A aprendizagem de Funções Racionais com recurso à calculadora gráfica de alunos do 11º ano de escolaridade

Ana Maria de Sousa Freitas

UMinho|2021

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Ana Maria de Sousa Freitas

A aprendizagem de Funções Racionais com recurso à calculadora gráfica de alunos do 11º ano de escolaridade

junho de 2021

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Ana Maria de Sousa Freitas

A aprendizagem de Funções Racionais com recurso à calculadora gráfica de alunos do 11º ano de escolaridade

Relatório de estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho efetuado sob a orientação do
Professor Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

junho de 2021

AGRADECIMENTOS

A realização deste relatório de estágio marca o fim de uma etapa da minha vida. Gostaria de agradecer a todos quanto contribuíram de forma decisiva para a sua concretização.

Expresso aqui o meu agradecimento ao Professor Doutor Floriano Viseu, supervisor deste estágio, pela sua disponibilidade e pelas sábias orientações que me proporcionou, com ideias e sugestões que me ajudaram a crescer enquanto futura professora.

Agradeço à professora Ana Paula Seixas Mourão, orientadora cooperante deste estágio, pelo apoio, acolhimento e pelos conselhos dados ao longo da minha intervenção pedagógica.

Agradeço à direção da escola por ter possibilitado a concretização deste projeto, ao pessoal docente e não docente por me ter recebido de braços abertos e aos alunos pela simpatia e pelo excelente envolvimento nas tarefas que lhes propus ao longo da minha intervenção.

Agradeço aos meus colegas de mestrado, em especial às minhas colegas de estágio, com quem partilhei informações e ideias, com eles esta caminhada tornou-se mais agradável. A todos os meus amigos, um agradecimento muito especial por me terem acompanhado nos últimos tempos, por estarem presentes, mais longe ou mais perto e me animarem nos momentos menos bons.

Por último, manifesto um sentido e profundo reconhecimento à minha família, em especial aos meus pais, irmão e avós pelo apoio incondicional ao longo destes anos. À minha mãe e ao meu pai, por toda a dedicação e por me permitirem concretizar mais este sonho. Ao meu irmão, pela partilha de conhecimentos e pelo apoio que me deu sempre que precisei. Aos meus avós, por serem uma inspiração e por todos os momentos de carinho que guardo com muita saudade.

A todos os que me ajudaram nesta caminhada, muito obrigada!

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

A APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES RACIONAIS COM RECURSO À CALCULADORA GRÁFICA DE ALUNOS DO 11º ANO DE ESCOLARIDADE

RESUMO

O presente estudo visa averiguar o contributo da calculadora gráfica na aprendizagem de funções racionais de alunos de uma turma do 11.º ano de escolaridade. De modo a compreender os significados que os alunos dão às suas atividades de aprendizagem, adotou-se uma abordagem qualitativa e interpretativa. Para a concretização do objetivo delineado, formularam-se as seguintes questões de investigação: (1) Como os alunos utilizam a calculadora gráfica na aprendizagem de funções racionais? (2) Que dificuldades manifestam os alunos na aprendizagem de funções racionais? Que papel desempenha a calculadora gráfica na clarificação dessas dificuldades? (3) Quais as perceções dos alunos sobre a utilização da calculadora gráfica na aprendizagem de funções racionais? Para dar resposta a estas questões recolheram-se dados através dos seguintes métodos: gravação áudio e vídeo de aulas; produções dos alunos; e questionários (inicial e final).

A intervenção pedagógica foi realizada numa escola do ensino secundário da cidade de Braga, numa turma do 11.º ano de Ciências e Tecnologias. Para a implementação da intervenção pedagógica, foi elaborada a planificação de cada uma das aulas, tendo em consideração o programa de Matemática A em vigor. Nessa planificação, para a dinamização das atividades de ensino e de aprendizagem, foram atendidas as características exploratórias das tarefas, a utilização da calculadora gráfica e o ensino exploratório.

