

Sistema *Passarola* – geração automática de exercícios

Irene Brito ‡
José João Almeida†
Gaspar J. Machado‡
Rui M. S. Pereira‡
Gueorgui Smirnov‡
Isabel Araújo‡
Nuno Carvalho*

‡ Departamento de Matemática e Aplicações, Universidade do Minho

ireneb@math.uminho.pt
gjm@math.uminho.pt
rmp@math.uminho.pt
smirnov@math.uminho.pt
isaraujo@iol.pt

† Departamento de Informática, Universidade do Minho

jj@di.uminho.pt

*Universidade das Nações Unidas (UNU-EGOV)

ramos.de.carvalho@unu.edu

Resumo

O sistema *Passarola* é um sistema de geração automática de exercícios que foi desenvolvido na Universidade do Minho para apoiar o ensino, a aprendizagem e a auto-aprendizagem no ensino superior. O sistema *Passarola* permite a geração de exercícios de várias áreas de ensino, como por exemplo Matemática, Física, Música, Geografia, e com respostas que vão além dos tipos simples como escolha múltipla ou soluções verdadeiro/falso. É possível obter respostas com vários passos de transformação e etapas de resolução. Para a compreensão de certos conceitos, por exemplo da área da Matemática, é importante a geração de exercícios com gráficos dinâmicos. Estes podem ser construídos na *Passarola* com os programas TikZ, LaTeX e Maxima. Neste trabalho apresentam-se exemplos de exercícios de diferentes áreas da Matemática de nível universitário introdutório, que foram implementados no sistema *Passarola* e que podem ser utilizados para criar fichas de aprendizagem e auto-avaliação, testes e exames.

Palavras-Chave: *Passarola*, geração de exercícios, Matemática.

1 Contextualização

Nos últimos anos, o paradigma de ensino mudou gradualmente. O ensino mais tradicional baseado numa abordagem essencialmente expositiva teve que se adaptar a novas

realidades. A mudança mais sensível apareceu com a reformulação dos cursos imposta por Bolonha e com o desenvolvimento das tecnologias de informação. No primeiro caso, o número de horas de contacto com os alunos diminuiu significativamente, o que impôs aos estudantes o estudo próprio e desenvolvimento de competências de autorregulação. Os docentes tiveram que mudar a forma de ensinar e desenvolver conteúdos que ajudassem os alunos na sua tarefa de estudar. A introdução de tecnologias de informação numa forma sistemática nas unidades curriculares foi uma das respostas dadas. Neste sentido, surgiram propostas de sistemas de geração de exercícios e sistemas de *e-learning* em universidades portuguesas, que já tiveram uma ampla utilização; por exemplo o MegUA na Universidade de Aveiro, que é um pacote de Software para Sage Mathematics que permite a construção de exercícios parametrizados e respetiva resolução [2012],[2014a], ou o sistema desenvolvido na Universidade do Porto [2003], vocacionados ao ensino de Matemática a nível universitário. Fora do contexto universitário, foi desenvolvido o projeto *hypatiamat* [2018], que pretende ajudar alunos do ensino básico a autorregular a sua aprendizagem da Matemática, por via da utilização corrente das TIC na sala de aula.

