Andreia Filipa Dos Santos Gomes **A argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria de alunos do 1º e 2º Ciclo do Ensino Básico**

UMinho | 2020

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Andreia Filipa Dos Santos Gomes

A argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria de alunos do 1º e 2º Ciclo do Ensino Básico

janeiro de 2020

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Andreia Filipa Dos Santos Gomes

A argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria de alunos do 1º e 2º Ciclo do Ensino Básico

Relatório de estágio
Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e
de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico

Trabalho efetuado sob a orientação do
Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

janeiro de 2020

AGRADECIMENTOS

Ser grato é saber reconhecer a importância que as pessoas nos dão, independentemente de tudo o que somos ou fazemos, por isso, ao finalizar esta etapa da minha vida, agradeço de coração...

Aos meus pais, por estarem sempre presentes em todos os momentos da minha vida, por me incentivarem ao longo de todo o percurso, por nunca me deixarem desistir, acreditando nas minhas capacidades e demonstrando orgulho em tudo o que fui alcançando, obrigada por tudo!

Ao meu namorado, o meu porto seguro, pela sua disponibilidade em me ajudar quando mais precisei, pela paciência infindável, pelo enorme companheirismo, pelo amor e absoluta confiança em mim, agradeço do fundo do coração tudo aquilo que fazes por mim.

Ao Doutor Floriano Viseu, por ter sido a pessoa que mais me ajudou na resposta às exigências da iniciação à prática profissional, o meu sincero obrigado! Agradeço por todos os conselhos que me deu, pela disponibilidade desmedida, pela dedicação e compreensão, por me fazer acreditar que seria possível e pela confiança que depositou em mim.

Às professoras cooperantes, por me terem acolhido com tanto carinho, por me ajudarem a crescer enquanto pessoa e professora, por me fazerem sentir em casa. Agradeço por terem sido para mim, além de profissionais fantásticas, minhas amigas.

Às crianças, por terem sido a principal razão de ter mantido o meu sorriso, um sentido obrigada. Foi para mim, um gosto vos ter conhecido como pessoas e ter trabalhado convosco como alunos.

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

A argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria de alunos do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico

RESUMO

O presente relatório, desenvolvido no âmbito da Unidade Curricular de Estágio do Plano de Estudos do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico, procura averiguar o contributo da argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria de alunos do 1.º e do 2.º Ciclo do Ensino Básico. Para a consecução desse objetivo foram formuladas as seguintes questões de investigação: (1) Que tipos de argumentos os alunos recorrem nas atividades de aprendizagem de tópicos de Geometria? (2) Que dificuldades manifestam os alunos quando têm de argumentar matematicamente as suas atividades? (3) Que perceções têm os alunos sobre a argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria? De modo a dar resposta a estas questões procedeu-se à recolha de informação através dos seguintes métodos de recolha de dados: produções dos alunos; questões aula; gravações áudio das aulas; e questionários.

A intervenção pedagógica foi realizada em dois contextos escolares distintos, no 1.º e no 2.º ciclo do Ensino Básico, numa turma de 2.º e de 5.º ano de escolaridade.

Os resultados obtidos mostram que os alunos recorrem, preferencialmente, a argumentos simbólicos, tendendo a apresentar conjeturas, por vezes a justificá-las, mas nem sempre a provar os resultados matemáticos que obtêm. As principais dificuldades que os alunos manifestam ao argumentar matematicamente devem-se, sobretudo, à não predisposição em partilhar as suas ideias, os seus argumentos, não por não se sentirem capazes de o fazer, mas, principalmente, porque têm medo de falhar perante o outro. Os alunos percecionam a argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria como algo positivo, percebendo o valor significativo que a mesma tem no seu processo de aprendizagem, referindo que a sua prática lhes possibilitou uma melhor compreensão dos tópicos de Geometria estudados e tornou a sua aprendizagem mais significativa porque foi realizada com reciprocidade.

Palavras-chave: Alunos do 1.º e do 2.º Ciclo; Aprendizagem de Geometria; Argumentação Matemática; Dificuldades.

The mathematical argumentation in the learning of Geometry topics in students of Elementary School and Middle School

ABSTRACT

This report, developed in the context of the curricular Internship, part of the Study Plan for the Master in Teaching of Elementary School and in Teaching of Mathematics and Natural Sciences in Middle School, seeks to understand the contribution of mathematical argumentation in learning Geometry topics from students in the Elementary School and Middle School. In order to achieve this goal, the following research questions were formulated: (1) What types of arguments do students use in the learning activities of Geometry topics? (2) What difficulties do students have when they have to use mathematically argumentation in their activities? (3) What perceptions do students have about mathematical argumentation in the learning of Geometry topics? In order to answer these questions, information was collected through the following methods of data collection: students' answers and inputs; class issues; audio recordings of classes; and questionnaires.

The pedagogical intervention was carried out in two different school contexts, in the 2nd grade of an elementary school and in the 5th grade of a middle school.

The obtained results show that students use, preferably, symbolic arguments, tending to present conjectures, sometimes justifying them, but not always prove the mathematical results they obtain. The main difficulties that students manifest when arguing mathematically are mainly due to the lack of predisposal to share their ideas, their arguments, not because they do not feel capable of doing so, but mainly because they are afraid of failing before others. The students perceive the mathematical argumentation in the learning of Geometry topics as something positive, realizing the significant value that it has in their learning process, referring that their practice enabled them to better understand the Geometry topics that were being studied and made their learning process more significant because this was performed with reciprocity.

Keywords: Difficulties; Learning of Geometry; Mathematical Argumentation; Students of elementary school and middle school

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE QUADROS

ÍNDICE DE TABELAS

É preciso ter esperança, mas ter esperança do verbo esperançar, porque tem gente que tem esperança do verbo esperar. E esperança do verbo esperar não é esperança, é espera. Esperançar é se levantar, esperançar é ir atrás, esperançar é construir, esperançar é não desistir! Esperançar é levar adiante, esperançar é juntar-se com outros para fazer de outro modo.

Paulo Freire

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O presente relatório de estágio insere-se no âmbito da Unidade Curricular de Estágio do Plano de Estudos do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico. De modo a apresentar o que resultou do projeto de intervenção pedagógica desenvolvido em turmas destes ciclos do Ensino Básico, sob a designação 'A argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria de alunos do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico', o Capítulo I, *Introdução*, divide-se em três secções. A primeira secção apresenta o problema em estudo; a segunda secção evidencia a pertinência do estudo, expressando o seu objetivo primordial e as questões de investigação intrínsecas ao mesmo; e a terceira, e última secção, explana a estrutura organizativa do relatório.

1.1. Problema em estudo

Durante a observação contextual apercebi-me de que os alunos apresentavam poucos hábitos de argumentação, quando o National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2007) refere que os programas de ensino, desde o pré-escolar até ao 12.º ano de escolaridade, devem habilitar todos os alunos a "desenvolver e avaliar argumentos e provas matemáticas" (p. 310) e incentivá-los a "discutir o seu raciocínio com o professor e os colegas, explicando em que se basearam para formular as suas conjeturas e a lógica das suas afirmações matemáticas" (p. 310). Também o documento denominado de 'Aprendizagens Essenciais' (Direção Geral da Educação [DGE], 2018) denota que a argumentação matemática está intimamente ligada à comunicação matemática e ao raciocínio matemático, sendo uma área de competência essencial do perfil dos alunos.

Esta problemática suscitou-me interesse pessoal, porque a Matemática, hoje em dia, ainda que erradamente é entendida como uma área curricular cujo principal é a memorização de números e regras e a repetição mecanizada de procedimentos, independentemente de existir significado intrínseco ou não. Na verdade, é considerado "que os resultados a que se chega ou estão certos ou estão errados, consoante se sigam, ou não, as indicações dadas pelo professor, pelo manual escolar ou por quem tem autoridade na matéria" (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008, p. 81). Esta conceção está um pouco relacionada com o ensino transmissivo, sustentado, segundo Brendefur e Frykholm (2000), por formas de comunicação unidirecional, em que as "intervenções dos alunos estão frequentemente limitadas às respostas dadas às perguntas dos professores" (Boavida et al., 2008, p. 61). Mas, se em alternativa, a comunicação for bidirecional, se o diálogo entre o professor e o aluno, o aluno e o professor e o aluno e o aluno prevalecer, haverá um maior "desenvolvimento de capacidades e aptidões, bem como de valores e atitudes, que possibilitam a inserção crítica numa sociedade que cada vez mais conta com cidadãos capazes de continuar a aprender ao longo da vida e de adaptar-se a novos desafios" (César, Torres, Caçador & Candeias, 1999, p. 76). Tal ambiente de aprendizagem permite aos alunos aprenderem uns com os outros e não apenas com o professor, o que, na minha opinião, é uma mais-valia no processo de ensino e aprendizagem, pois pode favorecer a sua compreensão sobre um determinado tema, dada a familiaridade da linguagem entre eles e o jeito próprio de se fazerem entender uns aos outros.

Se para comunicar é preciso pensar, para argumentar é preciso pensar e comunicar. Assim, argumentar em matemática corresponde à necessidade de o aluno explicar e justificar o seu raciocínio ao outro, de modo a o convencer de que este é matematicamente válido. Neste âmbito, é essencial incitar e valorizar a partilha dos diferentes raciocínios e impulsionar a análise dos mesmos, pois permitirá aos alunos estruturar o seu conhecimento matemático "numa linguagem que é entendida como adequada aos alunos" (Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014, p. 138) e levá-los "a descobrir em si próprios e nos pares capacidades que desconheciam" (César et al., 1999, p. 76).

1.2. Pertinência do estudo, objetivo e questões de investigação

Argumentar é manifestar de forma convicta uma conceção capaz de persuadir o auditor e/ou o leitor. Contudo, para que isso aconteça é necessário que apresentemos um raciocínio lógico, fundamentado e convincente, que influa o outro, levando-o a pensar e/ou agir conforme os nossos ideais. Diariamente, ainda que sem que nos apercebamos, argumentamos quando defendemos uma perspetiva, expressamos uma opinião, sugerimos uma hipótese de solução para um problema ou pretendemos convencer o outro a aceitar a convicção das nossas ideias. Aliás, a argumentação, em regra, e na área curricular de matemática, principalmente, tem ganho foco nos estudos efetuados sobre o processo de ensino e aprendizagem. Porém, segundo Magalhães (2010), as práticas desenvolvidas nos diferentes níveis de ensino não refletem a pertinência atribuída à argumentação, visto que apresentam uma certa oposição ao método de ensino que envolve os alunos em todo o processo de aprendizagem. No meu entender, isto deve-se à acomodação de alguns professores e ao forte antagonismo de modificar as metodologias ‘impositivas’ pelas ‘democráticas’, em que se preza a opinião do aluno. Por isso, de forma a ultrapassar esse problema, o professor deve ser capaz de incentivar os alunos a argumentarem, a pensarem criticamente, a fim de desenvolverem o raciocínio matemático.

Para que os alunos aprendam a raciocinar matematicamente, Boavida (2008) sugere que o professor crie condições que os ajude a desenvolver hábitos de pensamento relacionados com o ‘porquê das coisas’, mas para que tal aconteça é necessário empenho e uniformidade. A autora sugere também a envolvência dos alunos em atividades de formulação de problemas, teste e prova de conjeturas, de modo a transporem as inseguranças e a partilharem os seus pensamentos. Com esta finalidade, Boavida (2008) considera, ainda, que os alunos devem explicar e defender os seus modos de pensar através da argumentação, analisar criticamente as contribuições dos colegas, de maneira a chegarem à unanimidade sobre o significado de ideias matemáticas, o que exige capacidade de escuta, respeito, confiança e ajuda mútua.

Tendo como referência o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação [ME], 2007), o raciocínio matemático “envolve a construção de cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas, recorrendo a uma linguagem dos Números, da Álgebra e da Geometria” (p. 8). Em conformidade com o Programa de Matemática para o Ensino Básico (Ministério da Educação e Ciência [MEC], 2013), uma das finalidades do ensino da matemática consiste em estruturar o pensamento através da “apreensão e hierarquização de conceitos matemáticos, [d]o estudo sistemático das suas propriedades e [d]a argumentação clara e precisa, própria desta disciplina, [pois] têm um papel primordial na organização do pensamento, constituindo-se como uma gramática basilar do raciocínio hipotético-dedutivo” (p. 2). Comparando as orientações metodológicas dos dois programas, constato a valorização que ambos dão à argumentação matemática nas atividades de aprendizagem dos alunos. Com base neste pressuposto, este relatório tem como objetivo geral averiguar o contributo da argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria de alunos do 1.º e do 2.º Ciclo do ensino básico. Na consecução deste objetivo, pretendo responder às seguintes questões de investigação:

Questão 1: Que tipos de argumentos os alunos recorrem nas atividades de aprendizagem de tópicos de Geometria?

Questão 2: Que dificuldades manifestam os alunos quando têm de argumentar matematicamente as suas atividades?

Questão 3: Que perceções têm os alunos sobre a argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria?

1.3. Organização do relatório de estágio

O relatório de estágio apresenta-se estruturado em cinco capítulos. No primeiro capítulo, *Introdução*, é apresentado o problema em estudo, a pertinência do estudo, o objetivo, as questões de investigação e a estrutura organizativa do relatório.

No segundo capítulo, *Enquadramento Teórico,* são apresentadas referências, à luz da literatura, consideradas pertinentes para o tema em estudo, com o intuito de documentar e orientar a investigação realizada.

No terceiro capítulo, *Enquadramento Contextual e Estratégias de Intervenção*, é apresentada a caracterização do agrupamento e das escolas, a turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico e a turma do 2.º do Ensino Básico em que realizei a minha intervenção pedagógica, bem como a metodologia de ensino e de aprendizagem adotada e os instrumentos de recolha de informação selecionados para a avaliação do ensino ministrado.

No quarto capítulo, *Desenvolvimento e Avaliação da Intervenção Pedagógica*, são ilustrados alguns momentos do ensino e da aprendizagem de tópicos de Geometria através da argumentação matemática, discutidos os resultados obtidos, em cada uma das tarefas, no 1.º e no 2.º Ciclo e analisadas as perceções dos alunos relativas ao ensino ministrado.

No quinto capítulo, *Conclusões, Limitações e Recomendações,* são apresentadas as principais conclusões do estudo tendo como referência o objetivo e as questões de investigação delineadas e são referidas algumas limitações e recomendações a ter em conta em investigações futuras desta índole.

Por fim, listam-se as *Referências Bibliográficas* consultadas e referidas no decorrer do relatório, e apresentam-se os *Anexos* que ostentam elementos que complementam a sua leitura.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo, disposto por seis secções e três subsecções, são apresentadas referências, à luz da literatura, consideradas pertinentes para o tema em estudo, com o intuito de documentar e orientar a investigação realizada. A primeira secção apresenta a importância da Matemática na vida quotidiana dos alunos do Ensino Básico; a segunda secção trata da Geometria no currículo de Matemática do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino básico; a terceira secção aborda a noção de argumentação na sua generalidade; a quarta secção incide sobre diferentes abordagens da noção de argumentação matemática; a quinta secção analisa como a argumentação matemática é desenvolvida em contexto sala de aula; e a sexta secção ilustra resultados de alguns estudos empíricos sobre a argumentação matemática. A segunda secção, a Geometria no currículo de Matemática do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino básico, detém a subsecção, a Teoria de Van Hiele para a aprendizagem da geometria; e a quinta secção, a argumentação matemática em contexto sala de aula, frui de duas subsecções, tarefas propícias à prática argumentativa e papel do professor e do aluno na argumentação, respetivamente.

2.1. A importância da matemática na vida quotidiana dos alunos do ensino básico

A palavra Matemática, de acordo com o Dicionário Etimológico da Língua Portuguesa (Machado, 2003), provém da Grécia e significa aquilo que se pode aprender. É a "designação genérica das ciências de método essencialmente dedutivo que têm como objeto de estudo os números, figuras geométricas e outras entidades abstratas" (Dicionário Infopédia da Língua Portuguesa [em linha], 2019).

A história da Matemática reporta à história da humanidade, isto porque, segundo Cunha (2017), os registos mais antigos encontrados sobre esta ciência datam o ano 2400 a.C, em que o homem primitivo, de modo a controlar as suas atividades, utilizava os ossos, as pedras e os dedos das mãos para contar e medir, por não haver um processo económico definido. Por consequência, as relações estabelecidas pelo homem primitivo, na gestão das suas atividades diárias, desencadearam o estudo desta ciência com a intenção de solucionar problemas relacionados com o dia a dia. Ao passo que, a busca contínua pela veracidade dos factos por meios de técnicas precisas e exatas fez com que, ao longo dos anos, a Matemática tenha evoluído incessantemente, explorando novas conjunturas e instituindo relações com as situações quotidianas. Com efeito, esta ciência é uma das áreas do conhecimento mais surpreendentes, pois, ao invés de muitas outras ciências, esta não é acerca do mundo natural nem social, é acerca de objetos e relações abstratas (ME, 2007), é "uma linguagem que nos permite elaborar uma compreensão e representação desse mundo, e um instrumento que proporciona formas de agir sobre ele para resolver problemas que se nos deparam e de prever e controlar os resultados da acção que realizarmos" (ME, 2007, p. 2).

A Matemática é tida como uma disciplina difícil e, por essa razão, talvez a que mais preocupa, na generalidade, os alunos. Assim sendo, é importante que o professor desmistifique essa ideia. Em contexto sala de aula, independentemente das tarefas, o professor deve dar primazia ao diálogo, pois é através dele que se criam condições para conhecer as ideias, as incertezas e as preocupações dos alunos, a fim de os ajudar nessas adversidades. Por essa razão, no processo de ensino e aprendizagem, o professor e o aluno são agentes ativos igualmente importantes. Ramos (2017) refere que o professor, no que concerne aos diálogos, deve assumir um papel desafiador, estimulando os alunos e conciliando as suas propostas de resolução. Deve ainda permitir que o aluno pense e exponha o seu raciocínio livre e espontaneamente, assim como observar atentamente a realidade e os processos mentais e físicos dos alunos, de modo a identificá-los e compreende-los antecipadamente, porque tais "atitudes reforçam o papel social da matemática no meio educacional e privilegia a importância do raciocínio individual, além de provocar e partilhar com outros saberes matemáticos" (p. 15). Lappan e Schram (1989) consideram que a aula de Matemática deve ser considerada um espaço onde o aluno pode refletir e expor as suas ideias, contudo, para que isso aconteça é preciso que o professor escute o aluno e lhe peça para explanar os seus pensamentos.

Se os professores pretendem que os alunos valorizem a Matemática é substancial mudarem as suas ações, começando por lhes dar tempo para explorarem as tarefas; formularem problemas; desenvolverem estratégias; realizarem conjeturas e raciocinarem sobre a veracidade das mesmas; colocarem questões e argumentarem. Mas não só, o professor, ao ser o principal responsável pela organização do discurso na sala de aula deve ainda criar situações que relacionem a Matemática com a realidade dos alunos e posteriormente, colocar questões que fomentem a discussão e a partilha de opiniões.

Nos primeiros anos de escolaridade, nomeadamente, no 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico, esta área do saber assume elevada pertinência, pois é nessa altura que se deve privilegiar a realidade de modo a enaltecer as atividades práticas, já que é a partir do 1.º Ciclo que se devem desenvolver com os alunos determinadas características específicas da Matemática, como é o caso do "rigor das definições e do raciocínio, a aplicabilidade dos conceitos abstratos ou a precisão dos resultados" (MEC, 2013, p. 2). Apesar disso, a aprendizagem da Matemática deve partir do concreto para o abstrato pelo que é essencial que "a passagem do concreto ao abstrato, um dos propósitos do ensino da Matemática, se faça de forma gradual, respeitando os tempos próprios dos alunos e promovendo assim o gosto por esta ciência e pelo rigor que lhe é característico" (MEC, 2013, p. 1).

O ensino da Matemática, segundo o Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013), destaca três notáveis finalidades: i) *a estruturação do pensamento;* ii) *a análise do mundo natural;* e iii) *a interpretação da sociedade*. A primeira finalidade alude que a estrutura do pensamento deve ser feita através da "apreensão e hierarquização de conceitos matemáticos, [d]o estudo sistemático das suas propriedades e [d]a argumentação clara e precisa, própria desta disciplina, [pois] têm um papel primordial na organização do pensamento, constituindo-se como uma gramática basilar do raciocínio hipotético-dedutivo" (p.2). E esta gramática quando trabalhada ajuda a consolidar a "capacidade de elaborar análises objetivas, coerentes e comunicáveis" e a "melhorar a capacidade de argumentar, de justificar adequadamente uma dada posição e de detetar falácias e raciocínios falsos em geral" (p. 2).

A segunda finalidade destaca a Matemática como sendo uma ciência imprescindível para a devida compreensão da maioria dos acontecimentos que se sucedem no mundo, ou seja, "a uma modelação dos sistemas naturais que permita prever o seu comportamento e evolução" (p.2).

A terceira finalidade refere que a Matemática quando aplicada no dia a dia dos alunos se centra, amplamente, na utilização simplificada das quatro operações aritméticas, da proporcionalidade e, ocasionalmente, no cálculo de medidas de grandezas, como por exemplo: comprimento, área e volume, referentes, em regra, a figuras geométricas elementares. Todavia, realça ainda, que o método matemático "constitui-se como um instrumento de eleição para a análise e compreensão do funcionamento da sociedade" (p. 2) e que esta área do saber é obrigatória para a execução de tarefas nas várias áreas de atividade humana.

Estas três finalidades apenas podem ser alcançadas caso os alunos aprendam corretamente os mecanismos matemáticos, mas para isso é necessário que o professor os medeie durante o processo de ensino e aprendizagem, para que eles compreendam que uma interpretação superficial dos conceitos matemáticos revela pouco interesse e relevo não só para um estudo mais aprofundado da disciplina, como também para possíveis aplicações que dela se pretendam conceber. Desta forma, é crucial que a Matemática lecionada na escola permita aos alunos a abstração de conceitos e o desenvolvimento do pensamento crítico a par da criatividade, possibilitando-lhes a descoberta e a compreensão do mundo em que coabitam em todas as suas vertentes, posto que o aluno necessita de entender noções e procedimentos matemáticos quer para retirar conclusões, quer para fazer argumentações ao longo da sua vida, pois num mundo em que os aspetos sociais, culturais e profissionais ganham novas formas, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática, daí a Matemática ser a ciência que apresenta maior destaque no nosso quotidiano.

2.2. A Geometria no currículo de Matemática do 1º e 2º Ciclo do Ensino Básico

Em conformidade com a história da Matemática, Boyer (1996) aponta duas teorias diferentes sobre a origem da Geometria, a primeira refere que Heródoto acreditava que a Geometria tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medições das terras após cada inundação anual no vale do rio Nilo e a segunda refere que Aristóteles achava que a existência de uma classe sacerdotal com lazeres, no Egito, é que tinha conduzido ao seu estudo. Não se sabe qual das duas teorias é a verdadeira, mas tendo em conta a origem etimológica da palavra geometria, *geo* (terra) e *metria* (medida), a primeira teoria torna-se a mais evidente (Boyer, 1996). A Geometria é um ramo da Matemática considerado fundamental para a compreensão dos fenómenos que ocorrem no dia a dia. Por essa razão, Lorenzato (1995) afirma que, para quem desconhece a Geometria, "a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida" (p. 5). Battista (2007) considera que a Geometria é "uma rede complexa interligada por conceitos, formas de pensamento e representação de sistemas que são usados para conceptualizar e analisar ambientes espaciais, físicos e imaginários" (p. 843) e que sem o seu estudo, as pessoas não conseguirão desenvolver o pensamento geométrico ou raciocínio visual, impossibilitando-as de resolver as situações do seu quotidiano que apresentem formas geométricas, assim como de fazer uso da Geometria para compreender e resolver questões de outras áreas do saber (Lorenzato, 1995).

Segundo o NCTM (2008), a Geometria é um dos temas mais pertinentes da Matemática, e, por esse motivo, o processo de ensino e aprendizagem deve ser iniciado desde cedo

(Clements & Sarama, 2000). Também Garnica, Gomes e Andrade (2012), ao reportarem-se ao trabalho de Lacroix, partilham dessa perspetiva:

> A Geometria é, talvez, de todas as partes da Matemática, aquela que se deve aprender primeiro. Ela me parece muito adequada para atrair as crianças, desde que seja apresentada principalmente com relação às suas aplicações, tanto teóricas quanto práticas. [...] Penso que, em todos os casos, não há nenhuma razão para colocar a Geometria entre a Aritmética e a Álgebra, porque é desnecessário separar essas duas partes que, na verdade, formam uma única, a saber: a ciência do cálculo das grandezas ou a Aritmética universal (p. 1257).

Mas ainda que a importância da Geometria seja reconhecida, normalmente, é deixada para o final do ano letivo, o que significa que muitos dos tópicos ou são tratados à pressa, ou nem são tratados (Associação de Professores de Matemática [APM], 1998) ou então são tratados a "partir das definições, dando, pouco espaço à acção dos alunos na compreensão dos conceitos geométricos" (Breda, Serrazina, Menezes, Sousa & Oliveira, 2011, p. 1). O facto de isso acontecer fez com que várias gerações de alunos não apreciassem a Geometria e/ou apresentassem um conhecimento reduzido sobre este domínio de conteúdos (Gomes & Ralha, 2005; Veloso, 1998).

Não obstante, a Geometria é considerada uma "fonte de motivação na medida em que a experiência mostra que, frequentemente, alunos com fracos desempenhos em Matemática se sentem especialmente motivados e 'desabrocham' quando se envolvem em atividades de natureza geométrica" (Brocardo et al., 2007, p. 7). Também Moor (2004) está convicto desse valor motivacional, visto que a nível estético, a Geometria é muito apelativa para as crianças, dadas as suas figuras, os seus padrões e as suas simetrias.

A Geometria "propicia um contexto favorável para que os alunos se envolvam em actividade matemática e desenvolvam a comunicação matemática" (Breda et al., 2011, p. 13). Enquanto a sua aprendizagem deve desenvolver inúmeras capacidades nos alunos, de entre as quais, a visualização que é a forma como o aluno observa o meio em que está inserido, dispondo de capacidade para interpretar as transformações dos objetos; a verbalização que é o modo como o aluno partilha as suas ideias, desenvolve os seus argumentos e delibera determinados significados, sendo conseguida mediante o confronte de ideias e opiniões entre os alunos da turma sobre um dado trabalho realizado individualmente ou em grupo; a construção ou manipulação de objetos geométricos, cuja utilização da régua, do compasso ou do computador para produzir um desenho geométrico permitem ao aluno interagir e compreender noções geométricas; a sistematização lógica do pensamento matemático que corresponde ao modo como o aluno organiza o seu pensamento geométrico, a partir da visualização de figuras que lhe são familiares, tendo em conta o seu aspeto até a um nível superior em que já são capazes de compreender os diversos sistemas axiomáticos para a Geometria; e a aplicação dos conhecimentos geométricos a outras situações, devendo a mesma ser desenvolvida por meio de atividades geométricas (Matos & Serrazina, 1996).

O Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013), atual programa em vigor, apresenta uma "estrutura curricular sequencial" (p. 1) uma vez que a "aquisição de certos conhecimentos e o desenvolvimento de certas capacidades depende de outros a adquirir e a desenvolver previamente" (p. 1). Este programa e as Metas Curriculares do Ensino Básico (MEC, 2012) que descrevem o "conjunto das metas curriculares da disciplina de Matemática que os alunos devem atingir durante o Ensino Básico" (p. 2) e que privilegia os elementos essenciais que constam do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) compõem o normativo legal para a disciplina de Matemática no Ensino Básico sendo, por sua vez, de uso obrigatório quer para as escolas, quer para os professores. Relativamente ao 1.º Ciclo do Ensino Básico, o Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013) refere que o domínio de Geometria deve ser iniciado pelas noções mais rudimentares, começando pelo "reconhecimento visual de objetos e conceitos elementares como pontos, colinearidade de pontos, direções, retas, semirretas e segmentos de reta, paralelismo e perpendicularidade, a partir dos quais se constroem objetos mais complexos como polígonos, circunferências, sólidos ou ângulos" (p. 6), o que coincide com a perspetiva de Veloso, Brunheira e Rodrigues (2013). Estes autores acreditam que a aprendizagem da Geometria deve partir, nos anos iniciais, das "ideias intuitivas das crianças e, estando ancorada na compreensão das propriedades geométricas bem como das relações espaciais, deverá evoluir para uma progressiva formalização" (Veloso, Brunheira & Rodrigues, 2013, p. 7). Na mesma linha de raciocínio dos autores anteriores, Ponte e Serrazina (2000) referem que a aprendizagem da Geometria deve ser realizada de modo informal partindo de modelos concretos da realidade das crianças, de maneira a que sejam elas a formar os conceitos fundamentais.

A Geometria está presente em várias situações do nosso quotidiano, tornando-se crucial que a exploração dos conteúdos deste domínio se dê por intermédio das vivências dos alunos, criando-lhes novas experiências geométricas. Corroborando esta perspetiva, Mendes e Delgado (2008) consideram que o processo de ensino da Geometria deve advir do que "as crianças fazem e observam nas suas experiências, progredindo para níveis mais elevados de compreensão dos conceitos geométricos associados a essas experiências" (p. 13). Importa ainda mencionar que no processo de ensino deste domínio de conteúdos, o professor deve planear "tarefas adequadas, direcionar a atenção das crianças para as qualidades geométricas das formas, introduzir a terminologia adequada envolvendo as crianças em discussões onde esta terminologia seja usada" (Ponte & Serrazina, 2000, p. 181) para que a aprendizagem da Geometria se revele significativa.

No Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013), os temas em estudo no 1.º Ciclo do Ensino Básico, inclusive os do domínio de Geometria, são "introduzidos de forma progressiva, começando-se por um tratamento experimental e concreto, caminhando-se faseadamente para uma conceção mais abstrata" (p.6). Veloso et al. (2013) enfatizam que "em certa medida - no que toca ao grau de formalismo, tecnicismo e abstração - este programa é demasiado ambicioso, ultrapassando os limites do que podemos pedir aos alunos do ensino básico" (p. 8).

Em referência ao 2.º Ciclo do Ensino Básico, o domínio de Geometria reflete um estudo mais pormenorizado dos conteúdos desenvolvidos no 1.º Ciclo do Ensino Básico. Neste domínio, em específico, é fornecida "uma definição geométrica de soma de ângulos, por justaposição, análoga à justaposição de segmentos de reta abordada no 1.º ciclo" (MEC, 2013, p. 14) que será substancial nos ciclos de ensino subsequentes. Os alunos terão ainda de saber "relacionar as diferentes propriedades estudadas com aquelas que já conhecem e que são pertinentes em cada situação" (MEC, 2013, p. 14) e realizar várias tarefas que envolvam a utilização de instrumentos de desenho e medida, uma vez que é "desejável que adquiram destreza na execução de construções rigorosas e reconheçam alguns dos resultados matemáticos por detrás dos diferentes procedimentos" (MEC, 2013, p. 14).

Já o documento 'Aprendizagens Essenciais' (DGE, 2018), no que concerne aos temas e conteúdos de aprendizagem de Geometria, frisa que a prática dos professores do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico deve ser orientada para que os alunos "prossigam no desenvolvimento da capacidade de visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas, bem como na noção de grandeza e processos de medida" (DGE, 2018, p. 4) e "prossigam no desenvolvimento da capacidade de visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas, alargando-se o estudo de sólidos geométricos e de figuras planas e o estudo das grandezas geométricas e das isometrias do plano" (DGE, 2018, p. 4) com especial atenção para a reflexão e rotação, respetivamente.

A nível internacional, para o NCTM (2007) a Geometria é bem mais do que um conjunto de definições, é a descrição de relações e o raciocínio geométrico, pelo que é tida "desde há muito, como o conteúdo do currículo de matemática onde os alunos aprendem a raciocinar e a compreender a estrutura axiomática da matemática" (p. 44). Então, para o ensino da Geometria do pré-escolar ao 12.º ano de escolaridade, o NCTM (2007) propõe um conjunto de normas que devem habilitar todos os alunos para:

> - Analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca das relações geométricas;
> - Especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à geometria de coordenadas e a outros sistemas de representação;
> - Aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas;
> - Usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas (p. 44).

Os alunos, entre o pré-escolar e o 2.º ano de escolaridade, devem fazer uso do seu próprio vocabulário para descrever objetos e discutir as suas analogias e diferenças e só depois incluir a "terminologia convencional nas suas descrições de objetos bi e tridimensionais" (NCTM, 2007, p. 113). Para tal fim é necessário que os alunos observem um conjunto de figuras equivalentes ao mesmo conceito geométrico e outro de figuras que sejam contraexemplos desse conceito, porque este género de atividade fomenta o diálogo e, sobretudo, a discussão entre aluno-aluno, aluno-professor/professor-aluno ou professor-turma/turma-professor (NCTM, 2007).

Entre o 3.º e o 5.º ano de escolaridade é esperado que os alunos identifiquem, comparem e analisem as propriedades de formas bi e tridimensionais (NCTM, 2007) e entre o 6.º e o 8.º ano de escolaridade que analisem relações por meio de "visualizações, desenhos, medições, comparações, transformações e classificações de objetos geométricos" (NCTM, 2007, p. 275).

Efetivamente é no 2.º Ciclo do Ensino Básico que o estudo da Geometria exige maior pensar e fazer. Enquanto os alunos classificam, criam, desenham, modelam, traçam, medem e constroem, desenvolvem a sua capacidade de visualização das relações geométricas (NCTM, 2007), ao mesmo tempo que "estão a aprender a raciocinar e a formular, testar e justificar conjeturas sobre essas relações" (NCTM, 2007, p. 191).

2.2.1. A teoria de Van Hiele para a aprendizagem da Geometria

Em meados do século XX, o casal Pierre Marie Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof desenvolveram a chamada Teoria de Van Hiele. Esta teoria "procura descrever o processo de ensino e aprendizagem e tem sido um poderoso auxiliar em especial para quem se interessa pelo ensino e aprendizagem da Geometria" (Matos & Serrazina, 1996, p. 93). De acordo com este casal, a aprendizagem da Geometria deve ser desenvolvida mediante uma sequência de cinco níveis de aprendizagem (Quadro 1), sendo o nível inicial de ensino dependente do nível de pensamento dos alunos (Van Hiele, 1999).

Quadro 1. Níveis de Aprendizagem da Geometria, segundo a Teoria de Van Hiele (1999)

Nível 1: Visualização	Os alunos julgam as figuras pela sua aparência;
Nível 2: Análise	Os alunos entendem as figuras como o conjunto das suas propriedades;
Nível 3: Ordenação	Os alunos ordenam logicamente as propriedades das figuras;
Nível 4: Dedução	Os alunos entendem a Geometria como um sistema dedutivo;
Nível 5: Rigor	Os alunos estudam diversos sistemas axiomáticos para a Geometria.

Conforme se progride de nível, os cincos níveis de aprendizagem da Geometria vão sendo "cada vez mais complexos" (Ponte & Serrazina, 2000, p. 178). O desenvolvimento da capacidade geométrica dos alunos reporta-se desde o nível mais básico (Nível 1 - Visualização) até ao nível mais complexo (Nível 5 - Rigor). Com o propósito de compreender cada um dos níveis de aprendizagem da Geometria, segundo a Teoria de Van Hiele, vejamos o que vários autores (Breda et al., 2011; Crowley, 1987; Matos, 1999; Matos & Serrazina, 1996; Ponte & Serrazina, 2000; Ponte et al. 2002) referem:

No *Nível 1. Visualização*, o aluno compreende as figuras geométricas, de uma maneira geral, pela sua aparência. Um aluno que se encontre neste nível de aprendizagem, ainda não é capaz de reconhecer as partes ou propriedades das formas geométricas, dado que as vê como um todo, apenas é capaz de reproduzir figuras previamente dadas; aprender vocabulário geométrico basilar; e relacionar formas geométricas com objetos do quotidiano, reconhecendo as figuras geométricas pelo seu aspeto e pela sua posição. Porque neste nível, a perceção das figuras é somente de caráter visual.

No *Nível 2. Análise*, como o aluno já passou pelo nível de reconhecimento das figuras geométricas, mediante observação e experimentação passará agora a comparar e a analisar as figuras consoante as suas propriedades. Um aluno que se encontre neste nível de aprendizagem compreende as figuras geométricas como um conjunto das suas propriedades, usando os seus componentes e atributos para as descrever e caracterizar. Apesar disso, o aluno não é capaz de compreender que uma figura pode deter várias denominações; percecionar a inclusão de classes; e explicar relações entre propriedades.