Os resultados obtidos sugerem que os alunos utilizam a calculadora gráfica essencialmente na resolução gráfica de tarefas, na verificação de resultados obtidos analiticamente e também para ultrapassar dificuldades provenientes da resolução analítica das tarefas propostas. Os alunos utilizaram a calculadora gráfica, através do processo de génese instrumental, para formular e/ou validar conjeturas dos tópicos de funções racionais em estudo. Ao darem sentido ao que retiravam da exploração da calculadora gráfica, os alunos determinaram o sinal e os zeros de funções racionais, estabeleceram as regras operatórias de limites entre funções e determinaram assíntotas ao gráfico de uma dada função racional.

Os alunos revelaram dificuldades na resolução de equações e inequações fracionárias, para estudar os zeros e o sinal de funções racionais, bem como no conceito de limite para determinar as assíntotas ao gráfico de funções racionais. Os alunos também manifestaram dificuldades na escolha da janela de visualização da calculadora gráfica, o que teve implicações nos esboços e na interpretação de gráficos de funções racionais.

Relativamente às perceções sobre a utilização da calculadora gráfica na aprendizagem de funções racionais, os alunos apontam potencialidades na visualização dos conceitos em estudo, na compreensão das tarefas propostas e na verificação de resultados obtidos analiticamente.

Palavras-chave: alunos do 11.º ano de escolaridade; aprendizagem; calculadora gráfica; funções racionais.

LEARNING RATIONAL FUNCTIONS RESORTING TO THE GRAPHIC CALCULATOR FOR STUDENTS IN THE 11TH GRADE OF SCHOLARITY

ABSTRACT

The present study aims to investigate the contribution of the graphic calculator in the learning of rational functions of students in an 11th grade class. In order to understand the meanings that students give to their learning activities, a qualitative and interpretative approach was adopted. To achieve the objective outlined, the following research questions were formulated: (1) How do students use the graphic calculator to learn rational functions? (2) What difficulties do students manifest in learning rational functions? Which role does the graphic calculator play to clarify these difficulties? (3) What are the perceptions that students have about the use of the graphic calculator while learning rational functions? To find the answers to these questions, the data was collected using the following methods: audio and video recording of classes; students' productions; and questionnaires (initial and final).

The pedagogical intervention was carried out in a secondary school in the city of Braga, in a class of the 11th grade of Science and Technology. For the implementation of the pedagogical intervention, the planning of each class was prepared, considering the current Mathematics A program. In this planning, the dynamization of teaching and learning activities were designed according to the exploratory characteristics of the tasks, the use of the graphic calculator and the exploratory teaching.

The obtained results suggest that the graphic calculator was essentially used in the graphical resolution of tasks, in the verification of the results obtained analytically and to overcome the difficulties from the analytical resolution of the proposed tasks. The students used the graphic calculator, through the process of instrumental genesis, to formulate and/or validate conjectures of the topics of rational functions under study. When giving the meaning to what they extracted from the exploration of the graphic calculator, the students determined the sign and the zeros of rational functions, established the operational rules of limits between functions and determined asymptotes to the graph of a rational function.

The students revealed difficulties in solving fractional equations and inequalities, to study the zeros and the sign of rational functions, as well as in the concept of limit to determine the asymptotes to the graphic of rational functions. The students also expressed difficulties in choosing the visualization window of the graphic calculator, which had implications for the sketches and the interpretation of graphs of rational functions.

Regarding the students' perceptions about the use of the graphic calculator in the learning of rational functions, they point out the potential of the calculator to visualize the concepts under study, helping to understand the tasks and verifying the results obtained analytically.

Keywords: 11th grade students; graphic calculator; learning; rational functions.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE QUADROS

ÍNDICE DE TABELAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Este capítulo está estruturado em três secções. Na primeira secção, apresenta-se o tema, o objetivo e as questões de investigação que orientam este estudo. Na segunda secção, encontra-se a pertinência do estudo, à luz do ensino e da aprendizagem da Matemática. Por fim, na terceira secção, descreve-se a estrutura deste relatório.