No ensino da Matemática nos cursos de engenharia da Universidade do Minho, uma primeira resposta foi o desenvolvimento de uma base de dados de exercícios desenvolvidos para a plataforma Maple TA. Os exercícios foram concebidos usando parâmetros aleatórios os quais são sorteados a cada vez que é pedido um exercício de determinado tipo e ao mesmo tempo a solução ao exercício tinha em conta o parâmetro sorteado. A referida plataforma permitia gerar fichas com vários destes exercícios (de vários tipos e, dentro de cada tipo, “todos” diferentes via os referidos parâmetros), às quais os alunos podiam responder *online* e obter o imediato *feedback* [2010c]. A experiência teve sucesso junto dos alunos, embora nunca se tivesse podido avançar com avaliações feitas *online*, nomeadamente por falta de salas onde se pudessem ter muitos alunos a fazer as provas. Outra razão que levou a que a experiência esteja agora em “*stand by*”, foi os custos inerentes à renovação das licenças de utilização do Maple TA. Surgiu então uma nova ideia: desenvolver uma plataforma de *e-learning* própria que permitisse colmatar algumas das lacunas referidas anteriormente. Um conjunto de docentes do Departamento de Informática e do Departamento de Matemática desenvolveram o sistema *Passarola* [2013a] [2013b] o qual, devidamente explorado, consegue gerar um conjunto de problemas das mais variadas áreas do conhecimento (Matemática, Física, Música, Linguística,...) - sendo neste sentido mais versátil e flexível do que outros sistemas apresentados anteriormente - e ao mesmo tempo dar a sua solução/resolução. Este novo sistema já foi usado em várias unidades curriculares da área da Matemática para gerar fichas e exames.

A estrutura do presente artigo é a seguinte: na secção 2 descreve-se o sistema *Passarola*; na secção 3 apresentam-se dois exemplos de exercícios de nível universitário de áreas da Matemática, que foram implementados no sistema *Passarola*; o artigo termina com as conclusões, perspetivas futuras e referências bibliográficas.

2 O sistema *Passarola*

O sistema *Passarola* é uma ferramenta tecnológica que foi desenvolvido para apoio nas práticas pedagógicas em qualquer área e nível de ensino.

O principal objetivo do sistema *Passarola* é a geração automática de exercícios com várias versões (enunciado, solução e resolução), permitindo a elaboração de fichas de exercícios e de avaliação de uma maneira simples e rápida.

Na construção dos exercícios é necessário desenvolver estratégias para obter exercícios bem postos e com o grau de dificuldade adaptado ao objetivo de aprendizagem. Os exercícios têm que ser elaborados de modo a poder controlar os problemas que podem surgir na geração e que estão geralmente associados à aleatorização de parâmetros.

Os exercícios são criados numa linguagem de domínio específico (DSL) associada ao sistema *Passarola*, que permite a implementação de qualquer algoritmo e a resolução passo a passo de exercícios.

O sistema *Passarola* permite:

- a seleção aleatória de listas calculadas de forma estática ou dinâmica;
- a seleção associada (de elementos de duas ou mais listas);
- utilizar LaTeX para elaborar os documentos (exercícios, fichas, testes) permitindo a criação de estilos próprios;
- utilizar elementos calculados como instâncias para descrever transformações e fórmulas mais complexa, para simplificar os exercícios, resoluções e resultados;
- utilizar outras ferramentas e linguagens externas (TikZ, abcm2ps...);
- escrever funções auxiliares em Maxima e Perl;
- usar o sistema localmente ou como aplicação web;
- utilizar outros objetos como tabelas para a elaboração dos exercícios;
- distribuição usando uma licença aberta.

A estratégia de geração de exercícios baseia-se no seguinte processo. No geral, a resolução de um exercício pode ser, esquematicamente, representada como aplicação sucessiva de “operadores” A_k ao “vetor” de dados x_k para deduzir o próximo vetor de dados $x_{k+1} = A_{k+1}x_k$. Deste modo, o esquema de resolução de um exercício pode ser representado assim:

$$x_0 \rightarrow x_1 = A_1x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_{k+1} = A_{k+1}x_k \rightarrow \dots \rightarrow x_n = A_nx_{n-1}.$$

Se o operador A_k é “invertível”, podemos reconstruir x_{k-1} a partir de x_k . Normalmente, a geração de um exercício começa num passo intermédio x_k . Indo para a esquerda geramos o exercício e indo para a direita obtemos a solução:

$$x_0 \leftarrow x_1 = A_1x_0 \leftarrow \dots \leftarrow x_{k+1} = A_{k+1}x_k \rightarrow \dots \rightarrow x_n = A_nx_{n-1}.$$

Neste processo, o caminho para o enunciado/resolução é uma sequência fixa de operadores. A variação é obtida apenas pelo sorteio do vetor intermédio. Na sua atividade científica os investigadores raramente resolvem um problema já formulado, consistindo o trabalho de investigação na procura de um enunciado. A elaboração de esquemas de geração de exercícios é muito parecida com o trabalho de dia-a-dia de todos os cientistas, o que relaciona diretamente o processo de geração de exercícios com o essencial da ciência.

