utilizada; assinalar nos gráficos os pontos que permitem responder ao problema; as estratégias usadas e, finalmente, a solução do problema. Ainda sobre esta abordagem, os alunos foram instruídos acerca dos procedimentos a utilizar com a calculadora gráfica, isto é, que comandos deveriam de utilizar para chegarem aos seus objetivos. De acordo com Demana e Waits (1994), foi ainda salientado que a resolução gráfica poderia ser usada em jeito de confirmação da resolução analítica e que o método de resolução analítica poderia ser usado em jeito de confirmação da resolução gráfica.

Tal como no caso das equações, antes de iniciar o estudo das inequações fracionárias foi abordada a resolução de inequações simples, usando um exemplo do teste diagnóstico, e só depois se passou para a resolução das equações fracionárias. Nesta abordagem começou-se por usar processos analíticos, seguido de processos gráficos e foi feita uma comparação entre os dois processos, salientando-se a desvantagem da calculadora poder apresentar valores aproximados, enquanto a resolução analítica garante a obtenção de valores exatos. Na resolução analítica de inequações foi salientado que o domínio da função pode alterar o conjunto solução sendo, portanto, necessário estudar a função através de uma tabela de sinais, onde os alunos foram questinados novamente acerca dos zeros e dos valores sem significado da função fracionária.

A estratégia usada na resolução gráfica de inequações foi a de introduzir na calculadora a função ou funções que nos permitem resolver o problema, em semelhança com as equações, calcular o ponto ou pontos de intersecção e, finalmente, concluir acerca do conjunto solução, apresentando-o sob a forma de intervalos de números reais. Em conformidade com a resolução gráfica de equações, foi pedido aos alunos uma pequena composição matemática, onde tinham de constar as expressões usadas, o gráfico ou gráficos, devidamente assinalados, bem como a janela de visualização utilizada, o ponto de interseção dos gráficos, a estratégia usada e o conjunto solução do problema.

Ainda a respeito da resolução gráfica, os alunos questionaram se podiam passar tudo para o primeiro membro, obtendo assim apenas uma equação, ao que a professora respondeu que podiam, ressalvando que seriam contas desnecessárias pois o objetivo era resolver a inequação apenas graficamente, sendo, por isso, desnecessário efetuar cálculos. Aqui foi ainda salientado que na calculadora gráfica, no menu que permite resolver graficamente as inequações, era possível alterar o sinal de igualdade pelo sinal de desigualdade, sendo este outro método possível de resolução e, uma vez mais, foi salientando que a calculadora gráfica pode não nos apresentar valores exatos, ao contrário do que acontece com a resolução analítica de inequações.

Em seguida procedeu-se à resolução gráfica de inequações, apresentando aos alunos o esboço do gráfico, sendo que posteriormente tiveram de confirmar os resultados obtidos por processos analíticos, continuando a alternar a ordem dos processos analíticos e gráficos nas tarefas seguintes. Uma vez mais, foi salientado a resolução gráfica poderia ser usada em jeito de confirmação da resolução analítica e que o método de resolução analítica poderia ser usado em jeito de confirmação da resolução gráfica (Demana & Waits, 1994).

Adicionalmente, no decorrer das aulas, foram colocadas questões diretas, tendo em vista que os alunos ultrapassassem as dificuldades encontradas no teste diagnóstico e no decorrer da observação das aulas.

Em relação à metodologia de trabalho, os alunos trabalharam em pares e/ou grupos e quando os alunos usaram calculadoras, as interações foram mais frequentes em relação a aspetos técnicos da calculadora, tal como também observaram Fernandes, Almeida, Viseu e Rodrigues (1999).

5.3. Objetivo 2. Estudar as dificuldades dos alunos na resolução de equações e inequações através das abordagens gráfica e analítica

Para responder a este objetivo, analisámos as respostas dos alunos no teste de avaliação diagnóstico, cuja análise se encontra no ponto 4.1 deste relatório, bem como durante o período de lecionação. A análise das respostas permitiu identificar algumas dificuldades sentidas pelos alunos em relação às resoluções gráfica e analítica de equações e inequações.