1.1. Tema, objetivo e questões de investigação

O tema deste estudo, desenvolvido na minha prática pedagógica, incidiu sobre a aprendizagem de Funções Racionais com recurso à calculadora gráfica, de alunos do 11.º ano de escolaridade. Esta escolha deveu-se a um gosto pessoal pelo domínio de 'Funções Reais de Variável Real' e ao facto de não me sentir à vontade com a utilização da calculadora gráfica. Durante a minha experiência enquanto aluna, constatei que a integração deste artefacto didático era pouco frequente, contudo sempre considerei que a sua integração era essencial para a minha aprendizagem. Neste sentido, o desenvolvimento deste estudo visa a minha formação, bem como uma oportunidade de aprofundar a utilização da calculadora gráfica e também perceber de que forma este recurso contribui para uma melhor aprendizagem dos alunos.

O domínio de funções, dada a sua importância, é um dos domínios mais extenso nos programas curriculares do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário. O estudo deste domínio inicia-se no 7.º ano de escolaridade, continuando até ao 12.º ano. Deste modo, quando os alunos estudam tópicos de funções racionais, no 11.º ano, já possuem conhecimentos prévios sobre conceitos de funções, tais como propriedades de funções polinomiais, transformações de funções, entre outras. Para a aprendizagem de tópicos de funções, os programas em vigor apontam para a importância de o aluno relacionar as representações gráficas, observadas na calculadora gráfica, com os conhecimentos teóricos (Ministério de Educação e Ciência (MEC), 2013). Com recurso à calculadora gráfica, os alunos podem desenvolver o conceito imagem de funções, uma vez que a calculadora gráfica fornece várias representações (numérica, gráfica e simbólica) das funções (Tall & Vinner, 1981). Para Burrill (2008), a utilização de materiais tecnológicos proporciona aos alunos a oportunidade de conjeturar, refletir, explorar e justificar. Assim, a integração da calculadora gráfica promove a análise gráfica de funções, permitindo explorar e conjeturar tópicos de funções racionais. A utilização da calculadora gráfica apoia os alunos na exploração da matemática, assim como na compreensão de conceitos matemáticos, elevando o seu raciocínio matemático (NCTM, 2014). Este recurso didático é essencial na aprendizagem de tópicos de funções por facultar esboços gráficos, o que permite aos alunos visualizar o comportamento das funções, promovendo a compreensão de significados inerentes à respetiva representação analítica (NCTM, 2007). A possibilidade de utilizar as potencialidades deste recurso pode ajudar os alunos a ultrapassar as dificuldades no estudo de funções. Apesar das suas potencialidades, a calculadora também apresenta limitações que podem ser utilizadas pedagogicamente, explorando-as e debatendo-as com os alunos (Consciência, 2003).

Os materiais que os alunos utilizam para aprender matemática e fazer matemática, normalmente, são os materiais que os professores utilizam na sala de aula (Burrill, 2008). Deste modo, é importante o professor implementar a calculadora gráfica na sala de aula. Assim, tentei motivar os alunos na utilização adequada da calculadora gráfica na aprendizagem de tópicos de funções racionais, que desenvolvessem competências críticas à informação recolhida na calculadora gráfica e que utilizassem este recurso para conjeturar os tópicos em estudo.

São muitos os estudos que abordam a calculadora gráfica como instrumento potenciador da aprendizagem de conceitos matemáticos, entre os quais os de funções. Um destes casos é o estudo de Carvalho et al. (2011), para quem a utilização da calculadora gráfica é uma mais-valia na construção de imagens dinâmicas de gráficos, relacionando as representações algébricas e gráficas de funções racionais. Para Consciência (2013), a utilização da calculadora gráfica no estudo de tópicos de funções promove o desenvolvimento de uma visão estrutural dos conceitos, incentiva a exploração de situações problemáticas e permite solucionar algumas dificuldades que os alunos apresentam em resoluções analíticas. Segundo Domingos (2017), nos diversos estudos que analisou, a integração da calculadora gráfica contribui favoravelmente na compreensão de diferentes representações dos conceitos em causa.

