

**Apontamentos de apoio às aulas teórico-práticas de Mecânica dos
Materiais 1, edição 2017/2018**

Mestrado Integrado em Eng. Mecânica

Nuno Peixinho

2017

Índice

Capítulo 1: esforços axiais; tensões e deformações	3
Capítulo 2: esforços de torção	21
Capítulo 3: esforços de flexão e esforços transversos	33
Capítulo 4: análise de tensões e deformações; esforços combinados; dimensionamento	66
Capítulo 5: deformação de vigas	87
Anexo A – Cálculo de reacções	97
Anexo B – Formulário principal	101

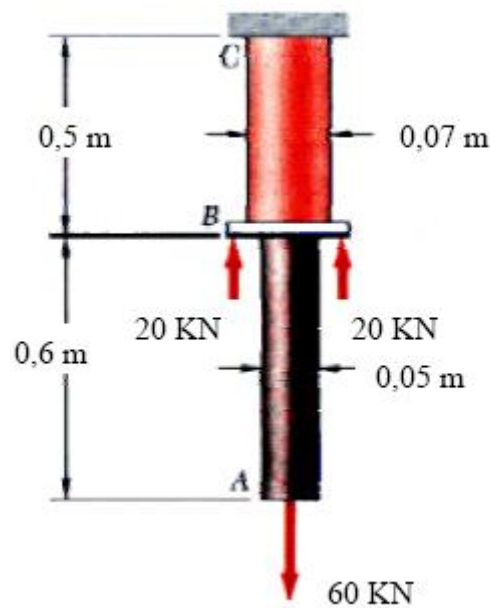
Capítulo 1

Esforços axiais

Tensões e deformações

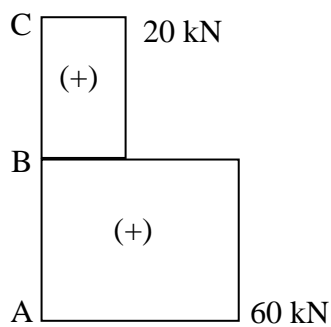
1.1. Dois varões cilíndricos estão acoplados em B e submetidos às forças indicadas. O varão AB é feito de aço ($E=2.07 \times 10^5 \text{ MPa}$), e o varão BC de latão ($E=1.05 \times 10^5 \text{ MPa}$). Determine:

- a deformação total do conjunto ABC
- a deformação do ponto B

Resolução:

a)

Da análise da figura resulta o diagrama de esforços axiais:



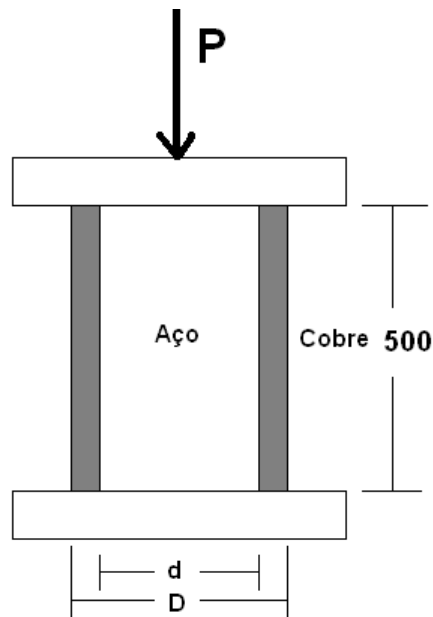
A resolução deverá recorrer à contribuição dos dois varões para a deformação total:

$$\delta_A = \sum \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \Leftrightarrow \delta_A = \frac{60000 \times 600}{(\pi \times 25^2) \times (2.07 \times 10^5)} + \frac{20000 \times 500}{(\pi \times 35^2) \times (1.05 \times 10^5)} = 0.113 \text{ mm}$$

b)

$$\delta_B = \frac{20000 \times 500}{(\pi \times 35^2) \times (1.05 \times 10^5)} = 0.025 \text{ mm}$$

1.2. Um cilindro de aço e um tubo de cobre estão a ser comprimidos como se representa na figura. Determine as tensões desenvolvidas nos dois materiais e o encurtamento verificado no conjunto, sabendo que a carga $P=100\text{kN}$, $d=120\text{mm}$, $D=160\text{mm}$. Os módulos de elasticidade dos materiais são, respectivamente, $E_{\text{aço}}=2,07 \times 10^5 \text{MPa}$ e $E_{\text{cobre}}=1,2 \times 10^5 \text{MPa}$.



Resolução:

Equação de equilíbrio

$$P = P_{\text{cobre}} + P_{\text{aço}} = 100 \times 10^3 \text{ N}$$

$$\delta_{\text{cobre}} = \frac{P_{\text{cobre}} L}{E_{\text{cobre}} A_{\text{cobre}}}$$

$$\delta_{\text{aço}} = \frac{P_{\text{aço}} L}{E_{\text{aço}} A_{\text{aço}}}$$

A equação de equilíbrio das forças não é suficiente para o cálculo. No entanto, o alongamento em ambos os materiais terá de ser igual o que permite encontrar outra condição:

$$\delta_{\text{cobre}} = \delta_{\text{aço}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P_{\text{cobre}} L}{E_{\text{cobre}} A_{\text{cobre}}} = \frac{P_{\text{aço}} L}{E_{\text{aço}} A_{\text{aço}}} \Leftrightarrow \frac{P_{\text{cobre}} \times 500}{(1.2 \times 10^5) \times \pi \left(\frac{160^2 - 120^2}{4} \right)} = \frac{P_{\text{aço}} \times 500}{(2.07 \times 10^5) \times \pi \left(\frac{120^2}{4} \right)}$$

$$\Leftrightarrow P_{\text{aço}} = 2.218 \times P_{\text{cobre}}$$

Substituindo na equação de equilíbrio estático ($P = P_{\text{cobre}} + P_{\text{aço}}$) resulta:

$$P_{\text{aço}} = 68924.8N$$

$$P_{\text{cobre}} = 31075.2N$$

Para o cálculo das tensões:

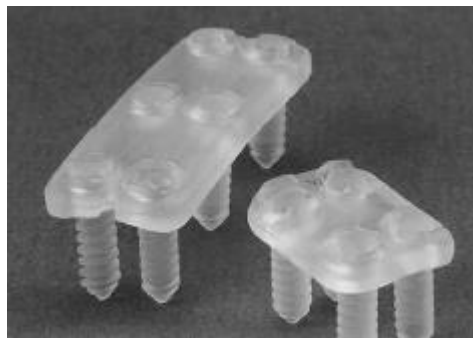
$$\sigma_{\text{aço}} = \frac{P_{\text{aço}}}{A_{\text{aço}}} = \frac{68924.8}{\pi \left(\frac{120^2}{4} \right)} = 6.1MPa$$

$$\sigma_{\text{cobre}} = \frac{P_{\text{cobre}}}{A_{\text{cobre}}} = \frac{31075.2}{\pi \left(\frac{160^2 - 120^2}{4} \right)} = 3.5MPa$$

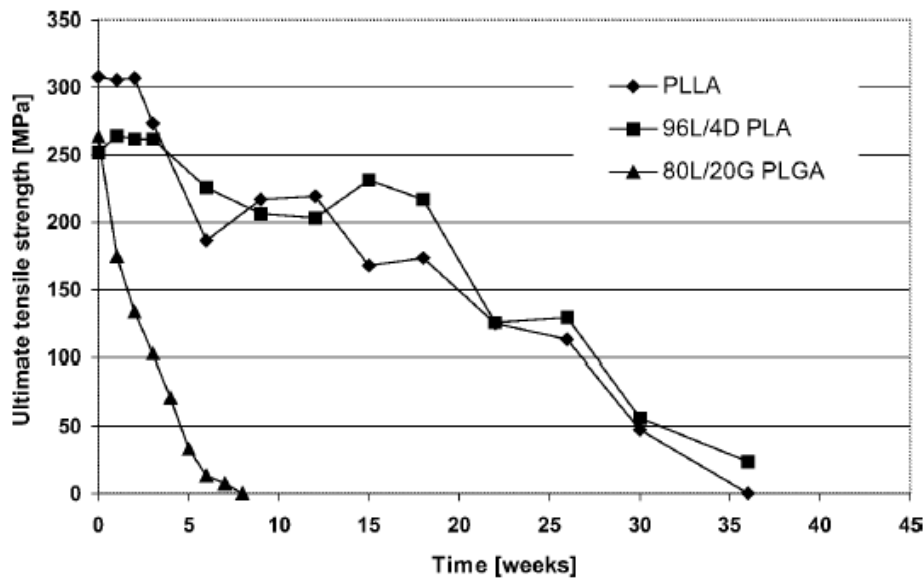
O encurtamento provocado no conjunto pode ser calculado a partir do esforço aplicado no aço ou no cobre. Calculando para o tubo de cobre vem:

$$\frac{31075.2 \times 500}{(1.2 \times 10^5) \times \pi \left(\frac{160^2 - 120^2}{4} \right)} = 1.47 \times 10^{-2} mm$$

1.3. A utilização de materiais bioabsorbíveis em aplicações de estabilização e reconstrução óssea tem aumentado devido a várias vantagens, das quais a mais importante é a possibilidade de evitar uma 2ª intervenção cirúrgica de remoção. O principal desafio à utilização destes materiais está relacionado com a degradação das suas propriedades mecânicas ao longo do tempo. A imagem mostra uma placa cervical em material bioabsorbível (PLLA – Poly-L-Lactic-Acid), utilizada na estabilização da coluna cervical. Considerando que a placa será solicitada em tracção-compressão e o gráfico de evolução de propriedades mecânicas apresentado, calcule a força máxima que a placa poderá suportar ao fim de 30 semanas. Discuta o coeficiente de segurança a utilizar no projecto de uma nova placa.



Placa anterior cervical com secção hxb=5x15mm



Alteração da tensão de rotura durante degradação *in vitro*.

Resolução:

Do gráfico retira-se uma tensão de rotura para 30 semanas:

$$\sigma_{rot} \approx 48MPa$$

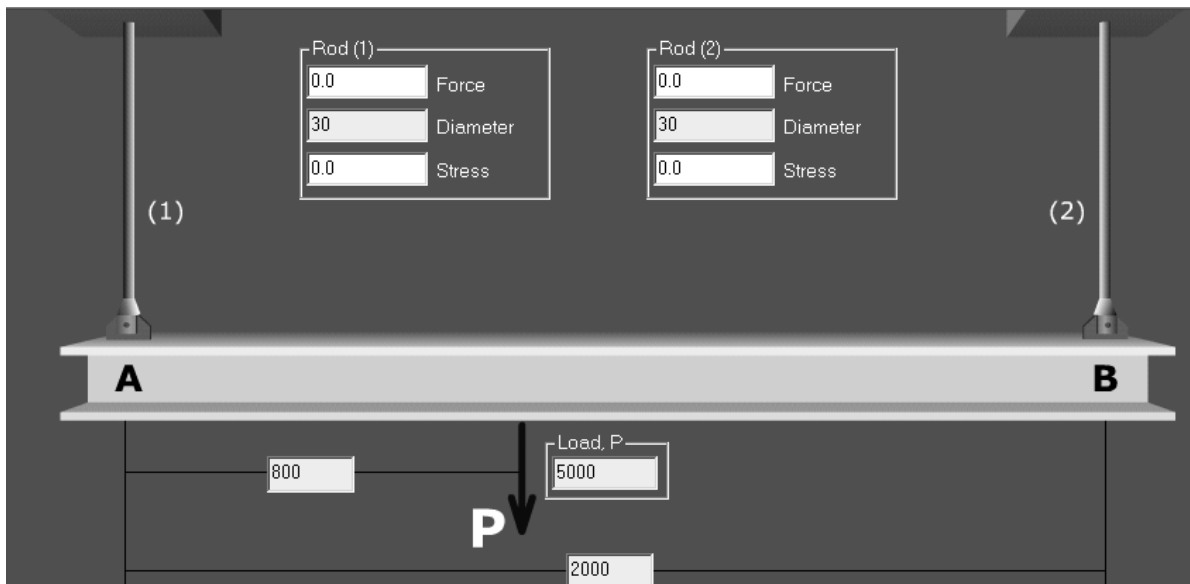
Considerando as dimensões da secção vem:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\Leftrightarrow F = \sigma \times A = 48 \times (15 \times 5) = 3600N$$

Portanto, 3600N é a força máxima aplicável ao fim de 30 semanas. Este valor é encontrado sem considerar coeficiente de segurança que se deverá utilizar no projecto. Este valor pode depender de várias situações, sendo que no caso particular importa considerar que os valores de tensão de rotura são obtidos *in vitro*, logo não representam a situação real.

1.4. Considere a barra AB, indicada na figura, com 2000 mm de comprimento, ligada ao tecto por duas barras, ambas com 30mm de diâmetro. A carga de 5000N é aplicada a uma distância de 800 mm do ponto A. Calcule a tensão em cada barra.



Resolução (utilizando MDSolids):

Pela condição de equilíbrio estático, as forças nas barras 1 e 2 deverão verificar:

$$F_1 + F_2 - 5000 = 0$$

A equação anterior tem duas incógnitas e não pode ser resolvida de imediato. Considerando o somatório dos momentos em relação ao ponto A vem:

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0 &\Leftrightarrow F_2 \times 2000 - 5000 \times 800 = 0 \\ \Leftrightarrow F_2 &= 2000N\end{aligned}$$

Substituindo na primeira equação resulta:

$$F_1 = 3000N$$

Para o cálculo das tensões axiais:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{3000}{\frac{\pi 30^2}{4}} = 4.24MPa$$

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{2000}{\frac{\pi 30^2}{4}} = 2.83MPa$$

Este problema pode ser mais complicado se o número de barras a calcular o transformar num caso hiperestático. Neste caso deve recorrer-se a condições geométricas para encontrar mais equações. Pode seguir-se genericamente o método apresentado no quadro seguinte:

Diagrama de corpo livre

Equações de equilíbrio

$$\begin{cases} F_A + F_B + F_D - P = 0 \\ F_B \times L + F_D \times 3L - P \times 2L = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Análise das deformações

Equação de compatibilidade dos deslocamentos

$$\frac{\delta_B - \delta_A}{L} = \frac{\delta_D - \delta_A}{3L}$$

Relações entre forças e alongamentos

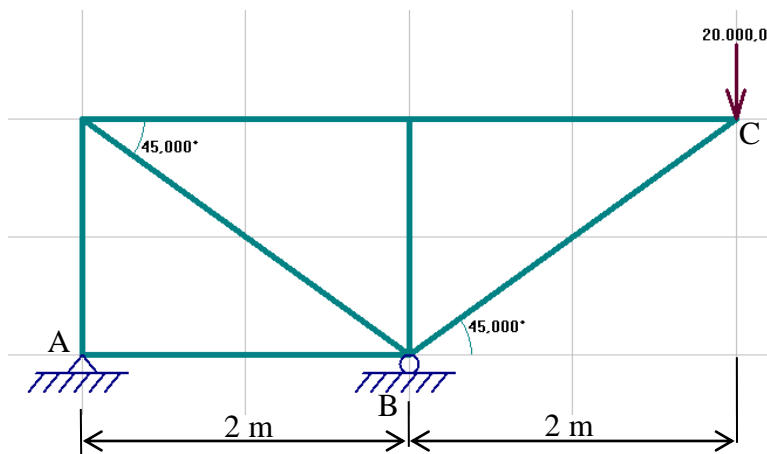
$$\begin{aligned} \delta_A &= \frac{F_A L'}{AE} \\ \delta_B &= \frac{F_B L'}{AE} \\ \delta_D &= \frac{F_D L'}{AE} \end{aligned}$$

Sistema de equações

$$\begin{cases} F_A + F_B + F_D - P = 0 \\ F_B \times L + F_D \times 3L - P \times 2L = 0 \\ 3(F_B - F_A) = F_D - F_A \end{cases}$$

Análise de casos hiperestáticos

1.5. Considere a estrutura articulada representada na figura. Calcule o esforço em cada uma das barras.



Resolução:

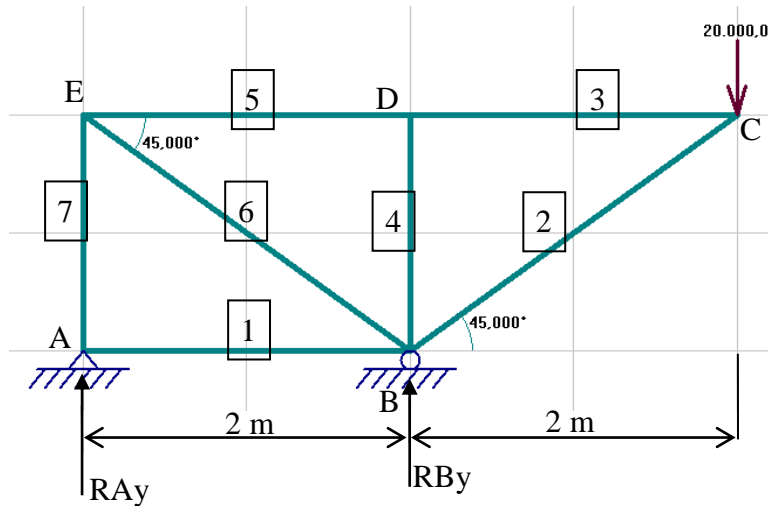
A resolução utilizará o método dos nós. O quadro seguinte resume a forma de aplicação do método.

Metodo dos nós

O método dos nós baseia-se em que nas estruturas articuladas as uniões não transmitem momentos. Assim, cada barra estará apenas submetida a esforço axial. Em cada união (nó) faz-se o equilíbrio de forças segundo x e y para determinar as incógnitas que são os esforços nas barras. Para o cálculo poder ser efectuado tem que, no nó utilizado, não poder existir mais do que duas incógnitas. O processo de cálculo segue os seguintes passos:

- cálculo de reacções nos apoios (estas forças têm de ser consideradas nos nós onde actuam);
- numeração das barras;
- escolha de um nó adequado para iniciar o cálculo (não pode ter mais de duas incógnitas);
- resolução das duas equações de equilíbrio estático e cálculo dos esforços nas barras;
- passagem ao nó seguinte. À medida que o processo é completado vão desaparecendo as incógnitas até se calcular os esforços em todas as barras.
- No exemplo apresentado considera-se por defeito as forças “a sair” dos nós. Se o resultado é positivo a barra está à tracção, se negativo está à compressão.

Numeração das barras e nós:



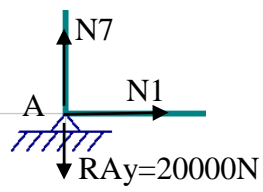
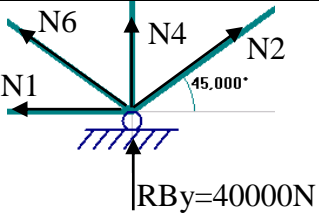
Cálculo de reacções nos apoios:

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow R_{A_y} + R_{B_y} - 20000 = 0 \quad R_{A_y} = -20000N$$

$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow 2R_{B_y} - 4 \times 20000 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_{B_y} = 40000N$$

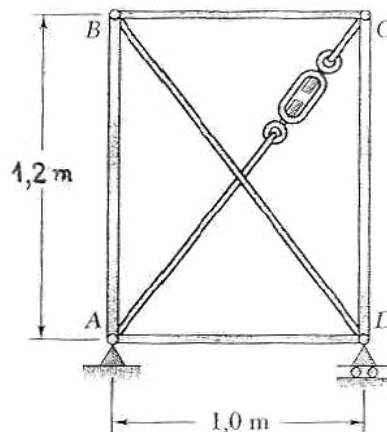
logo R_{A_y} tem sentido contrário ao arbitrado.

	<p>Inicia-se a resolução pelo nó C, que tem apenas duas incógnitas (N_2 e N_3). Podia também iniciar-se pelo nó A. Das equações de equilíbrio resulta:</p> $\sum F_x = 0 \Leftrightarrow -N_3 - N_2 \cos 45 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_2 = -28284.3N(C)$ $\sum F_y = 0 \Leftrightarrow -N_2 \sin 45 - 20000 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_3 = 20000N(T)$
	<p>De seguida pode passar-se ao nó D uma vez que a força N_3 já é conhecida:</p> $\sum F_x = 0 \Leftrightarrow -N_5 + N_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_5 = 20000N(T)$ $\sum F_y = 0 \Leftrightarrow N_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_4 = 0$
	$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow N_5 + N_6 \cos 45 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_6 = -28284.3N(C)$ $\sum F_y = 0 \Leftrightarrow -N_7 - N_6 \sin 45 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_7 = 20000N(T)$

	$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow N_1 = 0$ $\sum F_y = 0 \Leftrightarrow N_7 - 20000 = 0 \rightarrow \text{(O que confirma o valor de } N_7)$
	<p>Neste ponto já todas as forças foram calculadas. A análise ao nó B pode ser feita para verificação:</p> $\sum F_x = 0 \Leftrightarrow -N_6 \cos 45 + N_2 \cos 45 - N_1 = 0$ $\sum F_y = 0 \Leftrightarrow N_4 + N_6 \text{sen} 45 + N_2 \text{sen} 45 + 40000 = 0$ $\Leftrightarrow -(-28284.3) \cos 45 + (-28284.3) \cos 45 - 0 = 0$ $\Leftrightarrow 0 + (-28284.3) \text{sen} 45 + (-28284.3) \text{sen} 45 + 40000 = 0$ <p style="text-align: right;">(O que é verificado)</p>

1.6. Considere a montagem representada na figura.

- Admitindo que o esticador está apertado de modo que o membro *AC* fica traccionado com uma força de 10 kN, determine as forças presentes nos elementos *AB*, *CD*, *BC*, *AD* e *BD*.
- Considerando que as barras *AB* e *CD* são de aço ($E=200\text{GPa}$) e cilíndricas (diâmetro das barras *AB* e *CD* = 30 mm), determine a tracção máxima admissível em *AC* de modo que as deformações nos membros *AB* e *CD* não ultrapasse 1mm.



Resolução:

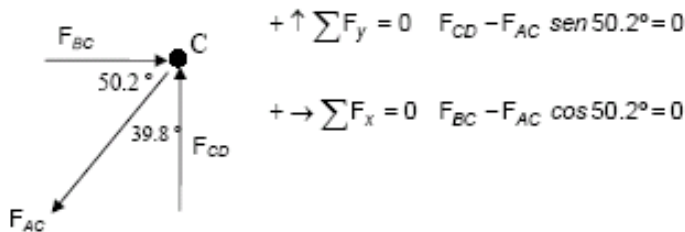
a)

Pela análise da figura observa-se a igualdade de ângulos

$$\angle ABD = \angle ACD = \angle BAC = \angle BDC = \operatorname{arctg} \frac{1}{1.2} = 39.8^\circ, \text{ e}$$

$$\angle CAD = \angle CBD = \angle ACB = \angle ADB = \operatorname{arctg} \frac{1.2}{1} = 50.2^\circ$$

Aplicando o método dos nós no ponto C:

Considerando que $F_{AC} = 10 \text{ kN}$ resulta:

$$F_{CD} = (10 \text{ kN})(\operatorname{sen} 50.2^\circ) = 7.68 \text{ kN}$$

$$F_{BC} = (10 \text{ kN})(\operatorname{cos} 50.2^\circ) = 6.40 \text{ kN}$$

Atendendo à simetria da estrutura as forças nos restantes membros serão:

$$F_{AC} = F_{BD} = 10 \text{ kN, em tracção}$$

$$F_{CD} = F_{AB} = 7.68 \text{ kN, em compressão}$$

$$F_{BC} = F_{AD} = 6.40 \text{ kN, em compressão}$$

b)

$$\delta_{AB} = \delta_{CD} = 1 \text{ mm} = 0.001 \text{ m}$$

$$A_{AB} = A_{CD} = \pi \frac{d^2}{4} = \pi \frac{(0.03)^2}{4} = 506.8 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

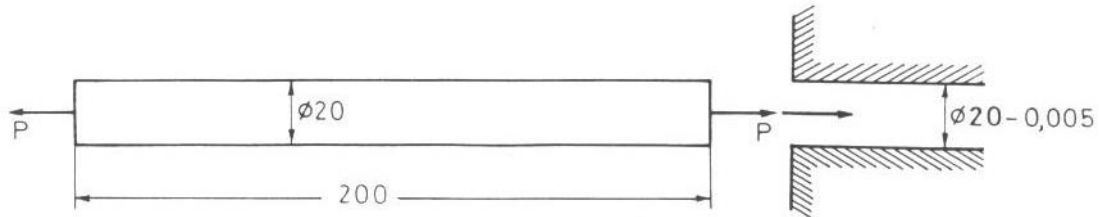
$$\delta_{CD} = \frac{F_{CD} L_{CD}}{A_{CD} E}, \text{ donde resulta } F_{CD} = \frac{A_{CD} E \delta_{CD}}{L_{CD}} = \frac{(706.8 \times 10^{-6})(200 \times 10^9)(0.001)}{1.2} = 117.8 \text{ kN}$$

Utilizando a relação da alínea anterior: $F_{CD} - F_{AC} \operatorname{sen} 50.2^\circ = 0$, obtém-se:

$$F_{AC} = \frac{F_{CD}}{\operatorname{sen} 50.2^\circ} = \frac{117.8}{\operatorname{sen} 50.2^\circ} = 153.3 \text{ kN}$$

1.7. O varão representado na figura é feito de alumínio e está a ser solicitado por uma carga P de tracção para poder ser introduzido num casquilho de aço cujo diâmetro tem menos 0.005 mm que o diâmetro do varão.

- verifique se a operação é possível sem deformar plasticamente o material, sabendo que a tensão limite de elasticidade do alumínio é 120MPa, $E=7.5 \times 10^4$ MPa e $\nu=0.33$.
- em caso afirmativo, calcule a força necessária para a operação.



Resolução:

a)

Considera-se a deformação do casquilho de aço desprezável. A análise parte do cálculo da deformação necessária para o varão obtendo-se então, pela lei de Hooke, a tensão correspondente que é comparada com a tensão de cedência do material. O varão deverá passar de um diâmetro inicial de 20mm para um diâmetro final de $20-0.005=19.995$ mm. A esta variação corresponde uma deformação diametral:

$$\varepsilon_D = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{\Delta D}{D_i} = \frac{D_f - D_i}{D_i} = \frac{19.995 - 20}{20} = -250 \times 10^{-6}$$

Esta é a deformação necessária para o varão. Pela lei de Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

Para uma estado de tensão uniaxial, com $\sigma_y = \sigma_z = 0$, resulta:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_x$$

Igualando à deformação calculada vem:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -250 \times 10^{-6} = -\frac{\nu}{E} \sigma_x$$

$$\Leftrightarrow \sigma_x = \frac{250 \times 10^{-6} \times 7.5 \times 10^4}{0.33} = 56.8 \text{ MPa}$$

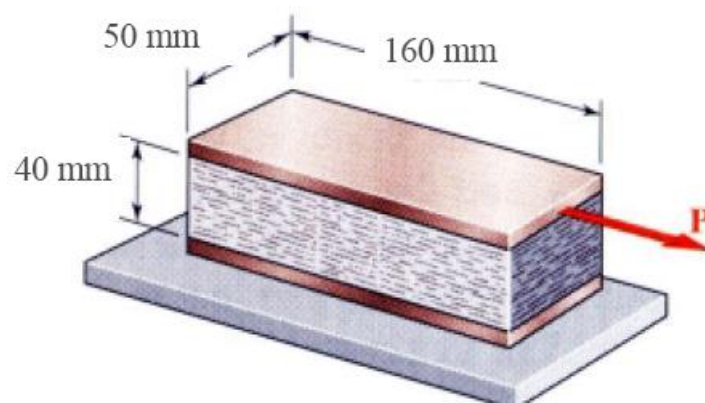
Como este valor é inferior à tensão de cedência (120MPa), a operação é possível sem deformar plasticamente o material.

b)

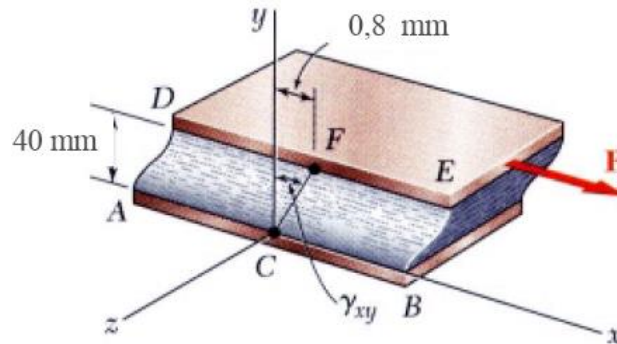
$$\sigma_x = \frac{P}{A}$$

$$\Leftrightarrow P = 56.8 \times \frac{\pi D^2}{4} = 17844.2 \text{ N}$$

1.8. Um bloco rectangular de um material, com módulo de distorção $G = 600 \text{ MPa}$ é colado a duas placas horizontais rígidas. A placa inferior está fixa enquanto a placa superior é submetida a uma força horizontal P . Sabendo que a placa superior se desloca $0,8 \text{ mm}$ sob a acção da força, determine a distorção média no material e a força P exercida na placa superior.



