# José Anastácio da Cunha

## O TEMPO, AS IDEIAS, A OBRA...

# José Anastácio da Cunha

## O Tempo, as Ideias, a Obra...

ARQUIVO DISTRITAL DE BRAGA/UNIVERSIDADE DO MINHO
CENTRO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO MINHO
CENTRO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

**BRAGA • 2006**

# ESTUDOS
## DOS
# INÉDITOS ANASTACIANOS

# Um estudo sobre o manuscrito *"Principios de Geometria tirados dos de Euclides Prologo"* de José Anastácio da Cunha

António Leal Duarte *
Maria Fernanda Estrada **
Maria Elfrida Ralha **
Maria do Céu Silva ***

## • Introdução

O manuscrito intitulado "PRINCIPIOS DE GEOMETRIA TIRADOS DOS DE EUCLIDES" é uma cópia não autógrafa de um texto matemático cuja autoria atribuímos indiscutivelmente ao matemático setecentista JOSÉ ANASTÁCIO DA CUNHA. Assim, no estudo que apresentamos, consideramos que o texto é do próprio José Anastácio da Cunha e não do copista anónimo a quem devemos, agora, a oportunidade de o conhecer.

Este manuscrito tem um subtítulo – *Prologo* – e não possui, nas doze páginas que o constituem, qualquer outra divisão/secção onde o nosso autor, que amiúde se dirige a um "leitor judicioso", indique uma intenção diferente da que nos sugere esse subtítulo, isto é, um preâmbulo que se apresenta antes de uma obra a qual, no presente caso, não chega afinal a suceder ao prólogo porquanto não surge, de forma física, no seu desfecho.

Embora tratando-se de um prólogo, este texto não é menos completo nem menos esclarecedor do propósito do seu autor; nomeadamente nas explicações que apresenta, nas ideias que explora e nas indicações que oferece; é isso que tentaremos, ao longo do presente estudo, justificar. Por outro lado, este manuscrito está claramente relacionado com os livros "geométricos" dos *Principios Mathematicos* [1] e estaria, na nossa opinião, destinado a preceder exactamente esses textos.

Uma primeira observação do manuscrito permite-nos registar a ausência de figuras, nomeadamente as referentes à demonstração do

* Universidade de Coimbra e CMUC/FCT.
** Universidade do Minho e CMAT/FCT.
*** Universidade do Porto e CMUP/FCT.

[1] José Anastácio da Cunha [1790/1987].

resultado descrito na página onze, bem como a ausência da descrição das notas que, nas margens ao longo do manuscrito, vão referenciando as afirmações do autor (por exemplo *v.n.A*). É possível que estes elementos estivessem numa última página – a exemplo do que era comum nos textos da época – agora desaparecida do manuscrito. No entanto, e apesar de ausentes neste *Prologo*, as referidas figuras foram identificadas na famosa edição dos *Elementos* de David Gregory [2] – obra bilingue (em latim e grego) que está profusamente referida ao longo do texto e que se conhece como "a edição de Oxford" – e algumas das notas não referenciadas foram também identificadas em textos a cujo conteúdo o nosso autor se estava, na altura, a referir.

Este manuscrito – ao contrário do que acontece com outros manuscritos presentes no conjunto dos inéditos agora encontrados – não está datado. No entanto, o teor de algumas afirmações – por exemplo, na página um, *olhando para as minhas forças... todo o tempo ténues* – leva-nos a conjecturar que Anastácio da Cunha escreveu este texto numa fase tardia e penosa da sua (curta) vida, muito provavelmente depois de ter sido preso pela Inquisição (finais de 1778). Por outro lado, uma afirmação da página cinco – *na definição que proponho, altero a significação* – sem que no manuscrito surja, de facto, expressa uma definição alternativa, fez-nos pensar na possibilidade dessa definição ser a que está presente nos seus *Principios Mathematicos*. Depois, na página nove, uma outra frase – *e tal hé o do livro primeiro desta obra* – e o estudo subjacente que desenvolvemos permitem-nos concluir que a data do presente prólogo é posterior à escrita de, pelo menos, a primeira parte dos *Principios Mathematicos*, porquanto essa é a obra que claramente identificamos como sendo a referência E (*v.n.E*) dessa página do manuscrito. A ser assim, e a exemplo do que é comum a outros autores, Anastácio da Cunha terá redigido este prólogo para uns "Princípios de Geometria" após ter escrito os ditos *Principios*.

No manuscrito, *Principios de Geometria tirados dos de Euclides*, distinguem-se, por entre uma pretensa desordem nos conteúdos, algumas características – até agora menos conhecidas – da personalidade do matemático/professor José Anastácio da Cunha.

Através do estudo deste *Prologo*:

Percebem-se, finalmente, as escolhas do mestre (Anastácio da Cunha):

> *o modo de destruir o castello encantado onde a Metaphysica tem a geometria ha tantos seculos captiva (...) autoridades não são demonstrações...*

---

[2] David Gregory [1703].

Mais à frente,

> *Hé pois propriamente a geometria, na opinião de Sir Isaac huma parte da physica e, na verdade, não sei que outra couza possa ser porque enfim, na agrimensura, architectura, geographia, astronomia, navegação, machinaria, etc., medem-se corpos naturaes e não phantasmas philosophicos...*

Ou, ainda

> *esta definição, que geralmente se admitte sem difficuldade, devia logo à primeira vista ser rejeitada por illusoria...*;

e também em

> *por isso, na definição que proponho, altero a significação do termo vulgar.*

Percebem-se também os objectivos da obra em frases como:

> *Hé justo, hé necessario que nas definições não haja escuridades...*

ou

> *reconhecem a futilidade daquelles axiomas...*

ou ainda em

> *Tem trabalhado por demonstrar, mas nunca por via da experiencia e, por isso em vão.*

Compreendem-se as influências (filosóficas e matemáticas), quando o nosso autor declara:

> *apesar de ter em Euclides tão seguro arrimo e o melhor guia...*

ou, à frente,

> *que eu me deixe vencer do desvanecimento de ter Sir Isaac Newton da minha parte...*

e, ainda,

> *o mesmo succede ao ilustre Abbade de Condillac, o mesmo ao philosopho da Escócia*[3]*, o mesmo etc., etc., etc., "Talem intelligo philosophiam naturalem", diz o grande Bacon, "quae non abeat infumos calculationum subtilium aut sublimium, sed quae eficaciter operatur ad sublevanda vitae humanae incommoda"*[4].

---

[3] Acreditamos que, nesta passagem, José Anastácio da Cunha pode estar a referir-se ao filósofo David Hume (1711-1776), seu contemporâneo, e que na sua filosofia empirista foi, particularmente, um crítico incansável da metafísica. Outra hipótese poderá ser a referência a John Locke (1632-1704) que, juntamente com Hume e com George Berkeley, se classifica entre os "Empiristas Britânicos".

[4] Francis Bacon [1662, Lib II, Cap II]. Francis Bacon viveu entre 1561 e 1626 e a tradução desta citação latina deixa transparecer a importância da utilidade nas coisas que fazemos; é a seguinte: "entendo a filosofia natural como sendo a que não põe de parte os mais ínfimos cálculos subtis ou sublimes mas (também) a que opera eficazmente para suavizar os incómodos da vida humana".

Reconhecem-se as dificuldades dos conceitos matemáticos, quer no ensino quer na aprendizagem,

> *Empreza mais ardua do que podem conjecturar os que não conhecem as Mathematicas senão superficialmente, empreza em que os maiores geometras reconhecem grandes difficuldades...;*

ou, mais adiante,

> *Não prosseguirei a resenha das illusões gramaticaes e ficções poeticas que tão confusa e perplexa fazem a Mathematica...*

e ainda

> *Não sei porem o que responderão os modernos Elementistas a quem lhes perguntar com que titulo está a geometria gozando de tão singular preeminência depois de falsificados por huns autores e abolidos por outros, aquelles antigos titulos.*

Condenam-se as más práticas didácticas e apontam-se os erros, mesmo os dos geómetras mais conceituados

> *Não há principiante que, logo a primeira vista, não rejeite como absurdas, ou pelo menos incomprehensiveis as vulgares definições de ponto, linha e superficie; e ainda que a destreza, e principalmente a autoridade dos Mestres, auxiliados pela ordinária e quasi cega docilidade dos mesmos discipulos, costumam vencer sem grande difficuldade esta repugnância. Contudo nem a sojeição de huns me parece sincera nem, por consequência, ligitimo o triunpho dos outros...*

e, também

> *Outra semilhante equivocação motivada por algumas phrases dos livros quinto e sexto de Euclides produzio as falsas entidades a que chamam razões de grandezas ou que as grandezas tem humas para as outras...*

Para mais adiante dizer, por exemplo, que

> *Do quase universal sequito e maligno influxo de tão falsa logica se queixa tambem elegantemente M. de Saverien, no seu discurso das Mathematicas...*

Apesar dos erros identificados, Anastácio da Cunha não deixa de exprimir uma compreensão extrema para com os seus autores, quando afirma

> *E não se attribuão estas palavras a arrogância; pois nem há homem grande sem descuidos, nem engenho mediocre a quem não seja facil conhecer.*

Manifestam-se a simplicidade e a moderação do autor mas, ao mesmo tempo, a segurança nas ideias que, convictamente, defende

> *não posso presumir que ponho na presença do leitor douto senão huma mera tentativa...*

e, à frente,

> *falta de generalidade nas definições também tem sido causa de notáveis embaraços e erros e de estarem ainda por demonstrar várias relevantes theoricas. Por exemplo: todos, seguindo a Euclides, (...) mas para se adoptarem hé necessário primeiramente rejeitar a imperfeita definição que os contradiz...*

Em suma, este manuscrito reflecte claramente a inquietação de Anastácio da Cunha no que respeita à necessidade de aperfeiçoamento do ensino da matemática (da geometria, em particular). Nele são bem patentes as preocupações pedagógicas, que admiravelmente, e "apesar das agruras da (sua) vida", ainda mantém e que se manifestam, por exemplo, nos termos em que o nosso autor se dirige ao leitor do seu trabalho

> *O lector judisioso não ignora que na indagação da exposição da verdade hé indifferente o tom e material forma das palavras, contanto que estas reprezentam, sem equivocação e com facilidade, ideias claras, certas e sufficientes.*

Na verdade, e contrariamente a muitos dos textos matemáticos da época, Anastácio da Cunha defende como alicerces do saber geométrico o rigor e a concisão, mas também a clareza, a certeza e a compreensão que faz apoiar na experiência e na observação. Logo na primeira página do manuscrito, afirma que

> *Por estas rezões me pareceu que huns Elementos de Geometria não metaphysica, imaginária, chimerica mas toda verdadeira e natural, demonstrados à maneira antiga, isentos de superfluidades, completos e ao mesmo tempo brevissimos, poderiam ser aceites...*

E, se dúvidas houvesse, neste manuscrito demonstra-se também a vastíssima erudição de Anastácio da Cunha: excelente, no que respeita aos clássicos gregos e latinos (através das referências e das citações perfeitamente enquadradas); profundo, no que toca aos ideais dos grandes pensadores ingleses e franceses, mesmo seus contemporâneos; exímio, relativamente às reflexões matemáticas/geométricas que faz atravessar no tempo e nos autores.

- **A distribuição dos temas no manuscrito**

Referimo-nos, anteriormente, a uma sequência "desordenada" dos temas abordados neste manuscrito. De facto, o modo como este texto se nos apresenta contrasta enormemente com a organização a que Anastácio da Cunha nos habituou nos seus *Principios Mathematicos*. Todavia, essa impressão de desordem foi-se dissipando à medida que, aprofundando o estudo, fomos compreendendo as linhas de raciocínio que o nosso autor traçou e, finalmente, aceitámos que a sua (des)organização fora intencional.

