CC BY

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

As Representações Algébrica E Geométrica Na Aprendizagem De Mudança De Base

The Algebraic And Geometric Representations In The Learning Of Change Of Basis

Graciela Moro*
Universidade do Estado de Santa Catarina – (UDESC)
Floriano Viseu**
Universidade do Minho – (UMinho)
Ivanete Zuchi Siple***
Universidade do Estado de Santa Catarina – (UDESC)

Resumo

Na aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear os alunos do ensino superior tendem a manifestar dificuldades devido à sua natureza abstrata, o que podem ser minimizadas caso se explore a conexão entre as diferentes representações de um mesmo conceito. Recorrendo a um ensino que explorou as representações algébrica e geométrica de conceitos de Álgebra Linear, procuramos averiguar como os alunos compreendem as transformações entre as diferentes representações, algébrica e geométrica, dos conceitos de coordenadas e mudança de base na resolução de uma tarefa após esse ensino. Adotamos uma abordagem qualitativa e interpretativa na procura de compreender como os alunos operacionalizam os conceitos de coordenadas e de mudança de base nessas representações. A análise das respostas dos alunos à tarefa proposta aponta para um melhor desempenho da transição da representação algébrica para a geométrica do que nas transformações realizadas dentro da própria representação algébrica. As maiores dificuldades relacionam-se com a interpretação equivocada dos conceitos envolvidos, a linguagem simbólica e com o uso inadequado de conceitos e procedimentos advindos da Geometria Analítica ou já abordados na própria Álgebra Linear.

Palavras-chave: Representações; Coordenadas; Mudança de base; Aprendizagem

Abstract

In the learning of linear algebra concepts, students in higher education tend to have difficulties due to their abstract nature, which can be minimized if the connection between the different representations of the same concept is explored. Based on a teaching that explored the algebraic and geometric representations of Linear Algebra concepts, we try to find out how students understand the transformations between the different representations, algebraic and geometric, of the concepts of coordinates and change of basis in the resolution of a task after the teaching. We adopt a qualitative and interpretative approach in order to understand how the

* Mestre em Matemática Aplicada (UFRGS). Professora Assistente do Centro de Ciências Tecnológicas (UDESC), Joinville, Santa Catarina, Brasil. E-mail: gracimoro@gmail.com.
** Doutor em Educação, Especialidade de Didática da Matemática (ULisboa). Professor auxiliar do Instituto de Educação (UMinho), Braga, Portugal. E-mail: fviseu@ie.uminho.pt.
*** Doutora em Engenharia de Produção (UFSC). Professora Associada do Centro de Ciências Tecnológicas (UDESC), Joinville, Santa Catarina, Brasil. E-mail: ivazuchi@gmail.com.

students operationalize the concepts of coordinates and change of basis in these representations. The analysis of the students' answers to the proposed task indicates better performance in the transition from the algebraic to the geometric representation than in the transformations performed within the algebraic representation itself. The greatest difficulties are related to the misinterpretation of the concepts involved, the symbolic language and the inappropriate use of concepts and procedures derived from analytical geometry or already addressed in linear algebra.

Keywords: Representations; Coordinates; Change of basis; Learning

1 Introdução

A disciplina de Álgebra Linear faz parte do currículo de vários cursos do Ensino Superior, tais como Matemática, Física e Engenharias. Geralmente, essa disciplina está presente na matriz curricular do primeiro ano dos respectivos cursos. Para Strang (2014), os cursos da área de ciências exatas deveriam dar mais ênfase à Álgebra Linear em virtude da diversidade de problemas que podem ser resolvidos usando os conceitos da disciplina. Mas, acontece que esta disciplina é considerada muito difícil pelos alunos (HILLEL, 2000; HAREL, 2017), sendo a sua aplicabilidade ofuscada pela natureza axiomática envolvida na sua teoria.

Por outro lado, a Álgebra Linear utiliza várias linguagens e registros de representação para trabalhar com um determinado objeto, cujas conversões tendem a ser consideradas pelos professores como naturais, alternando os diferentes registros sem levar em consideração o tempo necessário para os alunos as assimilarem (DORIER, ROBERT; SIERSPINSKA, 2000). Entretanto, para o aluno reconhecer o mesmo objeto em diferentes representações não é simples, necessita que o professor na sua prática propicie a exploração de transformações entre as diferentes representações. Para Duval (2012), a aquisição de conhecimento de um dado objeto matemático ocorre através da mobilização de dois tipos de trasnsformações de representações, o tratamento, transformações de representações no mesmo registro, e a conversão, transformações de representações em diferentes registros.

As dificuldades apontadas não estão presentes apenas no processo de aprendizagem. Os próprios professores a consideram uma disciplina difícil de ensinar (DORIER, 2002). Como refere Strang (2014), existe uma tendência para a utilização de estratégias de ensino expositivas de tópicos de Álgebra Linear, o que na sua perspectiva não é a melhor metodologia para minimizar as dificuldades de aprendizagem dos alunos. Para o autor, urge a adoção de metodologias de ensino que façam com que os estudantes pensem e participem no desenvolvimento das atividades da sala de aula. Ao valorizar a atividade do aluno, Strang

CC BY

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

(2014) advoga que o papel do professor nos tempos atuais consiste em questionar, dar tempo para o aluno refletir, ouvir a apresentação das suas respostas e promover a discussão sobre essas respostas: “O professor tem que dar ao aluno a chance de dizer o que está pensando e de fazer parte da aula” (STRANG, p. 19, 2014). Tal perspectiva aponta para uma concepção de ensino bem diferente da que deriva de práticas centradas na atividade do professor, tendencialmente referida como ensino tradicional.

Atualmente, no que diz respeito ao ensino de Álgebra Linear, advoga-se uma prática pedagógica que valorize a exploração intuitiva antes da teoria formal ser introduzida (UHLIG, 2002) e o uso da tecnologia, com exploração de diversos registros de representação de objetos matemáticos, permitindo a visualização de diferentes características desses objetos (ANDRADE, 2010). Pesquisas em Educação Matemática, tais como as realizadas por Arcavi (2003) e Diković (2007), apontam a importância da visualização no ensino de matemática defendendo que o seu papel vai muito além do caráter ilustrativo, podendo ser considerada como uma componente importante do pensamento, propiciando formas diferenciadas da compreensão dos conceitos algébricos em diferentes.

Tendo em consideração a importância das múltiplas representações, apresentamos um estudo que tem por objetivo averiguar como os alunos compreendem as transformações entre as representações, algébrica e geométrica, dos conceitos de coordenadas de um vetor $\boldsymbol{v}$ numa determinada base α num espaço vetorial V e de mudança das coordenadas do vetor $\boldsymbol{v}$ dessa base α para uma base β nesse mesmo espaço vetorial V, a chamada mudança de base. A conversão entre as representações algébrica (vetorial e matricial) e geométrica possibilita a construção da generalização de mudança de base em espaços vetoriais reais quaisquer.

2 Mudança De Base: De Que Forma? Para Quê?

Um dos tópicos com que os alunos se deparam quando frequentam um curso de Álgebra Linear é o de base de um espaço vetorial. Geralmente, define-se base, na linguagem natural, como sendo um conjunto de vetores linearmente independentes e que geram o espaço vetorial. Essa definição envolve o conceito de geradores de um espaço vetorial, que é abstrato, inclusive nos espaços euclidianos $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. A base usual (canônica[1]) desses espaços nem sempre é a mais conveniente para a resolução de um certo problema, de forma que a mudança

[1] A base canônica de um espaço vetorial é a base mais primitiva para a sua estrutura. No $\mathbb{R}^2$ a base canônica é dada pelo conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ e no $\mathbb{R}^3$ pelo conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

para uma outra base (referencial) é um procedimento comum no estudo de espaços vetoriais.