Resolução:



Pela análise da deformação pode ser calculada a distorção média:

$$\gamma_{xy} \approx \tan \gamma_{xy} = \frac{0.8}{40} \Leftrightarrow \gamma_{xy} = 0.02 \text{ rad}$$

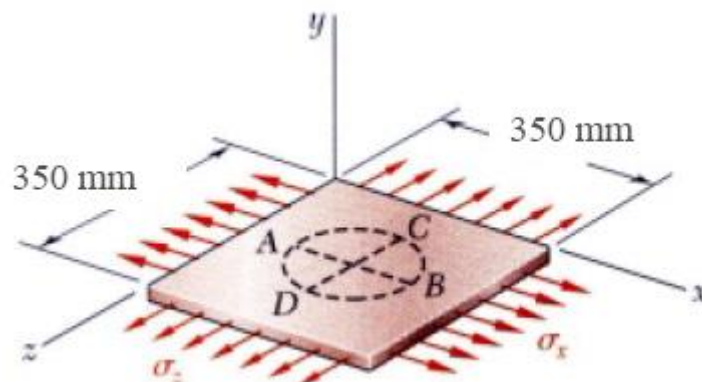
Para o cálculo da tensão de corte utiliza-se a lei de Hooke. Com o valor da tensão de corte média é possível calcular a força aplicada.

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 600 \times 0.02 = 12 \text{ MPa}$$

$$P = \tau_{xy} A = 12 \times (160 \times 50) = 96 \times 10^3 \text{ N}$$

1.9. Uma circunferência de diâmetro $d=200 \text{ mm}$ está desenhada numa placa de alumínio, livre de tensões, e de espessura $t=18 \text{ mm}$. A actuação posterior de forças na placa origina as tensões normais $\sigma_x = 85 \text{ MPa}$ e $\sigma_z = 150 \text{ MPa}$. Considerando $E=70 \text{ GPa}$ e $\nu=0.33$, determine:

- o comprimento do diâmetro AB;
- o comprimento do diâmetro CD;
- a espessura final da placa.



Resolução:

Aplicando a lei de Hooke generalizada podem ser determinadas as três componentes de deformação normal:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) = \frac{85}{70000} - \frac{0.33}{70000}(0 + 150) = 0.5 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) = -1.119 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = 1.738 \times 10^{-3}$$

Cálculo das variações de diâmetro:

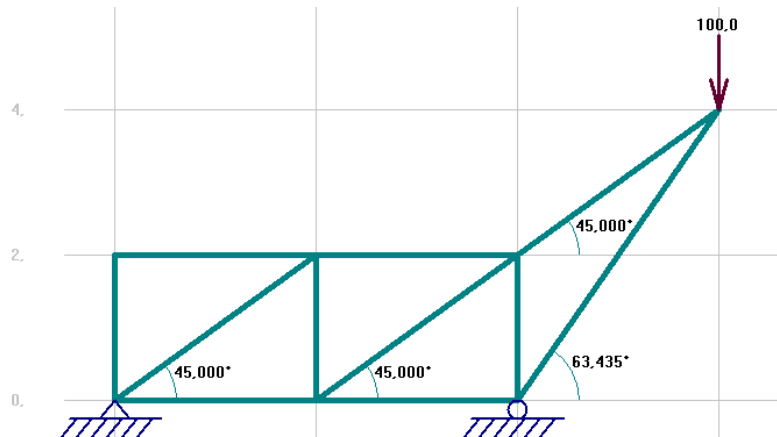
$$\delta_{AB} = \varepsilon_x d = (0.5 \times 10^{-3})(200) = 0.1 \text{ mm}$$

$$\delta_{CD} = \varepsilon_z d = (1.738 \times 10^{-3})(200) = 0.35 \text{ mm}$$

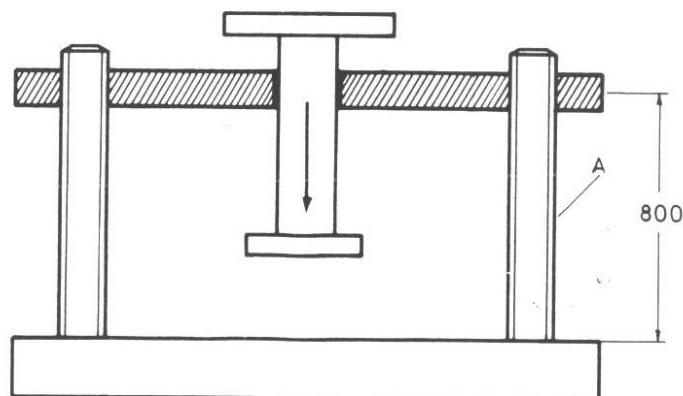
$$\delta_t = \varepsilon_y t = (-1.119 \times 10^{-3})(18) = -0.02 \text{ mm}$$

Problemas propostos

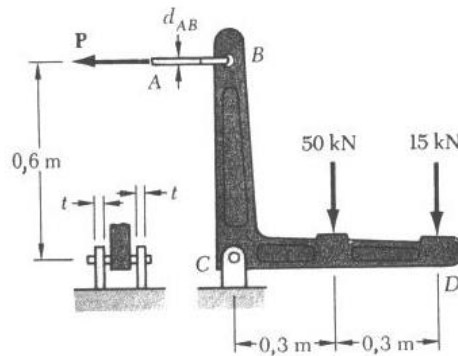
P-1.1. Considere o sistema articulado da figura. Dimensione as barras utilizando secção circular maciça, considerando que todas as barras deverão ter a mesma secção e adoptando um coeficiente de segurança $n=1.2$. Utilize três materiais alternativos e discuta os resultados obtidos no dimensionamento. A carga aplicada é de 100kN e a dimensão de cada quadrícula no desenho é de 2m.



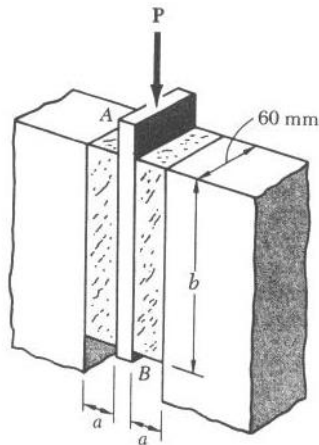
P-1.2. A prensa representada na figura deve ser capaz de aplicar com segurança forças de compressão até 20kN, de maneira que o alongamento das duas colunas de aço não exceda 0.25mm. Determine o diâmetro das colunas, sabendo que estas são de ferro fundido com tensão admissível à compressão de 100MPa. Para este material considere $E=1.47 \times 10^5 \text{MPa}$ e $\nu=0.25$. Discuta o critério com mais influência neste projecto. Verifique se o mesmo se mantém utilizando um aço ao carbono com a mesma tensão admissível à compressão mas com $E=2.07 \times 10^5 \text{MPa}$ e $\nu=0.33$.



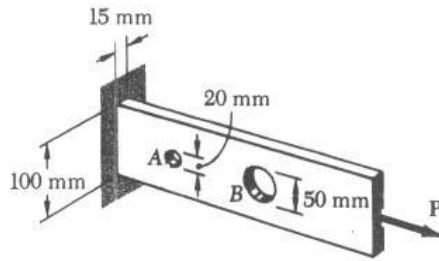
P-1.3. Duas forças são aplicadas no suporte da figura. Sabendo que a barra AB é feita de aço com tensão de cedência de 600MPa, determine o diâmetro da barra de modo que o coeficiente de segurança seja igual a 3. Dimensione também o pino do ponto C sabendo que é feito de um aço com tensão admissível ao corte de 200MPa.



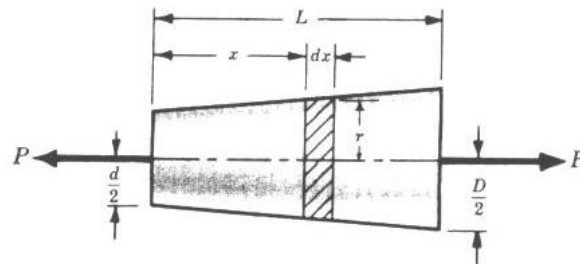
P-1.4. Uma unidade de amortecimento de vibrações consiste em dois blocos de borracha dura colados à placa AB e dois suportes fixos. Para o tipo de borracha usada $\tau_{adm}=1.5\text{MPa}$ e $G=18\text{MPa}$. Sabendo-se que uma força vertical e centrada P de intensidade 27kN deve causar uma deflexão vertical de 2mm na placa AB, determine o menor valor admissível para os lados a e b dos blocos.



P-1.5. Uma barra longa de aço foi furada em dois pontos e submetida a uma força axial $P=32\text{kN}$. Determine o valor da tensão máxima nos pontos A e B.

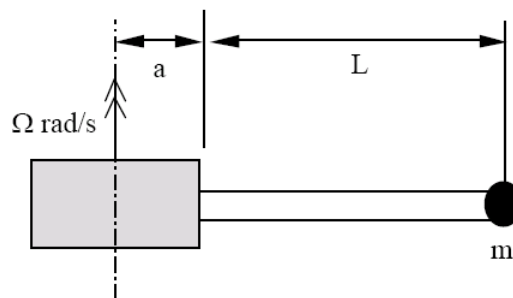


P-1.6. Uma barra circular de secção variável desde um diâmetro menor d até um diâmetro D tem um comprimento L . Derive uma expressão para o alongamento devido a uma carga axial P aplicada em cada extremidade.



P-1.7. Uma barra uniforme de comprimento L área de secção A está fixa a um disco rígido de raio a como se mostra na figura. O disco e a barra têm um movimento rotativo a uma velocidade angular Ω rad/s. A barra é feita de um material que tem uma densidade ρ e um módulo elástico E . A barra tem fixa na sua extremidade uma massa m . Derive expressões que permitam calcular:

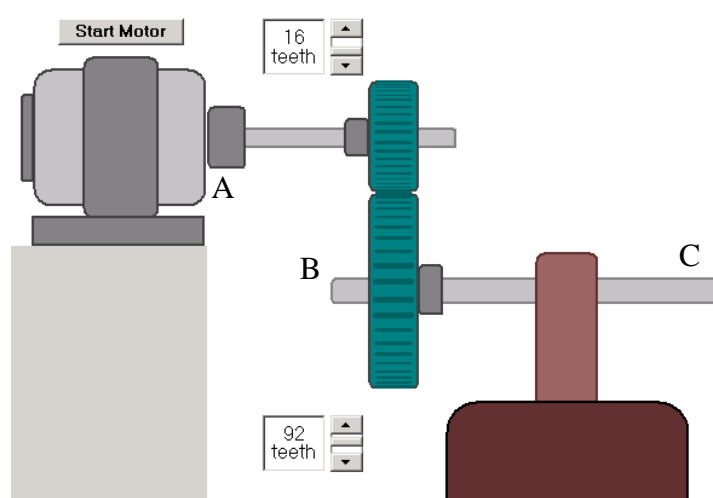
- a força axial na barra;
- a tensão normal máxima devido à aceleração centrípeta;
- o deslocamento radial da extremidade da barra.



Capítulo 2

Esforços de torção

2.1. Um motor transmite uma potência de 20kW a uma velocidade de rotação de 50Hz para um veio movido, através de uma transmissão pinhão-roda dentada com relação de transmissão igual a 5.75. Os dois veios têm diâmetro exterior de 50mm e diâmetro interior de 45mm. Determine a tensão de corte máxima que se verifica no veio BC.



Resolução:

O cálculo do momento de torção à saída do motor é obtido por:

$$M = \frac{P}{2\pi f} = \frac{20 \times 10^3}{2 \times \pi \times 50} = 63.662 Nm$$

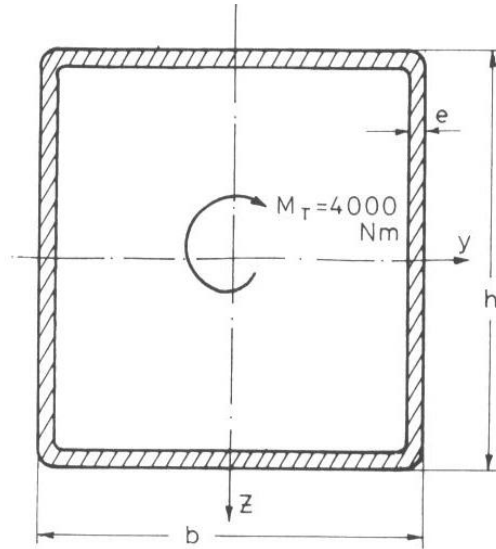
O momento no veio movido é obtido utilizando a relação de transmissão (92/16=5.75):

$$M_B = 63.662 \times 5.75 = 366.06 Nm$$

Com este valor e os dados geométricos do veio pode ser calculada a tensão de corte máxima:

$$\tau_{máx} = \frac{M \rho_{máx}}{I_P} = \frac{366.06 \times 10^3 \left(\frac{55}{2} \right)}{\frac{\pi (50^4 - 45^4)}{32}} = 47.7 MPa$$

2.2. Considere a secção transversal tubular representada na figura, sujeita a um momento torçor $M_t=4000\text{Nm}$. Sendo a tensão admissível ao corte do material $\tau_{adm}=80\text{MPa}$, determine um conjunto de valores de espessura e altura para a secção resistir satisfatoriamente às solicitações indicadas, considerando uma secção quadrada com $b=h$. Compare a solução obtida com a correspondente para uma secção quadrada maciça.



Resolução:

Para tubos de espessura reduzida a tensão de corte máxima é calculada por:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{M_t}{2A_0e},$$

em que A_0 é a área delimitada pela linha média na espessura, ou seja, para as dimensões indicadas:

$$A_0 = (b-e)(h-e)$$

Teremos de garantir que:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{M_t}{2(b-e)(h-e)e} \leq \tau_{adm}$$

Considerando diferentes valores de espessura, calcula-se os valores de $b=h$. Para uma espessura de 5mm vem:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{4000 \times 10^3}{2(b-5)(b-5)5} \leq 80$$

$$\Leftrightarrow b \geq 76\text{mm}$$

Poderão ser utilizados outros valores de espessura, por exemplo:

e (mm)	b=h (mm)
5	76
8	64
10	60

Para uma secção rectangular maciça a tensão de corte máxima é dada por:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{M_t}{c_1 h b^2},$$

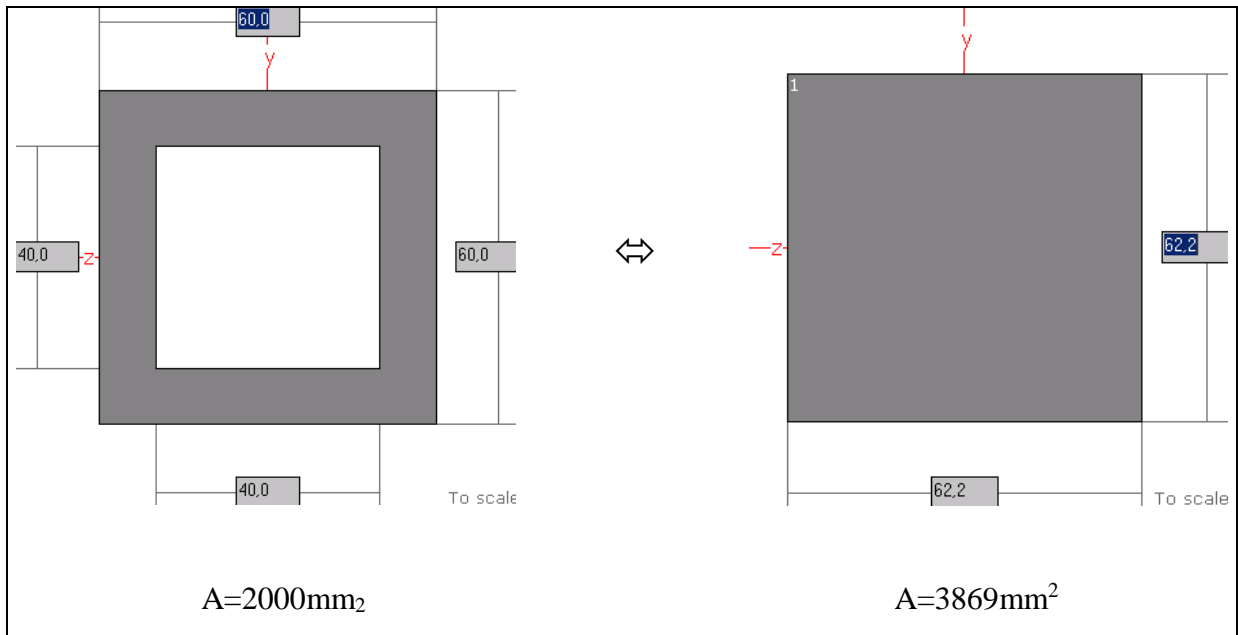
em que c_1 é obtido a partir da tabela seguinte, considerando a relação de aspecto h/b.

h/b	c_1	c_2
1,0	0,208	0,1406
1,2	0,219	0,1661
1,5	0,231	0,1958
2,0	0,246	0,229
2,5	0,258	0,249
3,0	0,267	0,263
4,0	0,282	0,281
5,0	0,291	0,291
10,0	0,312	0,312
∞	0,333	0,333

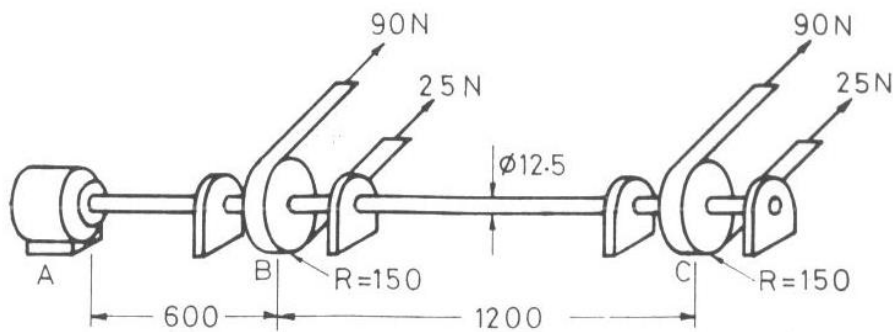
Da tabela anterior e para h=b obtém-se $c_1=0.208$. Assim, para o dimensionamento vem:

$$\begin{aligned} \tau_{m\acute{a}x} &= \frac{M_t}{c_1 h b^2} \leq 80 \\ \Leftrightarrow \frac{4000 \times 10^3}{0.208 \times b^3} &\leq 80 \\ \Leftrightarrow b &\geq 62.2 \text{ mm} \end{aligned}$$

Pela análise dos resultados conclui-se da maior eficiência das secções tubulares em relação a secções maciças, para esforços de torção. A figura seguinte resume esta conclusão através da comparação entre a secção com espessura de 10mm e a secção maciça equivalente.



2.3. Dois pequenos tornos são conduzidos pelo mesmo motor através de um veio de aço de 12.5mm de diâmetro como indicado na figura. Calcula a tensão de corte máxima no veio e o ângulo de torção entre as duas extremidades do veio.



Resolução:

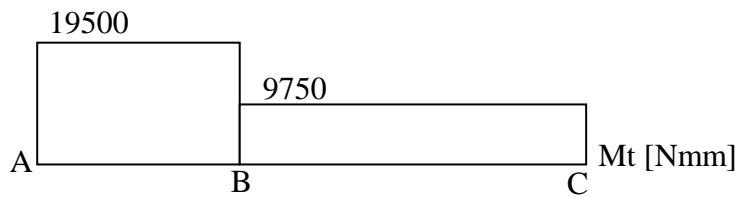
Nos pontos B e C os momentos de torção aplicados são obtidos por:

$$M_B = M_C = (90 - 25) \times 150 = 9750 \text{ Nmm}$$

A estes momentos há uma reacção correspondente em A, obtida pela equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \sum M_x &= 0 \\ \Leftrightarrow M_A - 9750 - 9750 &= 0 \\ \Leftrightarrow M_A &= 19500 \text{ Nmm} \end{aligned}$$

Para os esforços de torção aplicados pode ser desenhado o diagrama de esforços seguinte:



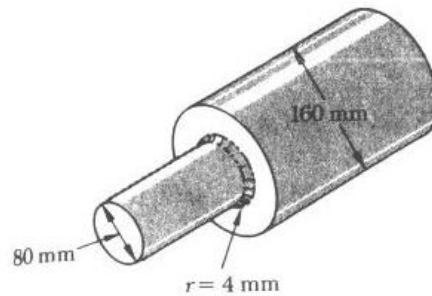
A tensão de corte máxima é calculada com o momento de torção máximo obtido do diagrama:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{M_{t,m\acute{a}x} \rho_{m\acute{a}x}}{I_p} = \frac{19500 \times \left(\frac{12.5}{2}\right)}{\frac{\pi \times 12.5^4}{32}} = 50.85 \text{ MPa}$$

Para o cálculo do ângulo de torção deve considerar-se as contribuições dos dois segmentos submetidos a momentos de torção diferentes:

$$\varphi = \sum \frac{M_i L_i}{G_i I_{p,i}} = \frac{19500 \times 600}{7.92 \times 10^4 \times \left(\frac{\pi \times 12.5^4}{32}\right)} + \frac{9750 \times 1200}{7.92 \times 10^4 \times \left(\frac{\pi \times 12.5^4}{32}\right)} = 0.123 \text{ rad}$$

2.4. O eixo de secção transversal variável da figura transmite a potência de uma turbina para um gerador com uma velocidade de rotação de 900rpm. A tensão admissível ao corte do aço utilizado é de 55MPa. Para as dimensões indicadas determine a máxima potência que pode ser transmitida pelo veio.



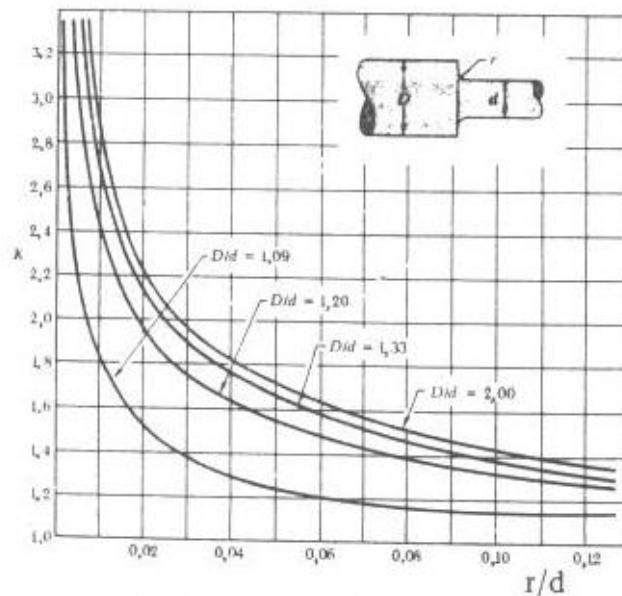
Resolução:

Da análise das dimensões obtém-se relações geométricas para o cálculo do factor de concentração de tensões:

$$\frac{D}{d} = \frac{160}{80} = 2$$

$$\frac{r}{d} = \frac{4}{80} = 0.05$$

Com estes valores obtém-se a partir do gráfico seguinte o valor de $K_t = 1.72$



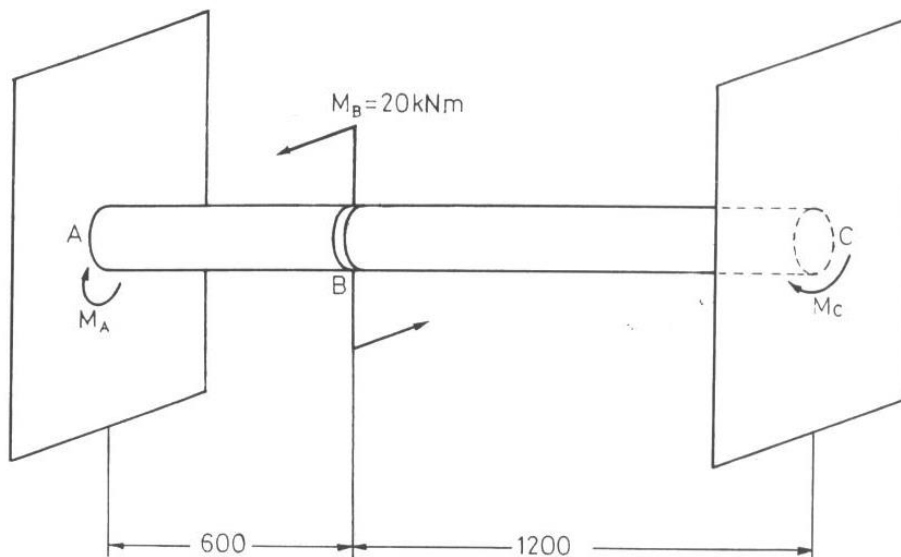
Igualando a expressão da tensão de corte máxima à tensão admissível obtém-se o momento de torção máximo que o veio pode transmitir:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{máx}} &\leq \tau_{\text{adm}} \\ \Leftrightarrow K_t \times \frac{M_t \times \left(\frac{80}{2}\right)}{\frac{\pi \times 80^4}{32}} &\leq 55 \\ \Leftrightarrow M_t &\leq 3216 \times 10^3 \text{ Nmm}\end{aligned}$$

Considerando a relação entre potência e momento de torção, e para uma velocidade de rotação em Hz (rotações/s) igual a (900rpm/60s):

$$\begin{aligned}P &= 2\pi f M_t \\ \Leftrightarrow P &= 2\pi(900/60) \times 3216 \\ \Leftrightarrow P &= 303 \times 10^3 \text{ W} = 303 \text{ kW}\end{aligned}$$

2.5. A barra de torção construída em liga de alumínio representada na figura está encastrada nas duas extremidades e a ser solicitada por um momento de torção aplicado no ponto B cujo valor é de 20kNm. Determine os momentos de torção nos pontos A e C.



Resolução:

A equação de equilíbrio dos momentos escreve-se como:

$$M_A + M_C - 20 = 0$$

Da equação anterior resulta que os momentos são estaticamente indeterminados. No entanto, para se verificar compatibilidade geométrica no ponto B os ângulos de torção do segmento AB e do segmento BC devem ser iguais. Daqui resulta uma nova condição:

$$\varphi_{BA} = \varphi_{BC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{M_A L_{AB}}{GI_P} = \frac{M_C L_{BC}}{GI_P}$$

$$\Leftrightarrow M_A L_{AB} = M_C L_{BC} \Leftrightarrow M_A \times 0.6 = M_B \times 1.2$$

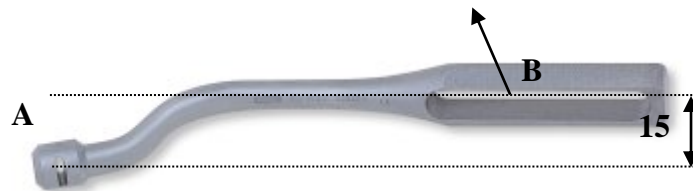
$$\Leftrightarrow M_A = M_C \times 2$$

Resolvendo juntamente com a equação de equilíbrio estático obtém-se:

$$M_A = 13.33 \text{ kNm}$$

$$M_C = 6.67 \text{ kNm}$$

2.6. A imagem representa uma ferramenta (*pectus flipper*) utilizada numa técnica cirúrgica de correção de *pectus excavatum*. Para efeitos de análise a ferramenta pode ser considerada como fixa em A e sofrendo uma força em B, na distância indicada e provocando rotação. A ferramenta é construída em aço inoxidável 316L ($\sigma_{ced} = 290 \text{ MPa}$; $\sigma_{rot} = 580 \text{ MPa}$; $\tau_{ced} = 145 \text{ MPa}$) e tem no ponto A secção circular com $D = 18 \text{ mm}$. Determine a força máxima que pode ser aplicada sem deformar plasticamente a ferramenta. Discuta se neste utensílio será mais importante um critério de resistência ou de rigidez.



Pectus flipper e carregamento de torção

Resolução:

A análise estática permite calcular o momento de torção aplicado:

$$M_t = F \times 15$$

O momento de torção aplicado deverá ser tal que não se ultrapasse a tensão de cedência ao corte. Deste modo resulta:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{M_t \rho}{I_p} < \tau_{ced} \\ \Leftrightarrow \frac{(F \times 15) \times 9}{\frac{\pi \times 18^4}{32}} < 145 \\ \Leftrightarrow F < 11069,4N\end{aligned}$$

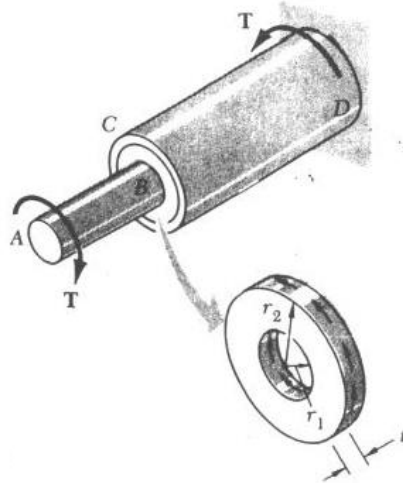
Problemas propostos

P-2.1. Um anel de espessura t é utilizado para ligar o eixo circular AB de raio r_1 ao tubo CD de raio interno r_2 .