O plano desenhado por Anastácio da Cunha neste manuscrito afigura-se como: uma introdução epistemológica sobre a geometria, seguida de uma análise dos *Elementos* de Euclides, no que respeita às definições/explicações (ponto, linha, plano, ângulo) e de uma crítica aos axiomas para, finalmente, abordar as demonstrações, onde retoma a crítica às definições que nelas intervêm (seguindo, neste caso, o modelo de Hobbes)[5].

Recorde-se que *os Elementos* de Euclides sofreram, ao longo dos séculos, as intervenções de inúmeros editores que, frequentemente alteraram, acrescentaram e/ou eliminaram definições, axiomas, proposições e demonstrações. Sendo impossível saber qual o texto efectivamente escrito por Euclides, J. L. Heiberg (1854-1928) procedeu, em finais do século XIX (1883-1916) a uma edição crítica (em grego e latim) do *corpus euclidiano* que, apesar de algumas críticas, continua a ser considerada definitiva[6]. As autorizadas e imprescindíveis (pelos abundantes comentários) edições dos *Elementos* de Heath[7] e de Vitrac[8] são traduções do texto de Heiberg. Não é todavia possível determinar a que edições dos *Elementos* terá o nosso autor tido acesso – nomeadamente se aquelas que indicamos na bibliografia – uma vez que, com excepção da versão de Gregory muitas outras tiveram inúmeras edições e traduções. Sabemos que José Anastácio da Cunha conhecia, pelo menos, as versões dos *Elementos* de Clávio[9], Gregory[10], Tacquet[11] e Simson[12] (referidas explicitamente neste manuscrito) e a de Dechales-Ozanam[13].

Antes da reorganização que fizemos dos temas tratados por Anastácio da Cunha no manuscrito em análise, e que, mais adiante, exploraremos, pareceu-nos importante resumir e comentar a sucessão dos temas, bem como indicar as referências bibliográficas que completam a disposição ordenada pelo nosso autor.

O início – O título *Principios de Geometria tirados dos de Euclides* surge-nos, sem dúvida, como esclarecedor: "Princípios" porquanto funda-

---

[5] Thomas Hobbes [1966, p.190 e seguintes].

[6] Jolin Murdoch [1991].

[7] Thomas L. Heath [1956].

[8] Bernard Vitrac [1990], [1994], [1998] e [2001].

[9] Christophro Clavius [1589].

[10] David Gregory [1703].

[11] P. André Tacquet [1753].

[12] Roberto Simson [1756].

[13] Claude Dechales & Jacques Ozanam [1753], conforme referido em José Anastácio da Cunha [1990, p. 386].

mentos, alicerces ou pontos de partida. De resto a importância da compreensão dos princípios é também reiterada pelo Abade de Condillac, referido pelo próprio Anastácio da Cunha, que registava, na sua Lógica (primeiros desenvolvimentos na arte de pensar)[14], a seguinte afirmação: "Todo o homem que pode adquirir os primeiros conhecimentos está apto para alcançar todos os demais". Logo a seguir sobressai, neste *Prologo*, uma citação em grego – perfeitamente identificada: *Eucl. Ap. Procl.*, isto é, Euclides, segundo Proclo e que vem mostrar que o nosso autor também conhecia Proclo[15] e os seus comentários ao primeiro livro dos *Elementos* – escolhida como registo temático para o próprio texto: "não há caminho real para a geometria".

A ordenação – Logo na primeira página vemos justificada a decisão, de Anastácio da Cunha, para a escrita de *uns Elementos de Geometria*.

De resto, a oportunidade para se retomarem determinadas questões geométricas vamo-la entendendo ao longo de todo o texto, quer nas afirmações referentes à novidade da abordagem (na sequência do recém estreado cálculo infinitesimal) para a geometria, quer na crítica, muitas vezes explícita, aos maus textos de geometria – que, na opinião de Anastácio da Cunha, inundavam o mercado – quer ainda na forma criativa e inovadora com que decide apresentar alternativas para algumas das questões (por exemplo, sobre determinadas definições e sobre algumas demonstrações dos resultados geométricos) que, para muitos dos matemáticos seus contemporâneos, estavam, já, encerradas.

Nas segunda e terceira páginas do manuscrito registamos, de entre diversas justificações para o seu ideal filosófico de uma geometria prática e útil, uma longuíssima citação (em latim) pertencente ao prefácio da "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" de Newton[16] (de quem Anastácio da Cunha diz estar do seu lado e se não priva de elogiar):

> *(...) e me não possa abster de transcrever aqui as palavras do admiravel philosopho e geometra a quem os melhores Mestres e os mais calificados para se declararem seus competidores chamam Mestre.*

---

[14] Abbade de Condillac [1801]. O filósofo francês Étienne Bonnot de Condillac viveu entre 1715 e 1780 e a sua obra sobre Lógica foi publicada em 1776.

[15] Paul Ver Eecke [1948]. Esta frase é, na nossa opinião, uma escolha propositada e serve como um aviso para que o leitor possa estar preparado para possíveis dificuldades que virá a sentir no assunto.

[16] Isaac Newton [1966]. A respeito da longa citação (em latim, pp. 2 e 3, no manuscrito) do prefácio da obra de Newton temos razões para acreditar que Anastácio da Cunha teria usado uma edição latina dos "Principia" de Newton, comentada pelos padres Leseur e Jacquier. Estas razões prendem-se com a referência que vimos feita, num outro manuscrito pertencente ao conjunto de inéditos que agora apresentamos, aos padres matemáticos Thomas Leseur (1703-1770/1777) e François Jacquier (1711-1788). Notamos ainda que Leseur e Jacquier são, tal como Condillac anteriormente referido, também contemporâneos de Anastácio da Cunha.

Depois, na página quatro, Anastácio da Cunha, reflectindo epistemologicamente, oferece-nos verdadeiras lições da arte de ensinar, continuando a referenciar autores que suportam também o seu pensamento (como Euclides, Bacon, "o filósofo da Escócia", etc.). Registamos aqui, pela primeira vez no manuscrito, a alusão a determinados conceitos geométricos (definições) e às críticas que o nosso autor faz; por exemplo:

sobre "distância/linha recta", afirma que

> *Com a palavra distancia não sei denotar senão a linha physica isto hé, natural...*

e sobre "ângulo" diz, nesta altura, que

> *Quasi todos, seguindo a Euclides, definem que angulo hé a inclinação de duas linhas* * [17]*. (...) a palavra* *inclinação* *não he menos confusa e vaga, nem mais familiar que a palavra angulo.*

Para, na página cinco, se debruçar sobre "razão/proporção", notando que

> *(...) cercou de precipícios e trevas a doutrina das proporções e até foi causa de um dos melhores geómetras do século passado cuidar que tinha quadrado o círculo* * [18].

A seguir, nas páginas seis, sete e oito do manuscrito, Anastácio da Cunha introduz, com profusos exemplos sobre bons e maus modelos, a problemática das demonstrações matemáticas nos seguintes termos:

> *De cem annos a esta parte tem sido a ma dialectica ainda mais fatal para as mathematicas do que o foram dantes a ma grammatica e a ma metaphysica.*

Retoma depois o assunto das definições com o conceito de "tangencia" defendendo que

> *Na praxe os bem sabidos theoremas algebraicos e fluxionarios emmendam este defeito (...).*

Registamos, ao longo deste trecho do manuscrito, abundantes referências bibliográficas; para além das já referidas, encontramos também: Montucla (com Bernard Lami e Dominique Rivard), Saverien, d'Alembert, o Abade Sauri, os Padres Mako e Beck, e até citações de Virgílio e de Horácio.

---

[17] Neste preciso ponto do manuscrito surge a primeira chamada de Anastácio da Cunha, a saber, **v.n.A*. Pensamos poder referir-se a uma das edições dos *Elementos* de Euclides que o autor cita ao longo do texto: ou a de Tacquet (imaginamos que possa ser a edição latina) ou, mais provavelmente, a de David Gregory (edição bilingue em latim e grego).

[18] Desta vez a nota, na margem do manuscrito, diz claramente "*O P. Gregório de S. Vicente*".

Nas páginas nove, dez e onze, vemos ser relembrado o aviso introdutório sobre a ausência de um caminho real para a geometria, agora em jeito de uma interessante directiva pedagógica:

> *De semelhantes deffeitos não apontarei, por ora, mais exemplos. Não são raros nem será difícil ao leitor judiciozo, o descobri-los. Digo leitor judiciozo porque o maior numero, tambem no estudo da geometria, gosta mais de exercitar a memoria e a imaginação do que o discurso e, com tal parcialidade protegemos e fomentamos o ocio deste, que quasi sempre cuidamos que discorremos quando somente imaginamos.*

Anotamos ainda, na parte em que o nosso autor se refere aos axiomas, uma pista que se mostrou determinante para a nossa conjectura de que Anastácio da Cunha redigiu este manuscrito após, pelo menos, a redacção do primeiro livro dos *Principios Mathematicos* e se destinava a antecedê-lo enquanto proémio:

> *Axiomas (...) tal é o do livro primeiro desta obra* *[19].

O nosso matemático pondera ainda a natureza do "famoso" axioma das paralelas, tema que, mais tarde, o seu discípulo João Manoel d'Abreu[20] retomaria com grandes louvores ao seu mestre. Finalmente, recupera, com o objectivo de as emendar, *algumas defeituozas demonstrações de Euclides*.

A estas considerações, segue-se uma discussão interessantíssima a respeito do ângulo cornicular (de contingência) ao qual Anastácio da Cunha – seguramente conhecedor das inúmeras discussões sobre este conceito – se dirige nos seguintes termos

> *Emfim os geometras sabem quanto se tem guerreado por causa do desaventurado Κερατώδης*[21]

O final – Na última página deste manuscrito, a doze, vêm ao de cima a modéstia e a moderação do nosso autor quando, em jeito didáctico de encerramento do seu trabalho, afirma que:

> *Quem sober fazer apreço do magisterio de Euclides, quem conhecer a sagacidade e exacção de Simson, quem não ignorar quanto he mais rara, do que vulgo cuida, a certeza geometrica nos mesmos livros de mathematica, por causa de descuidos semelhantes aos que contemplamos e de que não estão exemptos os escriptos dos melhores geometras, não se admirerá de ver errar, não se julgará privilegiado.*

---

[19] Esta nota de margem, que no manuscrito surge como **v.n.E*, refere-se claramente ao livro primeiro dos *Principios Mathematicos* de Anastácio da Cunha onde, como é fácil confirmar, o autor apenas regista um único (daí o artigo definido "o" usado) axioma: o das paralelas.

[20] João Manoel d'Abreu [1809].

[21] Thomas L. Heath [1956, Vol. 1, p. 178]. Esta palavra grega significa "cornicular".

E conclui o manuscrito com um desejo – que, ao mesmo tempo, não deixa de ser uma crítica ao panorama matemático que conhece na sua época – de que se cultivem *as Sciencias exactas mais seria e mais sinceramente do que se costuma*.

Vamos, de seguida, analisar as críticas apresentadas por Anastácio da Cunha neste manuscrito, no que respeita às definições, aos axiomas e às proposições.