Tendo em consideração tais pressupostos, o presente estudo tem como objetivo averiguar o contributo da calculadora gráfica na aprendizagem de funções racionais de alunos do 11.º ano de escolaridade. Para responder a este objetivo, pretendo responder às seguintes questões de investigação:

(1) Como os alunos utilizam a calculadora gráfica na aprendizagem de funções racionais?
(2) Que dificuldades manifestam os alunos na aprendizagem de funções racionais? Que papel desempenha a calculadora gráfica na clarificação dessas dificuldades?
(3) Quais as perceções dos alunos sobre a utilização da calculadora gráfica na aprendizagem de funções racionais?

1.2. Pertinência do estudo

O conceito de função é considerado um dos mais importantes de toda a Matemática (Ponte, 1990). Segundo Marbán e Sintema (2020), o seu estudo é crucial para o desenvolvimento da alfabetização matemática, assim como é um pré-requisito para o estudo do 'Cálculo', de 'Trigonometria' e para a 'Resolução de equações', entre outros conteúdos. O conceito de função não se restringe à disciplina de Matemática, aplica-se a diversas situações do quotidiano, bem como em diferentes áreas, tais como, na Física, Química, Economia, Biologia, entre outras.

A integração da calculadora gráfica, no ensino português, começou a ser recomendada em 1988, fundamentalmente por a calculadora permitir vivenciar experiências matemáticas genuínas (APM, 2009). Já em 1997 a implementação da calculadora tornou-se obrigatória para o ensino secundário de Matemática (ME, 1997). Desde esse ano, a calculadora gráfica é um dos materiais didáticos que quase todos os alunos do ensino secundário possuem. Deste modo, os alunos podem utilizá-la dentro da sala de aula, desde que o professor queira explorá-la, mas também podem utilizá-la fora da sala de aula. A utilização da calculadora gráfica na sala de aula é aconselhada, entre outras atividades, para ilustrar gráficos de funções, numa abordagem experimental ou para validar conjeturas (MEC, 2013).

Para o estudo de tópicos de funções é importante que os alunos desde cedo trabalhem com a representação gráfica (Siqueira & Beust, 2008). Para tal, os alunos podem recorrer ao auxílio da calculadora gráfica para converter uma representação algébrica numa representação gráfica (Almeida & Oliveira, 2009). Além das diversas potencialidades da calculadora no estudo de tópicos de funções, este recurso também permite uma mudança no ensino da disciplina de Matemática, que, segundo Fernandes e Vaz (1998), implica uma tomada de decisão do professor quanto à organização da aula e do ensino. Viseu e Rocha (2018) constataram que os professores consideram que a integração de materiais tecnológicos na sala de aula favorece um ensino menos expositivo e mais participativo por parte dos alunos.

Apesar de diversos estudos favorecerem a utilização da calculadora gráfica para a aprendizagem dos alunos, Rocha (2002) considera fundamental prestar atenção à forma como os alunos a utilizam. Importa perceber como os alunos utilizam a calculadora gráfica para a sua aprendizagem. Quando os alunos utilizam a calculadora gráfica para validar resultados obtidos analiticamente, aumenta a sua confiança perante a disciplina de Matemática (Fernandes & Vaz, 1998), mas o excesso de confiança origina défice de capacidade crítica nos resultados obtidos com a calculadora gráfica (Romano et al., 2008). Quando uma dada tarefa tem como propósito obter uma generalização de um dado tópico, os alunos realizam um trabalho exploratório com a calculadora gráfica, que segundo Campos et al. (2015), os impele a verbalizar, formular generalizações e validar conjeturas.

A implementação da calculadora gráfica é considerada importante para o estudo das funções dada a sua rapidez de conversão entre representações, além da possibilidade de visualizar os conceitos e assim desenvolver um conceito imagem abrangente (Consciência, 2013). Assim, a utilização deste recurso pode permitir aos alunos ultrapassarem algumas dificuldades existentes com a representação gráfica, que segundo Leinhardt et al. (1990), é uma das maiores dificuldades dos alunos. Conclui-se, assim, que é importante perceber quais as dificuldades dos alunos e como a calculadora poderá colmatar essas dificuldades.