Através da análise do teste diagnóstico verificou-se que alguns alunos depois de resolverem as equações e inequações não escreviam o conjunto solução, não sabiam reduzir corretamente as frações ao mesmo denominador, aplicavam mal a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e comutativa da multiplicação, não sabiam como isolar a variável, substituíam a variável por valores numa estratégia de tentativa e erro, não sabiam decompor corretamente o polinómio em fatores, cometiam o erro de transposição e omitiam uma solução, não sabiam aplicar o quadrado do binómio e cometiam o erro da propriedade da monotonia parcial da multiplicação em $\mathbb{R}$. Observou-se ainda o uso da fórmula resolvente para resolver equações do segundo grau incompletas, quando poderiam usar outro método de resolução que não os fizesse cometer tantos erros de contas. Por último, quando o enunciado pedia concretamente a resolução gráfica de equações, alguns alunos resolviam analiticamente a tarefa e ainda não sabiam a forma correta de indicar a janela de visualização. Em geral, muitos destes tipos de erros foram observados em variados estudos (e.g., Hall, 2002; Kieran, 1992; Soares, 2005).

No decorrer do período de lecionação observou-se que os alunos usavam cegamente o método de transposição, referido por Kieran (1992), não operando sobre a equação como um objeto matemático, confundiam objetos com imagens, não interpretavam corretamente gráficos e não aplicavam os métodos de resolução mais adequados. Foi também sentida alguma dificuldade dos alunos acerca do estudo de funções, concretamente não tinham a noção do aspeto gráfico dessas funções, o que decisivo na resolução gráfica de equações e inequações.

Em relação ao uso da calculadora, observou-se que muitos alunos não sabiam como usar as suas potencialidades, não sabendo, por exemplo, como introduzir a função ou funções, tal como observou Consciência (2014), como calcular pontos de interseção ou saber concluir qual a janela mais adequada para uma melhor observação gráfica do problema, também observado por Consciência (2014).

Os erros de escrita na calculadora, que surgiram na edição da expressão, estavam relacionados, essencialmente, com a introdução do sinal negativo ou dos parêntesis, tal como foi observado por Zucula (2016).

5.4. Objetivo 3. Avaliar a aprendizagem dos alunos na resolução de equações e inequações fracionárias

A avaliação das aprendizagens dos alunos na resolução de equações e inequações foi feita em dois momentos: na realização de uma questão aula e a partir de alguns itens incluídos no teste de avaliação sumativa.

É de salientar que a questão aula foi resolvida individualmente com o intuito de os alunos perceberem onde erraram, para posteriormente melhorarem o seu desempenho no teste de avaliação sumativa. Para tal, aquando da correção da questão, foram feitas observações que levassem os alunos a reconhecer e a refletir sobre as suas dificuldades. A questão aula estava dividida em duas partes, em que a primeira tratava de resolução analítica de inequações fracionárias e a segunda da resolução gráfica de inequações fracionárias.

Nesta questão, aquando da resolução analítica de inequações, observou-se que os alunos ainda usavam a fórmula resolvente para resolver equações do segundo grau incompletas, quando estas poderiam ser resolvidas usando outros métodos envolvendo menos cálculos, resolviam as inequações como se de uma equação se tratasse, tal como observaram Zucula (2016) e Tsamir(1998), cometiam erros de cálculo ao multiplicarem fatores e nos sinais de desigualdade e de operações, fatorizavam mal os denominadores, chegando assim a um mínimo múltiplo comum dos denominadores errado, e incluíam no conjunjo solução valores que não pertenciam ao domínio.