- **As Definições**

Os *Elementos* de Euclides abrem com uma lista de definições: 23 na edição de J. L. Heiberg[22]. Aliás, quase todos os Livros dos *Elementos* se iniciam com algumas definições respeitantes ao respectivo conteúdo. Algumas destas definições não são, de facto, definições no sentido moderno do termo, mas apenas *explicações*[23], não desempenhando, aliás, qualquer papel nas subsequentes demonstrações; estão neste caso, por exemplo, as definições de *ponto, linha, segmento de recta, superfície.* Sendo explicações, desde sempre se prestaram aos mais diversos tipos de críticas e comentários[24] e também Anastácio da Cunha, nos *Principios Mathematicos,* altera de forma significativa algumas das definições dadas nos *Elementos.*

Agora, neste *Prologo*, podemos encontrar não só a razão para as opções tomadas mas também uma crítica às definições euclidianas. Embora reconhecendo que *Autoridades não são demonstrações* começa o nosso autor por fazer uma longa citação de Newton na qual podemos, por exemplo, ler

> *Na verdade, as descrições, não só das linhas rectas, mas também dos círculos, nas quais se funda a geometria pertencem à mecânica... Funda-se, portanto, a geometria na praxis mecânica e não é outra coisa que aquela parte da mecânica universal que propõe e demonstra a arte de medir rigorosamente.*

Está dado o mote: a geometria é parte da mecânica e *medem-se corpos naturais*. Assim os objectos da geometria terão de provir e ser fornecidos pela experiência. Este é um tema caro ao nosso autor que também o usa nos *Principios Mathematicos*[25], aceitando certos resultados (por vezes

---

[22] Nos *Elementos* de Euclides, as edições mais antigas costumam registar um maior número de definições. Assim no Livro I, encontramos por exemplo 36 em Clávio e Tacquet, 35 em Gregory e Simson.

[23] Benno Artmann [1999, p. 18].

[24] Vejam-se, por exemplo, os textos de Heath e de Vitrac, *ob. cit.*, sobre as várias definições nos *Elementos*.

[25] José Anastácio da Cunha [1790/1987].

tomando-os como axiomas) cujas demonstrações eram então bastante imprecisas (e nem de outro modo poderia ser na falta de uma fundamentação rigorosa da teoria dos números reais); estão neste caso[26], as regras operatórias com números negativos e positivos e com expressões algébricas (no Capítulo VIII), os números complexos (p. 125), o Teorema de Bolzano dos Valores Intermédios (pp. 247 e 248) ou o Teorema Fundamental da Álgebra (p. 255).

O tema e o papel da experiência é também retomado no *Ensaio sobre os Principios da Mechanica*[27]. Existem, aliás, várias semelhanças entre o texto do presente *Prologo* e os primeiros parágrafos daquele *Ensaio*: por um lado a mesma crítica ao recurso, em demonstrações, a argumentos do tipo "il est evident, il est visible; il est palpable, etc."[28] os quais, no *Prologo* em estudo, surgem em pequenos excertos das demonstrações; por outro lado, a mesma crítica aos

> *entes de razão, meras formas substanciaes. Aristotelicas, quaes seriam no sentido de quase todos os autores o ponto, a linha,...*

Segue-se uma lista de conceitos que vão da geometria à mecânica, passando pelo cálculo diferencial.

A lista de *objectos imaginários, meros entes de razão* que encontramos no *Ensaio* é bastante mais curta: "velocidade, movimento, força". Neste manuscrito estes termos seriam, para o nosso autor,

> *descrições de phenomenos abreviações de frazes, de discursos às vezes intricados e athe impraticáveis*

e, como declara no *Ensaio*, "não têm objecto real"[29].

Segue-se a crítica às definições euclidianas de ponto, linha e superfície, consideradas, pelo nosso autor, como *absurdas ou pelo menos incomprehensiveis*.

No caso da linha, por exemplo, não seria admissível considerar a noção de distância[30], como exemplo de um "comprimento sem largura"[31]

---

[26] Veja-se, sobre este assunto, por exemplo Enrico Giusti [1990] ou João Filipe Queiró [1988], [1994].

[27] José Anastácio da Cunha [1807/1990].

[28] José Anastácio da Cunha [1807/1990, p. 339].

[29] Não nos foi difícil verificar que estas ideias estão muito próximas das de Bacon: Francis Bacon [1847, prefácio].

[30] Esta noção de "distância" como comprimento sem largura aparece, por exemplo, em Dechales-Ozanam [1753, p. 3].

[31] Em Euclides *"ponto é o que não tem partes"* (livro I, def 1) enquanto *"linha é um comprimento sem largura"* (livro I, def 2) e *"superficie é o que tem apenas comprimento e largura"* (livro I, def. 4). Vejam-se Thomas L. Heath [1956] e Bernard Vitrac [1990].

uma vez que a mesma ideia de distância está, segundo o nosso autor, ligada à

> *linha physica... ou quantos corpos chamados braças palmos pollegadas, &c. cabem entre dois objectos.*

Estas seriam também as ideias entre outros do Abade de Condillac[32] e do Filósofo da Escócia (porventura David Hume)[33]. Esta é uma posição oposta àquela que Clávio[34] apresenta na sua Introdução aos *Elementos* de Euclides:

> "As disciplinas matemáticas tratam de coisas que se consideram independentemente de toda matéria sensível se bem que estejam na realidade imersas na matéria"[35].

Nos seus *Principios Mathematicos* o nosso autor afasta-se, pois, das definições euclidianas de ponto, linha e superfície (bem como de linha recta); é a seguinte a sua definição de ponto:

> "O corpo, cujo comprimento he tal, que de se naõ attender a elle naõ resulta erro notavel chama-se ponto"[36].

De forma análoga são dadas as definições de linha ("corpo em que somente ao comprimento se não pode deixar de atender sem erro notável") e de superfície ("corpo em que só a grossura se pode deixar de atender sem erro notável").

Giusti[37] faz uma análise cuidada deste tipo de definições (e de outras semelhantes como a definição de série convergente) filiando-as nas concepções filosóficas do autor, concepções que Giusti denomina de "consensualistas". Ainda de acordo com Giusti, as definições de ponto,

---

[32] Étienne Bonnot de Condillac [1746, p. 48]. Nesta obra, Condillac discute as noções de ponto, linha e superfície baseando-as na experiência sensível (p. 165 e seguintes): a partir da ideia de corpo sólido (tridimensional) considerando uma das suas extremidades (abstraindo de uma das dimensões. a profundidade) obteríamos a noção de superfície; tomando uma superfície e abstraindo uma das suas dimensões obtemos a noção de linha e finalmente considerando a extremidade de uma linha sem atender ao respectivo comprimento teremos a noção de ponto. As definições de Condillac estão assim próxima das de Euclides apenas revertendo a ordem: em primeiro lugar e com base sensorial o *sólido*, e depois por sucessivas abstracções as definições de *superfície*, *linha* e *ponto*. Como veremos a abordagem de Anastácio da Cunha será diferente.

[33] David Hume [1739/40, Book I, Part II]. Em "The ideas of space and time" discute-se a natureza do ponto, da linha e da superfície criticando-se as abstracções matemáticas destes conceitos; para Hume o ponto seria indivisível mas dotado de extensão.

[34] Christophoro Clavius [1589].

[35] Sabinne Rommevaux [2005, p. 23].

[36] José Anastácio da Cunha [1790/1987, p. 1, Def. 1].

[37] Enrico Giusti [1990].

linha e superfície dadas pelo nosso autor estão próximas das dadas por, nomeadamente, Hobbes[38] ou Dechales; de notar que, no *Prologo* em estudo, Anastácio da Cunha refere-se a Hobbes mas não explicitamente a propósito da noção de ponto. Quanto a Claude François Millet Dechales[39] o nosso autor afirma[40] que (nas aulas dadas em Coimbra)

> "se restava algum tempo, ensinava o uso de algumas proposições pelo estylo de Dechales e Ozanam"

Para além do ponto de vista filosófico podemos também considerar estas definições mais claras sob o ponto de vista pedagógico embora, por outro lado, levantem outro tipo de questões:

– Qual a natureza da verdade matemática: exacta ou apenas aproximada?

– O erro notável não poderá depender do problema em questão?

– O que significa, por exemplo, dizer que três rectas passam pelo mesmo ponto?

Esta é, aliás, uma das críticas feitas por Playfair[41] louvando, no entanto, Anastácio da Cunha por apresentar o *ponto* como um corpo, indicando assim o *género*, isto é, o universo a que um ponto pertenceria (ao contrário da definição euclidiana) e acabando por concordar que, como corpo, terá de ter *grandeza*. Reconhecendo a justeza da definição Anastaciana e o seu valor pedagógico Playfair afirma, todavia, que "this way of treating the subject is less correct than that of Euclid". A este tipo de críticas responde, de uma forma que nos parece notável, Anastácio Joaquim Rodrigues[42] que interpreta as ideias do seu mestre em termos modernos:

> "pois que nesta indeterminação [o sem erro notável] das três dimensoens do ponto das duas da linha e da grossura da superficie, he que consiste a exacção destas definiçoens; E com effeito se as verdades demonstradas o são para qualquer destas dimensoens, que se queiraõ considerar, ficam demonstradas sem limite, e por isso não haverá termo assignanavel, entre os resultados verdadeiros, e os resultados da approximacção. Ficaõ assim as consequências geometricas no caso das series convergentes..."

---

[38] Thomas Hobbes [1966].

[39] Matemático e jesuíta francês (1621/1678), autor de uma edição dos *Elementos* de Euclides (1660) muito popular durante a segunda metade do séc. XVII e no séc. XVIII, sucessivamente revista por J. Ozanam e J. Audierne. Numa edição desta obra de 1743 (Paris, chez Jombert) a definição de ponto, linha e superfície são as de Euclides; no entanto numa tradução inglesa de 1704, a seguir às definições usuais encontramos um comentário semelhante ao indicado por Enrico Giusti [1990].

[40] José Anastácio da Cunha [1990, p. 386].

[41] John Playfair [1812/1990].

[42] Anastácio Joaquim Rodrigues [1813/1990].

Quer Rodrigues quer Abreu[43] referem estas novas definições como uma das inovações do seu mestre mas no texto de Rodrigues de 1811 encontramos um pormenor um pouco surpreendente:

> "Soutenant avec M. de Alembert que les definitions ordinaires de point, ligne et de surface, laissent beaucoup à desirer et jugeant avec Newton que la géometrie n'est que une partie de la physique expérimentale..."

D'Alembert critica esses tipos de definições nas *Mélanges de Litterature, d'Histoire e de Philosophie*[44] com posições muito próximas das de Anastácio da Cunha (sabemos que o nosso autor tinha grande consideração por d'Alembert)[45]. No entanto, Anastácio da Cunha no *Prologo* em estudo, nunca refere d' Alembert em apoio das suas ideias apenas o citando a propósito da profusão de compêndios.

A definição de (segmento) de recta, que neste *Prologo* quase não é referida, é também alterada por Anastácio da Cunha; a definição de Euclides (Def. I, 4) é, de facto, quase incompreensível:

> "Linha recta é aquella, que está posta egualmente entre as suas extremidades"[46].

Nos *Principios Mathematicos* encontramos a seguinte definição (Def. IV, Livro I):

> "Aquellas linhas, das quais naõ pode haver duas, que deixem entre si espaço, quando tem dois seus pontos communs chamaõ-se Linhas rectas"[47].

Notemos que com esta definição uma das lacunas que à frente é apontada na demonstração da Proposição I.4 dos *Elementos* fica resolvida.

Outra das definições largamente criticadas neste *Prologo* é a de ângulo, "une des plus complexes de la géométrie élémentaire", segundo Vitrac[48]. É a seguinte a definição de ângulo (Def. I, 8) dada por Euclides[49]:

> "Ângulo plano é a inclinação mútua de duas linhas de um plano que se encontram e que não estão numa mesma linha recta".

---

[43] João Manuel d' Abreu [1813].

[44] Jean Rond d'Alembert [1965, p. 105 e seguintes].

[45] Veja-se Enrico Giusti [1990] e as referências aí indicadas.

[46] Na tradução de Angelo Brunelli da edição de Simson; vejam-se também Thomas L. Heath [1956] e Bernard Vitrac [1990]; o significado da frase parece ser que a direcção da linha se mantém constante. Como o nosso autor dirá a mais à frente com ironia (p. 10) *"linha direita é a que é direita"*.

[47] José Anastácio da Cunha [1790/1987, p. 1]. Nesta definição parece estar implícita uma ideia de igualdade (congruência) de segmentos (independentemente da posição) e a possibilidade de os deslocar, ou melhor, sem o que a definição não faz sentido.