1.3. Estrutura do relatório

Este relatório está organizado em quatro capítulos. No primeiro capítulo, designado por Introdução, apresenta-se o tema, o objetivo e as questões de investigação, a pertinência do estudo e uma breve apresentação da estrutura do relatório.

No segundo capítulo, designado por Enquadramento Contextual e Teórico, apresenta-se a caracterização da escola e da turma onde foi implementada a minha prática pedagógica, a fundamentação teórica que sustenta este estudo, as metodologias de ensino e aprendizagem que orientaram a minha prática pedagógica e as estratégias de avaliação desta prática.

No terceiro capítulo, designado por Intervenção Pedagógica, encontram-se algumas ilustrações de momentos de ensino e aprendizagem da minha prática pedagógica. São analisadas algumas respostas dos alunos às tarefas propostas sobre o tópico de funções racionais com recurso à calculadora gráfica. Por fim, a avaliação do ensino ministrado, onde são analisadas as perceções dos alunos relativamente à utilização da calculadora gráfica na aprendizagem de Funções Racionais.

No quarto capítulo, Conclusões, Limitações e Recomendações, apresentam-se e discutem-se os resultados obtidos ao objetivo em estudo, para tal, apresentam-se as respostas às questões de investigação delineadas. Por fim, são reiteradas algumas limitações deste estudo, recomendações para trabalhos futuros e uma breve reflexão pessoal relativamente à realização deste relatório de estágio.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO

Este capítulo encontra-se dividido em três secções. Na primeira secção apresenta-se o enquadramento contextual, tendo como finalidade descrever o contexto em que foi realizada a intervenção pedagógica: a caracterização da escola e a caracterização da turma. Na segunda secção, apresenta-se o enquadramento teórico, tendo como finalidade fundamentar os pressupostos teóricos que sustentam quer a temática deste estudo, quer as metodologias de ensino adotadas. Por fim, na terceira secção, apresentam-se as estratégias de intervenção, com finalidade de clarificar os métodos de recolha de dados utilizados ao longo da intervenção pedagógica, evidenciando momentos da intervenção pedagógica e de avaliar a ação.

2.1. Enquadramento contextual

Nesta secção, encontra-se a caracterização da escola e da turma onde desenvolvi a minha intervenção pedagógica supervisionada.

2.1.1. Caraterização do Agrupamento/Escola

A minha intervenção pedagógica foi realizada no ano letivo de 2019/2020, numa escola sede de um agrupamento de escolas localizada no distrito de Braga, que incorpora o 3.º ciclo do Ensino Básico e o Ensino Secundário. A escola está inserida numa freguesia com características urbanas, integrando diversos espaços, bairros de construção social destinadas a pessoas mais carenciadas economicamente, alguns bairros tradicionais e ainda áreas destinadas à classe média. O agrupamento de escolas está inserido em sete freguesias do concelho de Braga, em que 23% da população, do concelho, reside nestas freguesias. Relativamente às habilitações literárias da população residente nessas freguesias do agrupamento, 20,9% da população tem o Ensino Superior, 1,37% tem o pós-secundário, 15,02% da população possui o secundário, 16,12 realizou o 3.º Ciclo, 12,19 da população terminou o 2.º Ciclo, 18,13% da população concluiu o 1.º Ciclo e 16,28% da população não concluiu nenhum ciclo de escolaridade (Relatório do Agrupamento de escolas, 2020).

O agrupamento de escolas, onde realizei a minha prática pedagógica, foi constituído em 2013, sendo considerado um agrupamento de excelência. Este agrupamento contempla uma oferta formativa diversificada, oferecendo o Pré-escolar, o 1.º, 2.º e 3.º ciclos do Ensino Básico e o Ensino Secundário, atribuído em 14 escolas.