No *Nível 3. Ordenação*, o aluno compreende as relações entre as propriedades de uma figura ou entre figuras e ordena-as lógica e hierarquicamente. Um aluno que se encontre neste nível de aprendizagem compreende as relações abstratas entre figuras, podendo usar a dedução para justificar as observações realizadas no nível anterior. Porém, o aluno ainda não é capaz de compreender o papel da definição de uma determinada propriedade e da capacidade de elaborar provas formais; o significado da dedução como um todo; e o papel dos axiomas.

No *Nível 4. Dedução*, o aluno compreende o significado do conceito dedução e a Geometria como um sistema axiomático. Um aluno que se encontre neste nível de aprendizagem é capaz de deduzir teoremas; estabelecer inter-relações entre teoremas; manipular as relações desenvolvidas no nível anterior; realizar demonstrações sem evocar a memorização; e compreender a interação de condições necessárias e suficientes.

No *Nível 5. Rigor*, o aluno compreende a Geometria ao nível abstrato e é capaz de trabalhar com vários sistemas axiomáticos. Este nível não envolve modelos concretos, visto que de todos os níveis, é o que adquire uma maior natureza de abstração e é nele que são estudados os sistemas axiomáticos.

Tendo em conta o que foi mencionado, é possível compreender que na Teoria de Van Hiele sobre a aprendizagem da Geometria, o "pensamento geométrico evolui de modo lento desde as formas iniciais de pensamento até às formas dedutivas finais onde a intuição e a dedução se vão articulando" (Ponte & Serrazina, 2000, p. 179). Os níveis de aprendizagem da Geometria são sequenciais e hierarquizados, por esse motivo o pensamento geométrico tende a evoluir lentamente, porque os alunos apenas passam para o nível seguinte caso adquiram os conhecimentos do pensamento geométrico referentes ao nível em que estão, isto é, cada um dos níveis depende do nível anterior, podendo os alunos progredir para o nível seguinte somente se tiverem compreendido os conceitos abordados no nível precedente. Todavia, a progressão de um nível para o outro é determinada pela metodologia de ensino do professor, pois "é através das experiências de aprendizagem proporcionadas aos alunos que estes progridem na sua aprendizagem" (Breda et al., 2011, pp. 17-18). Van Hiele (1999) alude que o desenvolvimento do aluno é mais dependente do ensino do que da sua idade ou maturação biológica e que tipos de experiências de ensino podem promover ou impedir o seu desenvolvimento. Por isso, o professor deve incluir na sua prática sequências de atividades, começando com uma fase exploratória, construindo gradualmente conceitos e linguagem relacionada e culminando em atividades de resumo que ajudem os alunos a integrar o que eles aprenderam sobre o que eles já sabem (Van Hiele, 1999). O autor aconselha os professores a focarem-se, principalmente, nos três primeiros níveis de raciocínio, por os considerar de maior relevância para a geometria ensinada nas escolas, já que, na sua perspetiva, os últimos dois níveis se aplicam melhor ao trabalho dos matemáticos.

Atendendo aos diferentes níveis de aprendizagem da Geometria, propostos na Teoria de Van Hiele, é exequível dizer que a mesma se aproxima do que os autores Matos e Serrazina (1996) defendem. Estes autores julgam ser essencial a adoção de um modelo de ensino que preze "a aprendizagem da geometria como um fenómeno gradual, global, construtivo e social" (p. 264). Gradual porque pressupõe que a intuição, o raciocínio e a linguagem geométrica são adquiridas aos poucos; global porque as figuras e as propriedades não são abstrações isoladas, relacionam-se entre si e conjeturam vários níveis que guiam a outros significados; construtivo porque considera o aluno, o construtor dos seus próprios conceitos, pressupondo que não existe transmissão de conhecimentos; e social porque estabelece a relação entre o professor-aluno, aluno-aluno e aluno-comunidade (Matos & Serrazina, 1996).

A Teoria de Van Hiele apresenta ainda cinco fases sequenciais para a aprendizagem de cada nível (Crowley, 1987):

> - Na *Fase 1. Informação*, o professor e os alunos envolvem-se num diálogo e em atividade sobre os objetos de estudo para o nível em questão. Observações são feitas e perguntas são levantadas pelo professor, de modo a conhecer as conceções prévias dos alunos e os alunos a conhecer o rumo que o estudo irá tomar. Vocabulário específico ao nível é introduzido.
> - Na *Fase 2. Orientação Guiada*, os alunos exploram o tópico de estudo sobe orientação do professor. Este introduz de forma sequencial materiais ou atividades, sendo que estas devem revelar progressivamente aos alunos as estruturas características do nível em que estão. A maior parte dos materiais ou atividades introduzidas devem incluir tarefas curtas para obter respostas específicas.
> - Na *Fase 3. Explicitação*, os alunos com base nas suas experiências anteriores expressam e partilham as suas visões emergentes sobre as estruturas que observaram. O professor deve ajudar os alunos a usar uma linguagem precisa e apropriada, embora o seu papel seja mínimo. É nesta fase que o sistema de nível de relações se começa a evidenciar.
> - Na *Fase 4. Orientação Livre*, os alunos deparam-se com tarefas de maior complexidade, com muitas etapas, de caráter aberto e que podem ser concluídas de várias maneiras.

- Na *Fase 5. Integração*, os alunos reveem e sintetizem o que aprenderam, de modo a formarem uma visão genérica da nova rede de objetos e relações, no entanto, essas sínteses não devem apresentar nada de novo. No final desta fase, os alunos atingem um novo nível de pensamento.

O novo domínio de pensamento substitui o antigo, habilitando os alunos a repetir cada uma das fases de aprendizagem no nível seguinte (Crowley, 1987). Embora esta teoria seja apontada como referência e vista como favorável ao processo de ensino e aprendizagem da Geometria, manifesta algumas limitações. Para Matos (1992), esta teoria não permite aos alunos desenvolverem o conhecimento matemático autonomamente, uma vez que o professor é tido como a principal fonte de conhecimento da sala de aula e os alunos não serem considerados como um grupo heterogéneo com aptidões e ritmos de aprendizagem diferenciados. Também não tem em consideração a orientação espacial, a medida, a trigonometria ou a geometria analítica, áreas importantes da aprendizagem da Geometria (Matos, 1999).

2.3. Noção de argumentação

A argumentação é um comportamento social utilizado para convencer, cujo principal objetivo é obter o acordo do outro no decorrer da interação e não, primeiramente, determinar a veracidade de alguma afirmação (Balacheff, 1991). Sob outra perspetiva, a argumentação é um raciocínio orientado que tem como finalidade a comunicação, emergindo em qualquer situação de interação social onde seja necessário persuadir o interlocutor ou refutar uma tese (Duval, 1990).

Argumentar é a "arte de convencer e persuadir" (Abreu, 2009, p. 15). Estes dois conceitos diferem, na medida em que convencer é saber gerir a informação, de modo a falar à razão do outro através da demonstração e da prova, enquanto persuadir é saber gerir a relação, tocando na emoção do outro (Abreu, 2009). Em outras palavras, convencer é induzir o outro a pensar da mesma forma que nós, já persuadir é enternecer o outro para agir. Assim, argumentar é "a arte de, gerenciando informação, convencer o outro de alguma coisa no plano das ideias e de, gerenciando relação, persuadi-lo, no plano das emoções, a fazer alguma coisa que nós desejamos que ele faça" (Abreu, 2009, p. 15). O autor vai mais longe ao referir que "argumentar é motivar o outro a fazer o que queremos, mas deixando que ele faça isso com autonomia, sabendo que suas ações são frutos de sua própria escolha" (Abreu, 2009, p. 59), pelo que se deve dosear o trabalho na 'medida certa' com ideias e emoções. A 'medida certa' é "gastar mais tempo em persuadir do que em convencer" (Abreu, 2009, p. 59). Aprender a gerir as relações com o outro torna-se inequívoco, dado que não é possível viver isolado da sociedade, já que coabitamos em sociedade e compartilhamos relações, necessitamos da argumentação para convencer e persuadir o outro (Abreu, 2009). Para que se possa argumentar devidamente, este autor apresenta quatro condições da argumentação:

- A *1.ª condição* é ter definida uma tese e saber para que tipo de problema, essa tese é resposta. Sendo que no plano das ideias, as teses são as próprias ideias, pelo que é necessário conhecer as perguntas que estão na sua génese.
- A *2.ª condição é* usar uma "linguagem comum" com o auditório, porque somos nós que temos de nos adaptar aos requisitos intelectuais e sociais de quem nos ouve e não o oposto.
- A *3.ª condição* é revelar um contacto positivo com o outro, escutando-o merecidamente e sendo sincero quanto ao tempo que tencionamos demorar. Ao contactar com um auditório, as formas como as palavras são proferidas, ainda que inconscientemente, requerem atenção, pois é por meio da voz que se expressam as emoções e às vezes a forma como uma pessoa usa a sua voz transmite muito mais sobre ela do que o sentido lógico daquilo que expõe.
- A *4.ª condição*, e a mais pertinente, é a de agir eticamente. Ou seja, ao argumentar com o outro devemos fazê-lo de forma honesta e clara, senão, a argumentação torna-se sinónimo de manipulação. Ao agir com honestidade adquirimos uma característica importante do processo argumentativo: a credibilidade. As pessoas "possuem 'detectores de credibilidade' em relação ao outro [contudo, para a ter é] preciso apenas comportar-se de modo verdadeiro, sem medo de revelar propósitos e emoções" (p. 22).

Saber argumentar é, sobretudo, "saber integrar-se ao universo do outro" (Abreu, 2009, p. 6), obtendo aquilo que se quer, de modo "cooperativo e construtivo" (Abreu, 2009, p. 6).

Tecnicamente, toda a argumentação estabelece um elo entre a tese de adesão inicial e a tese principal, sendo as técnicas argumentativas a base dessa ligação (Abreu, 2009). Essas técnicas compreendem dois grupos: os *argumentos quase lógicos* e os *argumentos fundamentados na estrutura do real*. Um argumento pode ser caracterizado como sendo a razão apresentada para justificar ou refutar uma proposição, podendo a mesma ser a afirmação de um facto; o resultado de uma experiência; um simples exemplo; uma definição; o recordar de uma regra; uma crença mútua; ou a apresentação de uma contradição, que assume o valor de uma justificação quando usada para explicar por que motivo se aceita ou rejeita uma dada proposição (Duval, 1999). Apesar disso, a argumentação não se pode restringir ao uso de um só argumento, dado que requer a capacidade de avaliar um argumento e de o opor a outros argumentos, sendo isso correspondente à dinâmica de qualquer situação de investigação ou debate (Duval, 1999).

Os argumentos constituem, em primeiro lugar, uma tentativa de descoberta das melhores conceções, mas como nem todas são equivalentes, nem todas as conclusões a que se chegam podem ser defendidas com boas razões (Weston, 1996). Como na maioria das vezes não é possível identificar as melhores conclusões, Weston (1996) sugere que se apresentem argumentos capazes de sustentar as diferentes conclusões e, posteriormente se avaliem tais argumentos, de modo a comprovar se estes são realmente bons. Neste sentido, um argumento pode ser configurado a uma investigação (Weston, 1996).

Weston (1996) refere ainda, que quando uma pessoa chega a uma conclusão baseada em boas razões, os argumentos são tidos como a forma como a pessoa a explica e defende. Para este autor, um argumento para que seja considerado bom, não se pode limitar a repetir as conclusões, mas sim, fornecer razões e dados suficientes para que as outras pessoas tenham oportunidade de formar a sua própria opinião, o que traduz a atividade intencional e discursiva presente num argumento, da qual se requer a participação ativa daqueles a quem este se direciona (Grize, 1996).

Os *argumentos quase lógicos* detêm essa denominação, porque "muitas das incompatibilidades não dependem de aspectos puramente formais e sim da natureza das coisas ou das interpretações humanas" (Abreu, 2009, p. 28). Ao utilizar essa técnica argumentativa, a pessoa que argumenta procura demonstrar que a tese de adesão inicial, previamente acordada pelo auditório, é compatível ou incompatível com a tese principal (Abreu, 2009).

Nos *argumentos quase lógicos*, as técnicas argumentativas ostentam quatro definições: as *lógicas*, as *expressivas*, as *normativas* e as *etimológicas*. As *definições lógicas* são esquematizadas a partir de uma fórmula específica; as definições *expressivas* não apresentam nenhum compromisso com a lógica; as definições *normativas* indicam o sentido que se quer atribuir a uma palavra num dado discurso e estão dependentes do acordo feito com o auditório; e as *definições etimológicas* são fundamentadas na origem das palavras (Abreu, 2009). As definições expressivas são as mais usadas como técnicas argumentativas, uma vez que "permitem a fixação de pontos de vista como teses de adesão inicial" (Abreu, 2009, p. 32).

Os *argumentos fundamentados na estrutura do real* baseiam-se em pontos de vista, em opiniões relativas, e não na descrição objetiva dos factos (Abreu, 2009). O argumento pragmático; o argumento do desperdício; a argumentação pelo exemplo; a argumentação pelo modelo ou pelo antimodelo; e a argumentação pela analogia são os principais argumentos desta técnica.

Os argumentos podem ainda ser classificados através de quatro categorias (empíricos, genéricos, simbólicos e formais) que podem ser distinguidas pelo uso ou não uso de representações (Reid & Knipping, 2010). Na primeira categoria, a dos argumentos empíricos, os exemplos apresentados são não representativos, sustentando apenas casos específicos; na segunda categoria, a dos argumentos genéricos, os exemplos apresentados são representativos, representando classes mais abrangentes, cuja finalidade é ver o geral no específico; na terceira categoria, a dos argumentos simbólicos, as palavras e os símbolos são utilizados como representações, incógnitas e números são trabalhadas em conjunto de modo a se obter um resultado; e na quarta e última categoria, a dos argumentos formais, os símbolos presentes são não representacionais, sendo o intuito da sua utilização a generalização de algum teorema (Reid & Knipping, 2010). Entre estas categorias podem ser definidas subcategorias, assim como existir casos cuja classificação de argumentos se situe na fronteira entre essas mesmas categorias (Reid & Knipping, 2010) (Quadro 2).

Quadro 2. Classificação de argumentos, segundo Gil (2012, p. 183)

Categoria	*Subcategoria*
Argumentos empíricos (exemplos não representativos)	Simples enumeração Extensão de um padrão Experiência crucial Género ou espécie Esquema percetual
Entre o empírico e o genérico (entre exemplos não representativos e exemplos representativos)	Exaustão contraexemplo
Argumentos genéricos (exemplos como representações)	Exemplos numéricos Exemplos concretos Exemplos pictóricos Exemplos situacionais
Entre o genérico e o simbólico	Argumentos geométricos
Argumentos simbólicos (palavras e símbolos como representações)	Narrativa Simbólica
Entre o simbólico e o formal (entre símbolos representativos e não representativos)	Manipulativa
Argumentos formais (símbolos não representativos)	

Aprender a argumentar, na sociedade em que vivemos, é fundamental. Se o ser humano se preocupasse mais em gerir a relação com o outro, desde o campo pessoal até ao profissional, seria muito mais bem-sucedido na sua vida. Porém, para que isso aconteça é essencial saber conversar com o outro, argumentar de maneira a que o outro exponha as suas convicções e para que ele próprio possa fazer o mesmo (Abreu, 2009).

2.4. Diferentes abordagens da noção de argumentação matemática

A argumentação apresenta atributos gerais que são essencialmente pertinentes para a argumentação matemática, tais como:

> - A elaboração de uma conjetura que posteriormente será sujeita a interpretação e discussão;
> - A produção de argumentos, representados através de declarações verbais, evidências experimentais, desenhos e/ou esquemas que vão validar ou questionar a conjetura;
> - A preocupação em manter juntos os argumentos e a conjetura sobre investigação com o objetivo de a justificar através do levantamento de dúvidas, contestações, refutações, interpretações e até de novas conclusões;
> - A preservação de uma estrutura global, uma organização verbal, para que a argumentação possa ser seguida e compreendida;
> - A perceção de que a atividade cognitiva de quem argumenta tem de ser consciente e voluntária, que pressupõe a interiorização de um "outro" que esteja em posição de controlar ou regular a lógica do raciocínio, a veracidade das afirmações e o tratamento dos sinais envolvidos (Douek & Pichat, 2003).

Boavida (2005a) refere que a expressão 'argumentação matemática' é utilizada quando a argumentação é realizada na aula de Matemática, ou seja, os diálogos desenvolvidos incidem nesta área curricular do saber. Estes diálogos "assumem a forma de raciocínios de carácter explicativo e justificativo, destinados seja a diminuir riscos de erro ou incerteza na escolha de um caminho, seja a convencer um auditório a aceitar ou rejeitar certos enunciados, ideias ou posições, pela indicação de razões" (Boavida, 2005a, p. 1)

Douek e Pichat (2003) caracterizam a argumentação matemática como sendo um género peculiar de argumentação, que lida com objetos e competências matemáticas. Enquanto Yackel e Cobb (1994) limitam a argumentação matemática às interações relacionadas com as explicações ou justificações intencionais do raciocínio dos alunos, quer durante como depois das tentativas de resolução de problemas. Neste âmbito, Yackel e Coob (1994) reconhecem múltiplas funções para os argumentos: informar outros de interpretações do problema; narrar o que outros disseram; explicar métodos de resolução e respostas; tentar convencer outros sobre a validade ou não validade de uma resposta ou método de resolução; e anunciar uma descoberta matemática ou generalização.

Para Schwarzkopf (2000), a argumentação matemática é bem mais do que Yackel e Coob (1994) aludem, é um processo social que obedece a estruturas especiais e onde os argumentos são desenvolvidos. Por outro lado, segundo Rumsey e Langrall (2016), é um processo do discurso social e dinâmico que permite descobrir novas ideias matemáticas e convencer os outros de que as afirmações são válidas.

Wood (1999), por sua vez, considera a argumentação em matemática como um processo interativo de saber como e quando participar num argumento, sendo o argumento definido como uma troca discursiva entre participantes com o intuito de convencer os outros através do uso de certos modos de pensamento e argumentação. Semelhantemente, Grize (1990) menciona que a argumentação é uma forma de interferir, intencionalmente, nas opiniões, atitudes, sentimentos ou comportamentos de uma pessoa ou de um grupo de pessoas, de maneira a desenvolver a atividade discursiva, a participação ativa daqueles a quem é direcionada.

As conceções expressas por Yackel e Coob (1994) e Wood (1999) sobre a argumentação levam-nos a considerar que a argumentação na aula de Matemática não deve ser tida como similar à demonstração matemática, compreendida como um encadeamento dedutivo e formalmente lógico que conduz, obrigatoriamente, ao estabelecimento de conclusões também formalmente lógicas, isto é, a argumentação na aula de Matemática, apesar de poder incluir processos de produção de provas matemáticas, é uma atividade mais ampla do que a demonstração, cuja veracidade de um resultado é feita através de um percurso formal, lógico e linear (Krummheuer, 1995). Esta conceção de Krummheuer (1995) parece ser apoiada por outra apresentada por Lampert (1990), para quem a argumentação matemática se assemelha a um caminho em ziguezague e não a um percurso linear que se inicia com a formulação de conjeturas, envolvendo a análise de premissas e incluindo desacordos e contraexemplos, que gerarão a discussão na aula de Matemática. Boavida et al. (2008) entende argumentação em matemática como sendo:

> [...] conversações de carácter explicativo ou justificativo centradas na Matemática, em que assumem um papel preponderante a fundamentação de raciocínios, a descoberta do porquê de determinados resultados ou situações, a formulação, teste e prova de conjecturas e a resolução de desacordos através de explicações e justificações convincentes e válidas de um ponto de vista matemático (p. 84).

Boero (1999) aborda o papel da argumentação em atividades matemáticas, considerando os diferentes aspetos das mesmas, através de seis fases: (1) produção de uma conjetura; (2) formulação da declaração de acordo com convenções textuais compartilhadas; (3) exploração do conteúdo e limites de validade da conjetura; (4) seleção e encadeamento de argumentos coerentes e teóricos numa cadeia dedutiva; (5) organização dos argumentos encadeados numa prova que é aceitável de acordo com os padrões matemáticos actuais; e (6) abordagem a uma prova formal. Na primeira e segunda fase, a argumentação corresponde à análise interna, e eventualmente pública, da situação problemática, questionando a validade e o significado da regularidade descoberta, aprimorando hipóteses e debatendo exequíveis formulações. Na terceira fase, a argumentação desempenha três papéis pertinentes: produzir ou retomar a partir da primeira fase os argumentos para validação; discutir a aceitabilidade dos argumentos consoante os requerimentos da sua natureza (por exemplo: apesar dos argumentos empíricos serem relevantes na primeira fase e na abordagem à validação têm de ser progressivamente excluídos a partir desta fase); e encontrar possíveis ligações entre um argumento e outro. Assim, toda a terceira fase pode ser considerada de natureza argumentativa. Na quarta fase, a argumentação é ampla, sobretudo no que concerne ao desenvolvimento do encadeamento argumentativo. E na quinta fase, a argumentação pode à semelhança da terceira fase desempenhar um papel ao comparar o texto em produção com os padrões atuais de rigor, organização textual, entre outros. Deste modo, para Reid e Knipping (2010), a argumentação é uma parte de todas as fases da atividade matemática que inclui a criação da prova final.

Douek (2002) atribui dois significados antagónicos à argumentação. Para este autor, por um lado, a argumentação é um processo individual ou coletivo que produz um discurso lógico, ainda que não necessariamente dedutivo, por outro lado é o texto produzido através deste processo. Ao passo que Pedemonte (2007) restringe a argumentação a um processo que é desenvolvido para produzir uma conjetura, sendo que em alguns casos, essa argumentação pode ser utilizada para a construção de uma prova.

Krummheuer (2007) defende que a argumentação não deve ser vista meramente como um objetivo de ensino, isto porque na sua perceção, o ensino da matemática deve ser projetado de modo a que os alunos sejam capazes de argumentar a um nível matemático sofisticado: noção de 'aprender a argumentar'. Apesar disso, este autor, relativamente à aprendizagem da matemática, alude que a participação em práticas argumentativas é uma condição prévia para que se possa aprender.

Em síntese, não é possível afirmar que haja uma definição concreta para a argumentação matemática, já que a mesma depende de autor para autor.

2.5. A argumentação matemática em contexto sala de aula

A argumentação matemática deve ser introduzida desde cedo em contexto sala de aula mediante uma gestão interativa e de familiarização dos alunos, quer com a escrita, quer com as interações que nesse espaço se desencadeiam (Douek & Pichat, 2003). Todavia, apesar do valor da argumentação, em contexto matemático, ser reconhecido pela educação matemática e o mesmo ser corroborado por vários estudos de investigação (Balacheff, 1999; Boavida, 2008; Boero, 1999; Douek, 2002; Duval, 1999; Knipping, 2008; Krummheuer, 1995; Pedemonte, 2002; Wood, 1999; Yackel & Cobb, 1996;) e pelas orientações curriculares a nível nacional, Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) e Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013), e internacional, NCTM (2007), as atividades argumentativas, em contexto sala de aula, nos diversos níveis de ensino, são, por vezes, pouco expressivas (Boavida, 2005b).

No Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e a promoção do raciocínio e da comunicação matemáticos, além de constituírem objetivos centrais de aprendizagem, constituem orientações metodológicas importantes para estruturar atividades em contexto sala de aula. Compete ao professor implementar tarefas que proporcionem a análise e a reflexão dos raciocínios efetuados, tanto pelo próprio aluno como pelos colegas, como também prestar atenção aos "raciocínios dos alunos, valorizando-os, procurando que eles os explicitem com clareza, que analisem e reajam aos raciocínios dos colegas" (ME, 2007, p. 9). Yackel e Hanna (2003) consideram que o raciocínio matemático é uma atividade partilhada, sendo a explicação, a justificação e a argumentação os aspetos-chave dessa atividade, quando, em contexto sala de aula, se valoriza o raciocínio (Boavida, 2008). Se por um lado, o raciocínio matemático envolve "a construção de cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas, recorrendo à linguagem dos Números, da Álgebra e da Geometria" (ME, 2007, p 8), por outro, emerge da discussão de ideias, processos e resultados matemáticos em contexto de comunicação escrita e/ou oral, com ou sem recurso à linguagem matemática (ME, 2007). Assim sendo, o valor da argumentação em Matemática, não está somente relacionado com a ideia de explicação e justificação de uma proposição para convencer o outro, mas que o mesmo também está relacionado com a discussão e avaliação das diferentes opiniões expressas pelos alunos, aquando realização de uma dada tarefa.

Face ao que foi mencionado é notório que o desenvolvimento da argumentação matemática, em contexto sala de aula, se trata de um processo complexo. Além de exigir uma seleção cuidada da tarefa a propor, necessita de um espaço rico e propício à prática argumentativa, em que a partilha e discussão de ideias estejam subjacentes e cujo pensamento matemático dos alunos seja o foco principal.

2.6. Tarefas propícias à prática argumentativa

Na dinamização das atividades que se realizam na aula de Matemática, Stein e Smith (2009) apontam que as tarefas matemáticas influenciam a aprendizagem dos alunos. Ponte (2005) enfatiza que essa aprendizagem resulta da atividade que os alunos realizam e da reflexão que fazem sobre a mesma. Ao aplicar uma tarefa o professor tenciona desenvolver uma determinada conceção com os alunos pelo que é oportuno que essa tarefa se adeque à situação. As tarefas a selecionar podem ser de vários tipos: exercícios, problemas, explorações e investigações (Ponte, 2005) (Figura 1).

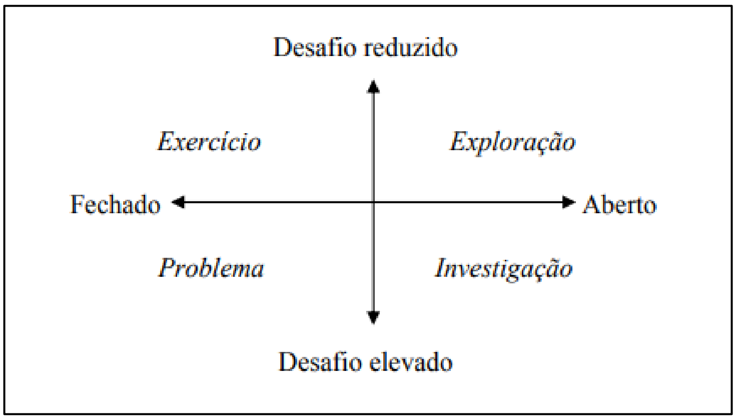


Figura 1. Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e abertura, segundo Ponte (2005, p. 8)

Os exercícios e os problemas apresentam o mesmo grau de abertura (tarefas fechadas, onde é dito o que é dado e o que é pedido), contudo, o grau de desafio diverge, uma vez que os primeiros são de desafio reduzido e os segundos de desafio elevado (Ponte, 2005). As explorações e as investigações apresentam o mesmo grau de abertura (tarefas abertas, onde o que é dado e/ou pedido apresenta um grau de indeterminação significativo), no entanto, apresentam divergência no que concerne ao grau de desafio, porque as primeiras são de desafio reduzido e as segundas de desafio elevado (Ponte, 2005). Ponte (2005) evidencia que as tarefas de exploração são mais fáceis do que as tarefas de investigação, visto que as primeiras permitem aos alunos iniciar o trabalho de imediato, sem muito planeamento, e as segundas requerem dos alunos uma participação ativa desde a primeira fase do processo.

Tendo em conta o grau de desafio, Stein e Smith (2009) consideram que as tarefas podem ser categorizadas em tarefas de baixo nível, caso se pretenda que os alunos executem um procedimento memorizado de maneira rotineira e em tarefas de alto nível, caso se pretenda que os alunos pensem sobre os conceitos e façam conexões com significado matemático. Proporcionar diferentes tipos de tarefas aos alunos, para além de os fazer desenvolver ideias implícitas sobre a natureza da Matemática, também lhes propícia ambientes de aprendizagem distintos (Stein & Smith, 2009).

Ponte (2005) refere ainda, que apesar das dimensões de abertura e desafio das tarefas, existem outras duas dimensões de importância similar: a duração e o contexto. A nível da duração, o autor realça a curta duração dos exercícios, a duração intermédia dos problemas, das tarefas de exploração e investigação e a longa duração dos projetos. As tarefas de longa duração podem ser mais enriquecedoras do que as de curta e de média duração, possibilitando aos alunos aprendizagens mais profundas e interessantes (Ponte, 2005). Todavia, apresentam um elevado risco, já que os alunos se podem dispersar pelo caminho, "entrarem num impasse altamente frustrante, perderem tempo com coisas irrelevantes ou mesmo de abandonarem totalmente a tarefa" (Ponte, 2005, p. 9). Relativamente ao contexto, os polos são "as tarefas enquadradas num contexto da realidade e as tarefas formuladas em termos puramente matemáticos" (Ponte, 2005, p. 10)

Independentemente das características das tarefas que se integram na aula de Matemática, a discussão que se promove na sua resolução evidencia o papel que a argumentação desempenha no 'diálogo' entre a turma, em que todos os alunos trabalham em união, de forma a ser exequível a exploração crítica de uma dada tarefa (Hunter, 2007).

Um contexto favorável à argumentação matemática é aquele que envolve a exploração de situações de divergência tendo em vista a obtenção de consensos matematicamente fundamentados pela turma. Para que essas situações ocorram é necessário explorar tarefas que permitam o aparecimento de vários processos de resolução e que instigam a reflexão. A possibilidade dos alunos exprimirem perspetivas díspares, tornar visíveis posições em confronto e instituir essas posições como objeto de reflexão individual e coletiva são aspectos que facilitam a emergência e resolução de desacordos (Boavida, 2005a).

Num contexto de argumentação em sala de aula, como se pretende valorizar o raciocínio e as estratégias de resolução dos alunos, o ideal é a implementação de tarefas com um nível elevado de exigência cognitiva, já que quando se utilizam esse género de tarefas os professores se confrontam com as variadas interpretações dos alunos face a uma determinada situação problemática e com os múltiplos caminhos que os alunos podem seguir para elucidar e retificar as suas ideias (Doerr, 2006). Apesar disso, a implementação deste género de tarefas, nem sempre corresponde ao nível de desafio previamente estabelecido pelo professor, visto que, por vezes, as tarefas que são apresentadas aos alunos, com o intuito de lhes estimular o pensamento em níveis elevados de exigência cognitiva, se alteram de forma drástica, quanto à sua natureza, assim que os alunos começam a trabalhar efetivamente sobre elas (Stein & Smith, 2009). Significa isto que a natureza de uma tarefa pode sofrer modificações desde que o professor a idealize até ao momento em que os alunos a concretizam.

Stein e Smith (2009) estabelecem três fases pelas quais passa uma tarefa e que na sua perceção são influências importantes na aprendizagem dos alunos. A primeira fase corresponde à forma como as tarefas surgem nos materiais curriculares; a segunda fase corresponde ao modo como as tarefas são expostas pelo professor; e a terceira fase, a mais influente na aprendizagem dos alunos, corresponde à forma como os próprios alunos realizam as tarefas (Stein & Smith, 2009).

As tarefas abertas, como permitem um maior número de interpretações dos alunos, tornam-se mais adequadas para a prática argumentativa, contudo, às vezes, a sua implementação, desponta algumas dificuldades, podendo as mesmas estar relacionadas não só pela falta de estrutura da tarefa, mas também pela falta de experiência dos alunos na concretização de tarefas abertas, impossibilitando-os de compreender o que tinham para fazer exatamente (Stein & Smith, 2009). Ponte (2005) advoga que não é suficiente selecionar boas tarefas, é necessário também tomar em atenção a forma como as mesmas são propostas e conduzidas na sala de aula. O papel do professor é, assim, observar as diferentes interpretações produzidas pelos alunos e apoiar os mesmos na correção das suas ideias, em certas dimensões da situação problemática em questão (Doerr, 2006). Porque mais do que utilizar uma *orientação avaliativa*, cuja finalidade é identificar, avaliar e corrigir os erros dos alunos, o professor deve escutar as ideias dos alunos, de modo a conhecer os seus raciocínios, e procurar informações mediante as respostas dadas por estes, pedindo demonstrações ou explicações, *orientação interpretativa* (Doerr, 2006).

Ponte (2005) distingue duas estratégias básicas para o ensino da Matemática: o ensino direto e o ensino - aprendizagem exploratório. No ensino direto, o professor assume "um papel fundamental como elemento que fornece informação de modo tanto quanto possível claro, sistematizado e atractivo. Apresenta exemplos e comenta situações" (Ponte, 2005, p. 12). Nesta estratégia de ensino, o aluno aprende ao ouvir o professor e ao realizar exercícios (Ponte, 2005).

No ensino - aprendizagem exploratório, o professor "não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem" (Ponte, 2005, p. 13). Nesta estratégia de ensino, o ponto de partida são as atividades em que os alunos são "chamados a um forte envolvimento" (Ponte, 2005, p. 15) para que, posteriormente seja feita uma "discussão, balanço, clarificação" (Ponte, 2005, p. 15) daquilo que foi aprendido. O momento de reflexão e discussão com toda a turma, tendo por base o trabalho previamente desenvolvido, como "por excelência para a sistematização de conceitos, a formalização e o estabelecimento de conexões matemáticas" (Ponte, 2005, p. 16) é o mais valorizado nesta estratégia de ensino. Os momentos de discussão, nesta estratégia de ensino, assumem um papel preponderante, já que os alunos têm a possibilidade de apresentar o trabalho que desenvolveram, partilhar as suas conjeturas e conclusões, justificando-as, com os colegas e questionando-se uns aos outros (Ponte, 2005). O professor pode aproveitar esses momentos para procurar clarificar os conceitos e procedimentos, avaliar o valor dos argumentos e estabelecer conexões dentro e fora da Matemática (Ponte, 2005).

Os momentos de discussão partilhados pelos alunos são tidos, assim, como "oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento" (Ponte, 2005, p. 16). Estes momentos envolvem dois processos essenciais, o confronto e a defesa, que permitem não só aprofundar a atividade desenvolvida, envolvendo os alunos e o professor num raciocínio matemático, como também formular novos problemas e conjeturas e valorizar o processo de justificação/prova (Ponte, 2005). O professor pode ajudar os alunos a modificar a forma como se veem a si mesmos e uns aos outros como participantes legítimos na atividade de formular, analisar e avaliar justificações, conjeturas e conclusões, orquestrando habilmente as discussões na sala de aula (Forman, Larreamendy-Joerns, Stein & Brown, 1998). Ao orquestrar uma discussão, o professor está a criar uma situação que além de lhe permitir alinhar os alunos uns com os outros, conforme o conteúdo de trabalho que pretende desenvolver, está a socializá-los em formas particulares de pensar e falar (O'Connor & Michaels, 1996). É importante que, em todos os discursos argumentativos desenvolvidos em contexto sala de aula, o professor solicite aos alunos que pensem, expliquem os seus raciocínios, considerem as asserções dos seus colegas e que as interpretem de modo conveniente (Boavida, 2005a).

2.7. Papel do professor e do aluno na argumentação

Bauersfeld (1995), Cobb (1995) e Komatsu (2009) atendem que a argumentação não se coaduna com argumentos baseados no professor. E efetivamente, para que a argumentação predomine em contexto sala de aula é essencial que o professor dê oportunidade ao aluno para que seja ele o principal agente ativo na construção da sua aprendizagem e para que, gradualmente, desenvolva confiança em si mesmo e autonomia, de modo a conseguir desenvolver um trabalho mais abstrato no interior desse contexto (Komatsu, 2009).

Boavida, Gomes e Machado (2002) indicam que um dos dilemas que o professor de Matemática se defronta quando, em sala de aula, tenciona envolver os alunos em atividades de argumentação matemática advém, por um lado, de "procurar que as ideias que estes apresentam sejam as bases das justificações e discussões que ocorrem e, por outro lado, ter que se assegurar de que as trocas discursivas são matematicamente produtivas" (p. 21). Contudo, estes dois propósitos nem sempre são fáceis de conciliar (Boavida, Gomes & Machado, 2002).

Cobb e Bauersfeld (1995) e Hunter (2007) aludem que na argumentação, o papel do professor é essencialmente auxiliar os alunos na apresentação de argumentos; na distinção de argumentos válidos e não válidos; e na elucidação de alguma resolução apresentada, quando a mesma tenha despoletado dúvidas na turma. O professor pode ainda assumir o papel de mediador do discurso, fornecendo aos alunos conceitos fundamentais para construírem a argumentação colaborativa, quando existe um número considerável de argumentações (Cobb & Bauersfeld, 1995; Hunter, 2007).