- a) Mostre que o ângulo, segundo o qual a extremidade C do tubo roda em relação à extremidade B do eixo, é dado por:

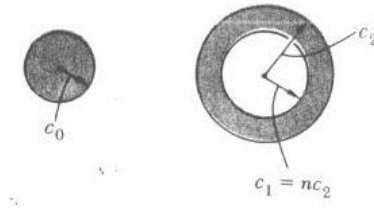
$$\varphi_{C/B} = \frac{T}{4\pi Gt} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right)$$

- b) Determine o valor de $\varphi_{C/B}$ para uma placa de alumínio quando $T=1500\text{Nm}$; $t=6\text{mm}$; $r_1=25\text{mm}$; $r_2=100\text{mm}$ e $G=27\text{GPa}$.
- c) Sabendo-se que o momento de torção $T=1500\text{Nm}$ é aplicado a uma barra maciça de alumínio de raio $r_1=25\text{mm}$, determine o comprimento da barra para que o ângulo de torção seja o mesmo valor $\varphi_{C/B}$ encontrado na alínea b).



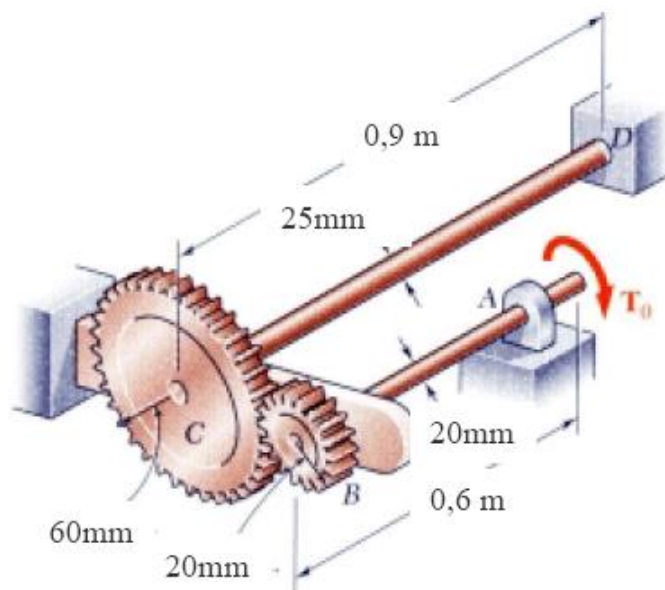
P-2.2. Dois eixos, um maciço e outro oco, são feitos do mesmo material e têm o mesmo peso e o mesmo comprimento. Seja n a relação c_1/c_2 , mostre que a relação T_m/T_o entre os momentos de torção nos eixos maciço (m) e oco (o) é igual a:

- $\frac{\sqrt{1-n^2}}{(1+n^2)}$, se a tensão máxima é a mesma nos dois eixos;
- $\frac{(1-n^2)}{(1+n^2)}$, se o ângulo de torção é o mesmo para os dois eixos.

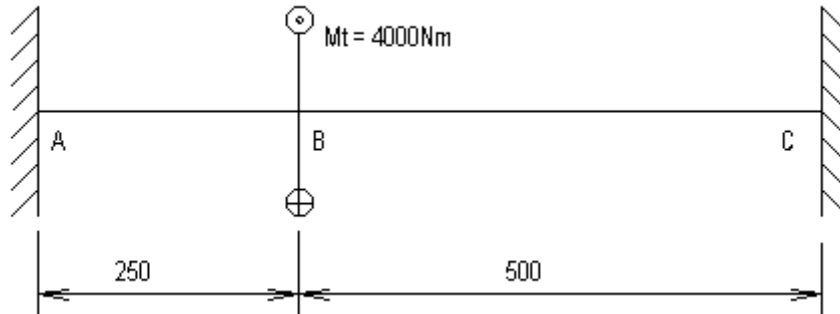


P-2.3. Dois veios maciços de aço estão ligados pelas engrenagens indicadas. Sabendo que para cada veio $G = 77$ GPa e que a tensão de corte admissível é de 55 MPa, determine:

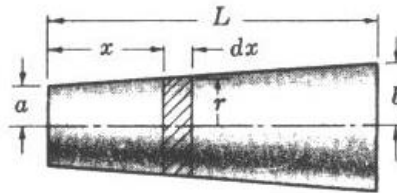
- o máximo momento torsor que pode ser aplicado na extremidade do veio AB,
- o correspondente ângulo de torção da extremidade A do veio AB.
- Altere o projecto apresentado para o veio AB de modo a reduzir o peso. Pode alterar o material dos veios e a secção circular (por exemplo, utilizando secção oca) desde que o diâmetro exterior não exceda 30mm. No entanto, o ângulo de torção máximo admissível para a extremidade A do veio AB é de 10° . Apresente duas soluções alternativas e discuta a sua validade.



P-2.4. Dois eixos de aço, maciços, são ligados por uma flange em B e encastrados a apoios rígidos em A e C. O eixo AB tem de diâmetro 60 mm e o eixo BC tem diâmetro 50 mm. Determinar, para o momento torçor indicado, a tensão de corte máxima no eixo AB. Considere $G=7.92 \times 10^4$ MPa



P-2.5. Um eixo circular sólido de secção variável, representado na figura, tem o raio b igual a 1.2 vezes o raio a . Derive uma expressão para o ângulo de torção do eixo de comprimento L .

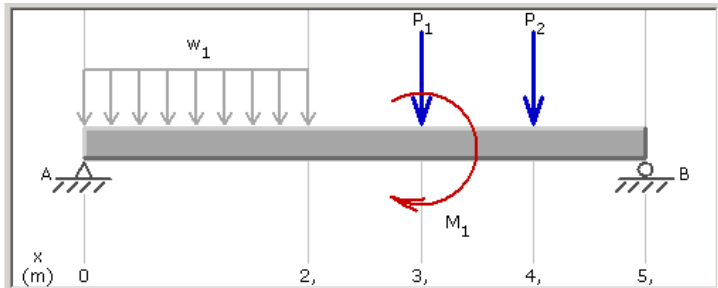


Capítulo 3

Esforços de flexão e esforços transversos

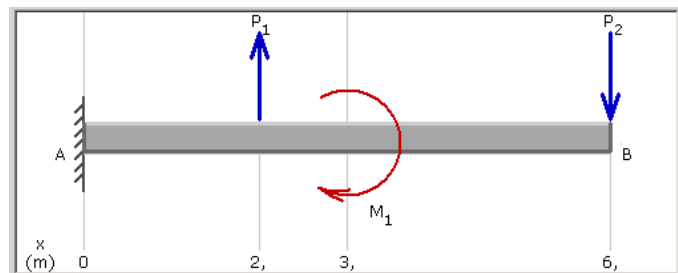
3.1. Para as vigas com o carregamento indicado determine os diagramas de esforço transverso e momento flector.

a)



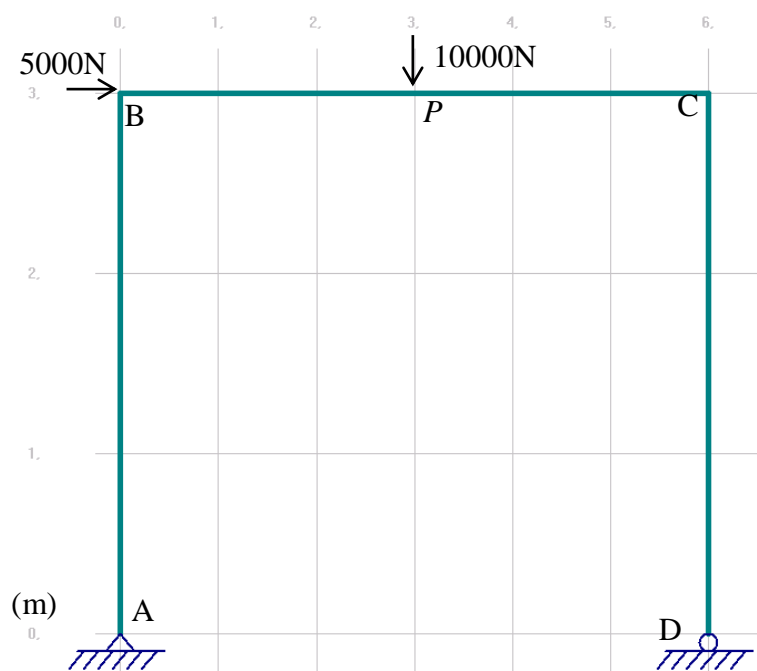
$w_1=5\text{kN/m}$; $P_1=10\text{kN}$; $P_2=20\text{kN}$; $M_1=10\text{kNm}$

b)



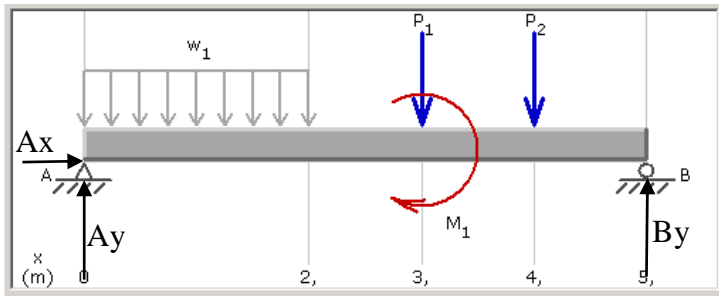
$P_1=20\text{kN}$; $P_2=50\text{kN}$; $M_1=100\text{kNm}$

c)



Resolução:

a)



O processo inicia-se pelo cálculo de reacções nos apoios. Neste caso, o cálculo de A_x ; A_y e B_y .
Pelas equações de equilíbrio resulta:

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow A_y + B_y - (5 \times 2) - 10 - 20 = 0 \quad , \text{ donde resulta:}$$

$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow -(5 \times 2) \times 1 - 10 \times 3 - 10 - 20 \times 4 + B_y \times 5 = 0$$

$$A_x = 0$$

$$A_y = 14 \text{ kN}$$

$$B_y = 26 \text{ kN}$$

Resolve-se inicialmente o diagrama de esforços transversos. O cálculo faz-se através da integração da função de carga aplicada. Esta integração é feita em intervalos sucessivos de acordo com as variações de carregamento.

Esforços transversos

$$T = -\int w dx$$

$$\underline{0 \leq x \leq 2 \text{ m:}}$$

$$T = -\int w dx = -\int 5 dx = -5x + c ,$$

em que c é a constante de integração, calculada a partir do valor inicial. Este valor de esforço transversal é igual à carga transversal no ponto, neste caso a reacção A_y :

$$x = 0 \rightarrow T = 14 \Rightarrow 14 = -5 \times 0 + c$$

$$\Leftrightarrow c = 14$$

$$\therefore T = -5x + 14$$

Esta é a equação de uma recta, para a qual falta conhecer o valor em $x=2\text{m}$:

$$x = 2 \rightarrow T = -5 \times 2 + 14 = 4\text{kN}$$

$2 \leq x \leq 3\text{m}$:

$$T = -\int w dx = -\int 0 dx = c,$$

em que c é a constante de integração, e corresponde ao valor calculado anteriormente. Ou seja, neste segmento o esforço transversal é constante com valor: $T = 4\text{kN}$

$3 \leq x \leq 4\text{m}$

Aplica-se o mesmo raciocínio que no intervalo anterior. No entanto, o valor é alterado devido à carga de 10kN aplicada, que corresponde a um esforço transversal negativo, devido à convenção de sinais assumida:

$$x = 3 \rightarrow T = 4 - 10 = -6\text{kN}$$

Convenção de sinais para esforço transversal:



Assim, a resolução para os segmentos seguintes pode ser realizada somando e subtraindo as forças encontradas. No ponto B a reacção B_y deverá “fechar” o diagrama, isto é, fazê-lo terminar em zero para se verificar a condição de equilíbrio estático.

Momentos flectores

$$M = \int T dx$$

O cálculo dos momentos flectores é realizado a partir da integração do esforço transversal e atendendo aos intervalos definidos pelo carregamento aplicado.

$0 \leq x \leq 2m$:

$$M = \int T dx = \int (-5x + 14) dx = -\frac{5x^2}{2} + 14x + c,$$

em que c é a constante de integração, calculada a partir do valor inicial. Este valor de momento flector é neste caso igual a zero:

$$x = 0 \rightarrow M = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{5 \times 0^2}{2} + 14 \times 0 + c$$

$$\Leftrightarrow c = 0$$

$$\therefore M = -\frac{5x^2}{2} + 14x$$

$$x = 2 \Rightarrow M = -\frac{5 \times 2^2}{2} + 14 \times 2 = 18 \text{ kNm}$$

Para este intervalo o momento flector é descrito por uma equação de 2º grau. É necessário fazer uma análise desta equação para observar a concavidade e a existência de extremos no intervalo considerado. Neste caso isso não se verifica, o que pode ser confirmado pelo aluno.

$2 \leq x \leq 3m$:

$$M = \int T dx = \int 4 dx = 4x + c,$$

$$x = 2 \rightarrow M = 18 \Rightarrow 18 = 4 \times 2 + c$$

$$\Leftrightarrow c = 10$$

$$\therefore M = 4x + 10$$

$$x = 3 \Rightarrow M = 4 \times 3 + 10 = 22 \text{ kNm}$$

$3 \leq x \leq 4m$:

$$M = \int T dx = \int (-6) dx = -6x + c,$$

$$x = 3 \rightarrow M = 22 + 10 = 32 \Rightarrow 32 = -6 \times 3 + c$$

$$\Leftrightarrow c = 50$$

$$\therefore M = -6x + 50$$

$$x = 4 \Rightarrow M = -6 \times 4 + 50 = 26 \text{ kNm}$$

Nota: neste caso, em $x=3$, somou-se o valor do momento flector de 10kNm aplicado directamente. O seu valor é positivo devido à convenção de momentos flectores:



$4 \leq x \leq 5m$:

$$M = \int T dx = \int (-26) dx = -26x + c,$$

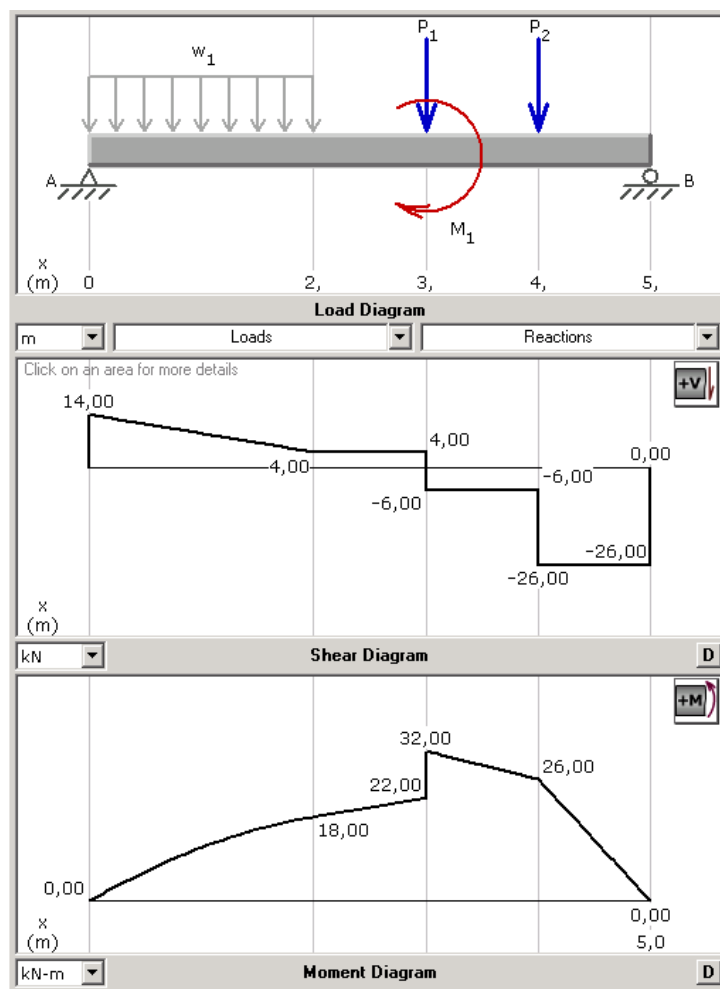
$$x = 4 \rightarrow M = 26 \Rightarrow 26 = -26 \times 4 + c$$

$$\Leftrightarrow c = 130$$

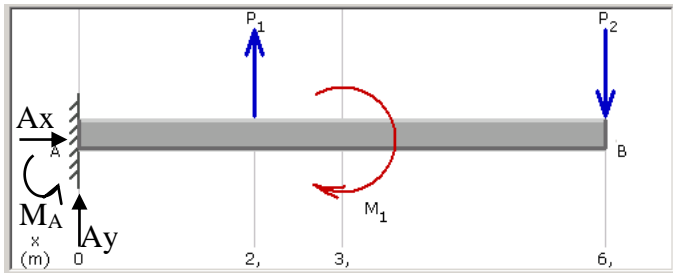
$$\therefore M = -26x + 130$$

$$x = 5 \Rightarrow M = -26 \times 5 + 130 = 0$$

Também neste caso o diagrama deverá terminar em zero. Com os valores obtidos podem ser desenhados os diagramas.



b)



Cálculo de reacções:

$$\begin{aligned} A_x &= 0 & A_x &= 0 \\ A_y + 20 - 50 &= 0 & \Leftrightarrow A_y &= 30\text{kN} \\ M_A + 20 \times 2 - 100 - 50 \times 6 &= 0 & M_A &= 360\text{kNm} \end{aligned}$$

Esforços transversos

$$T = -\int w dx$$

 $0 \leq x \leq 2\text{m}$:

$$T = -\int w dx = -\int 0 dx = c = 30\text{kN}$$

 $2 \leq x \leq 6\text{m}$:Em $x=2$ o esforço transversal assume o valor:

$$T = 30 + 20 = 50\text{kN}$$

Momentos flectores

$$M = \int T dx$$

 $0 \leq x \leq 2\text{m}$:

$$M = \int T dx = \int 30 dx = 30x + c,$$

em que c é a constante de integração, calculada a partir do valor inicial. Este valor de momento flector é neste caso igual a -360kNm , devido à convenção de sinais.

$$x = 0 \rightarrow M = -360 \Rightarrow -360 = 30 \times 0 + c$$

$$\Leftrightarrow c = -360$$

$$\therefore M = 30x - 360$$

$$x = 2 \Rightarrow M = 30 \times 2 - 360 = -300\text{kNm}$$

$2 \leq x \leq 3m$:

$$M = \int T dx = \int 5 dx = 4x + c ,$$

$$x = 2 \rightarrow M = -300 \Rightarrow -300 = 50 \times 2 + c$$

$$\Leftrightarrow c = -400$$

$$\therefore M = 50x - 400$$

$$x = 3 \Rightarrow M = 50 \times 3 - 400 = -250 \text{ kNm}$$

$3 \leq x \leq 6m$:

$$M = \int T dx = \int 50 dx = 50x + c ,$$

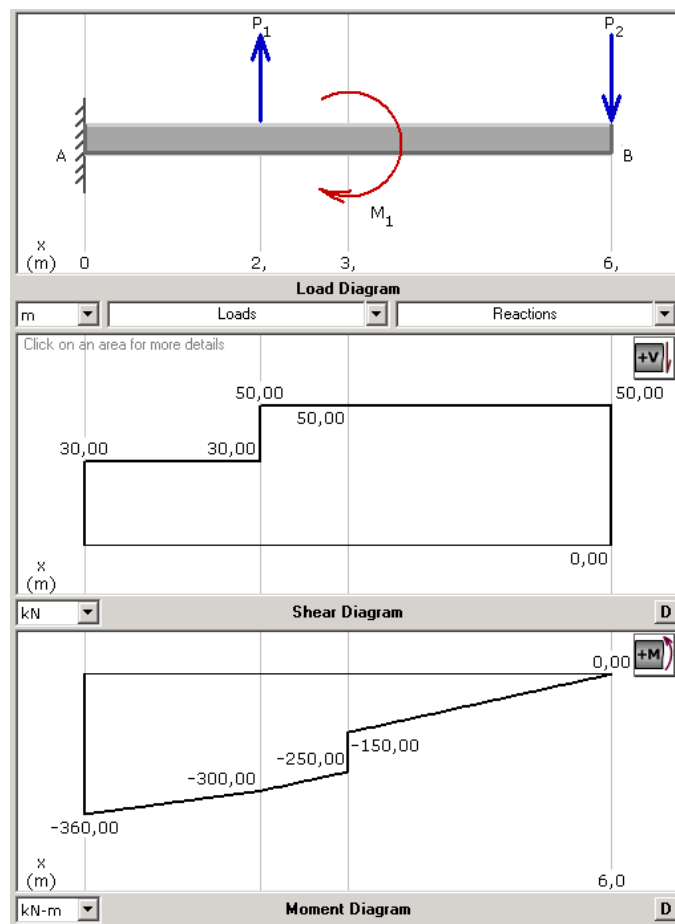
$$x = 3 \rightarrow M = -250 + 100 = -150 \Rightarrow -150 = 50 \times 3 + c$$

$$\Leftrightarrow c = -300$$

$$\therefore M = 50x - 300$$

$$x = 6 \Rightarrow M = 50 \times 6 - 300 = 0$$

Nota: em $x=3$, somou-se o valor do momento flector de 100kNm aplicado directamente. O seu valor é positivo devido à convenção de momentos flectores.



c)

Cálculo de reacções:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5000 - H_A = 0 \\ V_A + V_D = 0 \\ -5000 \times 3 - 10000 \times 3 + V_B \times 6 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} H_A = 5000N \\ V_A = 2500N \\ V_D = 7500N \end{array} \right.$$

O cálculo dos esforços axiais é obtido nas barras que suportam o esforço de compressão (barras AB e CD). Em cada barra o valor do esforço é igual à reacção vertical nos apoios A e D.

O esforço transversal é obtido considerando as cargas perpendiculares a cada barra. Para aplicação da convenção de sinais considera-se que o observador está localizado “no interior” da estrutura em pórtico.

Os momentos flectores são obtidos a partir do esforço transversal:

AB:

$$M = \int T dx = \int 5000 dx = 5000x + c$$

$$x = 0 \rightarrow M = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\therefore M = 5000x$$

$$x = 3 \rightarrow M = 15000Nm$$

BP:

$$M = \int T dx = \int 2500 dx = 2500x + c$$

$$x = 0 \rightarrow M = 15000 \Rightarrow c = 15000$$

$$\therefore M = 2500x + 15000$$

$$x = 3 \rightarrow M = 22500Nm$$

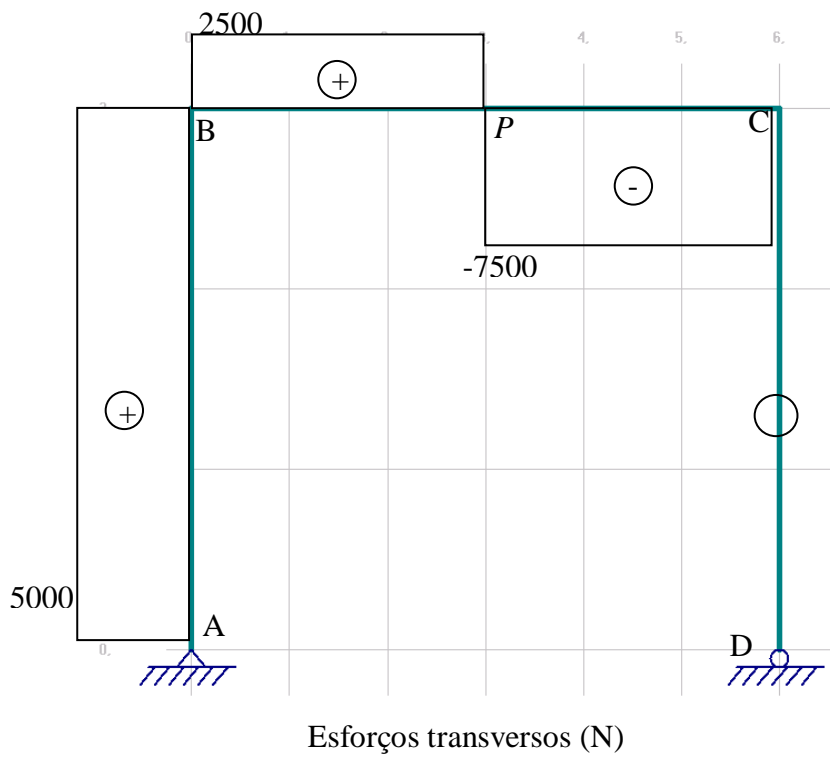
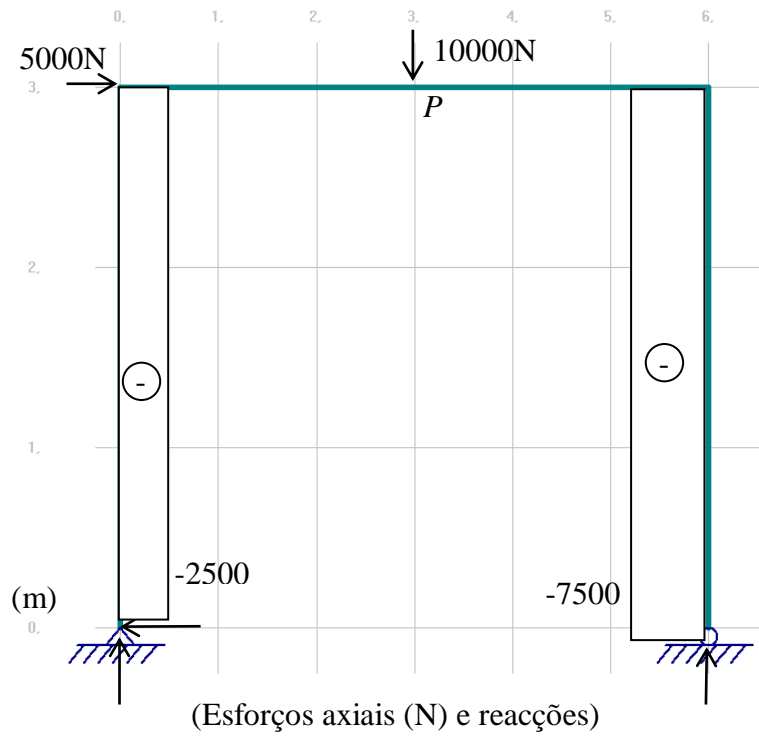
PC:

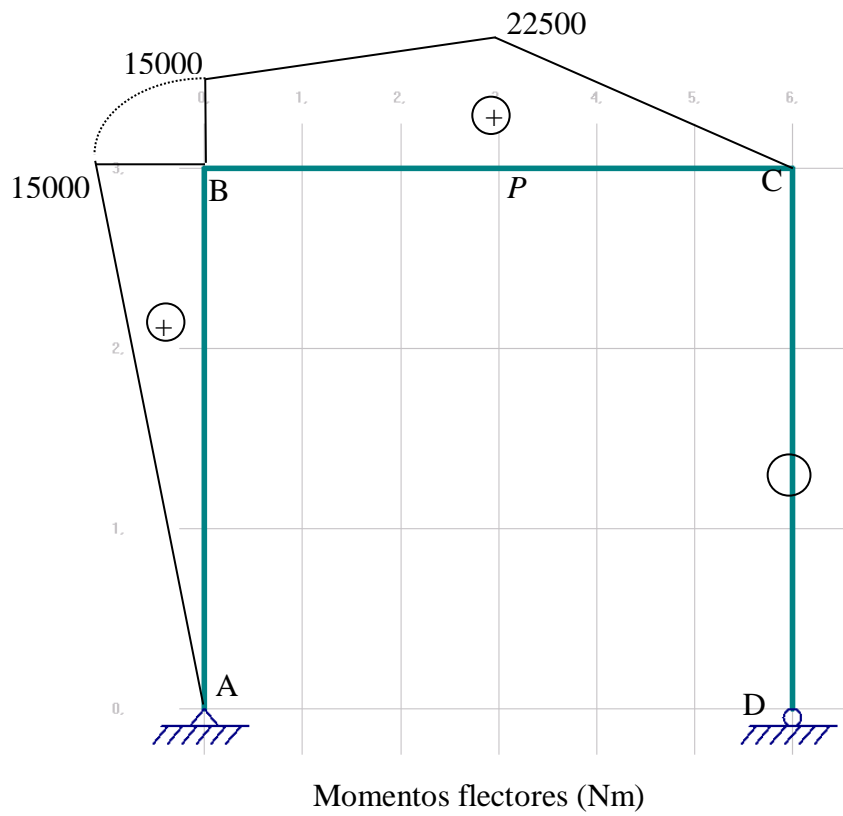
$$M = \int T dx = \int -7500 dx = -7500x + c$$

$$x = 3 \rightarrow M = 22500 \Rightarrow c = 45000$$

$$\therefore M = -7500x + 45000$$

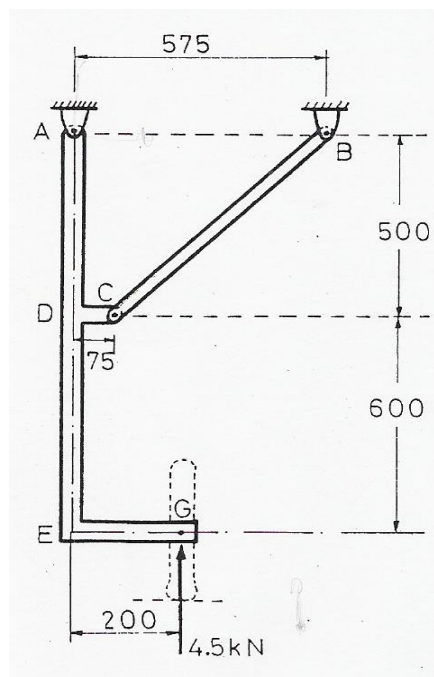
$$x = 6 \rightarrow M = 0Nm$$





3.2. A figura representa uma parte da estrutura de um trem de aterragem com um sistema plano de forças a actuar. Os pinos situados em A, B e C consideram-se sem atrito e com eixos perpendiculares ao plano do papel.