[48] Bernard Vitrac [1990, p. 159].

[49] Thomas L. Heath [1956, Vol. 1, p. 165 e seguintes] ou Bernard Vitrac [1990, Vol. 1, p. 154 e seguintes].

Esta definição é criticada pelo nosso autor em vários aspectos: desde logo porque a

> *a palavra inclinação não he menos confusa e vaga; nem mais familiar que a palavra angulo*

em seguida, sob o ponto de vista gramatical

> *tomavam hum verbal* [inclinadas] *por nome appelativo, hum phenomeno por uma substancia;*

e finalmente porque

> *nesta phrase... não vem designada grandeza alguma fora das duas indeterminadas linhas, e entravam a somar partir e a medir em vão.*

Esta questão da definição de ângulo e da sua natureza tem sido debatida [50] desde os tempos dos Gregos, nomeadamente a questão da categoria aristotélica a que a noção de ângulo pertenceria: "quantidade", "qualidade" ou "relação"; para Proclo, por exemplo, pertenceria às três categorias. O problema complica-se com a consideração dos chamados ângulos mistos formados por uma curva e por uma recta, nomeadamente pela tangente à curva (o chamado ângulo cornicular a que mais adiante faremos referência) e a comparação da grandeza deste ângulo com os ângulos rectilíneos. De acordo com o nosso autor

> *alguns abriram os olhos e lançando fora o simulacro metaphisico puseram em seu lugar o sector ou arco de círculo* [51].

No entanto, na opinião de Anastácio da Cunha, não havia ainda compêndios onde a teoria dos ângulos tivesse sido feita a partir daquela definição;

> *por isso na definição que proponho altero a significação do termo vulgar.*

Aqui obviamente está a referir-se aos *Principios Mathematicos* onde ângulo é definido como "a figura, que duas linhas formam concorrendo em um ponto". E logo a seguir afirma

---

[50] Veja-se, por exemplo, Thomas L. Heath [1956, p. 176 e seguintes] ou Bernard Vitrac [1990, p. 159 e seguintes].

[51] Com este *"alguns"* o nosso autor deverá estar a referir-se a d'Alembert (Jean Le Rond d'Alembert [1965, p. 220 e seguintes; p. 317 e seguintes]), a Hobbes (Thomas Hobbes [1966, p. 194 e seguintes]) ou talvez também Leonard Euler [1748/96, 1987, p. 92]. A mesma definição aparece já no artigo *angle* da *Encyclopédie*, em Jêrome Lalande [1784, 1987] (cuja primeira edição termina em 1772). Não sabemos no entanto se Anastácio da Cunha conheceu esta obra.

"angulos rectilineos [isto he angulos cujos lados saõ linhas rectas] nomeados como grandezas iguais, ou desiguais, denotaõ arcos, que os lados cortaõ em circulos descriptos com raios iguaes, e com os centros nos vertices: e pois os lados de cada angulo ficaõ desta sorte cortando mais de hum arco entenda-se sempre o menor arco, que as circunstancias consentirem" [52].

Com esta definição fica, por um lado, resolvida a questão da comparação entre os ângulos curvilíneos e os ângulos de contingência e, por outro lado, dispõe o nosso autor de um *critério* que lhe permite comparar ângulos; note-se que esta é precisamente uma das lacunas apontadas a Euclides: se no axioma 4 declara que "todos os ângulos rectos são iguais" como comparar outro tipo de ângulos? Por sobreposição? Mas então porque não usar também a sobreposição para o caso dos ângulos rectos [53]. Esta questão põe-se, pela primeira vez, na demonstração da proposição I.4 dos *Elementos* (o chamado critério lado-ângulo-lado de igualdade de triângulos); é talvez por isso que João M. de Abreu [54] se refere aquela proposição como sendo a "que ninguém tinha demonstrado antes de J. A. por falta de definições exactas".

Mais à frente, Anastácio da Cunha, referindo os erros que a falta de generalidade das definições provoca nas demonstrações, critica a definição de linhas tangentes como aquelas que concorrem sem se cortarem: a ser assim muitas curvas não admitiriam tangentes! Embora o nosso autor não o refira, esta passagem parece justificar a definição alternativa que apresenta nos *Principios Mathematicos* (Def. III do Livro II ) e que Giusti [55] considera arcaica uma vez que esses temas eram já tratados na época com o recurso às noções do Cálculo Diferencial. No presente manuscrito, o nosso autor parece responder à crítica que Giusti lhe faz, quando adopta a posição de apresentar uma definição puramente geométrica à qual poderiam, em seguida, aplicar-se as regras do Cálculo; diz assim

*Na praxe os bem sabidos theoremas algebraicos e fluxionarios emmendam este defeito; mas para se adoptarem hé necessario rejeitar a imprefeita definição que os contradiz.*

Notemos que bastante mais à frente nos *Principios Mathematicos* (Def. VIII do Livro XVI) é que se apresenta a definição de "quantidade de um ângulo curvilíneo" como sendo o ângulo entre as tangentes às curvas no vértice do ângulo.

---

[52] José Anastácio da Cunha [1790/1987, pp. 1-2, Def. VIII e IX]. A Def. VIII está bastante perto da moderna definição, veja-se David Hilbert [2002, p. 10].

[53] Bernard Vitrac [1990, p. 293 e seguintes].

[54] João Manoel d'Abreu [1813/1990].

[55] Enrico Giusti [1990, p. 40].

O livro V dos *Elementos* de Euclides, sobre a teoria da proporcionalidade, está entre os mais difíceis e foi (é!) o mais comentado[56]. É por isso natural que Anastácio da Cunha também se refira longamente à questão das proporções e tenha sentido a necessidade de alterar a abordagem euclidiana. Começa por criticar *as falsas entidades a que chamam de razões de grandezas* e em especial a definição 3 do Livro V:

> "A razão entre duas grandezas é um respeito recíproco de uma para outra, enquanto uma é maior, ou menor ou igual a ela"[57].

Desde sempre, é este tema "do respeito" ou da "espécie de relação" que, de facto, nada define, o centro de grandes debates; definição metafísica mais do que matemática a considera Barrow[58]. E, como diz Anastácio da Cunha, neste manuscrito

> *os Authores forcejam em vão: Hé hum habito; Hé uma habitude; Hé um respeito; Hé um relativo modo de ser; Hé hum modo de conter e ser contido; &c.*

Na senda de Simson o nosso Autor considera esta definição 3 apócrifa[59] uma vez que, salvo nesta definição,

> *nunca a palavra rezão he nome de algúa grandeza, mas meramente parte de alguma phrase.*

Refere ainda o nosso autor, a propósito dos problemas que a noção de razão levanta, a pretensa quadratura do círculo por Gregoire de Saint-Vincent, cujo erro (detectado por Huygens) está numa manipulação defeituosa de razões e proporções[60]. Mais à frente, nas páginas oito e nove, retoma Anastácio da Cunha o tema da proporcionalidade criticando, em primeiro lugar, o facto de, por vezes, serem dadas definições de proporcionalidade entre quatro grandezas que, pretendendo evitar a teoria dos equimúltiplos de Euclides, acabam por só ser válidas quando os dois

---

[56] Thomas L. Heath [1956, Vol. I, pp. 112-186]; Bernard Vitrac [1990, Vol. 2, pp. 35-141]; Ivor Grattan-Guinness [1996]; Sabinne Rommevaux [2005], José António Teixeira [1865].

[57] Roberto Simson [1768]. Em Thomas L. Heath [1956, Vol. 2, p. 114], lemos também: "A ratio is a sort of relation in respect of size between two magnitudes of the same kind".

[58] Thomas L. Heath [1956, Vol. 2, p. 117].

[59] Não foi esta no entanto a opinião de Heiberg, na fixação do *corpus euclidiano*, nem foi a opinião de Heath que defende também a sua autenticidade com base, entre outros argumentos, em que esta definição aparece em todos os manuscritos conhecidos (Thomas L. Heath [1956, Vol. 2, p. 114]).

[60] Jean-Étienne Montucla [1754/1986]. A demonstração é, nesta obra, analisada e pensamos poder ser esta a fonte de Anastácio da Cunha sobre esta questão. Consultar também J. E. Hofman [1991].

primeiros termos da proporção são, entre si, comensuráveis[61]. Atendendo à dificuldade sentida com os equimúltiplos, diz, depois, o nosso autor

> *também eu me desvio de Euclides, e anteponho à sua definição a que o P. Tacquet propoz.*

E no Livro III dos *Principios* encontramos o tratamento da teoria da proporcionalidade de acordo com as linhas aqui apresentadas neste *Prologo*.

Depois de definir *múltiplo* e *submúltiplo* ( Def. I, p. 20) apresenta as definições de antecedente e consequente (Def. II, p. 20)

> "Quando se averigua, ou pondéra quantas vezes cabe em huma grandeza alguma submultiplice de outra grandeza, chama-se a esta consequente; e áquella antecendente".

Usando a notação algébrica podemos traduzir esta definição da seguinte forma:

Dadas as grandezas $A$ e $B$ diremos que $A$ é antecedente e que $B$ é consequente quando se averigua quais os números naturais $m$ e $n$ tais que $m\frac{B}{n} < A$.

Assim, em vez de se referir a *razões*, Anastácio da Cunha refere-se apenas a antecedentes e consequentes. Note-se que Tacquet mantém a definição de "razão" tal como Euclides.

Vem a seguir a definição de *Proporcionalidade*

> "Se humas antecedentes e suas consequentes forem tais, que em nenhuma antecedente possa caber submultiplice algum da sua consequente mais vezes que em qualquer cabe hum igualmente multiplice da sua consequente; chamar-se haõ estas antecedentes e consequentes proporcionais".

Em Tacquet[62] encontramos a seguinte definição:

> "Duas razões de A para B; C para D, são *Semelhantes*, *Iguaes* e as *Mesmas*; quando o antecedente da primeira A contem, ou he conteudo do mesmo modo no seu consequente B; como o antecedente da segunda C contem, ou he conteudo do mesmo modo no seu consequente C [sic]".[63]

---

[61] Veja-se Claude Dechales & Jacques Ozanam [1750]; no entanto, na edição inglesa de se Claude Dechales [1705, p. 211] encontramos a teoria euclidiana dos equimultíplices bem como uma teoria semelhante à de Anastácio da Cunha; veja-se também José António Teixeira [1865, p. 33].

[62] P.e André Tacquet [1753, p. 122 ].

[63] Obviamente deveria estar D em vez de C.

Não é claro o significado de "contem" ou "he conteudo do mesmo modo". No entanto, a seguir à definição surge uma nota explicando o sentido destas expressões[64] e noutras edições que consultámos; esta explicação não surge em P. André Taquet [1728, p. 122]; de acordo com o sentido da referida explicação, o "conter" é usado como sendo o número de vezes que em A cabe um submúltiplo de B; sendo por isso a definição de Anastácio da Cunha idêntica à de Tacquet. Embora, como já dissemos anteriormente, a definição do nosso autor nos pareça muito mais próxima da dada por Dechales[65].

Traduzamos esta definição em termos algébricos:

Dadas as grandezas $A, B, C, D$ diremos que os antecendentes e consequentes são proporcionais se, para quaisquer naturais $m$ e $n$, sempre que $m\frac{B}{n} < A$. também $m\frac{B}{n} < A$. É claro que esta definição é equivalente à definição euclidiana com equimúltiplos (Livro V, Def. 5)[66], facto aliás que o nosso autor demonstra (obviamente numa forma geométrica) numa das Proposições VI e VII do seu Livro III, usando depois nas demonstrações das proposições seguintes a teoria dos equimúltiplos. Notemos também que o chamado axioma de Eudoxo-Arquimedes que nos *Elementos* surge sob a forma de uma definição (Livro V, Def. 4) aparece nos *Principios Mathematicos* como Axioma (Livro III, Axioma 1). São também estas as definições usadas por João Manoel d'Abreu[67].