Apesar de se ter notado uma melhoria em relação ao teste diagnóstico, alguns alunos ainda não tinham o conhecimento do aspeto gráfico das funções, chegando a sinais da função errados. Por último, e ainda aquando do estudo do sinal da função, concluíam erradamente acerca dos valores dos zeros do numerador e do denominador.

Em relação à resolução gráfica das inequações fracionárias, observou-se que, apesar de ser ter explorado por diversas vezes esta questão, alguns alunos continuavam a não seguir todas as recomendações sugeridas para a elaboração de uma composição matemática, não assinalando as funções usadas, as estratégias de resolução usadas, assim como a forma de apresentação da janela de visualização. Notou-se também a dificuldade dos alunos em escolher uma janela de visualização adequada, sendo que, em consequência, era esboçado apenas parte do gráfico, levando-os a concluir erradamente acerca do conjunto solução, tal como observaram Consciência (2014), Hodges e Kissane (1994), Silva e Seixas (2010) e Rocha (2000) e Magalhães (2010). Também se observou que ainda resolviam uma inequação, em parte ou na totalidade, por processos analíticos, obtendo, por vezes, expressões de funções erradas. E, por último, observou-se que um aluno introduziu o numerador e o denominador da expressão separadamente na calculadora, como se de duas funções distintas se tratasse.

Finalmente, também a ficha de avaliação sumativa foi realizada individualmente, para verificar em que medida os alunos aprenderam os conteúdos abordados nas aulas da intervenção pedagógica.

Em relação à resolução analítica de equações, verificou-se que alguns alunos, embora em pequeno número, continuavam a calcular mal o mínimo múltiplo comum dos denominadores, não consideravam o domínio da função, cometiam erros de cálculo e ainda omitiam elementos da equação dada. Em relação á resolução analítica de inequações, alguns alunos, também em pequeno número, não tinham em consideração o domínio da função, cometiam erros de contas, resolviam a inequação como se de uma equação se tratasse. Também se se observou uma confusão acerca das fórmulas das áreas e uma má interpretação do gráfico fornecido.

Em relação à resolução gráfica de inequações, observou-se que os alunos não concluíram a tarefa, especificamente não indicaram o conjunto solução, não incluíram as assíntotas e não indicaram as funções envolvidas e selecionaram uma janela de visualização inadequada, levando a um esboço gráfico errado das funções e, por consequência, a um conjunto solução errado. Também se se verificou que um aluno, à semelhança da questão aula, introduziu o numerador e o denominador separadamente na calculadora, como se de duas funções distintas se tratasse, não tendo em atenção as observações feitas sobre a questão aula.

Comparativamente com o teste diagnóstico, em qualquer caso, notou-se uma boa melhoria dos resultados; contudo, comparando os resultados obtidos na questão aula com os resultados obtidos nos itens do teste de avaliação sumativa, verificou-se que as melhorias não foram tão salientes, o que se pode dever ao fato de os alunos não terem tomado em consideração as anotações sugeridas na resolução da questão aula.

5.5. Limitações, recomendações e implicações

Deste estudo e tendo em conta a pertinência deste projeto, sobressaíram algumas implicações para o ensino e aprendizagem das equações e inequações fracionárias no 11.º ano de escolaridade.

Na implementação da intervenção pedagógica os alunos puderam desenvolver o espírito de equipa, cooperação e a autoconfiança na resolução das atividades dado que os alunos recorriam, essencialmente, ao seu par para ultrapassar as dificuldades que surgiam. Também favoreceu o desenvolvimento de atitudes mais positivas dos alunos em relação à Matemática, motivando-os e tornando o ambiente de sala de aula mais ativo, mais dinâmico e mais estimulante.

A estratégia de trabalho em pequenos grupos, através de interações que favorecem a partilha, a negociação de significados, a inter-relacionação e a mobilização de saberes, permitiu explorar melhor as questões e problemas, tal como verificaram Silva e Seixas (2010). Ainda, segundo Silva (1996), com as calculadoras, quase todos os procedimentos usuais de cálculo se tornam triviais, deslocando o foco para o pensar o que fazer e como interpretar os resultados. A partir dos resultados obtidos, confirmou-se as convicções da investigadora sobre a importância da calculadora gráfica no processa ensino/aprendizagem, numa sociedade cada vez mais tecnológica e que requer competências de gestão de informação.

Realizar aulas com recurso à tecnologia requer muito tempo pois os alunos nem sempre sabem quais os procedimentos a usar com a mesma. Obter uma síntese ou uma conclusão com a colaboração ativa dos alunos, também requer um certo tempo devido à discussão necessária e à forma como os alunos comunicam em matemática.

No que respeita às limitações desta investigação, é de referir o tempo previsto para a aplicação deste projeto, que foi de seis blocos de 90 minutos. Este tempo foi muito reduzido, considerando as dificuldades sentidas pelos alunos aquando da resolução analítica e da experimentação com a calculadora gráfica. Apesar disso, o tempo estipulado para esta intervenção teve em conta o extenso programa de Matemática A, do 11.º ano (Ministério da Educação, 2002), que mesmo assim não foi cumprido na totalidade, não permitindo a abordagem de tarefas ainda mais diversificadas.

Ao longo da intervenção pedagógica foi se tentando explorar, sempre que possível, tanto uma abordagem analítica como uma abordagem gráfica das equações e inequações fracionárias, tal como sugerido por vários autores (e.g., Consciência, 2014; Demana & Waits, 1994; Douady, 1986; Fernandes & Vaz, 1999; Finney, Tomas, Demana & Waits, 1994; Hembree & Dessart, 1986; Ministério da Educação 2001; Teixeira, Soares & Andrade, 2010; Tynan & Asp, 1998; Zucula, 2016), de forma a perceberem as vantagens e as desvantagens da utilização de ambos os processos.

Possivelmente, com um período de tempo mais alargado, teria sido possível atender mais às dificuldades sentidas pelos alunos, que advinham de anos anteriores e da necessidade de explorar melhor as capacidades gráficas da calculadora, nomeadamente aprofundar mais a questão da janela de visualização, realizar tarefas mais diversificas de modo a colmatarem as suas dificuldades e explorar situações mais concretas de forma a desenvolverem o seu raciocínio. Explorar melhor as vantagens e as desvantagens dos processos analíticos e gráficos da resolução de equações e inequações fracionárias, permitindo-os concluir individualmente qual o melhor processo a usar em situações diferentes. Portanto, em futurar investigações, sugere-se que o aluno escolha qual o melhor processo de resolução e que explique o porquê, na sua opinião, de esse método de resolução ser o mais adequado.

Também é de salientar, que professores com conhecimento dos vários tipos de erros dos alunos estão mais habilitados para prevenir tais erros, pois eles devem de ser discutidos e explorados, tal como se procurou fazer na implementação pedagógica. A exploração dos erros cometidos pelos alunos é importante pois previne que eles os repitam futuramente, assim como que consolidem raciocínios incorretos. Os erros devem de ser encarados como algo inerente ao processo ensino/aprendizagem e não como algo indesejável e penalizável, tal como afirma Borasi (1992, citado por Soares, 2005). Esses erros devem de ser refletidos discutidos pelo professor em conjunto com o grupo turma sem inibições, de forma a favorecer uma atitude de questionamento crítico sobre o conhecimento.

Outra recomendação do presente estudo decorre da interação verificado entre alunos e professor, relativamente à comunicação. Foi observado que quando os alunos são questionados acerca dos métodos de resolução o processo de ensino/aprendizagem é mais facilitado, enriquecendo a aula e tornando os alunos mais ativos e refletidos, contribuindo mais e tendo uma visão mais positiva da matemática.