- Traçar os diagramas de todos os esforços que actuam na estrutura em todas as barras da mesma (AD, DE, EG, DC e CB)
- Dimensionar as barras da estrutura para resistir aos esforços de flexão. Considere que o material é uma liga de alumínio de alta resistência, com uma tensão admissível de 100 MPa e utilize uma secção rectangular maciça com altura igual ao dobro da largura.



Resolução:

a) Determinação de forças de reacção em A, B e C. Se a estrutura fosse desmembrada e traçado um diagrama de corpo livre para cada uma das suas partes componentes, as forças que mantêm esta estrutura unida deveriam também ser representadas, uma vez que essas forças são forças externas sob o ponto de vista de cada parte componente. Deste modo os diagramas de corpo livre assumem a forma:



Figura 1: barra [CB]

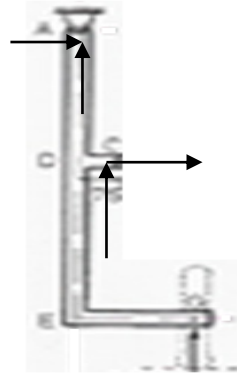


Figura 2: barra [ADCEG]

Para a resolução considera-se o equilíbrio de todas as barras submetidas a várias forças, assim sendo a resolução foi dividida em duas partes:

Parte 1: Considere-se a figura correspondente à barra [ADCEG], em equilíbrio:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \begin{cases} H_A + H_c = 0 \\ V_A + V_c + 4,5 = 0 \\ 7,5 * V_c + 500 * H_c + 200 * 4,5 = 0 \end{cases} \begin{cases} H_A = -H_c \\ V_A + V_C = -4,5 \\ 7,5V_c + 500H_c + 900 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} H_A = -H_C \\ V_A = -4,5 - V_C \\ 75V_C + 500H_C + 900 = 0 \end{cases}$$

Parte 2: Considere-se a figura correspondente à barra [BC], em equilíbrio:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_c = 0 \end{cases} \begin{cases} -H_B - H_c = 0 \\ V_B - V_C = 0 \\ 500H_B + 500V_B = 0 \end{cases} \begin{cases} H_B = -H_c \\ V_B = V_C \\ H_B = -V_B \end{cases}$$

Relacionando as várias incógnitas dos dois sistemas resulta:

$$\begin{aligned}
 H_B &= -H_C = -V_B = -V_C \\
 V_B &= V_C \\
 H_B &= -V_B \\
 H_A &= -H_C \\
 V_A &= -4,5 - V_C \\
 75V_C + 500H_C + 900 &= 0
 \end{aligned}$$

Como $H_C = V_C$ então ao substituir-se na equação e resolvendo-se em ordem a V_C obtém-se:

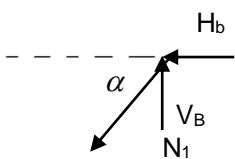
$$\begin{aligned}
 75V_C + 500V_C + 900 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 575V_C &= -900 \\
 \Leftrightarrow V_C &= -\frac{900}{575} \cong -1,565 \text{ KN}
 \end{aligned}$$

Resumindo, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 V_B &= -1,565 \text{ KN} \\
 H_B &= 1,565 \text{ KN} \\
 V_A &= -4,5 + 1,565 = -2,935 \text{ KN} \\
 H_C &= -1,565 \text{ KN} \\
 H_A &= 1,565 \text{ KN}
 \end{aligned}$$

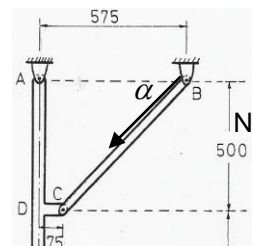
Finalmente é possível calcular o esforço a que a barra [CB] está sujeita. Considerando novamente a figura (3) e aplicando a lei dos nós vem:

Nó B:



c . a:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \alpha &= \frac{500}{500} \\
 \operatorname{tg} \alpha &= 1 \\
 \alpha &= \operatorname{tg}^{-1}(1) \\
 \alpha &= 45^\circ
 \end{aligned}$$



Como só temos presente uma barra no nó B, então só é necessário uma equação.

$$\sum F_x = 0$$

$$\Leftrightarrow -N_1 \cos 45^\circ - 1,565 = 0$$

$$\Leftrightarrow -N_1 \cos 45^\circ = 1,565$$

$$\Leftrightarrow N_1 = -\frac{1,565}{\cos 45^\circ} = -2,214 \text{ kN}$$

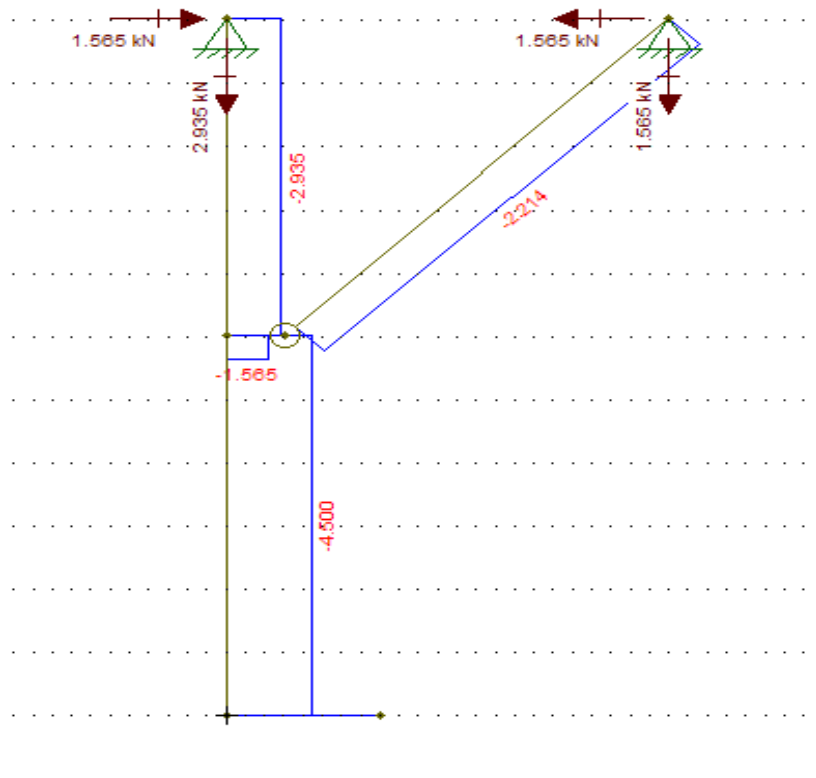
A partir deste resultado pode-se concluir que esta barra está sujeita a um esforço de compressão.

Diagramas de esforços que actuam nas barras

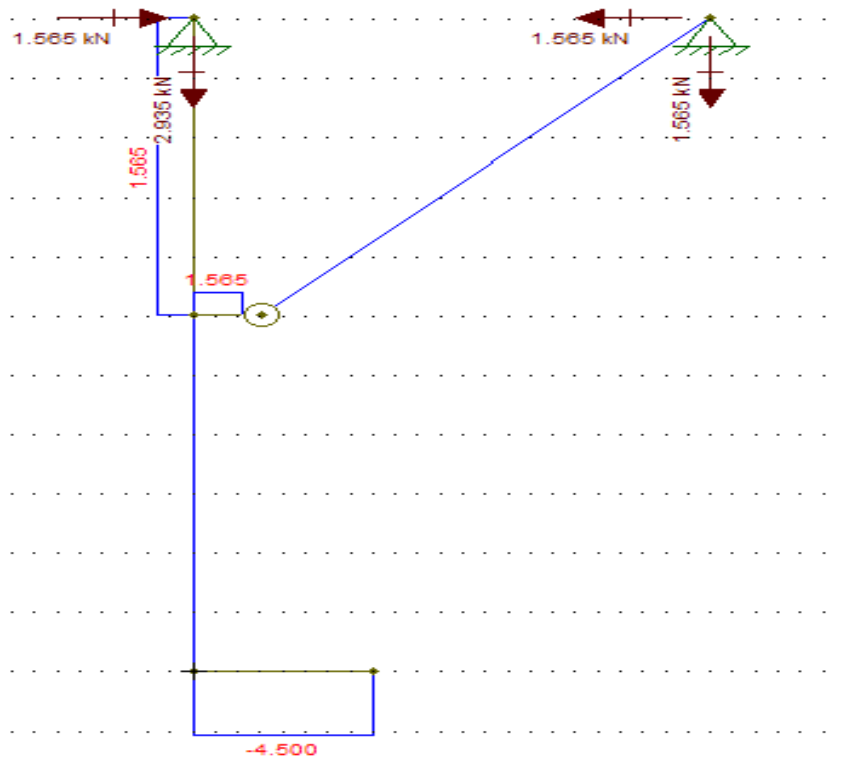
Barra [ADCEG]:

Esta barra está sujeita a esforços axiais, bem como a esforços transversais e ainda a flexão.

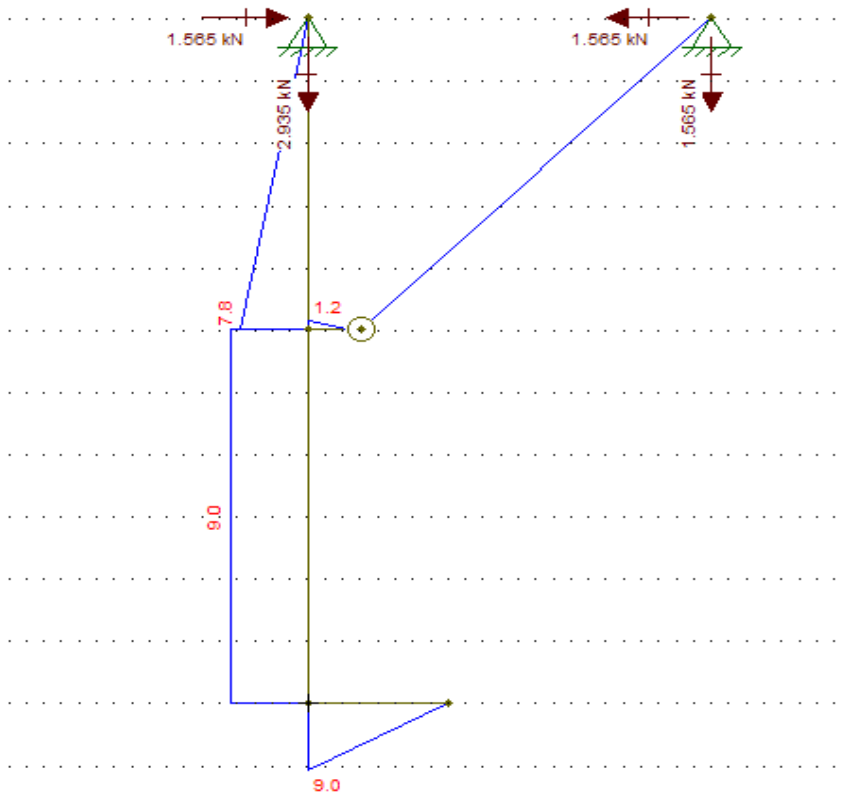
Representação gráfica do esforço **axial**:



Representação gráfica do esforço **transverso**:



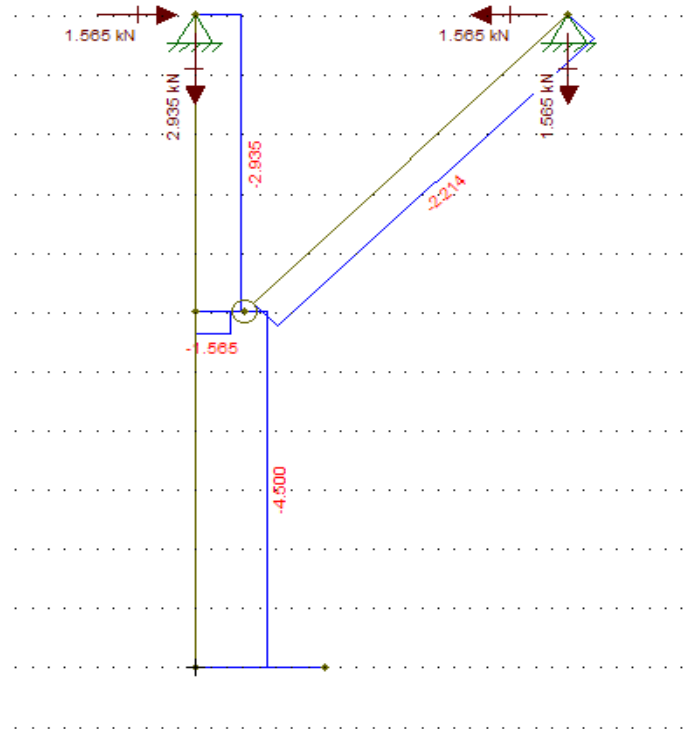
Representação gráfica do **momento flector**:



Barra [CB]:

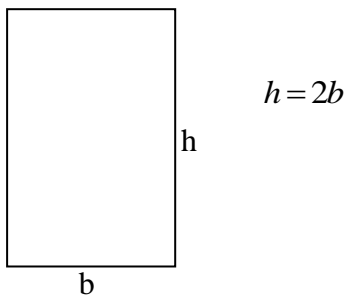
Esta barra está sujeita apenas a esforços axiais.

Representação gráfica do esforço **axial**:



b)

Dimensionamento da barra [ADCEG] (Fig.4) sabendo que esta sofre flexão. Considerando uma secção rectangular com $h=2b$:



O momento de inércia da secção transversal (rectangular) é:

$$I = \frac{bh^3}{12} \text{ em que:}$$

b – largura

h – altura

Substituindo:

$$I_y = \frac{\frac{h}{2} * h^3}{12} \Leftrightarrow I_y = \frac{h^4}{24}$$

Sabe-se que:

$$\sigma_{adm} = 100MPa$$

$$\sigma_x = \frac{M_f * Z}{I_y}$$

Substituindo, e considerando o momento flector máximo igual a 9×10^6 Nmm, vem:

$$100 = \frac{9 \times 10^6 \frac{h}{2}}{\frac{h^4}{24}} = \frac{h}{h^4} = \frac{108 \times 10^6}{h^3}$$

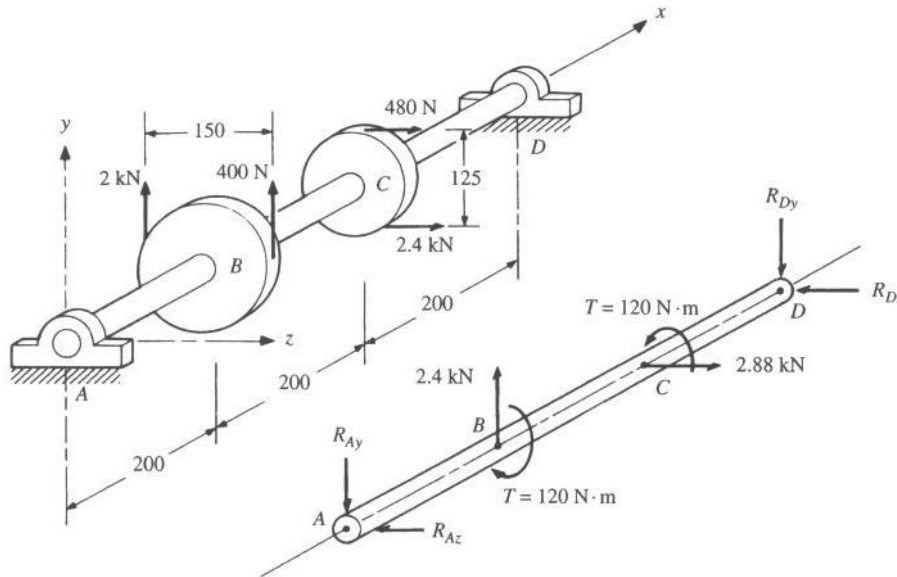
$$\Leftrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{108 \times 10^6}{100}} = 102.6mm$$

Daqui resulta:

$$h = 102.6mm$$

$$b = 51.3mm$$

3.3. A figura mostra um veio rotativo apoiado em rolamentos e transmitindo binário através de polias localizadas nos pontos B e C. O veio é construído em aço SAE4340 com tensão admissível igual a 600MPa e tem secção maciça com $D=40\text{mm}$. Considerando o veio simplesmente apoiado nos rolamentos verifique se o veio está bem dimensionado para resistir aos esforços de flexão.



Através de análise de equilíbrio estático são obtidas as reacções:

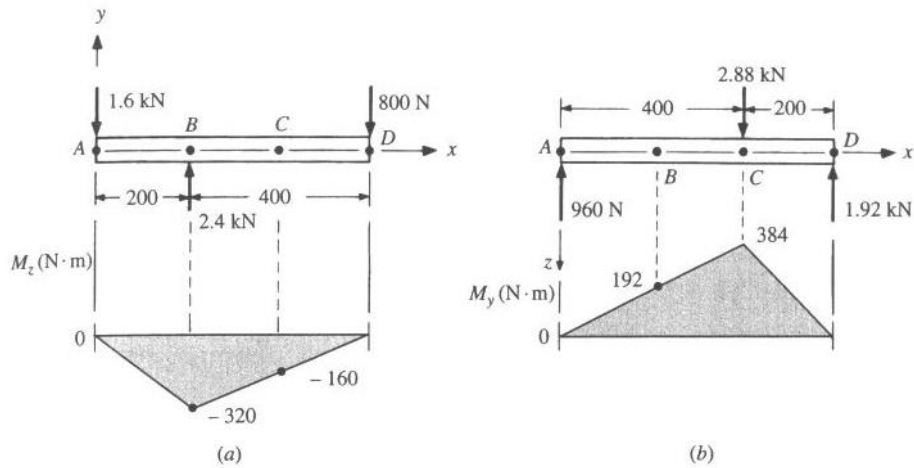
$$R_{Ay} = 1.6 \text{ kN}$$

$$R_{Az} = 960 \text{ N}$$

$$R_{Dy} = 800 \text{ N}$$

$$R_{Dz} = 1.92 \text{ kN}$$

O carregamento é realizado em dois planos: xy e xz . Deste modo, além do cálculo de reacções segundo x e y , devem ser calculados diagramas de momentos flectores em dois planos. Do cálculo dos diagramas resulta, para os dois planos de carregamento:



Para encontrar a secção crítica devem ser combinados os momentos flectores nos pontos críticos possíveis que, pela análise dos diagramas são os pontos B e C.

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

$$M_B = \sqrt{(-320)^2 + 192^2} = 373 Nm$$

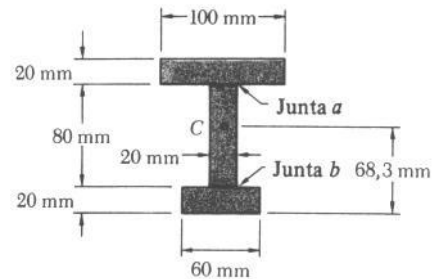
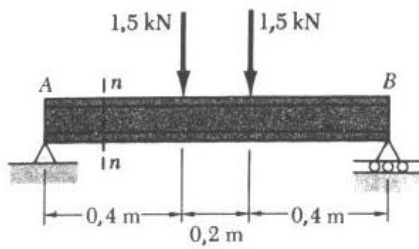
$$M_C = \sqrt{(-160)^2 + 384^2} = 416 Nm$$

Daqui resulta que o ponto C é o ponto crítico. Para o cálculo da tensão máxima de flexão tem-se:

$$\sigma = \frac{M_C r}{I_z} = \frac{416 \times 10^3 \times 20}{\frac{\pi \times 40^4}{64}} = 66.2 MPa$$

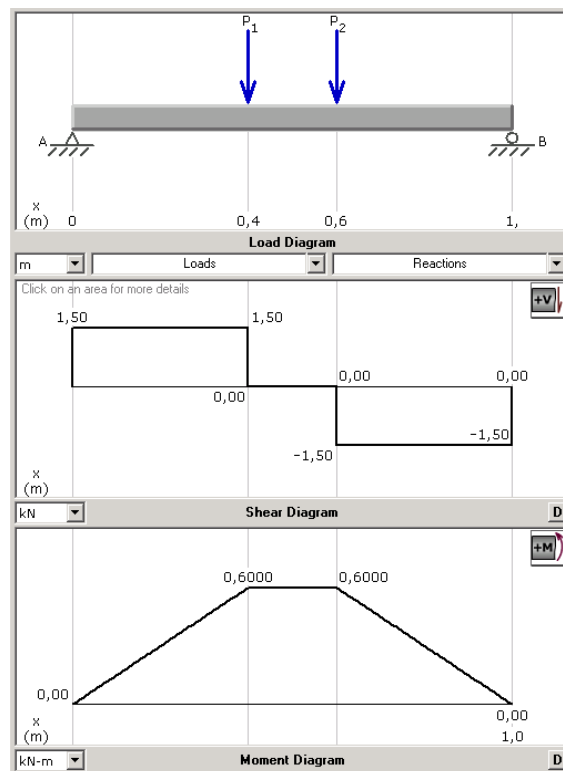
Como este valor é bastante inferior à tensão admissível conclui-se que o veio resiste às cargas de flexão.

3.4. A viga AB é constituída por três peças coladas umas às outras e está submetida ao carregamento indicado, que actua no seu plano de simetria. Sabendo-se que a largura de cada junta colada é de 20mm, determine a tensão de corte média nas juntas, na secção $n-n$ da viga. A figura indica a localização do centro geométrico da secção transversal, e o momento de inércia da secção é $I_x=8.63 \times 10^{-6} \text{ m}^4$.



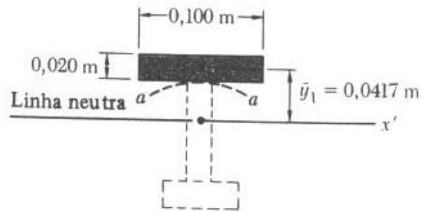
Resolução:

O cálculo das tensões de corte utiliza o esforço transversor. Pode ser calculado o diagrama de esforços para o carregamento indicado, que assume a forma:



Na secção $n-n$ o esforço transversal tem o valor de 1500N. O cálculo das tensões de corte nas juntas utiliza o momento estático da área acima ou abaixo da junta considerada, em relação à linha neutra.

Junta a:

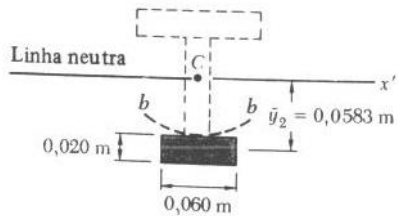


$$Q = A\bar{y}_1 = (0.1 \times 0.2) \times 0.0417 = 83.4 \times 10^{-6} m^3$$

Este valor é utilizado para o cálculo da tensão de corte média na junta, que tem uma largura de 20mm:

$$\tau_{méd} = \frac{VQ}{It} = \frac{1500 \times 83.4 \times 10^{-6}}{8.63 \times 10^{-6} \times 0.02} = 725 kPa$$

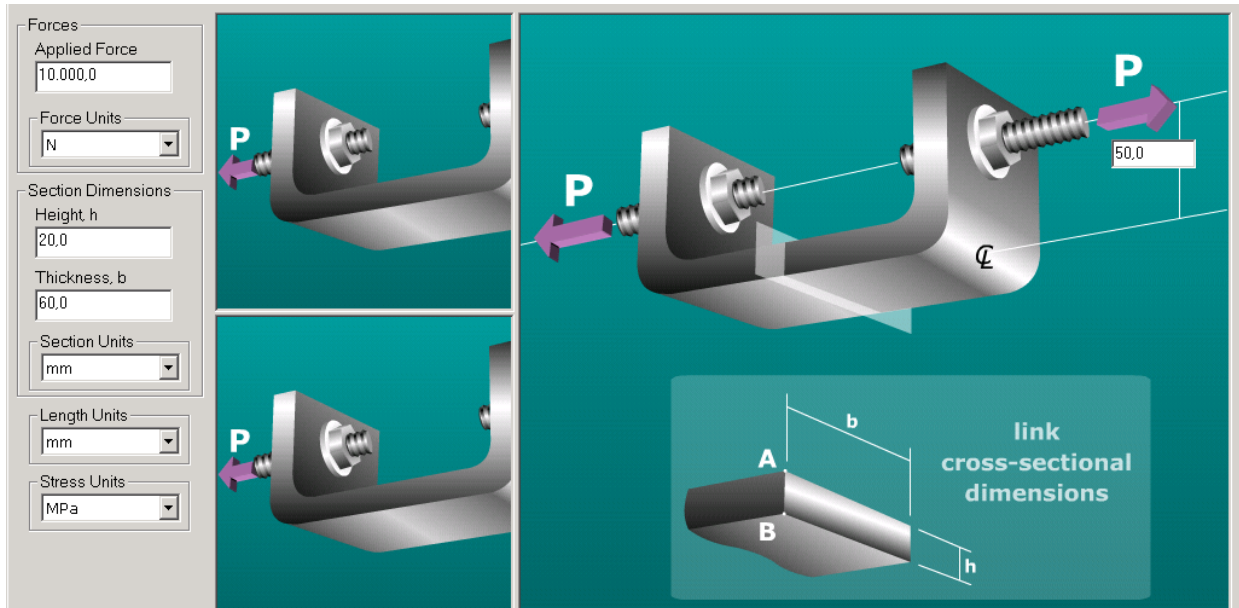
Junta b:



$$Q = A\bar{y}_1 = (0.06 \times 0.2) \times 0.0583 = 70.0 \times 10^{-6} m^3$$

$$\tau_{méd} = \frac{VQ}{It} = \frac{1500 \times 70.0 \times 10^{-6}}{8.63 \times 10^{-6} \times 0.02} = 608 kPa$$

3.5. Considere o elemento de ligação indicado na figura, solicitado por uma carga de 10kN. Determine a distribuição de tensões axiais na secção *AB* indicada.