Em muitas aplicações, um problema que é descrito inicialmente utilizando uma determinada base α, pode ter sua solução simplificada pela mudança da base α para uma base conveniente β. Entretanto, para a resolução desse problema é importante saber como se relacionam as coordenadas de um dado vetor em relação a cada uma dessas bases, tendo que considerar a seguinte situação: Se $\boldsymbol{v}$ for um vetor num espaço vetorial V de dimensão finita e se mudarmos a base de V de α para uma base β, qual é a relação entre as coordenadas de $\boldsymbol{v}$ em relação as bases α e β? (BOLDRINI *et al.*, 1989). Deste modo, queremos estabelecer as relações entre as matrizes colunas $[\mathrm{v}]_\alpha$ e $[\mathrm{v}]_\beta$, sendo fundamental compreender que a construção dessas matrizes exige a transição de um registro algébrico/vetorial para o algébrico/matricial, levando em consideração a definição de coordenadas de um vetor em relação a uma determinada base. Assim, é importante definir o que são coordenadas de um vetor. No livro didático *Linear Algebra and its applications* (LAY, 2003), a definição de coordenadas é dada por:

> Suponha que o conjunto $\beta = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_\mathrm{n}\}$ é uma base para um subespaço H. Para cada $\boldsymbol{v}$ em H, as coordenadas de $\boldsymbol{v}$ em relação à base β são as constantes $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \cdots, \mathrm{a}_\mathrm{n}$, tais que $\boldsymbol{v} = \mathrm{a}_1\boldsymbol{v}_1 + \mathrm{a}_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \mathrm{a}_\mathrm{n}\boldsymbol{v}_\mathrm{n}$, onde a matriz coluna $[\boldsymbol{v}]_\beta = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{a}_\mathrm{n} \end{bmatrix}$ é chamada de matriz das coordenadas de $\boldsymbol{v}$. (p. 216)

Matematicamente, essa definição permite determinar as coordenadas de um vetor em relação a uma base qualquer, mas para os alunos essa representação algébrica não é natural, pois exige um processo de abstração para espaços vetoriais quaisquer (HILLEL, 2000). Os alunos tendem a ter dificuldade em reconhecer, nessa notação, que as entradas da matriz $[\boldsymbol{v}]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ não são as componentes do vetor $\boldsymbol{v}$, mas representam a solução da equação linear $\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$ (HILLEL, 2000). Esta situação ilustra o *obstáculo do formalismo* (DORIER *et al.*, 2000) que existe na Álgebra Linear, o qual aparece quando os alunos são confrontados com a linguagem matemática representada por equações, matrizes e vetores.

A visualização pode ser um meio que possibilita ultrapassar o obstáculo do formalismo, podendo ser um recurso potencial ao possibilitar a abordagem de um dado conceito em diferentes representações além das tradicionais, tais como a lógico-proposicional e simbólica, muitas vezes utilizadas em Álgebra Linear. Para lidar com os conceitos, é preciso

CC BY

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

criar uma imagem conceitual (TALL; VINNER, 1981) que esteja conectada com as diferentes formas de representação de um objeto matemático. Entretanto, é pertinente questionar o que se entende por visualização.

> A visualização de conceitos matemáticos não é uma atividade cognitiva trivial - visualizar não é o mesmo que ver. Ser capaz de visualizar é a capacidade de criar imagens ricas, mentais que o indivíduo pode manipular em sua mente, ensaiar diferentes representações do Conceito e, se necessário, usar papel ou uma tela de computador para expressar a ideia em questão. (PJANIC; LIDAN; KURTANOVIC, 2015, p. 207)

Assim, para explorar a definição de coordenadas podemos trabalhar com um exemplo num espaço vetorial familiar dos alunos, como, por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, onde é possível representar geometricamente o que significa a solução da equação linear $\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n}$, que em $\mathbb{R}^2$ é dada por $\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2}$. Consideramos dois sistemas de coordenadas, com as bases $\alpha = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ e $\beta = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ representados nas Figuras 1(a) e 1(b), respectivamente.

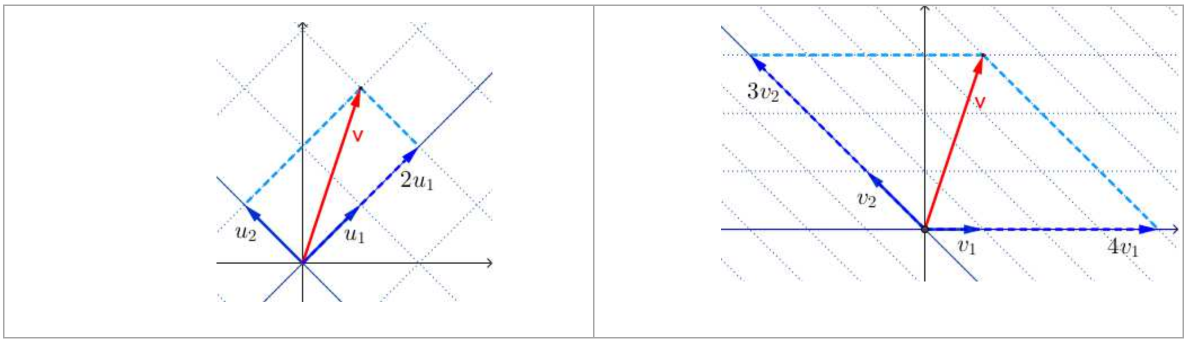


Figura 1 – (a) O vetor $\boldsymbol{v}$ representado em relação a uma base α. (b) O vetor $\boldsymbol{v}$ representado em relação a uma base β.
Fonte: Adaptado de Lay (2003, p. 239)

Na Figura 1(a), o vetor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ na base α, é dado por $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2}$ e as suas coordenadas são representadas matricialmente por $[\boldsymbol{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Isso significa que, para obter o vetor $\boldsymbol{v}$ utilizando o referencial α, é necessário fazer uma combinação linear dos vetores dessa base, o que implica, geometricamente, em duplicar o vetor $\boldsymbol{u_1}$ e manter a identidade do vetor $\boldsymbol{u_2}$. Por outro lado, o mesmo vetor $\boldsymbol{v}$, na base β é dado por $\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{v_1} + 3\boldsymbol{v_2}$ (Figura 1(b)), o que resulta na matriz de coordenadas, $[\boldsymbol{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, e neste caso (referencial β), significa geometricamente quadruplicar o vetor $\boldsymbol{v_1}$ e triplicar o vetor $\boldsymbol{v_2}$.

Essa interpretação pode ser estendida para o $\mathbb{R}^3$, porém há uma limitação para outros espaços euclidianos de dimensões superiores, visto que nossa experiência perceptiva é limitada à dimensão tridimensional (WAWRO; SWEENEY; RABIN, 2011). Entretanto,

CC BY

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

explorar a representação geométrica dos vetores nas dimensões do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ pode auxiliar na compreensão e abstração envolvidas nos espaços vetoriais abstratos. Harel (1989), desde a década de 80, do século passado, já tinha essa preocupação de como se trabalhar com as abstrações no ensino de Álgebra Linear. Para ele, o processo de abstração pode ser ensinado aos estudantes em três fases: (i) visualização do conceito e do processo no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$; (ii) representação e a extensão para o $\mathbb{R}^n$; e (iii) determinação dos espaços vetoriais abstratos. Estas fases são fundamentais para a compreensão do conceito de mudança de base. Assim, pode-se iniciar a discussão desse tópico explorando o conceito de coordenadas no $\mathbb{R}^2$ (vide figuras 1a e 1b) e no $\mathbb{R}^3$, espaços que possibilitam a representação geométrica e estender a generalização para o $\mathbb{R}^n$ e outros espaços vetoriais.

O reconhecimento do conceito de coordenadas em diferentes representações é fundamental para a compreensão do conceito de mudança de base. Vamos resgatar o problema exposto no início desta secção, que consiste em encontrar a conexão entre dois sistemas de coordenadas distintos de um mesmo espaço vetorial. Essa conexão é estabelecida por um teorema que possibilita mudar as coordenadas de um determinado referencial para outro:

> Sejam $\alpha = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ e $\beta = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ bases de um espaço vetorial V. Então existe uma única matriz $[\mathrm{I}]^\alpha_\beta, n \times n$, tal que $[\boldsymbol{v}]_\alpha = [\mathrm{I}]^\alpha_\beta[\boldsymbol{v}]_\beta$. As colunas de $[\mathrm{I}]^\alpha_\beta$ são formadas pelas coordenadas dos vetores da base α em relação à base β. Isto é, $[\mathrm{I}]^\alpha_\beta = [[\boldsymbol{u}_1]_\beta \quad [\mathbf{u}_2]_\beta \quad \cdots \quad [\boldsymbol{u}_n]_\beta]$. (LAY, 2003, p. 240)

No exemplo ilustrado na Figura 1, a matriz $[\mathrm{I}]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é quem relaciona as coordenadas do vetor $\boldsymbol{v}$ em relação às bases α e β, de tal forma que se apenas a matriz de coordenadas $[\boldsymbol{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ fosse conhecida, poderíamos obter a matriz de coordenadas $[\boldsymbol{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ simplesmente pelo produto $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Tal matriz $[\mathrm{I}]^\alpha_\beta$ permite, pela relação $[\boldsymbol{v}]_\alpha = [\mathrm{I}]^\alpha_\beta[\boldsymbol{v}]_\beta$, mudar as coordenadas de um vetor de uma base para outra.

Na prática, constata-se que a compreensão desse teorema, em termos de representação algébrica de vetores, como a transição para a representação algébrica matricial, não é tarefa trivial para os alunos. Não é raro que os alunos operem mecanicamente os vetores desses espaços vetoriais e acabem obtendo a chamada *matriz mudança de base* $[I]^\alpha_\beta$ sem compreenderem que essa matriz possibilita trabalhar, por exemplo, com aplicações que envolvem mudanças de referencial. Essa constatação é corroborada por Parraguez, Lezama e

Jiménez (2016) ao usarem a teoria APOS[2] para explicar as construções mentais dos estudantes na aprendizagem do teorema para a mudança de base de vetores. Os autores concluíram que a construção da matriz de coordenadas como um processo não garante a construção das coordenadas de um vetor como um objeto.

3 As Representações No Ensino De Álgebra Linear

A Álgebra Linear é um composto explosivo de linguagens e modos de representação (DORIER, 2000). Em termos de linguagem, segundo Hillel (2000), na Álgebra Linear os objetos e as operações podem ser descritos utilizando a linguagem abstrata (espaços vetoriais, subespaços vetoriais, geradores, transformações, etc.), a algébrica (n-uplas, matrizes, posto, soluções dos sistemas lineares, etc.) e a geométrica (pontos, linhas, planos, transformações geométricas, etc.). Para cada linguagem, vetores, operações com vetores e transformações têm particular representação, terminologia e notação. Por exemplo, um vetor pode ser representado geometricamente como uma seta, algebricamente como uma linha ou coluna de números ou símbolos, ou de forma abstrata como um elemento de um espaço vetorial. Essas linguagens coexistem, mas não são equivalentes, e algumas vezes é necessário fazer a conversão entre elas.

Independente da linguagem, o entendimento das diferentes representações dos conceitos de Álgebra Linear potencia a compreensão da sua teoria. O termo representação, num sentido mais geral, significa, segundo Goldin (2002), "uma configuração que pode representar uma outra coisa de alguma forma" (p. 208). Segundo Duval (2012), o termo representação é importante e marginal na Matemática, pois na maioria das vezes, ele é empregado sob a ótica verbal "representar", como por exemplo, um vetor pode ser representado pela linguagem natural, um número, um símbolo, não devendo ser confundido o objeto matemático com sua representação, sendo essa distinção um elemento importante para a compreensão da Matemática. Assim, no contexto da matemática, a representação não pode ser compreendida isoladamente, mas sim num contexto dinâmico no qual as diferentes representações se relacionam para comunicar um determinado conceito matemático. Entre as representações de um dado objeto matemático, Dreyfus (2002) distingue as externas das

[2] A teoria APOS, desenvolvida por Asiala *et al*. (2004) e baseada em Piaget, postula que um indivíduo deve possuir as estruturas mentais apropriadas para dar sentido a um determinado conceito matemático. Essas estruturas mentais se referem às ações, processos, objetos e esquemas necessários para aprender o conceito.

CC BY
ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

internas. As representações externas são personalizações de ideias ou conceitos – como são exemplo as tabelas, os gráficos, as matrizes –, por meio da "escrita ou da oralidade, geralmente com o objetivo de tornar a comunicação sobre o conceito mais fácil" (DREYFUS, 2002, p. 31). As representações internas são as construções cognitivas que se formam na mente de uma pessoa, que correspondem a "esquemas internos ou quadros de referência que uma pessoa usa para interagir com o mundo exterior" (DREYFUS, 2002, p. 31). Para Dreyfus (2002), as representações são geradas na mente com base em sistemas de representação de uma dada situação concreta, a partir dos quais são criadas as várias representações do mesmo objeto matemático. O autor considera que para ter sucesso em Matemática é necessário, além de ter várias representações mentais relacionadas a diferentes aspectos de um mesmo conceito, saber transitar entre essas representações, de acordo com as situações que a resolução de um problema impõe. Uma posição similar é defendida por Duval (2012), para quem a compreensão de um dado conceito matemático se eleva quando se estabelece a conversão de um registro de representação noutro. Essa conversão exige variações num registro num sistema semiótico e a percepção da variação do registro num outro sistema semiótico. Essa conversão é uma operação cognitiva que não é trivial tendo que ser provocada no processo de ensino. É essa operação cognitiva que leva à conceitualização e que permite ao aluno compreender o mesmo objeto de conhecimento nos dois registros de representação e não confundir o objeto matemático com o seu registro de representação.

Por outro lado, no processo de ensino, a organização das estratégias dos professores e dos livros académicos se move constantemente entre essas linguagens e modos de representação, sem, muitas vezes, permitir o tempo necessário para fazer as conversões entre as diferentes representações e a reflexão sobre as suas implicações. Essas conversões geralmente são tomadas como naturais, não sendo exploradas em sala de aula (DORIER; ROBERT; SIERPINSKA, 2000). As diferentes linguagens utilizadas na Álgebra Linear e a conversão entre as diferentes representações para um mesmo objeto constituem uma fonte de dificuldade na aprendizagem dos alunos (HILLEL, 2000). Em geral, essas representações não são únicas e dependem da escolha de uma base ou de um sistema de coordenadas. Entender essa dependência consiste, segundo Hillel (2000), num grande desafio para os alunos.

De acordo com Hillel (2000), a principal dificuldade consiste na transição da representação abstrata para a algébrica, quando se trabalha com o $\mathbb{R}^n$, por conta da familiaridade dos alunos com a Geometria Analítica e com as coordenadas de um vetor em relação à base canônica, que são familiares no contexto geométrico. Contudo, essa

CC BY

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

familiaridade diz respeito aos eixos coordenados em vez do conceito de base, que exige o entendimento de combinação linear dos vetores da base, que nesse caso é a canônica. Na Geometria Analítica, os vetores são vistos como uma lista de números. Quando escritos em bases diferentes, essa identificação fica fortemente abalada visto que uma n-upla pode ser um vetor ou uma representação de um vetor em relação a uma base. Os alunos ficam presos à ideia de n-upla como vetor e não abandonam essa ideia (HILLEL, 2000).

Outro obstáculo é a transição dos espaços $\mathbb{R}^n$ para espaços mais gerais, como espaços de funções, matrizes e polinômios, pois nesses espaços não há a representação geométrica. Segundo Hillel (2000), para os alunos serem bem sucedidos devem adquirir a capacidade de conversão e ter uma atitude reflexiva sobre as inconsistências entre as representações que estão fazendo e os conceitos. O autor sugere ainda que um caminho para auxiliar os alunos a lidar com essas dificuldades é promover discussões sobre o problema matemático em questão, no sentido de abrir um debate sobre a natureza e o *status* da linguagem utilizada.

4 Metodologia

Este estudo pretende averiguar como alunos de cursos do Ensino Superior compreendem as transformações entre as diferentes representações, algébrica e geométrica, dos conceitos de coordenadas e de mudança de base na resolução de uma tarefa, composta por dois itens (vide Quadro I), após o ensino desses conceitos, por cinco professores. No ensino de tais conceitos, na disciplina de Álgebra Linear, os professores planejaram as suas aulas em conjunto integrando nas suas estratégias de ensino a exploração das diferentes representações e a abordagem sugerida por Harel (2000): exploração e visualização dos conceitos no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ utilizando a lousa e o GeoGebra; e generalização de conceitos. Tal estratégia derivou da constatação pelos professores da dificuldade que têm em ensinar conteúdos abstratos de forma que os alunos entendam (MORO; VISEU; SIPLE, 2016).

Os alunos desses professores ($n = 146$), intervenientes neste estudo, frequentavam diferentes cursos de uma universidade brasileira (Licenciaturas em Matemática e em Física; Engenharias Elétrica, Civil, Mecânica e de Produção e Sistemas; e Ciência da Computação). Nessa instituição, a disciplina de Álgebra Linear integra o terceiro semestre do currículo do curso de Licenciatura em Matemática e o segundo semestre do currículo dos demais cursos.