BIBLIOGRAFIA

Almeida, M. G. & Fernandes, J. A. (2008). A interacção promovida por uma futura professora na aula de Matemática. In R. Luengo González (Coord.), B. Gómez Alfonso, M. Camacho Machín & L. J. Blanco Nieto (Eds.), Investigación en Educación Matemática XII (pp. 587-597). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Almeida, M. G. & Fernandes, J. A. (2010). A comunicação promovida por futuros professores na aula de Matemática. Zetetiké, 18(34), 109-154.

Berry, J. & Francis, B. (1996). Discovering advanced mathematics with calculator activities. In P. Gomez & B. Waits (Eds.), Roles of Calculators in the Classroom (pp. 3-13). USA: Una Empresa Dosente.

Consciência, M. M. C. (2014). A calculadora gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Demana, F. & Waits, B. (1994). Graphing calculator and computer precalculus projects (C2PC): What have we learned in ten years? In A. Solow (Ed.), Preparing for a new calculus conference proceedings. Washington: The Mathematical Association of America.

Escola Secundária Sá de Miranda (2010). Projecto Educativo. Escola Secundária Sá de Miranda. 2010/2013. Braga: Autor.

Fernandes, J. A. & Vaz, O. (1998). Porquê usar Tecnologias nas aulas de matemática? Boletim da SPM, 39, 43-55.

Fernandes, J. A. & Soares, M. J. (2003). O ensino de equações lineares. In Comissão Organizadora do ProfMat 2003 (Org.), Actas do ProfMat 2003 (pp. 327-336). Santarém: Associação de Professores de Matemática.

Fernandes, J. A., Almeida, C., Viseu, F. & Rodrigues, A. M. (1999). Um estudo exploratório sobre atitudes e práticas de professores de matemática na utilização de calculadoras. In C. Almeida, J. A. Fernandes, A. M. Rodrigues, A. P. Mourão, F. Viseu & H. Martinho (Orgs.), Calculadoras gráficas no ensino da matemática (pp. 1-28). Braga: Departamento de Metodologias da Educação da Universidade do Minho.

Finney, R. L., Thomas, G. B., Demana, F. & Waits, B. K. (1994). Calculus: graphical, numerical algebraic. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.

Hall, R. (2002). An analysis of erros made in solution of simple linear equations. Philophy of Mathematics Education, 15.

Inspeção Geral de Educação (2010). Relatório de Avaliação Externa da Escola Secundária Sá de Miranda. Braga: Autor.

Kieran, C. (1992). The learning of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of reasearch on mathematics teaching and learning (pp. 390-419). New York, NY: Macmillan.

Magalhães, M. G. S. N. (2010). A argumentação matemática na resolução de tarefas com a utilização da calculadora gráfica: Experiência numa turma do 11. º ano. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Ministério da Educação (2002). Programa de Matemática A – 11.º ano. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação (2001). Programa de Matemática A – 10.º ano. Lisboa: Autor.

Neves, M. A., Pereira, A. & Silva, J. (2015b). Matemática A 11 Funções II. Porto: Porto Editora.

Saraiva, M., Teixeira, A. & Andrade, J. (2010). Estudo das funções no programa de Matemática com problemas e tarefas de exploração. Projecto IMLNA-Promover a aprendizagem Matemática em Números e Álgebra. Acedido em 15 de março, 2018, de http://www.apm.pt/files/178672_Segment_001_4d3de4ed6e285.pdf.

Silva, J. C. (1996). Are graphing calculators the catalyzers for a real change in mathematics education? In P. Gomez & B. Waits (Eds.), Roles of Calculators in the Classroom (pp.21-30). USA: Una Empresa Dosente.

Silva, D. & Seixas, S. (2010). As competências que a calculadora gráfica promove no ensino/aprendizagem da matemática: Um estudo de caso numa turma do 11.º ano. Interacções, 6(15), 141-172.

Soares M. J. (2005). O ensino de equações lineares no 8.º ano de escolaridade. Uso de calculadoras, erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Vizmanos, J. R. (1996). Will elementary algebra disappear with the use of new graphing calculators? In P. Gomez & B. Waits (Eds.), Roles of Calculators in the Classroom (pp.177-186). USA: Una Empresa Dosente.

Zbiek, R. (1995). Reaction to Hawey, Waits, and Demana's article. The Journal of Mathematlcal Behavior, 14(1), 133-137.

Zucula, A. F. & Ortigão, M. I. R. (2016). Dificuldades na Resolução de Inequações Racionais Fracionárias: um Estudo de caso nas escolas de Moçambique. Educação Matemática em Revista, 52, 49-58. Acedido em 20 de março, 2018, de http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV045_MD1_SA8_ID8139_07092015094617.pdf.

ANEXO I

Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Exmo(a). Senhor(a) Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática, da Universidade do Minho, enquanto professora estagiária, pretendo desenvolver experiências de ensino que potenciem a aprendizagem dos alunos no tema "Equações e inequações fracionárias". O desenvolvimento dessas experiências implica a recolha de dados, que serão obtidos através da resolução de tarefas e da observação das aulas. Para uma melhor compreensão das atividades que se desenvolvem na aula de Matemática, necessito de proceder à recolha de dados através de gravações (áudio e vídeo). Para esse fim, venho desta forma solicitar a autorização para proceder ao registo em suporte áudio e vídeo dos dados necessários à concretização das experiências de ensino e de aprendizagem na sala de aula do seu educando.

Comprometo-me a usar os dados apenas para fins académicos e a não divulgar o nome da escola e dos alunos, nem expor qualquer indicador que envolva o seu educando. Só me interessa a informação que me ajude a melhorar as minhas estratégias de ensino. Os dados das gravações serão apenas usados para efeitos do estudo a realizar e não terão qualquer influência nas classificações escolares dos alunos. Comprometo-me ainda a proceder à destruição de todas as gravações após a realização dos trabalhos.

Agradeço a colaboração

Braga, 26 de Janeiro 2016

A estagiária de Matemática,

(Cláudia Catarina Oliveira Ferreira)

Eu, ..., encarregado de educação do aluno ....do 11º5,

autorizo ☐ não autorizo ☐

que se faça o registo em áudio e vídeo das atividades de ensino e aprendizagem nas aulas de Matemática que envolvem o meu educando desde que seja salvaguardado o anonimato do seu nome e de qualquer indicador que o indicie.

Braga, ... de janeiro de 2015

O Encarregado de Educação

ANEXO II

Avaliação diagnóstica

Avaliação diagnóstica

Nome: ____ Turma: ________ N.º: ________

PARTE I
Deves resolver as questões desta parte do teste por processos analíticos, sem recorrer à calculadora.

1. Resolve, em IR, cada uma das equações seguintes e escreve, em extensão, o respetivo conjunto de solução:

a) $3(2x-5)=\frac{x}{2}$;

b) $x^2 = x$

c) $(z+2)^2 = 4$

2. Resolve, em IR, cada uma das seguintes inequações, indicando o respetivo conjunto-solução sob a forma de intervalo de números reais:

a) $-2y + 3 < 7$

b) $3 - \frac{1-2y}{3} \geq 1.$

3. Escreve uma expressão matemática que traduz o seguinte problema e não o resolvas:

O José pensou num número, multiplicou-o por 7 e ao resultado obtido adicionou-lhe 13 unidades. No final obteve o número 790. Em que número pensou o José?

PARTE II

Usa a calculadora para responderes às questões desta parte do teste.

4. Resolve, com recurso à calculadora gráfica e seguindo os procedimentos anteriores definidos, a equação $2x - 1 = 3$. Na tua resposta apresenta o ecrã da calculadora, a janela de visualização e indica a solução da equação.