Resolução:

Na secção considerada os esforços presentes são o esforço axial e o momento flector devido à distância de 50mm entre a carga e o centro geométrico da secção:

$$N = 10000N$$

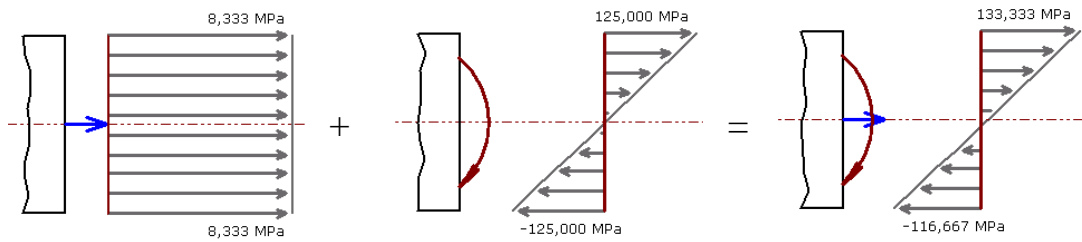
$$M_f = 10000 \times 50 = 500000Nmm$$

Para estes esforços são calculadas as tensões axiais devido à tracção e flexão:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{10000}{20 \times 60} = 8.33MPa$$

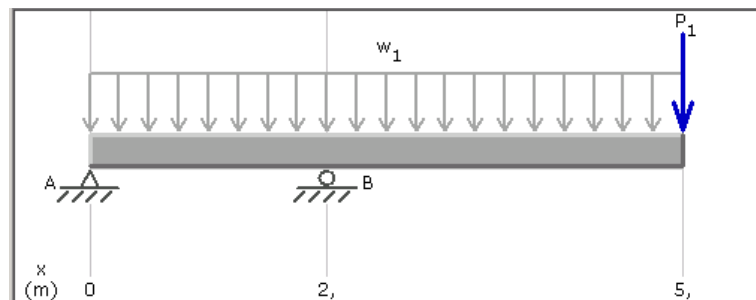
$$\sigma_x = \frac{M_f y}{I_z} = \frac{500 \times 10^3 \times \left(\frac{20}{2}\right)}{\frac{60 \times 20^3}{12}} = 125MPa$$

Estas tensões assumem uma distribuição uniforme devido ao esforço axial e uma distribuição simétrica devido ao esforço de flexão. Estas contribuições são somadas para obter a distribuição de tensões axiais total:



3.6. Considere uma viga com o carregamento indicado na figura.

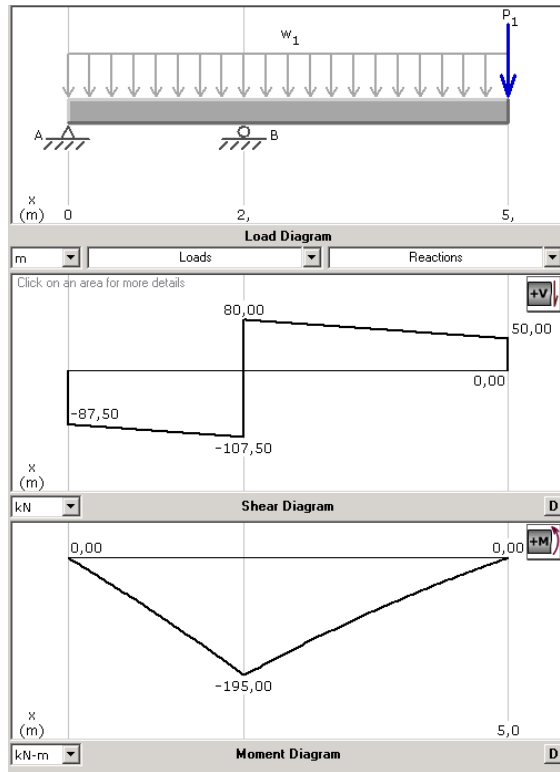
- Selecione um perfil IPE que resista aos esforços de flexão. Considere que o material tem uma tensão normal admissível igual a 140MPa.
- Verifique se o perfil seleccionado em a) resiste aos esforços transversos aplicados. Considere uma tensão admissível ao corte de 70MPa.



$$W_1=10\text{kN/m}; P_1= 50\text{kN}$$

Resolução:

a) O dimensionamento à flexão deve utilizar o momento flector máximo que se verifica na viga. Para este caso de carregamento os diagramas de esforço transversal e momento flector são indicados na figura seguinte. A secção crítica é identificada claramente no ponto B onde os dois tipos de esforços são máximos.



O valor de momento flector máximo identificado é $|M_f| = 195 \text{ kNm}$. Com este valor determina-se o módulo de resistência à flexão que a secção da viga deverá ter:

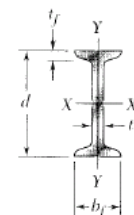
$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_f}{W} \Leftrightarrow W = \frac{M_f}{\sigma_{\text{máx}}} = \frac{195 \times 10^6}{140} = 13929 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Com este valor de W selecciona-se na tabela de perfis IPE a secção adequada. O valor de referência a utilizar é W_x . O perfil IPE450 deverá ser o seleccionado.

i2

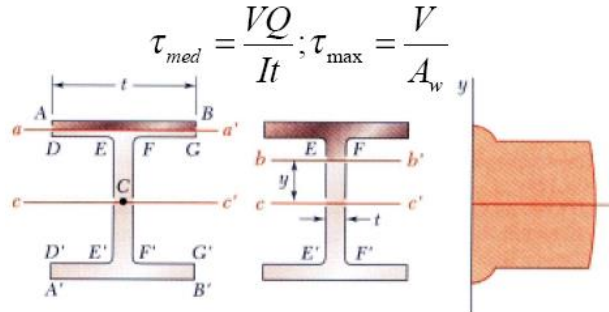
Apêndice C. Propriedades de perfis laminados de aço
(Normas europeias)

Perfis I



Designação	Área A, mm ²	Altura d, mm	Banzo		Alma	Eixo X-X			Eixo Y-Y		
			Largura b _f , mm	Espessura t _f , mm	Espessura t _w , mm	I _x 10 ⁸ mm ⁴	W _x 10 ³ mm ³	i _x mm	I _y 10 ⁸ mm ⁴	W _y 10 ³ mm ³	i _y mm
IPE 600	15600	600	220	19,0	12,0	921	3069	243	33,9	308	46,6
IPE 550	13400	550	210	17,2	11,1	671	2441	223	26,7	254	44,5
IPE 500	11600	500	200	16,0	10,2	482	1928	204	21,4	214	43,1
IPE 450	9880	450	190	14,6	9,4	337	<u>1500</u>	185	16,8	176	41,2
IPE 400	8450	400	180	13,5	8,6	231	1156	165	13,2	146	39,5
IPE 360	7270	360	170	12,7	8,0	163	904	150	10,4	123	37,9
IPE 330	6260	330	160	11,5	7,5	118	713	137	7,88	98,5	35,5

b) O esforço transverso máximo assume o valor de 107.5kN. Para a viga considerada a tensão de corte máxima é calculada dividindo o esforço transverso pela área da alma da secção em I. Para o IPE450 tem-se $t_w=9.4\text{mm}$ e $h_w=d-2t_b=450-2*14.6=420.8\text{mm}$



$$A_w = t_w \times h_w = 9.4 \times 420.8 = 3955.5 \text{mm}^2$$

Para a tensão de corte resulta:


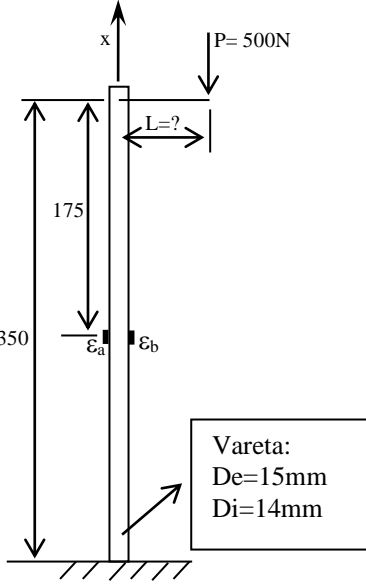
$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T}{A_w} = \frac{107.5 \times 10^3}{3955.5} = 27.2 \text{MPa}$$

Como este valor é inferior à tensão admissível ao corte (70MPa), o perfil seleccionado fica verificado para resistir ao esforço transverso.

3.7 A figura representa uma vareta intramedular para tratamento de fracturas do fémur. No sentido de otimizar o projecto vai ser utilizada uma liga de aço inoxidável 440A ($\sigma_{rot}=724\text{MPa}$; $\sigma_{ced}=414\text{MPa}$; $E=200\text{GPa}$). Considere para efeitos de análise que a vareta, com dimensões indicadas na figura 2, está encastrada na extremidade inferior, e despreze o seu raio de curvatura. A secção da vareta é circular oca com diâmetros externo e interno indicados na figura 2. A figura 2 representa igualmente o carregamento aplicado, cuja solicitação real pode ser representada de forma simplificada como uma carga aplicada a uma distância L do eixo da vareta.

a) Num protótipo foram colocados 2 extensómetros nas posições a e b indicadas na figura 2 e orientados na direcção x. Os valores de deformação obtidos foram: $\epsilon_a=2237\mu\text{str}$; $\epsilon_b=-2456\mu\text{str}$. Considerando as propriedades do material da vareta, determine o valor da distância L de aplicação da carga.

b) Para a situação de carga da alínea a) verifique se a vareta se encontra bem dimensionada. Considere um coeficiente de segurança $n=1.2$.

	
<p>Figura 1. Vareta intramedular</p>	<p>Figura 2. Vareta intramedular e carregamento aplicado</p>

Resolução

a)

Considerando a deformação obtida, pode ser utilizada a lei de Hooke para o cálculo das tensões nos pontos onde foram colados os extensômetros. Para o extensômetro *a* vem:

$$\sigma_a = E\varepsilon_a = 200 \times 10^9 \times 2237 \times 10^{-6} = 447.4 \times 10^6 \text{ Pa} = 447.4 \text{ MPa}$$

Com este valor de tensão e considerando as tensões observadas num carregamento excêntrico, pode ser obtida a distância *L*:

$$\sigma_a = -\frac{P}{A} + \frac{M_f z}{I_y} = 447.4$$

$$\Leftrightarrow \sigma = -\frac{500}{\frac{\pi(15^2 - 14^2)}{4}} - \frac{500L \times 7.5}{\frac{\pi(15^4 - 14^4)}{64}} = 447.4$$

$$\Leftrightarrow L = 75 \text{ mm}$$

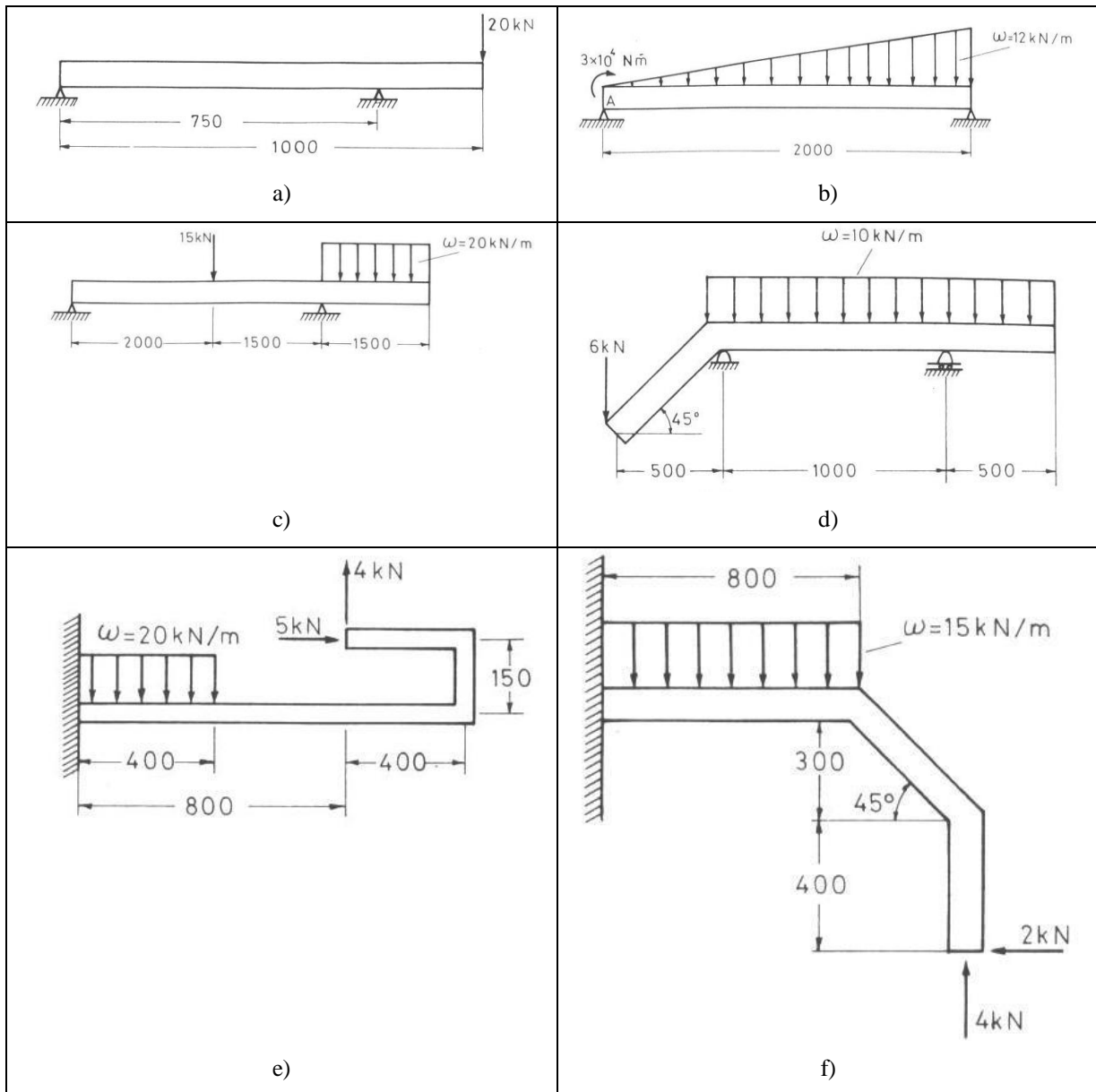
Utilizando o extensômetro *b* seria obtido o mesmo resultado.

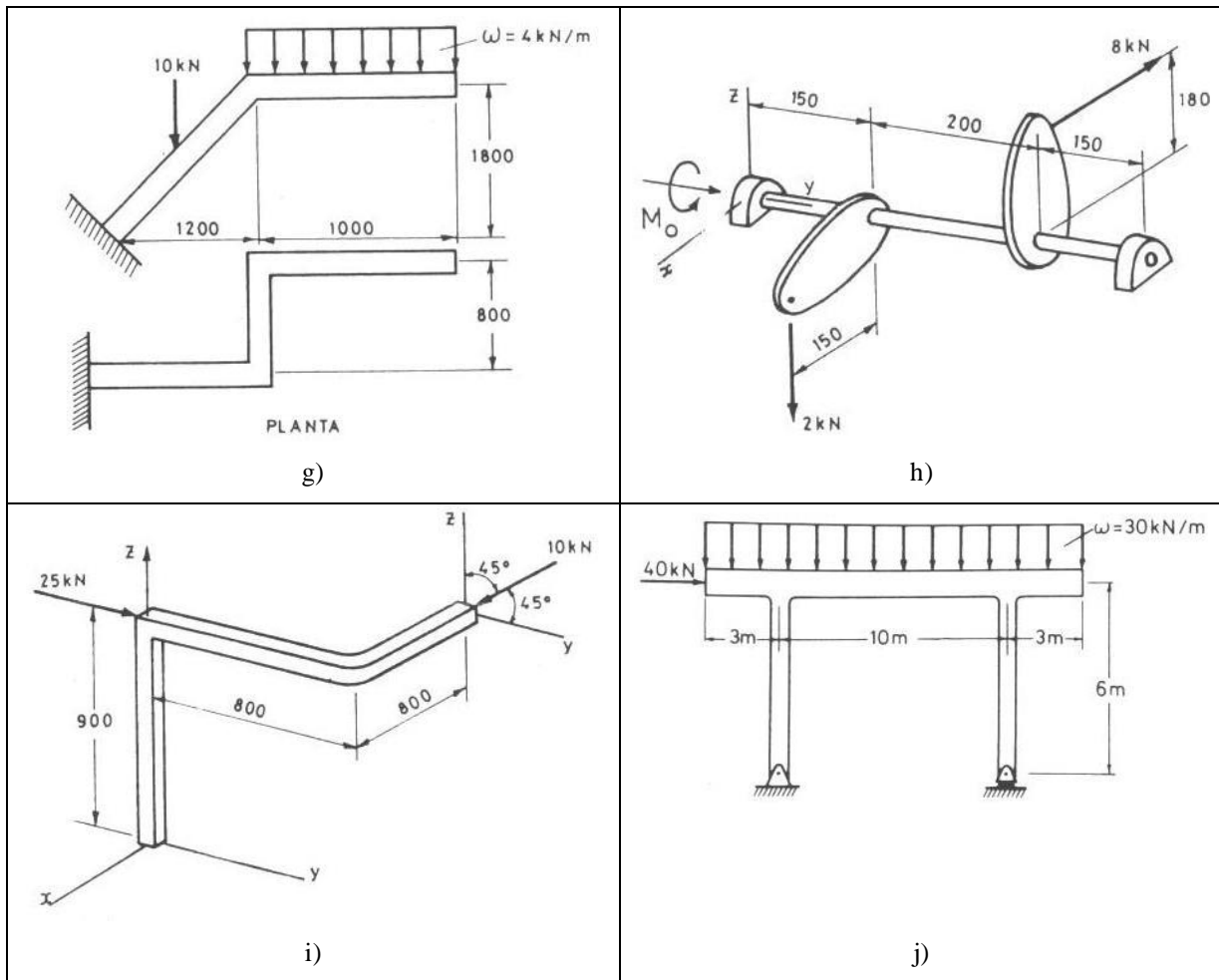
b)

Ainda sem a aplicação de coeficiente de segurança a tensão máxima é superior à tensão de cedência logo a liga de aço inoxidável referida não pode ser utilizada.

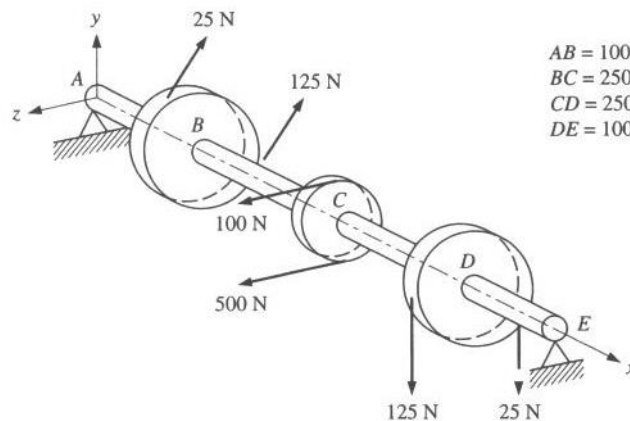
Problemas propostos

P-3.1. Considere as estruturas com os carregamentos indicados. Calcule e represente graficamente os diagramas de esforços presentes para cada estrutura.

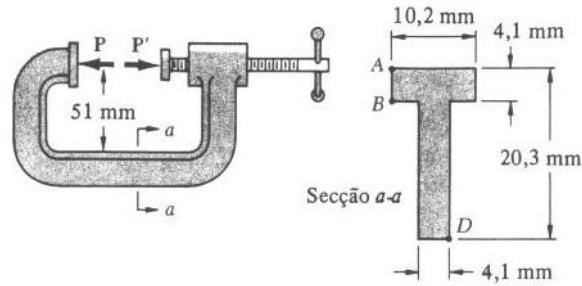




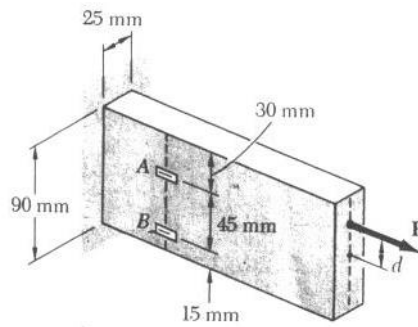
P-3.2. Considere o eixo maciço com diâmetro de 30mm indicado na figura, e submetido ao carregamento provocado pelas polias. A polia C tem um diâmetro de 100mm e as polias B e D têm um diâmetro de 200mm, fazendo em B o carregamento um ângulo de 45° com y. Identifique, justificando, o ponto crítico do veio e verifique se este está bem dimensionado para resistir a esforços de flexão, considerando uma tensão admissível de 120MPa.



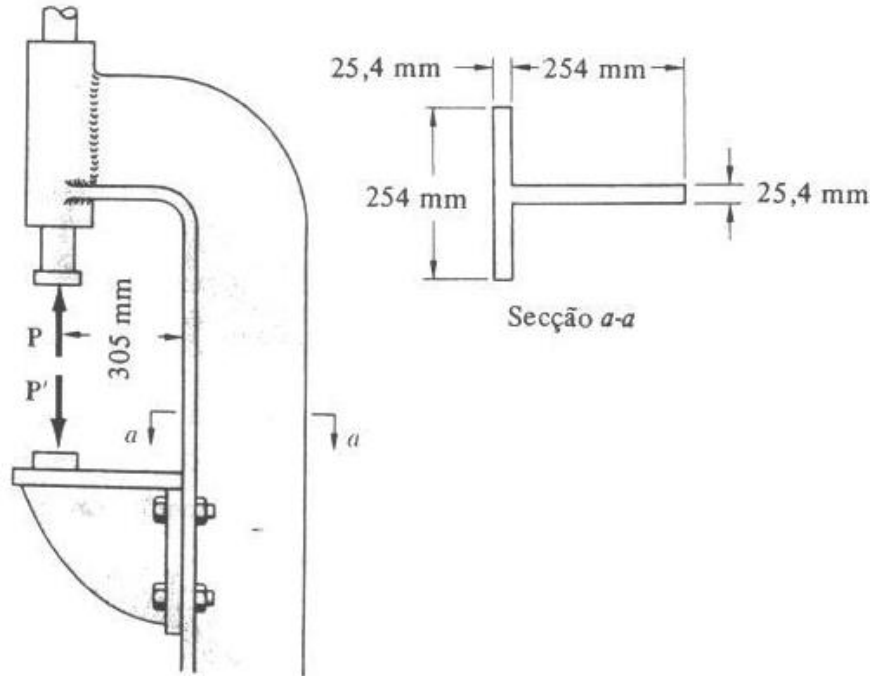
P-3.3. No grampo de aperto representado na figura foi aplicada uma força de 334N. Determine: a) a tensão axial no ponto A; b) a tensão axial no ponto D; c) a posição da linha neutra.



P-3.4. Uma força excêntrica P é aplicada a uma barra de aço de 25 por 90mm de secção transversal. As deformações específicas em A e B foram medidas, resultando nos valores: $\epsilon_A=350\mu\text{str}$; $\epsilon_B=-70\mu\text{str}$. Sabendo-se que $E=200\text{GPa}$, determine: a) a distância d ; b) o valor da força P .

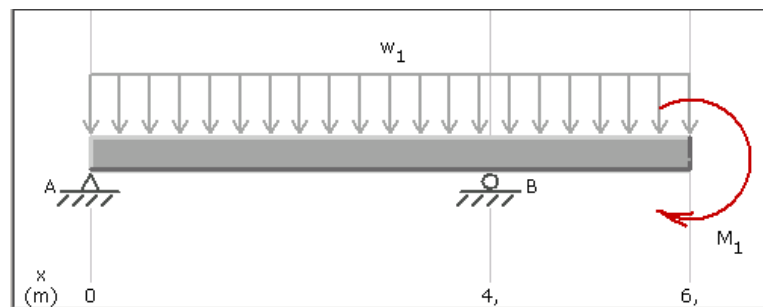


P-3.5. A prensa hidráulica representada na figura tem, na secção $a-a$, tensão admissível à tracção de 41.4MPa e tensão admissível à compressão de 82.8MPa. Determine a força máxima P que pode ser exercida pela prensa.



P-3.6. Considere uma viga com o carregamento indicado na figura.

- Represente os diagramas de esforços e indique, justificando, a secção crítica.
- Seleccione um perfil IPE que resista aos esforços de flexão. Considere que o material tem uma tensão normal admissível igual a 140MPa.
- Verifique se o perfil seleccionado em b) resiste aos esforços transversos aplicados. Considere uma tensão admissível ao corte de 70MPa.



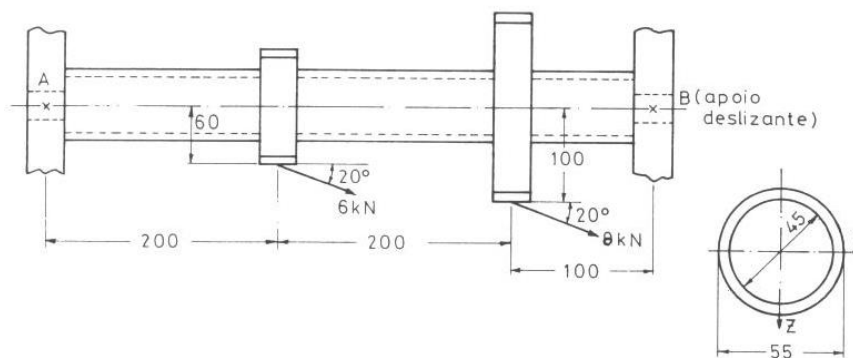
$$W_1=10\text{kN/m}; M_1= 100\text{kNm}$$

P-3.7. Considere uma viga simplesmente apoiada, de comprimento L e com uma carga P aplicada a meio vão. A viga tem secção rectangular maciça de altura h e largura b .

- obtenha uma relação entre tensão de flexão máxima e tensão de corte máxima (devido ao esforço transversal), em função de P , L e dimensões da secção.
- discuta o resultado obtido. Indique uma combinação de dimensões que provoque tensões normais e de corte da mesma ordem de grandeza.

P-3.8. O veio de secção circular oco representado na figura está sujeito a duas cargas inclinadas provenientes de uma transmissão por engrenagens e cujo valor é de 8 e 6 kN, respectivamente.

- Represente os diagramas de esforços que se verificam no veio. Indique, justificando, a secção(s) crítica(s).
- Trace a distribuição de tensões de flexão na secção mais solicitada, indicando os valores extremos.
- Trace a distribuição de tensões axiais na secção mais solicitada, indicando os valores extremos.
- Trace a distribuição de tensões de corte na secção em que o esforço transversal é máximo.
- Indique o coeficiente de segurança utilizado no dimensionamento à flexão sabendo que o material do veio é um aço de liga com $\sigma_{ced}=730\text{MPa}$.



P-3.10. Considere uma viga encastrada-livre, de comprimento L e com uma carga P aplicada na extremidade livre. A viga tem secção rectangular maciça de altura h e largura b .

- a) Obtenha uma relação entre tensão de flexão máxima e tensão de corte máxima (devido ao esforço transversal), em função de P , L e dimensões da secção.
- b) Discuta o resultado obtido. Indique uma combinação de dimensões que provoque tensões normais e de corte da mesma ordem de grandeza.

Capítulo 4

Análise de tensões e deformações

Esforços combinados

Dimensionamento

4.1. Num determinado ponto de um material as tensões segundo um sistema de eixos plano [oxy] são as seguintes:

$$\sigma_x = 60 \text{MPa}; \sigma_y = -20 \text{MPa}; \tau_{xy} = 40 \text{MPa}$$

- Calcule as tensões principais e respectiva orientação em relação ao sistema de eixos [oxy];
- Calcule a tensão de corte máxima e respectiva tensão normal;
- Calcule as componentes de tensão no elemento se este for rodado 30° no sentido anti-horário;
- Resolva as alíneas a) a c) recorrendo ao círculo de Mohr.