Na construção da argumentação colaborativa, argumentação cuja turma participa, Hunter (2007) evidencia que o professor não pode apresentar, durante a elucidação de uma dúvida, numa determinada tarefa, o seu processo de resolução, contudo, pode questionar os alunos, de modo a que pensem e clarifiquem os seus pensamentos, sem influenciar os seus processos de resolução.

De acordo com Cobb (1995), Smith, Hunghes, Engle e Stein (2009), o professor deve organizar a turma, adequadamente, em grupos de trabalho conforme a tarefa que pretende desenvolver; estar a par dos processos de resolução dos alunos e, caso estes estejam a trabalhar em grupo, deve certificar-se de que todos os elementos estão envolvidos na atividade; e apelar à participação dos alunos do grupo aquando discussão da tarefa em grupo-turma.

Segundo o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), o professor tem o dever de solicitar a apresentação de argumentos, exemplos e contraexemplos; criar condições na sala de aula para a aprendizagem da argumentação; instruir os alunos, de modo a que aprendam a construir argumentos; permitir que os alunos analisem e reajam aos argumentos apresentados pelos colegas; e incentivar os alunos a explicitar os seus raciocínios. Resistir à tentação de validar ou invalidar, de imediato, os argumentos e as resoluções que vão sendo apresentadas pelos alunos é uma das tarefas mais difíceis do professor (Boavida, Gomes & Machado, 2002). O professor não pode ceder, nas fases de discussão de uma tarefa, a apelos persistentes de determinados alunos para que se desloque aos seus lugares, de modo a que seja somente o professor a conhecer as suas ideias ou os seus resultados, mas ajudar estes alunos a ultrapassarem o medo de se exporem diante da turma e a assumirem, com naturalidade, as eventualidades do erro (Boavida et al., 2002). Dar visibilidade a certas posições e argumentos, procurando minimizar o risco desta atitude ser tida como preferencial pelos alunos, colocar questões e pedir elucidações, mostrando, em simultâneo, que o esperado é os alunos assumirem também estes papéis, são também tarefas do professor (Boavida et al., 2002).

Os alunos, em conformidade com o NCTM (2007) e o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) devem discutir o seu raciocínio com o professor e os colegas, explicando em que se basearam para formular as suas conjeturas e a lógica das suas asserções matemáticas; argumentar e discutir as argumentações dos outros; interpretar e analisar a informação que lhes é transmitida pelos diversos meios; e raciocinar matematicamente, formulando e testando conjeturas e generalizações, e desenvolvendo e avaliando argumentos matemáticos relativos a resultados, processos e ideias matemáticas.

Para vários autores (Douek & Pichat, 2003; Godino, Batanero & Font, 2004; Gould, 2007; NCTM, 2007), os principais benefícios da argumentação matemática para os alunos são: aperfeiçoar a capacidade de comunicação e discussão matemática; interpretar e avaliar criticamente a informação matemática; elaborar raciocínios lógicos; compreender a importância do rigor no uso da linguagem matemática; e desenvolver a capacidade de abstração e generalização.

Godino, Batanero e Font (2004) creem que se o professor criar condições favoráveis, na sala de aula, não só para que os alunos desenvolvam a capacidade de interpretar e avaliar, de forma crítica, a informação matemática e os argumentos apoiados em dados que se encontram nos mais diversificados contextos, incluindo os meios de comunicação, mas também para que os alunos desenvolvam a capacidade de discutir e comunicar informação matemática, quando a mesma seja relevante, e resolver problemas matemáticos presentes no quotidiano, está a contribuir para a formação de cidadãos matematicamente cultos.

2.8. Estudos empíricos sobre a argumentação matemática

A literatura denota já alguns estudos empíricos sobre a argumentação matemática no 1.º e 2.º ciclo do ensino básico. Krummheuer (1998) analisou a produção coletiva de argumentos num pequeno grupo de alunos do 2.º ano de escolaridade. O objetivo deste estudo era que os alunos ao produzirem argumentos não só chegassem a um resultado, mas também que explicitassem as suas razões. Com este estudo Krummheuer (1998) concluiu que quando os alunos estão envolvidos de forma ativa na produção de argumentos podem ser apresentadas afirmações que não levam a resultado algum, assim como pode existir falta de consenso entre os intervenientes.

Vários estudos (Manouchehri, 2006; McNeal, 2006; Mercer, 2000; St John, 2006; Williams, 2006; Wood, 2006), em conformidade com Hunter (2007), forneceram evidências de que quando

> [...] as oportunidades são propiciadas aos alunos para participar em formas ricas de investigação e argumentação, a qualidade das suas próprias explicações e justificações matemáticas são reforçadas. Isso ocorre porque a argumentação é uma ferramenta de raciocínio poderosa que permite aos alunos, no diálogo, refutar, criticar, elaborar e justificar conceitos e factos matemáticos e desenvolver uma compreensão das perspetivas opostas quando todos os alunos trabalham para a construção de um consenso coletivo (p. 3-82).

Hunter (2007) no seu estudo sobre a argumentação matemática reconheceu que a argumentação colaborativa na aula de Matemática funciona como um diálogo em turma, em que todos os alunos trabalham em conjunto para que seja exequível a exploração crítica de uma dada tarefa. Perante o que foi mencionado, a autora estudou as formas de interação em contexto sala de aula e o modo como as mesmas foram utilizadas para alterar o discurso dos alunos na argumentação colaborativa concluindo que os alunos podem participar na argumentação coletiva quando devidamente orientados pelo professor e que a construção argumentativa colaborativa e o raciocínio explicativo são a base para a justificação e argumentação.

Silva (2012) analisou a argumentação matemática de alunos do 5.º ano de escolaridade e concluiu que as principais dificuldades que os alunos manifestaram ao argumentar se devem, sobretudo, à falta de hábitos argumentativos nos anos de escolaridade anteriores. E que a exploração dos raciocínios dos alunos em grande grupo, utilizando a argumentação coletiva, pode ser considerada bastante produtiva para a aprendizagem.

Sineiro (2015), através do seu estudo, pretendeu compreender de que modo poderia promover e apoiar o envolvimento dos alunos em atividades de argumentação matemática e os principais desafios que esta investigação lhe poderia acarretar, concluindo que para que se possa promover e apoiar os alunos em atividades de argumentação é essencial uma boa planificação das atividades a desenvolver, já que a mesma permite uma melhor preparação do professor para os vários cenários que possam ocorrer. Concluiu ainda, que as tarefas que propôs aos alunos e a postura que assumiu em contexto sala de aula foi o que fez desencadear os episódios de argumentação, contudo, como os alunos não quiseram registar os seus raciocínios por escrito para apresentar aos colegas fez com que estes se perdessem ao longo das explicações orais apresentadas, dificultando o desenvolvimento das atividades de argumentação (Sineiro, 2015). Os principais desafios que enfrentou com este estudo foram: a dificuldade em planificar aulas numa fase inicial; a seleção de tarefas, pois desconhecia o grau de exigência das mesmas; e o facto de não conseguir antecipar as respostas dos alunos, fazendo com que durante a discussão coletiva não soubesse lidar com os desacordos e validasse, de forma precipitada, os raciocínios que estavam corretos (Sineiro, 2015).

CAPÍTULO 3

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E ESTRATÉGIAS DE INTERVENÇÃO

Este capítulo contempla duas secções, o enquadramento contextual e as estratégias de intervenção, respetivamente. A primeira secção, o enquadramento contextual, apresenta três subsecções, a caracterização do agrupamento e das escolas, a turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico e a turma do 2.º do Ensino Básico em que realizei a minha intervenção pedagógica. A segunda secção, as estratégias de intervenção, apresenta duas subsecções, a metodologia de ensino e de aprendizagem adotada e os instrumentos de recolha de informação selecionados para a avaliação do ensino ministrado.

3.1. ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL

3.1.1. Caracterização do agrupamento e das escolas do 1º e 2º Ciclo do Ensino Básico

O projeto de intervenção pedagógica foi implementado num agrupamento de escolas pertencente ao concelho de Braga, num primeiro momento, numa escola básica de 1.º Ciclo, e num segundo momento, numa escola básica de 2.º e 3.º Ciclo.

O agrupamento de escolas situa-se no 'coração' urbano da cidade, num território com forte densidade populacional e com alto dinamismo socioeconómico e cultural. Esforça-se por ser uma organização educativa local, nacional e internacional de referência, tendo como principal foco o desenvolvimento da cidadania e da interculturalidade para e com a comunidade educativa. Apresenta várias ofertas educativas, tais como Educação Pré-Escolar, 1.º, 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico e, ainda, 1.º, 2.º e 3.º Ciclos do Programa Integrado de Educação e Formação.

As escolas do 1.º Ciclo do agrupamento, genericamente, têm sofrido várias obras de requalificação e ganho inúmeros materiais informáticos e didáticos, o que é uma mais-valia para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos. O espaço onde o aluno e o professor estão inseridos pode ajudar em muito o processo de ensino e aprendizagem, isto porque, quando o espaço é didaticamente rico é exequível chegar mais longe.

A escola sede, escola do 2.º e 3.º Ciclo do Ensino Básico, foi totalmente renovada (processo concluído em 2015) tornando-se num estabelecimento educativo moderno com excelentes condições, não só para a aprendizagem dos alunos, mas também para a prática desportiva, facto comprovado na procura e utilização frequentes da escola e do pavilhão gimnodesportivo, seja pelas diversas instituições da cidade seja pela comunidade em geral.

3.1.2. Turma do 1º Ciclo do Ensino Básico

No contexto de 1.º Ciclo do Ensino Básico, o projeto de intervenção pedagógica foi implementado numa turma do 2.º ano de escolaridade, constituída por 22 alunos, 13 raparigas e 9 rapazes, dos quais um apresentava necessidades educativas especiais (NEE), com idades compreendidas entre os 7 e os 8 anos. Tratava-se de uma turma heterogénea, com aptidões e ritmos de aprendizagem distintos, composta por vinte alunos de nacionalidade portuguesa e dois de nacionalidade estrangeira (ucraniana e brasileira).

O projeto de intervenção pedagógica adveio da área curricular de Matemática, por essa razão foi importante conhecer o desempenho dos alunos na mesma, o que é ilustrado na Figura 2.

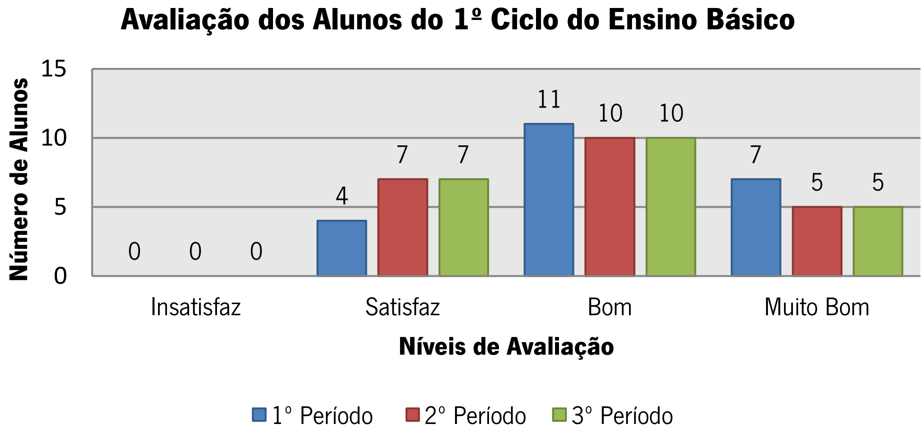


Figura 2. Classificação obtida pelos alunos do 2.º ano de escolaridade, ao longo do ano letivo, a Matemática.

Da análise da Figura 2 é possível constatar que todos os alunos da turma apresentam classificação positiva, ainda que a classificação "Bom" predomine entre as restantes. É de realçar que o número de alunos que obteve essa classificação desceu ligeiramente do 1.º para o 2.º período, mantendo-se proporcional do 2.º para o 3.º período. Em relação às classificações "Satisfaz" e "Muito Bom", respetivamente, há um aumento da primeira do 1.º para o 2.º período e uma diminuição da segunda do 1.º para o 2.º período, todavia do 2.º para o 3.º período, em ambas as classificações observa-se uma constante.

No início da minha intervenção pedagógica, antes da implementação do meu projeto, com o intuito de caracterizar a turma, pedi aos alunos que respondessem a um questionário (Anexo 1). Em resposta a esse questionário constatei que cerca de 13 alunos afirmaram que a sua disciplina preferida era Matemática, o que evidencia as notas atribuídas ao longo do ano letivo. Contudo, 6 alunos referiram que a disciplina de Matemática era a que sentiam maiores dificuldades, o que traduz a classificação de "Satisfaz".

No que concerne aos hábitos de argumentação matemática dos alunos, principal problemática do estudo, 18 alunos afirmaram partilhar e discutir com os seus colegas as resoluções das suas tarefas e 20 consideraram importante o debate das mesmas com toda a turma por acharem que facilita a sua aprendizagem. Em termos de exposição dos seus raciocínios, 17 alunos disseram preferir a linguagem oral e 5 a linguagem escrita. Já com o intuito de conhecer a opinião dos alunos quanto ao significado da palavra 'argumentar', apenas 7 alunos manifestaram opinião, das quais surgiram várias interpretações, desde defender a Matemática a defender as coisas que se fazem, de proteger as suas respostas a defender as suas palavras, as suas ideias.

Por fim, é de enfatizar que todos os alunos foram identificados por A#, em que # representa um número distinto atribuído a cada aluno, de modo a preservar a sua identidade.

3.1.3. Turma do 2º Ciclo do Ensino básico

No contexto de 2.º Ciclo do Ensino Básico, o projeto de intervenção pedagógica foi implementado numa turma do 5.º ano de escolaridade, constituída por 24 alunos, 12 raparigas e 12 rapazes, dos quais dois apresentavam necessidades educativas especiais (NEE), com idades compreendidas entre os 10 e os 11 anos. Tal como a turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico, também esta era uma turma heterogénea, composta por vinte e dois alunos de nacionalidade portuguesa e dois de nacionalidade estrangeira (ucraniana e nepalesa) com aptidões e ritmos de aprendizagem diferenciados.

Tendo em consideração que o projeto de intervenção pedagógica é contínuo e o desempenho dos alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico foi tido em conta, torna-se também pertinente conhecer o desempenho dos alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico, o que é ilustrado na Figura 3.

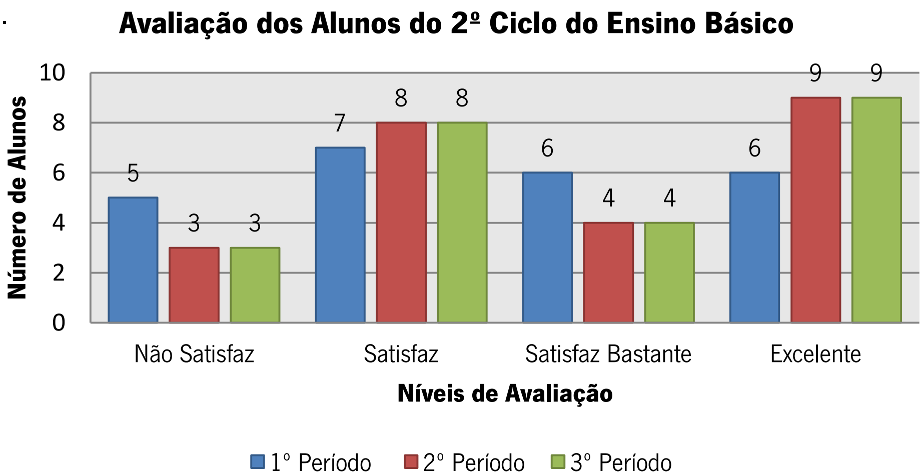


Figura 3. Classificação obtida pelos alunos do 5.º ano de escolaridade, ao longo do ano letivo, a Matemática.

Ao analisar a Figura 3 é possível verificar que a classificação obtida pela turma é variável, embora sejam as classificações "Satisfaz" e "Excelente" que mais se sobressaem. Estas classificações apresentam um ligeiro aumento do 1.º para o 2.º período, mantendo-se uniforme do 2.º para o 3.º período, contudo, e ainda assim, a classificação "Excelente" foi predominante no 2.º e 3.º período. É de enfatizar que tanto o número de alunos que obteve classificação negativa no 1.º período como o número de alunos que obteve a classificação "Satisfaz Bastante" reduziu ligeiramente do 1.º para o 2.º período, porém do 2.º para o 3.º período, ambas as classificações apresentam uniformidade.

Assim como no 1.º Ciclo do Ensino Básico, antes da implementação do meu projeto, pedi aos alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico que respondessem a um questionário (Anexo 2) de modo a caracterizar a turma. Em resposta a esse questionário verifiquei que 5 alunos mencionaram a Matemática como sendo a sua disciplina preferida e 6 alunos a indicaram como sendo a que menos gostavam, o que neste último pode justificar a classificação de "Não Satisfaz". Também notei que a turma, na sua maioria, teve dificuldades em responder ao grupo "Perceções sobre a Geometria" do questionário, cuja finalidade era conhecer as conceções prévias dos alunos sobre esse domínio de conteúdos, pois não estava familiarizada com o significado da palavra. Apesar disso, considero fundamental conhecer as conceções prévias dos alunos antes de qualquer atividade de implementação, pois só assim é possível conhecer as suas ideias iniciais sobre o tema e selecionar um método para o desenvolver.

Em relação aos métodos para aprender tópicos de Geometria, os alunos revelaram maioritariamente preferência pela realização de trabalhos em pares e/ou grupos e pelas construções geométricas através de materiais manipuláveis.

No que respeita aos hábitos de argumentação matemática dos alunos, 15 alunos afirmaram partilhar e discutir com os seus colegas as resoluções das suas tarefas e 21 consideraram importante o debate das mesmas com toda a turma por acharem que amplia os seus conhecimentos. Relativamente à apresentação dos seus raciocínios, 7 alunos disseram preferir a linguagem oral e 17 a linguagem escrita. Já com o intuito de conhecer a opinião dos alunos quanto ao significado da palavra 'argumentar', 18 alunos manifestaram opinião, enquanto 6 não. Dos 18 que se manifestaram, surgiram várias interpretações, como as seguintes: "partilhar estratégias" (A9); "fazer o que a professora pede" (A21); "opinar" (A20); "trabalhar" (A20); "falar sobre o que se faz" (A16); "um documento" (A18); "discutir" (A20); "falar em conjunto" (A14); "explicar as respostas dadas" (A11); e "conversar sobre algo" (A10).

É de sublinhar, mais uma vez, que todos os alunos foram identificados por A#, em que # representa um número distinto atribuído a cada aluno, de modo a preservar a sua identidade.

3.2. ESTRATÉGIAS DE INTERVENÇÃO

3.2.1. Metodologia de ensino e de aprendizagem

Os alunos, de forma genérica, pouco argumentam em contexto sala de aula (Ponte, Matos & Abrantes, 1998). Ainda assim, para que essa capacidade se desenvolva é necessário a implementação de atividades que a incitem. Para esse fim, enquanto professora, pretendi propor aos alunos tarefas que despertassem o seu interesse, que lhes permitisse expressarem-se e que estimulasse o seu raciocínio, ao ponto de se questionarem.

Na verdade, ao falar em argumentação, nomeadamente, a matemática, é necessário referir a pertinência de criar um ambiente de aprendizagem propício à participação do aluno, em que os principais objetivos sejam a explicação do raciocínio; a justificação dos diversos processos, não menosprezando a formulação; a avaliação e a prova das diferentes conjeturas apresentadas (Boavida et al., 2008). Por isso, optei por adquirir o formato de ensino exploratório, cujo objetivo basilar era ser o aluno a descobrir o que lhe era pedido. A intenção deste género de ensino não é o de serem os alunos a descobrirem sozinhos os princípios matemáticas que têm de aprender, nem tão pouco que sejam eles a inventar conceções, processos ou denominações (Canavarro, 2011). Canavarro (2011) defende que “os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva” (p. 11), tendo a possibilidade de ver ”os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática” (p. 11). Contudo, segundo a autora, para que isto se suceda é fundamental o papel do professor, que deve selecionar cada uma das tarefas com critério e delinear a exploração matemática, de modo a cumprir o objetivo predefinido com base no programa. Sendo assim, enquanto professora, tentei orientar o trabalho dos alunos, interpretando e compreendendo a forma de resolução de cada uma das tarefas que realizaram e explorando as suas respetivas respostas, de forma a conciliar e articular as suas ideias com aquilo que era esperado que aprendessem.

A aprendizagem é uma construção pessoal decorrente de uma experiência e traduz-se numa modificação de comportamento, ou seja, aprendemos através da experiência e sabemos se aprendemos se no nosso interior houver uma mudança que se reflete em mudanças de hábitos, mudanças de pensamento ou quando não eramos capazes de realizar tal tarefa e a conseguimos fazer depois do processo de aprendizagem (Inácio, 2007). Este processo, na minha perspetiva, deve ser o resultado da integração das intenções educativas do professor com os interesses refletidos e organizados dos alunos. Por essa razão, o professor não se deve resumir somente à transmissão de teoria mas também à exploração e motivação de tudo o que o aluno lhe pode oferecer. Este deve incentivar os seus interesses, dar-lhe oportunidades de se expressar, estimular o seu raciocínio a fim do próprio aluno se questionar, e motivar a cooperação e investigação do mesmo. Para que isto aconteça, é necessário que o professor goste e acredite naquilo que faz, pois as suas ações servirão de modelo para os alunos que tem diante de si. Se ele ensinar os alunos a refletir, também ele deverá refletir, se ele ensinar a respeitar o próximo, também ele deverá respeitar os alunos. Igualmente essencial é o estabelecimento de uma rotina educativa, para que o dia de aulas possa decorrer fluentemente e os alunos saibam diferenciar o tempo de brincar, do tempo de estudar.

De acordo com Libâneo (1994) "a relação entre ensino e aprendizagem não é mecânica, não é uma simples transmissão do professor que ensina para um aluno que aprende." Aliás, este mesmo autor concluiu que o processo de ensino e aprendizagem é bem diferente disso, "é uma relação recíproca na qual se destacam o papel dirigente do professor e a atividade dos alunos" (p. 90), do qual podemos perceber que "o ensino visa estimular, dirigir, incentivar, impulsionar o processo de aprendizagem dos alunos" (p. 90). Desta forma, ao criar atividades com significado e ao ensinar explicitamente, o professor pretende que os alunos construam os seus próprios significados, as suas próprias aprendizagens. Mas para que isso aconteça é necessário que o professor transmita os seus conhecimentos através de métodos e técnicas adequadas, para que o aluno não encare a aprendizagem como um obstáculo, mas como uma ponte para o seu sucesso escolar.

Ser escutado é um pilar para a construção de uma sociedade democrática e justa, que inclui a escola e todas as relações que daí advêm. E de facto, a escola é o motor da aprendizagem e da mudança, onde não devem existir relações de hierarquia, mas sim relações colaborativas.

Todas as responsabilidades atribuídas aos alunos, aquando a audição da sua voz, dão-lhes o direito à participação, assim como a possibilidade de se envolverem ativamente nas decisões. Ao participarem ativamente na própria educação, os alunos motivam-se e percebem que eles próprios têm de colaborar na sua aprendizagem e não podem ficar à espera que os professores façam tudo por eles. E quando a voz do aluno falar mais alto, os professores vão perceber que os alunos não os pretendem substituir e os alunos descobrir que encontrar soluções não é assim tão fácil. Porém, para que isto se suceda é preciso proporcionar aos alunos projetos onde possam aprender e assumir responsabilidades, pois só isso os fará crescer.

Dar enfoque à voz do aluno para além de constituir um direito, depois de se tornar uma rotina, será um exercício em busca de potencialidades, transmissão e renovação da pedagogia, porque é certo que as opiniões dos alunos são cruciais para o desenvolvimento de um "bom professor".

Segundo Zabalza (1994), ao estabelecer-se um plano, este tem de traduzir uma relação com o programa e, consequentemente, com o currículo, bem como com as condições e características do contexto de aprendizagem. Assim, ao longo da minha intervenção pedagógica, decidi orientar a minha prática pela planificação previamente desenvolvida.

Em termos de metodologia de investigação, o meu projeto adquiriu características qualitativas ao procurar compreender o significado que os alunos atribuíram às atividades em que se envolveram (Bogdan & Biklen, 1994) e reuniu características de investigação-ação ao procurar mudar aspetos da minha prática pedagógica que emergiram na retrospectiva da minha ação. No que concerne às características de investigação-ação é de referir a sua organização cíclica, que se verificou em todas as aulas que lecionei, quer no 1.º Ciclo do Ensino Básico, quer no 2.º Ciclo do Ensino Básico, cujos ciclos foram pautados por uma planificação, seguida de uma pré-reflexão, a aula propriamente dita e uma pós-reflexão. Na minha opinião foi fundamental assumir uma posição crítica face às aulas lecionadas que integram o projeto, isto porque, pensar criticamente, ajuda, sobretudo, a evitar possíveis dilemas decorrentes das nossas ações e a obter melhores resultados em práticas futuras. Também a 4.ª dimensão pela qual o profissional de educação rege o seu perfil de desempenho ao longo da carreira, presente no Decreto-Lei n.º 240/2001 de 30 de agosto, destaca o profissional de educação como um ser reflexivo, capaz de pensar criticamente sobre a sua prática profissional com o objetivo de a aperfeiçoar e desenvolver competências pessoais e sociais.

3.2.2. Instrumentos de recolha de informação para a avaliação do ensino ministrado

Os métodos de recolha de dados são estratégias que consentem aos investigadores obter dados empíricos que os ajude a responder às suas questões de investigação. Os dados daí resultantes devem ser analisados e interpretados de forma a poderem ser transformados em resultados e conclusões.

Assim, centrando-me no meu projeto de intervenção pedagógica supervisionada é de evidenciar os métodos de recolha de dados utilizados, nomeadamente, as produções dos alunos; as questões aula; as gravações áudio das aulas e os questionários, tendo por base as questões de investigação a que me comprometi dar resposta (Quadro 3).

Quadro 3. Questões de Investigação e consequentes Métodos de Recolha de Dados

Questões de Investigação		Métodos de Recolha de Dados			
		Produções dos Alunos	Questões Aula	Gravações de Áudio	Questionário Final
1	Que tipos de argumentos os alunos recorrem nas atividades de aprendizagem de tópicos de Geometria?				
2	Que dificuldades manifestam os alunos quando têm de argumentar matematicamente as suas atividades?				
3	Que perceções têm os alunos sobre a argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria?				

Produções dos alunos. As produções dos alunos são um bom instrumento de recolha de dados, uma vez que traduzem a resolução das tarefas que foram propostas ao longo das aulas que lecionei. Este instrumento permitiu-me recolher informações escritas para uma análise futura, assim como permitiu aos alunos ficarem com o registo daquilo que foi abordado ao longo das sessões como resultado das suas aprendizagens. De modo a preservar a identidade dos alunos, as produções realizadas pelos mesmos foram identificadas por A# em que # representa um número distinto atribuído a cada aluno.

Questões aula. As questões aula possibilitam uma recolha de informação mais perspicaz e contextualizada. Este instrumento de recolha de dados é pertinente, uma vez que as respostas enunciadas pelos alunos me permitiram reter dados para, posteriormente, dar resposta às questões de investigação a que me predispus.

Gravações áudio. As gravações áudio das aulas são um bom instrumento de recolha de dados, se bem aplicadas, já que permitem salvaguardar informação para poder mais tarde ser utilizada. Ao longo das aulas procurei usar este instrumento para captar momentos de discussão dos alunos após a resolução das tarefas que lhes atribuí, assim como das aulas em geral, porque o registo conseguido reflete a dinâmica desenvolvida e viabiliza a transcrição dos diálogos mais relevantes das aulas lecionadas.

Questionários. Os questionários, segundo Quivy e Campenhoudt (2008) são instrumentos de recolha de dados que se tornam adequados quando se pretende formular as mesmas questões a um elevado número de pessoas e recolher as suas respostas, de forma anónima, com a maior brevidade possível. Contudo, os questionários não permitem ao implementador perceber de que forma a pessoa questionada procedeu para responder às questões colocadas.

Durante o meu projeto de intervenção pedagógica supervisionada, os questionários que implementei apresentavam questões de resposta aberta e fechada, embora a maioria fossem de resposta aberta para que os alunos pudessem expressar a sua opinião, sem que a mesma fosse condicionada por um conjunto de opções. Desta forma, em cada um dos ciclos do Ensino Básico, decidi realizar dois questionários, um no início e outro no final da minha intervenção pedagógica. Os questionários iniciais (Anexos 1 e 2) e os questionários finais (Anexos 10 e 11) tiveram diferentes propósitos, sendo o objetivo dos primeiros caracterizar a turma em questão e o objetivo dos segundos avaliar o ensino ministrado.

Em síntese, posso sublinhar que não há um método melhor do que outro, que permita que a informação seja recolhida com maior ou menor sucesso, mas que a escolha do mesmo deve ter em atenção a informação que pretendemos recolher e o destino que lhe queremos dar.

CAPÍTULO 4

DESENVOLVIMENTO E AVALIAÇÃO DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Neste capítulo consta a descrição e a interpretação da informação recolhida ao longo da minha intervenção pedagógica no 1.º e no 2.º Ciclo do Ensino Básico. Contempla cinco secções, sendo a primeira e a segunda relativas à intervenção pedagógica, a terceira à discussão dos resultados obtidos e a quarta e a quinta à avaliação do ensino ministrado no 2.º e 5.º ano de escolaridade, respetivamente. Na primeira e na segunda secção pretende-se evidenciar os aspetos mais significativos da prática. Na terceira secção pretende-se discutir os resultados obtidos, em cada uma das tarefas propostas, no 1.º e no 2.º Ciclo. Na quarta e na quinta secção pretende-se averiguar as perceções dos alunos, de cada um dos ciclos, face às estratégias de ensino utilizadas.

Assim, e de modo a expor o que foi concretizado nas duas turmas, apresenta-se na seguinte tabela os tópicos desenvolvidos, as sessões de intervenção ordenadas e os objetivos pré-estabelecidos.

Tabela1. Síntese da Intervenção Pedagógica no 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico

	Tópicos	Sessão de Intervenção	Objetivos
1º Ciclo do Ensino Básico	Linhas poligonais e linhas não poligonais. Polígonos.	1.ª	Distinguir linhas poligonais de linhas não poligonais e polígonos de figuras planas não poligonais. Identificar em desenhos as partes interna e externa de linhas planas fechadas e utilizar o termo «fronteira» para designar as linhas.
	Classificação de polígonos.	2.ª	Classificar os polígonos quanto ao número de lados. Identificar e representar triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos.
	Classificação de triângulos e quadriláteros	3.ª	Classificar triângulos e quadriláteros quanto aos lados.
	Classificação de polígonos através do Tangram.	4.ª	Classificar os polígonos quanto ao número de lados. Identificar e representar triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos.
2º Ciclo do Ensino Básico	Soma dos ângulos internos de um triângulo.	1.ª	Deduzir que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual à amplitude de um ângulo raso.
	Desigualdade triangular.	2.ª	Saber que num triângulo a medida do comprimento de qualquer lado é menor do que a soma das medidas dos comprimentos dos outros dois e maior do que a respetiva diferença.
	Relação entre lados e ângulos de um triângulo.	3.ª	Depreender que num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos iguais, e reciprocamente, e que ao maior lado opõe-se o maior ângulo e ao menor lado opõe-se o menor ângulo, e vice-versa.
	Relação entre lados e ângulos de triângulos geometricamente iguais.	4.ª	Inferir que em triângulos geometricamente iguais a lados iguais opõem-se ângulos iguais e vice-versa.

De modo a explicitar a minha intervenção pedagógica descrevo e interpreto momentos da 1.ª, 2.ª e 3.ª sessão do 1.º Ciclo do Ensino Básico (Anexos 3, 4 e 5) e da 1.ª, 2.ª, 3ª e 4.ª sessão do 2.º Ciclo do Ensino Básico (Anexos 6, 7, 8 e 9).

4.1. Intervenção pedagógica no 1º Ciclo do Ensino Básico

4.1.1. Linhas poligonais e linhas não poligonais. Polígonos.

O estudo do tópico 'Linhas poligonais e linhas não poligonais. Polígonos' remeteu os alunos a distinguir linhas poligonais de linhas não poligonais e polígonos de figuras planas não poligonais, como também identificar as partes interna e externa de linhas planas fechadas e utilizar o termo «fronteira» para designar essas linhas. Face aos objetivos predefinidos, os alunos começaram por explorar a seguinte tarefa, que resulta de uma adaptação de um excerto da História do Bosque das Figuras Planas de Andreia Hall (2009):

Tarefa 1: Era uma vez um menino chamado Pinóquio que decidiu visitar o Bosque das Figuras Planas. Ele não conhecia muito bem o caminho, mas para sua sorte encontrou a rainha do bosque que o levou até lá. Quando lá chegaram, a rainha explicou-lhe que o bosque era atravessado por um rio que dividia o bosque em duas partes. Numa das partes viviam as figuras VIP, os polígonos, e na outra as restantes, as figuras planas não poligonais.

Os polígonos são todas as figuras planas limitadas por pedaços de linhas direitas, unidas umas às outras pelas pontas, de modo a formar uma linha fechada.

a) Com a ajuda do geoplano constrói as figuras geométricas que conheces. Encontras alguma semelhança entre elas? Qual?

b) Consegues construir no geoplano uma circunferência? Justifica a tua resposta.

Através desta tarefa pretendia promover a interdisciplinaridade entre a área curricular de Matemática e a área curricular de Português, uma vez que a interdisciplinaridade presente nas práticas confere aos alunos a compreensão de que os conteúdos não estão divididos pelas diferentes áreas curriculares do saber, mas que o mesmo conteúdo pode ser abordado de diferentes perspetivas. Após a distribuição da tarefa, os alunos efetuaram uma leitura silenciosa, seguida da leitura em voz alta por um dos alunos e do reconto por outro. A leitura em voz alta e o reconto são importantes para o desenvolvimento de competências, pois permitem aos alunos clarificar aspetos pertinentes do enunciado, interpretar corretamente o que lhes foi pedido, assim como introduzir novo vocabulário. Posteriormente distribuí Geoplanos e elásticos coloridos (abertos e fechados) para que os alunos realizassem as questões que lhes eram propostas no final da história. É importante que os alunos manipulem o Geoplano nos primeiros anos de escolaridade, uma vez que só o experimentando adquirem capacidades para resolver problemas cada vez mais complexos (Araújo, 2006). Ao disponibilizar tais materiais, a minha intenção era fazer com que os alunos compreendessem que para se construir um polígono apenas podiam ser usadas linhas poligonais fechadas (elásticos fechados) e que caso uma figura apresentasse uma linha não poligonal (elásticos abertos) era designada de figura plana não poligonal.

Ao circular pela sala de aula constatei que os alunos descartaram automaticamente os elásticos abertos por os considerarem inúteis para a resolução das questões e que as respostas dadas quer na *questão a)* quer na *questão b)* eram na sua maioria idênticas. No que concerne à *questão a)*, os alunos conseguiram construir as figuras geométricas que tinham aprendido no ano anterior, nomeadamente, o retângulo, o quadrado e o triângulo, como exemplifica o aluno A9 (Figura 4), inclusive a circunferência, como ilustra o aluno A7 (Figuras 5). Os alunos A7 e A17 construíram, ainda, um trapézio como sendo uma das figuras geométricas retidas do ano transato, apesar de não conhecerem a sua denominação. No entanto, os alunos revelaram dificuldades em identificar uma semelhança entre as figuras que construíram no Geoplano quando a mesma lhes foi pedida, quando tal não deveria acontecer, pois o Geoplano é um material didático muito útil, especialmente para analisar figuras geométricas e para verificar as relações que se estabelecem entre as diferentes figuras (Alsina, 2004).

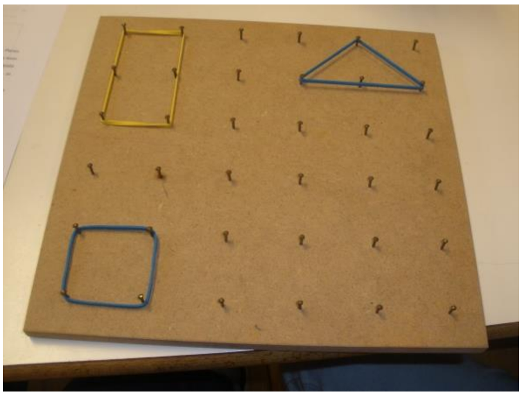


Figura 4. Exemplo de uma construção do retângulo, do quadrado e do triângulo realizada pelo aluno A9.