O sistema *Passarola* foi amplamente usado por docentes em unidades curriculares como Álgebra Linear, Análise Matemática e Complementos de Análise Matemática, para gerar fichas de exercícios, testes e exames com diferentes versões de enunciados (todos diferentes para cada aluno) e também para obter de uma forma automática e estruturada as resoluções (ou soluções) e grelhas de correção. Este sistema tem por exemplo a vantagem de ser possível integrar na geração dos exercícios gráficos dinâmicos construídos em TikZ. A seguir são apresentados dois exemplos de exercícios que foram gerados no sistema *Passarola* para apoio nas unidades curriculares de Análise Matemática e Álgebra Linear.

3 Exemplos

Exemplo 1: Análise Matemática

Suponha que se pretende gerar várias versões do seguinte exercício, em que o objetivo é determinar analiticamente e graficamente o domínio de uma função de duas variáveis reais:

Enunciado: Determine e represente graficamente o domínio da função $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 8y + x^2 + 6x + 9}}$.

Resolução: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + 8y + x^2 + 6x + 9 > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+3)^2 + (y+4)^2 > 16\}$.

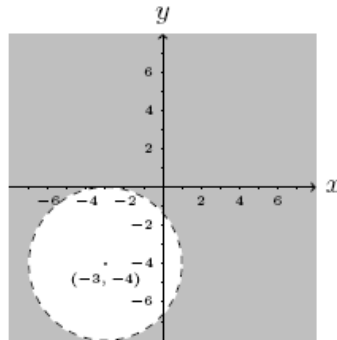


Figura 1: Representação gráfica de D_f .

Para gerar exercícios com o mesmo grau de dificuldade, pretende-se ter nos enunciados diferentes funções cujos domínios dependem, neste exemplo, sempre de uma circunferência em que é necessário determinar o centro e o raio e perceber se se trata da região interior ou exterior da circunferência, em que a circunferência pode ou não estar incluída. Assim, estabelece-se que o domínio da função f deve ser $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : C(x,y) S 0\}$, onde $C(x,y) = -a^2 + (x+b)^2 + (y+c)^2$, $S \in \{\geq, \leq, >, <, \neq\}$ e $a \in \{1,2,3,4\}$, $b, c \in \pm\{1,2,3,4\}$ são os parâmetros que vão ser sorteados. A expressão $C(x,y)$ pode ser reescrita da forma $D = D(x,y) = x^2 + 2bx + y^2 + 2cy - a^2 + b^2 + c^2$ e esta expressão é usada no enunciado para exigir do estudante uma etapa de resolução adicional – a determinação do centro e raio da circunferência através da redução da expressão à forma canônica. Por fim, define-se uma lista F_1 com possíveis funções para f (ver linhas 5-6 do código na Figura 2) e a cada elemento desta lista é associado o símbolo correspondente da lista S , usando o operador de associação: $F_1 \sim S$, tal que D_f é o domínio correto de f . Por exemplo, se f é selecionado como sendo \sqrt{z} , então $F_1 \sim S$ implica que S é \leq . Na Figura 2 são apresentadas as listas de parâmetros, funções e símbolos definidos no sistema *Passarola*; a função “ratsimp” do Maxima é usada para simplificar expressões.

```

1 #let:
2 n a = [1,2,3,4];
3 n b = [-4,-3,-2,-1,1,2,3,4];
4 n c = [-4,-3,-2,-1,1,2,3,4];
5 f F1 = [sqrt(z),sqrt(-z),log(z),log(-z),
6         1/z,1/sqrt(z),1/sqrt(-z)];
7 s S = [\geq, \leq, >, <, \neq, >, <];
8 f D0 = [ #a^2-(x+#b)^2-(y+#c)^2];
9 f D1 = ratsimp(#D0);
10 f d = ratsimp(-#b);
11 f e = ratsimp(-#c);
12 f aux1 = [F(z) := #F1];
13 f G = ratsimp(F(#D1));