Resolução:

a)

$$\sigma_{máx,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{máx,min} = \frac{60 - 20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60 - (-20)}{2}\right)^2 + 40^2}$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{máx} = 76.57 \text{MPa}; \sigma_{min} = -36.57 \text{MPa}$$

No espaço tridimensional considera-se três tensões principais, ordenadas do seguinte modo:

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Assim,

$$\sigma_1 = 76.57 \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -36.57 \text{MPa}$$

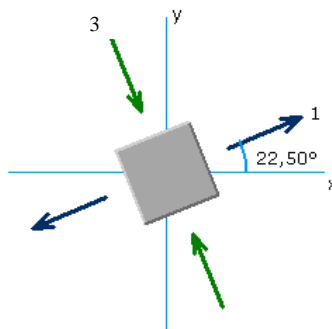
Para o cálculo da orientação recorre-se à expressão analítica:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta &= \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \\ \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2\theta &= \frac{2 \times 40}{60 - (-20)} \\ \Rightarrow 2\theta &= 45^\circ \\ \theta &= 22.5^\circ \end{aligned}$$

Para a verificação da orientação das tensões principais pode recorrer-se às expressões de transformação de sistemas de eixos:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \\ \sigma_{y'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \\ \tau_{x'y'} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned}$$

Substituindo na expressão de $\sigma_{x'}$ e para um ângulo de 22.5° obtém-se $\sigma_{x'} = 76.57 \text{ MPa}$, logo o ângulo é correspondente à tensão principal σ_1 . A tensão principal σ_2 é perpendicular ao plano.



b)

A tensão de corte máxima e tensão normal correspondente são calculadas pelas expressões analíticas:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{60 - (-20)}{2}\right)^2 + 40^2} = 56.57 \text{ MPa} \\ \sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{60 - 20}{2} = 20 \text{ MPa} \end{aligned}$$

c) Substitui-se nas expressões de transformação de sistemas de eixos o valor do ângulo que, por ter sentido anti-horário, é positivo:

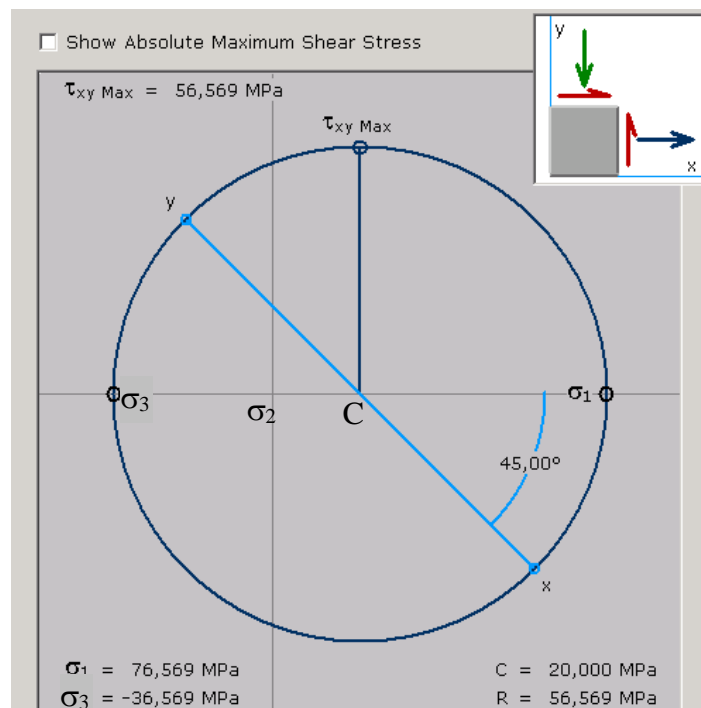
$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta = \frac{60 + 20}{2} + \frac{60 - (-20)}{2} \cos 60 + 40 \operatorname{sen} 60 = 76.6 \text{ MPa}$$

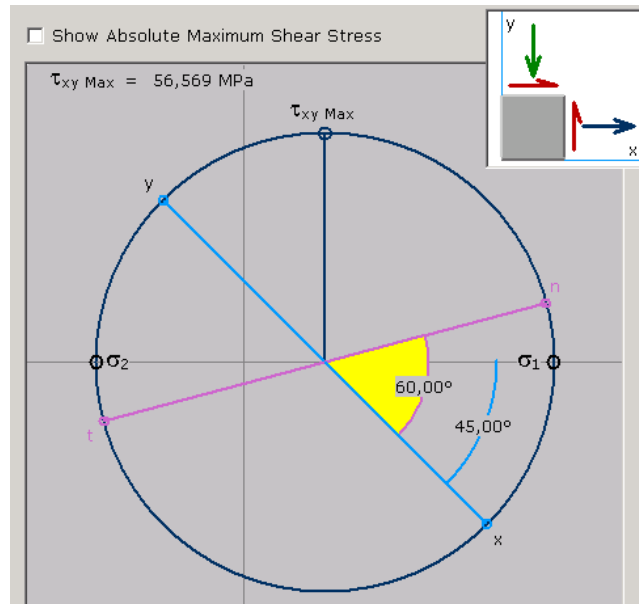
$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta = \frac{60 + 20}{2} - \frac{60 - (-20)}{2} \cos 60 - 40 \operatorname{sen} 60 = -34.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = -\frac{60 - (-20)}{2} \operatorname{sen} 60 + 40 \cos 60 = -14.6 \text{ MPa}$$

d) Resolução gráfica pelo círculo de Mohr. Os passos a efectuar são os seguintes:

1. Marcar pontos X e Y de coordenadas X($\sigma_x, -\tau_{xy}$) e Y(σ_y, τ_{xy})
2. Unir os pontos X e Y. Onde este segmento intercepta o eixo das abcissas (eixo σ) fica localizado o centro da circunferência, C.
3. Desenhar a circunferência com centro em C e a passar por X e Y.
4. Obter a partir do círculo os valores pretendidos (ver figura). De notar que no círculo de Mohr os ângulos marcam-se a dobrar.

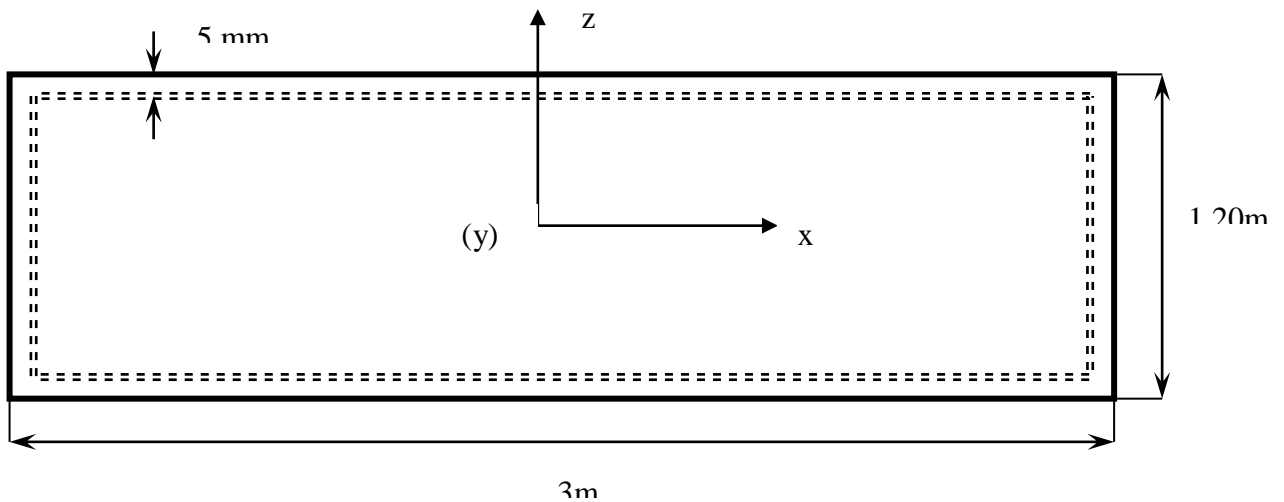




4.2. O depósito cilíndrico com 1.20 m de diâmetro representado na figura é feito de chapa de aço macio com 5 mm de espessura cuja tensão admissível é 160 MPa.

$E = 2.07 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ e $\nu = 0.3$.

- Determine a pressão que o depósito pode suportar em condições de segurança;
- Determine para esse caso a variação de volume sofrida pelo cilindro;
- Determine para esse caso a tensão máxima de corte nas facetas interiores da parede lateral do depósito, considerando o problema tridimensional.



Resolução:

Diâmetro interior do depósito cilíndrico: $d = 1200 - 10 = 1190\text{mm}$

Espessura: $t = 5\text{mm}$

Tensão admissível = 160MPa

a)

Cálculo da tensão longitudinal

$$\sigma_x = \frac{Pr}{2t} \Leftrightarrow \sigma_x = \frac{595P}{2 * 5} \Leftrightarrow \sigma_x = 59.5P$$

Cálculo da tensão circunferencial

$$\sigma_y = \frac{Pr}{t} \Leftrightarrow \sigma_y = \frac{595P}{5} \Leftrightarrow \sigma_y = 119P$$

Cálculo da pressão máxima, igualando a tensão máxima à tensão admissível do material:

$$\sigma_y = 160 \Leftrightarrow 119P = 160 \Leftrightarrow P = 1.3445\text{MPa}$$

Nestas condições os valores das tensões serão:

$$\sigma_x = 59.5 \times 1.3445 \Leftrightarrow \sigma_x \approx 80\text{MPa}$$

$$\sigma_y = 119 \times 1.3445 \Leftrightarrow \sigma_y \approx 160\text{MPa}$$

b)

Utiliza-se a lei de Hooke para o estado de plano da tensão:

Deformação longitudinal:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} = \frac{80}{207000} - \frac{0.3 \times 160}{207000} \Leftrightarrow \epsilon_x = 0.0001546$$

Deformação circunferencial:

$$\epsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} = -\frac{0.3 \times 80}{207000} + \frac{160}{207000} \Leftrightarrow \epsilon_y = 0.000657$$

Variação do comprimento:

$$\Delta L = \epsilon_x \times L_i = 0.0001546 \times 3000 \Leftrightarrow \Delta L = 0.464\text{mm}$$

Variação do diâmetro:

$$\Delta d = \varepsilon_y \times d_i = 0.000657 \times 1190 \Leftrightarrow \Delta d = 0.780 \text{ mm}$$

Varição do volume ($V_f - V_i$):

$$V = S \times h$$

$$V_i = \pi \times 595 \times 595 \times 3000 = 3.34 \text{ m}^3$$

$$V_f = \pi \times (595 + 0.78) \times (595 + 0.78) \times (3000 + 0.464) = 3.35 \text{ m}^3$$

$$\Delta V = 3.35 - 3.34 = 0.01 \text{ m}^3$$

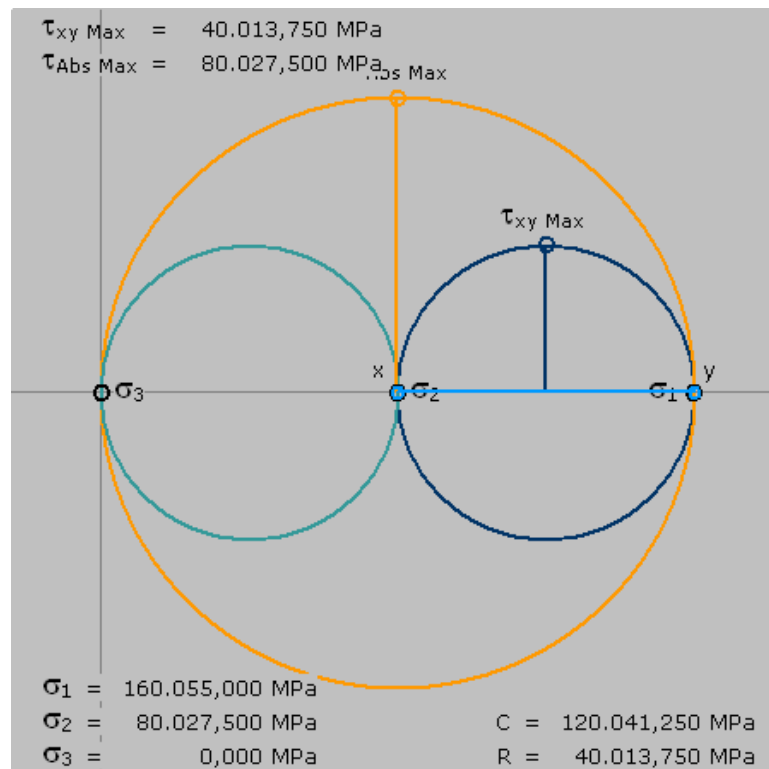
c)

Tensões principais:

$$\sigma_x = 160 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 80 \text{ MPa}$$

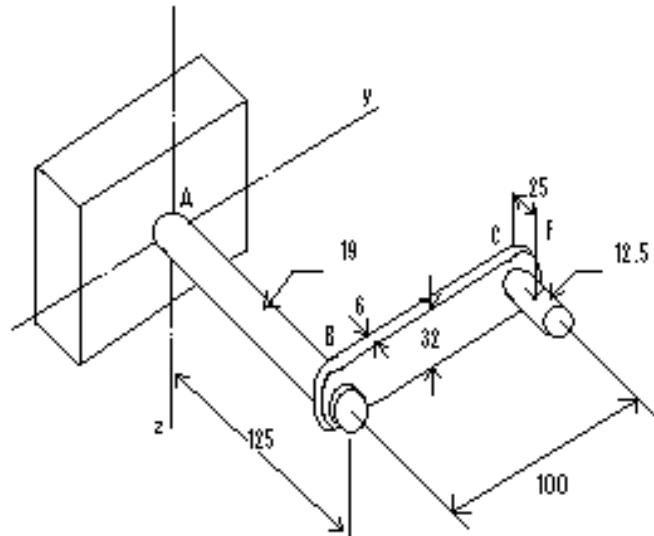
$$\sigma_z = 0$$



Pelo gráfico podemos verificar que a tensão máxima de corte é:

$$\tau_{\text{max}} \approx 80 \text{ MPa}$$

4.3. A figura representa uma manivela constituída por três peças e solicitada por uma força $F=1,5$ kN que provoca flexão e torção dum veio com 19mm de diâmetro fixado a um suporte na origem do sistema de eixos coordenados. O braço BC tem secção rectangular com dimensões indicadas e a força F exerce-se a 25mm de distância do ponto C. Calcule as tensões principais no ponto crítico. Verifique se o veio AB está bem dimensionado, considerando uma tensão admissível de 150MPa e dois critérios de dimensionamento à escolha.



Resolução:

O ponto crítico é o ponto A, onde os esforços de flexão e torção são máximos. Aconselha-se a verificação através do cálculo de diagramas de esforços. Para o ponto A tem-se:

$$M_t = F \times d_1 = 1.5 \times 10^3 \times 0.100 = 150 \text{ N.m}$$

$$M_f = F \times (d_2 + d_3) = 1.5 \times 10^3 \times (0.125 + 0.025) = 225 \text{ N.m}$$

$$\sigma_x = \frac{M_f y}{I_z} = \frac{225 \times \left(\frac{19 \times 10^{-3}}{2} \right)}{\left(\frac{\pi \times (19 \times 10^{-3})^4}{64} \right)} = 334.1 \text{ MPa}$$

$\sigma_y = 0$, uma vez que não temos quaisquer tipo de tensões segundo o eixo dos yy

$$\tau_{xy} = \frac{M_t \rho}{I_p} \frac{150 \times \left(\frac{19 \times 10^{-3}}{2} \right)}{\pi \times (19 \times 10^{-3})^4} = 111.4 \text{ MPa}$$

Cálculo de tensões principais:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2} = \frac{334.1 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{334.13 - 0}{2} + (111.4)^2 \right)}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 367.9 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -33.7 \text{ MPa} \end{cases}, \text{ em estado plano de tensão}$$

No estado geral de tensão tem-se:

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e ordenar $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$:

$$\sigma_1 = 367.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -33.7 \text{ MPa}$$

Verificação de dimensionamento pelo critério da tensão principal máxima:

$$\sigma_1 \leq \sigma_{adm}, \text{ o que não se verifica logo o veio não está bem dimensionado.}$$

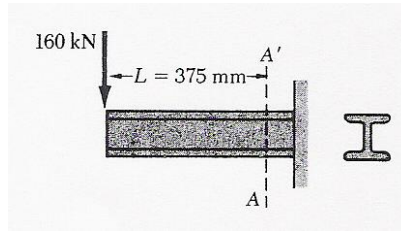
$$\Leftrightarrow 367.9 \leq 150$$

Verificação de dimensionamento pelo critério de Tresca:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{adm}, \text{ o que não se verifica logo o veio não está bem dimensionado.}$$

$$\Leftrightarrow 367.9 - (-33.7) \leq 150$$

4.4. Considere uma viga W200x52 solicitada por uma carga de 160kN como indicado na figura. Utilizando o critério da tensão principal máxima verifique se esta está bem dimensionada para um material com tensão admissível de 170MPa.



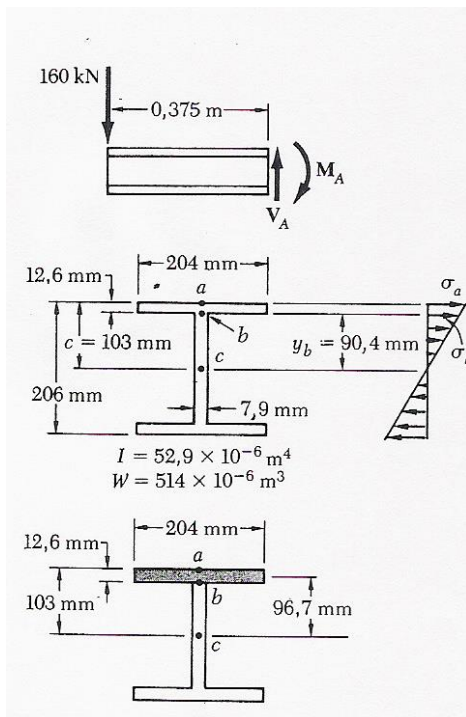
Resolução:

Cálculo de esforços na secção crítica (AA'):

$$M_f = 160 \times 0.375 = 60 \text{ kNm}$$

$$V_A = 160 \text{ kN}$$

Cálculo de tensões normais e de corte nos pontos *a* e *b*:



$$\sigma_a = \frac{M_f}{W} = \frac{60}{514 \times 10^{-6}} = 116.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = \frac{M_f y_b}{I_z} = \frac{60 \times 90.4 \times 10^{-3}}{52.9 \times 10^{-6}} = 102.4 \text{ MPa}$$

$$\tau_a = 0$$

$$Q_b = (204 \times 12.6)(96.7) = 249 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 249 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_b = \frac{V_A Q_b}{I t} = \frac{160 \times 249 \times 10^{-6}}{52.9 \times 10^{-6} \times 0.0079} = 95.3 \text{ MPa}$$

A tensão normal no ponto *a* não ultrapassa a tensão admissível. Deve ser feita a verificação para o ponto *b*, calculando a tensão principal máxima:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = \frac{102.4}{2} + \sqrt{\left(\frac{102.4}{2}\right)^2 + (95.3)^2} = 159.4 \text{ MPa}$$

O valor obtido é superior ao da tensão normal no ponto a , mas ainda é inferior á tensão admissível, logo a viga está bem dimensionada.

4.5. A figura 1 representa em corte esquemático uma caixa de velocidades de dupla embraiagem do tipo Borg-Warner/DSG. No sentido de otimizar o peso vai ser estudado um novo desenho para o veio externo, recorrendo a um aço de liga de resistência superior (AISI9260: $\sigma_{rot}=800\text{MPa}$; $\sigma_{ced}=470\text{MPa}$; $E=200\text{GPa}$). Este veio está submetido a um momento de torção máximo de 400Nm e o carregamento de flexão crítico ocorre para engrenagem que transmite a força de flexão F como indicado na figura 2. Considere ainda que o veio externo está simplesmente apoiado.

- a) Para determinar com fiabilidade a carga F aplicada foi colocado num protótipo um extensómetro, à superfície do veio, orientado na direcção x (ver figura 2). O valor máximo de deformação obtido foi de $1200\mu\text{str}$. Considerando as propriedades do material do veio, determine o valor da carga F aplicada.
- b) Verifique se, para a situação anterior e considerando também o esforço de torção, o veio se encontra bem dimensionado. Considere um coeficiente de segurança de $n=1.2$. Utilize dois critérios de dimensionamento, à escolha, e discuta os resultados obtidos.
- c) Considere o estado de tensão na secção crítica calculado na alínea b). Represente-o no círculo de Mohr e utilize essa representação gráfica para calcular a tensão de corte máxima, considerando o problema tridimensional.
- d) Considere o estado de tensão na secção crítica calculado na alínea b). Numa situação extrema anteveja a possibilidade de ser aplicada uma carga de tracção no veio ao ser accionada a embraiagem. Se essa carga atingir um valor de 1000N, represente graficamente a distribuição de tensões normais que se verifica na secção crítica do veio.

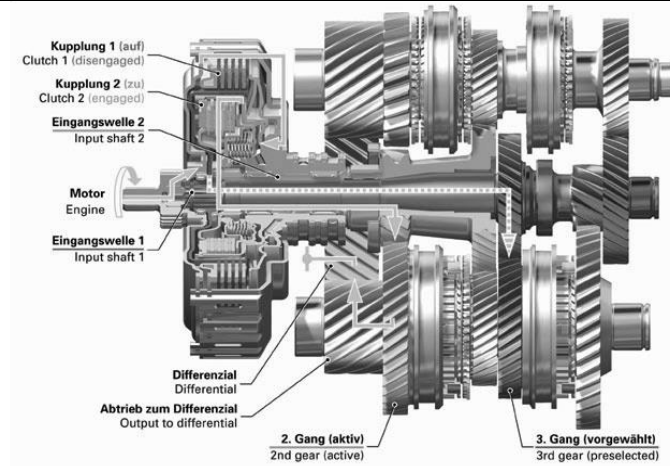


Figura 1. Corte esquemático de caixa DSG

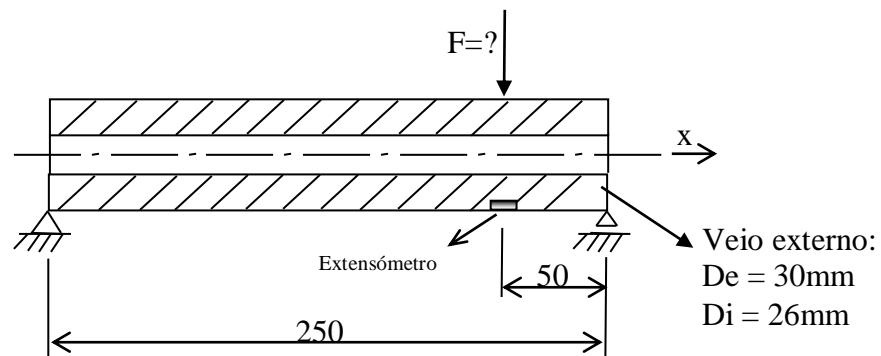


Figura 2. Veio externo e carregamento de flexão

Resolução:

a)

Considerando a deformação obtida, pode ser utilizada a lei de Hooke para o cálculo da tensão no ponto onde foi colado o extensômetro:

$$\sigma = E\varepsilon = 200 \times 10^9 \times 1200 \times 10^{-6} = 240 \times 10^6 \text{ Pa} = 240 \text{ MPa}$$

Com este valor de tensão, que corresponde ao valor máximo de flexão, pode ser calculado o momento flector no ponto:

$$\sigma = \frac{M_f y}{I_z}$$

$$\Leftrightarrow M_f = \frac{240 \times \left(\frac{\pi(30^4 - 26^4)}{64} \right)}{\left(\frac{30}{2} \right)} = 277264 \text{ Nmm}$$

Este momento flector é utilizado para calcular a força F, por exemplo através do diagrama de esforços:

Colocando em função de F, a reacção em B é dada por:

$$\sum M_A = 0$$

$$\Leftrightarrow -200F + 250B_y = 0$$

$$\Leftrightarrow B_y = 0.8F$$

O momento flector máximo pode ser calculado multiplicando a reacção em B pela distância até à carga:

$$(M_f)_{\text{máx}} = 50B_y$$

$$\Leftrightarrow 277264 = 50 \times 0.8F$$

$$\Leftrightarrow F = 6931.6 \text{ N}$$

b)

$$M_f = 277264 \text{ Nmm} \rightarrow \sigma_x = 240 \text{ MPa}$$

$$M_t = 400000 \text{ Nmm} \rightarrow \tau_{xy} = \frac{M_t \rho}{I_p} = \frac{400 \times 10^3 \times \left(\frac{30}{2} \right)}{\left(\frac{\pi(30^4 - 26^4)}{32} \right)} = 173.1 \text{ MPa}$$

Cálculo de tensões principais:

$$\sigma_{máx,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{240+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{240-0}{2}\right)^2 + 173.1^2}$$

$$\sigma_{máx} = 330.6MPa$$

$$\sigma_{min} = -90.6MPa$$

Ordenando as tensões principais: $(\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3)$

$$\sigma_1 = 330.6MPa; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -90.6MPa$$

A tensão admissível é calculada utilizando o coeficiente de segurança:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{ced}}{n} = \frac{470}{1.2} = 391.7MPa$$

Aplicando o critério da tensão principal máxima resulta:

$$\sigma_1 \leq \sigma_{adm}, \text{ o que é verificado.}$$

$$\Leftrightarrow 330.6 \leq 391.7$$

Aplicando o critério de Tresca resulta:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{adm}$$

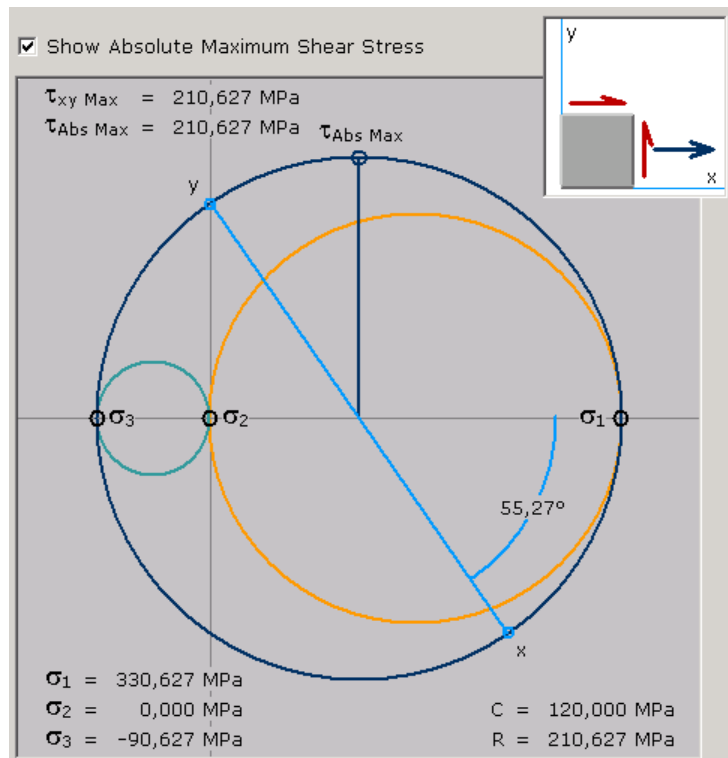
$$\Leftrightarrow 330.6 - (-90.6) \leq 391.7 \Leftrightarrow 421.2 \leq 391.7, \text{ o que } \underline{\text{não é}} \text{ verificado.}$$

c)

$$\sigma_x = 240MPa$$

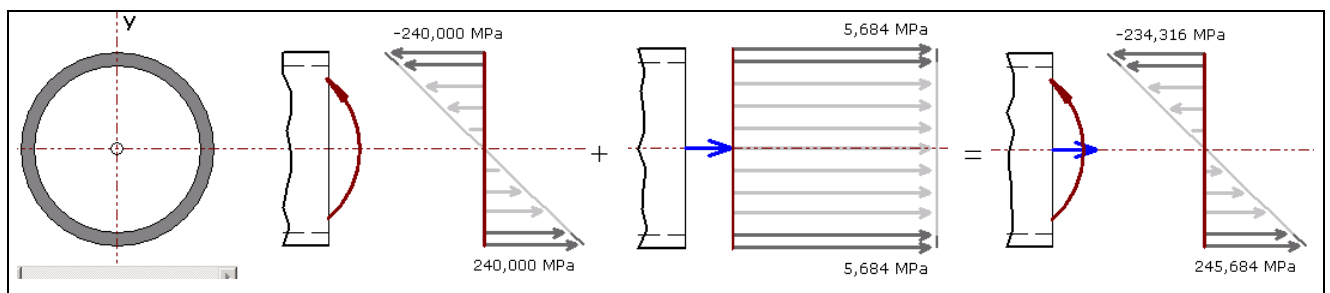
$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = 173.1MPa$$



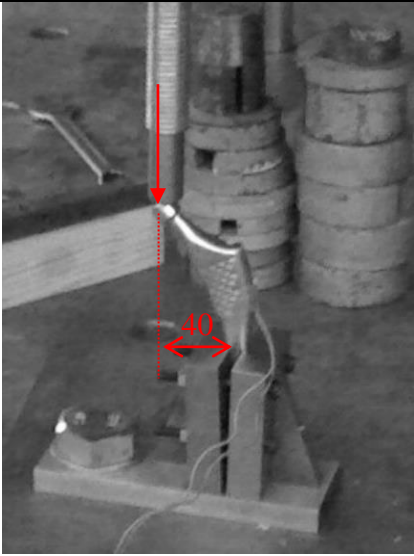
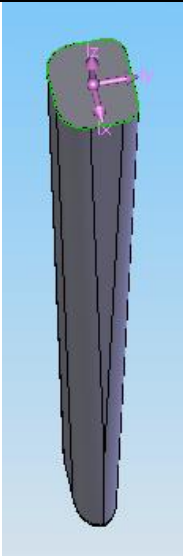
d)

$$\sigma_x = \frac{1000}{\pi(30^2 - 26^2)} = 5.68 \text{ MPa}$$



4.6 A figura representa uma prótese da anca submetida a um teste em que é solicitada por uma força F . Considerando que a prótese é construída numa liga Cr-Co-Mo – BIODUR™ CCM PLUS™ ($\sigma_{ced}=930\text{MPa}$; $\sigma_{rot}=1365\text{MPa}$) – e as dimensões e propriedades da secção crítica indicadas, calcule:

- a) a tensão máxima verificada na secção crítica A;
- b) verifique se a prótese está bem dimensionada considerando um esforço adicional de torção na secção crítica de 6500Nmm , e um coeficiente de segurança à cedência de 1.3. Discuta qual o critério de dimensionamento mais adequado.