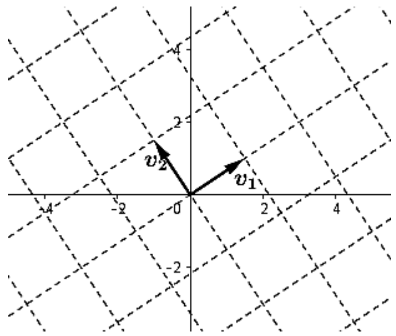
Atendendo à natureza do objetivo delineado, adotamos uma abordagem qualitativa e interpretativa na procura de compreender os significados (BOGDAN; BIKLEN, 1994) que os

CC BY

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

alunos dão à operacionalização dos conceitos de 'coordenadas' e 'mudança de base', em diferentes representações, na resolução das alíneas da seguinte tarefa (Quadro 1), que foi resolvida em contexto de sala de aula.

Seja $ABCD$ um polígono e $\beta = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$, onde $\boldsymbol{v_1} = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$ e $\boldsymbol{v_2} = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$, uma base do $\mathbb{R}^2$. Se as coordenadas dos vértices do polígono $ABCD$ na base β são: $[A]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $[B]_\beta = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[C]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $[D]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$,



a. Represente graficamente o polígono na base β e mostre como obteve o referido vértice em relação a essa base.
b. Dê as coordenadas dos vértices do polígono $ABCD$ em relação à base canônica.

Quadro 1 – Tarefa envolvendo o conceito de coordenadas de um vetor.
Fonte: Dados da pesquisa.

Com esta tarefa procuramos que, no item (a), os alunos representassem geometricamente um polígono, sendo conhecidas as coordenadas dos vértices em relação a uma base $\beta = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$. Para resolver a questão o aluno deveria observar que, por exemplo, para obter o vértice B, deveria percorrer duas unidades no sentido oposto ao vetor $\boldsymbol{v_1}$ e uma unidade no sentido de $\boldsymbol{v_2}$. Assim, deveria haver uma transição da representação matricial para a geométrica. Além disso, deveria explicar como obter geometricamente cada um dos vértices. Nesse caso, esperava-se que para o vértice B, por exemplo, o aluno fizesse a transição da representação matricial $[B]_\beta = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ para a algébrica $B = -2\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}$. Também poderia usar a linguagem natural para explicar o seu raciocínio.

Com o item (b), os alunos deveriam obter as coordenadas dos vértices do polígono $ABCD$ em relação à base canônica. Aqui o aluno tinha dois caminhos para encontrar a solução. O primeiro caminho consiste em utilizar o conceito de combinação linear para encontrar os vértices a partir de suas coordenadas na base β, por exemplo, $B = -2\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} = -2\left(\frac{3}{2}, 1\right) + \left(-1, \frac{3}{2}\right) = \left(-4, -\frac{1}{2}\right)$, e observar que as coordenadas de B na base canônica α, $[B]_\alpha = \begin{bmatrix} -4 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, são as próprias componentes de B, pois $\left(-4, -\frac{1}{2}\right) = -4(1{,}0) - \frac{1}{2}(0{,}1)$. O outro caminho passa por determinar as coordenadas de cada vértice utilizando a matriz mudança de base e a relação $[\boldsymbol{v}]_\alpha = [I]_\beta^\alpha [\boldsymbol{v}]_\beta$.

Na análise dos dados, examinamos as respostas dos alunos e as categorizamos a partir das semelhanças e diferenças que foram observadas, conforme as Tabelas 1 e 2.

CC BY

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

Tabela 1 – Categorias que representam as respostas dos estudantes para o item (a).

Códigos	**Categorias**	**Explicação sobre as categorias**
TDR	Transição em diferentes representações	Dadas as coordenadas dos vértices na base β, os alunos fizeram a representação dos pontos no gráfico e explicaram algebricamente como obtiveram cada vértice.
RG	Representação geométrica apenas	Os alunos fizeram apenas a representação geométrica dos pontos sem explicar como os encontraram.
BC	Referencial é a base canônica	Os estudantes representaram graficamente os vértices utilizando como referencial a base canônica, porém usando as coordenadas em relação à base β.
BB	Referencial é a base β	Os estudantes encontraram os vértices na base canônica e os representaram graficamente utilizando como referencial a base β
VRB	Vértices e Referencial na base canônica	Encontraram os vértices na base canônica e os representaram em relação a essa base.
SV	Soma de vetores	Para $[A]_\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, representaram a_1v_1 e b_2v_2, mas não observaram que se obtém o vértice resultante a partir da soma $av_1 + bv_2$
E	Escala	Os estudantes não perceberam que a escala, cujo referencial era a base β, era 1:1.
D	Direção dos vetores equivocada	Os estudantes não observaram que uma base é ordenada, assim trocaram v_1 com v_2.
NC	Não categorizado	Não foi possível categorizar
NR	Não respondeu	Nenhuma solução foi apresentada para o item (a) da questão

Fonte: Elaborado pelos autores.

A categoria TDR representa a solução correta para o item (a), enquanto que as categorias RG, E e D representam acertos parciais e, por fim, as categorias BC, BB, VRB e SV representam respostas incorretas com erros conceituais.

Tabela 2 – Categorias que representam as respostas dos estudantes para o item (b).

Códigos	**Categorias**	**Explicação sobre as categorias**
CL	Coordenadas por Combinação Linear	Encontraram as coordenadas dos vértices na base canônica utilizando o conceito de coordenadas (fazendo uma combinação linear)
MB	Coordenadas por Matriz mudança de base	Encontraram as coordenadas dos vértices na base canônica utilizando a matriz mudança de base
CC	Confusão entre coordenadas e componentes de um vetor	Estudantes confundiram as coordenadas de um vetor em relação a uma base com as componentes x e y do vetor.
BE	Uso de coordenadas em relação à base equivocada	Ao encontrar os vértices fizeram a combinação linear dos vetores da base canônica ao invés da base β.
MBT	Mudança de base inversa à solicitada	Para encontrar as coordenadas dos vértices em relação à base canônica utilizaram a matriz mudança de base $[I]_\beta^\alpha$ ao invés de $[I]_\alpha^\beta$
FCC	Falha no conceito de coordenadas	Utilizaram o conceito de coordenadas de forma totalmente equivocada para encontrar os vértices e/ou as coordenadas.
PM	Produto matricial equivocado	Utilizaram equivocadamente a relação $[v]_\alpha = [v]_\beta [I]_\beta^\alpha$, ou seja, fizeram o produto entre uma matriz 2×1 por uma 2×2.
NC	Não categorizado	Não foi possível categorizar
NR	Não respondeu	Nenhuma solução foi apresentada para o item (b) da questão

Fonte: Elaborado pelos autores.

CC BY
ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

As categorias CL e MB representam a solução correta para o item (b), enquanto que BE, FCC, PM representam a resposta incorreta com erro conceitual e as categorias CC e MBT foram consideradas com acerto parcial.

Em ambos os itens da tarefa, na categoria NC, foram classificadas as respostas incorretas, com erros conceituais, nas quais não foi possível identificar o caminho que os alunos tomaram para resolver a questão. Além disso, em ambos os itens, algumas respostas foram classificadas em mais do que uma categoria.

5 Apresentação De Resultados

Na apresentação dos resultados da pesquisa, procuramos preservar a identidade dos alunos apresentando as suas respostas através da letra inicial do nome de seu professor (B, C, L, N, T), seguido do número que traduzia a sua ocupação na turma. Por exemplo, B11 representa o 11.º aluno da sala de aula do professor B. A Tabela 3 apresenta o número de respostas para cada uma das dez categorias que emergiram das respostas dos alunos para o item (a) da tarefa avaliativa.

Tabela 3 – Número de respostas para cada categoria do item (a).

Códigos	Categorias	Frequências
TDR	Transição em diferentes representações	74
RG	Representação geométrica apenas	22
BC	Referencial é a base canônica	13
BB	Referencial é a base β	4
VRB	Vértices e Referencial na base canônica	3
SV	Soma de vetores	3
E	Escala	4
D	Direção dos vetores equivocada	4
NC	Não categorizado	9
NR	Não respondeu	20

Fonte: Elaborado pelos autores.

Constata-se que a categoria TDR está presente em 74 respostas. Significa que 74 alunos (51%) conseguiram fazer a conversão entre as representações algébrica matricial, algébrica vetorial e geométrica. Entretanto, 22 das respostas (15,1%) contemplaram apenas o registro geométrico (conversão da representação algébrica matricial para a geométrica) sem explicar como obtiveram cada um dos vértices, como ilustra a resolução do aluno C12 (Figura 2).

CC BY

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

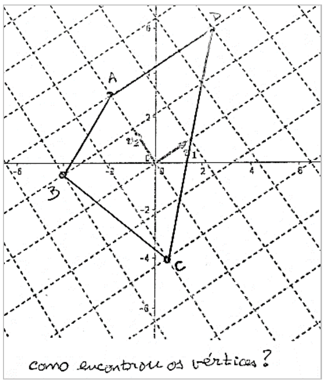
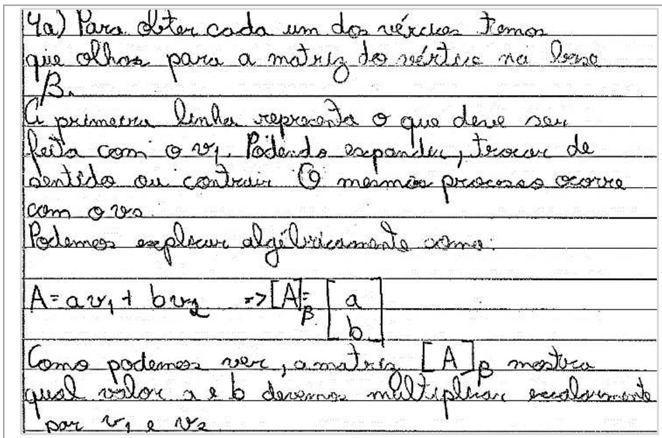


Figura 2 – Resposta do aluno C12, ilustrando a categoria RG.
Fonte: Dados da pesquisa.

Neste caso, presumimos que os alunos tiveram dificuldades de como explicar o raciocínio utilizado para representar os vértices.

Já os alunos que apresentaram uma explicação sobre como obtiveram cada um dos vértices na base β (categoria TDR), fizeram uso da linguagem algébrica e/ou da linguagem natural. A Figura 3(a) ilustra a resposta de um aluno que utilizou ambas as linguagens para explicar sua resposta e a Figura 3(b) ilustra a resposta de um aluno que utilizou apenas a linguagem algébrica simbólica.



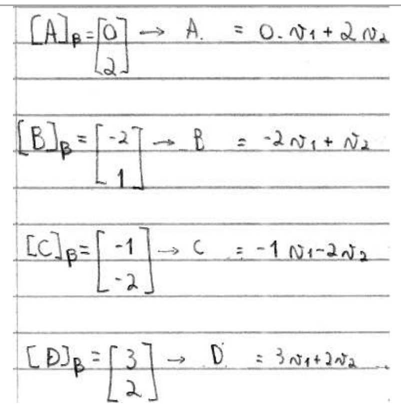


Figura 3 – (a) Resposta do aluno B11 utilizando a linguagem algébrica e a natural para explicar o item (a), ilustrando a categoria TDR. (b) Resposta do aluno C1 utilizando a linguagem algébrica para explicar o item (a), ilustrando a categoria TDR.
Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, ilustramos algumas respostas com o uso da linguagem natural, classificadas na categoria TDR:

> *Obtive os vértices em relação à base β multiplicando por escalar os vetores $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$, que formam tal base, e traçando um paralelogramo (Aluno N12).*
> *Os eixos do gráfico se tornaram os vetores $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$. A partir daí, os vértices foram encontrados com base nesses mesmos eixos (similarmente aos eixos canônicos, com $i = \boldsymbol{v}_1$ (eixo x) e $j = \boldsymbol{v}_2$ (eixo y) (Aluno B3).*
> *Vértice C: 3 unidades no sentido contrário a $\boldsymbol{v}_1$e 3 unidades no sentido de $\boldsymbol{v}_2$ (Aluno B5).*

cc BY

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

Essa representação em linguagem natural mostra a importância para os alunos de descreverem nas atividades os passos realizados. A linguagem matemática e a linguagem natural devem estar presentes, pois são diferentes formas de representação e os alunos devem ser estimulados a transitar entre elas.

Em relação aos erros encontrados nos registros geométricos, fizemos uma análise para verificar qual foi o raciocínio utilizado pelos alunos e os classificamos conforme as categorias BC, BB, VRB, SV, E e D. Na representação geométrica dos vértices, o erro mais comum foi usar as coordenadas dos vértices em relação à base β, tomando como referencial a base canônica. A resposta do aluno C2 (Figura 4) ilustra esse caso, que foi classificado na categoria BC.

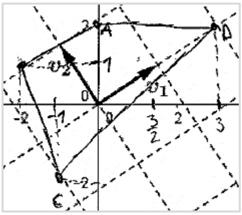


Figura 4 – Representação geométrica pelo aluno C2.
Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que, por exemplo, o vértice A deveria ser marcado na extremidade do vetor $2v_2$ pois as coordenadas do vértice A na base β foram dadas no enunciado da tarefa por $[A]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Entretanto, o aluno C2 marcou o ponto A na extremidade do vetor 2j. Essa situação revela que o aluno conseguiu fazer a transição da linguagem algébrica para a geométrica, mas o erro gerado mostra que a relação entre base e referencial não foi assimilada.

Alguns alunos fizeram a transição da representação algébrica para a geométrica de forma totalmente equivocada e que exemplificamos nas Figuras 5(a) e 5(b). Em ambos os casos os alunos usaram as coordenadas dos vértices em relação à base β, dadas no enunciado da tarefa, para encontrar corretamente os vértices. Só que agora os vértices estão escritos na base canônica e este passo devia ser feito para responder ao item (b) da tarefa. Na sequência, os representaram geometricamente, ou utilizando como referência a base β (Figura 5(a)) ou a base canônica (Figura 5(b)). Ponderamos que em ambos os casos os alunos fizeram os cálculos mecanicamente, sem entender o significado do conceito de coordenadas bem como a sua interpretação geométrica.

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

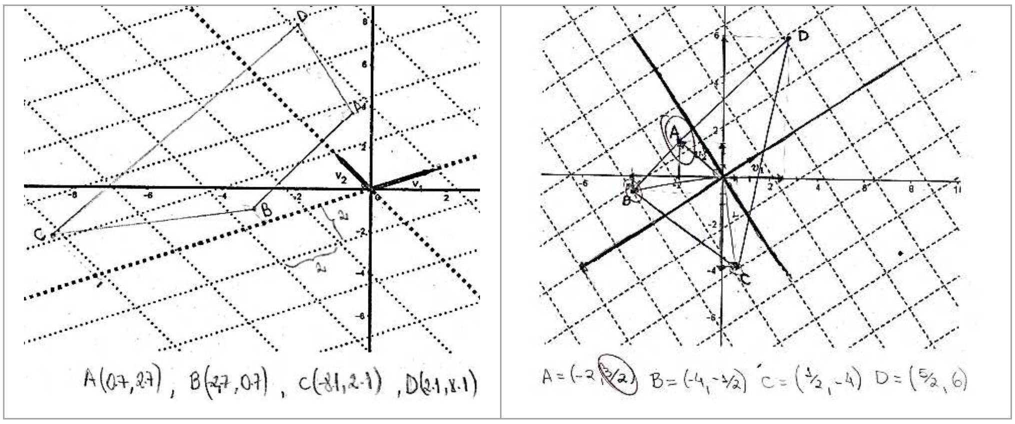


Figura 5 – (a) Representação geométrica do aluno L29, ilustrando a categoria BB. (b) Representação geométrica do aluno N24, ilustrando a categoria VRB.
Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar do aluno L29 ter usado a escala 2:2, não classificamos sua resposta na categoria E, pois acreditamos que o mesmo foi induzido a fazer uso dessa escala pela limitação do tamanho da malha, visto que encontrou vértices cuja distância à origem excederia o espaço dado.

Houve alunos que apresentaram dificuldades oriundas da Geometria Analítica, como a soma de vetores, associadas a dificuldades com conceitos da própria Álgebra Linear, como a combinação linear de vetores. Para representar $[A]_{\beta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, desenharam $a\boldsymbol{v_1}$ e $b\boldsymbol{v_2}$, mas não observaram que se obtém o vértice resultante a partir da soma $a\boldsymbol{v_1} + b\boldsymbol{v_2}$. A resposta do aluno L49 (Figura 6) ilustra essa situação, que classificamos na categoria SV.

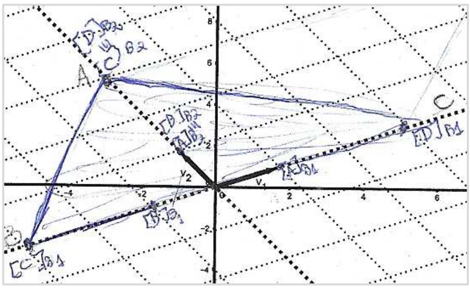


Figura 6 – Resolução do aluno L49, ilustrando a categoria SV.
Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que o aluno L49 representa cada um dos vértices em duas posições. Por exemplo, as coordenadas do vértice C eram dadas, para a turma de L49, por $[C]_{\beta} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Assim, o vértice C correspondia a $-3\boldsymbol{v_1} + 3\boldsymbol{v_2}$. Entretanto, o aluno L49 representou um ponto na extremidade do vetor $-3\boldsymbol{v_1}$, a quem chamou de $[C]_{\beta_1}$e outro ponto na extremidade de $3\boldsymbol{v_2}$, a quem chamou de $[C]_{\beta_2}$.

Outros equívocos que apareceram na representação geométrica foram tomar a escala

CC BY

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

2:2 (Figuras 7(a)) ou não observar que uma base é ordenada (Figura 7(b)).

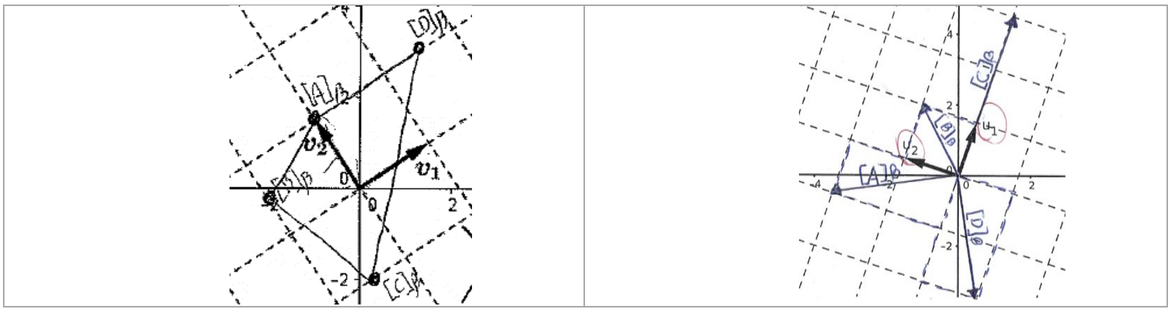


Figura 7. (a) Registro do aluno C3 ilustrando a categoria E. (b) Registro do aluno T9 ilustrando a categoria D. Fonte: Dados da pesquisa.

Em ambos os casos, os alunos conseguiram fazer a transição da representação algébrica para a matricial. No primeiro caso, o aluno não observou que a escala é 1:1, considerando que os vetores da base β têm, cada um, 2 unidades de comprimento. Já no segundo caso, o aluno tomou a direção dos vetores $\boldsymbol{u_1}$ e $\boldsymbol{u_2}$ de forma trocada. Por exemplo, para o vértice A, de coordenadas $[A]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, representou $-\boldsymbol{u_1} + 2\boldsymbol{u_2}$**,** enquanto deveria ser $2\boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2}$. Aqui, apesar de o raciocínio geométrico estar correto após tomar a direção trocada dos vetores, existe um erro conceitual em relação à definição de coordenadas, pois ao mudar a ordem dos vetores $\boldsymbol{u_1}$ e $\boldsymbol{u_2}$ na base β, deveria também ser trocada a ordem das entradas da matriz de coordenadas de cada vértice. Por isso que muitos autores de livros didáticos têm como convenção sempre trabalhar com uma '*base ordenada'*, onde a ordem dos vetores permanece inalterada, para evitar esse tipo de equívoco que alguns alunos cometeram.

Chamamos a atenção para o caso das respostas classificadas na categoria D e E, que apesar de terem acertos parciais, os alunos conseguiram fazer a transição entre as diferentes representações, sendo também classificadas na categoria TDR.

A Tabela 4 apresenta o número de respostas para cada uma das dez categorias que emergiram das respostas dos alunos para o item (b) da tarefa.

Tabela 4 – Número de respostas para cada categoria do item (b).

Códigos	**Categorias**	**Frequências**
CL	Coordenadas por Combinação Linear	35
MB	Coordenadas por Matriz mudança de base	24
CC	Confusão entre coordenadas e componentes de um vetor	36
BE	Vetor escrito como combinação linear da base trocada	6
MBT	Mudança de base inversa à solicitada	3
FCC	Falha no conceito de coordenadas	16
PM	Produto matricial equivocado	2
NC	Não categorizado	4
NR	Não respondeu	25

Fonte: Elaborado pelos autores.

cc BY

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

O item (b) da tarefa envolveu a transição entre as representações algébrica vetorial e matricial. De acordo com a Tabela 4, 59 alunos (40,4%) resolveram corretamente este item, seja utilizando o conceito de combinação linear ou utilizando a matriz mudança de base para encontrar as coordenadas de cada vértice na base canônica, como ilustram as Figuras 8(a) e 8(b).

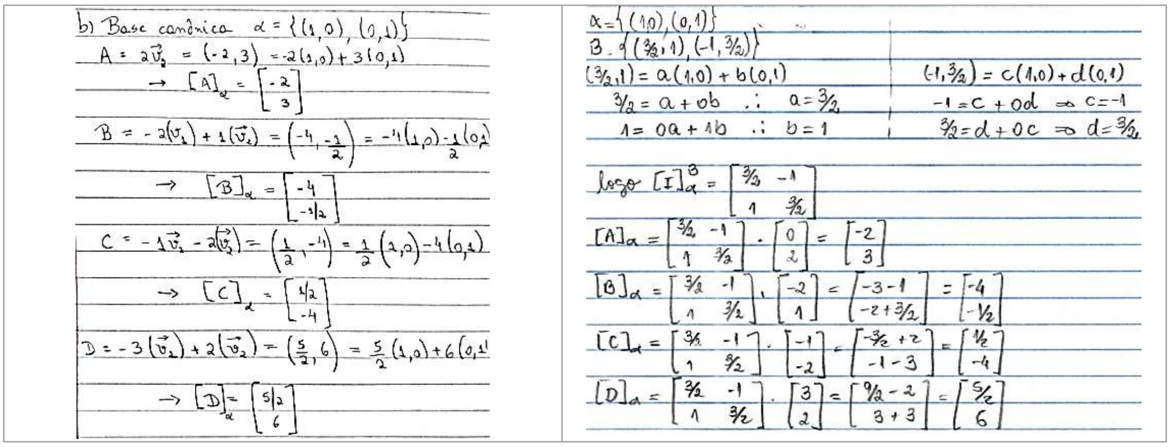


Figura 8 – (a) Resolução do aluno C22, ilustrando a categoria CL. (b) Resolução do aluno C8, ilustrando a categoria MB.
Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que 21,2% dos alunos confundiram coordenadas com as componentes x e y dos vértices, pois encontraram os vértices mas não os escreveram como combinação linear da base canônica, como ilustra a Figura 9. Na base canônica, de facto as coordenadas dos vértices coincidirão com as componentes x e y, como ilustrou o aluno C22 na Figura 8(a). Entretanto, o aluno C3 encontrou apenas os vértices não deixando clara a diferença entre coordenadas em relação à base canônica e componentes do vértice, muito menos usando notação adequada para representar as coordenadas, conforme ilustra a figura 9.

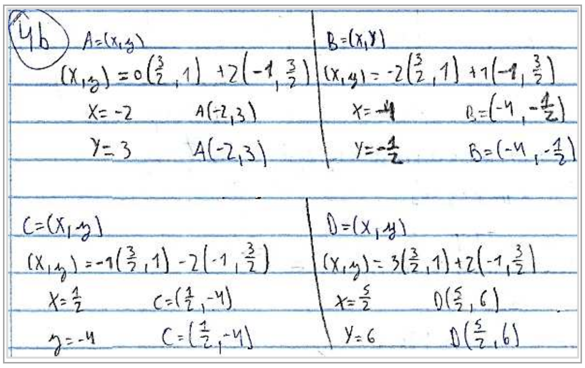


Figura 9 – Resolução do aluno C3, ilustrando a categoria CC.
Fonte: Dados da pesquisa.