```

Figura 2: Código para definir parâmetros, funções e símbolos.

Para criar o gráfico dinâmico que acompanha a resolução deste exercício (ver exemplo na Figura 1), define-se uma lista $[fig1, \dots, fig7]$, que contém sete gráficos construídos em TikZ com os domínios correspondentes aos pares selecionados $(\sqrt{z}, \geq), \dots$, e estabelece-se ainda a correspondência $s \sim fig$, onde fig é a figura selecionada da lista anterior. Para que os domínios variem com as funções correspondentes, são usados os parâmetros que foram sorteados nas linhas 1-3 da secção #let (ver código da *Passarola* na Figura 2), por

exemplo através da instrução: “\draw[style=dashed,color=black] (#d,#e) circle (#a);”. Mais detalhes sobre a programação deste exercício podem ser consultados em [2013b]. Note que, tendo em conta os números de parâmetros e funções, é possível gerar $4 \times 8^2 \times 7 = 1672$ exercícios distintos.

Exemplo 2: Álgebra Linear

Suponha que se pretende gerar várias versões do seguinte exercício, em que o objetivo é aplicar o Método de Gauss para a resolução de sistemas lineares:

Enunciado: Resolva através do Método de Gauss o sistema linear $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 9$, $-6x_1 - 8x_2 - 5x_3 = -18$ e $6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 14$.

Resolução:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 9 \\ -6 & -8 & -5 & -18 \\ 6 & 4 & 5 & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ l_2 \leftarrow l_2 - (-2)l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - (2)l_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ l_3 \leftarrow l_3 - (1)l_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

A solução do exercício, usando agora o método de substituição de trás para a frente, é

$$x_3 = \frac{-4}{-2} = 2, \quad x_2 = \frac{0-1 \times 2}{-2} = 1, \quad x_1 = \frac{9-3 \times 1-3 \times 2}{3} = 0.$$

Para gerar mais uma vez exercícios com o mesmo grau de dificuldade, tem que se prefixar algumas das suas características. No presente caso, pretendem-se sistemas possíveis e determinados com 3 equações e 3 incógnitas. Assim, gerar os elementos da matriz dos coeficientes e do vetor dos termos independentes não é a melhor solução uma vez que garantir que o sistema é possível e determinado seria muito difícil. Ao contrário, se se gerar os 12 elementos a negrito não só se garante que todos os sistemas são possíveis e determinados como, no caso dos valores sorteados serem inteiros (e diferentes de zero para os multiplicadores e os elementos da diagonal da matriz na forma em escada), todos os valores na resolução serão inteiros (os valores não sorteados não necessitam da operação divisão).

Na Figura 3 apresenta-se o código *Passarola* relativo à geração aleatória dentro dos conjuntos especificados dos 12 elementos chave e na Figura 4 o código *Passarola* relativo à determinação dos restantes elementos necessários à resolução do exercício.

```

1 #let
2 n x1 = [-3,-2,-1,0,1,2,3];
3 n x2 = [-3,-2,-1,0,1,2,3];
4 n x3 = [-3,-2,-1,0,1,2,3];
5 m21 = [-2,-1,1,2];
6 m31 = [-2,-1,1,2];
7 m32 = [-2,-1,1,2];
8 n a11 = [-3,-2,-1,1,2,3];
9 n a22 = [-3,-2,-1,1,2,3];
10 n a33 = [-3,-2,-1,1,2,3];
11 n a12 = [-3,-2,-1,1,2,3];
12 n a13 = [-3,-2,-1,1,2,3];
13 n a23 = [-3,-2,-1,1,2,3];