A orientação das atividades pedagógicas do Agrupamento rege-se por um Projeto Educativo, tendo como lema 'percursos com futuro', que visa ter presente no contexto educativo a valorização do percurso escolar, a diversidade de opções, a verticalidade formativa, a individualidade do projeto de vida de cada criança, jovem ou adulto. Visa, ainda, a intenção de promover a construção de caminhos orientados para o futuro, construindo percursos inclusivos e diversificados orientados para a valorização de uma cultura de conhecimento, de formação integral e de uma cidadania ativa.

O agrupamento de escolas é orientado por critérios de qualidade e de excelência educativa, isto é, a capacidade de potenciar as expectativas e motivações de todos os alunos que frequentam o agrupamento, intervindo positivamente nos seus projetos de vida, tendo, assim, dois pressupostos: (i) *Mais Escola*, respondendo às necessidades de todos os alunos, promovendo a igualdade, a inclusão e a participação; (ii) *Melhor Escola*, assumindo uma cultura de excelência e exigência, de rigor e superação.

Os princípios e valores estão bem definidos no agrupamento, promovendo e desenvolvendo uma educação de qualidade e orientando a ação pedagógica. A planificação de atividades letivas e não letivas assenta nos seguintes princípios: (i) *Base Humanista*, centraliza a ação educativa na pessoa e na relação com a sociedade e o mundo que habitamos; (ii) *Saber*, prioriza o saber, desenvolvendo nos alunos um espirito crítico para que intervenham com responsabilidade na sociedade; (iii) *Aprendizagem*, capacita nos alunos a necessidade de aprender ao longo da vida, valorizando a aprendizagem como processo e não como fim; (iv) *Inclusão,* igualdade e equidade no acesso e no sucesso, nos diferentes percursos dos jovens, ao longo da escolaridade obrigatória e desenvolvendo práticas no âmbito da inclusão; (v) *Coerência e Flexibilidade,* incentiva uma gestão flexível do currículo e do trabalho colaborativo dos alunos, professores e educadores; (vi) *Adaptabilidade e Ousadia*, consciência da mutabilidade social e tecnológica, mobiliza conhecimentos ao enfrentar desafios; (vii) *Sustentabilidade,* atenção e alerta para a problemática da sustentabilidade social e ambiental; (viii) *Estabilidade,* recurso a práticas pedagógicas que contemplam o ritmo de aprendizagem de cada aluno. Tendo em conta estes princípios e valores, o agrupamento promove metodologias de trabalho de projeto, de reflexão e pesquisa, que promovam uma aprendizagem ao longo da vida, uma cultura de diálogo entre a comunidade educativa e a participação da sociedade civil.

A organização e funcionamento do agrupamento de escolas é constituído por quatro órgãos. O Órgão de Direção Estratégica, onde está inserido o Conselho Geral, que é constituído por sete representantes do pessoal docente, dois representantes do pessoal não docente, quatro representantes dos encarregados de educação, três representantes da autarquia, três representantes da comunidade e dois representantes dos alunos. O Órgão de Administração e Gestão, onde está inserido o Diretor, é constituído por um subdiretor, três adjuntos do diretor, assessorias técnico pedagógicas, o Conselho de Coordenadores de Estabelecimento, treze coordenadores de unidade educativa, Associações de País e Encarregados de Educação; Associações de Estudantes; Autarquias; Parceiros locais e Conselho coordenador de avaliação do pessoal não docente; Coordenadores dos AO. O Órgão de Coordenação e Supervisão Pedagógica e Orientação Educativa, onde está inserido o Conselho Pedagógico, é constituído pelo Diretor, doze coordenadores de departamentos curriculares, coordenador dos diretores de turma, coordenador dos percursos de formação qualificante e de formação de adultos, coordenador dos serviços especializados de apoio educativo, coordenador das bibliotecas escolares e dos projetos e, por fim, as secções especializadas. O Órgão deliberativo em Matéria Administrativo Financeira, inserido no Conselho Administrativo, é constituído pelo diretor, subdiretor e pelo chefe dos serviços de administração escolar.