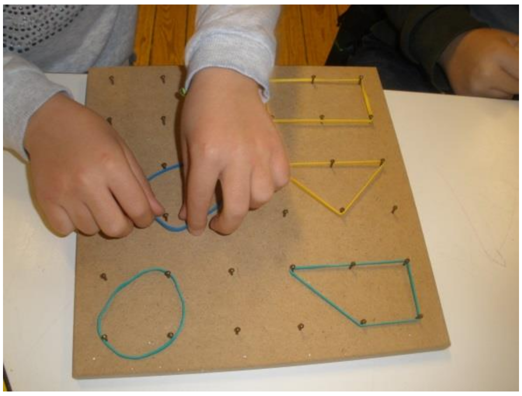


Figura 5. Exemplo de uma construção da circunferência e do trapézio realizada pelo aluno A7.

Relativamente à *questão b*) notei que as respostas afirmativas dadas se centravam, sobretudo, nas construções realizadas na *questão a)*. Após percorrer os diferentes lugares da turma, estabeleci um diálogo com os alunos de forma a conhecer as interpretações realizadas nas duas questões.

Professora:	Se eu olhar para as figuras que vocês construíram consigo encontrar alguma coisa parecida entre elas?
A16:	Sim, têm todas linhas.
Professora:	E como se chamam essas linhas? Lembram-se?
A16:	Retas.
Professora:	Mas vocês aprenderam um nome para quando uma linha tem princípio e tem fim. Lembram-se do nome?
Alunos:	Não.
A12:	Semirreta.
Professora:	Acham que é semirreta?
A19:	Não. A semirreta só tem princípio.
A12:	Mas a que a professora nos perguntou tem princípio e fim.
A19:	Por isso é que não pode ser semirreta.
Professora:	Exatamente. Então alguém sabe dizer-me como se chama?
A16:	Segmento de reta.
Professora:	Muito bem!
Professora:	Então o que é que nós podemos concluir daqui?
A16:	As figuras geométricas têm segmentos de reta.
Professora:	Uma figura geométrica que é formada por segmentos de reta chama-se polígono.

Com este diálogo foi possível recordar alguns dos tópicos estudados no 1.º ano de escolaridade, como também introduzir o novo tópico em estudo: 'Polígonos'.

Professora:	Acham que é possível construir uma circunferência no Geoplano?
A17 e A21:	Sim!
A16:	Não!
Professora:	Porquê?
A17:	Porque eu construí [O aluno mostra a sua construção no Geoplano à turma]

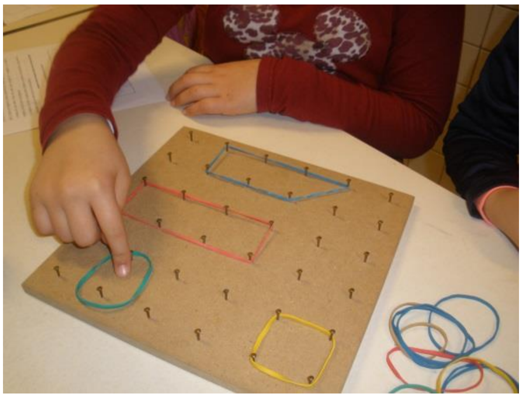


Figura 6. Construção incorreta da circunferência realizada pelo aluno A17.

O aluno A17, ainda que incorretamente, ao apresentar a sua construção à turma mostrou uma tentativa de justificação através de uma prova visual, o que inquietou alguns alunos da turma.

A19: Isso que tu fizeste está mal. O elástico nem está preso aos pregos.

A16: Nem dá para fazer.

Professora: Porquê?

A16: Porque está solto professora.

Professora: Acham que a circunferência tem segmentos de reta?

Alunos: Não.

Professora: Porquê?

A12: Porque a linha é curva.

Professora: Então quer dizer que a circunferência é um polígono?

A16: Não. A professora disse à bocado que nós chamávamos polígono a uma figura que tem segmentos de reta, por isso não é.

Professora: Muito bem A16.

Os alunos A19 e A16 indiciam que compreenderam que para se construir uma figura geométrica no Geoplano é necessário que os elásticos estejam seguros aos pregos. Com a questão "Então quer dizer que a circunferência é um polígono?" pretendia apurar se os alunos tinham compreendido a noção de polígono, sendo que o argumento apresentado pelo aluno A16 foi considerado válido e incontestável, visto que, enquanto professora, o tinha afirmado.

A18: Professora se a circunferência não se chama polígono como se chama?

Professora: Chama-se figura plana não poligonal.

Depois de dialogar com a turma sobre as respostas apresentadas, os alunos perceberam o que distingue uma linha poligonal de uma linha não poligonal e um polígono de uma figura plana não poligonal. Um dos alunos foi ao quadro fazer a síntese do tópico da aula (Figura 7), desenhando as figuras geométricas que eram polígonos e as que não, separando os polígonos das figuras planas não poligonais através de um rio tal como consta no enunciado da Tarefa 1.

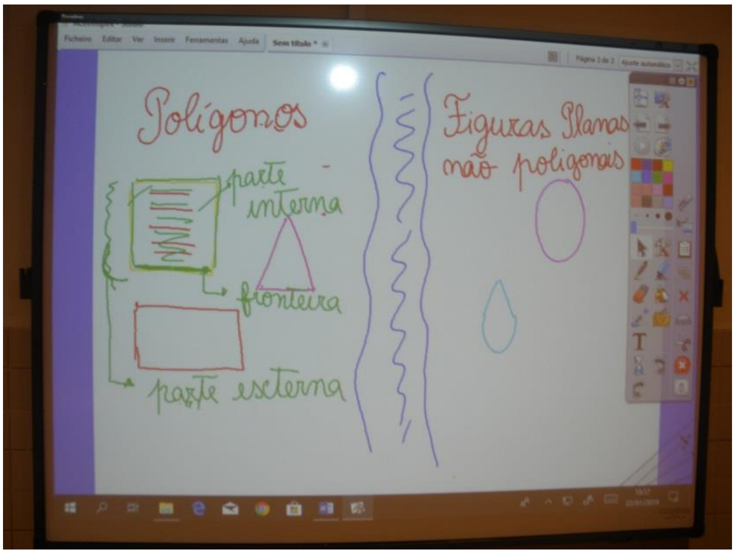
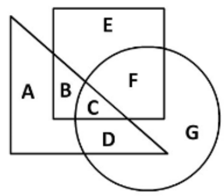


Figura 7. Síntese da aula realizada pelo aluno A19.

Através da síntese realizada pelo aluno A19 foi feita a identificação da parte interna e externa das linhas planas fechadas e utilizado o termo «fronteira» para designar essas linhas. Por fim, os alunos transcreveram para o caderno diário a síntese realizada.

Com a resolução das tarefas consequentes, Tarefas 2 e 3, pretendia que os alunos exercitassem o que aprenderam na Tarefa 1 tendo por base as noções de linha poligonal, linha não poligonal, polígono e figura plana não poligonal.

Tarefa 2: Qual é a letra que está no interior do quadrado e no interior do triângulo, mas que não está no interior da circunferência? Explica como pensaste.



A Tarefa 2, provavelmente por se tratar de uma tarefa fechada (Ponte, 2005), não ofereceu qualquer tipo de dificuldade aos alunos, tornando a sua resolução imediata. Por consequência, não houve lugar para a argumentação.

A Tarefa 3 apresentava maior exigência cognitiva que a Tarefa 2, um poder abstrativo superior. Durante a resolução desta tarefa surgiram diferentes argumentos (Figuras 8, 9, 10 e 11).

Tarefa 3: O senhor Joaquim e a sua mulher ganharam o segundo prémio do Euromilhões. Com o dinheiro compraram um terreno para construírem uma casa com jardim e piscina. Quais dos espaços do terreno não representam um polígono? Justifica a tua resposta.

Os argumentos expressados pelos alunos A14 e A17 (Figuras 8 e 9, respetivamente), ainda que não respondam à tarefa na sua totalidade, por faltar identificar um espaço, foram válidos, apesar de o argumento apresentado pelo aluno A17 (Figura 9) ser mais convincente do que a do aluno A14 (Figuras 8), por evidenciar noções do currículo de Matemática.

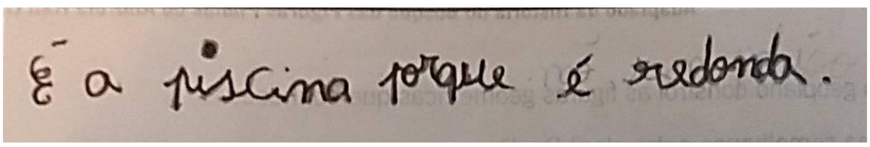


Figura 8. Argumento apresentado pelo aluno A14.

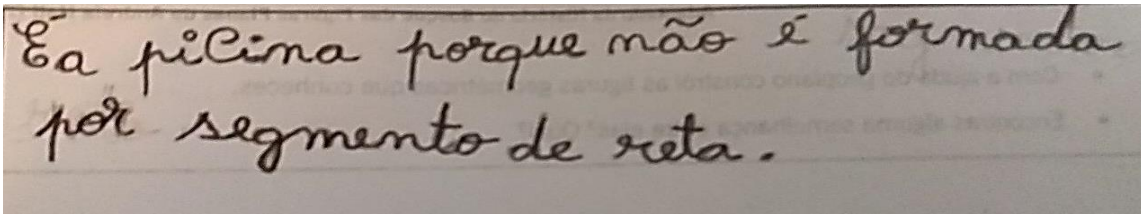


Figura 9. Argumento apresentado pelo aluno A17.

Os alunos A19 e A20 (Figuras 10 e 11, respetivamente) foram os únicos a responder à Tarefa 3 na íntegra, identificando a piscina e o jardim como não sendo polígonos.

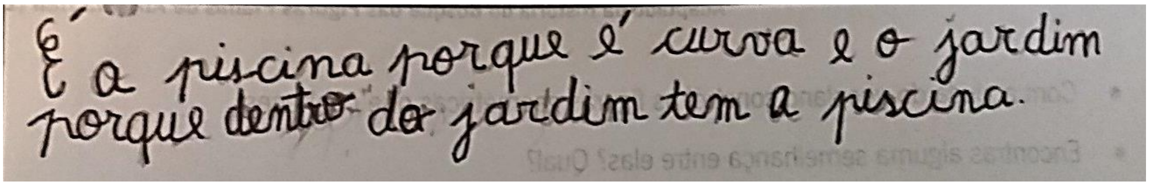


Figura 10. Argumento apresentado pelo aluno A19.

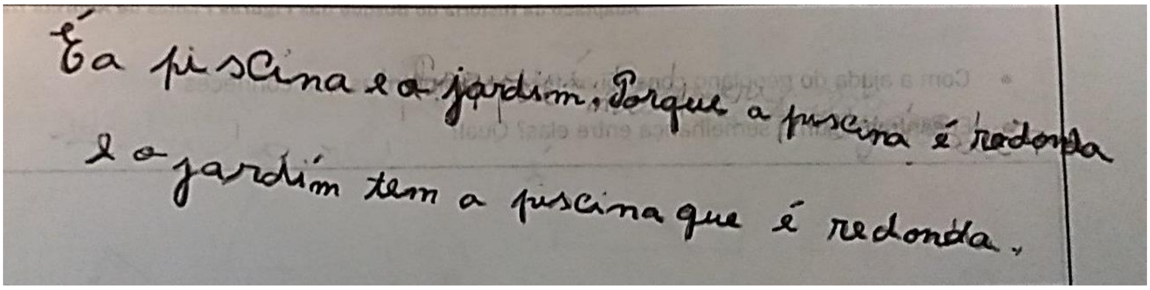


Figura 11. Argumento apresentado pelo aluno A20.

O teor dos argumentos destes dois alunos denota que compreenderam que como a piscina se encontrava inserida no jardim, o mesmo possuía a forma curvilínea da piscina e como tal, esse espaço não poderia ser considerado um polígono.

4.1.2. Classificação de polígonos

Na aprendizagem do tópico ‘Classificação de polígonos’, os alunos atenderam ao número de lados na identificação e representação de triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos. Ao saberem que os polígonos são formados por uma linha poligonal fechada com um determinado número de segmentos de reta que os delimita, os alunos desenharam os polígonos que conheciam, atribuindo-lhes um nome conforme as suas caraterísticas, nomeadamente, o número de lados. Assim sendo, comecei a aula por recordar as noções de linha poligonal, linha não poligonal, polígono e figura plana não poligonal.

Professora:	Vocês sabem que na terça-feira eu ensinei-vos um novo conteúdo. Ainda se lembram como é que ele se chamava?
Alunos:	Sim!
A12:	As linhas poligonais e não poligonais.
Professora:	Muito bem! E alguém sabe dizer-me a diferença entre as duas?
A19:	As linhas poligonais são linhas retas e as linhas não poligonais são curvas e para serem poligonais tem de ter só retas, mas as linhas não poligonais também podem ter retas e curvas.
Professora:	Mas como é que são essas ‘retas’?
Todos:	São retas que têm princípio e fim.
Professora:	E como é que se chamam essas retas que têm princípio e fim?
A14:	Segmentos de reta.

Depois de recordadas as noções, distribuí pelos alunos a Tarefa 1, pedindo-lhes que desenhassem alguns polígonos, com a ajuda da régua, e posteriormente, lhes atribuíssem um nome conforme o número de segmentos de reta, os lados, que eles tivessem.

Tarefa 1: No país da Poligónia vivem vários polígonos, cada um com a sua forma, mas todos divertidos. Sabendo que os polígonos são formados por uma linha poligonal fechada com um determinado número de segmentos de reta que os delimita, que polígonos se podem desenhar?

a) É possível construir um triângulo com apenas dois segmentos de reta? E um quadrilátero com três segmentos de reta? Justifica a tua resposta.

b) É necessário um número mínimo de lados para construir um polígono? Explica como pensaste.

c) Quantos lados podem ter um polígono? Justifica a tua resposta.

Professora:	Um polígono formado por três segmentos de reta que nome é que vocês lhe deram?
A16:	Triângulo.
A19:	Trilátero.

Face à denominação dada pelo aluno A19, solicitei que fosse ao quadro desenhar e denominar os polígonos que tinha desenhado (Figura 12).

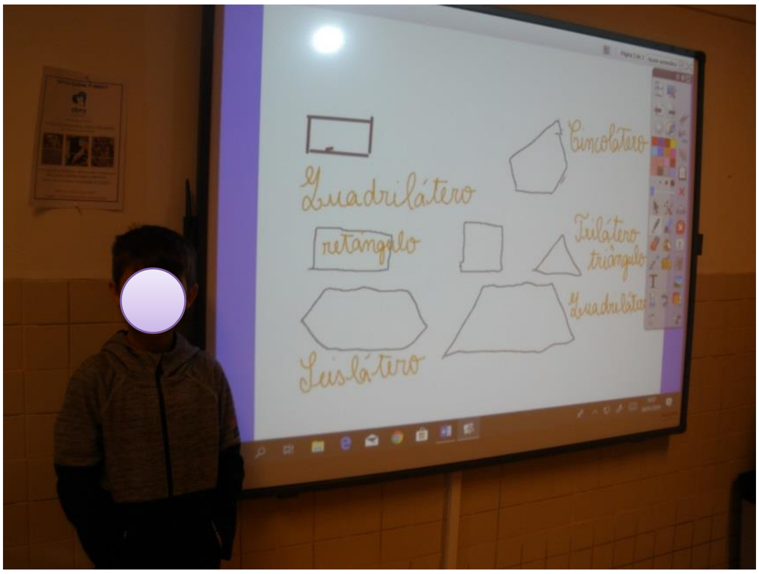


Figura 12. Representação de polígonos e respetiva denominação realizada pelo aluno A19.

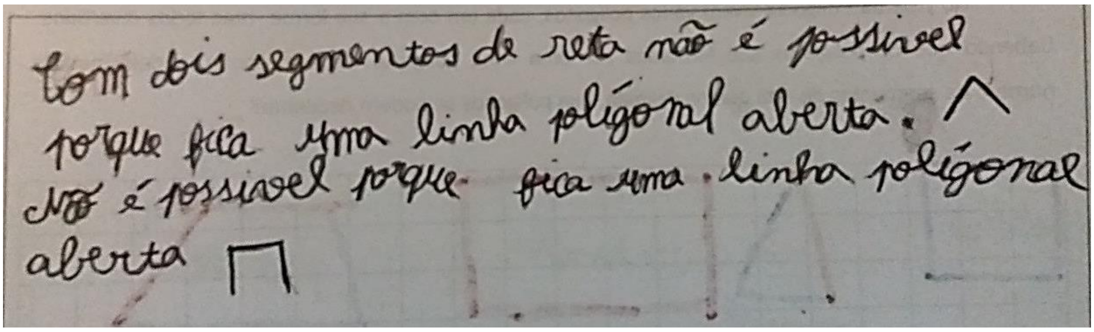
Professora: Trilátero porquê?
A19: “Tri” faz lembrar três e “látero” parece que quer dizer lado.
Professora: Muito bem! A um polígono com três lados tanto podemos chamar triângulo como trilátero.
Professora: E um polígono com quatro segmentos de reta?
A19: Quadrilátero.
Professora: Porque lhe deste esse nome?
A19: Porque se no trilátero, “tri” faz lembrar três, “quadri” faz lembrar quatro e “látero” no fim porque a professora disse que queria dizer lado.

Neste diálogo nota-se uma tentativa de justificação por parte do aluno A19, através da análise etimológica da palavra, o que torna o seu argumento válido.

De seguida, distribuí palhinhas, com o mesmo comprimento, pelos alunos da turma e pedi-lhes que respondessem às *questões a)* e *b)*. A *questão a)* não despoletou contestação por parte dos alunos, aquando da apresentação dos resultados, isto porque, facilmente se verificou que a construção de um triângulo com apenas dois segmentos de reta e de um quadrilátero com três segmentos de reta não era possível, servindo o esboço dos alunos e a construção com palhinhas dos mesmos como prova visual (Figuras 13, 14 e 15).

Figura 13. Exemplo de uma tentativa de construção de um triângulo com dois segmentos de reta realizada pelo aluno A4.

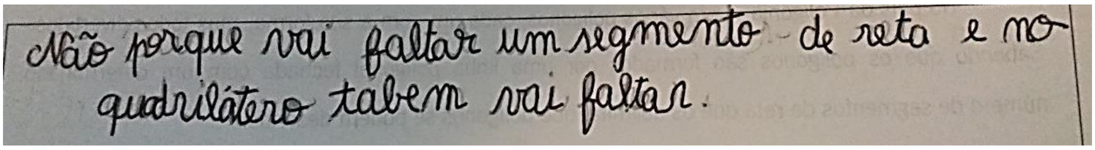
Figura 14. Exemplo de uma tentativa de construção de um quadrilátero com três segmentos de reta realizada pelo aluno A9.



Com dois segmentos de reta não é possível porque fica uma linha polígonal aberta.
Não é possível porque fica uma linha polígonal aberta

Figura 15. Argumento apresentado pelo aluno A14.

Nesta questão, os alunos apresentaram como argumento a ausência de um segmento de reta para cada uma das situações, como ilustra a resposta do aluno A19 (Figura 16).



Não porque vai faltar um segmento de reta e no quadrilátero tabem vai faltar.

Figura 16. Argumento apresentado pelo aluno A19.

Na *questão b)* vários foram os alunos que conjeturaram, mas só alguns justificaram a sua conjetura, como é possível constatar pelo diálogo seguinte.

Professora:	Para construir um polígono é necessário um número mínimo de lados?
A4:	Sim.
A6:	Não.
Professora:	Sim ou não?
A18:	Sim.
Professora:	Porquê?
A18:	Porque eu acho que sim professora.
Professora:	Indica-me uma razão.
A18:	Porque eu fiz assim com quatro palhinhas e deu.
Professora:	E com três palhinhas é possível?
A19:	Sim, é o triângulo.

Professora: Então significa que três é o número mínimo de lados que o polígono pode ter?
A19: Sim!
A8: Não, com dois também dá e é mais pequeno.
Professora: Toda a gente concorda com o A8?
A20: Não.
A19: Não.
Professora: Porquê?
A19: Porque não fecha.
Professora: Tenta explicar-me isso melhor.
A19: Os polígonos são formados por linhas poligonais fechadas e com dois segmentos de reta a linha fica aberta.
Professora: E como é que se chamava essa figura?
A19: Não me lembro muito bem.
Professora: Alguém pode ajudar o A19?
A12: É uma figura que não é um polígono.
Professora: E como é que se chamava, lembraste A12?
A12: Não.
Professora: A16 diz-me tu.
A16: Figura plana não poligonal.

Neste diálogo, o argumento mais convincente é o do aluno A19, uma vez que recorre a conceitos matemáticos para o corroborar.

Na *questão c)*, os alunos apresentaram várias conjeturas, desde até 16, 1000, 2600 e infinitos lados. Em relação à primeira, a mesma foi justificada no quadro interativo através de um desenho representativo, o que serve de prova visual, já as restantes, nenhum dos alunos conseguiu provar os valores conjeturados. Uma forma de provar que um polígono pode ter infinitos lados era através da utilização do GeoGebra, isto porque os alunos poderiam confirmar, sem contestação, a infinidade de segmentos de reta que um polígono pode ter, assim como que a união dessa infinidade de segmentos de reta tendem a aproximar-se de uma circunferência. No momento de sintetizar e registar os resultados obtidos na aula, houve um aluno que revelou conhecimento sobre o símbolo representativo de infinito (Figura 17), o que denota a sua familiaridade com essa representação.

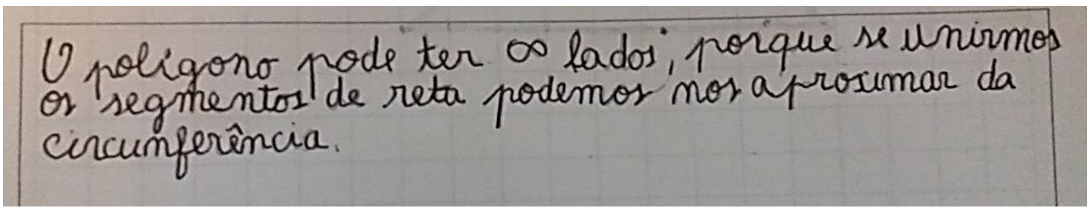


Figura 17. Registo escrito do aluno A19.

Seguiu-se a resolução da Tarefa 2, sobre a qual pretendia que os alunos consolidassem cada uma das classificações de polígonos que tinham estudado, através da interdisciplinaridade entre a área curricular de Matemática e a área curricular de Português, por isso, eu própria criei-lhes um conjunto de adivinhas. Decidi ser eu a criar as adivinhas para que tivessem outro valor, para que fossem únicas e para que fossem sobretudo para os alunos, visto que a última incidia na própria turma.

Tarefa 2: Descobre a resposta às seguintes adivinhas. Não te esqueças de apresentar a forma como pensaste.

1. Têm três bicos, mas não picam,
Vivem num velho telhado.
Mas já os vi num chapéu
De um palhaço engraçado.
Também já os vi em várias velas,
Em barcos de piratas e caravelas.
Venha de lá uma ideia,
Que já chega de brincadeira.

2. Estou nos mosaicos que tu pisas,
E em todos os jogos de xadrez.
Tenho a forma de uma porta,
Ou dos papagaios de papel que tu vês.
Vou-me deixar de rodeios,
Diz-me lá quem sou de uma vez!

3. Tenho um nome esquisito,
Podes ter a certeza, porque eu não minto.
Nas bolas de futebol,
Quase sempre me encontras,
E dou-te já uma dica,
Que não é por serem redondas.
Se os vértices de uma estrela unires,
Facilmente me terás,
Tenta agora descobrir-me, pois não quero que fiques para trás.

4. Esta adivinha é diferente,
Daquelas que vimos até aqui.
Não quero que fiques zangado,
Mas foi feita a pensar em ti.
Se pensares na tua turma, há mais raparigas do que rapazes,
Agora descobre a diferença e adiciona dois.
Através do resultado já descobriste o meu número de lados,
E mais não digo, senão ficas mal habituado.

Depois de distribuir esta tarefa pelos alunos e de lhes dar tempo para responder, notei que eles, na generalidade, apenas conjeturaram, ainda que tenham realizado algumas tentativas de justificação. As conjeturas e justificações apresentadas para as adivinhas 1 e 2 pelos alunos A3 e A20 (Figuras 18 e 19, respetivamente) basearam-se essencialmente na interpretação do texto.

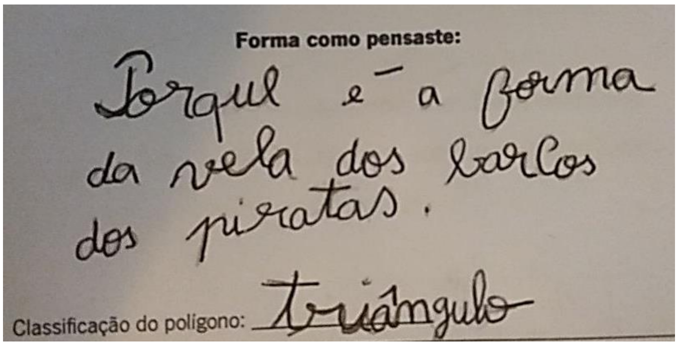


Figura 18. Tentativa de justificação da adivinha 1 realizada pelo aluno A3.

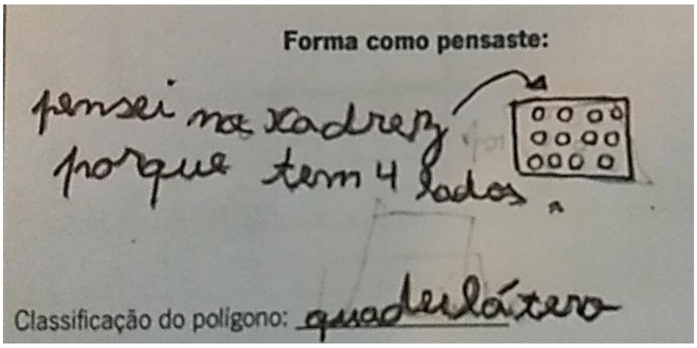


Figura 19. Tentativa de justificação da adivinha 2 realizada pelo aluno A20.

A prova visual da adivinha 3 (Figura 20) e a justificação pormenorizada da adivinha 4 (Figura 21) apresentadas pelo aluno A9 foram os argumentos de maior evidência entre os apresentados na turma.

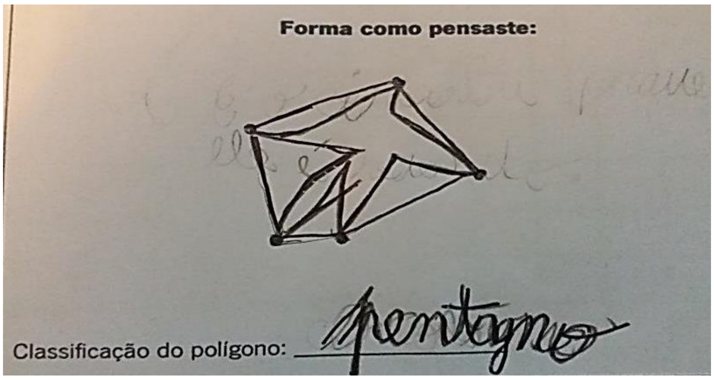


Figura 20. Prova visual da adivinha 3 realizada pelo aluno A9.

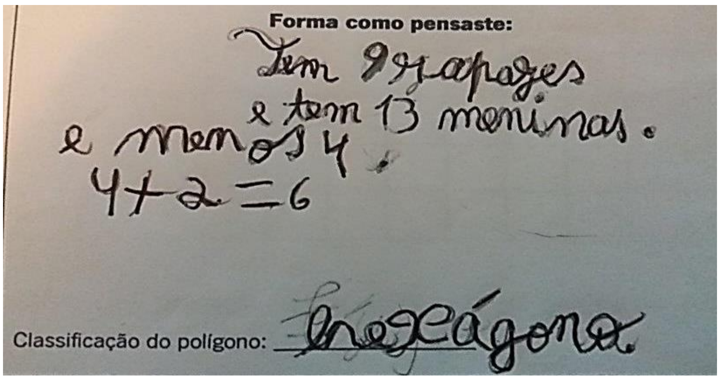
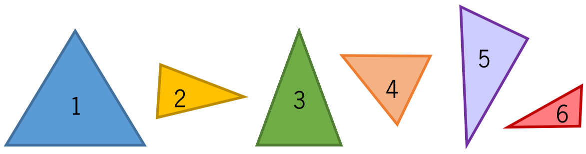


Figura 21. Tentativa de justificação da adivinha 4 realizada pelo aluno A9.

4.1.3. Classificação de triângulos e quadriláteros

Como consequência da classificação de polígonos, seguiu-se a classificação de triângulos e quadriláteros através da exploração das Tarefas 1, 2 e 3. A Tarefa 1 correspondia à classificação de triângulos e a Tarefa 2 à classificação de quadriláteros. A minha intenção, ao selecionar estas tarefas, era fazer com que os alunos compreendessem que os triângulos podiam ser classificados em isósceles, equiláteros e escalenos e que os quadriláteros podiam ser classificados em retângulos e losangos.

Tarefa 1: Observa os seguintes triângulos.

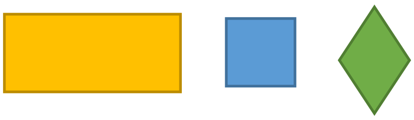


a) Mede os lados dos triângulos e verifica se há alguma semelhança entre eles.

b) Como podes agrupá-los conforme as suas características. Justifica a tua resposta.

c) Como classificas os triângulos quanto aos seus lados?

Tarefa 2: Observa os seguintes quadriláteros.



a) Mede os lados dos quadriláteros e verifica se há alguma semelhança ou diferença entre eles. Justifica a tua resposta.

Quer na *questão a)* da Tarefa 1, quer na Tarefa 2, os alunos demonstraram dificuldades nas medições porque tentaram medir utilizando as diferentes unidades de comprimento, ao invés de reconhecer, somente, o número que cada lado representava.

Na *questão a)* da Tarefa 1, os alunos ao serem questionados se existia alguma semelhança entre os lados de cada um dos triângulos, através da comparação entre os valores de cada um dos lados de cada triângulo, não revelaram dificuldades. Facilmente conseguiram concluir que o triângulo 1 tinha os lados todos iguais, assim como o triângulo 4; o triângulo 5 e o triângulo 6 apresentavam os lados todos diferentes; e cada um dos triângulos, 2 e 3, tinham dois lados iguais e um diferente, como revela o aluno A2 (Figura 22).

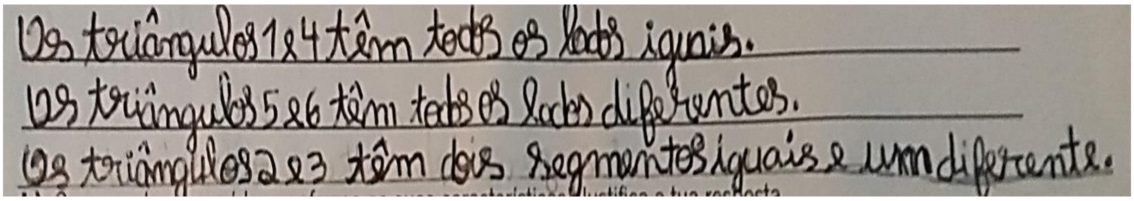


Figura 22. Conjetura apresentada pelo aluno A2.

Agrupá-los conforme as suas caraterísticas, tornou-se simples depois na *questão b)* (Figuras 23 e 24).

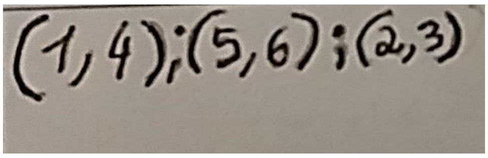


Figura 23. Conjetura apresentada pelo aluno A22.

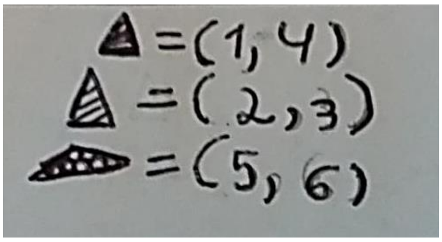


Figura 24. Conjetura apresentada pelo aluno A10.

As conjeturas apresentadas pelos alunos A22 e A10 (Figuras 23 e 24, respetivamente) denotam que ambos compreenderam o que era solicitado. Contudo, a conjetura apresentada pelo aluno A10 é mais elaborada, pois o aluno além de indicar os triângulos que partilhavam das mesmas características, também os representou pictoricamente. Posto isto, introduzi as noções de triângulo equilátero, triângulo isósceles e triângulo escaleno, de modo a que os alunos pudessem responder à *questão c) da* Tarefa 1.

Professora: Então podemos dizer que um triângulo equilátero tem os lados todos...
Alunos: Iguais.
Professora: O triângulo isósceles...
A9: Iguais.
Professora: Iguais?
A15: Não podem ser iguais porque esses são os equiláteros.
A5: Os que têm dois lados iguais e um diferente chamam-se isósceles.
A20: Os que têm os lados todos diferentes são os escalenos como os esqueletos.

Neste diálogo a afirmação utilizada pelo aluno A20 revela-se bastante interessante, porque ele apresenta uma analogia entre os lados de um triângulo escaleno, que são todos distintos, e os esqueletos, que têm os ossos todos diferentes.

Relativamente à Tarefa 2, os alunos, ao serem questionados se existia alguma semelhança ou diferença entre os lados de cada um dos quadriláteros, revelaram poucas dificuldades ao caracterizar e distinguir o quadrado do retângulo, dado que já estavam familiarizados com estes dois polígonos, como ilustra a resposta do aluno A5 (Figura 25).

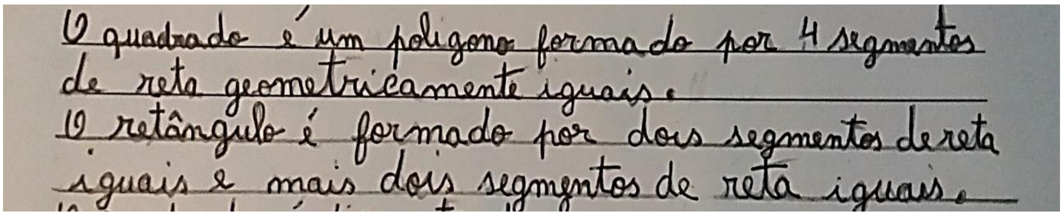

O quadrado é um polígono formado por 4 segmentos de reta geometricamente iguais.
O retângulo é formado por dois segmentos de reta iguais e mais dois segmentos de reta iguais.

Figura 25. Caracterização do quadrado e do retângulo, apresentada pelo aluno A5.

Já o losango, por se tratar de um polígono novo para os alunos, gerou dificuldades quando o tiveram de o distinguir do quadrado. Porém, essas dificuldades foram superadas quando sugeri aos alunos que unissem cada um dos vértices opostos do losango e do quadrado e medissem cada um dos segmentos de reta traçados, de modo a encontrarem o valor numérico de cada um e assim compreenderem a diferença entre estes dois polígonos, como exemplifica a resposta do aluno A5 (Figura 26).

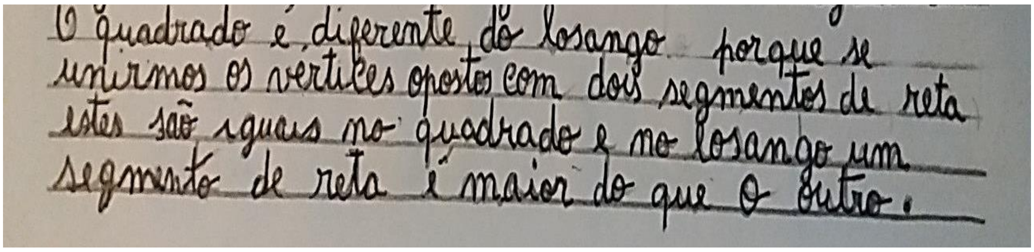
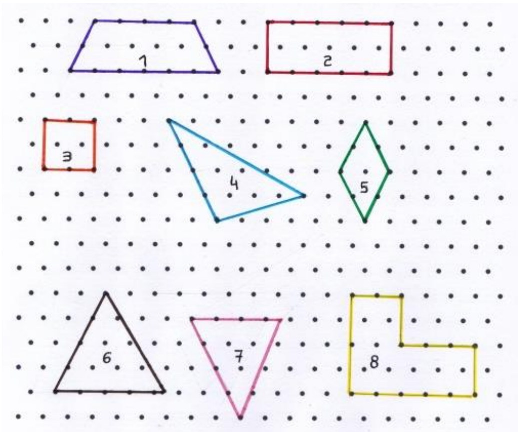

O quadrado é diferente do losango porque se unirmos os vértices opostos com dois segmentos de reta estes são iguais no quadrado e no losango um segmento de reta é maior do que o outro.

Figura 26. Argumento apresentado pelo aluno A5.

As Tarefas 1 e 2 apesar de terem cumprido com os objetivos predefinidos, não se revelaram boas tarefas para a prática argumentativa, visto que os alunos pouco ou nada argumentaram durante a sua resolução.

Sucedeu-se a distribuição da Tarefa 3, em que pretendia que os alunos consolidassem o tópico desenvolvido na aula.

Tarefa 3: Na grelha ponteada estão representadas figuras numeradas de 1 a 8.



Responde às questões seguintes:

a) Identifica as figuras que representam triângulos e classifica-as quanto aos lados.

b) Identifica as figuras que representam quadriláteros.

c) Dos triângulos representados algum é um caso particular do triângulo isósceles?

d) Alguma das figuras representa um losango? Porquê

e) Dos quadriláteros representados, quantos são retângulos?

f) Dos retângulos representados, quais são

As *questões a), b)* e *d)* não representaram qualquer tipo de obstáculo para os alunos, como exemplificam as respostas apresentadas pelos alunos A10, A7 e A19 (Figuras 27, 28 e 29, respetivamente), ao passo que as *questões c), e)* e *f)* lhes despoletaram algumas dificuldades no momento em que tiveram de discutir os resultados.

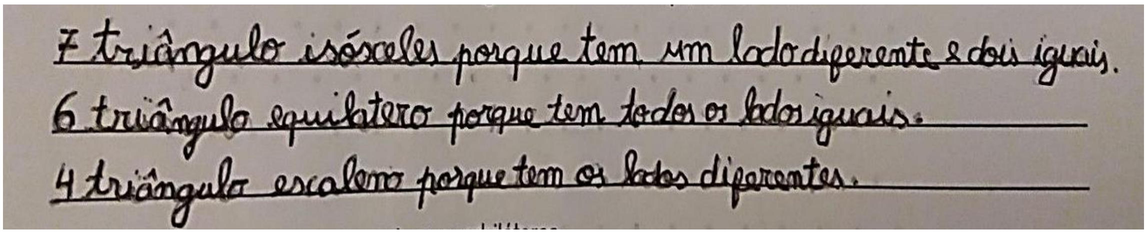


Figura 27. Argumento apresentado pelo aluno A10 na *questão a)*.

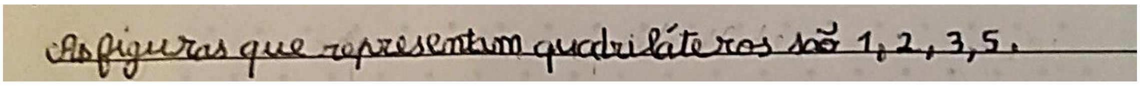


Figura 28. Conjetura apresentada pelo aluno A7 na *questão b)*.

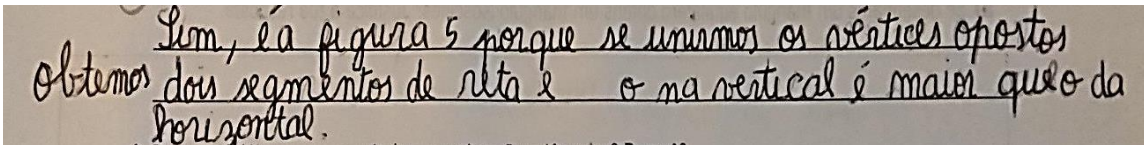


Figura 29. Argumento apresentado pelo aluno A19 na *questão d)*.

O argumento apresentado pelo aluno A10 (Figura 27) na *questão a)* é bastante convincente, porque além de identificar e classificar os triângulos, ainda os caracteriza. Este aluno demonstra domínio sobre o conteúdo abordado. A conjetura exposta pelo aluno A7 (Figura 28) responde ao que é solicitado na *questão b)*, mas não tem base de sustentação.

O argumento apresentado pelo aluno A19 (Figura 29) na *questão d)* foi fundamentado na sugestão dada por mim, enquanto professora, na Tarefa 2 para diferenciar o losango do quadrado.

Durante a discussão dos resultados das *questões c)* e *f)* os alunos foram unânimes nas suas respostas, enquanto na *questão e)* revelaram alguma discordância como se pode verificar no diálogo seguinte.

Professora: Dos triângulos representados algum é um caso particular do triângulo isósceles? [*c)*]
A19: Sim, o triângulo 6, porque é equilátero.
Professora: Concordam com o A19?
A4: Sim.
Professora: Porquê?
A4: Porque o triângulo 6 tem os lados geometricamente iguais.

Professora: E só por ter os lados geometricamente iguais que é isósceles?
A20: Sim professora.
Professora: Porquê?
A20: Porque nós aprendemos que o triângulo 6 que é um triângulo equilátero, por ter os lados geometricamente iguais, é um triângulo especial do triângulo isósceles.
(...)
Professora: Dos quadriláteros representados, quantos são retângulos? [*e)*]
A7: A figura 2 e a figura 3.
Professora: Concordam com o A7?
Alunos: Sim!
Professora: Porquê?
A7: Porque têm 4 segmentos de reta.
A3: Porque a figura 3 é um quadrado e a figura 2 é um retângulo.
A22: Porque cada um dos vértices faz um quarto de volta.
A16: Porque num retângulo dois lados consecutivos formam sempre um quarto de volta e um retângulo com 4 lados geometricamente iguais se chama quadrado.
(...)
Professora: Dos retângulos representados, quais são quadrados? [*f)*]
A14: A figura 3.
Professora: Concordam?
Alunos: Sim!
Professora: Porquê?
A14: Porque tem os lados todos iguais.
Professora: Concordam com o A14?
Alunos: Sim!
A19: Eu acho que é porque os lados são geometricamente iguais.
Professora: Porque achas que os lados são geometricamente iguais.
A19: Porque a professora disse que para um retângulo ser quadrado tem de ter 4 lados geometricamente iguais.

Apesar dos argumentos apresentados pelos alunos A19, A4 e A20 na *questão c)* serem válidos, o argumento do aluno A20 é mais convincente do que o dos outros dois alunos, porque ele sustenta-o com conceções matemáticas que aprendeu na Tarefa 1.

Os alunos conseguiram responder corretamente à *questão e)*, todavia, dos argumentos que apresentaram para validar a sua conjetura, apenas o argumento apresentado pelo aluno A16 se evidenciou, porque apresentou noções teóricas do manual escolar, como forma de provar o que enunciou, enquanto os alunos A7, A3 e A22 apresentaram somente uma tentativa de justificação sem fundamento.

Os alunos, na sua generalidade, ainda que incorretamente, concordaram com o argumento apresentado pelo aluno A14 numa fase inicial. Contudo, quando o aluno A19 apresentou o seu argumento e alegou que a sua base de sustentação foram as conceções que eu tinha enunciado na Tarefa 2, os alunos ficaram convencidos e modificaram a sua resposta.

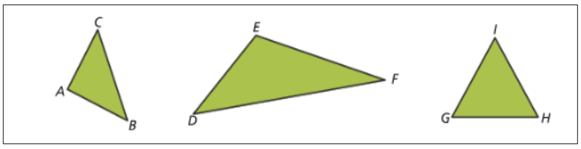
4.2. Intervenção pedagógica no 2º Ciclo do Ensino Básico

4. 2.1. Soma dos ângulos internos de um triângulo

No estudo do tópico 'Soma dos ângulos internos de um triângulo' procurei que fossem os alunos a deduzir que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual à amplitude de um ângulo raso, através da exploração da seguinte tarefa:

Tarefa 1

- Ao explorarem os triângulos representados na figura, o José e a Maria identificaram uma regularidade quando somaram as amplitudes dos ângulos internos de cada triângulo. Que regularidade será essa?



- Ao informarem os seus colegas da regularidade que obtiveram, a Joana não ficou convencida. Para ter mais certezas, desafiou os seus colegas de turma a desenharem alguns triângulos e a verificarem se tal regularidade se confirmava. Podes ajudar a Joana?
- Depois de os colegas da Joana apresentarem à turma o resultado que obtiveram, o professor alertou de que em Matemática a verificação de casos particulares nem sempre é suficiente para provar a veracidade de um resultado matemático. Como ter a certeza de que o resultado obtido é válido para qualquer triângulo?

Com esta tarefa, a minha principal intenção era fazer com que os alunos compreendessem que independentemente do triângulo, a soma dos seus ângulos internos é sempre igual à amplitude de um ângulo raso (180°). Assim sendo, iniciei a aula com a distribuição da tarefa pelos alunos. De seguida pedi a um dos alunos que fizesse a leitura do primeiro ponto da mesma, em voz alta, de modo a conversar com a turma, posteriormente, sobre o que era pedido. Neste ponto da tarefa os alunos apresentaram muitas dificuldades na utilização do transferidor, o que implicou muito tempo na mesma, uma vez que não sabiam medir com este material de forma adequada, nem havia transferidores suficientes para o número de alunos existentes na turma. Apesar disso, os alunos A10 e A20 conseguiram encontrar a regularidade de 180° como era pretendido (Figura 30).

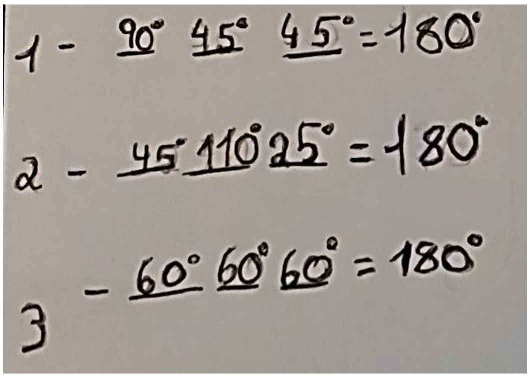


Figura 30. Regularidade encontrada pelo aluno A20.

O segundo ponto da tarefa foi resolvido, de forma correta, apenas por cinco alunos da turma, isto porque as dificuldades explanadas no ponto anterior se mantiveram.

No terceiro ponto da tarefa, assim que interroguei os alunos sobre como poderia ter a certeza de que o resultado obtido, nomeadamente, 180°, era válido para qualquer triângulo, apercebi-me que os alunos não estavam direcionados para o que era pretendido, por esse motivo dei-lhes a sugestão de desenharem um triângulo, pintarem cada uma das amplitudes dos ângulos internos, as recortarem e unirem para ver o que acontecia.

Professora: Depois de desenharem o triângulo, pintarem cada uma das amplitudes dos ângulos internos, as recortarem e unirem, o que concluíram?
A22: Dá um ângulo de 180°. [Figura 31]
Professora: E que nome se dá a um ângulo que meça 180°?
A9: Ângulo raso.
Professora: Muito bem! Então posso dizer que qualquer triângulo que eu faça, a soma dos ângulos internos vai ser sempre 180°?
A1: Sim.
Professora: Porquê?
A17: Porque todos os triângulos que nós fizemos tinham 180°.
Professora: E acham que isso serve de prova?
A12: Eu acho que serve de prova porque todos nós fizemos triângulos diferentes e a soma dos ângulos internos de cada um deles deu 180°. Mas se nós fizéssemos todos triângulos iguais não era bem uma prova porque eram todos iguais, só que como nós fizemos todos diferentes e a soma deu igual para nós todos, então quer dizer que a soma é 180° em qualquer triângulo.

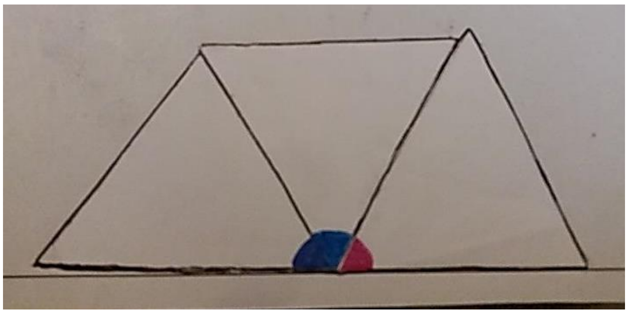


Figura 31. Prova visual apresentada pelo aluno A12.

Através do diálogo supracitado é possível constatar que o argumento apresentado pelo aluno A12 é válido e bastante convincente, uma vez que utiliza as diferentes provas visuais realizadas pelos colegas para sustentar a sua opinião.

Posteriormente, com o intuito dos alunos provarem matematicamente a veracidade do resultado obtido, recordei as relações entre os ângulos formados por duas retas paralelas e uma secante (Figuras 32), como ilustra o diálogo seguinte.

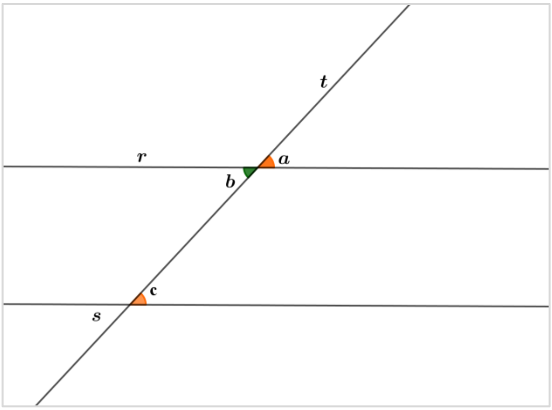


Figura 32. Ângulos alternos internos.

Professora:	Através da figura o que me sabem dizer sobre a reta *r* e *s*? [A Figura 32 foi projetada no quadro.]
A22:	São paralelas.
Professora:	E porque são paralelas?
A22:	Porque têm a mesma direção e não se tocam.
Professora:	E sobre a reta *t*?
A10:	É secante.
Professora:	Porquê?
A10:	Porque corta as duas retas.
Professora:	E há alguma relação entre os ângulos?
A9:	O ângulo *a* é igual ao ângulo *c*.
Professora:	Porquê A9?
A9:	Porque são ângulos correspondentes.
Professora:	E o que são ângulos correspondentes, sabem explicar-me?
A22:	Nós já aprendemos, mas não me lembro.
(...)	
Professora:	E há mais alguma relação entre os ângulos?
A10:	Os ângulos *a* e *b* são verticalmente opostos.
Professora:	E os ângulos *b* e *c*?
A9:	São ângulos internos.
Professora:	Internos?
A9:	Sim, eles estão no interior das duas retas paralelas.
Professora:	Mas eles estão em lados diferentes da reta secante, não estão?
A9:	Sim.
Professora:	E vocês lembram-se de como se chamavam esses ângulos?
Alunos:	Não.
Professora:	Chamam-se ângulos alternos internos.

(...)

Professora: E se eu desenhar aqui um triângulo? [Figura 33]

(...)

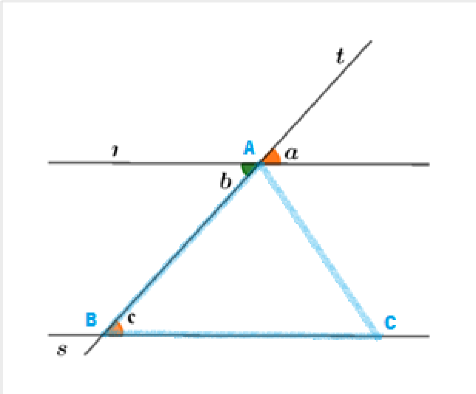


Figura 33. Triângulo [ABC].

Professora: Podemos concluir alguma coisa sobre os seus ângulos?

A19: O ângulo *c* é igual ao ângulo *b*.

Professora: E se eu chamar a este ângulo *d* e a este *e*? Posso concluir alguma coisa? [Figura 34]

A9: Se for como a outra reta t, o ângulo *d* e *e* são iguais.

Professora: Muito bem!

(...)

Professora: E se eu pintar este ângulo, o que posso concluir? [Ângulo amarelo da Figura 35]

A9: A amplitude dele é 180° menos o ângulo *b* e o ângulo *e*.

Professora: Então como o ângulo *c* é igual ao ângulo *b* e o ângulo *d* é igual ao ângulo *e*, significa que a soma dos ângulos internos de um triângulo ...

A9: É sempre igual a 180°.

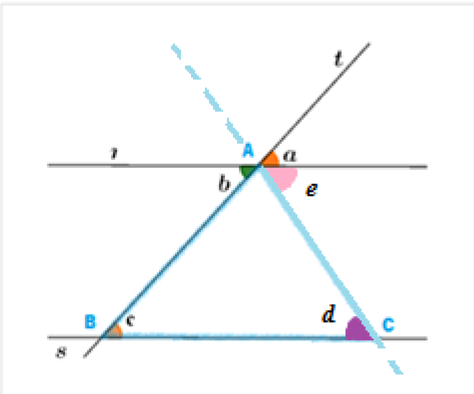


Figura 34. Triângulo [ABC].

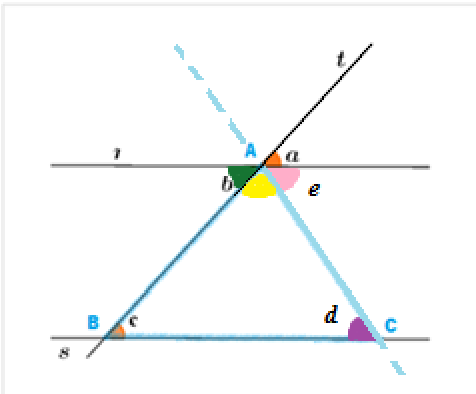


Figura 35. Triângulo [ABC].

Como se pode constatar através do diálogo, ainda que com a minha ajuda, o aluno A9 conseguiu provar matematicamente a veracidade do resultado obtido.

Após a concretização da Tarefa 1, seguiu-se a exploração das Tarefas 2 e 3 com o propósito de os alunos exercitarem o que tinham aprendido, mas em nenhuma das duas tarefas os alunos manifestaram dúvidas ou dificuldades durante a sua resolução.

Tarefa 2: O Francisco desenhou o triângulo $[LMN]$. Sabendo que dois dos ângulos internos desse triângulo têm de medida de amplitude, respetivamente, $35°$ e $43°$, o Francisco afirmou que a amplitude do ângulo NML do triângulo $[LMN]$ é determinada pela seguinte operação: $$N\widehat{M}L = 180° - 43° + 35°.$$ Concordas com a afirmação do Francisco? Porquê?

Apesar da Tarefa 2 não ter sido propícia à prática argumentativa devido à imediata e eficaz resolução dos alunos, os alunos A10 e A22 conseguiram apresentar os argumentos mais convincentes (Figuras 36 e 37, respetivamente) da turma.

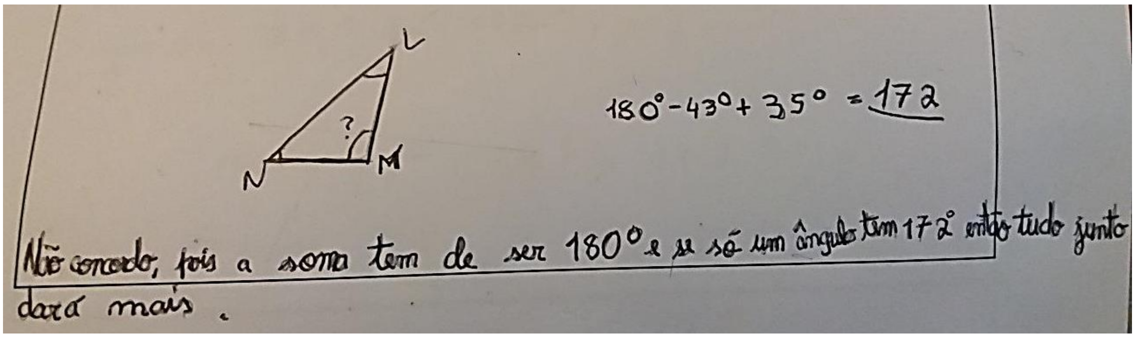


Figura 36. Argumento apresentado pelo aluno A10.

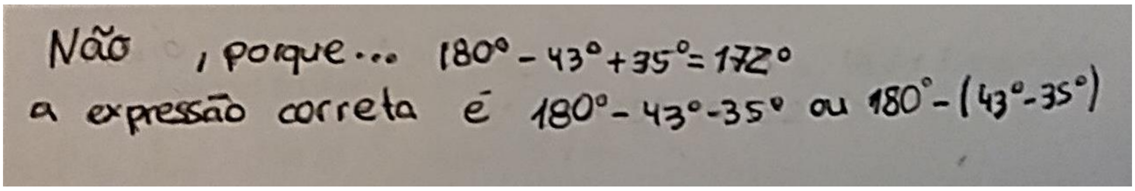
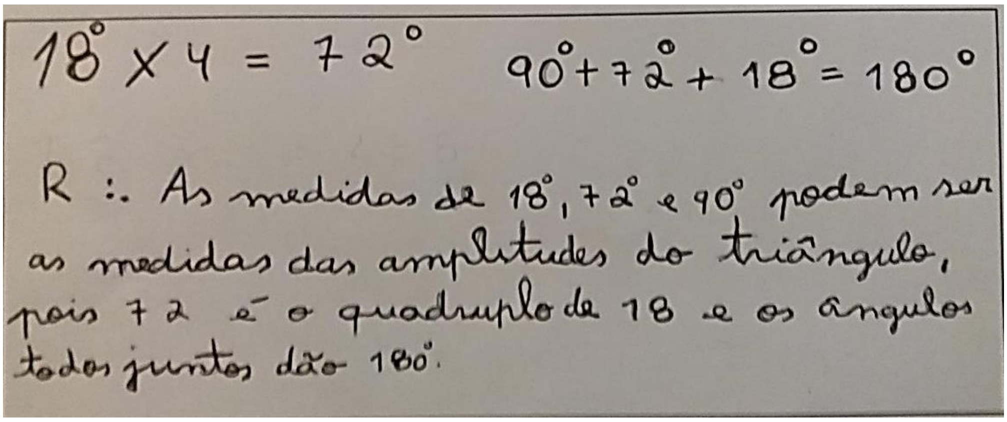


Figura 37. Argumento apresentado pelo aluno A22.

O argumento apresentado pelo aluno A10 (Figura 36) revela compreensão do tópico estudado, enquanto o argumento apresentado pelo aluno A22 (Figura 37) mostra um claro domínio do mesmo, dado que indica duas expressões possíveis, e ambas corretas, para determinar a amplitude do ângulo NML.

Tarefa 3: Num triângulo retângulo, a medida da amplitude de um dos ângulos agudos é o quádruplo da medida da amplitude do outro. Prova que as medidas das amplitudes dos ângulos internos desse triângulo são $18°$, $72°$ e $90°$ respetivamente.

Na Tarefa 3, o argumento apresentado pelo aluno A20 (Figura 38) foi o mais conseguido da turma, pois além de realizar cálculos aritméticos para o sustentar, também explica por palavras suas o significado dos cálculos efetuados.



$18^\circ \times 4 = 72^\circ$ $90^\circ + 72^\circ + 18^\circ = 180^\circ$

R :. As medidas de 18°, 72° e 90° podem ser as medidas das amplitudes do triângulo, pois 72 é o quadruplo de 18 e os ângulos todos juntos dão 180°.

Figura 38. Argumento apresentado pelo aluno A20.

4.2.2. Desigualdade triangular

Na aprendizagem do tópico 'Desigualdade triangular', os alunos tinham que saber que num triângulo a medida do comprimento de qualquer lado é menor do que a soma das medidas dos comprimentos dos outros dois e maior do que a respetiva diferença, requisitos necessários para resolverem a Tarefa 1.

Tarefa 1

- O João ao participar nas Olimpíadas da Matemática deparou-se com a seguinte tarefa: Constrói, com a ajuda de palhinhas, triângulos com os seguintes comprimentos de lado:

Triângulo A: $6\ \text{cm}, 7\ \text{cm}, 10\ \text{cm}$;

Triângulo B: $4\ \text{cm}, 5\ \text{cm}, 11\ \text{cm}$;

Triângulo C: $5\ \text{cm}, 6\ \text{cm}, 11\ \text{cm}$.

E completa a tabela:

Triângulos	**Construí**		**Esboço da Construção**
	Sim	**Não**	
A $(6\ \text{cm}, 7\ \text{cm}, 10\ \text{cm})$			
B $(4\ \text{cm}, 5\ \text{cm}, 11\ \text{cm})$			
C $(5\ \text{cm}, 6\ \text{cm}, 11\ \text{cm})$			

O João respondeu que não precisava de construir os triângulos para ver que todas as construções eram possíveis. Concordas com o João?

- Uma outra tarefa das Olimpíadas da Matemática consistia em descobrir o motivo pelo qual alguns triângulos podem ser construídos e outros não, ao que o João não conseguiu responder. Qual seria a tua resposta?

Com a resolução desta tarefa pretendia que os alunos compreendessem que nem sempre é possível construir um triângulo com três segmentos de reta, a não ser que considerassem a desigualdade triangular. Um dos alunos da turma leu o ponto 1 da mesma e outro aluno fez o seu reconto de modo a clarificar o que era pedido. Depois disso, distribuí pelos alunos palhinhas com diferentes comprimentos (branca: 4 cm; rosa: 5 cm; laranja: 6 cm; azul escuro: 7 cm; verde: 10 cm; e azul claro: 11 cm). Decidi utilizar palhinhas nesta tarefa porque as mesmas facilitam a elaboração e validação de conjeturas.

Professora: Na vossa opinião e ao olharem para o ponto 1 da tarefa, acham que sem construir os triângulos se pode afirmar que podem ser todos construídos?
A22: Não.
A1: Não. Primeiro temos de os construir para perceber.

A10: Depende da pessoa, se a pessoa tiver muita noção de espaço e souber se encaixar se é possível ou não, aí, sabe-se, mas acho que nós não temos essa capacidade.
Professora: O poder de abstração, não é? A capacidade de olharmos, pensarmos nas medidas e tentar ver se seria ou não possível. Então temos de medir?
Todos: Sim.

Como é possível verificar pelo diálogo anterior, os alunos descordaram da afirmação apresentada pelo João e consideraram necessário a construção dos triângulos. Ao construírem os triângulos com o auxílio das palhinhas, a maioria dos alunos afirmaram que os triângulos A e C (Figuras 39 e 41, respetivamente) eram possíveis de ser construídos, ao contrário do B (Figura 40). Contudo, um dos alunos afirmou que o triângulo C não podia ser construído (Figura 42).

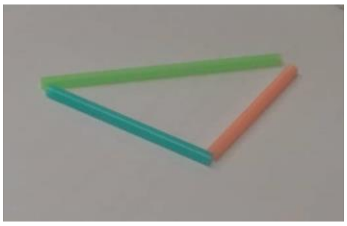


Figura 39. Exemplo de uma construção do triângulo A.

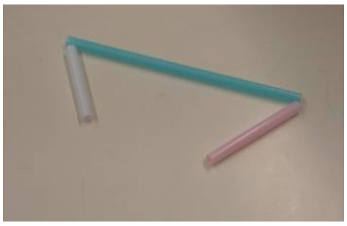


Figura 40. Exemplo de uma tentativa de construção do triângulo B.

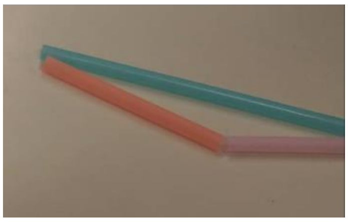


Figura 41. Exemplo de uma construção do triângulo C.

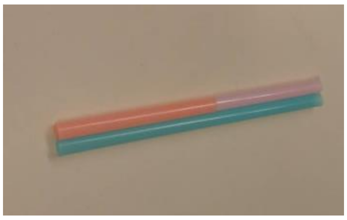


Figura 42. Tentativa de uma construção do triângulo C apresentada pelo aluno A9.

Quando referi a imprecisão do material (palhinhas) e lhes pedi para desenharem, com a ajuda da régua e do compasso, o triângulo C, os alunos mudaram de opinião.

Professora: Já desenharam o triângulo C?
Alunos: Sim!
Professora: Então é possível construí-lo?
Alguns alunos: Sim!
A9: Não!
Professora: Porquê A9?
A9: Como as medidas do triângulo C são 5, 6 e 11 cm e 6+5 é 11, então vão-se cruzar no vértice. [Figura 43]
Professora: O que me estás a querer dizer é que se nós considerarmos a base de 11 cm e os lados de 5 e 6 cm, como a sua soma é 11 então vai coincidir com a base é isso?
A9: Sim professora.

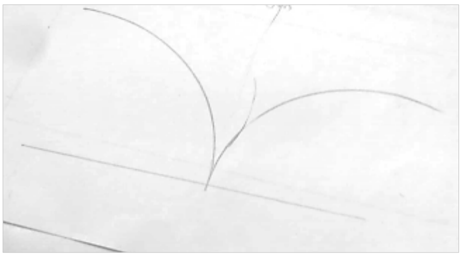


Figura 43. Prova visual apresentada pelo aluno A9.

Face à prova visual apresentada pelo aluno A9 (Figura 43), os alunos ficaram convencidos da impossibilidade da construção do triângulo C.

Posteriormente, no ponto 2 da tarefa, os alunos conseguiram determinar situações em que os triângulos podiam ser construídos e outras em que não, o que permitiu, depois, que o aluno A10 chegasse à desigualdade triangular, apontando que: $b < a + c$.

Professora: Na Tarefa 1 vimos que só o triângulo A podia ser construído. O que poderíamos fazer para que os triângulos B e C também pudessem? [Desenhei no quadro os três triângulos.]

A10: Mudar as medidas dos triângulos. Por exemplo, mudar o lado 6 para 7 ou o 5 para 6 ou o 11 para 10 no triângulo C. [No triângulo C, as medidas 5, 6 e 11 cm correspondiam aos lados a, c e b, respetivamente]

(...)

Professora: Então a base (lado maior) tem de ser inferior ou superior aos outros dois?

A10: Inferior.

Professora: Então o lado b tem de ser inferior a quê?

A10: A $a + c$.

Seguiu-se a resolução das Tarefas 2 e 3, com as quais pretendi que os alunos pusessem em prática aquilo que tinham aprendido na Tarefa 1. Na Tarefa 2 os alunos não manifestaram dificuldades, como ilustram as respostas dos alunos A4 e A20 (Figuras 44 e 45, respetivamente), contrariamente, na Tarefa 3 os alunos tiveram dificuldades em interpretar o enunciado, o que foi resolvido através de uma leitura conjunta do mesmo.

Tarefa 2: Será possível construir um triângulo em que um lado mede $8\ cm$, o segundo mede metade do primeiro e o terceiro mede metade do segundo? Justifica a tua resposta.

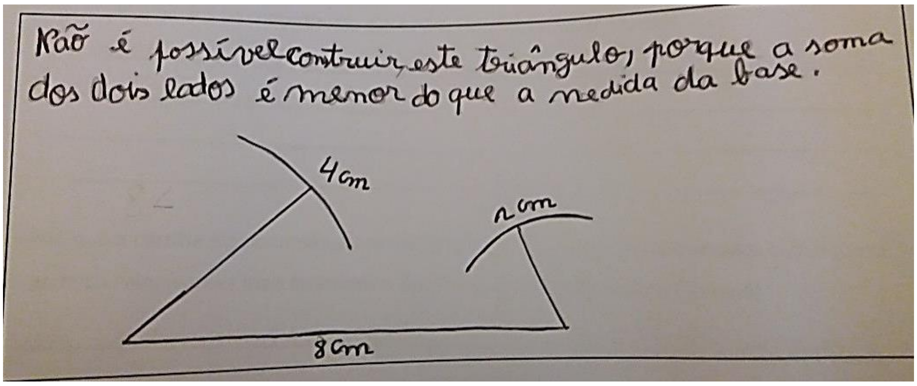


Figura 44. Argumento apresentado pelo aluno A4.

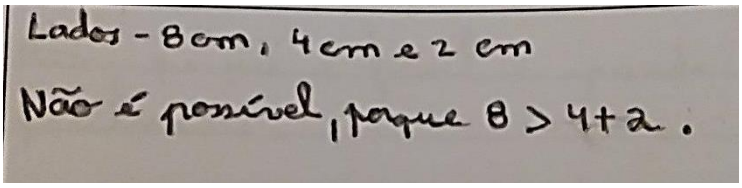
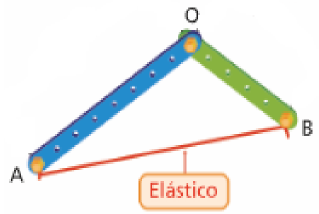


Figura 45. Argumento apresentado pelo aluno A20.

Tanto o argumento apresentado pelo aluno A4 (Figura 44) como o apresentado pelo aluno A20 (Figura 45) podem ser considerados válidos, tendo em vista que a base de sustentação de cada um deles é a noção de desigualdade triangular.

Tarefa 3: O Ricardo pretende construir triângulos usando duas barras de plástico e um elástico como ilustra a figura seguinte:

Sabendo que $\overline{AO} = 8\,cm$ e $\overline{OB} = 5\,cm$, entre que valores o comprimento do elástico pode variar para que seja possível obter um triângulo? Explica como pensaste.



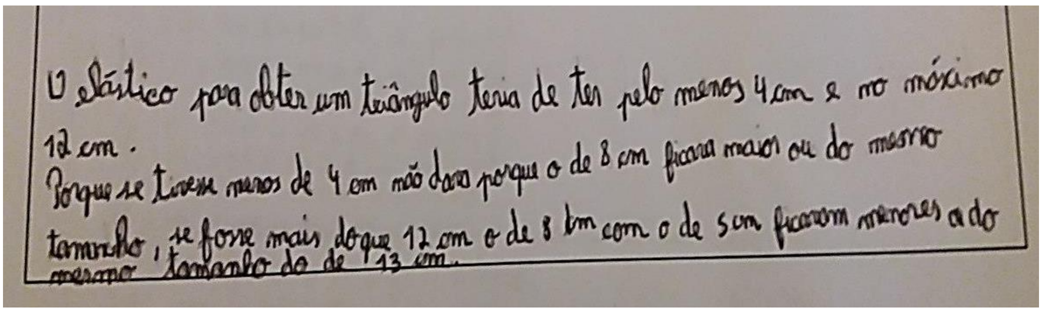
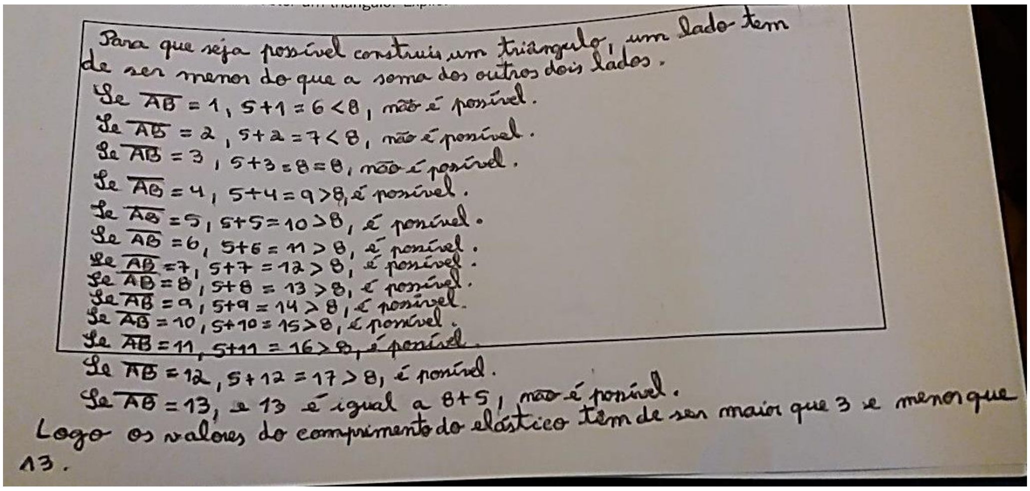


Figura 46. Argumento apresentado pelo aluno A19.



Para que seja possível construir um triângulo, um lado tem de ser menor do que a soma dos outros dois lados.
Se $\overline{AB} = 1$, $5+1 = 6 < 8$, não é possível.
Se $\overline{AB} = 2$, $5+2 = 7 < 8$, não é possível.
Se $\overline{AB} = 3$, $5+3 = 8 = 8$, não é possível.
Se $\overline{AB} = 4$, $5+4 = 9 > 8$, é possível.
Se $\overline{AB} = 5$, $5+5 = 10 > 8$, é possível.
Se $\overline{AB} = 6$, $5+6 = 11 > 8$, é possível.
Se $\overline{AB} = 7$, $5+7 = 12 > 8$, é possível.
Se $\overline{AB} = 8$, $5+8 = 13 > 8$, é possível.
Se $\overline{AB} = 9$, $5+9 = 14 > 8$, é possível.
Se $\overline{AB} = 10$, $5+10 = 15 > 8$, é possível.
Se $\overline{AB} = 11$, $5+11 = 16 > 8$, é possível.
Se $\overline{AB} = 12$, $5+12 = 17 > 8$, é possível.
Se $\overline{AB} = 13$, e 13 é igual a $8+5$, não é possível.
Logo os valores do comprimento do elástico têm de ser maior que 3 e menor que 13.