Sob um ponto de vista pedagógico esta definição de proporcionalidade parece-nos mais simples do que a de Euclides. Por outro lado, se interpretarmos a definição euclidiana em termos modernos de cortes de Dedekind[68], um real é definido como sendo um "corte" $(X, Y)$, onde $X$ e $Y$ são intervalos, não vazios e complementares de racionais, sendo $X$ inferiormente limitado. A igualdade entre dois reais, isto é entre dois "cortes" $(X, Y)$ e $(U, W)$ define-se forma óbvia: $(X, Y) = (U, W)$ se e só se $X = U$ e $Y = W$ (esta última igualdade decorre obviamente da primeira por complementaridade). A definição de proporcionalidade de Tacquet e de Anastácio da Cunha equivale em termos de cortes de Dedekind a tomar como "corte" apenas os intervalos $X$ (como faz Rudin) e a definir igualdade entre reais como a igualdade entre os conjuntos $X$ e $U$. A definição de Tacquet-Cunha é, assim, mais "económica", sob o ponto de vista lógico, do que a definição euclidiana. A esta economia, aliás, já se referiu em termos elogiosos John Playfair[69].

---

[64] P. André Tacquet [1753, p. 111].

[65] Claude Dechales [1704, p. 211].

[66] Thomas L. Heath [1956, Vol. 2, p. 114].

[67] João Manoel d'Abreu [1804].

[68] Walter Rudin [1976].

[69] John Playfair [1812/1987].

É bem sabido que o rigor que Euclides alcançou nos livros sobre a geometria no espaço é inferior ao alcançado na geometria plana[70]. Por isso não é de estranhar que Anastácio da Cunha estenda a suas críticas a uma das definições de Euclides sobre a geometria no espaço, nomeadamente à Definição 10 do Livro XI. Aqui Euclides pretende definir igualdade entre sólidos geométricos: "figuras iguais e semelhantes são as limitadas por planos semelhantes e iguais em número e em grandeza". Como o nosso autor refere:

> *O Sabio Dr Simson foi o primeiro que attentou no sofisma na definição decima do condecimo, sofisma com que a doutrina dos solidos fica toda incerta.*

De facto Simson[71] critica aquela definição sob dois pontos de vista: em primeiro lugar, porque ela devia ser um teorema, sendo a igualdade entre sólidos definida através do processo de sobreposição; em segundo lugar, por aquela definição nem sempre ser válida, dando como exemplo o caso de um polígono não-convexo; assim Simson elimina a definição X e demonstra, por sobreposição[72]

> "As figuras sólidas formadas por planos semelhantes, em número e grandeza iguais, e semelhantemente postas, são iguais entre si, e semelhantes, contanto que cada um dos ângulos sólidos das ditas figuras sejam compreendido por três ângulos planos e não mais"[73].

Ora é exactamente este resultado que Anastácio da Cunha critica nos seguintes termos

> *Porem não acertou com a emenda. Da proposição, em que transforma aquella definição não demonstra (nem lhe seria facil demonstrar) senão o cazo em que hum polyedro podia occupar o mesmo espaço que o outro occupa.*

E o nosso autor nota precisamente que o resultado de Simson não é válido (nomeadamente no caso de poliedros simétricos mas que não se podem levar a sobrepor). Assim afirma que

> *Daqui não resulta menos do que carecer ainda de certeza geometrica a doutrina dos solidos.*

Esta questão da Def. X do Livro XI é largamente discutida por Heath[74] – com referência à solução dada por Simson bem como à critica

---

[70] Thomas L. Heath [1956, Vol. 3, p. 260 e seguintes].

[71] Roberto Simson [1756, notas à Definição X do Livro XI].

[72] Roberto Simson [1756, Prop. C do Livro XI].

[73] Euclides aplicou a sua definição apenas a polígonos deste tipo: veja-se Thomas L. Heath [1956, Vol. 3, p. 2650 e seguintes].

[74] Thomas L. Heath [1956, Vol. 3, p. 260 e seguintes].

de Legendre e a resultados de Cauchy sobre este assunto – e por Mueller[75], discutindo a questão da convexidade e dos sólidos simétricos bem como aquilo que possivelmente Euclides teria em mente com esta definição[76].

- **Os Axiomas**

Como é sobejamente sabido, dos princípios geométricos dos *Elementos* de Euclides, incluídos no Livro I, constam postulados e axiomas ou noções comuns. A distinção entre o que se considera um postulado e um axioma não raramente foi motivo de controvérsia e as interpretações dos diversos autores traduziram-se, frequentemente, em modificações no número e conteúdo de ambos. Assim, por exemplo, Proclo[77] reconhece, no livro I dos *Elementos*, 5 postulados e 5 axiomas, Gregory, naquela que, como já dissemos, ficou conhecida por edição de Oxford, indica 3 postulados e 12 noções comuns, Barrow[78] considera 3 postulados e 14 axiomas e a edição portuguesa de Simson[79] revela também 3 postulados e 12 axiomas. Actualmente aceita-se que do Livro I dos *Elementos* constam 5 postulados e 5 axiomas. Este número, estabelecido por Heiberg[80] é, como vemos, o indicado por Proclo.

Anastácio da Cunha tem, sobre este assunto, uma opinião muito particular, que exprime pela primeira vez na página nove do manuscrito. Ao contrário do que acontece, por exemplo, com o estudo das demonstrações, a que o autor volta com frequência no decorrer do texto, as considerações sobre os axiomas são feitas de uma única vez e dum modo mais sucinto.

Relativamente aos axiomas, Anastácio da Cunha começa por dizer o seguinte:

> *Já os mais illustres sábios reconhecem a futilidade daquelles axiomas, que, como os primeiros nove de Euclides, não são senão transformações particulares e por si mesmas manifestas do celebre principio, o que hé he, ou ser ou não ser ao mesmo tempo não pode ser, principio absolutamente estéril, donde a preseumpção philosophica, pretendia derivar toda a Sciencia!*

Podemos perceber, nestas palavras, uma crítica não só ao facto de os *Elementos* de Euclides incluírem axiomas que Anastácio da Cunha considera fúteis, como também a uma certa atitude filosófica que pretende

---

[75] Ian Muller [1981].
[76] Bernard Vitrac [2001].
[77] Paul Ver Eecke [1948, pp. 162-175].
[78] Isaac Barrow [1705, pp. 23 e 24].
[79] Roberto Simson [1768].
[80] Thomas L. Heath [1956] ou Bernard Vitrac [2001].

fundamentar a ciência em princípios vãos; essa ideia é, aliás, corroborada nas seguintes palavras, que escreve algumas linhas depois:

> *A presumpção philosophica, variando com as circonstancias, e so constante em não consentir que a experiencia seja a primeira mestra, se chega a desenganar-se que não pode reduzir tudo ao mensionado principio, inventa, adopta quantos quer, affirmando ora que são inatos, infusos; ora que evidentes por si mesmos.*

O nosso matemático não se limita, contudo, à crítica pela crítica: ele tem a preocupação de apontar o erro, que, em seu entender consiste em não considerar o conhecimento com base na experiência, e de indicar como é possível "corrigi-lo". É o que se nos oferece ver nas seguintes palavras

> *Axiomas donde na realidade deduzimos o que humanamente sabemos, só a experiência no-los ensina e tal hé o do livro primeiro desta obra.*

No manuscrito é adoptado um único axioma mas não é dito explicitamente qual é; no entanto, pelos comentários do autor ficamos a saber que se trata do "axioma das paralelas". Aliás, as considerações que, na Introdução, fizemos sobre a datação do manuscrito remetem-nos para o Livro I dos *Principios Mathematicos*, de Anastácio da Cunha, onde o axioma tem o seguinte enunciado[81]:

> "Duas rectas, que encontraõ huma terceira, formando com ella dois ângulos internos de huma mesma parte juntos, menores que dois rectos, produzidas dessa parte, concorrem".

O "axioma das paralelas" ou "postulado de Euclides", como também ficou conhecido, é frequentemente apresentado como o quinto postulado do Livro I dos *Elementos* de Euclides. No entanto, diversos autores consideraram-no uma proposição e, como tal, proliferaram as tentativas de uma prova[82] para ela. Anastácio da Cunha chama a atenção para o facto de alguns a assumirem, por vezes, como verdadeira, sem que de tal se apercebam; este erro não é, em seu entender, recriminável, pois é motivado por uma aprendizagem deficiente:

> *quando aprendemos imperceptivelmente, cuidamos que não fomos ensinados. Assim não hé de admirar que muitos tenham aquelle por proposição intuitivamente verdadeira.*

No entanto, como também observa, a "prova" de que não se trata, de facto, de algo intuitivo é dada pelas muitas tentativas de demonstração de que foi objecto.

---

[81] José Anastácio da Cunha [1790/1987, p. 3].

[82] Thomas L. Heath [1956, Vol. I, p. 202 e seguintes].

Anastácio da Cunha critica os autores que, com o objectivo de provar a referida proposição, introduzem no sistema axiomático outros axiomas que estão nas mesmas condições que o axioma dado e indica como único caminho a seguir a *via de experiência*.

- **Os Teoremas e as Demonstrações**

No início do manuscrito, Anastácio da Cunha queixa-se amargamente do descuido e da falta de rigor que, nas demonstrações geométricas, cometem alguns autores do seu tempo, e até anteriores, e acusa-os de oferecerem as demonstrações dos grandes geómetras como Euclides, Apolónio e Arquimedes, transformadas em *paralogismos grosseiros*.

O tema das demonstrações incorrectas é retomado na página seis do manuscrito, onde Anastácio da Cunha nota quão prejudicial tem sido para a matemática a má dialéctica. Elogia, mais uma vez, os antigos geómetras quando afirma que

> *Ninguém negará que os antigos geómetras com as suas sagassissimas analises, exactas e luminosas synteses, apezar de ter sempre sido o género humano muito mais inclinado a novellas, a phantasiar e a assentire sem exame adquiriram para a sua arte hum crédito universal, que ainda conserva, e hum nome, que escurece sem opposição as demais doutrinas*

Destes geómetras vai agora citar apenas Euclides e Apolónio e criticar os modernos autores de "Elementos", a que chama *Modernos Elementistas*.

Ainda sobre este tema, Anastácio da Cunha faz eco da crítica de Montucla[83] dando-nos dele esta longa citação:

> *Rien n'est plus commun,* diz elle, *chez les auteurs dont on parle que ces atteintes portées à la rigueur de démonstration,... Veulent ils démontrer qu'e chaque point de la perpendiculaire à une ligne est également éloigné des points de cette ligne, prés à égale distance de côté et d'autre? ils croiront vous convaincre en disant que cela est évident, parce que cette perpendiculaire ne penche pas plus d'un côté que de l'autre (**Lami**)* (1). *S'agit il de prouver que toutes les cordes égales d'un cercle soutiennent des arcs égaux? ils se contenteront de dire que c'est une suite nécessaire de l'uniformité des cercles (Lami)* (2) *; ils imploreront le secours de vos yeux pour vous assurer que deux cercles ne peuvent se couper qu'en deux points, ou que plus une ligne tirée à une autre est éloignée de la direction de la perpendiculaire, plus elle est grande (Rivard)* (3). *Des Géomètres sont ils excusables d'employer de pareils raisonnements?*

---

[83] Jean-Étienne Montucla [1986, p. 206]. Pensamos que Anastácio da Cunha terá usado a 1.ª edição (1758) deste texto, mas as diferenças entre as duas edições são, no que respeita à presente citação, meramente pontuais.

Deve acrescentar-se que Montucla, em nota de rodapé, dá as referências dos autores que cita neste trecho, Lami e Rivard, que são, respectivamente, (1): *Lami, "Elém. De Géom." Et deux cents autres*, (2): *Lami, "Elém. De Géom."* e (3): *Rivard, "Elém. De Géom."*

No manuscrito é ainda referido um texto análogo de Saverien em que este também lamenta quão longe os modernos autores estão dos antigos geómetras. Anastácio da Cunha não cita este texto mas nós encontrámo-lo no "Discours Preliminnaire" que abre o *Dictionnaire Universel de Mathematique et de Physique*[84].

Outro autor que Anastácio da Cunha apresenta em abono das suas próprias opiniões é d'Alembert, dizendo que ele chama *malhereuse et sterile abondance* à excessiva quantidade de "Elementos" de geometria. Esta citação de d'Alembert não é referenciada por Anastácio da Cunha, mas podemos lê-la no *Essai sur les Elements de Philosophie*[85]; supomos, contudo, que Anastácio da Cunha a terá tirado das obras de d'Alembert que lhe foram apreendidas pela Inquisição[86] (n.º 68 – *Mélanges de Litératture, d'Histoire et de Philosophie*, em 5 volumes).

Anastácio da Cunha dá mais três exemplos de demonstrações incorrectas, todas devidamente referenciadas, que apresentamos a seguir:

> *Theorema. Quando huma recta corta duas rectas parallelas, o angulo externo hé igual ao interno opposto da mesma parte. Demonstração Car pourquoi l'un seroit il plus grand que l'autre?* *
>
> *Theorema. As fracções que tem o mesmo numerador, são entre si reciprocamente como os denominadores. Demonstracão. Porque bem se vê que crescendo o denominador deminue a fracção.*+
>
> *Theorema. As circonferencias dos circulos são entre si como os diametros. Demonstração. Porque bem se vé que sempre* **o** *maior diametro corresponde maior circomferencia.*±

Os autores destes teoremas são indicados no manuscrito, em nota de rodapé, e transcrevemo-los, agora, também em nota de rodapé com as siglas correspondentes indicadas no manuscrito. É curioso referir que encontrámos um texto de Sauri, traduzido em português, por Manoel de Sousa com o título *Compendio de Mathematica*[87] e onde a proposição citada por Anastácio da Cunha é apresentada.

---

[84] Alexandre Saverien [1753, «Discours Preliminaire»].

[85] Jean le Rond d' Alembert [1965, p. 315].

[86] João Pedro Ferro [1988, pp. 105-229].

* Resumo de Math. por M.r l'Abbé Sauri, Ex proffessor de phi &c.a

\+ Elem. de Math. de P. Mako, proffessor de Math. e Physica, e de Sciencia prima &c.

± P. Beck Proffesor de Math. e de Physica e de Ontologia e de Cosmologia &c. em Baviere.

[87] Abbade Sauri [1789, p. 128].

Depois de citar estes teoremas, o nosso matemático acrescenta:

> *... ... E baste; porque*
> *Non mihi, si linguae centum sint, oraque centum Ferrea vox. &c.* [a][88]
>
> *Eis aqui o que hoje chamam mathematica; e tais são os livros, onde o maior numero cuida que encontra a evidência em grao supremo.*
>
> *Hos edicit, et hos arcto stipata theatro*
> *Spectat Roma potens, habet hos, laudat que poetas.* [x][89]

Relativamente à primeira das transcrições latinas, não há qualquer nota de Anastácio da Cunha mas, em relação à segunda, há uma nota de rodapé onde se lê "v.n.D". Supomos que esta nota se refere exactamente a Horácio pois, como pessoa culta da sua época, tinha na sua biblioteca livros de Horácio (obra n.° 11) e de Virgílio (n.° 84 e n.° 88)[90].

As críticas às demonstrações são retomadas na página dez do manuscrito, onde se lê:

> *Propuz os escriptos dos antigos geometras como os melhores modelos de dialectica; mas os antigos geómetras eram homens, e devo dar conta de algumas defeituozas demonstrações de Euclides, que procuro emendar. E não se attribuão estas palavras a arrogancia; pois nem há homem grande sem descuidos, nem engenho medíocre a quem não seja fácil conhecer. Alguns, os de tal mestre não podem deixar de ser huma lição das mais proveitosas para quem devidamente os meditar, e hum antídoto efficacissimo contra a vaidade, contra a negligencia e precipitação usuaes.*

É interessante notar que logo na primeira página do manuscrito, Anastácio da Cunha nos declara que tem em Euclides *tão seguro arrimo e o milhor guia*; e, não obstante, agora observa que *nem há homem grande sem descuidos, nem engenho mediocre a quem não seja facil conhecer*.

Assim, com a clarividência que lhe é habitual, aliada a um misto de desassombro e modéstia, Anastácio da Cunha aponta o que considera incorrecto em algumas demonstrações de Euclides.

Relativamente à proposição I, 4 dos *Elementos*[91], Anastácio da Cunha diz, nas páginas dez e onze do manuscrito

> *A demonstração pois da proposição quarta do livro primeiro de Euclides não se pode chamar tal, porque o autor suppoem que as rectas AB, ΔE coincidem inteira-*

[88] Virgílio, em Aen. 6, 625-626: "Não me bastariam ainda que tivesse cem línguas e cem bocas e uma voz de ferro".

[x] V. n. D.

[89] Horácio, em Epistulae 2.1, 60-61: "São estes os poetas que a poderosa Roma aprende de cor, são também estes os que, apinhada no acanhado teatro, considera seus e louva".

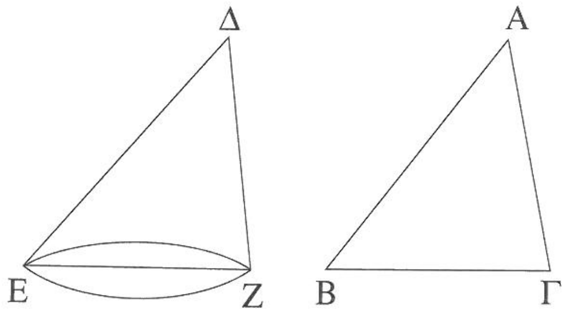
[90] João Pedro Ferro [1988, pp. 105-229].

[91] Thomas L. Heath [1956, Vol. 1, p. 247].

*mente, sem ter antes mostrado a possibilidade da total coincidencia de duas rectas iguaes: também porque affirma que as rectas EΓ, ΔZ coincidem enteiramente sem ter antes mostrado que estas duas rectas, por concorrerem em A sem mutua inclinação e da mesma parte não divergem nos outros extremos ΓZ, (sempre isto a edição de Oxford).*

Esta proposição refere-se ao, assim chamado, primeiro caso de igualdade de triângulos.

Uma vez que Anastácio da Cunha refere a edição de Oxford[92], ilustramos os seus argumentos com as seguintes figuras que, sobre esta proposição, daí retirámos:




O que Anastácio da Cunha afirma é muito interessante pois ele verifica que Euclides aplica, nesta demonstração, não o axioma respeitante ao critério de igualdade de figuras mas sim o seu recíproco, que não está incluído no conjunto dos axiomas dados. Sobre esta proposição e as seguintes criticadas por Anastácio da Cunha socorremo-nos dos doutos comentários de Proclo de Lícia[93], Thomas Heath[94] e Bernard Vitrac[95].

Proclo comenta longamente a proposição I, 4; coloca o mesmo problema da aplicação do recíproco do axioma da igualdade das figuras e considera que, como a demonstração se baseia inteiramente em axiomas, surge, por ela própria, da evidência das hipóteses[96].

Segundo Dhombres[97], já Omar Al-Kayyam, no século XI, e Jacques Peletier, no século XVI, viram na proposição I, 4 uma definição.

Thomas Heath[98] refere outros comentários de vários autores, incluindo o feito por Jacques Peletier, em meados do século XVI.

---

[92] David Gregory [1703, pp. 5-6].
[93] Paul Ver Eecke [1948].
[94] Thomas L. Heath [1956, Vol. 1].
[95] Bernard Vitrac [1990, Vol. 1].
[96] Ver Paul Eecke [1948].
[97] Jean Dhombres & *al.* [1987, p. 237].
[98] Thomas L. Heath [1956, Vol. 1, pp. 249-250].

Vitrac[99] refere, analogamente, muitos outros autores que comentaram esta proposição.

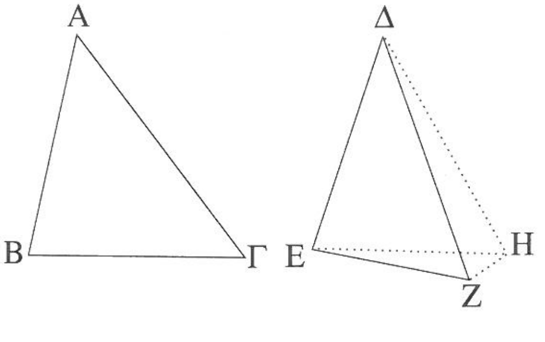
Sabemos que, já no fim do século XIX, David Hilbert[100] não inclui a proposição I, 4 nos seus axiomas de congruência mas inclui uma outra da qual esta é consequência imediata; referimo-nos ao axioma III, 5 e ao teorema 12, respectivamente.

Observamos ainda que Anastácio da Cunha demonstra esta proposição nos seus *Principios Mathematicos* (I, 3) e que João Manoel d' Abreu[101] na sua defesa dos *Principios Mathematicos* contra a crítica de Playfair diz, em relação a esta proposição, que "ninguém a tinha demonstrado antes de J. A. por falta de definições exactas". Supomos que as definições em causa são as definições de "ângulo" e de "linha recta" de Anastácio da Cunha *versus* as mesmas definições em Euclides, como anteriormente já foi notado.

Sobre a proposição I, 24 dos *Elementos*[102] ("se dous triangulos tiverem dous lados iguaes a dous lados, cada hum a cada hum, e hum dos angulos comprehendidos pelos lados iguaes for maior, e o outro menor; a baze que estiver oposta ao angulo maior, será maior que a outra baze oposta ao angulo menor"), pode ler-se na página onze do manuscrito:

> *Na demonstração da vigessima quarta do primeiro falta mostrar que o ponto Z fica de fora do triangulo ΔEH.*

Anexa-se a figura, que na edição de Oxford, acompanha este enunciado:




Anastácio da Cunha refere-se à posição do ponto $Z$ da figura que ele diz que *falta mostrar que fica fora do triângulo ΔEH*. Analisemos outros comentadores da I, 24, começando por Proclo de Lícia.

---

99 Bernard Vitrac [1990, Vol. 1, pp. 202-203].

100 David Hilbert [2002, pp. 12-13].

101 João Manoel d'Abreu [1813/1990].

102 Roberto Simson [1768].

Considera Proclo [103] que três casos são possíveis: Z pode cair acima da recta EH, sobre ela ou abaixo dela e demonstra a proposição em cada um deles. O enunciado e demonstração do texto de Thomas Heath são correspondentes dos da edição de Oxford mas não dos da edição portuguesa dos *Elementos*, traduzida por Ângelo Brunelli, do texto inglês de Robert Simson. Nesta edição, Simson acrescentou *dos 2 lados de um dos triângulos dados seja um deles não maior que o outro*. Assim, diz Heath [104], Simson evita a necessidade de considerar os 3 casos. Contudo, Heath continua afirmando que Euclides demonstra o caso mais difícil e deixa os outros ao cuidado do leitor, como já fizera em *Elementos* I, 7 e como era hábito dos grandes geómetras gregos. Vitrac segue Heath dizendo que os dois casos deixados de fora por Euclides são fáceis de tratar e que já tinham sido considerados por Proclo.

No que respeita à demonstração de *Elementos* III, 13, Anastácio da Cunha critica, também, a demonstração euclidiana afirmando:

> *Na demonstração do decima terceira do terceiro ja o P. Clavio emendou hum paralogismo manifesto* [*].

Esta proposição diz que "um círculo não pode ser tangente a outro círculo em mais do que um ponto, tanto interior como exteriormente". O longo comentário de Thomas Heath refere diversos autores mas não Clávio [105], que é o citado por Anastácio da Cunha; nos seus comentários a esta proposição Vitrac também não o cita.

De acordo com o enunciado, a demonstração da proposição III, 13 tem duas partes: a primeira relativa à tangência interiormente e a segunda relativa à tangência exteriormente. É só a primeira parte que vamos comentar. Note-se que as demonstrações desta parte são diferentes na edição de Simson e na edição de Oxford, coincidindo esta ultima com a da edição de Thomas Heath [106]. Supomos que o paralogismo aludido por José Anastácio da Cunha consiste no facto de, ao invocar a proposição III, 11 na demonstração da III, 13 se assumir algo mais do que lá se prova. A esse mesmo facto se refere Thomas Heath, citando Camerer. Clávio faz a demonstração da proposição III, 13 (1.ª parte) como é feita na edição de Oxford. A seguir, antes de passar à 2.ª parte, insere um conjunto de reflexões sobre a proposição III, 11, ou o que nos parece ser uma generalização dessa proposição.

---

[103] Paul Ver Eecke [1948, p. 238 e seguintes].
[104] Thomas L. Heath [1956, Vol. 1, pp. 297-298].
[105] Christophoro Clavius [1589].
[106] Thomas L. Heath [1956, Vol. 2, pp. 32-33].

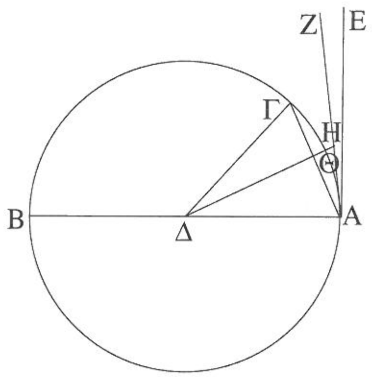
Devemos notar que Anastácio da Cunha demonstra (p. 18) a proposição III, 13 como corolário 2 da proposição II, 9 dos seus *Principios Mathematicos*.

Por fim, sobre a proposição III, 16 dos *Elementos*, Anastácio da Cunha afirma

> *Nenhum porem hé tão digno de nota como o da decima sexta do terceiro, pelas muitas, perplexidades, e relevantes paradoxos, que entroduzio na mathematica.*

Esta proposição diz o seguinte: "a linha recta desenhada perpendicularmente ao diâmetro de um círculo numa das suas extremidades cai fora do círculo, e no espaço entre essa linha recta e a circunferência nenhuma outra recta pode ser traçada; além disso, o ângulo do semicírculo é maior e o restante ângulo é menor que qualquer ângulo rectilíneo agudo dado" [107].

Ilustramos a proposição com a figura da edição de Oxford




Pensamos que Anastácio da Cunha incluiu esta proposição nas suas críticas porque uma das partes desta demonstração diz respeito ao ângulo cornicular ou de contingência. Como referimos anteriormente Proclo [108] já fala deste ângulo a propósito da definição I, 8: é o ângulo formado pela circunferência e pela tangente na extremidade de um diâmetro e a ele diz respeito a última parte da tese da proposição III, 16 segundo a qual, tal ângulo é menor que qualquer ângulo agudo dado. Anastácio da Cunha contrapõe dizendo

> *supondo que o circulo e a tangente formam angulo, contrediz manifestamente a definição oitava do primeiro, suppondo esse angulo menor que qualquer angulo agudo, contradiz manifestamente a proposição primeira do decimo.*

[107] Thomas L. Heath [1956, Vol. 2, p. 37] (tradução livre).
[108] Paul Ver Eecke [1948, p. 109 e seguintes].

Analisemos a relevância dos seus argumentos. De facto, por um lado, lendo a Def. I, 8 atrás transcrita, se chamarmos ângulo ao cornicular as duas linhas encontram-se mas não se pode afirmar que não estão numa mesma linha recta; daí a contradição. Por outro lado, como afirma o nosso autor, admitindo que esse ângulo é menor que qualquer ângulo agudo dado, contradiz a proposição X, 1 (também conhecida por "método de Eudoxo"), segundo a qual

> "dadas duas grandezas desiguais, se da maior se subtrair uma grandeza maior do que a sua metade, e da que sobrar subtrairmos novamente uma grandeza maior do que a sua metade, e se este processo for repetido continuamente, então restará uma grandeza menor do que a menor das grandezas dadas" [109].

Na verdade, se partirmos de um ângulo rectilíneo e dum ângulo cornicular esta proposição não se pode aplicar porque, segundo a proposição III, 16, o ângulo cornicular já é menor do que qualquer ângulo dado. Verificam-se assim, mais uma vez, a validade e a clarividência das objecções apresentadas, neste manuscrito, por Anastácio da Cunha. Thomas Heath faz um longo comentário à proposição III, 16 referindo a controvérsia a que deu lugar entre Jacques Peletier e Clávio, a propósito do ângulo de contingência [110]. Note-se que tanto na edição de Oxford, como nas outras já referidas (Simson, Heath e Vitrac) esta proposição é seguida de um corolário que afirma: "uma linha recta perpendicular ao diâmetro de um círculo numa das suas extremidades é tangente ao círculo". Devemos, porém, notar que Thomas Heath diz que neste corolário, Simson afirma também que a tangente é única. Encontramos, de facto, este acrescentamento, na edição portuguesa de Simson.

## • Conclusão

Habituados que estávamos ao método sintético de exposição dos conteúdos que Anastácio da Cunha tão bem praticava na escrita dos seus *Principios Mathematicos* podemos agora acrescentar um conhecimento sobre o seu método analítico de registar a Matemática, tal como o entendemos no manuscrito estudado. Quando, em 1987, se escrevia que [111]:

> "Distinguem-se os *Principios Mathematicos*, à primeira análise, pelo modo de exposição escolhido. É o «método geométrico» dos antigos gregos, estritamente dedutivo, em que os axiomas, as definições e as proposições com as suas provas se sucedem num rigoroso encadeamento lógico"

---

[109] Thomas L. Heath [1956] (tradução livre).

[110] Thomas L. Heath [1956, Vol. 2, p. 41].

[111] José Anastácio da Cunha [1987]. Nota de apresentação da reprodução fac-simile.

percebíamos que, a exemplo – porventura não tão fundamentalista – do texto original que serve de modelo à chamada matemática pura (*Os Elementos* de Euclides), os *Principios Mathematicos* de Anastácio da Cunha são uma síntese, bem organizada, de ensinamentos matemáticos: apresentam axiomas pretensamente bem pensados, definições seguramente precisas e teoremas/problemas cuidadosamente enunciados com demonstrações logicamente coerentes.

Contudo, os poucos exemplos apresentados nos *Principios Mathematicos*, a pequena quantidade de cálculos auxiliares ou de observações complementares, bem como a total ausência de referências bibliográficas dificultavam, porventura, a compreensão das descobertas matemáticas de José Anastácio da Cunha, isto é, levantavam a questão da aprendizagem efectiva de tão importantes ensinamentos. Deixavam, por isso, ao leitor aprendiz, dúvidas não só sobre as razões que teriam levado Anastácio da Cunha a tomar determinadas decisões, mas também ao nível da interpretação e da fundamentação do texto.

O manuscrito agora estudado é fértil em explicações, justificações, observações, reflexões filosóficas, preocupações didácticas, fundamentações das ideias, exemplos, referências bibliográficas, citações de outros autores e até repetições de certos temas. Queremos acreditar que, embora em aparente desordem, toda esta informação permita uma nova leitura da obra de José Anastácio da Cunha. Pensamos que estamos agora mais perto de ver cumprido o desejo do Professor Luís Albuquerque, quando também em 1987, afirmava que:

> *(Anastácio da Cunha) morreu há duzentos anos, na flor da vida, mas a sua obra ficou e perdura. Havemos de lê-la e de estudá-la para homenagear a memória do autor, – a maior homenagem que lhe podemos prestar.*

## Agradecimentos

Ao Professor Carlos Vilar e à Professora Virgínia Soares Pereira:

Os autores desejam exprimir um profundo agradecimento ao Professor Carlos Vilar (do Centro de Matemática, da Universidade do Minho) e à Professora Virgínia Soares Pereira (do Instituto de Letras e Ciências Humanas, da Universidade do Minho) a quem, repetidamente, recorreram por causa das traduções, em maior ou menor escala, dos textos em Latim e em Grego.

Os vossos conselhos foram da máxima importância para o estudo que fizemos em torno deste manuscrito.

Foi, para nós, um prazer contar com a vossa ajuda preciosa. Muito obrigada.

## Bibliografia

ABREU, João Manoel d'. *Supplément à la Traduction de La Géométrie d'Euclide, de M.r Peyrard, publiée 1804, et à la Géométrie de M.r Legendre; suivi d'un Essai sur la vraie théorie des parallèles*. Paris, Bordeaux, 1809.

ABREU, João Manuel d'. *O Investigador Portuguez em Inglaterra*, Vol. VIII, n.° XXX, Dezembro de 1813.

ABREU, João Manuel d'. *Escriptos posthumos de José Anastácio da Cunha ordenados relativamente ao systema dos seus Principios Mathematicos e offerecidos a S. A. R. o S. D. João VI Príncipe Regente de Portugal*. (Consultar o anexo ao texto "José Anastácio da Cunha: vida e obra" de Maria Fernanda Estrada, neste volume).

ALEMBERT, Jean Le Rond d'. *Essai sur les Éléments de Philosophie*. Georg Holms Verlag Buchhandlung, Hildesheim, 1965.

ALEMBERT, Jean Le Rond d'. *Contingence*, in *Encyclopédie Méthodique. Mathematiques*, Paris, 1784. (Reimpr. ACL-éditions, Paris 1987).

ANDRADE, Sebastião Corvo. "Nota sobre o Livro V de Euclides e particularmente sobre a definição V", em *O Instituto*, Vol. 8, 372- 377.

ARISTOTLE. *Physics*. Translated by R. P. Hardie and R. K. Gaye (8 vols.).
Physics_Aristotle\The Internet Classic Archive works by Aristotle.
htm. em http:// classics.mit.edu/Browse/index.html (em 1 de Outubro de 2006).

ARTMANN, Benno. *Euclid – The Creation of Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1999.

BACON, Francis. *De Augmentis Scientuarum*. Lib. IX. Amstelaedami, 1662.

BACON, Francis. *Novum Organum* in Descartes, Bacon, Leibniz (Discours de La Méthode, Novum Organon, Fragments de la Théodice). Récueil publié avec des notes par M. Lorquet. I. Hachete et C.ie, Paris, 1847.

BARROW, Isaac. *Euclide's Elements; The whole Fifteen Books Compendiously Demonstrated. To which is added Archimeds Theorems of the Sphere and Cylinder, investigated by the Method of Indivisibles. Never before in English*. London, E. Redmayne, 1705.

BOS, Henk J. M. "Lectures in the History of Mathematics", *American Math. Soc.*, London Math. Soc., Vol. 7, 1993.

BULMER-THOMAS, Ivor. "Euclid", *Biographical Dictionary of Mathematicians*, New York: Scribner, 1991, Vol. II, 689-711.

CLAVIUS, Christophoro. *Euclidis Elementorum Lib XV.* Romæ apud Bartholomaeum Grasium, 1589.

COCHRANE, Rexmond. "Francis Bacon and the rise of the mechanical arts in eighteenth-century England", *Annals of Science*, Vol. 12, 2/June 1956, 137-156 (20).

CONDILLAC, Étienne Bonnot. *Essai sur l'Origine des Connoissances Humaines*, Amsterdam, P. Mortier, 1746. (http://gallica.bnf.fr/)

CONDILLAC, Abbé Étienne Bonnot. *Oeuvres de M. l'Abbé de Condillac de l'Académie Françoise, & de celle de Berlin, de Parme & de Lyon.* Troisième Edition, revue & augmentée. Essai sur l'origine des connoissances humaines. Ouvrage où l'on réduit à un seul principe tout ce qui concerne à l'entendement humain. Tome Premier. À Paris, Chez les Libraires Associés, 1792.