A oferta formativa do agrupamento de escolas é frequentada por cerca de 3282 alunos, fazendo com que este agrupamento seja um dos maiores do país e um dos agrupamentos que disponibilizam uma oferta formativa mais ampla e diversificada. Ao nível da Educação Pré-Escolar e do 1.º Ciclo, o agrupamento é constituído por seis escolas, distribuídas em seis freguesias, contando com cerca de 696 alunos. O 2.º e 3.º ciclos estão em duas escolas, com um total de 951 alunos. Relativamente ao ensino secundário, inserido na escola referida anteriormente com o 3.º ciclo e onde realizei a minha prática pedagógica, conta com 1300 alunos a frequentar os Cursos Científico-Humanísticos e com 335 alunos a frequentar os cursos profissionais diurnos e noturnos.

As funções docentes deste agrupamento são asseguradas por um grupo estável e experiente de profissionais, sendo privilegiada a continuidade letiva, em todos os níveis de ensino. Esta mais-valia potência uma ação educativa contínua, integrada e articulada, tendo resultados evidentes de um bom sucesso escolar. A população docente, segundo os dados de outubro de 2019, está distribuída por 340 docentes, dos quais 270 docentes pertencem ao Quadro do agrupamento, 43 docentes pertencem ao quadro da Zona Pedagógica e 27 docentes são contratados. Já o pessoal não docente encontra-se numa modalidade estável, tendo um vínculo de carácter duradouro. O agrupamento conta com 103 pessoas não docentes que estão divididos por duas categorias: Assistente Técnico e Assistente Operacional.

A escola onde realizei a minha prática pedagógica foi criada em 1884, apesar de só um ano depois ter sido inaugurada. Começou por ser uma escola de desenho industrial, passando em 1914 a contemplar o curso Elementar de Comércio, curso de Carpinteiro e Marceneiro e o curso de Costura e Bordados. Com o aumento dos alunos, em 1948, houve a criação de duas escolas, a escola Técnica Elementar e a Escola Industrial e Comercial. Em 1951, as duas escolas voltam a fundir-se com a designação de Escola Comercial e Industrial. A construção de um novo edifício iniciou-se em 1953, no local onde ainda hoje se encontra a escola, tendo sido inaugurada em 1958. A partir do ano de 1978 adotou uma nova designação até à presente data.

A escola apresenta resultados de excelência nas opções de prosseguimento de estudos. A última avaliação externa comprova que a escola é uma referência no ensino público do concelho. A escola dispõe de instalações e equipamentos de qualidade para o desenvolvimento do seu Projeto Educativo, no que respeita a espaços de aprendizagem, serviços educativos e espaços de lazer e convívio.

A escola oferece, ao nível do Ensino Secundário, no curso Científico-Humanístico, quatro áreas distintas: Ciências e Tecnologias; Línguas e Humanidades; Artes Visuais; e Ciências Socioeconómicas, oferecendo aos alunos a opção de Mandarim como língua estrangeira na sua formação. A escola também apresenta o curso de Educação e Formação de Adultos, podendo frequentar a área Científico - Humanístico, Ciências e Tecnologias e Línguas e Humanidades. A escola é considerada uma escola de referência de ensino secundário recorrente (ERESR), presenteando cursos profissionais (Nível 4), sendo eles: Técnico de Programador de informática; Técnico de Eletrónica, Automação e Comando; Técnico de Produção em Metalomecânica – Programação e Maquinação; Técnico de Desporto; Técnico de Design; Técnico de Obra. Os alunos para frequentarem estes cursos terão de ter concluído o 9.º ano de escolaridade e não poderão ter mais do que 20 anos de idade. Os alunos destes cursos podem contar com subsídio de alimentação, subsídio de transporte, subsídio de estágio/formação em contexto de trabalho e de formação com empregabilidade.

Ao longo do ano letivo, a escola apresenta diversas atividades e projetos. Destas atividades, destacam-se as Olimpíadas da Matemática, Sala da Matemática, o Clube de Matemática, o Clube de Robótica, a Oficina de Matemática, Programa Erasmus+, Clube de Artes Visuais, