

# Cálculo em PBL

M. Teresa Malheiro

Departamento de Matemática e Aplicações, Universidade do Minho  
mtm@math.uminho.pt

---

## Resumo

No âmbito da disciplina PIEGI do 1º ano do curso MIEGI, os alunos trabalham em grupo, para construir um projeto sob um tema previamente escolhido pela equipa docente (Project Based Learning -PBL). O projeto é interdisciplinar e tem tarefas alocadas a cada disciplina que contribuem para o resultado final.

Desde *Reciclar lixo orgânico para produzir bio álcool até Remanufatura de acessórios de moda ou calçado em material sintético*, entre muitos outros, há uma variedade de temas tratados pelos alunos. A disciplina de Cálculo integra a disciplina de PIEGI. Os alunos aplicam conhecimentos obtidos como, por exemplo, cálculo integral para criarem formatos de novos objetos contextualizados ao tema e calcular as suas dimensões. Para além da óbvia aplicação do que aprenderam em contexto de aula, o projeto permite a consciencialização da utilidade do que aprenderam, a identificação das suas limitações, tal como o desenvolvimento da escrita da linguagem matemática.

**Palavras-Chave:** PBL, Ensino em Engenharia, Cálculo.

---

## 1 Contextualização

Cálculo é uma Unidade Curricular (UC) do 1º semestre do 1º ano dos cursos do ensino superior de engenharia. Nesta UC, os alunos aprendem conceitos necessários para aplicar noutras UCs do curso e, além disso, desenvolvem capacidades matemáticas fundamentais para a sua vida profissional futura.

No curso Mestrado Integrado em Engenharia e Gestão Industrial (MIEGI) da Universidade do Minho, dois dos resultados de aprendizagem desta UC são:

- Calcular primitivas de funções aplicando as técnicas apresentadas.
- Aplicar o conceito de integral ao cálculo de áreas de domínios planos, comprimentos de curva, volumes de sólidos de revolução e áreas de superfície de revolução.

Para além das UCs "tradicionais" do 1º semestre do 1º ano, os alunos de MIEGI têm a UC Projeto Integrado em Gestão Industrial (PIEGI),

## 2 Descrição da prática pedagógica

No âmbito da UC Projeto Integrado em Gestão Industrial, os alunos do 1º ano de MIEGI trabalham em grupo, tendo que construir um projeto aberto sob um tema previamente escolhido pela equipa docente (Project Based Learning - PBL).

Os alunos são organizados em seis grupos com cerca de oito elementos cada. Dependendo do número de alunos inscritos na UC, alguns grupos podem ter nove elementos.

## 2.1 Objetivos e público-alvo

A aprendizagem é facilitada e valorizada quando os alunos conseguem exemplificar onde e como podem usar os conhecimentos aprendidos, [Biggs, J., Tang C. (2007)].

“O projeto interdisciplinar do Mestrado Integrado em Engenharia e Gestão Industrial do 1º ano, 1º semestre (MIEGI11) da Universidade do Minho consiste na aplicação de uma metodologia ativa de aprendizagem de conteúdos multidisciplinares em engenharia. O semestre é desenvolvido sob a forma de um projeto de grande dimensão realizado por equipas de alunos e apoio dos docentes das várias Unidades Curriculares (UCs). O projeto requer alunos motivados e dinâmicos na prossecução do melhor produto e do melhor sistema de produção”, [Alves, A., Moreira, F., et al, (2016)].

Há dois grandes objetivos no projeto [Alves, A., Moreira, F., et al, (2016)]:

- Especificação e identificação dos componentes do produto;
- Especificação do sistema produtivo para fabrico do produto.

A UC de Cálculo contribui para o projeto para responder ao primeiro objetivo indicado, com tarefas alocadas que contribuem para o resultado final.

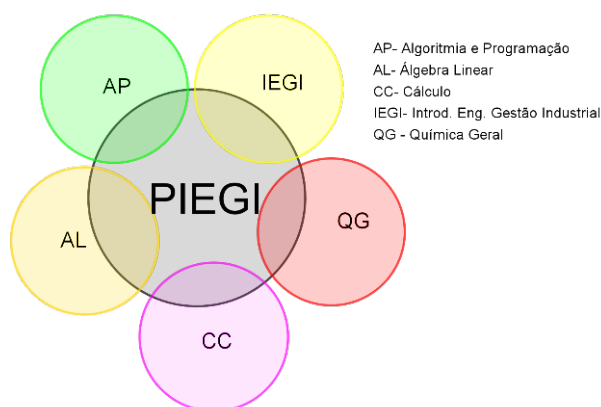


Figura 1: UCs que integram PIEGI, [Alves, A., Moreira, F., et al, (2016)]