Talvez para os alunos seja óbvio que as coordenadas coincidem com as componentes do vértice quando se trata da base canônica e não utilizaram linguagem adequada para

CC BY
ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

representar isso, seja pela dificuldade em se expressar com a linguagem algébrica ou mesmo pelo pensamento que os alunos têm de que o óbvio não precisa de justificativa.

Alguns alunos, ao encontrar os vértices, utilizaram as coordenadas dos vértices na base β para fazer a combinação linear dos vetores da base canônica ao invés dos vetores da base β, como exemplifica a Figura 10.

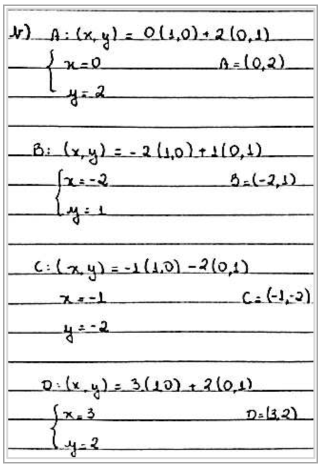


Figura 10 – Resolução do aluno N24, classificada nas categorias BE e CC.
Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que o aluno N24 também apresenta confusão entre coordenadas e componentes de um vetor, pois ele deixou explícito, com a notação utilizada na sua resolução, que encontrou os vértices e não as coordenadas em relação à base canônica. A situação ilustrada revela erros conceituais os quais classificamos em duas categorias, BE e CL.

Os equívocos cometidos pelos alunos que utilizaram a matriz mudança de base para encontrar as coordenadas dos vértices na base canônica foram os seguintes: (i) usar a matriz mudança de base invertida à solicitada, e então usar a relação $[\boldsymbol{v}]_\alpha = [I]_\beta^\alpha[\boldsymbol{v}]_\beta$ ao invés de $[\boldsymbol{v}]_\alpha = [I]_\alpha^\beta[\boldsymbol{v}]_\beta$ (categoria MBT); (ii) utilizar equivocadamente a relação $[\boldsymbol{v}]_\alpha = [\boldsymbol{v}]_\beta[I]_\alpha^\beta$ (categoria PM), demonstrando nesse caso haver falha conceitual no produto de matrizes, visto que foi realizado o produto entre uma matriz 2×1 por uma 2×2; (iii) encontrar a matriz $[I]_\beta^\alpha$ e dizer que essa matriz contém as coordenadas dos vértices na base canônica, revelando neste caso que os alunos não têm a noção do que representa essa matriz, muito menos do significado das coordenadas dos vértices numa determinada base. Este último caso classificamos na categoria FCC.

Além disso, na categoria FCC também classificamos outras respostas nas quais os alunos utilizaram o conceito de coordenadas de forma totalmente equivocada para encontrar os vértices e/ou as coordenadas. Na Figura 11(a), ilustramos um desses casos, no qual para encontrar as coordenadas na base α (canônica), o aluno N34 escreveu as coordenadas de cada

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

vértice que foram dadas na base β como combinação linear dos vetores de α. Para N34, as coordenadas de cada vértice na base β são equivalentes às coordenadas na base α. Já o aluno L32, na tentativa de encontrar os vértices (Figura 11(b)), escreveu as coordenadas dos vértices, que foram dadas no enunciado do problema, como combinação linear dos vetores da base β. A resolução de ambos os alunos revela que não entenderam o que representam as coordenadas de um vetor em relação a uma base, nem como se faz o processo para mudar de uma base para outra.

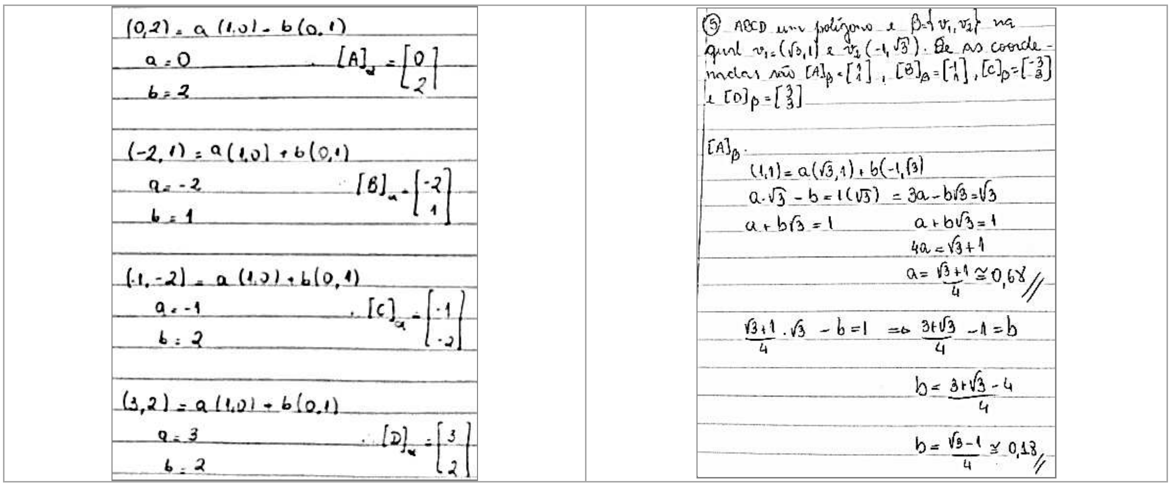


Figura 11 – (a) Resolução do aluno N34, categoria FCC. (b) Resolução do aluno L32, categoria FCC.
Fonte: Dados da pesquisa

Outro equívoco que encontramos na resolução de alguns alunos e que classificamos na categoria FCC, foi considerar que as notações $[A]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $A(1,1)$ são equivalentes, conforme a Figura 12(a). Atentamos que o aluno B1 ignorou a base β e considerou que foram dadas as coordenadas em relação à base canônica.

Na Figura 12(b), ilustramos outro caso em que o aluno não compreendeu o que são as coordenadas de um vetor. Dadas as coordenadas, por exemplo $[A]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e a base $\beta = \{(\sqrt{3}, 1), (1, \sqrt{3})\}$, o aluno L12, ao invés de encontrar o vértice A fazendo a combinação linear $A = 1(\sqrt{3}, 1) - 1(1, \sqrt{3})$, simplesmente considerou que a abscissa e a ordenada de A são, respectivamente, os vetores $1(\sqrt{3}, 1)$ e $-1(1, \sqrt{3})$.

cc BY
ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

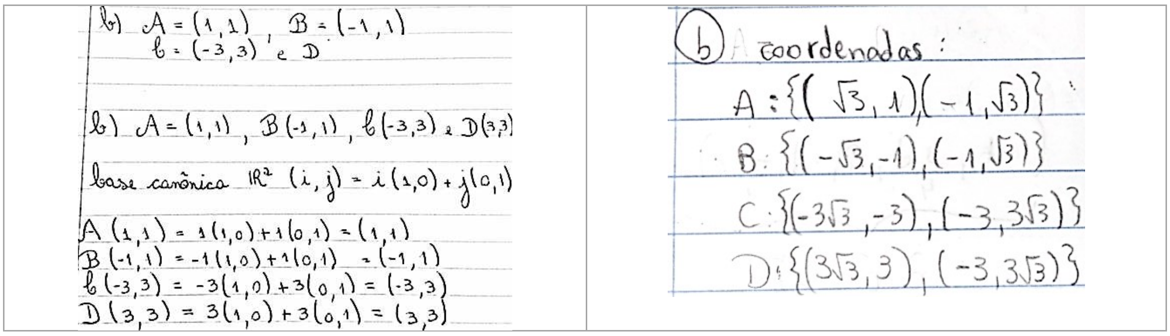


Figura 12 – (a) Resolução do aluno B1, categoria FCC. (b) Resolução do aluno L12, categoria FCC.
Fonte: Dados da pesquisa

Os exemplos que mostramos, ilustrando erros conceituais evidenciados nas resoluções que classificamos na categoria FCC, mostram que alguns alunos não conseguiram fazer a transição entre as linguagens algébrica vetorial e matricial, exigida no item (b) da tarefa.