	
<p>Prótese da anca solicitada por força $F= 1500\text{N}$ e fixa na secção crítica A.</p>	<p>Secção crítica A com propriedades: $I_y=775\text{mm}^4$; $I_p=1255\text{mm}^4$; $A=90\text{mm}^2$ Largura=18mm Espessura=5mm</p>

Resolução:

a) Na secção crítica verifica-se um carregamento excêntrico que combina flexão e compressão. A tensão máxima será de compressão e é calculada por:

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{M_f z}{I_y}$$

$$\sigma = -\frac{1500}{90} - \frac{(1500 \times 40) \times 9}{775} = -713.5\text{MPa}$$

b) Considerando o esforço de torção de 6500Nmm calcula-se a correspondente tensão de corte:

$$\tau = \frac{M_t \rho}{I_p} = \frac{6500 \times 9}{1255} = 46.6 \text{ MPa}$$

Calcula-se as tensões principais para aplicação em critérios de dimensionamento:

$$\sigma_{\text{máx, min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{\text{máx, min}} = \frac{-713.5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-713.5}{2}\right)^2 + 46.6^2}$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{\text{máx}} = 3.05 \text{ MPa}; \sigma_{\text{min}} = -716.55 \text{ MPa}$$

No espaço tridimensional considera-se três tensões principais, ordenadas do seguinte modo:

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Assim,

$$\sigma_1 = 3.05 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -716.55 \text{ MPa}$$

A tensão admissível é calculada utilizando o coeficiente de segurança:

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_{\text{ced}}}{n} = \frac{930}{1.3} = 715.4 \text{ MPa}$$

Verificação de dimensionamento pelo critério de Tresca:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{\text{adm}}$$

$$\Leftrightarrow 3.05 - (-716.55) \leq 715.4, \text{ o que não se verifica logo a prótese não está bem}$$

dimensionada.

Verificação de dimensionamento pelo critério de Von-Mises:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} \leq \sigma_{\text{adm}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(3.05)^2 + (-(-716.55))^2 + (-716.55 - 3.05)^2 \right]^{1/2} \leq 715.4$$

$$\Leftrightarrow 718.1 \leq 715.4$$

o que não se verifica logo a prótese não está bem dimensionada. Neste caso particular o critério da tensão principal máxima não era adequado e a diferença entre os critérios de Tresca e Von-Mises é reduzida.

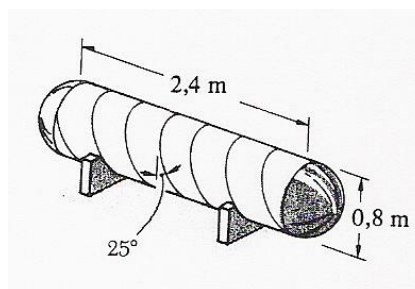
Problemas propostos

P-4.1. Calcule, recorrendo a cálculo analítico e gráfico (círculo de Mohr): as tensões principais e respectiva orientação em relação ao sistema de eixos; tensão de corte máxima e respectiva tensão normal; componentes de tensão no elemento se este for rodado 30° no sentido anti-horário. Efectue o cálculo para um dos estados de tensão seguintes:

- $\sigma_x = 10\text{MPa}$; $\sigma_y = -20\text{MPa}$; $\tau_{xy} = 30\text{MPa}$
- $\sigma_x = 20\text{MPa}$; $\sigma_y = -20\text{MPa}$; $\tau_{xy} = 40\text{MPa}$
- $\sigma_x = 40\text{MPa}$; $\sigma_y = -10\text{MPa}$; $\tau_{xy} = -40\text{MPa}$
- $\sigma_x = 100\text{MPa}$; $\sigma_y = 0\text{MPa}$; $\tau_{xy} = -100\text{MPa}$
- $\sigma_x = -30\text{MPa}$; $\sigma_y = 80\text{MPa}$; $\tau_{xy} = 200\text{MPa}$
- $\sigma_x = -50\text{MPa}$; $\sigma_y = 150\text{MPa}$; $\tau_{xy} = 40\text{MPa}$

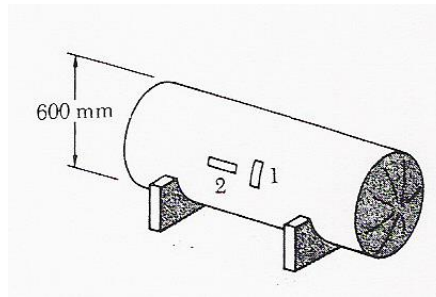
P-4.2. Um tanque de ar comprimido está apoiado de modo em que não se exerce nenhuma força longitudinal no tanque. O corpo cilíndrico foi construído em chapa de aço de 10mm de espessura, soldada ao longo de um cordão que forma uma hélice com ângulo de 25° com um plano transversal ao cilindro. Os topos do reservatório são semiesféricos e têm espessura de 8mm. Para uma pressão interna de 1260kPa determine:

- a tensão normal e a tensão de corte máxima nos topos do reservatório;
- as tensões na direcção paralela e na direcção perpendicular ao cordão de soldadura helicoidal



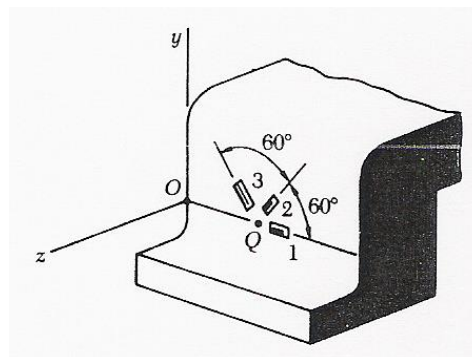
P-4.3. Um reservatório cilíndrico é utilizado para o transporte de gás sob pressão e tem diâmetro interno de 600mm e paredes de 20mm de espesura. Foram colocados extensômetros na superfície da parede do reservatório, nas direcções longitudinal e transversal. As medições indicam $255\mu\text{str}$ na direcção transversal e $60\mu\text{str}$ na direcção longitudinal.. Considerando que o material tem um módulo de elasticidade transversal $G=80\text{GPa}$, determine:

- a pressão interna do gás contido no tanque;
- as tensões principais e a tensão de corte máxima na parede do tanque

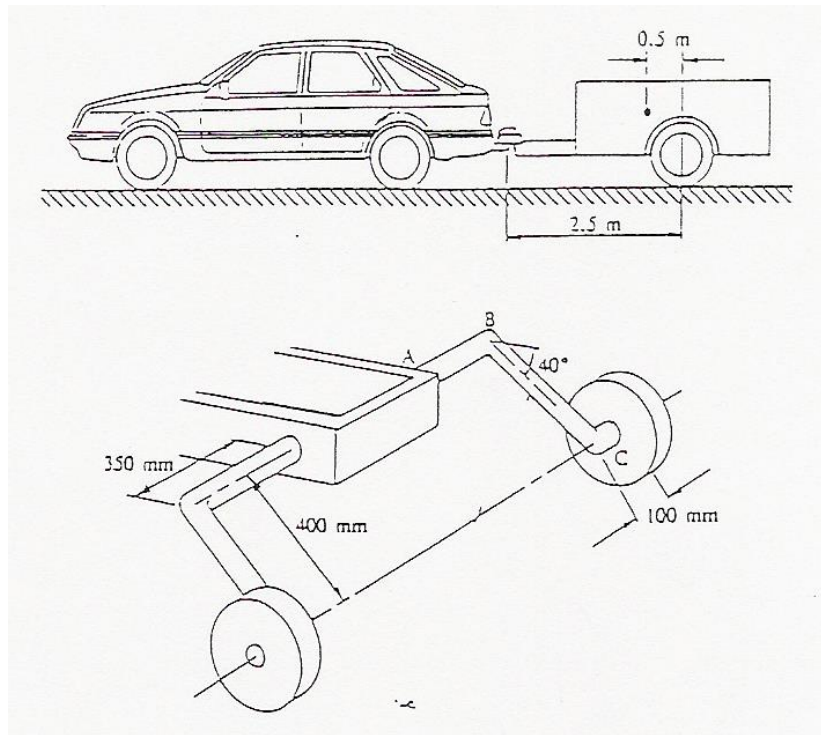


P-4.4. Na superfície de uma base de máquina foram feitas medições de deformação num ponto Q, através de uma roseta de extensômetros a 60° , obtendo-se os seguintes resultados: $\epsilon_1=60\mu\text{str}$; $\epsilon_2=900\mu\text{str}$; $\epsilon_3=300\mu\text{str}$. Utilizando os eixos coordenados indicados na figura, determine para o ponto Q:

- as componentes de deformações ϵ_x ; ϵ_y ; γ_{xy} ;
- as deformações principais

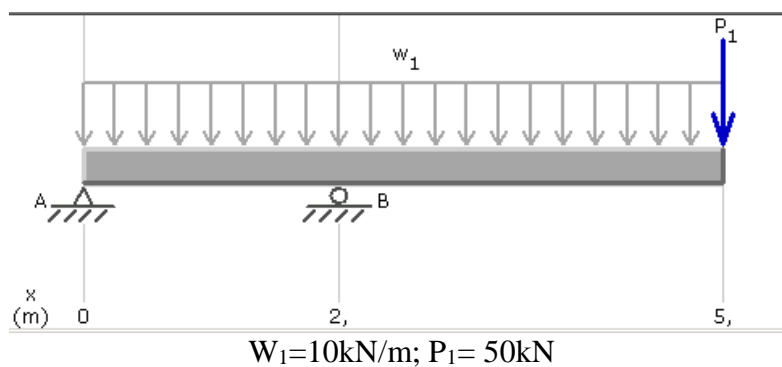


P-4.5. Um pequeno atrelado de automóvel tem um sistema de suspensão como representado na figura. O atrelado tem um peso de 4kN e o seu centro de gravidade encontra-se situado 0.5m à frente das rodas. Escolha o perfil tubular mais adequado para a construção do elemento ABC, considerando como material de construção um aço macio comercial com $\sigma_{adm}=140\text{MPa}$. Utilize dois critérios de dimensionamento à escolha.



P-4.6. Considere uma viga com o carregamento indicado na figura.

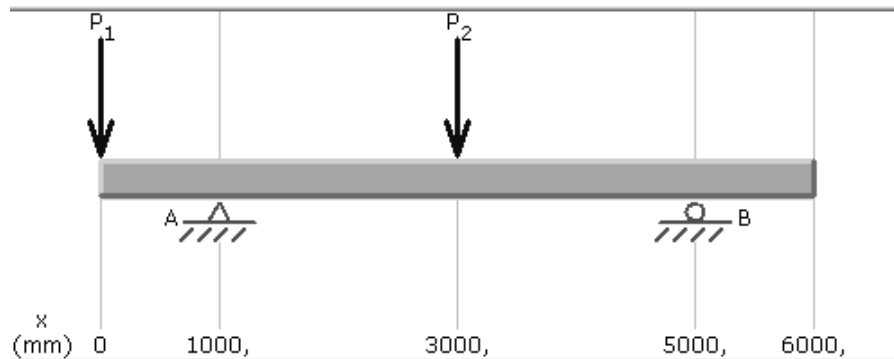
- c) Represente graficamente os diagramas de esforços presentes e indique, justificando, a secção crítica.
- d) Seleccione um perfil IPE que resista aos esforços de flexão e transversos aplicados. Considere que o material tem uma tensão admissível igual a 140MPa. Utilize dois critérios de dimensionamento à escolha.



P-4.7. Considere a viga com o carregamento apresentado na figura. Os valores das cargas apresentadas são: $P_1=5000\text{N}$ e $P_2=6000\text{N}$. Determine:

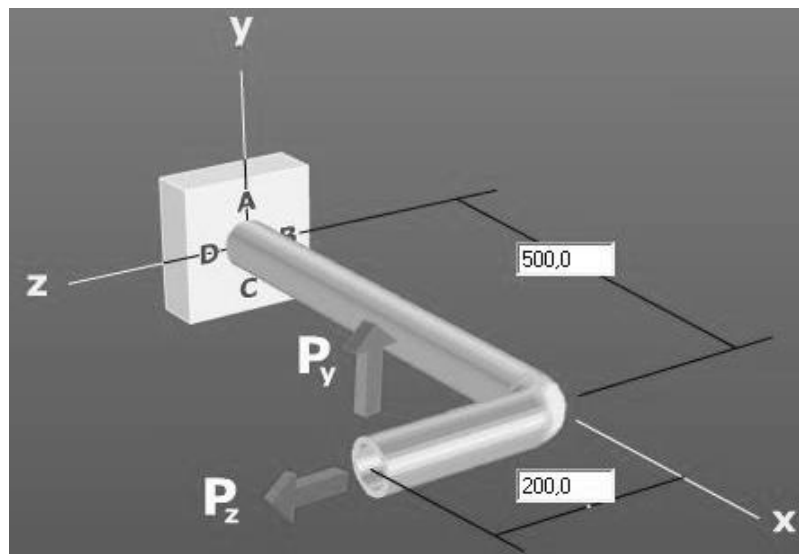
- os diagramas de esforços e indique, justificando, a secção crítica
- represente graficamente a distribuição de tensões de flexão na secção crítica
- Selecione um perfil IPE que resista aos esforços de flexão e transversos aplicados.

Considere que o material tem uma tensão admissível igual a 160MPa . Utilize dois critérios de dimensionamento à escolha.



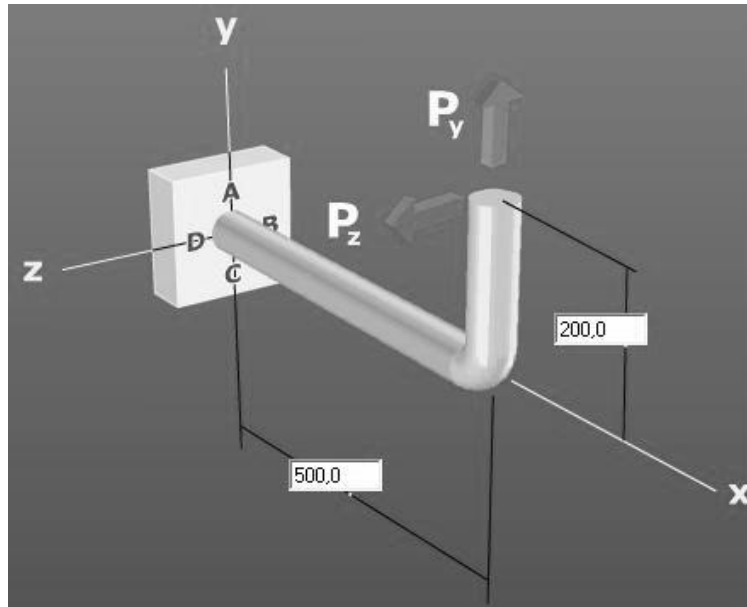
P-4.8. Considere a barra em L com o carregamento indicado na figura, em que $P_y=1000\text{N}$ e $P_z=5000\text{N}$.

- represente os diagramas de esforços que ocorrem na barra.
- para a secção crítica represente o estado de tensão nos pontos A, B, C e D
- dimensione a barra considerando uma secção circular maciça e uma tensão admissível igual a 200MPa .



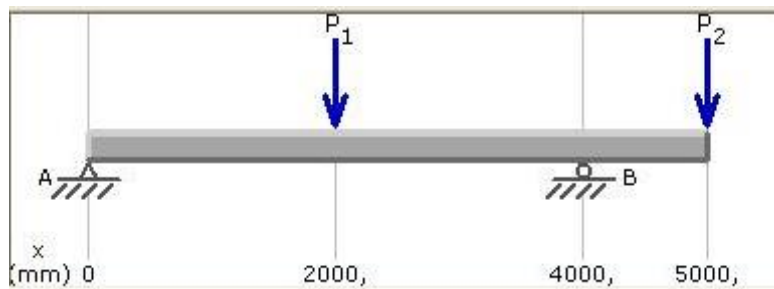
P-4.9. Considere a barra em L com o carregamento indicado na figura, em que $P_y=1000\text{N}$ e $P_z=6000\text{N}$.

- represente os diagramas de esforços que ocorrem na barra.
- para a secção crítica represente o estado de tensão nos pontos A, B, C e D
- dimensione a barra considerando uma secção circular maciça e uma tensão admissível igual a 180MPa .



P-4.10. Considere o carregamento apresentado na figura que representa um veio submetido a um momento de torção de 400Nm . Os valores das cargas apresentadas são: $P_1=8000\text{N}$ e $P_2=4000\text{N}$. Determine:

- os diagramas de esforços e indique, justificando, a secção crítica
- represente graficamente a distribuição de tensões de flexão na secção crítica
- dimensione o veio considerando uma secção circular maciça em material com tensão admissível de 150MPa . Utilize dois critérios de dimensionamento à escolha e discuta os resultados obtidos.



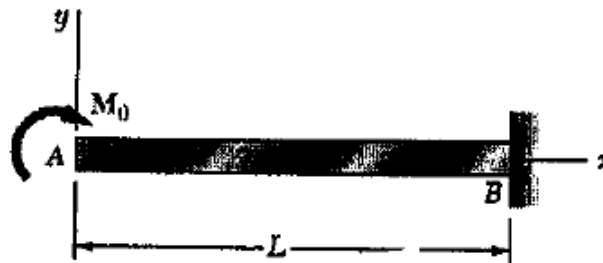
Capítulo 5: Deformação de vigas

Equação da linha elástica

Método da sobreposição

5.1. Para a viga representada na figura seguinte determine:

- a) a equação da linha elástica (equação da deformada);
- b) a flecha na extremidade livre;
- c) a rotação na extremidade livre

Resolução:

a) A integração da equação da linha elástica requer o conhecimento da equação de momentos flectores que neste caso é constante e igual a M_0 :

$$EI \frac{(dy^2)}{(dx^2)} = M_0$$

Integrando sucessivamente resulta:

$$EI \frac{(dy)}{(dx)} = M_0x + C_1$$

$$EIy = \frac{1}{2} M_0x^2 + C_1x + C_2$$

Para a determinação das constantes de integração recorre-se às condições fronteira para este caso:

$$x=L: y=0$$

$$x=L: dy/dx=0$$

$$x=L: dy/dx=0$$

$$0 = M_0L + C_1$$

$$C_1 = -M_0L$$

$$x=L: y=0$$

$$0 = \frac{1}{2}M_0L^2 - M_0L^2 + C_2$$

$$C_2 = \frac{1}{2}M_0L^2$$

A equação da deformada assume a forma:

$$EIy = \frac{1}{2}M_0x^2 + C_1x + C_2$$

$$y = \frac{M_0}{(2EI)}(x^2 - 2Lx + L^2)$$

$$y = \frac{M_0}{(2EI)}(L - x^2)^2$$

b) Em $x=0$:

$$y_A = \frac{M_0}{(2EI)}(L - 0^2)^2 = \frac{(M_0L^2)}{(2EI)} \quad \uparrow$$

c) Em $x=0$:

$$\frac{(dy)}{(dx)} = -\frac{M_0}{(EI)}(L - x)$$

$$\frac{(dy)}{(dx)} = -\frac{M_0}{(EI)}(L - x) = -\frac{M_0}{(EI)}(L - 0) = -\frac{(M_0L)}{(EI)}$$

5.2. Considere a viga em consola representada na figura seguinte, com EI constante. Determine a expressão da deformada $v(x)$, o valor do deslocamento transversal máximo e o ponto em que ocorre.

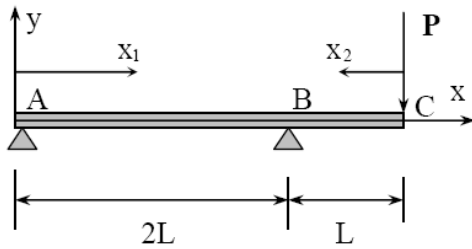


Diagrama de Esforços Transversos

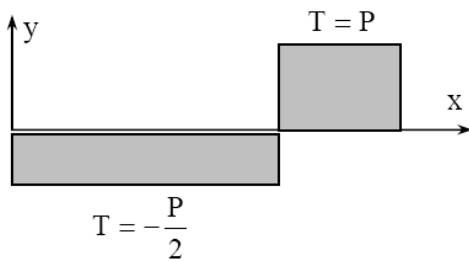
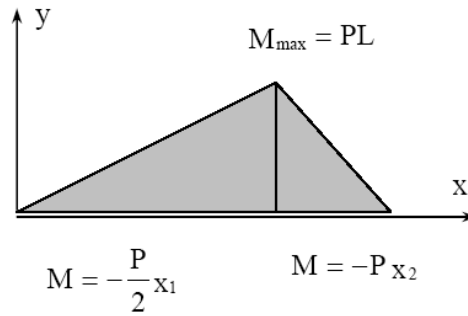


Diagrama de Momentos Flectores



Resolução:

No tramo AB o momento é

$$M = -\frac{P}{2}x_1$$

e no tramo BC o momento é

$$M = -P x_2.$$

A inclinação e a elástica no tramo AB que corresponde a $0 \leq x_1 \leq 2L$ obtêm-se por integração da equação:

$$EI \frac{d^2 v_1}{dx^2} = -\frac{P}{2}x_1$$

Resultando, sucessivamente:

$$EI \frac{d v_1}{d x} = -\frac{P}{4} x_1^2 + C_1$$

$$EI v_1 = -\frac{P}{12} x_1^3 + C_1 x_1 + C_2$$

A inclinação e a elástica no tramo BC que corresponde a $0 \leq x_2 \leq L$ obtêm-se por integração da equação:

$$EI \frac{d^2 v_2}{d x_2^2} = -P x_2$$

$$EI \frac{d v_2}{d x_2} = -\frac{P}{2} x_2^2 + C_3$$

$$EI v_2 = -\frac{P}{6} x_2^3 + C_3 x_2 + C_4$$

As quatro constantes de integração são determinadas considerando as condições de fronteira que são

Para $x_1 = 0$ $v_1 = 0$

Para $x_1 = 2L$ $v_1 = 0$

Para $x_2 = L$ $v_2 = 0$

Para $x_2 = L$ $\frac{d v_1(2L)}{d x_1} = \frac{d v_2(L)}{d x_2}$

Resolvendo, obtêm-se os seguintes valores para as constantes de integração:

$$C_1 = \frac{PL^2}{3}, C_2 = 0, C_3 = \frac{7}{6}PL^2, C_4 = -PL^3$$

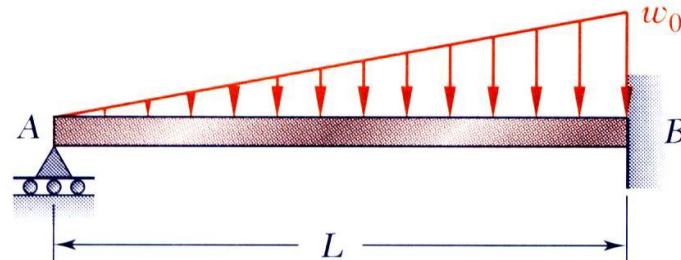
A equação da deformada no tramo BC resulta então:

$$v_2 = -\frac{P}{6EI} x_2^3 + \frac{7PL^2}{6EI} x_2 - \frac{PL^3}{EI}$$

O valor máximo da deformada ocorre para $x_2=0$ e é:

$$v = -\frac{PL^3}{EI}$$

5.3. Para a viga uniforme representada na figura determine a reacção em A, a equação da deformada e o deslocamento angular no ponto A.



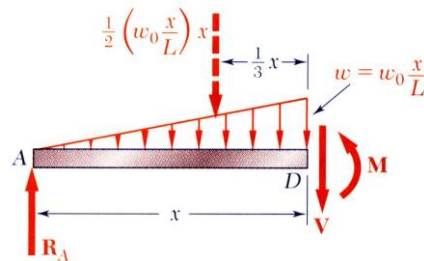
Resolução:

A viga é estaticamente indeterminada o que implica colocar a equação da linha elástica em função da reacção em A. A integração e utilização de condições fronteira permite determinar a reacção em A e a equação da linha elástica.

Considerando o equilíbrio estático:

$$R_A x - \frac{1}{2} \left(\frac{w_0 x^2}{L} \right) x - M = 0$$

$$M = R_A x - \frac{w_0 x^3}{6L}$$



A equação diferencial assume a forma:

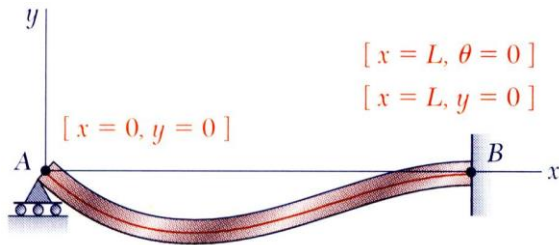
$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M = R_A x - \frac{w_0 x^3}{6L}$$

Integrando sucessivamente resulta:

$$EI \frac{dy}{dx} = EI \theta = \frac{1}{2} R_A x^2 - \frac{w_0 x^4}{24L} + C_1$$

$$EI y = \frac{1}{6} R_A x^3 - \frac{w_0 x^5}{120L} + C_1 x + C_2$$

Aplicam-se as condições fronteira da figura:



$$x = 0, y = 0: C_2 = 0$$

$$x = L, \theta = 0: \frac{1}{2} R_A L^2 - \frac{w_0 L^3}{24} + C_1 = 0$$

$$x = L, y = 0: \frac{1}{6} R_A L^3 - \frac{w_0 L^4}{120} + C_1 L + C_2 = 0$$

Resolvendo para a reacção em A:

$$\frac{1}{3} R_A L^3 - \frac{1}{30} w_0 L^4 = 0$$

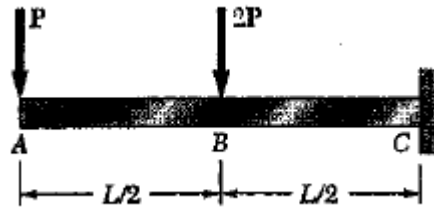
$$R_A = \frac{1}{10} w_0 L \uparrow$$

Substituindo as constantes de integração obtém-se a equação da linha elástica:

$$EI y = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{10} w_0 L \right) x^3 - \frac{w_0 x^5}{120 L} - \left(\frac{1}{120} w_0 L^3 \right) x$$

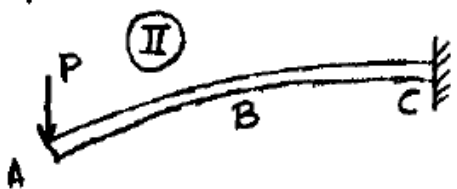
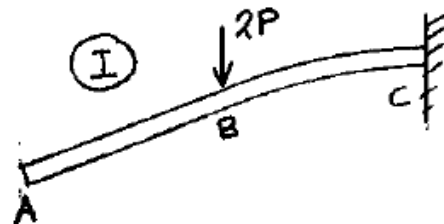
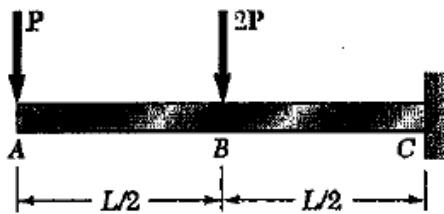
$$y = \frac{w_0}{120 EIL} \left(-x^5 + 2L^2 x^3 - L^4 x \right)$$

5.4. Para a viga encastrada-livre da figura determine a flecha e a rotação da extremidade livre, recorrendo ao método da sobreposição.