Condillac, Abbade Étienne Bonnot. *Obras Elementares de Filosofia Racional compostas em francez pelo Abbade de Condillac e transladadas em Língua Portugueza*. Tomo I, Lógica ou primeiros desenvolvimentos da arte de pensar. Lisboa, 1801.

Crippa, Adolpho. "Conceito de filosofia na época Pombalina" em Actas do I Congresso Luso-Brasileiro de Filosofia. *Revista Portuguesa de Filosofia*, Tomo XXXVIII-II (Separata). Faculdade de Filosofia, Braga, 1982.

Cunha, José Anastácio da. *Ensaio sobre os Principios da Mechanica*, in *Anastácio da Cunha, O Matemático e o Poeta*, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, Lisboa, 1990 (339-351). (Publicado originalmente em Londres em 1807).

Cunha, José Anastácio da. *Factos Contra Calumnias.* in *Anastácio da Cunha, O Matemático e o Poeta*, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, Lisboa, 1990 (381-397).

Cunha, José Anastácio da. *Principios Mathematicos*. Reprodução fac-simile da edição publicada em Lisboa em 1790. Universidade de Coimbra, 1987.

Cunha, José Anastácio da. *Principes Mathématiques de seu Joseph-Anastace da Cunha, traduits littéralement du portugais par J. M. D'Abreu*. Bordéus 1811. Reprodução fac-simile, Universidade de Coimbra, 1987.

Cunha, Norberto. "As ideias filosóficas de José Anastácio da Cunha". *Diacrítica*, n.º 9 (1994), 37-64.

Dechales, Claude & Ozanam, Jacques. *Les Elements d' Euclides*. Paris, 1753.

Dechales, Claude. *The Elements of Euclides*. Oxford, 1704.

Dhombres, Jean. *Nombre, mesure et continu: épistémologie et histoire*. Paris, 1978.

Dhombres, Jean, Dahan-Dalmedico, Amy, Bkuche, Rudolf, Houzel, Christian, Guillemot, Michel. *Mathématiques au Fil des âges*. I.R.E.M. Groupe Epistémologie et Histoire. 1987.

Euler, Leonhard. *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*, Tome I. Paris, 1796. (Reimpr. ACL-éditions, Paris 1987); tradução de "Introdutio in Analysin Infinitorum" (1748).

Ferreira-Deusdado, Manuel António. *Educadores Portuguêses*. Livraria França Amado, Coimbra, 1910.

Ferro, João Pedro. *O Processo de José Anastácio da Cunha na Inquisição de Coimbra (1778)*. Introdução, transcrição e Notas de João Pedro Ferro. Lisboa, Palas Editores, 1987.

Ferro, João Pedro. "A Biblioteca de José Anastácio da Cunha" em *Actas do Colóquio Bicentenário da morte de Anastácio da Cunha – matemático e poeta*. Évora, 1998, 105-229.

Giusti, Enrico. "Quelques réflexions sur les «Principios» de da Cunha" em *Anastácio da Cunha 1774-1787, o matemático e o poeta: actas do Colóquio Internacional Anastácio da Cunha, o Matemático e o Poeta – Lisboa, 1987*. Coord. de Ferraz, Maria de Lurdes, Rodrigues, José Francisco e Saraiva, Luís. Lisboa, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, 1990, 33-52.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor. "Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid's Elements: how did he handle them?" *Historia Math.*, 23 (1996), no. 4, 355-375.

GREGORY, David. *Euclidis quae supersunt omnia*. Oxoniae, 1703.

HEATH, Thomas L. *The thirteen books of the Elements / Euclid*. Introdução e comentários. 2nd rev. ed., Vol. 1 (Books I and II); Vol. 2 (Books III-IX); Vol. 3 (Books X-XIII). New York, Dover, 1956.

HILBERT, David. *Fundamentos de Geometria*. Gradiva, Lisboa, 2002. (Coordenação de António Franco de Oliveira).

HOBBES, Thomas. *The English Works of Thomas Hobbes of Malmesbury*. Vol. VII. Scientia Verlag Aalen, Germany, 1966.

HOFMANN J. E. "Saint Vincent, Gregorius", *Biographical Dictionary of mathematicians*, New York, Scribner, 1991, Vol. IV (2197-2199).

HUME, David. *A Treatise of Human Nature*. 1739-40.

(http://www.class.uidaho.edu/mickelsen/ToC/hume%20treatise%20ToC.htm)

HUISMAN, Denis. *Dictionnaire des Philosophes*. 2 vols. Vol. 1 (A-J), Vol. 2 (K-Z). Paris, Presses Universitaires de France, 1984.

IRIA, Alberto. "A Fundação da Academia das Ciências de Lisboa". Sep. de *História e Desenvolvimento da Ciência em Portugal, 2*. Academia das Ciências de Lisboa, Lisboa, 1986, 1283-1299.

KASNER, Edward, HARRISON, Irene. "Voltaire on Mathematics and Horn Angles" in *Scripta Mathematica*, 16 (1950), 13-21.

KLUT, Duarte. "O momento Pedagógico pombalino: Referências Bibliográficas". Actas do I Congresso Luso-Brasileiro de Filosofia. *Revista Portuguesa de Filosofia*, Tomo XXXVIII-II (Separata). Faculdade de Filosofia, Braga, 1982.

LALANDE, Jérôme. "Angle" in *Encyclopédie Méthodique. Mathematiques*, Paris, 1784. (Reimpr. ACL-éditions, Paris 1987).

MAKO, P.e. "Compendiaria Matheseos, Institutio, Quam in usum Auditorum Phlosophie Elucubatus est." *Mako Philosophia*. Editio Secunda Veneta, Venetiis, 1784.

MARTIN, Benjamim. *Grammaire des Sciences Philosophiques ou Analyse Abregée de la Philosophie Moderne, Appuyé sur les Expériences*. Traduit de l'Angloise de Benj. Martin. Nouvelle Édition, corrigée & augmentée. A Paris, 1764.

MONTUCLA, Jean-Étienne. *Histoire des Mathématiques*, Tome I, nouveau tirage. Albert Branchard, Paris, 1968.

MONTUCLA, Jean-Étienne. *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* (1754). Réproduction de textes anciens, nouvelle série n.º 1. IREM, Université Paris VII, 1986.

MUELLER, Ian. *Philosophy of Mathematics and Deductive structure in Euclid' Elements*. The MIT Press, Cambridge, 1981.

MURDOCH, John. "Euclid: Transmission of the Elements", *Biographical Dictionary of Mathematicians*, New York: Scribner, 1991, Vol. II, 711-734.

NEWTON, Isaac. *Príncipes Mathématiques de la Philosophie Naturelle*. Traduction de la Marquise du Chastellet augmentée des Commentaires de Clairault. Tome Premier. Paris, 1966.

NEWTON, Isaac. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Geneve, 1739. (Congregationis Oratorii Bracarensis).

PALMIERI, Paolo. "The Obscurity of the Equimultiplies. Clavius' and Galileo's Foundational Studies of Euclid's Theory of Proportions", em *Arch. Hist. Exact Sci.* 55 (2001) 555-597. Springer-Verlag, 2001.

PLAYFAIR, John. Recensão de J. Playfair in "Edinburgh Review" (Novembro de 1812). (Reproduzido em *Anastácio da Cunha 1774-1787, o matemático e o poeta: actas do Colóquio Internacional Anastácio da Cunha, o Matemático e o Poeta – Lisboa, 1987*. Coord. de FERRAZ, Maria de Lurdes, RODRIGUES, José Francisco e SARAIVA, Luís. Lisboa, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, 1990, 415-423).

QUEIRÓ, João Filipe. "José Anastácio da Cunha: a forgotten forerunner", *The Mathematical Intelligencer*, 10 (38-43), 1988.

QUEIRÓ, João Filipe. "José Anastácio da Cunha: um matemático a recordar, 200 anos depois", *Matemática Universitária (Soc. Brasileira de Matemática)*, 14 (5-27), 1992. (Reproduzido em *Boletim da SPM*, n.º 29 (1-18), Setembro de 1994).

RODRIGUES, Anastácio Joaquim. "Principes mathematiques de feu Joseph Anastase da Cunha traduits littéralment du portugais par J. M. d'Abreu", *Moniteur Universel*, 8 de Agosto de 1811. (Transcritos em *Anastácio da Cunha, O Matemático e o Poeta*, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, Lisboa (339-404), 1990).

RODRIGUES, Anastácio Joaquim. "Reflexoens em defeza dos *Principos Mathematicos* do Dr. José Anastasio da Cunha censurados no revisor de Edimburg em Novembro de 1812", *O Investigador Portugues em Inglaterra*, 1813. (Transcritos em *Anastácio da Cunha, O Matemático e o Poeta*, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, Lisboa (425-448), 1990).

ROMMEVAUX, Sabinne. *Clavius une Clé pour Euclide au XVI siècle*. Vrin, Paris, 2005.

RUDIN, Walter. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 1976.

SAINT-VINCENT, Gregorius. *Opus geometricum*. Antwerp, 1647.

SAURI, Abbade. *Compendio de Mathematica*, composto pelo Abbade Sauri para uso da Mocidade, dos Collegios, e de todos os que se applicão às Mathematicas independentemente de Mestre. Tradução em português por Manoel Sousa. Lisboa, Regia Officina Typografica, 1789.

SAVERIEN, Alexandre. *Dictionnaire Universel de Mathematique et de Physique*. Tome premier. A Paris, 1753.

SIMSON, R. *Euclidis elementorum libri priores sex, item undecimus et duodecimus, ex versione latina Frederici Commandini; sublatis iis quibus olim hi a Theone, aliisve, vitiati sunt, et quibusdam Euclidis demonstrationibus restitutis*, 1756.

Simson, Roberto. *Elementos de Geometria dos seis primeiros livros, do undecimo e duodecimo* da versão latina de Frederico Commandino adicionados e ilustrados por Roberto Simson professor de Mathematica na Academia de Glasgow, e traduzidos em Portuguez para uso do Real Collegio dos Nobres. Tradução de João Angelo Brunelli. Lisboa, 1768. (1769, reeditada pelas Edições Cultura, S. Paulo, 1994 – revistos por Aníbal Faro).

Tacquet, P.e André. *Elementos de Geometria Plana, e sólida, segundo a ordem de Euclides, Princepe dos Geómetras*. Lisboa, 1753. (Traduzido em português pelo P.de Manoel de Campos. Para uso da Real Aula da Esfera do Collegio de Santo Antão da Companhia de Jesus de Lisboa Occidental, na Oficina de Rita-Cassiana, 1753).

Tacquet, André. *The Elements of Euclid. With Select Theorems Out of Archimedes*. Dublin, S. Fuller, 1728.

Teixeira, Francisco Gomes. *Panegíricos e Conferências*. Coimbra, Imprensa da Universidade, 1925.

Teixeira, José António. *Estudos sobre a Doutrina da Proporcionalidade*. Coimbra, Imprensa da Universidade, 1865.

Ver Eecke, Paul. Proclus de Lycie. *Les Commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclides*. Traduits pour la première fois du Grec en Français. Avec une Introduction et des Notes par Paul Ver Eecke. Desclée de Brower, Bruges, 1948.

Vitrac, Bernard. *Les Élèments / Euclide d'Alexandrie*. Introd. Maurice Caveing, 4 vols. Presses Universitaires de France, Paris, 1990, 1994, 1998, 2001. (Tradução de Bernard Vitrac).

Voltaire. *Dictionnaire Philosophique*. Tome cinquième. Édition Stéréotype, d'après le procédé de Firmin Didot. Paris, 1834.