Observando as Tabelas 3 e 4, atentamos que 13,7% dos alunos não responderam ao item (a), não conseguindo transitar entre as diferentes representações, enquanto que 17,1% não responderam ao item (b). Tais dificuldades indiciam estarem relacionadas à ausência de pré-requisitos dos conteúdos envolvidos, como combinação linear e base.

6. Considerações Finais

O ensino de tópicos de Álgebra Linear tem como uma das finalidades desenvolver o pensamento abstrato do aluno. Nesse processo, Harel (2000) defende um ensino que envolva o aluno a trabalhar com exemplos concretos para tornar os conceitos abstratos 'visíveis' na sua mente. Com base neste pressuposto, procuramos averiguar como alunos de diferentes cursos na área das Ciências Exatas compreendem as transformações entre as diferentes representações, algébrica e geométrica, dos conceitos de coordenadas e de mudança de base, a partir da resolução de uma tarefa apresentada em linguagem geométrica. A análise das respostas aponta para um melhor desempenho dos alunos na transição da representação algébrica para a geométrica. Tal resultado faz emergir: (i) uma maior predisposição dos alunos para situações que apelam à intuição do que a situações de natureza abstrata; (ii) dificuldades em efetuar uma mudança de base; e (iii) falhas conceituais.

A predisposição para situações que apelam à intuição indicia dever-se à tradução de algo similar que os alunos realizaram noutras situações, como, por exemplo, em Geometria Analítica. Nesta forma de pensamento os alunos não precisam de se preocupar com o registro algébrico, que apela ao rigor de linguagem e ao formalismo.

CC BY
ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

As dificuldades que os alunos manifestam em mudar de base relacionam-se, sobretudo, com o uso e a interpretação inadequada da linguagem simbólica. Essas dificuldades também foram sentidas pelos alunos do estudo realizado por Çelik (2015) sobre os tipos de raciocínio relacionados em verificar se a (in)dependência de um conjunto de três vetores não especificados implica a (in)dependência do novo conjunto obtido por exclusão de um vetor ou adicionando outro. Também Britton e Henderson (2009), ao debruçarem-se sobre as dificuldades dos alunos no estudo do conceito de subespaço, identificaram dificuldades na interpretação e no entendimento do uso da linguagem simbólica para provar se um determinado conjunto é ou não um subespaço.

Alguns alunos mostram ter falhas conceituais quanto aos tópicos de coordenadas e de mudança de base, fazendo cálculos mecânicos sem atentar se a sua resolução estava de acordo ou não com os conceitos. O estudo confirma a confusão que alguns alunos fazem entre as componentes x_i de um vetor $\boldsymbol{v}$ e as entradas da matriz de coordenadas de $\boldsymbol{v}$ em relação a uma determinada base, como aponta a pesquisa de Hillel (2000). Em particular, na segunda parte da tarefa, como a base envolvida era a canônica, alguns alunos não distinguiram essa diferença, visto que as componentes de um vetor coincidem com as coordenadas desse vetor em relação à base canônica. Uma evolução dessa tarefa, oriunda dessa experimentação, foi a adaptação da alínea b, solicitando as coordenadas dos vértices do polígono em relação a uma base diferente da canônica, buscando clarificar aos alunos essa diferença entre componentes e coordenadas de um vetor e mobilizar os diferentes registros de representação e suas relações, assim os auxiliando na compreensão do conceito de mudança de base.

Outros alunos manifestam ter dificuldades oriundas da Geometria Analítica, como a soma de vetores, ou dificuldades associadas com conceitos estudados na própria Álgebra Linear, como o produto de matrizes e a combinação linear de vetores.

Reconhecer as dificuldades dos alunos em aprender tópicos de Álgebra Linear é de suma importância para o professor promover, na sua prática docente, o desenvolvimento da compreensão, em detrimento da memorização de fatos e procedimentos, e da interpretação dos conceitos e da linguagem simbólica que são pré-requisitos para o estudo dos tópicos em questão. Esse reconhecimento propicia uma reflexão, por parte dos professores, sobre formas de integrar na tarefa analisada neste estudo a exploração da transição da representação geométrica para a algébrica, uma vez que a tarefa só explorou a transição no sentido contrário. A literatura aponta que muitos alunos só conseguem fazer a transição entre as diferentes representações num único sentido (HILLEL, 2000). Assim, num trabalho conjunto entre

CC BY

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

professores que ensinam Álgebra Linear, novas práticas estão sendo construídas e experimentadas, pois temos a hipótese que trabalhar com os alunos essa transição explorando diferentes referenciais (bases) pode ser um caminho para ultrapassar essa dificuldade.

Agradecimentos

Os autores agradecem a FAPESC - Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina pelo apoio financeiro ao Grupo de Pesquisa PEMSA.

Referências

ANDRADE, J. P. G. Vetores: interações à distância para aprendizagem de Álgebra Linear. 2010. 125 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco-UFPE, Recife, Brasil, 2010.

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational studies in mathematics**, v. 52, n. 3, p. 215-241, 2003.

ASIALA, M. *et al*. A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. 2004. Disponível em: < http://www.math.kent.edu/~edd/Framework.pdf>. Acesso em: 16 mar. 2018.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra linear**. São Paulo: Editora Harbra, 1989.

BRITTON, S.; HENDERSON, J. Linear algebra revisited: An attempt to understand students' conceptual difficulties. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 40, n. 7, p. 963-974, 2009.

ÇELIK, D. Investigating students' modes of thinking in linear algebra: the case of linear independence. **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**. 2015. Disponível em: <http://www.cimt.org.uk/journal/celik.pdf>. Acesso em: 12 fev. 2018.

DIKOVIĆ, L. Interactive learning and teaching of linear algebra by web technologies: some examples. **The Teaching of mathematics**, v. x, n. 2, p. 109-116, 2007.

DORIER, J. L.; ROBERT, A.; SIERPINSKA, A. Conclusion. In J. L. Dorier (Ed.), **On the teaching of linear algebra**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000, p. 273-276.

DORIER, J. L. *et al*. The obstacle of formalism in linear algebra. In J. L. Dorier (Ed.), **On the teaching of linear algebra.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000, p. 85-124.

DORIER, J. L. Teaching linear algebra at university. **ICM Proceedings**, v. 3, p. 875-884 2002.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2002, p. 25-41.

CC BY

ISSN 1981-1322
DOI: http:// doi.org/105007/1981-1322.2018v13n2p72

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **REVEMAT**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

GOLDIN, G. A. Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), **Handbook of International Research in Mathematics Education**. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 2002. p. 197-278.

HAREL, G. Learning and Teaching Linear Algebra: Difficulties and an Alternative Approach to Visualizing Concepts and Processes. **Focus on learning problems in mathematics**, v. 11, n. 1-2, p.139-148, 1989.

HAREL, G. Three principles of learning and teaching mathematics. In J. L. Dorier (Ed.), **On the teaching of linear algebra.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 177-189.

HILLEL, J. Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J. L. Dorier (Ed.), **On the teaching of linear algebra.** Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2000. p. 191-207.

LAY, D. C. **Linear algebra and its applications**. 4. ed. Boston: Addison-Wesley, 2003.

MORO, G.; VISEU, F.; SIPLE, I. Z. Ensino de álgebra linear: traços de uma pesquisa. In: **Anais do II Colbeduca – Colóquio Luso-Brasileiro de Educação**. Joinville: Universidade do Estado de Santa Catarina, 2016, p. 243-256.

PARRAGUEZ, M.; LEZAMA, J.; JIMÉNEZ, R. Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del teorema de cambio base de vectores. **Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas**, v. 34, n. 2, p. 129-150, 2016.

PJANIC, K.; LIDAN, E.; KURTANOVIC, A. Visualization of relationship between a function and its derivative. **Eğitim Bilimleri Araştırmaları Dergisi - Journal of Educational Sciences Research**, n.1, v.5, p. 205–213, 2015.

STRANG, W. G. A linguagem das máquinas. [2014, outubro]. **Revista CÁLCULO: Matemática para todos**, ed.45, ano 4, p.18-21. Entrevista concedida a Mariana Osone.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v.12, n.2, 151-169, 1981

WAWRO, M; SWEENEY, G. F.; RABIN, J. M. Subspace in Linear Algebra: investigating students' concept images and interactions with the formal definition. **Educational Studies in Mathematics**, v. 18, n. 1, p. 1-19, 2011.