Resolução:

Aplica-se o método da sobreposição com os dois casos seguintes:



Carregamento I: 2P aplicado em B, corresponde ao caso 1 da tabela no anexo B.

$$\theta_{B^1} = \frac{((2P)(L/2)^2)}{(2EI)} = \frac{1}{4} \frac{(PL^2)}{(EI)}$$

$$y_{B^1} = \frac{((2P)(L/2)^3)}{(3EI)} = \frac{1}{12} \frac{(PL^3)}{(EI)}$$

No caso I, AB não tem deformação resultando:

$$\theta_{A^1} = \theta_{B^1} = \frac{1}{4} \frac{(PL^2)}{(EI)}$$

$$y_{A^1} = y_{B^1} - \left(\frac{L}{2}\right)\theta_{B^1} = -\frac{1}{12} \frac{(PL^3)}{(EI)} - \frac{1}{8} \frac{(PL^3)}{(EI)} = -\frac{5}{24} \frac{(PL^3)}{(EI)}$$

Carregamento II: P aplicado em A, corresponde ao caso 1 da tabela no anexo B:

$$\theta_{A^2} = \frac{(PL^2)}{(2EI)} \quad y_{A^2} = -\frac{(PL^3)}{(3EI)}$$

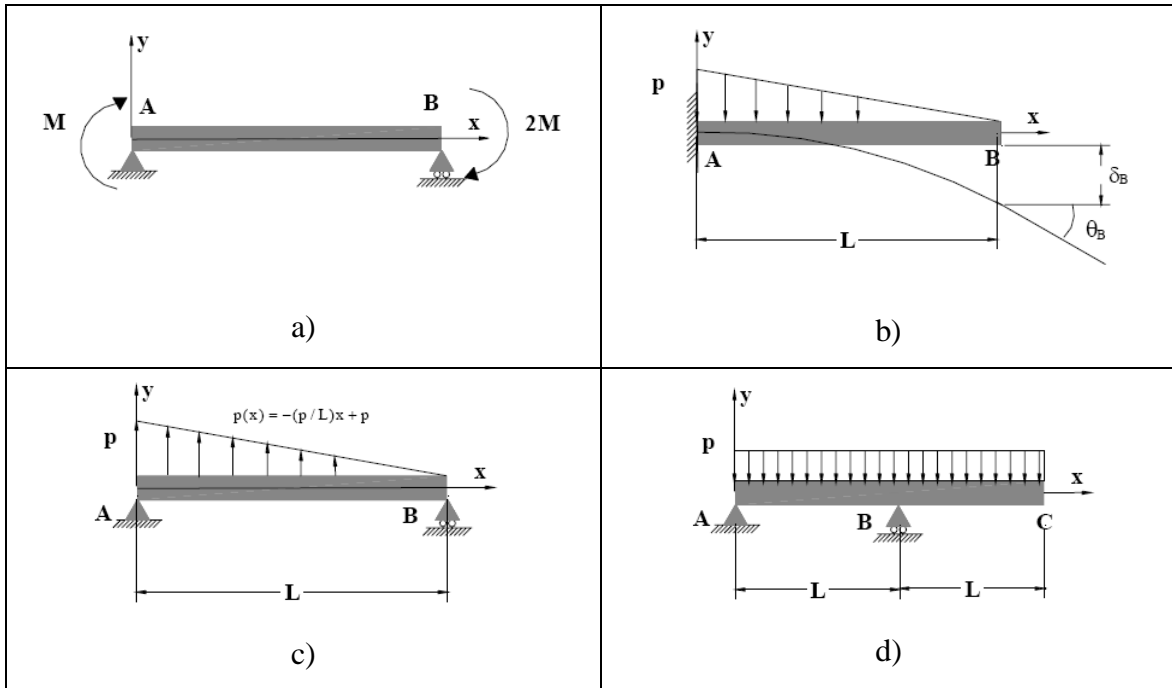
Aplicando o método da sobreposição resulta:

$$\theta_A = \theta_{A^1} + \theta_{A^2} = \frac{1}{4} \frac{(PL^2)}{(EI)} + \frac{1}{2} \frac{(PL^2)}{(EI)} = \frac{3}{4} \frac{(PL^2)}{(EI)}$$

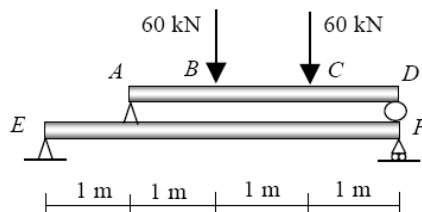
$$y_A = y_{A^1} + y_{A^2} = -\frac{5}{24} \frac{(PL^3)}{(EI)} - \frac{1}{3} \frac{(PL^3)}{(EI)} = -\frac{13}{24} \frac{(PL^3)}{(EI)}$$

Problemas propostos

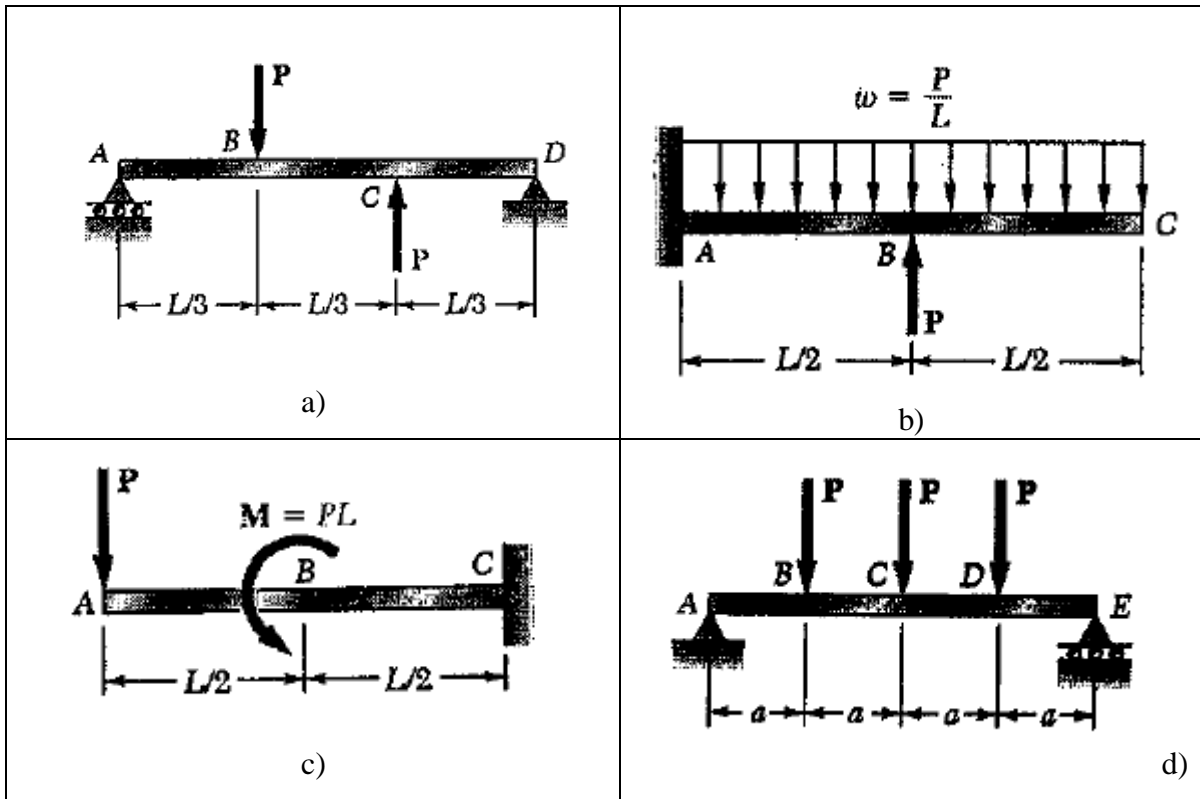
P-5.1. Considere as vias representadas nas figuras seguintes e calcule, para cada caso, a equação da deformada e a flecha máxima.



P-5.2. A viga AD apoia-se na viga EF como indicado. Sabendo que é utilizado um perfil HEB300 para as construir, determine a flecha nos pontos B e C para o carregamento ilustrado. Considere $E = 200$ GPa.

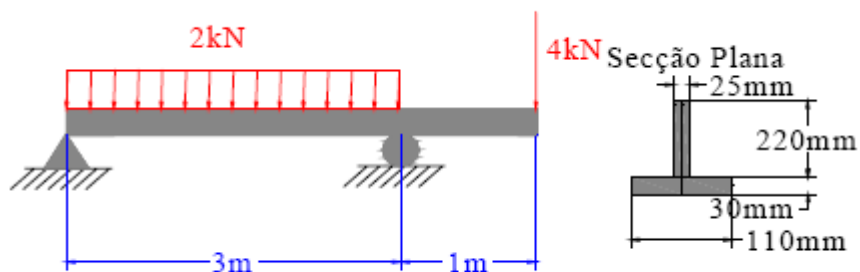


P-5.3. Considere as vias representadas nas figuras seguintes e calcule, para cada caso, a equação da deformada e a flecha máxima recorrendo ao método da sobreposição.



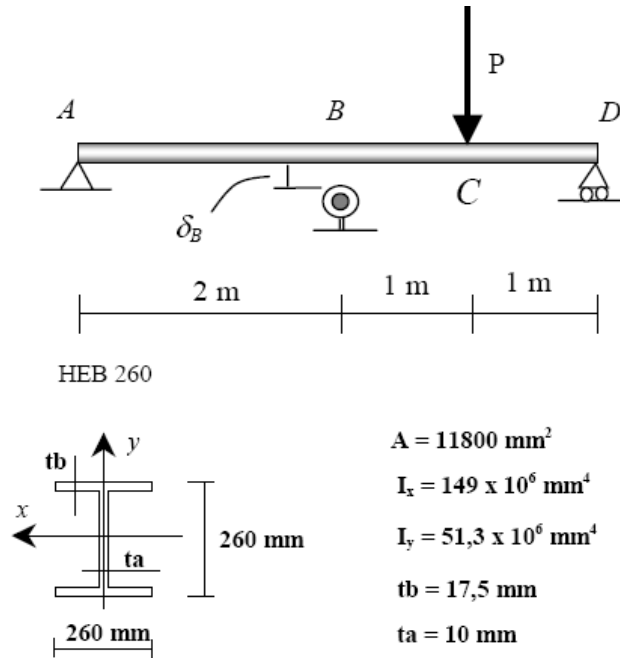
P-5.4. Considere a viga representada na figura e determine:

- o esforço transversal máximo e o momento flector máximo.
- as tensões longitudinais ou axiais máximas.
- as tensões de corte máximas.
- o deslocamento transversal máximo e a equação da deformada



P-5.5. Considere a viga ABCD indicada na figura, simplesmente apoiada em A e D e suportando a carga concentrada $P= 150$ kN aplicada em C. A viga é construída com um perfil de aço HEB 260, com $E= 210$ GPa, e a folga que existe entre a face inferior da viga e o rolete colocado sob a secção B antes da carga P ser aplicada é $\delta_B= 3$ mm.

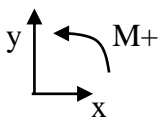
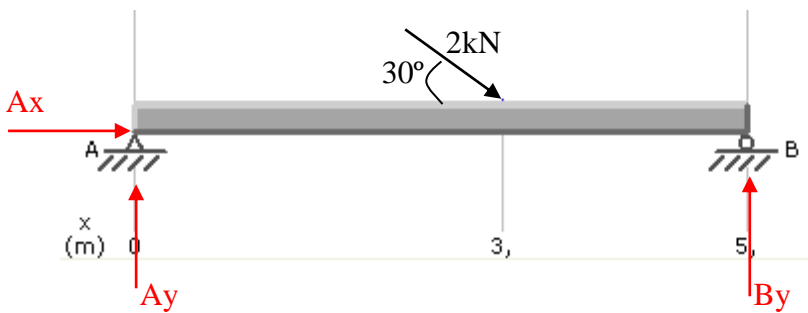
- Determine as reacções nos apoios quando a carga P é aplicada.
- Trace os diagramas do esforço transversal e do momento flector.
- Determine a equação da linha elástica.



Anexo A – Cálculo de reacções

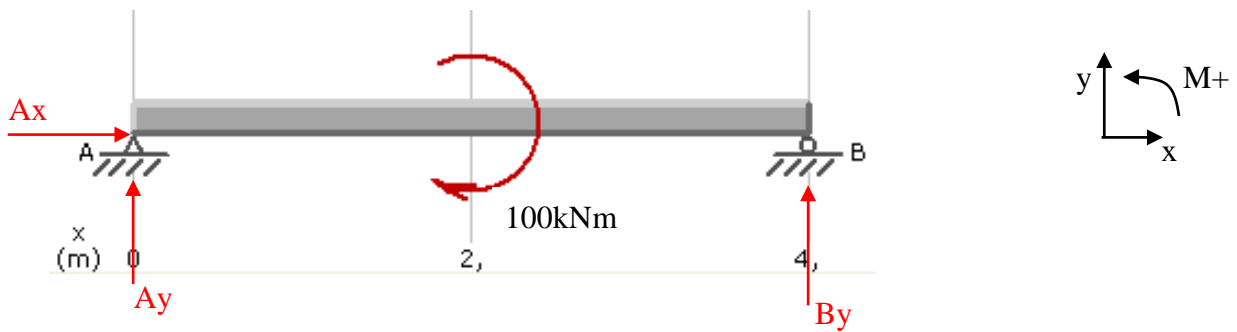
Calcule as reacções nos apoios para os seguintes carregamentos:

A1.1.



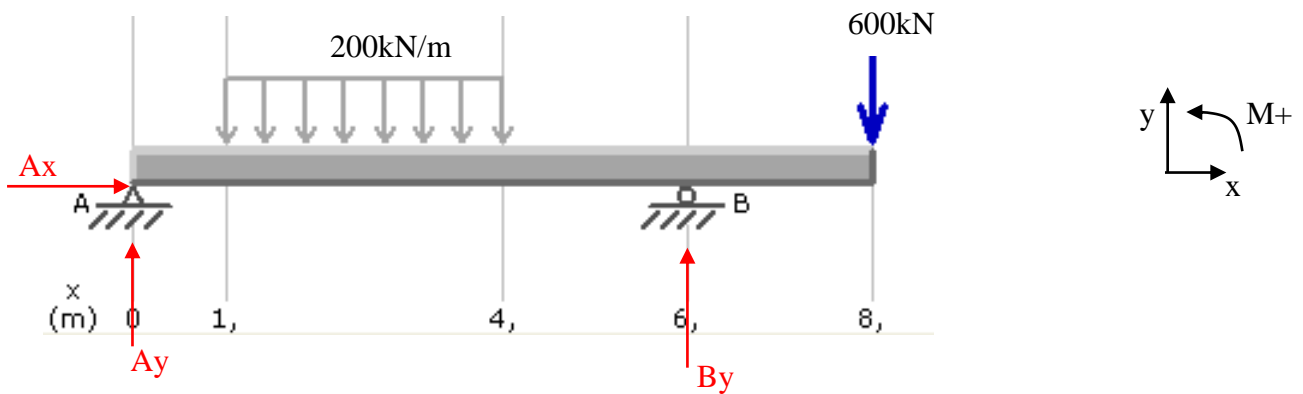
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x + 2\cos 30 = 0 \\ A_y + B_y - 2\sin 30 = 0 \\ -2\sin 30 \times 3 + 5B_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x = -1.732\text{kN} \\ A_y = 0.4\text{kN} \\ B_y = 0.6\text{kN} \end{cases}$$

A1.2.



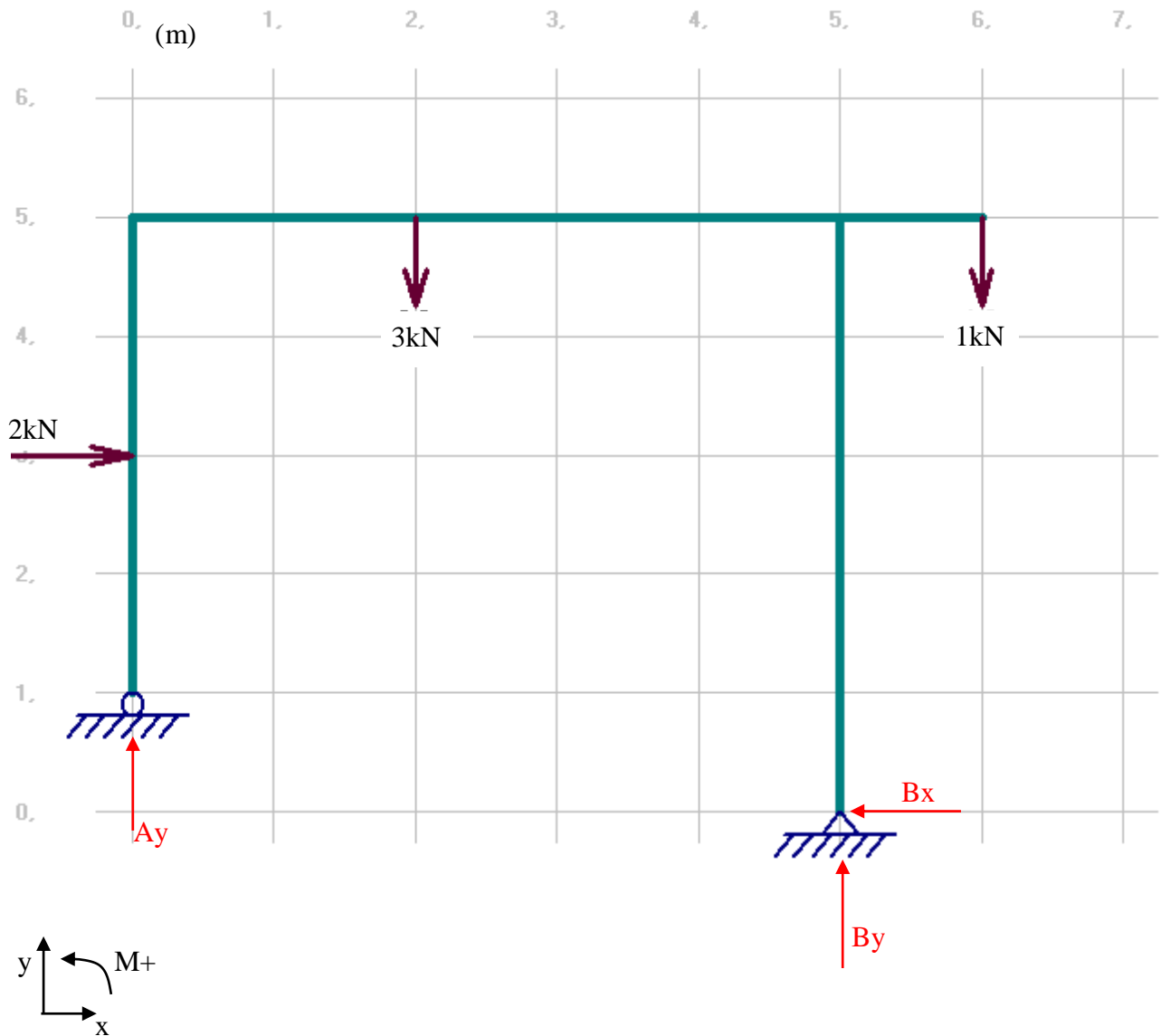
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y + B_y = 0 \\ -100 + 4B_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = -25\text{kN} \\ B_y = 25\text{kN} \end{cases}$$

A1.3.



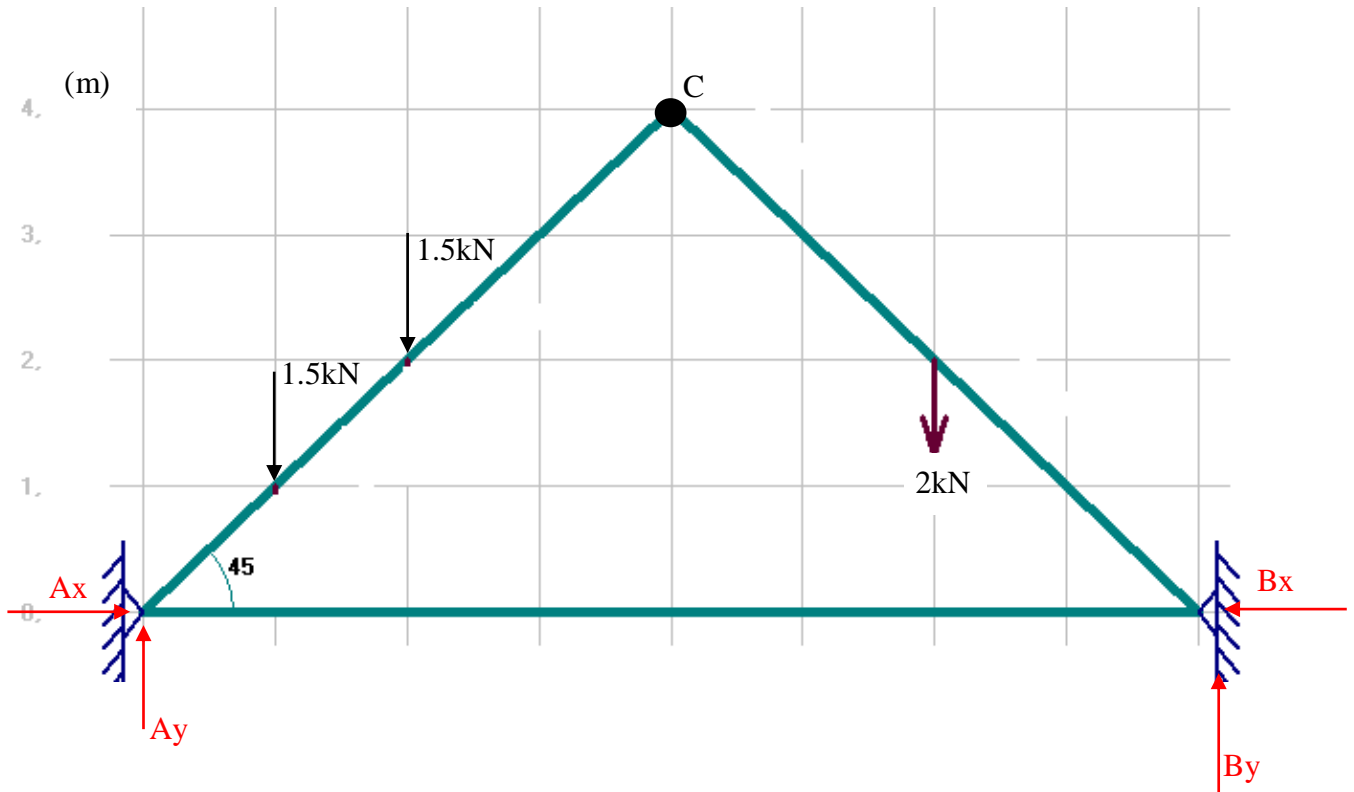
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y + B_y - 600 - 200 \times 3 = 0 \\ -200 \times 3 \times 2.5 - 600 \times 8 + 6B_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = 150\text{kN} \\ B_y = 1050\text{kN} \end{cases}$$

A1.4.



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - A_x = 0 \\ A_y + B_y - 3 - 1 = 0 \\ -2 \times 3 + 3 \times 3 - 1 \times 1 - 5A_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x = 0 \\ B_y = 0.4kN \\ A_y = 3.6kN \end{cases}$$

A1.5.



A rótula no ponto C não transmite momentos. Por esse motivo, as equações de equilíbrio dos momentos são escritas de forma independente à esquerda e à direita da rótula:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{C, dta.} = 0 \\ \sum M_{C, esq.} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_x - B_x = 0 \\ A_y + B_y - 1.5 - 1.5 - 2 = 0 \\ -2 \times 2 + 4B_y - 4B_x = 0 \\ 1.5 \times 2 + 1.5 \times 3 - 4A_y + 4A_x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_x = 1.0623kN \\ A_y = 2.9375kN \\ B_x = 1.0625kN \\ B_y = 2.0625kN \end{array} \right.$$

Anexo B: FormulárioCapítulo 1

Tensões e alongamento

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\delta = \sum \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

Deformações

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_i}$$

Lei de Hooke

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

Capítulo 2

$$P = 2\pi f M_t$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{M\rho_{m\acute{a}x}}{I_p}$$

Tubos de espessura reduzida:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{M_t}{2A_0e},$$

Secção rectangular maciça:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{M_t}{c_1hb^2},$$

h/b	c ₁	c ₂
1,0	0,208	0,1406
1,2	0,219	0,1661
1,5	0,231	0,1958
2,0	0,246	0,229
2,5	0,258	0,249
3,0	0,267	0,263
4,0	0,282	0,281
5,0	0,291	0,291
10,0	0,312	0,312
∞	0,333	0,333

$$\varphi = \sum \frac{M_i L_i}{G_i I_{P,i}}$$

Capítulo 3

$$T = -\int w dx$$

$$M = \int T dx$$

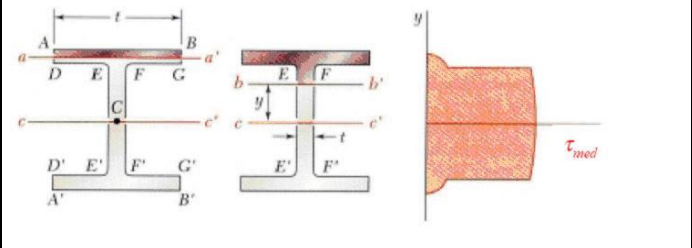
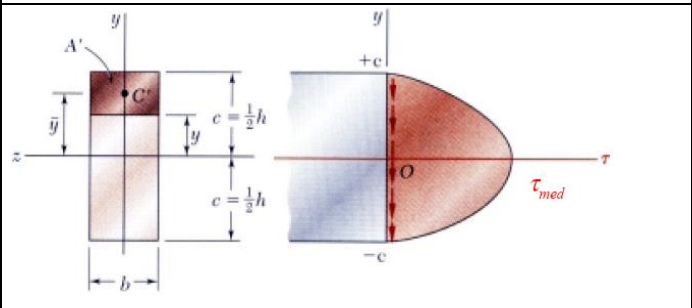
$$\sigma_x = \frac{M_f \times z}{I_y}$$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_f}{W}$$

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

$$\tau_{m\acute{e}d} = \frac{VQ}{It}; Q = \int y dA$$

Tensões de corte devido a esforço transversal

Secção e distribuição	Tensões de corte
	$\tau_{m\acute{e}d} = \frac{VQ}{It}; \tau_{m\acute{a}x} = \frac{V}{A_w}$
	$\tau_{m\acute{e}d} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{3V}{2A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right)$ $\tau_{m\acute{a}x} = \frac{3V}{2A}$

Capítulo 4

$$\sigma_{2}^1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Reservatórios sob pressão:

Tensão longitudinal $\sigma_x = \frac{\operatorname{Pr}}{2t}$

Tensão circunferencial $\sigma_y = \frac{\operatorname{Pr}}{t}$

Von-Mises: $\frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} \leq \sigma_{adm}$

Tresca: $(\sigma_1 - \sigma_3) \leq \sigma_{adm}$

Tensão principal máxima $\sigma_1 \leq \sigma_{adm}$

Capítulo 5

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$EI \frac{1}{\rho} = EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x)$$

$$EI \theta \approx EI \frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x) dx + C_1$$

$$EI y = \int_0^x dx \int_0^x M(x) dx + C_1 x + C_2$$

Condições fronteira:

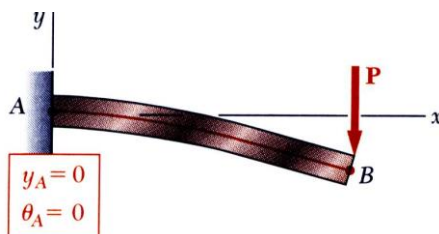
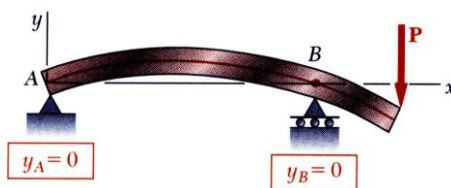
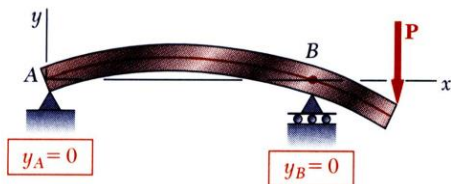
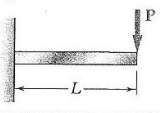
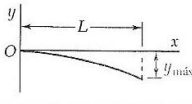
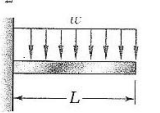
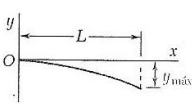
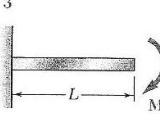
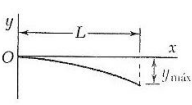
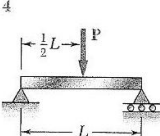
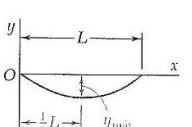
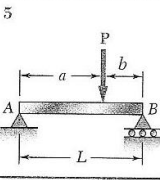
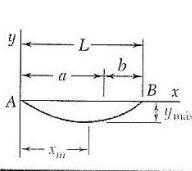
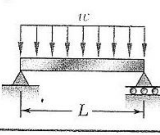
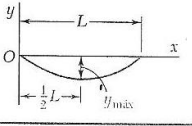
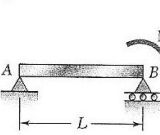
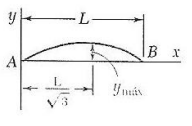


Tabela com casos de carregamento mais comuns:

Viga e Carregamento	Linha Elástica	Flecha Máxima	Inclinação e Extremidade	Equação da Linha Elástica
		$-\frac{PL^3}{3EI}$	$-\frac{PL^2}{2EI}$	$y = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$
		$-\frac{wL^4}{8EI}$	$-\frac{wL^3}{6EI}$	$y = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$
		$-\frac{ML^2}{2EI}$	$-\frac{ML}{EI}$	$y = -\frac{M}{2EI}x^2$
		$-\frac{PL^3}{48EI}$	$\pm \frac{PL^2}{16EI}$	Para $x \leq \frac{1}{2}L$: $y = \frac{P}{48EI}(4x^3 - 3L^2x)$
		Para $a > b$: $-\frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIL}$ à $x_m = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$	$\theta_A = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6EIL}$ $\theta_B = +\frac{Pa(L^2 - a^2)}{6EIL}$	Para $x < a$: $y = \frac{Pb}{6EIL}[x^3 - (L^2 - b^2)x]$ Para $x = a$: $y = -\frac{Pa^2b^2}{3EIL}$
		$-\frac{5wL^4}{384EI}$	$\pm \frac{wL^3}{24EI}$	$y = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$
		$\frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$	$\theta_A = +\frac{ML}{6EI}$ $\theta_B = -\frac{ML}{3EI}$	$y = -\frac{M}{6EIL}(x^3 - L^2x)$