Figura 47. Argumento apresentado pelo aluno A20.

Apesar dos argumentos apresentados pelos alunos A19 (Figura 46) e A20 (Figura 47) coincidirem e de ambas as resoluções estarem corretas, o raciocínio desenvolvido pelo aluno A20 é muito mais refletido do que o do A19, porque ele equaciona todas as possibilidades, de modo a poder comprovar a sua conjetura.

4.2.3. Relação entre lados e ângulos de um triângulo

O estudo do tópico 'Relação entre lados e ângulos de um triângulo' tinha como propósito os alunos depreenderem que num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos iguais, e reciprocamente, e que ao maior lado opõe-se o maior ângulo e ao menor lado opõe-se o menor ângulo, e vice-versa. Na concretização de tais propósitos, os alunos começaram por explorar a seguinte tarefa:

Tarefa 1: A turma 1 do 5.º ano tenciona construir uma banda decorativa com triângulos. Com esta finalidade, cada par de alunos da turma vai contribuir com a construção de três triângulos, de modo a que um deles seja equilátero, outro isósceles e o outro escaleno. Apresenta na seguinte tabela uma representação de cada um destes triângulos, indicando as medidas dos comprimentos dos lados e as medidas das amplitudes dos ângulos internos, assim como as relações que se podem estabelecer entre si.

Triângulos	Representação do triângulo	Relação entre os lados e os ângulos opostos
Equilátero		
Isósceles		
Escaleno		

Depois da leitura do enunciado da tarefa por um dos alunos da turma e do seu reconto por outro aluno, seguiu-se, com a ajuda da régua, do compasso e do transferidor, a construção dos triângulos, nomeadamente, o equilátero (Figura 48), o isósceles (Figura 49) e o escaleno (Figura 50), indicando as medidas dos comprimentos dos lados e as medidas das amplitudes dos ângulos internos.

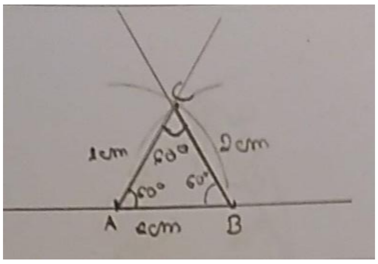


Figura 48. Exemplo de uma construção do triângulo equilátero.

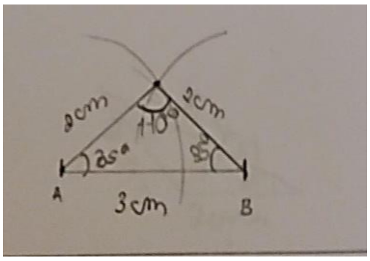


Figura 49. Exemplo de uma construção do triângulo isósceles.

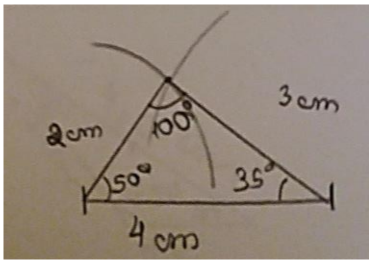


Figura 50. Exemplo de uma construção do triângulo escaleno.

Depois de cada um dos alunos da turma construir os três triângulos solicitados na Tarefa 1, questionei-os sobre o que observavam em cada um deles em relação aos comprimentos dos lados e às amplitudes dos ângulos opostos.

Professora:	Se eu vos pedir para observarem cada um dos triângulos que construíram, o que me podem dizer do triângulo equilátero?
A4:	Tem os lados e os ângulos iguais.
Professora:	Concordam com o A4?
Alunos:	Sim!
(…)	
Professora:	E o que concluíram em relação ao triângulo isósceles?
A20:	Tem dois lados iguais e um diferente e tem dois ângulos iguais e um diferente.
Professora:	Concordam com o A20?
A9:	Sim, mas se nós olharmos para o triângulo também vemos que aos dois lados iguais opõem-se os dois ângulos iguais.
Professora:	Estás a querer dizer-me que os ângulos opostos aos lados iguais têm a mesma amplitude?
A9:	Sim professora.
Professora:	Concordam com o A9?
A20:	Sim.
Professora:	Porquê?
A4:	Eu por acaso só pus como o A20, mas o que A9 disse, agora que estou a olhar melhor é verdade.
(…)	
Professora:	E o que podemos observar em relação ao triângulo escaleno?
A20:	Os lados e os ângulos são todos diferentes.
Professora:	Concordam com o que o A20 disse?
A5:	Como todos os lados são diferentes, todos os ângulos são diferentes.
A9:	E os lados diferentes opõem-se aos ângulos diferentes.
Professora:	Alguém tem outra opinião?
A10:	Eu tenho. Ao lado menor opõe-se o ângulo menor e ao maior opõe-se o ângulo maior.
Professora:	Concordam com o A10?
A9:	Não tinha visto dessa maneira, mas realmente é o que acontece.

Perante o que foi mencionado no diálogo precedente, nota-se que os alunos atingiram o objetivo predefinido para a aula. Por exemplo, a apreciação feita pelo aluno A9 na questão "E o que concluíram em relação ao triângulo isósceles?" revela-se pertinente, pois é através dela que o aluno A4 retifica a sua forma de pensar, apercebendo-se de uma particularidade que até então não se tinha apercebido. E o mesmo acontece na questão " E o que podemos observar em relação ao triângulo escaleno?", porque também o aluno A9 se apercebe, num segundo momento, daquilo que o aluno A10 evidenciou.

Seguiu-se a resolução da Tarefa 2, com a qual pretendi que os alunos pusessem em prática o tópico desenvolvido na aula.

Tarefa 2: Considera o triângulo $[ABC]$. Sabe-se que $\overline{AB} = 13,9\ cm$, $\overline{BC} = 10,2\ cm$ e $\overline{AC} = 13,6\ cm$. Indica, justificando, o maior ângulo do triângulo.

Os alunos não sentiram dificuldades durante a resolução desta tarefa, respondendo ao que era pretendido, tal como mostra a resposta do aluno A19 (Figura 51).

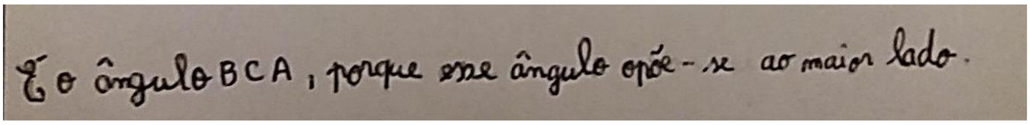

É o ângulo BCA, porque esse ângulo opõe-se ao maior lado.

Figura 51. Argumento apresentado pelo aluno A19.

O argumento apresentado pelo aluno A19 revela compreensão do tópico estudado.

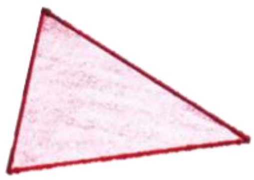
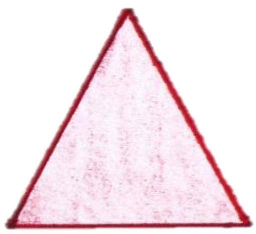
4.2.4. Relação entre lados e ângulos de triângulos geometricamente iguais

Na aprendizagem do tópico ‘Relação entre lados e ângulos de triângulos geometricamente iguais’, procurei que os alunos inferissem que em triângulos geometricamente iguais a lados iguais opõem-se ângulos iguais e vice-versa, a partir da exploração da Tarefa 1.

Tarefa 1: A Rita tem uns amigos que dão apoio à praia que ela frequenta. No fim de semana passado, como estava muito calor a Rita resolveu fazer uma visita aos seus amigos e apercebeu-se que a bandeira vermelha de sinalização de banhos estava descolorada, como mostra a figura.

Ao querer ajudar os seus amigos, a Rita teve a ideia de construir o molde da bandeira de forma a obter outra igual. Sabendo que a bandeira tem o formato de um triângulo isósceles, que indicações dariam à Rita para construir o molde? Para poderes ajudá-la, precisas de concretizar as seguintes questões:

1. Admitindo que a bandeira pode ser representada pelos triângulos isósceles contemplados na primeira coluna da tabela, representa na segunda coluna da tabela o molde de cada uma das bandeiras consideradas:

Representação da bandeira	Representação do molde
	
	

2. Qual a relação que encontras entre as medidas dos comprimentos dos lados e as medidas das amplitudes dos ângulos opostos a esses lados das duas representações (bandeira e molde)?

De modo a cumprir com o objetivo estabelecido, comecei a aula com a distribuição da Tarefa 1, de seguida, pedi a um dos alunos da turma que lesse a *questão 1)* e a outro que a recontasse, de modo a clarificar o que era pedido. Na *questão 1)* pretendia que os alunos medissem e registassem os comprimentos dos lados e as amplitudes dos ângulos de cada uma das bandeiras representadas, de modo a construírem, com a ajuda da régua, do compasso e do transferidor, os moldes dessas bandeiras. Assim sendo, os alunos mediram os comprimentos dos lados e as amplitudes dos ângulos internos de cada um dos triângulos (bandeiras) presentes na Tarefa 1, sistematizaram os dados e depois representaram o molde de cada uma das bandeiras. Ao concretizarem a *questão 1),* os alunos rapidamente se aperceberam que os triângulos que representavam as bandeiras eram os mesmos que representavam os moldes (Figura 52).

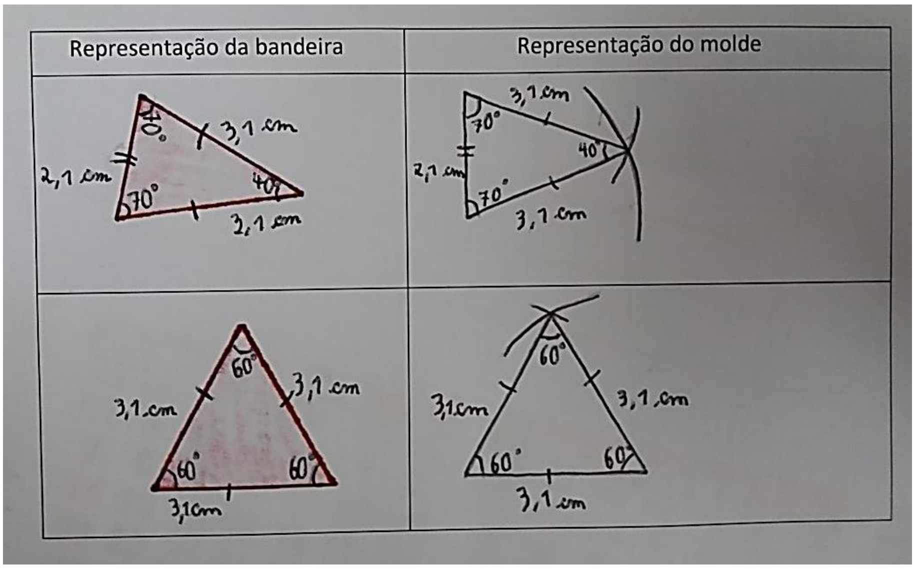


Figura 52. Exemplo das representações das bandeiras e dos moldes.

Os alunos também se aperceberam que o segundo triângulo era equilátero invés de isósceles, apontando-o como um erro. E realmente, a *questão 1)* tinha uma particularidade, apresentava dois triângulos, um isósceles e um equilátero, respetivamente, quando no enunciado da Tarefa 1 referia que a bandeira tinha o formato de um triângulo isósceles. A seleção destes dois triângulos foi propositada, pois queria que os alunos comentassem a afirmação "um triângulo equilátero também é um triângulo isósceles".

Professora: Eu posso dizer "um triângulo equilátero também é um triângulo isósceles", concordam?
A22: Não.
A12: Eu acho que pode.
Alunos: Eu acho que não.
Professora: E se eu disser que pode?
A24: Mas não é professora.
Professora: Não é?
A24: Não.
A10: A professora está a enganar-nos.
Professora: Então o que distingue um triângulo equilátero de um triângulo isósceles?

A22:	Um triângulo equilátero tem os lados todos iguais e um triângulo isósceles tem dois lados iguais e um diferente.
A10:	Se calhar um triângulo equilátero pode ser um triângulo isósceles.
Professora:	Será?
A4:	Eu acho que é, porque se um triângulo equilátero tem três lados iguais e o triângulo isósceles tem dois lados iguais pode ser.
A10:	Eu acho que sim, porque se calhar o triângulo isósceles tem de ter pelo menos dois lados iguais e como o triângulo equilátero tem três pode ser. Por isso a afirmação da professora pode estar certa.
Professora:	Mas eu tenho aqui meninos que estão a dizer-me que não.
A22:	Por acaso agora mudei de opinião.
Professora:	Mudaste de opinião?
A22:	Sim.
Professora:	Porque mudaste de opinião?
A22:	Porque a observação do A10 foi inteligente.
Professora:	E é só por isso?
A22:	Sim.
A12:	Oh professora é porque o triângulo isósceles tem pelo menos dois.
A22:	Se tem de ter pelo menos dois iguais e o triângulo equilátero tem três, desses três, dois são iguais como no triângulo isósceles.
Professora:	Então o que eu disse no início é verdade ou mentira?
Todos:	Verdade.
A22:	Oh professora, diga lá...
Professora:	É verdade!

Através deste diálogo é percetível que os alunos compreenderam que um triângulo equilátero também pode ser considerado um triângulo isósceles. Ainda que inicialmente os alunos tenham discordado, a observação feita pelo aluno A10 permitiu aos alunos perceber que se um triângulo precisa de ter pelo menos dois lados iguais para ser considerado um triângulo isósceles, então um triângulo equilátero, como tem três lados iguais, também o pode ser. Este diálogo foi bastante importante, a nível argumentativo, pois o argumento apresentado pelo aluno A10 desmistificou a dúvida existente, convencendo o aluno A22 da minha afirmação inicial.

Posteriormente, na *questão 2)* pretendia que os alunos analisassem a representação de cada uma das bandeiras e a representação do seu respetivo molde e descobrissem a relação entre as medidas dos comprimentos dos lados e as medidas das amplitudes dos ângulos opostos a esses lados das duas representações (bandeira e molde). Assim sendo, solicitei a sua leitura a um aluno e o reconto a outro, no entanto, apercebi-me que houve alguma distração por parte dos alunos durante a sua explicação, o que fez com que eu a tivesse de repetir várias vezes.

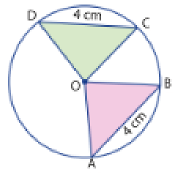
Professora:	Que relação é que vocês encontraram entre as medidas dos comprimentos dos lados e as medidas das amplitudes dos ângulos opostos a esses lados nas representações das bandeiras e dos moldes?
(…)	
Professora:	Tenta-me explicar A12.
A12:	De um triângulo para o outro como os lados são iguais, os ângulos são iguais.
A14:	De um triângulo para o outro, a lados iguais opõem-se ângulos iguais.
Professora:	Alguém tem outra opinião?
A10:	Os lados que têm as mesmas medidas têm os ângulos opostos iguais e ao lado menor a amplitude menor [Primeiro triângulo]. Todos os lados são iguais e todos os ângulos também [Segundo triângulo].

Através do diálogo é possível perceber que os argumentos utilizados pelos alunos A10 e A14 coincidem com o objetivo pretendido para a aula. Ambos compreenderam que em triângulos geometricamente iguais, a lados iguais opõem-se ângulos iguais e vice-versa.

Após a concretização da Tarefa 1, seguiu-se a exploração da Tarefa 2 com o propósito de os alunos consolidarem o que tinham aprendido.

Tarefa 2: Na figura seguinte está representada uma circunferência de centro O e dois triângulos $[AOB]$ e $[COD]$:

Mostra que os triângulos $[AOB]$ e $[COD]$ são iguais.



Os alunos, na sua maioria, demonstraram algumas dificuldades em reconhecer os segmentos de reta OA ; OB ; OC e OD como sendo todos iguais por serem raios da circunferência e em estabelecer uma relação entre os dois triângulos. Por esse motivo decidi rever com os alunos as noções de raio e diâmetro para ver se conseguiam chegar ao que era pretendido, o que foi conseguido pelos alunos A7, A10 e A12 (Figuras 53, 54 e 55, respetivamente).

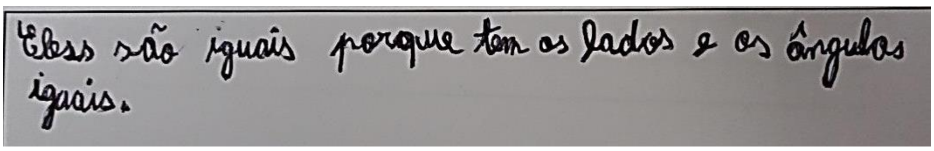
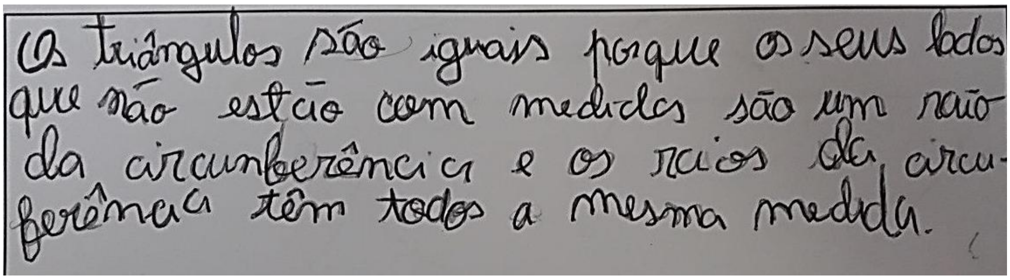


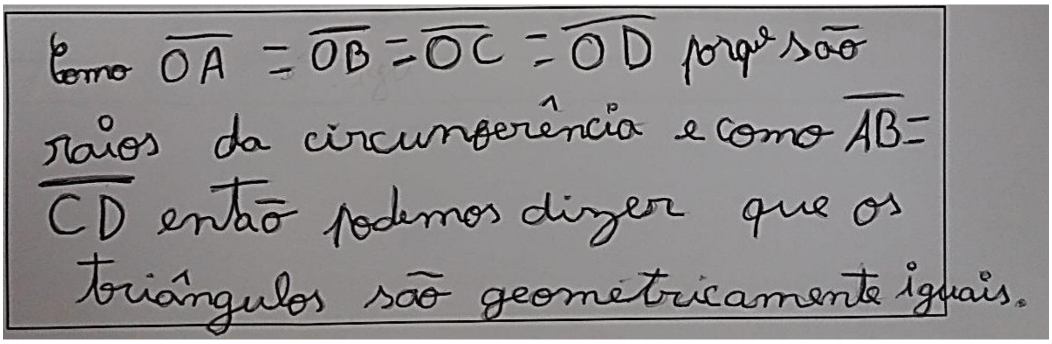
Figura 53. Argumento apresentado pelo aluno A7.

O argumento apresentado pelo aluno A7 (Figura 53), ainda que reflita uma tentativa de justificação, não passa de uma conjetura. Este argumento não tem uma base de sustentação que permita inferir a sua veracidade. Em contrapartida, os argumentos apresentados pelos alunos A10 e A12 (Figuras 54 e 55, respetivamente) estão devidamente fundamentados.



Os triângulos são iguais porque os seus lados que não estão com medidas são um raio da circunferência e os raios da circunferência têm todos a mesma medida.

Figura 54. Argumento apresentado pelo aluno A10.



Como $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$ porque são raios da circunferência e como $\overline{AB} = \overline{CD}$ então podemos dizer que os triângulos são geometricamente iguais.

Figura 55. Argumento apresentado pelo aluno A12.

Apesar dos argumentos apresentados pelos alunos A10 (Figura 54) e A12 (Figura 55) serem válidos, o aluno A12 apresenta um raciocínio mais elaborado, fazendo a correlação entre as medidas de comprimento dos raios da circunferência e a dos lados do triângulo, o que o leva a chegar à conclusão que os triângulos são geometricamente iguais.

4.3. Discussão dos resultados do 1º e do 2º Ciclo

Na procura de informação que me ajudasse a compreender o significado que os alunos atribuíram às atividades que desenvolveram, decidi, com base nas suas produções escritas, reunir e analisar cada um dos argumentos utilizados nas tarefas propostas em três categorias: (1) conjetura; (2) justifica; e (3) prova. Essa análise compreende o 1.º e o 2.º Ciclo do Ensino Básico, respetivamente.

Apesar de esta análise ser sustentada pelas produções escritas dos alunos, considero que os momentos de discussão partilhados pelos alunos foram "oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento" (Ponte, 2005, p. 16), visto que envolveram dois processos essenciais, o confronto e a defesa, que permitem não só aprofundar a atividade desenvolvida, envolvendo os alunos e o professor num raciocínio matemático, como também formular novos problemas e conjeturas e valorizar o processo de justificação/prova (Ponte, 2005).

Sendo o objetivo primordial em ambos os ciclos averiguar o contributo da argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria, não pude restringir a argumentação ao uso de um só argumento, dado que a mesma requer a capacidade de avaliar um argumento e de o opor a outros argumentos, sendo isso correspondente à dinâmica de qualquer situação de investigação ou debate (Duval, 1999).

No 1.º Ciclo, os alunos, maioritariamente, conseguiram elaborar conjeturas e proceder à sua respetiva justificação, no entanto, tal como mencionei no enquadramento teórico, o valor da argumentação em Matemática, não está somente relacionado com a ideia de explicação e justificação de uma proposição para convencer o outro, mas que o mesmo também está relacionado com a discussão e avaliação das diferentes opiniões expressas pelos alunos, aquando realização de uma dada tarefa. Por esse mesmo motivo, neste ciclo ficou demonstrada uma menor capacidade de prova dos argumentos, embora os alunos tenham conseguido formular os seus argumentos e justificá-los, raramente existiu uma atividade argumentativa suficientemente expressiva mesmo com a minha ajuda, o que coincide com a perspetiva de Boavida (2005b) que considera as atividades argumentativas, em contexto sala de aula, nos diversos níveis de ensino, por vezes, pouco expressivas. A seguinte tabela ilustra a capacidade de conjeturar (C), justificar (J) e provar (P) dos alunos do 1.º Ciclo nas diferentes tarefas realizadas em cada um dos tópicos estudados.

Tabela 2. Frequência absoluta de argumentos utilizados pelos alunos do 1.º Ciclo nas tarefas propostas.

	Tarefa 1			**Tarefa 2**			**Tarefa 3**			**Tarefa 4**		
	C	**J**	**P**	**C**	**J**	**P**	**C**	**J**	**P**	**C**	**J**	**P**
Linhas poligonais e linhas não poligonais. Polígonos	22	22	0	22	21	0	22	21	0	22	18	0
Classificação de polígonos	22	22	0	22	22	6						
Classificação de triângulos e quadriláteros	22	22	0	22	22	0	22	22	1	22	22	0
Classificação de polígonos através do Tangram	22	22	0	22	3	0						

No 2.º Ciclo, tal como no 1.º, os alunos, na sua maioria, conseguiram conjeturar. Todavia, estes mostraram uma menor abertura para a realização das tarefas propostas, de forma escrita, havendo por isso um menor número de justificações das mesmas, como ilustra a Tabela 3.

Tabela 3. Frequência absoluta de argumentos utilizados pelos alunos do 2.º Ciclo nas tarefas propostas.

	Tarefa 1			**Tarefa 2**			**Tarefa 3**		
	C	**J**	**P**	**C**	**J**	**P**	**C**	**J**	**P**
Soma dos ângulos internos de um triângulo	22	5	24	21	19	3	17	3	2
Desigualdade triangular	24	2	1	12	10	3	15	3	2
Relação entre lados e ângulos de triângulos geometricamente iguais	22	14	0	19	11	1			
Relação entre lados e ângulos de um triângulo	23	23	0	18	9	1			

Contudo, em quase todas as tarefas realizadas foi conseguida a prova (P) de pelo menos um argumento, havendo, de um modo geral, uma maior predisposição para a discussão de conjeturas (C) e respetivas justificações (J). Essa discussão é fundamental porque é através da explicação e defesa dos seus modos de pensar através da argumentação, da análise crítica das contribuições dos colegas que os alunos chegam a uma conclusão matemática (Boavida, 2008). Foi através da partilha e discussão de argumentos, que em várias ocasiões os alunos conseguiram convencer os colegas da veracidade das suas respostas pelo que os seus argumentos podem ser considerados bons, uma vez que não se limitaram a repetir as conclusões, mas sim, a fornecer razões e dados suficientes para que os colegas tivessem oportunidade de formar a sua própria opinião (Weston 1996). Os alunos, neste nível de ensino, conseguiram evoluir de simples justificações para argumentações mais complexas, ainda que com ajuda da minha parte.

4.4. Avaliação do ensino ministrado pelos alunos do 1º Ciclo

4.4.1. Perceções dos alunos sobre a intervenção pedagógica

No final da minha intervenção pedagógica, com o intuito de conhecer as perceções dos alunos sobre o ensino ministrado pedi-lhes que respondessem a um questionário (Anexo 10). Esse questionário apresentava cinco questões de resposta aberta, sendo as duas primeiras questões relativas aos tópicos de Geometria que os alunos mais e menos gostaram de aprender, respetivamente; a terceira e a quarta questão referentes às dificuldades sentidas tanto ao nível dos tópicos de Geometria que foram lecionados, tanto ao nível da prática argumentativa em que os alunos participaram; e a quinta e última questão alusiva às conceções dos alunos sobre o contributo da argumentação na sua aprendizagem.

Tópicos de Geometria que os alunos mais e menos gostaram de aprender. No que concerne aos tópicos de Geometria que os alunos mais gostaram de aprender, o tópico 'Linhas poligonais e linhas não poligonais. Polígonos' foi o mais apontado (9 alunos), seguido do tópico 'Classificação de triângulos e quadriláteros' (2 alunos) e do tópico 'Classificação de polígonos' (1 aluno). Os alunos apresentaram o tópico 'Linhas poligonais e linhas não poligonais. Polígonos' como sendo o seu preferido porque, no estudo do mesmo, utilizaram o material didático Geoplano que nunca tinham experimentado. Em relação aos tópicos 'Classificação de triângulos e quadriláteros' e 'Classificação de polígonos', os alunos A2, A7 e A11, apenas, apontaram como justificação da sua escolha a denominação engraçada de cada um dos polígonos. É de referir ainda, que 9 alunos da turma não indicaram nenhum dos tópicos como sendo da sua preferência, pois gostaram de aprender todos. Relativamente aos tópicos de Geometria que os alunos menos gostaram de aprender, não houve nenhum que tenha sido apontado.

Dificuldades sentidas pelos alunos durante as aulas dos tópicos de Geometria. Os alunos, na sua maioria, revelaram que o motivo principal das suas dificuldades se deveu à falta de atenção prestada durante a abordagem de cada um dos tópicos.

Dificuldades sentidas pelos alunos ao argumentar matematicamente. Nesta questão, 14 alunos afirmaram ter sentido dificuldades em argumentar e 8 alunos não. Dos 14 alunos que revelaram ter sentido dificuldades em argumentar na aula de Matemática, os alunos A10 e A12 referiram a incapacidade de defender a sua ideia, a sua opinião perante as conceções apresentadas pelos colegas no decorrer das tarefas, por terem poucas bases de sustentação; os alunos A15 e A16 mencionaram a dificuldade em explicar corretamente o seu raciocínio aos colegas; e o aluno A17 indicou o medo de falhar perante os colegas, caso dissesse alguma coisa errada. Dos 8 alunos que afirmaram não ter sentido dificuldades em argumentar, os alunos A6, A19, A20 e A22 revelaram ter facilidade em explicar e defender aquilo que pensam porque não têm receio de falar perante os outros.

Conceções dos alunos sobre a importância da partilha e da discussão das resoluções das tarefas com os colegas para a sua aprendizagem. Os alunos, na sua maioria, consideraram importante partilhar e discutir as resoluções das suas tarefas com os colegas, porque essa prática facilita a aprendizagem dos tópicos de forma recíproca. Por outro lado, os alunos A3 e A9 não consideraram essa prática pertinente para a sua aprendizagem. O aluno A3 referiu não gostar de partilhar o que pensa com os colegas, porque acha que eles copiam tudo o que diz (Figura 56) e o aluno A9, em contrapartida, referiu que os colegas não lhe dão ouvidos (Figura 57).

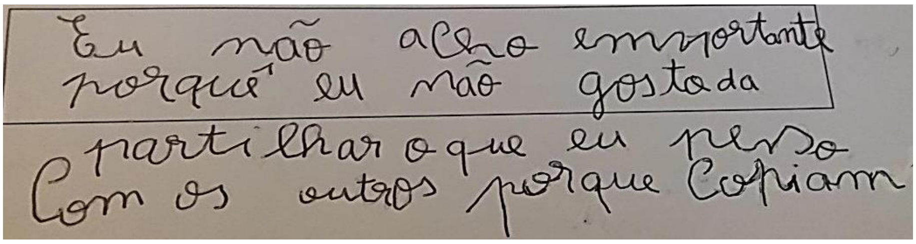


Figura 56. Resposta apresentada pelo aluno A3.

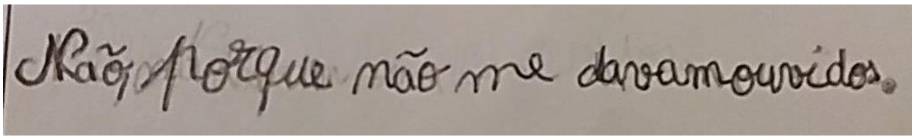


Figura 57. Resposta apresentada pelo aluno A9.

4.5. Avaliação do ensino ministrado pelos alunos do 2º Ciclo

4.5.1. Perceções dos alunos sobre a intervenção pedagógica

No final da minha intervenção pedagógica, do mesmo modo que fiz no 1.º Ciclo do Ensino Básico, com o intuito de conhecer as perceções dos alunos sobre o ensino ministrado pedi-lhes que respondessem a um questionário (Anexo 11). Esse questionário apresentava-se estruturado em duas partes. A primeira parte era composta por 30 questões de resposta fechada, onde os alunos tinham de selecionar uma opção segundo o seu grau de concordância (escala Likert) para cada uma das afirmações apresentadas; e a segunda parte era formada por três questões de resposta aberta, onde era pedido aos alunos que indicassem três vantagens e três desvantagens da argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria, respetivamente e referissem a maior dificuldade que sentiram ao argumentar matematicamente. De forma a analisar cada uma das respostas dadas pelos alunos na primeira parte do questionário, apresento a informação que lhe corresponde em quatro categorias: (1) Perceções dos alunos face à minha prestação; (2) Perceções dos alunos relativamente às tarefas propostas; (3) Perceções dos alunos relativamente às dificuldades sentidas; e (4) Perceções dos alunos sobre a argumentação.

Perceções dos alunos face à minha prestação. A fim de compreender se os alunos consideraram o ensino ministrado explícito e fomentador, questionei-os sobre aspetos da minha prática (Tabela 4).

Tabela 4. Frequência absoluta sobre o grau de concordância das perceções dos alunos face à minha prestação.

Afirmações	**DT**	**D**	**I**	**C**	**CT**
A professora expôs com clareza os tópicos de Geometria.	1	0	2	7	14
A professora estimulou o interesse dos alunos pelos tópicos de Geometria.	0	1	4	9	10
A professora mostrou domínio dos tópicos de Geometria que lecionou.	0	0	4	7	13
A professora esteve disponível para esclarecer dúvidas.	0	0	2	4	18
A professora incentivou os alunos a participar nas tarefas das aulas.	0	1	1	5	17

Os alunos, na sua maioria, consideraram que os tópicos de Geometria desenvolvidos foram explicados com clareza e que a minha prática lhes despertou vontade, não só em aprender os tópicos de Geometria que lhes propus, mas também em participar nas tarefas inerentes a esses tópicos. Em contrapartida, houve 3 alunos que discordaram e 13 que se mantiveram indiferentes.

Perceções dos alunos relativamente às tarefas propostas. Por considerar que as tarefas que se propõe aos alunos são impulsionadoras da sua aprendizagem, delineei um conjunto de questões sobre as mesmas, de modo a compreender se os alunos as consideraram desafiantes, se lhes despertou vontade em participar ativa e autonomamente e se a realização, em pares, de algumas tarefas e a partilha e a discussão das suas resoluções com a turma foram uma mais-valia para a sua aprendizagem (Tabela 5).

Tabela 5. Frequência absoluta sobre o grau de concordância das perceções dos alunos relativamente às tarefas propostas.

Afirmações	**DT**	**D**	**I**	**C**	**CT**
As tarefas propostas na aprendizagem de tópicos de Geometria desafiaram-me a pensar.	0	1	5	8	10
Participei ativamente na resolução das tarefas propostas nas aulas.	0	2	5	13	4
Apenas participei na resolução das tarefas quando fui solicitado pela professora.	7	6	6	3	2
Realizar as tarefas em pares só fez com que sentisse mais dificuldades.	11	6	2	3	2
Realizar as tarefas em pares permitiu-me compreender melhor o que era pedido.	1	2	4	5	12
Realizar as tarefas em pares deu-me segurança para partilhar as minhas respostas com a turma.	1	1	9	5	8
Partilhar e debater as resoluções das tarefas com a turma ajudou-me a compreender melhor os tópicos de Geometria.	0	0	4	8	12
Debater as resoluções das tarefas com a turma permitiu-me aprender com os meus colegas e os meus colegas comigo.	0	3	7	5	9
Debater as resoluções das tarefas com a turma permitiu-me clarificar as dúvidas e/ou os erros.	0	3	4	8	9
Debater as resoluções das tarefas com a turma é uma perda de tempo.	18	2	2	1	1

Os alunos, em geral, consideraram que as tarefas foram desafiadoras e que a sua participação nelas foi ativa. Também consideraram que a realização das tarefas, em pares, foram vantajosas, porque além de os ajudar a interpretar corretamente o que era solicitado em cada uma delas, também lhes ofereceu uma maior segurança no momento de partilhar as suas respostas com a turma, todavia, ainda houve alunos que se mantiveram indiferentes a essas afirmações.

Em relação à partilha e à discussão das tarefas com a turma, os alunos, na generalidade, consideraram essa prática como sendo um benefício para o processo de ensino e aprendizagem, já que os ajudou a compreender melhor os tópicos de Geometria estudados, bem como a aprender mutuamente uns com os outros, clarificando duvidas e/ou erros que tinham. Apesar disso 15 alunos mantiveram-se indiferentes às afirmações e 6 discordaram. Na última afirmação, os alunos, maioritariamente, consideraram que a discussão das resoluções com a turma não é uma perda de tempo, embora 2 alunos se tenham mantido indiferentes e 2 alunos terem considerado que o era.

Perceções dos alunos relativamente às dificuldades sentidas. Com o propósito de conhecer as dificuldades sentidas pelos alunos quer ao nível das tarefas propostas, quer ao nível argumentativo elaborei as questões presentes na Tabela 6.

Tabela 6. Frequência absoluta sobre o grau de concordância das perceções dos alunos relativamente às dificuldades sentidas.

Afirmações	**DT**	**D**	**I**	**C**	**CT**
Tive dificuldade em compreender as tarefas propostas.	3	4	8	5	4
Quando tive dificuldades na resolução das tarefas pedi ajuda à professora.	0	0	5	8	11
Quando tive dificuldades na resolução das tarefas pedi ajuda aos meus colegas.	2	1	11	7	3
Quando tive dificuldades na resolução das tarefas não pedi ajuda a ninguém.	10	3	8	2	1
Tive dificuldades em argumentar matematicamente porque todos os argumentos que apresentei à turma não foram suficientemente fortes comparado com o dos outros colegas.	4	6	7	2	5
Tive dificuldades em argumentar matematicamente porque os meus colegas estavam sempre a interromper-me.	6	2	11	3	2
Tive dificuldades em argumentar matematicamente porque não tenho por hábito fazê-lo nas aulas.	9	4	5	5	1
Tive dificuldades em argumentar matematicamente porque tinha medo de errar.	7	1	9	4	3
Não aprecio expor as minhas dúvidas à turma por ter receio de ser 'gozado' pelos meus colegas.	7	3	8	4	2

Os alunos apresentaram diferentes graus de concordância em relação às dificuldades sentidas na compreensão das tarefas propostas, tendo 9 alunos admitido terem tido dificuldades, 7 alunos não e 8 se terem mantido indiferentes à afirmação. Quando questionados a quem recorriam, ou não, quando sentiam dificuldades nas tarefas, os alunos, de modo genérico, afirmaram ter pedido ajuda essencialmente à professora, ainda que tenham apontado a ajuda dos colegas como uma alternativa para a superação dessas dificuldades. Nesta questão os alunos continuaram a apresentar um número considerado de indiferença.

Nas questões referentes às dificuldades sentidas a nível argumentativo, os alunos, na maioria, revelaram não terem sentido qualquer dificuldade em argumentar. Contudo, dos alunos que revelaram dificuldades em fazê-lo, a maior concordância foi atribuída ao medo de errar e ao facto dos argumentos apresentados não terem sido suficientemente convincentes comparados aos dos colegas. Os alunos continuaram a apresentar um número considerado de indiferença.

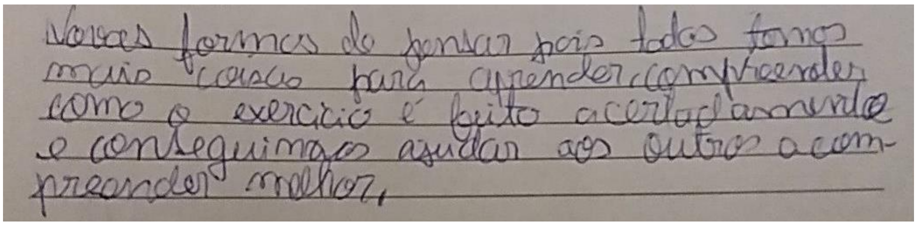
Perceções dos alunos sobre a argumentação. Como o tema central do meu estudo era a argumentação matemática, importou-me conhecer as perceções dos alunos sobre a mesma (Tabela 7).

Tabela 7. Frequência absoluta sobre o grau de concordância das perceções dos alunos sobre a argumentação.

Afirmações	DT	D	I	C	CT
Argumentar é apresentar e/ou defender os meus processos e resultados.	0	1	13	6	4
Argumentar é convencer os outros da veracidade dos meus processos e resultados.	2	5	8	5	4
Argumentar uma ideia é o mesmo de que a discutir.	6	3	9	4	2
A argumentação só pode ser feita oralmente.	6	5	11	1	1
A argumentação pode ser feita oralmente ou por escrito.	0	3	4	10	7
A argumentação permite-me confrontar com diferentes formas de pensar.	1	0	8	5	10

Os alunos, na maioria, mantiveram-se indiferentes às duas afirmações sobre o significado da palavra 'argumentar'. Todavia, dos alunos que manifestaram opinião, a concordância atribuída a cada uma das afirmações é idêntica, embora a segunda afirmação tenha sido mais discordada pelos alunos do que a primeira. Os alunos, genericamente, consideraram que a argumentação pode ser realizada de modo oral e escrito e que a mesma permite que se confrontem com diversas formas de pensar.

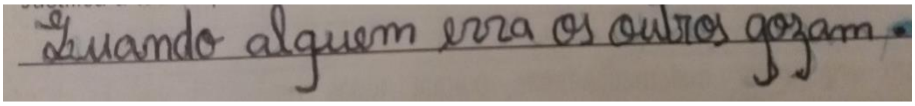
De forma a ter uma maior perceção das opiniões dos alunos, introduzi na segunda parte do questionário três questões de resposta aberta, nomeadamente sobre as vantagens e as desvantagens da argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria, respetivamente, e as dificuldades que os alunos sentiram ao argumentar matematicamente as suas ideias. No que se refere às vantagens, os alunos, na globalidade, apontam que a argumentação matemática lhes possibilitou uma melhor compreensão dos tópicos de Geometria estudados porque a partilha e a discussão das suas ideias, os ajudou a pensar melhor e a confrontar os seus pensamentos com outras formas de pensar, ajudando-os a detetar e retificar erros, assim como a ajudar os colegas. A título de exemplo é apresentado na Figura 58 uma resposta de um aluno relativamente às vantagens da argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria.



Novas formas de pensar pois todos fomos
mais capazes para aprender/compreender
como o exercício é feito acertadamente
e conseguimos ajudar aos outros a com-
preender melhor,

Figura 58. Resposta de um aluno relativamente às vantagens da argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria.

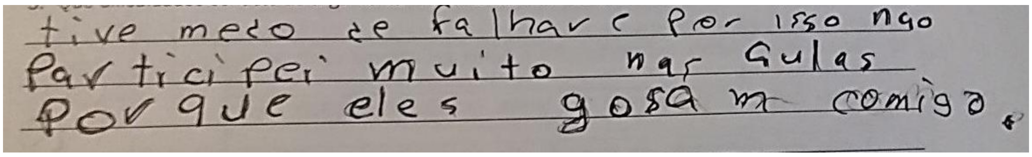
Relativamente às desvantagens, os alunos, de modo geral, consideraram não existir nenhuma, no entanto, dos que apontaram algumas, estas foram sobretudo relativas aos comportamentos inadequados que os colegas tendem a ter quando as suas respostas estão corretas e as dos outros não. A título de exemplo é apresentado na Figura 59 uma resposta de um aluno relativamente às desvantagens da argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria.



Quando alguem erra os outros gozam.

Figura 59. Resposta de um aluno relativamente às desvantagens da argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria.

Quanto à última questão de resposta aberta do questionário, onde era pedido aos alunos que referissem a maior dificuldade que sentiram ao argumentar matematicamente, os alunos, maioritariamente, referiram o medo de falhar perante os colegas e de serem gozados pelos mesmos, o que ilustra a resposta apresentada por um aluno (Figura 60).



tive medo de falhar e por isso não
participei muito nas aulas
porque eles gosam comigo.

Figura 60. Resposta de um aluno relativamente às dificuldades sentidas ao argumentar matematicamente.

Outras dificuldades apontadas pelos alunos foram a não apreciação da argumentação oral, por não se sentirem à vontade para expressar as suas conceções e a ausência das palavras certas para explicar as suas ideias.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões que emergiram da intervenção pedagógica atendendo ao objetivo e às questões de investigação delineadas e uma reflexão final sobre as aprendizagens construídas durante essa intervenção. Por fim, são referidas algumas limitações e recomendações a ter em conta em investigações futuras desta índole.

5.1. Conclusões do Estudo

Nesta secção são retomadas as questões de investigação, em torno da aprendizagem de tópicos de Geometria através da argumentação matemática, para a formulação das conclusões do estudo.

(1) Que tipos de argumentos os alunos recorrem nas atividades de aprendizagem de tópicos de Geometria?

(2) Que dificuldades manifestam os alunos quando têm de argumentar matematicamente as suas atividades?

(3) Que perceções têm os alunos sobre a argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria?

As respostas a estas questões emergem da informação apresentada no capítulo anterior, sendo sustentadas, sempre que possível, com o enquadramento teórico apresentado neste estudo.

5.1.1. Que tipos de argumentos os alunos recorrem nas atividades de aprendizagem de tópicos de Geometria?

A classificação de argumentos proposta por Reid e Knipping (2010) permite um entendimento sobre a diversidade de argumentos que podem ocorrer durante a realização de uma dada tarefa. Na minha intervenção pedagógica, quer ao nível do 1.º Ciclo quer ao nível do 2.º Ciclo, constatei que, durante a realização das várias tarefas que propus aos alunos, os tipos de argumentos produzidos foram na sua maioria idênticos. Ao analisar cada uma das tarefas realizadas no 1.º e no 2.º Ciclo, verifiquei que os alunos recorriam, preferencialmente, a argumentos simbólicos (Reid & Knipping, 2010). Em ambos os ciclos, os argumentos usados para justificar conjeturas, eram unicamente ou principalmente palavras, embora no 2.º Ciclo, alguns alunos tenham recorrido a símbolos específicos da matemática.

No 1.º Ciclo, os alunos, na generalidade, conseguiram elaborar conjeturas e proceder à sua respetiva justificação, no entanto ficou demonstrada uma menor capacidade de prova dos argumentos, já que raramente existiu uma atividade argumentativa suficientemente expressiva. Em contrapartida, no 2.º Ciclo, os alunos conseguiram, em quase todas as tarefas realizadas, provar pelo menos um argumento, havendo, de um modo geral, uma maior predisposição para a discussão de conjeturas e respetivas justificações.

Por tudo o que foi mencionado, é possível enfatizar que os alunos tendem a apresentar conjeturas, por vezes a justificá-las, mas nem sempre a provar os resultados matemáticos que obtêm.

5.1.2. Que dificuldades manifestam os alunos quando têm de argumentar matematicamente as suas atividades?

No 1.º Ciclo, os alunos, na sua maioria, revelaram ter sentido dificuldades em argumentar nas tarefas propostas na aula de Matemática. Essas dificuldades deveram-se, essencialmente, à incapacidade de defenderem as suas ideias, por terem poucas bases de sustentação, perante as respostas apresentadas pelos colegas; em explicar corretamente o seu raciocínio aos colegas; ao medo de falhar perante a turma, caso dissessem alguma coisa errada. Por outro lado, houve alunos que afirmaram não terem sentido dificuldades, por terem facilidade em explicar e defender aquilo que pensavam, apesar de, em muito dos casos, os argumentos utilizados não terem tido qualquer significado, o que enfatiza as conclusões retiradas por Krummheuer (1998), ao referir que, os alunos, ao estarem envolvidos de forma ativa na produção de argumentos podem apresentar afirmações que não levam a resultado algum.

No 2.º Ciclo, os alunos, genericamente, não mostraram ter sentido dificuldades a nível argumentativo. O que pode estar associado à tipologia das tarefas, pois, as tarefas ao serem abertas permitiram um maior número de interpretações, tornando-se mais adequadas para a prática argumentativa (Stein & Smith, 2009). Em contrapartida, os alunos que revelaram dificuldades em fazê-lo, indicaram como motivo o medo de errar e o facto dos argumentos apresentados não terem sido suficientemente convincentes comparados aos dos colegas, tal como aconteceu no 1.º Ciclo. O último motivo apontado pode estar também ele relacionado com as tarefas abertas (Ponte, 2005), porque a falta de experiência dos alunos na concretização de tarefas abertas, impossibilitando-os de compreender o que tinham para fazer exatamente (Stein & Smith, 2009), impedindo-os de refutar as afirmações dos colegas e apresentar argumentos mais convincentes. Outra dificuldade apontada pelos alunos foi a falta de hábitos argumentativos durante as aulas, quando na realidade a argumentação matemática já deveria ter sido introduzida desde cedo em contexto sala de aula (Douek & Pichat, 2003). Esta dificuldade é salientada pelos autores Ponte, Matos e Abrantes (1998), ao referirem que os alunos pouco argumentam em contexto sala de aula. Também o facto de os colegas os estarem consequentemente a interromper, a não apreciação em argumentar oralmente e a ausência de palavras certas para explicar as suas respostas aos colegas foram apontados pelos alunos como sendo as suas dificuldades.

5.1.3. Que perceções têm os alunos sobre a argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria?

Durante a minha intervenção pedagógica foram lecionados tópicos de Geometria e propostas tarefas aos alunos que despoletassem a sua argumentação. Com esta abordagem pretendia averiguar qual o contributo da argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria. Da análise dos questionários colocados no final da minha intervenção pedagógica (Anexos 10 e 11), evidencia-se a importância que os alunos atribuem à argumentação matemática na sua aprendizagem.

No 1.º Ciclo, os alunos, de modo geral, consideraram que a prática argumentativa lhes facilitou a aprendizagem dos tópicos de Geometria, dado que a partilha e a discussão das resoluções das suas tarefas com os colegas os ajudou a aprender de forma recíproca. Apesar disso, houve 2 alunos que consideraram essa prática irrelevante, referindo um que os colegas tendem a copiar tudo o que diz e outro, contrariamente, que os colegas nem sequer lhe dão ouvidos. Estes dois alunos evidenciaram não ter compreendido que a partilha dos diferentes raciocínios e a posterior análise dos mesmos lhes permite estruturar o seu conhecimento matemático (Menezes et al., 2014), bem como descobrir em si próprios e nos colegas capacidades que até então desconheciam (César et al., 1999).

No 2.º Ciclo, tal como no 1.º, os alunos, na generalidade, apontaram que a argumentação matemática lhes possibilitou uma melhor compreensão dos tópicos de Geometria estudados porque a partilha e a discussão das suas ideias com a turma, os ajudou a pensar melhor e a confrontar os seus pensamentos com outras formas de pensar, ajudando-os a detetar e retificar erros, assim como a ajudar os colegas, o que é apontado por vários autores (Douek & Pichat, 2003; Godino, Batanero & Font, 2004; Gould, 2007; NCTM, 2007), como sendo alguns dos benefícios da argumentação matemática para os alunos.

Em síntese, posso salientar que os alunos, na sua maioria, percecionam a argumentação matemática como algo positivo, percebendo o valor significativo que a mesma tem no seu processo de aprendizagem, ainda que no 2.º ciclo seja mencionado que os comportamentos inadequados que os colegas tendem a ter quando as suas respostas estão corretas e as dos outros não, seja um aspeto desvantajoso.

5.2. Reflexão final

A fase inicial da formação docente foi fundamental no meu processo de desenvolvimento e aprendizagem, uma vez que me deu a oportunidade de pôr em prática o conteúdo que consolidei nas diferentes unidades curriculares ao longo do meu percurso académico. Essa oportunidade de praticar o conhecimento adquirido no processo educativo e de conviver com outros profissionais mais experientes, que além de deterem maior conhecimento profissional, em determinadas situações, serviu-me como modelo de conduta.

A observação contextual ensinou-me que para que se construa uma aula em que se possa aprender e ao mesmo tempo usufruir dessas aprendizagens é preciso construir um clima relacional entre o professor e o aluno. O professor tem de estar aberto à opinião do aluno, bem como estar sob um ambiente de respeito, escuta mútua, responsabilização e partilha. Devem ser estabelecidas regras a fim de serem cumpridas, para que os alunos e o professor tenham a plena perceção de que 'a minha liberdade termina, quando começa a liberdade do outro'. Contudo, nem todos (grupo/turma) estão preparados para serem 'moldados' da mesma forma, pelo que é necessário que o professor adapte o conteúdo e o planeado consoante o grupo que tem diante de si, para que nenhum elemento se desmotive, e fomente o espírito de entreajuda entre os alunos. Este deve ir de encontro com os interesses e curiosidades dos alunos, com o propósito de que todos tirem partido dos tópicos lecionados.

Daí a pertinência da argumentação, não só em matemática ou em contexto sala de aula, mas em todas as dimensões das ações humanas, isto porque qualquer verdade deve assentar na produção de provas sustentadas em observações da realidade e em conjeturas racionais assentes em premissas razoáveis e consensualmente aceites, com base numa discussão séria, livre e aberta. A argumentação rejeita o uso da força e pressupõe que os interlocutores estão sempre em pé de igualdade, de modo a que possam utilizar a sua razão, livre e autonomamente, em todas as circunstâncias.

De facto, as sessões de observação contextual e a intervenção pedagógica supervisionada foram a maior fonte de aprendizagem de que usufruí, isto porque me ensinaram a observar atentamente cada uma das aulas; a refletir criticamente sobre cada uma das ações praticadas; a cumprir sempre os objetivos predefinidos mesmo que isso implique formular e reformular estratégias; a compreender que as crianças são agentes ativos no processo de ensino e aprendizagem e que cada uma delas possui um ritmo diferente na construção do conhecimento pelo que não o devemos acelerar; e a valorizar a interdisciplinaridade, porque quando presente nas práticas confere aos alunos a compreensão de que os conteúdos não estão divididos pelas diferentes áreas curriculares do saber, mas que o mesmo conteúdo pode ser abordado de diferentes perspetivas.

As principais dificuldades que vivenciei ao longo da minha intervenção pedagógica supervisionada foram a planificação das primeiras tarefas, uma vez que não me adaptei de forma imediata ao modelo de planificação sugerido pelo supervisor, o que com o prolongar das sessões foi resolvido; a organização de ambientes educativos de qualidade, pois na primeira aula ministrada no 2.º Ciclo do Ensino Básico não consegui fazer a melhor gestão da sala, porém consegui assumir a posição certa e as crianças respeitaram-me; a noção temporal e a quantidade de tarefas planeadas, visto que o tempo foi pouco quando comparado com as tarefas que planeei, o que foi ultrapassado com o ajuste do plano global. Atualmente nenhuma das dificuldades supracitadas me preocupam, porque as partilhas de experiências proporcionadas pelas orientadoras, quer pelo seu conhecimento pessoal, quer pela sua prática profissional, me ajudaram a resolver os problemas salientados e essa ajuda serviu-me de aprendizagem para uma futura prática profissional.

Com o projeto de intervenção pedagógica supervisionada "A argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria de alunos do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico" cheguei à conclusão de que promover a argumentação não é tarefa fácil, não pelas suas características, mas sim porque nem todas as crianças estão predispostas a partilhar as suas ideias, os seus argumentos, não por não se sentirem capazes de o fazer, mas, principalmente, porque tem medo de falhar perante o outro. Ainda assim, eu acredito, que se a infância das crianças for produtiva, então podemos contar com elas para participar/intervir no mundo através do seu espírito crítico, o que nos permitirá contar com cidadãos emancipados, autênticos na interação, emocionalmente saudáveis, com atitude, abertos a novos mundos, com sentido de presença e vontade de mudar e aptos a aceitar o outro. Pois, as crianças aprendem, desenvolvem e crescem na interação com as pessoas que cuidam delas, por isso se diz que nós somos o reflexo daquilo que foram para nós. Se quer o meio, quer as pessoas criarem espaços de contínua estimulação, desafio, autonomia e responsabilidade, então certamente o que fizemos com estas crianças será bem sucedido.

5.3. Limitações e recomendações do estudo

Na realização deste estudo, que pretendia averiguar o contributo da argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria, fluíram algumas limitações. Uma delas é relativa à recolha de dados, pois durante as primeiras aulas, de ambos os ciclos, houve alguns momentos em que a recolha das produções escritas dos alunos provocou uma quebra de ritmo da aula, resultando num atraso na concretização das tarefas propostas. Essa limitação foi contornada, posteriormente, porque a professora cooperante do 1.º Ciclo e a minha colega de estágio do 2.º Ciclo me ajudaram nesse processo de recolha. Outra limitação foi a escassez do tempo, porque o tempo destinado para planificar as aulas tinha de ser partilhado com a pesquisa do referencial teórico necessário. Também o facto das sessões de intervenção serem contínuas, devido à gestão curricular das escolas, me limitou, pois não consegui usufruir de interrupções prolongadas para refletir criticamente.

O reduzido número de sessões de implementação associado ao curto espaço de tempo do qual usufruí, em cada uma delas, foi a limitação mais significativa com a qual me deparei, isto porque numa investigação, cuja argumentação matemática é o foco, para que seja possível os alunos argumentarem as suas ideias e refutarem as ideias dos outros, na íntegra, é extremamente importante um período mais alargado de tempo para que as aprendizagens daí resultantes se tornem mais significantes.

Como recomendações para estudos futuros, aconselho que se prolongue o tempo destinado a cada uma das sessões de intervenção, bem como se proponham tarefas aos alunos, dos vários domínios de conteúdos e não somente no de Geometria para que se possa analisar a evolução do desempenho dos mesmos, ao longo de todo o ano letivo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abreu, A. (2009). *A Arte de* Argumentar. 13.ª Ed. Cotia: Ateliê Editorial.
- Alsina, A. (2004). *Desenvolvimento de competências matemáticas com recursos lúdico-manipulativos.* Porto: Porto Editora.
- APM (1998). *Matemática 2001 / Diagnóstico e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Araújo, F. (2006). Geoplano. In P. Palhares & A. Gomes (Coords.), *Mat1C - Desafios para um novo rumo* (pp. 246-251). Braga: Instituto de Estudos da Criança da Universidade do Minho.
- Balacheff, N. (1991). Treatment of refutation: Aspects of the complexity of a constructivist approach of mathematics learning. In E. von Glasersfeld (Eds.). *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 89-110). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Balacheff, N. (1999). Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate. Acedido em 12 de julho, 2019, de http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html
- Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Bauersfeld, H. (1995). "Language Games" in the Mathematics Classroom: Their Function and Their Effects. In H. Bauersfeld & P. Coob (Eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (pp. 271-291). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Boavida, A., Gomes, A., & Machado, S. (2002). Argumentação na aula de matemática: Olhares sobre um projeto de investigação colaborativa, *Educação e Matemática*, 70, pp. 18-26.
- Boavida, A. M. (2005a). A argumentação em Matemática. Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração. (Dissertação para obtenção de grau de Doutor em Educação). Lisboa: Universidade de Lisboa.
- Boavida, A. M. (2005b). A argumentação na aula de Matemática: Olhares sobre o trabalho do professor. In J. Brocardo, F. Mendes, & A. M. Boavida (Eds.), *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 13-43). Setúbal: Instituto Politécnico de Setúbal.
- Boavida, A. M. (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar*. Educação e Matemática,* n.º 100, 1.

- Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico.* Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico. Lisboa: DGIDC.
- Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. Acedido em 18 de julho, 2019, de http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação – uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.
- Boyer, C. (1996). História da Matemática. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher.
- Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). *Geometria e Medida no Ensino Básico. Brochura de apoio ao Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) para o ensino da Geometria e Medida.* Lisboa: ME - DGIDC.
- Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and pratices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 125-153.
- Brocardo, J., Mendes, F., Abreu, A., Paiva, A., Gomes, A., & Patrício, C. (2007). A Geometria no 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico. Setúbal: Escola Superior de Educação - Instituto Politécnico de Setúbal.
- Canavarro, P. A. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, pp. 11-17.
- César, M., Torres, M., Caçador, F., & Candeias, N. (1999). E se eu aprender contigo? A Interacção entre pares e a apreensão de conhecimentos matemáticos. In M. Vara Pires et al. (Eds.), *Caminhos para a Investigação em Educação Matemática em Portugal* (pp. 73-89). Bragança: SPCE/SEM.
- Clements, D., & Sarama, J. (2000). Young Children's Ideas about Geometric Shapes. *Teaching Children Mathematics,* 6(8), pp. 482-487.
- Cobb, P. (1995). Mathematical Learning and Small-Group Interaction: Four Case Studies. In H. Bauersfeld & P. Coob (Eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (pp. 25-128). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Cobb, P., & Bauersfeld, H. (1995). *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

- Crowley, M. (1987). The van Hiele model of development of geometric thought. In M. M. Lindquist, (Ed.), *Learning and teaching geometry* (pp.1–16). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Cunha, C. (2017). A Importância da Matemática no Cotidiano. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, 1, pp. 641-650.
- Decreto-Lei n.º 240/2001 de 30 de agosto. Diário da República n. 201 – I Série A. Ministério da Educação. Lisboa.
- DGE (2018). *Aprendizagens Essenciais - Ensino Básico.* Lisboa: ME – DGIDC.
- Doerr, H. (2006). Examining the Tasks of Teaching When Using Students' Mathematical Thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 62, pp. 3-24.
- Douek, N. (2002), Context complexity and argumentation. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Volume 2 (pp.297–304). Norwich: University of East Anglia.
- Douek, N., & Pichat (2003). From Oral To Written Texts In Grade I And The Approach To Mathematical Argumentation. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Group of the Psychology of Mathematics Education Conference Held Jointly with the 25th PME-NA Conference* (pp. 341-348). Honolulu: CRGD, College of Education of University of Hawai.
- Duval, R. (1990). Pour une aproche cognitive de l'argumentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 3, pp. 195-221.
- Duval, R. (1999). Questioning argumentation. Acedido em 4 de agosto, 2019, de http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeUK.html
- Forman, E., Larreamendy-Joerns, J., Stein, M., & Brown, C. (1998). "You're going to want to find out which and prove it": Collective argumentation in a mathematics classroom, *Learning and Instruction*, 8(6), pp. 527-548.
- Garnica, A., Gomes, M., & Andrade, M. (2012). As Memórias de Lacroix: a instrução pública na França revolucionária, em geral, e o ensino de matemática, em particular. *Bolema*, 44 (26), pp. 1227-1260.
- Gil, P. (2012). A história da matemática no fomento de uma cultura de argumentos em sala de aula. (Tese de Doutoramento). Braga: Universidade do Minho.

- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2004). Perspectiva educativa de las matemáticas. In J. Godino (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas para Maestros* (pp. 15-54). Granada: Proyecto Edumat-Maestros.
- Gomes, A., & Ralha, E. (2005). Sobre o ensino superior da matemática: a geometria e os professores do 1.º ciclo. Novos Desafios, Velhas Deficiências. *Boletim da SPM*, 52, pp. 1-25.
- Gould, P. (2003). Developing Mathematical Reasoning through Argumentation. Acedido em 19 de agosto, 2019, de http://archive.criced.tsukuba.ac.jp/data/doc/pdf/2009/02/Peter_Gould.pdf
- Grize, J. (1990). *Logique et Langage*. Paris: Ophrys Editions.
- Grize, J. (1996). *Logique naturelle et communications*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Hall, A. (2009). *O Bosque das Figuras Planas*. Porto: Ambar.
- Hiele, P. (1999). Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), pp. 310-316.
- Hunter, R. (2007). Can You Convince Me: Learning To Use Mathematical Argumentation. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 81-88). Seoul: PME.
- Inácio, M. (2007). *Manual do Formando "O Processo de Aprendizagem".* Lisboa: DeltaConsultores e Perfil em parceria.
- Komatsu, K. (2009). Pupils' Explaining Process with Manipulative Objects. Acedido em 21 de agosto, 2019, de http://www.lettredelapreuve.org/pdf/PME33/komatsu.pdf
- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NY: Erlbaum.
- Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving process. *ZDM Mathematics Education*, 40, pp. 427-441.
- Krummheuer, G. (1998). Formats of argumentation in mathematics classroom. In H. Steinbring, M. Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 30-62). Reston: NCTM.
- Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior*, 26(1), pp. 60–82.

- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27, pp. 29-63.
- Lappan, G., & Schram, P. (1989). Communication and reasoning: Critical dimensions of sense making in Mathematics. In P. Trafton & A. P. Schulte (Eds.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 13-30). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Libâneo, J. C. (1994). O processo de ensino na escola. São Paulo: Cortez.
- Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria? *A Educação Matemática em Revista*, n.º 4, pp. 3-13.
- Machado, J. (2003). *Dicionário Etimológico da Língua Portuguesa*. Lisboa: Livros Horizonte.
- Magalhães, M. G. (2010). *A argumentação matemática na resolução de tarefas com a utilização da calculadora gráfica: Experiência numa turma do 11.º ano.* (Dissertação de Mestrado). Braga: Universidade do Minho.
- Matemática in Dicionário Infopédia da Língua Portuguesa [em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2019. [consult. 2019-08-23 15:06:21]. Disponível na Internet: https://www.infopedia.pt/dicionarios/lingua-portuguesa/matemática
- Matos, J. M. (1992). Acomodando a teoria de van Hiele a modelos cognitivos idealizados, *Quadrante - APM*, 1, pp. 93-112.
- Matos, J. M. (1999). *Cognitive models for the concept of angle.* Lisboa: APM.
- Matos, J. M., & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Mendes, M., & Delgado, C. (2008). Geometria - Textos de Apoio para Educadores de Infância. Lisboa: MI-DGIDC.
- Menezes, L., Ferreira, T., R., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 135-161). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.
- Ministério da Educação e Ciência (2012). *Metas Curriculares do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Moor, E. (2004). Domain Description Geometry. In M. Heuvel - Panhuizen & K. Buys (Eds.), *Young Children Learn Measurement and Geometry: A learning-teaching trajectory with*

intermediate attainment targets for the lower grades in primary schools (pp. 115-144). Netherlands: Freudenthal Institute, Utrecht University.

- NCTM (2007). *Princípios e Normas Para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.
- NCTM (2008). *Princípios e Normas Para a Matemática Escolar* (2.ª edição) (APM, Trad.). Lisboa: APM.
- O' Connor, M. & Michaels, S. (1996). Shifting participant frameworks: orchestrating thinking pratices in group discussion. In D. Hicks (Ed.), *Discourse, learning and schooling* (pp. 63-103). New York: Cambridge University Press.
- Pedemonte, B. (2002). Etude didactique et cognitive des rapports entre argumentation et démonstration dans l'apprentissage des mathématiques. (Tese de Doutoramento). França: Université Joseph Fourier- Grenoble I.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66, pp. 23–41.
- Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). Investigação em educação matemática: Implicações curriculares. Lisboa: IIE.
- Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática no 1.º Ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.
- Ponte, J. P., Costa, C., Rosendo, A., Maia, E., Figueiredo, N., & Dionísio, A. (2002). *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação dos professores.* Lisboa: SEM-SPCE.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Quivy, R. & Campenhoudt, L. V. (2008). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Gradiva.
- Ramos, T. (2017). A Importância da Matemática na Vida Cotidiana dos Alunos do Ensino Fundamental II. *Cairu em Revista*, 9, pp. 201-218.
- Reid, A., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Rumsey, C., & Langrall, W. C. (2016). Promoting Mathematical Argumentation. *Teaching children mathematics*, 7(22), pp. 1-8.

- Schwarzkopf, R. (2000). Argumentation Processes In Mathematics Classrooms Functional Argumentation Analysis: A Method To Describe Orally Developed Arguments. Acedido em 3 de agosto, 2019, de http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/1999/schwarzkopf_99.pdf
- Silva, J. (2012). Argumentação Matemática de alunos do 5.º ano de escolaridade. (Dissertação de Mestrado). Viana do Castelo: Instituto Politécnico de Viana do Castelo.
- Sineiro, B. (2015). Ensinar a argumentar em matemática no 6.º ano de escolaridade: complexidades e desafios do trabalho de uma professora. (Relatório de Estágio). Setúbal: Instituto Politécnico de Setúbal.
- Smith, M., Hunghes, E., Engle, R., & Stein, M. (2009). Orchestrating Discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 9 (14), pp. 548-556.
- Stein, M., & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão. *Educação e Matemática*, 105, pp. 22-28.
- Veloso, E. (1998). *Geometria: temas actuais, materiais para professores.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Veloso, G., Brunheira, L., & Rodrigues, M. (2013). A proposta de Programa de Matemática para o Ensino Básico: um recuo de décadas, *Educação e Matemática*, 123, pp. 3-8.
- Weston, (1996). *A Arte de Argumentar*. Lisboa: Gradiva.
- Wood, T. (1999). Creating a Context for Argument in Mathematics Classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (2), pp. 171-191.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1994). The development of young children's understanding of mathematical argumentation. In *annual meeting of the American Educational Research Association* (pp. 458-477). New Orleans: AERA.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociamathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (4), pp. 458-477.
- Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227-236). Reston: NCTM.
- Zabalza, M. (1994). *Planificação e Desenvolvimento Curricular na Escola*. Porto: Edições ASA.

ANEXOS

Anexo 1: Questionário inicial relativo ao 1.º Ciclo do Ensino Básico

1. Nome: ____

2. Idade: __________ **3.** Género: Feminino ☐ Masculino ☐

4. Profissão da mãe: ____________________________________

Profissão do pai: ____________________________________

5. O que gostas de fazer nos teus tempos livres?

____

____

____

6. Qual é a disciplina que <u>mais</u> gostas? Porquê?

____

____

____

7. E a que <u>menos</u> gostas? Porquê?

____

____

____

8. Qual é a disciplina que tens <u>mais dificuldades</u>? Porquê?

____

____

____

E a que tens <u>menos</u>? Porquê?

____

____

____

9. Na disciplina de Matemática, qual[ais] foi[ram] o[s] tópico[s] que <u>mais</u> gostaste? Porquê?

____

____

____

10. E o[s] que <u>menos</u> gostaste? Porquê?

____

____

____

11. Nas aulas de Matemática quem costuma resolver as tarefas propostas?

____ A professora.

____ Os alunos.

____ A professora em conjunto com os alunos.

12. Em Matemática costumas partilhar e discutir com os teus colegas as resoluções das tuas tarefas? Porquê?

____

____

____

13. Consideras importante debater com a turma as resoluções das tuas tarefas? Justifica a tua resposta.

____

____

____

14. Preferes apresentar os teus raciocínios de forma oral ou escrita? Porquê?

____

____

____

15. Na tua opinião, o que significa argumentar o que fazes nas aulas de Matemática?

____

____

____

Anexo 2: Questionário inicial referente ao 2.º Ciclo do Ensino Básico

Informação Pessoal

1. Nome ____

2. Idade: ________ **3.** Género: Feminino ☐ Masculino ☐

4. Profissão da mãe: ____________________________________

Profissão do pai: ____________________________________

5. Qual é a disciplina que mais gostas? Porquê?

____

____

6. Qual é a disciplina que menos gostas? Porquê?

____

____

7. Tiveste de repetir algum ano de escolaridade?

Sim ☐ Não ☐

Se respondeste **sim**, indica o ano que tiveste de repetir: ________

8. Na disciplina de Matemática, qual[ais] foi[ram] o[s] tópico[s] que mais gostaste? Porquê?

____

____

9. Na disciplina de Matemática, qual[ais] foi[ram] o[s] tópico[s] que menos gostaste? Porquê?

____

____

Perceções sobre a Geometria

10. O que é para ti a Geometria?

____

____

11. Indica situações do teu dia a dia em que estejam presentes tópicos de Geometria.

____

____

12. Dos tópicos de Geometria que já estudaste, qual[ais] foi[ram] o[s] que mais gostaste[s]? Porquê?

____

____

13. Dos tópicos de Geometria que já estudaste, qual[ais] foi[ram] o[s] que menos gostaste[s]? Porquê?

____

____

14. De entre os métodos para aprender tópicos de Geometria, abaixo indicados, assinala três da tua preferência com **X**.

Exposição dos tópicos pelo professor ☐

Construções geométricas através de materiais manipuláveis (régua, compasso, geoplano, tangram, ...) ☐

Resolução de problemas sobre situações do quotidiano. ☐

Construções geométricas através de programas de geometria dinâmica (por exemplo, GeoGebra). ☐

Resolução de tarefas do manual escolar. ☐

Realização de trabalhos em pares e/ou grupos. ☐

Discussão de diferentes estratégias e respostas. ☐

Outro[s]. ☐

Qual[ais]?

____

Perceções sobre a Argumentação

15. Nas aulas de Matemática quem costuma resolver as tarefas propostas?

☐ O professor.

☐ Os alunos.

☐ O professor em conjunto com os alunos.

16. Em Matemática costumas partilhar e discutir com os teus colegas as resoluções das tuas tarefas? Porquê?

____

____

17. Consideras importante para a tua aprendizagem debater na turma as resoluções das tuas tarefas? Justifica a tua resposta.

____

____

18. Preferes apresentar os teus raciocínios de forma oral ou escrita? Porquê?

____

____

19. Na tua opinião, o que significa argumentar o que fazes nas aulas de Matemática?

____

____

Anexo 3: Plano de Aula da 1.ª sessão de intervenção do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Tópico: Linhas poligonais e linhas não poligonais. Polígonos.

Objetivos: Distinguir linhas poligonais de linhas não poligonais e polígonos de figuras planas não poligonais. Identificar em desenhos as partes interna e externa de linhas planas fechadas e utilizar o termo «fronteira» para designar as linhas.

Conhecimentos prévios: Reconhecer e representar formas geométricas.

Formato de ensino: Ensino exploratório.

Atividade motivacional

Era uma vez um menino chamado Pinóquio que decidiu visitar o Bosque das Figuras Planas. Ele não conhecia muito bem o caminho, mas para sua sorte encontrou a rainha do bosque que o levou até lá. Quando lá chegaram, a rainha explicou-lhe que o bosque era atravessado por um rio que dividia o bosque em duas partes. Numa das partes viviam as figuras VIP, os polígonos, e na outra as restantes, as figuras planas não poligonais.

Os polígonos são todas as figuras planas limitadas por pedaços de linhas direitas, unidas umas às outras pelas pontas, de modo a formar uma linha fechada.

1. Com a ajuda do geoplano constrói as figuras geométricas que conheces. Encontras alguma semelhança entre elas? Qual?
2. Consegues construir no geoplano uma circunferência? Justifica a tua resposta.

Exploração

1. Distribuir a história pelos alunos e pedir que a leiam silenciosamente.
2. Solicitar a um dos alunos que leia a história em voz alta e a outro que a reconte.
3. Dialogar com os alunos sobre o que leram e esclarecer as palavras que desconhecem.
4. Distribuir geoplanos e elásticos coloridos (abertos e fechados) para que os alunos realizem as tarefas propostas no final da história.
5. Debater, em grupo-turma, as respostas apresentadas, de modo a distinguir as noções de linha poligonal de linha não poligonal, assim como polígono de figura plana não poligonal.

Comentários

Presente no Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico: 2.º ano de escolaridade.

Na concretização dos objetivos desta aula atende-se que os alunos têm conhecimento de alguns tópicos estudados no 1.º ano de escolaridade, tais como: segmentos de reta; retângulo, quadrado, triângulo, círculo e circunferência.

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório: (1) Introdução da tarefa; (2) Exploração da tarefa; (3) Discussão. No momento de discussão pretendo desenvolver a capacidade de argumentação dos alunos.

Adaptação de um excerto da História do Bosque das Figuras Planas de Andreia Hall, 2009.

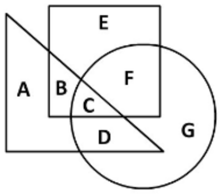
Através desta tarefa pretendo promover a interdisciplinaridade entre a área curricular de matemática e a área curricular de português, uma vez que a interdisciplinaridade presente nas práticas confere aos alunos a compreensão de que os conteúdos não estão divididos pelas diferentes áreas curriculares do saber, mas que o mesmo conteúdo pode ser abordado de diferentes perspetivas.

A leitura em voz alta e o reconto são importantes para o desenvolvimento de competências, pois ajudam os alunos a clarificar aspetos pertinentes do enunciado e a interpretar corretamente o que lhes é pedido.

Através do material didático "Geoplano" pretendo que os alunos, em pares, ao construírem as figuras geométricas que conhecem compreendam que para construir um polígono apenas podem usar linhas poligonais fechadas e que caso uma figura apresente uma linha não poligonal é designada de figura plana não poligonal.

Prática

1. Qual é a letra que está no interior do quadrado e no interior do triângulo, mas que não está no interior da circunferência? Explica como pensaste.



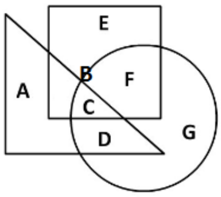
Na primeira tarefa da Prática pretendo que os alunos, em pares, reconheçam as figuras geométricas inerentes e indiquem a letra correta (B), explicando que se a letra está no interior do quadrado e no interior do triângulo, tanto pode ser a letra B como a C, mas como a letra não pode estar no interior da circunferência, apenas pode ser a letra B.

2. O senhor Joaquim e a sua mulher ganharam o segundo prémio do Euromilhões. Com o dinheiro compraram um terreno para construírem uma casa com jardim e piscina. Quais dos espaços do terreno não representam um polígono? Justifica a tua resposta.

Na segunda tarefa da Prática pretendo que os alunos, em pares, identifiquem qual dos espaços não representa um polígono (piscina e jardim), argumentando que estas figuras geométricas não podem ser consideradas polígonos porque são formadas por uma linha não poligonal e para que uma figura geométrica seja considerada um polígono é necessário que esta seja formada por uma linha poligonal fechada e respetiva parte interna.

Desafio

Indica a letra que corresponde ao cruzamento entre a fronteira de um polígono e de uma figura plana não poligonal. Explica o teu raciocínio.



No Desafio pretendo que os alunos, em pequenos grupos, distingam linhas poligonais (triângulo e quadrado) de linhas não poligonais (circunferência) e polígonos (triângulo e quadrado) de figuras planas não poligonais (circunferência); identifiquem as partes internas e externas de linhas planas fechadas; reconheçam que as linhas que separam a parte externa da parte interna dos polígonos se intitulam de fronteira e indiquem a letra correta. Na explicação do raciocínio pretendo que os alunos concluam que a letra B é a única letra cuja fronteira de um polígono (triângulo) cruza com a fronteira de uma figura plana não poligonal (circunferência).

Síntese/discussão

1. Qual a diferença entre uma linha poligonal e uma linha não poligonal?

2. O que é um polígono, a sua parte interna e a sua fronteira?

3. Qual a diferença entre um polígono e uma figura plana não poligonal?

Na síntese da aula pretendo averiguar que tipos de argumentos os alunos utilizam, as dificuldades que manifestam ao argumentarem matematicamente e qual o contributo da argumentação para a elucidação dos tópicos desenvolvidos.

Materiais: Geoplano, elásticos coloridos (abertos e fechados), lápis, borracha, computador, quadro interativo e ficha de trabalho.

Anexo 4: Plano de Aula da 2.ª sessão de intervenção do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Tópico: Classificação de polígonos.

Objetivos: Classificar os polígonos quanto ao número de lados. Identificar e representar triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos.

Conhecimentos prévios: Reconhecer e representar formas geométricas. Distinguir linhas poligonais de linhas não poligonais e polígonos de figuras planas não poligonais.

Formato de ensino: Ensino exploratório.

Atividade motivacional

No país da Poligónia vivem vários polígonos, cada um com a sua forma, mas todos divertidos. Sabendo que os polígonos são formados por uma linha poligonal fechada com um determinado número de segmentos de reta que os delimita, que polígonos se podem desenhar?

Exploração

1. Recordar as noções de linha poligonal, linha não poligonal, polígono e figura plana não poligonal.

2. Solicitar aos alunos a concretização da atividade motivacional.

3. Analisar as diferentes construções de polígonos realizadas pelos alunos.

4. Questionar os alunos sobre os nomes que atribuíram aos polígonos que construíram.

5. Debater, em grupo-turma, as respostas apresentadas, de modo a clarificar os tópicos desenvolvidos.

6. Construir, com a ajuda de palhinhas, um triângulo, um quadrilátero, um pentágono e um hexágono.

7. Questionar os alunos se conseguem construir um triângulo com apenas dois segmentos de reta. E um quadrilátero com três segmentos de reta.

8. Questionar os alunos se para construir um polígono é necessário um número mínimo de lados.

9. Perguntar à turma quantos lados pode ter um polígono.

Desafio

Descobre a resposta às seguintes adivinhas. Não te esqueças de apresentar a forma como pensaste.

Comentários

Presente no Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico: 2.º ano de escolaridade.

Na concretização dos objetivos desta aula atende-se que os alunos têm conhecimento de alguns tópicos estudados no 1.º ano de escolaridade, tais como: segmentos de reta; retângulo, quadrado, triângulo e respetivos lados e vértices e de tópicos estudados na aula anterior.

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório: (1) Introdução da tarefa; (2) Exploração da tarefa; (3) Discussão. No momento de discussão pretendo desenvolver a capacidade de argumentação dos alunos.

Através da distribuição das palhinhas, pretendo que os alunos, em pares, ao construírem cada um dos polígonos mencionados, compreendam, primeiramente, que para construir um polígono são necessários no mínimo três segmentos de reta (3 palhinhas) e que cada uma das classificações dos polígonos está intimamente relacionada com o número de lados desse polígono.

No Desafio pretendo que os alunos, em pequenos grupos, associem cada uma das adivinhas à respetiva classificação de polígonos, concluindo que a primeira corresponde aos triângulos, a segunda aos quadriláteros, a terceira aos pentágonos e a quarta aos hexágonos. E, posteriormente, partilhem com a turma o raciocínio que desenvolveram para cada uma delas.

1.

Têm três bicos, mas não picam,

Vivem num velho telhado.

Mas já os vi num chapéu

De um palhaço engraçado.

Também já os vi em várias velas,

Em barcos de piratas e caravelas.

Venha de lá uma ideia,

Que já chega de brincadeira.

2.

Estou nos mosaicos que tu pisas,

E em todos os jogos de xadrez.

Tenho a forma de uma porta,

Ou dos papagaios de papel que tu vês.

Vou-me deixar de rodeios,

Diz-me lá quem sou de uma vez!

3.

Tenho um nome esquisito,

Podes ter a certeza, porque eu não minto.

Nas bolas de futebol,

Quase sempre me encontras,

E dou-te já uma dica,

Que não é por serem redondas.

Se os vértices de uma estrela unires,

Facilmente me terás,

Tenta agora descobrir-me, pois não quero que fiques para trás.

4.

Esta adivinha é diferente,

Daquelas que vimos até aqui.

Não quero que fiques zangado,

Mas foi feita a pensar em ti.

Se pensares na tua turma, há mais raparigas do que rapazes,

Agora descobre a diferença e adiciona dois.

Através do resultado já descobriste o meu número de lados,

E mais não digo, senão ficas mal habituado.

Materiais: Palhinhas, lápis, borracha, régua, computador, quadro interativo e ficha de trabalho.

Anexo 5: Plano de Aula da 3.ª sessão de intervenção do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Tópico: Classificação de triângulos e quadriláteros.

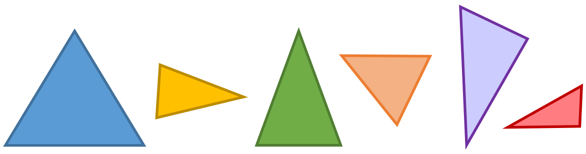
Objetivo: Classificar triângulos e quadriláteros quanto aos lados.

Conhecimentos prévios: Reconhecer e representar formas geométricas. Classificar os polígonos quanto ao número de lados. Identificar e representar triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos.

Formato de ensino: Ensino exploratório.

Tarefa 1: Classificação de triângulos.

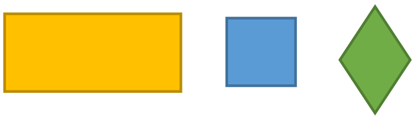
Observa os seguintes triângulos.



1. Mede os lados dos triângulos e verifica se há alguma semelhança entre eles.
2. Como podes agrupá-los conforme as suas características. Justifica a tua resposta.
3. Como classificas os triângulos quanto aos seus lados?

Tarefa 2: Classificação de quadriláteros.

Observa os seguintes quadriláteros.



1. Mede os lados dos quadriláteros e verifica se há alguma semelhança ou diferença entre eles. Justifica a tua resposta.

Exploração

1. Distribuir as tarefas pelos alunos.

2. Solicitar aos alunos que resolvam as tarefas.

3. Exibir dois vídeos, um sobre a classificação de triângulos e outro sobre a classificação de quadriláteros.

4. Dialogar com os alunos sobre o que visualizaram.

5. Distribuir grelhas ponteadas e marcadores coloridos para que os alunos realizem as tarefas propostas no final da visualização dos vídeos.

6. Debater, em grupo-turma, as respostas apresentadas, de modo a clarificar os tópicos desenvolvidos.

Comentários

Presente no Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico: 2.º ano de escolaridade.

Na concretização do objetivo desta aula atende-se que os alunos têm conhecimento de alguns tópicos estudados no 1.º ano de escolaridade, tais como: segmentos de reta; comparação de comprimentos e igualdade geométrica de segmentos de reta; retângulo, quadrado, triângulo e respetivos lados e vértices e de tópicos estudados na aula anterior.

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório: (1) Introdução da tarefa; (2) Exploração da tarefa; (3) Discussão. No momento de discussão pretendo desenvolver a capacidade de argumentação dos alunos.

Com as tarefas 1 e 2 pretendo que os alunos, aos pares, compreendam que os triângulos podem ser classificados em isósceles, equiláteros e escalenos e que os quadriláteros podem ser classificados em retângulos e losangos. Na classificação dos triângulos, pretendo que identifiquem e representem triângulos isósceles, equiláteros e escalenos, reconhecendo os segundos como casos particulares dos primeiros. E na classificação dos quadriláteros, pretendo que identifiquem e representem quadriláteros, reconhecendo os losangos e os retângulos como casos particulares de quadriláteros e identifiquem e reconheçam losangos, reconhecendo o quadrado como caso particular do losango.

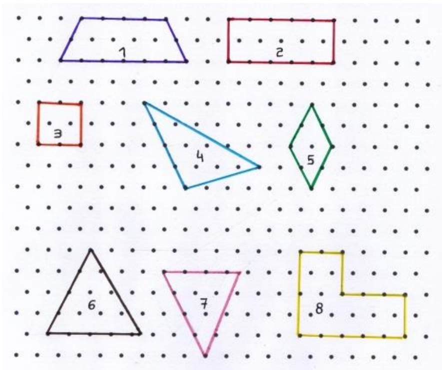
Prática

Em pequeno grupo, um dos elementos desenha um triângulo ou um quadrilátero na grelha ponteada e descreve-o aos restantes elementos, tendo estes que desenhar, cada um, na sua grelha ponteada, o polígono que corresponde à descrição feita. De seguida, cada um dos elementos compara o seu desenho com o que o elemento do grupo iniciou a tarefa. O processo repete-se até que todos os elementos do grupo tenham iniciado a tarefa. Posteriormente, cada um dos grupos, em conjunto, selecionará um polígono para apresentar à turma, tendo a turma que repetir o processo.

Na tarefa da Prática pretendo que os alunos, em pequenos grupos e em grupo-turma, consolidem os tópicos desenvolvidos.

Desafio

Na grelha ponteada estão representadas figuras numeradas de 1 a 8.



No Desafio pretendo que os alunos, em pequenos grupos, identifiquem quais das figuras representadas na grelha ponteada representam triângulos e quais as que representam quadriláteros; e identifiquem e distingam cada um dos triângulos (isósceles, equilátero e escaleno) e quadriláteros (retângulo, losango e quadrado).

a) Identifica as figuras que representam triângulos e classifica-as quanto aos lados.

b) Identifica as figuras que representam quadriláteros.

c) Dos triângulos representados algum é um caso particular do triângulo isósceles?

d) Alguma das figuras representa um losango? Porquê?

e) Dos quadriláteros representados, quantos são retângulos?

f) Dos retângulos representados, quais são quadrados? Porquê?

Síntese/discussão

1. Como podem ser classificados os triângulos? E os quadriláteros?

2. O triângulo equilátero é um caso particular de um triângulo isósceles. Porquê?

3. O quadrado é um caso particular dos losangos. Porquê?

Na síntese da aula pretendo averiguar que tipos de argumentos os alunos utilizam, as dificuldades que manifestam ao argumentarem matematicamente e qual o contributo da argumentação para a elucidação dos tópicos desenvolvidos.

Materiais: Suporte digital (2 vídeos), computador, quadro interativo, grelha ponteada, marcadores coloridos, lápis, borracha, régua e ficha de trabalho.

Anexo 6: Plano de Aula da 1.ª sessão de intervenção do 2.º Ciclo do Ensino Básico

Tópico: Soma dos ângulos internos de um triângulo.

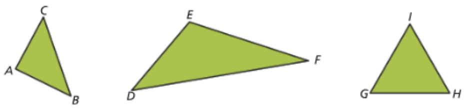
Objetivo: Deduzir que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual à amplitude de um ângulo raso.

Conhecimentos prévios: Ser capaz de identificar e representar ângulos quanto à sua amplitude.

Formato de ensino: Ensino exploratório.

Tarefa: Soma dos ângulos internos de um triângulo

1. Ao explorarem os triângulos representados na figura, o José e a Maria identificaram uma regularidade quando somaram as amplitudes dos ângulos internos de cada triângulo:



Que regularidade será essa?

2. Ao informarem os seus colegas da regularidade que obtiveram, a Joana não ficou convencida. Para ter mais certezas, desafiou os seus colegas de turma a desenharem alguns triângulos e a verificarem se tal regularidade se confirmava. Podes ajudar a Joana?

3. Depois de os colegas da Joana apresentarem à turma o resultado que obtiveram, o professor alertou de que em Matemática a verificação de casos particulares nem sempre é suficiente para provar a veracidade de um resultado matemático. Como ter a certeza de que o resultado obtido é válido para qualquer triângulo?

Exploração

1. Distribuir a tarefa pelos alunos.

2. Desafiar os alunos a desenharem alguns triângulos de forma a confirmarem a regularidade encontrada pelo José e a Maria e a convencerem a Joana.

3. Debater, em grande grupo, as respostas apresentadas, de modo a estabelecer a conjetura que traduz a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo.

4. Interrogar os alunos como ter a certeza de que o resultado obtido é válido para qualquer triângulo.

5. Recordar as relações entre os ângulos formados por duas retas paralelas e uma secante.

6. Pedir aos alunos que provem a veracidade do resultado obtido.

Comentários

Tópico presente no Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico: 5.º ano de escolaridade.

Na concretização do objetivo desta aula atende-se que os alunos têm conhecimento de alguns tópicos estudados no 4.º ano de escolaridade, tais como: ângulos retos, agudos e obtusos; ângulos nulos, rasos e giros.

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório: (1) Introdução da tarefa; (2) Exploração da tarefa; (3) Discussão. O momento de discussão tem por finalidade desenvolver a capacidade de argumentação dos alunos.

Na Tarefa pretendo que os alunos, em pares, compreendam que independentemente do triângulo, a soma dos seus ângulos internos será sempre igual à amplitude de um ângulo raso (180°).

Durante a resolução da tarefa proposta, caso sejam necessárias, procurarei dar aos alunos algumas dicas que os ajudem na sua concretização, tais como: desenha dois triângulos quaisquer e indica as medidas das amplitudes de cada um dos ângulos internos; soma a amplitude dos ângulos internos de cada um dos triângulos que desenhaste. Em último recurso mencionarei as seguintes dicas: desenha um triângulo, pinta cada uma das amplitudes dos seus ângulos, recorta-os e une-os (prova visual); desenha um triângulo, traça uma reta paralela à sua base, encontra a amplitude dos ângulos alternos internos daí resultantes (prova matemática).

Prática

O Francisco desenhou o triângulo $[LMN]$. Sabendo que dois dos ângulos internos desse triângulo têm de medida de amplitude, respetivamente, $35°$ e $43°$, o Francisco afirmou que a amplitude do ângulo NML do triângulo $[LMN]$ é determinada pela seguinte operação: $N\widehat{M}L = 180° - 43° + 35°$.

Concordas com a afirmação do Francisco? Porquê?

Na tarefa da Prática pretendo que os alunos, individualmente, determinem a amplitude do ângulo NML do triângulo [LMN], reconhecendo que se a soma dos ângulos internos de um triângulo corresponde a 180°, então para descobrir o ângulo N$\widehat{M}$L basta subtrair 43° e 35° (amplitudes dos ângulos conhecidos) a 180° (amplitude dos ângulos internos de um triângulo).

Desafio

Num triângulo retângulo, a medida da amplitude de um dos ângulos agudos é o quádruplo da medida da amplitude do outro. Prova que as medidas das amplitudes dos ângulos internos desse triângulo são $18°$, $72°$ e $90°$ respetivamente.

No Desafio pretendo que os alunos, em pares, mostrem que as medidas das amplitudes dos ângulos internos do triângulo retângulo são, respetivamente, 18°, 72° e 90°.

Síntese/discussão

1. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo pode variar de triângulo para triângulo? Porquê?

2. Sentiram dificuldades na concretização das tarefas propostas na aula? Porquê?

3. Acham que a partilha e a discussão das resoluções e estratégias das tarefas propostas com a turma vos permitiu compreender mais facilmente o tópico de geometria desenvolvido? Porquê?

Na síntese da aula pretendo averiguar que tipos de argumentos os alunos utilizam, as dificuldades que manifestam ao argumentarem matematicamente e qual o contributo da argumentação para a elucidação do tópico desenvolvido.

Materiais: Tesoura, régua, transferidor, marcadores, lápis, borracha, projetor, computador e ficha de trabalho.

Anexo 7: Plano de Aula da 2.ª sessão de intervenção do 2.º Ciclo do Ensino Básico

Tópico: Desigualdade triangular.

Objetivo: Saber que num triângulo a medida do comprimento de qualquer lado é menor do que a soma das medidas dos comprimentos dos outros dois e maior do que a respetiva diferença.

Conhecimentos prévios: Saber efetuar medições utilizando as diferentes unidades de comprimento.

Formato de ensino: Ensino exploratório.

Tarefa

1. O João ao participar nas Olimpíadas da Matemática deparou-se com a seguinte tarefa: Constrói, com a ajuda de palhinhas, triângulos com os seguintes comprimentos de lado:

Triângulo A: $6\ \text{cm}, 7\ \text{cm}, 10\ \text{cm}$;

Triângulo B: $4\ \text{cm}, 5\ \text{cm}, 11\ \text{cm}$;

Triângulo C: $5\ \text{cm}, 6\ \text{cm}, 11\ \text{cm}$.

E completa a tabela:

Triângulos	**Construí**		**Esboço da Construção**
	Sim	**Não**	
A $(6\ \text{cm}, 7\ \text{cm}, 10\ \text{cm})$			
B $(4\ \text{cm}, 5\ \text{cm}, 11\ \text{cm})$			
C $(5\ \text{cm}, 6\ \text{cm}, 11\ \text{cm})$			

O João respondeu que não precisava de construir os triângulos para ver que todas as construções eram possíveis. Concordas com o João?

2. Uma outra tarefa das Olimpíadas da Matemática consistia em descobrir o motivo pelo qual alguns triângulos podem ser construídos e outros não, ao que o João não conseguiu responder. Qual seria a tua resposta?

Exploração

3. Distribuir a tarefa pelos alunos.

4. Construir, com a ajuda de palhinhas, triângulos com diferentes medidas de comprimento de lado.

5. Analisar as diferentes construções de triângulos realizadas pelos alunos.

6. Questionar os alunos sobre as situações em que são possíveis construir triângulos e as que não.

Comentários

Tópico presente no Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico: 5.º ano de escolaridade.

Na concretização do objetivo desta aula atende-se que os alunos têm conhecimento de alguns tópicos estudados no 2.º ano de escolaridade, tais como: o metro como unidade de comprimento padrão; o decímetro, o centímetro e o milímetro, respetivamente, como a décima, a centésima e a milésima parte do metro.

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório: (1) Introdução da tarefa; (2) Exploração da tarefa; (3) Discussão. O momento de discussão tem por finalidade desenvolver a capacidade de argumentação dos alunos.

Na resolução da Tarefa pretendo que os alunos, em pares, compreendam que nem sempre é possível construir um triângulo com três segmentos de reta (palhinhas), a não ser que considerem as duas propriedades da desigualdade triangular:

- Em qualquer triângulo, o comprimento de um lado é menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.
- Em qualquer triângulo, o comprimento de qualquer lado é maior do que a diferença dos outros dois.

Na concretização da Tarefa serão distribuídas palhinhas aos alunos, embora também se pudessem distribuir palitos ou fósforos. Independentemente do material utilizado, o importante é fornecer material manipulável visto que este facilita a elaboração e a validação de conjeturas.

7. Perguntar à turma quantas propriedades contemplam a desigualdade triangular e como podem ser definidas. Generalizar tais propriedades.

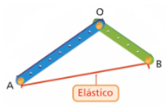
Prática

Será possível construir um triângulo em que um lado mede $8\ cm$, o segundo mede metade do primeiro e o terceiro mede metade do segundo? Justifica a tua resposta.

Na Prática pretendo que os alunos, individualmente, constatem que é impossível construir um triângulo com 8,4 e 2 cm de lado, respetivamente. Isto porque 8 > 4 + 2, o que não obedece à propriedade da desigualdade triangular:
Em qualquer triângulo, o comprimento de um lado é menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Desafio

O Ricardo pretende construir triângulos usando duas barras de plástico e um elástico como ilustra a figura seguinte:



Sabendo que $\overline{AO} = 8\ cm$ e $\overline{OB} = 5\ cm$, entre que valores o comprimento do elástico pode variar para que seja possível obter um triângulo? Explica como pensaste.

No Desafio pretendo que os alunos, em pares, reconheçam que o comprimento do elástico tem de ser superior a 3 cm e inferior a 13 devido às propriedades da desigualdade triangular.

Síntese/Discussão

4. Qualquer que seja a medida de comprimento dos lados é sempre possível construir um triângulo? Porquê?

5. Sentiram dificuldades na concretização das tarefas propostas na aula? Porquê?

6. Acham que a partilha e a discussão das resoluções e estratégias das tarefas propostas com a turma vos permitiu compreender mais facilmente o tópico de geometria desenvolvido?

Na síntese da aula pretendo averiguar que tipos de argumentos os alunos utilizam, as dificuldades que manifestam ao argumentarem matematicamente e qual o contributo da argumentação para a elucidação do tópico desenvolvido.

Materiais: Palhinhas, compasso, régua, lápis, borracha e ficha de trabalho.

Anexo 8: Plano de Aula da 3.ª sessão de intervenção do 2.º Ciclo do Ensino Básico

Tópico: Relação entre lados e ângulos de um triângulo.

Objetivos: Depreender que num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos iguais, e reciprocamente, e que ao maior lado opõe-se o maior ângulo e ao menor lado opõe-se o menor ângulo, e vice-versa.

Conhecimentos prévios: Ser capaz de identificar e representar triângulos equiláteros, isósceles e escalenos.

Formato de ensino: Ensino exploratório.

Tarefa

A turma 1 do 5.º ano tenciona construir uma banda decorativa com triângulos. Com esta finalidade, cada par de alunos da turma vai contribuir com a construção de três triângulos, de modo a que um deles seja equilátero, outro isósceles e o outro escaleno. Apresenta na seguinte tabela uma representação de cada um destes triângulos, indicando as medidas dos comprimentos dos lados e as medidas das amplitudes dos ângulos internos, assim como as relações que se podem estabelecer entre si.

Triângulos	Representação do triângulo	Relação entre os lados e os ângulos opostos
Equilátero		
Isósceles		
Escaleno		

Exploração

1. Distribuir e solicitar aos alunos a concretização da tarefa.
2. Questionar os alunos sobre o resultado das suas construções.
3. Interpelar os alunos sobre o que observam se o triângulo for equilátero, isósceles e escaleno.
4. Perguntar à turma se existe alguma relação entre os comprimentos dos lados e as amplitudes dos ângulos opostos.
5. Questionar os alunos se a relação que estabeleceram se verifica para todos os triângulos.

Prática

Considera o triângulo $[ABC]$. Sabe-se que $\overline{AB} = 13,9\ cm$, $\overline{BC} = 10{,}2\ cm$ e $\overline{AC} = 13,6\ cm$.

Indica, justificando, o maior ângulo do triângulo.

Síntese/Discussão

1. Se os vossos pais vos perguntassem o que aprenderam hoje na aula de matemática o que lhes responderiam?
2. Que dificuldades sentiram na concretização das tarefas propostas na aula? Porquê?
3. Acham que a partilha e a discussão das resoluções e estratégias das tarefas propostas com a turma vos permitiu compreender mais facilmente o tópico de geometria desenvolvido?

Materiais: Régua, compasso, transferidor, lápis, borracha e ficha de trabalho.

Comentários

Tópico presente no Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico: 5.º ano de escolaridade.

Na concretização dos objetivos desta aula atende-se que os alunos têm conhecimento de alguns tópicos estudados no 1.º e 2.º ano de escolaridade, tais como: comparação de comprimentos e igualdade geométrica de segmentos de reta e classificação de triângulos quando ao número de lados, respetivamente.

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório: (1) Introdução da tarefa; (2) Exploração da tarefa; (3) Discussão. O momento de discussão tem por finalidade desenvolver a capacidade de argumentação dos alunos.

Na resolução da Tarefa pretendo que os alunos, individualmente, compreendam que num triângulo a lados iguais se opõem ângulos iguais e vice-versa; e que ao maior lado se opõe o maior ângulo e ao menor lado se opõe o menor ângulo e reciprocamente.

- Se o triângulo for equilátero, os ângulos são iguais.
- Se o triângulo for isósceles, os ângulos opostos aos lados iguais têm a mesma amplitude.
- Se o triângulo for escaleno, ao maior (menor) ângulo opõe-se o lado de maior (menor) comprimento.

Na Prática pretendo que os alunos, individualmente, reconheçam que como ao maior lado se opõe o maior ângulo, o maior ângulo do triângulo é $\hat{C}$.

Na síntese da aula pretendo averiguar que tipos de argumentos os alunos utilizam, as dificuldades que manifestam ao argumentarem matematicamente e qual o contributo da argumentação para a elucidação do tópico desenvolvido.

Anexo 9: Plano de Aula da 4.ª sessão de intervenção do 2.º Ciclo do Ensino Básico

Tópico: Relação entre lados e ângulos de triângulos geometricamente iguais.

Objetivo: Inferir que em triângulos geometricamente iguais a lados iguais opõem-se ângulos iguais e vice-versa.

Conhecimentos prévios: Ser capaz de construir triângulos segundo os critérios de igualdade de triângulos.

Comentários

Tópico presente no Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico: 5.º ano de escolaridade.

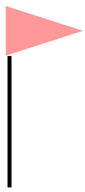
Na concretização do objetivo desta aula atende-se que os alunos têm conhecimento de alguns tópicos estudados no 5.º ano de escolaridade, tais como: o critério LLL, o critério LAL e o critério ALA de igualdade de triângulos.

Formato de ensino: Ensino exploratório.

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório: (1) Introdução da tarefa; (2) Exploração da tarefa; (3) Discussão. O momento de discussão tem por finalidade desenvolver a capacidade de argumentação dos alunos.

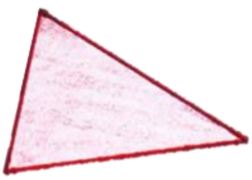
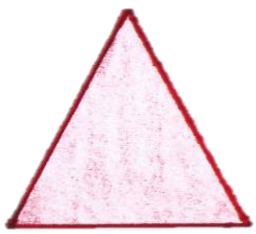
Tarefa

A Rita tem uns amigos que dão apoio à praia que ela frequenta. No fim de semana passado, como estava muito calor a Rita resolveu fazer uma visita aos seus amigos e apercebeu-se que a bandeira vermelha de sinalização de banhos estava descolorada, como mostra a figura.



Ao querer ajudar os seus amigos, a Rita teve a ideia de construir o molde da bandeira de forma a obter outra igual. Sabendo que a bandeira tem o formato de um triângulo isósceles, que indicações dariam à Rita para construir o molde? Para poderes ajudá-la, precisas de concretizar as seguintes questões:

3. Admitindo que a bandeira pode ser representada pelos triângulos isósceles contemplados na primeira coluna da tabela, representa na segunda coluna da tabela o molde de cada uma das bandeiras consideradas:

Representação da bandeira	Representação do molde
	
	

Com esta Tarefa pretendo que os alunos compreendam que em triângulos geometricamente iguais, a lados iguais se opõem ângulos iguais e vice-versa.

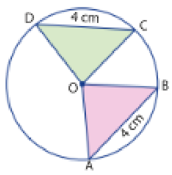
2. Qual a relação que encontras entre as medidas dos comprimentos dos lados e as medidas das amplitudes dos ângulos opostos a esses lados das duas representações (bandeira e molde)?

Exploração

1. Distribuir e solicitar aos alunos a concretização da tarefa.
2. Analisar as diferentes representações dos moldes das bandeiras realizadas pelos alunos.
3. Questionar os alunos sobre o resultado das suas representações.
4. Comentar a seguinte afirmação: "Um triângulo equilátero não é isósceles".
5. Interpelar os alunos sobre o que observam se a representação da bandeira e o molde tivessem o formato de um triângulo escaleno.
6. Perguntar à turma que relação pode estabelecer entre triângulos geometricamente iguais quanto aos comprimentos dos lados e às amplitudes dos ângulos opostos.

Desafio

Na figura seguinte está representada uma circunferência de centro O e dois triângulos $[AOB]$ e $[COD]$:



Mostra que os triângulos $[AOB]$ e $[COD]$ são iguais.

No Desafio pretendo que os alunos mostrem que como os segmentos de reta AB e CD têm o mesmo comprimento de lado e como $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$ porque são raios da circunferência, então os triângulos são geometricamente iguais.

Síntese/Discussão

1. Um colega vosso faltou à aula por motivo de doença. Ao contactar-vos, o que lhe diriam sobre o que foi tratado na aula?
2. Sentiram dificuldades na concretização das tarefas propostas na aula? Porquê?
3. Acham que a partilha e a discussão das resoluções e estratégias das tarefas propostas com a turma vos permitiu compreender mais facilmente o tópico de geometria desenvolvido?

Na Síntese/Discussão sobre os tópicos estudados na aula pretendo averiguar que argumentos os alunos utilizam para sustentar as suas ideias, as dificuldades que manifestam ao argumentarem matematicamente e qual o contributo da argumentação para a elucidação do tópico desenvolvido.

Materiais: Régua, compasso, transferidor, lápis, borracha e ficha de trabalho.

Anexo 10: Questionário final relativo ao 1.º Ciclo do Ensino Básico

1. Dos tópicos de Geometria que aprendeste, qual[ais] foi[ram] o[s] que mais gostaste?

____

____

____

Porquê?

____

____

____

2. Dos tópicos de Geometria que aprendeste, qual[ais] foi[ram] o[s] que menos gostaste?

____

____

____

Porquê?

____

____

____

3. Durante as aulas, dos tópicos de Geometria, qual[ais] foi[ram] a[s] maior[es] dificuldade[s] que sentiste?

____

____

____

Porquê?

____

____

____

4. Qual[ais] foi[ram] a[s] maior[es] dificuldade[s] que sentiste ao argumentar em Matemática?

____

____

____

Porquê?

____

____

____

5. Na tua opinião, a partilha e a discussão com os teus colegas das resoluções das tarefas foi importante para a tua aprendizagem?

Sim ☐

Não ☐

Porquê?

____

____

____

Anexo 11: Questionário final referente ao 2.º Ciclo do Ensino Básico

De forma a avaliar o ensino ministrado é pedido que respondas a cada uma das afirmações apresentadas, assinalando com um x o grau de concordância, considerando a seguinte escala: **DT:** Discordo Totalmente; **D:** Discordo; **I:** Indiferente; **C:** Concordo; **CT:** Concordo Totalmente

Afirmações	**DT**	**D**	**I**	**C**	**CT**
1. Argumentar é convencer os outros da veracidade dos meus processos e resultados.					
2. A professora expôs com clareza os tópicos de Geometria.					
3. Tive dificuldade em compreender as tarefas propostas.					
4. Debater as resoluções das tarefas com a turma é uma perda de tempo.					
5. As tarefas propostas na aprendizagem de tópicos de Geometria desafiaram-me a pensar.					
6. A argumentação pode ser feita oralmente ou por escrito.					
7. Tive dificuldades em argumentar matematicamente porque todos os argumentos que apresentei à turma não foram suficientemente fortes comparado com o dos outros colegas.					
8. Realizar as tarefas em pares só fez com que sentisse mais dificuldades.					
9. Argumentar uma ideia é o mesmo de que a discutir.					
10. Participei ativamente na resolução das tarefas propostas nas aulas.					
11. A professora estimulou o interesse dos alunos pelos tópicos de Geometria.					
12. Quando tive dificuldades na resolução das tarefas pedi ajuda à professora.					
13. Realizar as tarefas em pares permitiu-me compreender melhor o que era pedido.					
14. Tive dificuldades em argumentar matematicamente porque os meus colegas estavam sempre a interromper-me.					
15. Debater as resoluções das tarefas com a turma permitiu-me clarificar as dúvidas e/ou os erros.					
16. Apenas participei na resolução das tarefas quando fui solicitado pela professora.					
17. Quando tive dificuldades na resolução das tarefas não pedi ajuda a ninguém.					
18. A professora incentivou os alunos a participar nas tarefas das aulas.					
19. Realizar as tarefas em pares deu-me segurança para partilhar as minhas respostas com a turma.					
20. Quando tive dificuldades na resolução das tarefas pedi ajuda aos meus colegas.					
21. Argumentar é apresentar e/ou defender os meus processos e resultados.					
22. A professora mostrou domínio dos tópicos de Geometria que lecionou.					
23. Não aprecio expor as minhas dúvidas à turma por ter receio de ser 'gozado' pelos meus colegas.					
24. Tive dificuldades em argumentar matematicamente porque não tenho por hábito fazê-lo nas aulas.					
25. Partilhar e debater as resoluções das tarefas com a turma ajudou-me a					

compreender melhor os tópicos de Geometria.					
26. Debater as resoluções das tarefas com a turma permitiu-me aprender com os meus colegas e os meus colegas comigo.					
27. A professora esteve disponível para esclarecer dúvidas.					
28. A argumentação permite-me confrontar com diferentes formas de pensar.					
29. A argumentação só pode ser feita oralmente.					
30. Tive dificuldades em argumentar matematicamente porque tinha medo de errar.					

1. Indica, justificando, **três vantagens** da argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria.

____

____

____

____

____

____

2. Indica, justificando, **três desvantagens** da argumentação matemática na aprendizagem de tópicos de Geometria.

____

____

____

____

____

____

3. Refere, justificando, a maior dificuldade que sentiste ao argumentar matematicamente.

____

____

____

____

____

____