5. Resolve, com recurso à calculadora gráfica e seguindo os procedimentos anteriores definidos, a inequação $x^2 \geq 6$. Apresenta o conjunto-solução sob a forma de intervalos de números reais. Na tua resposta apresenta o ecrã da calculadora, a janela de visualização.

ANEXO III

Questão aula

Questão Aula

Nome: ____ Turma: ________N.º: ________

1. Resolva, analiticamente, cada uma das seguintes inequações, indicando o conjunto solução exclusivamente sob a forma de intervalo de números reais.

   a) $\frac{x^2-16}{2x^2-8x} \geq 0$

   b) $\frac{x+2}{x} - \frac{3x}{x^2-2} < 1$

2. Resolva, usando as capacidades da sua calculadora gráfica, a seguinte inequação:

$$\frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} > 1$$

Na sua resposta deve incluir:

- A função ou funções a utilizar;
- O esboço do(s) gráfico(s), devidamente assinalado(s);
- Os pontos importantes para a resolução da inequação;
- A janela de visualização;
- O conjunto solução, exclusivamente sob a forma de intervalos de números reais.

ANEXO IV

Itens do teste de avaliação

Teste avaliação sumativa

3. Resolve, em $\mathbb{R}$, a equação $\frac{x^2-4}{x(x-2)} = \frac{1}{x}$ e escreve, em extensão, o conjunto solução.

4. Considere a função f definida por $f(x) = -4 + \frac{6}{x+2}$

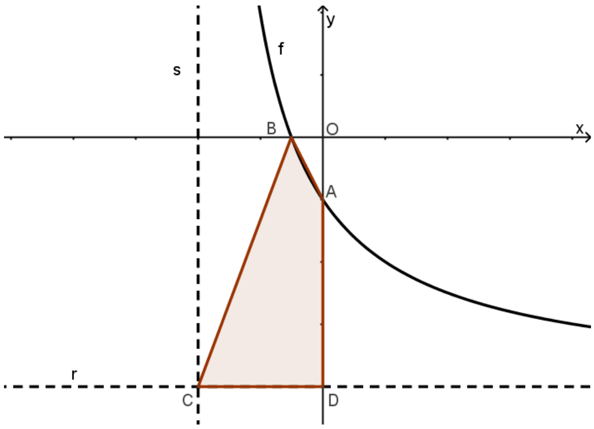
4.1. Indique o domínio de f.

4.2. Indique o limite de $f(x)$ quando x tende para $+\infty$. Explique como procedeu.

4.3. Escreva, recorrendo exclusivamente a intervalos de números reais, o conjunto dos números reais x que verificam a condição $f(x) \geq 3$.

4.4. Na figura, estão representados, num referencial o.n. xOy:

- parte do gráfico de função f;
- as retas r e s, assimptotas do gráfico de f;
- O quadrilátero $[ABCD]$.



Sabe-se que:

A e B são pontos de intersecção do gráfico da função f com os eixos coordenados;

C é o ponto de intersecção das retas r e s;

D é o ponto de interseção da reta r com o eixo Oy.

Determine a área do quadrilátero $[ABCD]$

5. Considere a função definida por $g(x) = -x^2 + 2x + 8$

5.1. Determine os valores de para os quais se verifica $g(x) \geq \frac{1}{x-2}$. Resolva este exercício com **calculadora gráfica**, apresentando o resultado com **aproximação às centésimas**.

A sua resposta deve conter os tópicos para uma composição matemática que inclua:

i) a expressão ou expressões matemáticas a utilizar para resolver o problema;

ii) a janela de visualização;

iii) uma representação gráfica da função (ou funções) que permite(m) resolver o problema, devidamente assinaladas;

iv) a estratégia utilizada para a resolução do problema;

v) a representação do(s) ponto(s) que permitem obter as soluções do problema, no gráfico representado em iii); vi) a resposta, sempre que possível sob a forma de intervalos reais.