Cada grupo tem um docente tutor com o qual se reúne com alguma periodicidade para obter ajuda. Semanalmente, os grupos têm também três horas para se reunirem com docentes das UCs envolvidas. Nessas reuniões, os docentes fazem um acompanhamento do projeto verificando se há dúvidas e se os alunos precisam de ajuda. Observa-se que em cada grupo, um ou dois elementos dedicam-se a uma tarefa, dividindo dessa forma o trabalho da equipa.

Na Tabela abaixo estão apresentados temas de projeto desenvolvidos em alguns anos letivos, com a respetiva tarefa de Cálculo.

Ano letivo	Exemplos de temas do projeto	Tarefa de Cálculo
2006/2007	Produção de uma pilha de combustível	Construção da pilha
2007/2008	Sistema de dessalinização de água	Construção do engenho que dessaliniza
2009/2010	Reciclagem de resíduos orgânicos para produzir bio-álcool	Construção do aparelho de reciclagem
2010/2011	Produção de água potável a partir da umidade do ar: especificações de um dispositivo portátil	Construção do dispositivo portátil
2013/2014	Produção embalagens mais sustentáveis	Construção das embalagens.
2014/2015	Aproveitamento de resíduos de óleos usados	Construção do produto final (se sólido) ou para a sua embalagem (se o produto for líquido).
2015/2016	Conceção de um Forno Solar e Especificação do Sistema de Produção	Construção forno solar e da superfície refletora.
2016/2017	Remanufactura de acessórios de moda ou calçado em material sintético	Construção do produto final, resultado da remanufactura.

## 2.2 Metodologia

No âmbito da tarefa de Cálculo, os alunos têm que modelar um objeto ou máquina onde podem usar aplicações geométricas de cálculo integral, desenvolvendo dois dos resultados de aprendizagem da UC de Cálculo. E simultaneamente, contribuem com os seus conhecimentos recentemente adquiridos na UC e capacidades para chegar a um ótimo resultado final.

Relativamente à tarefa de Cálculo, pede-se aos alunos que:

- Sugiram formatos originais para os objetos em causa.
- Os objetos devem ser sólidos de revolução, isto é, sólidos que são originados pela rotação de curvas em torno de uma reta.
- Indiquem as curvas envolvidas e as suas equações.
- Calculem o volume do sólido e a sua área da superfície, usando integrais definidos.
- Façam uma apreciação crítica do trabalho, justificando o formato escolhido e explicando as dificuldades encontradas.

## 2.3 Avaliação

A avaliação do projeto tem diversas componentes, [Alves, A., Moreira, F., et al, (2016)]: Relatório Preliminar; Relatório Final; Apresentações Oraís; Protótipos dos objetos e do sistema de produção.

Os alunos entregam o Relatório Preliminar (RP) posteriormente corrigido pelos docentes para que o grupo possa elaborar o Relatório Final. No RP, a avaliação da tarefa de Cálculo é realizada segundo os seguintes critérios:

- Justificação do formato escolhido para a embalagem;
- Originalidade da forma dos objetos (a diferença dessa forma relativamente á apresentada pelos outros grupos será valorizada);
- Escolha adequada das curvas (para obtenção do sólido pretendido) e correção das suas equações;

- Aplicação correta das fórmulas e cálculos corretos;
- Linguagem matemática correta.

Verifica-se que os alunos aplicam os conhecimentos que aprenderam na UC de Cálculo, [Cargnin-Stieler, M et al. (2015)].

Como a avaliação se baseia em várias componentes que são entregues ao longo do semestre, onde os docentes podem verificar as maiores dificuldades a taxa de insucesso nesta UC é praticamente nula. Existem poucos casos de desistência de alunos no início do semestre.

Para além disso, através do PBL, desenvolvem outras competências manifestadas nos Relatórios e que serão aqui ilustradas.

### 3 Resultados, implicações e recomendações

#### 3.1 Consciencialização e justificação da utilidade do que aprenderam

Os alunos têm que planear objectos em forma de sólidos de revolução e são motivados para usar a sua criatividade, justificando a sua escolha:

“A embalagem definida foi pensada tendo em conta o logótipo da nossa empresa que tem o formato de uma gota. Desenvolvemos uma embalagem em que se consiga aliar o eco design e a sustentabilidade. Para tal, o grupo decidiu então fazer a sua embalagem em forma de garrafa e feita de plástico reciclado.” [Relatório G3, 2014/2015]

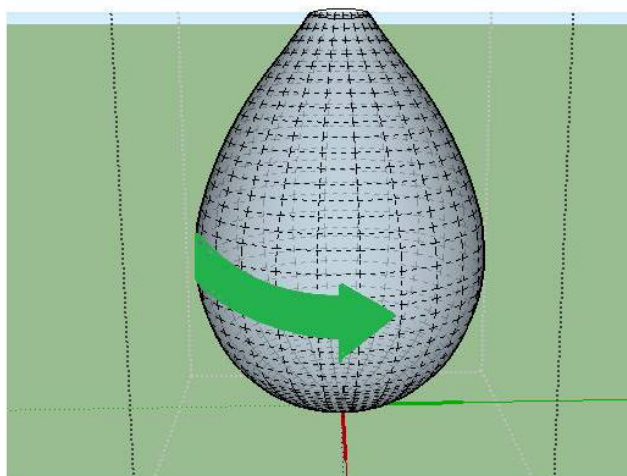


Figura 2: Exemplo de embalagem, [Relatório G3, 2014/2015]

“Por forma a satisfazer os requisitos da UC de Cálculo projetou-se uma segunda embalagem, um sólido gerado pela rotação de uma região plana em torno de um eixo, sobre a qual se aplicará todos os conhecimentos adquiridos nesta UC. Esta embalagem transportará pequenas quantidades de detergente e terá uma dupla função: recipiente para transporte de amostras (por forma a dar a conhecer o nosso produto) e doseador.” [Relatório preliminar G6, 2014/15]

### 8.2 Embalagem de amostra (doseador)

A embalagem da amostra é constituída pela tampa, que terá a função de doseador, permitindo ao utilizador medir até 20 cl ( $200\text{cm}^3$ ) do detergente, e por um cilindro que transportará 10 cl do mesmo, tendo portanto  $100\text{cm}^3$  de volume.

A amostra será um sólido de revolução que resultará da rotação de uma região plana em torno de OX:

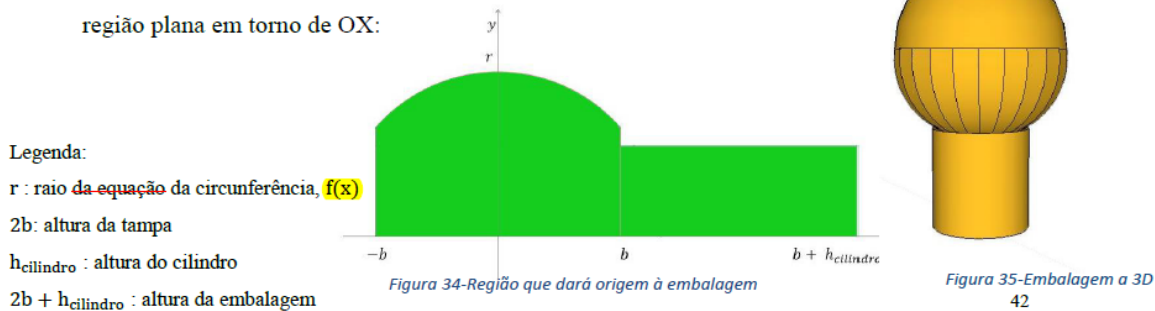


Figura 3: [Relatório G6, 2014/2015]

O *design* atual e definitivo do forno solar permite uma fácil utilização e arrumação, tem um bom rendimento devido à grande abertura da superfície refletora, é apelativo esteticamente e possui características ecológicas, uma vez que serão usados os melhores materiais tendo em conta o seu ciclo de vida, a sua possível reciclagem, reutilização e reconversão.

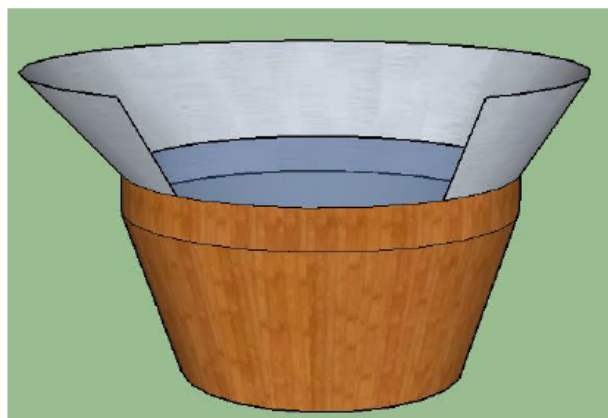


Figura 9 – Design atual e definitivo do forno solar

Figura 4: Forma de um forno solar, [Relatório G3, 2015/2016]

### 3.2 Identificação de limitações e suas resoluções

Para o cálculo dos volumes e áreas de superfície dos sólidos modelados, surgiram integrais para os quais os alunos não conheciam as técnicas apropriadas de resolução ou eram impossíveis de resolver analiticamente. Para ultrapassar a dificuldade, usaram ferramentas computacionais, softwares adequados ou aproximações numéricas.

“Contudo, verificamos que o cálculo do integral era impossível, por isso, tivemos de encontrar soluções. Tivemos de substituir a nossa função por outra cujo volume pudesse ser calculado. Tivemos duas soluções, usando ferramentas, UC's e conhecimentos completamente distintos: (...) descobrimos que conseguíamos gerar um polinómio interpolador da nossa função inicial, isto é...” [Relatório G4, 2014/15]

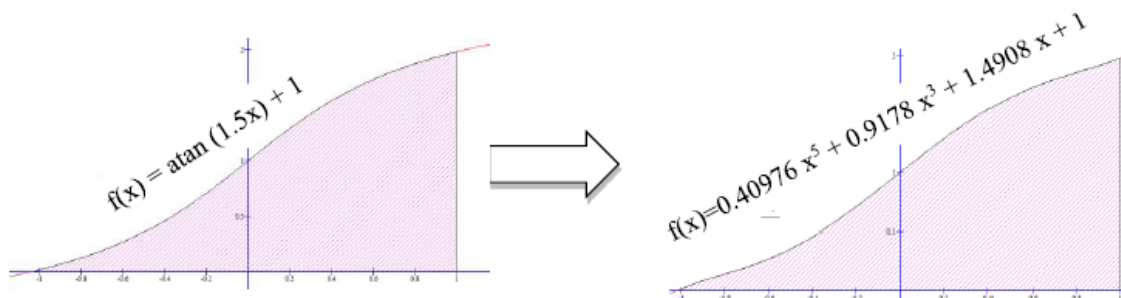


Figura 5: Resolução sugerida por um grupo para cálculo de integral [Relatório G4, 2014/2015]

Encontraram equações polinomiais de grau elevado para resolução e recorreram a ferramentas computacionais:

$$10,506 = \frac{1}{2800} (b - 1/2)^7 + 0,032 (b - 1/2)^4 + 1,62b$$

Visto que encontrar  $b$  a partir desta equação era extremamente complexo, a professora responsável pela U.C de cálculo disponibilizou a sua ajuda e, através do programa “Scientific Workplace” fomos capazes de determinar o seu valor.

42

Figura 6: Problema de um grupo, [Relatório G5, 2014/2015]

Os alunos procuraram softwares que satisfizessem as necessidades de cálculo e representação de figuras:

“Maxima: também conhecido como 'sistema algébrico computacional'. Este programa é usado para a manipulação de expressões numéricas e simbólicas (ex. integração, séries numéricas, ...), na qual ajuda a solucionar problemas apresentando resultados com maior exatidão possível. Além disso, pode ser usado para reproduzir as representações gráficas de funções previamente inseridas, tanto bidimensionais como tridimensionais.” [Relatório G4, 2015/16]

bidimensionais como tridimensionais (Figura 11).

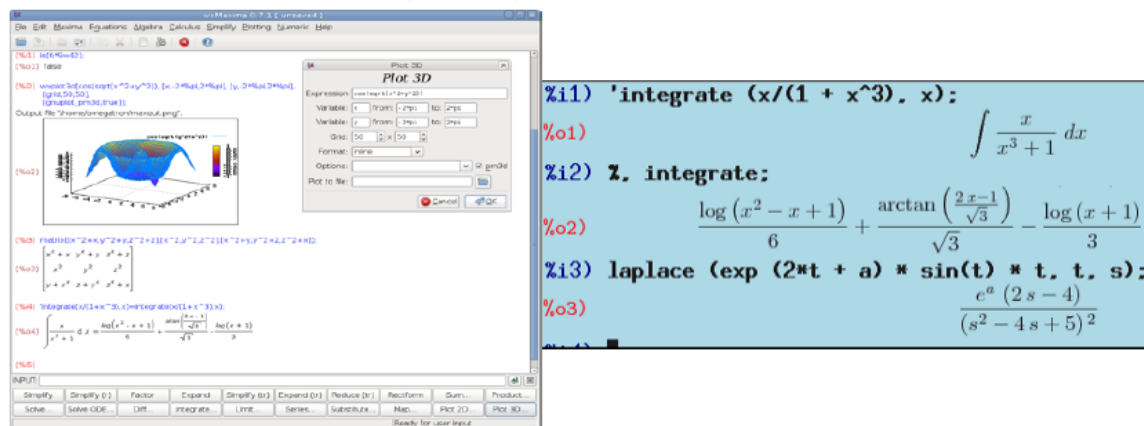


Figura 11 - Interface do programa Maxima

Figura 7: Ilustração do Maxima [Relatório G4, 2015/2016]

### 3.2 Desenvolvimento da escrita da linguagem matemática

Os alunos apresentam dificuldades na escrita de linguagem matemática, pois não estão habituados a escrever fora do contexto de testes. Os Relatórios Preliminares são uma ótima oportunidade para o professor corrigir os termos e a linguagem matemática e para os alunos verificarem quando explicitam erradamente.

#### Expressão da função da parábola

$$y = 3 + \frac{1}{65}x^2$$

$$V = \pi \times \int_0^{16,15} \left(3 + \frac{1}{65}x^2\right)^2 dx + \pi \times \int_{16,15}^{27} \left(\sqrt{64 - (x - 20)^2}\right)^2 dx$$

Figura 8: Expressões incorretas “função da parábola” e escrita de fórmulas no meio de texto, sem qualquer justificação [Relatório G3, 2014/2015]

Foi criado um integral que permite calcular um b tal que o volume de revolução da tampa perfizesse 200 cm<sup>3</sup>.

$$2 \times \pi \int_0^b \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = 200 \leftrightarrow \left[r^2x - \frac{x^3}{3} + C\right]_0^b = \frac{100}{\pi}$$

Ver desenvolvimento no anexo III número 2.

Deu-se um valor a r e escreveu-se f(x).

- Se r = 4 então f(x) =  $\sqrt{16 - x^2}$

Figura 9: Dificuldade em justificar a fórmula apresentada e ausência de justificação para o valor de r escolhido [Relatório G6, 2014/2015]

- Gráfico da função que roda em torno de  $Ox$  e gera o cilindro exterior:  
 $F(x)=20.4$ , para  $0 \leq x \leq 33.5$
- Gráfico da função que roda em torno de  $Ox$  e gera o parabolóide:  
 $G(x) = -0.35(x - 33.5)^2 + 20.4$ ,  $33.5 \leq x \leq 43.5$
- Gráfico da função que roda em torno de  $Ox$  e gera o cilindro interior (correspondente à superfície refletora do forno):  
 $H(x) = 15.4$ , para  $5 \leq x \leq 33.5$

Figura 10: Dificuldade em usar os termos corretos [Relatório G4, 2015/2016]

## 4 Conclusões

Uma das características importantes de PIEGI é o seu caráter interdisciplinar e o desenvolvimento de capacidades transversais. A UC Cálculo contribui para isso, através da sugestão da criação de objetos e da utilização das suas ferramentas matemáticas. Simultaneamente, PIEGI é uma mais valia para a aprendizagem de Cálculo, pois permite que os alunos identifiquem situações onde podem aplicar os seus conhecimentos e utilizem matemática fora do contexto de testes e exames (resolução de problemas e exercícios) mas também procurem responder às perguntas:

- *Como devo usar a informação e os conhecimentos que tenho neste contexto?*
- *Como ultrapasso as dificuldades quando deparo com situações diferentes dos exercícios e problemas da sala de aula?*

## 5 Referências

- Alves, A., Moreira, F., et al, (2016) Guia PBL Project Based Learning, MIEGI11 - PIEGI1, 2016-2017, DPS, Escola de Engenharia, UM, (trabalho não publicado).
- Biggs, J., Tang C. (2007) Teaching for Quality Learning at University: What the Student Does. 3rd edition. New York. USA.
- Cargnin-Stieler, M., Malheiro, M. T., Alves, A., Lima, R. M., Teixeira, M. C. M. (2015) Learning Calculus through PBL in an Industrial Engineering and Management program - a longitudinal study. Advances in Engineering Education. (submetido para publicação)