```

Figura 3: Código para a geração dos 12 elementos chave.

```

1 #let
2 n a21 = #m21 * #a11;
3 n a31 = #m31 * #a11;
4 n a32p = #m32 * #a22p;
5 n a22 = #a22p + #m21 * #a12;
6 n a23 = #a23p + #m21 * #a13;
7 n a33p = #a33pp + #m32 * #a23p;
8 n a33 = #a33p + #m31 * #a13;
9 n a32 = #a32p + #m31 * #a12;
10 n b1 = #a11 * #x1 + #a12 * #x2 + #a13 * #x3;
11 n b2 = #a21 * #x1 + #a22 * #x2 + #a23 * #x3;
12 n b3 = #a31 * #x1 + #a32 * #x2 + #a33 * #x3;
13 n b2p = #b2 - #m21 * #b1;
14 n b3p = #b3 - #m31 * #b1;
15 n b3pp = #b3p - #m32 * #b2p;

```

Figura 4: Código para a geração dos restantes elementos a partir dos 12 elementos previamente sorteados.

4 Conclusões

O sistema de geração de exercícios *Passarola* é um sistema muito útil e relevante para as práticas pedagógicas de docentes em qualquer área e nível de ensino, sobretudo para produzir material didático e para investigar a construção de exercícios não só do ponto de vista tecnológico, mas também do ponto de vista pedagógico. Pois, por um lado, este sistema permite gerar exercícios de várias áreas de ensino, mas por outro lado, também perceber as estratégias que devem ser usadas para construir exercícios bem postos e controlar os problemas que podem surgir com a aleatorização introduzida para obter várias versões de um exercício.

O sistema *Passarola* possibilita a construção de uma grande variedade de exercícios através de modelos LaTeX recorrendo também a programas relacionados, como TikZ para a construção de gráficos, Maxima para o cálculo matemático ou ABC para a notação musical e a utilização de códigos de linguagem (por exemplo Perl e Maxima) com módulos e funções específicas.

No futuro pretende-se desenvolver a avaliação e correção automática no sistema *Passarola*. Já foram construídos processos verificadores que funcionam para certos tipos de respostas.

5 Referências

- Almeida, J.J., Araújo, I., Brito, I., Carvalho, N., Machado, G.J., Pereira, R.M.S. e Smirnov, G. (2013a) PASSAROLA: High-Order Exercise Generation System, in CISTI'2013 - 8.^a Conferência Ibérica de Sistemas e Tecnologias de Informação, 763-767.
- Almeida, J.J., Araújo, I., Brito, I., Carvalho, N., Machado, G.J., Pereira, R.M.S. e Smirnov, G. (2013b) Math exercise generation and smart assessment, in TICAMES 2013 - First Workshop on Information and Communication Technology in Higher Education: Learning Mathematics, 1013 - 1018.
- Cruz, P., Oliveira, P., Seabra, D. (2012) Exercise templates with Sage, Tbilisi Math. J., 37-44.
- Pereira, R.M.S., Brito, I., Machado, G.J., Malheiro, T., Vaz, E., Flores, M., Figueiredo, J. e Jesus, A., (2010c) New e-learning objects for the Mathematics courses from Engineering degrees: Design and Implementation of Question Banks in Maple T.A. using LaTeX, International Journal of Education and Information Technologies, 7-14.
- Projeto Hypatiamat, (2018), disponível em <https://www.hypatiamat.com/>.
- Tomás, A.P., Leal, J.P. (2003) A CPL-based tool for Computer aided generation and solving of Maths exercises, in Dhal, V. & Wadler, P. (eds.), PADL 2003, Springer Verlag, Lecture Notes in Computer Science 2562, 223-240.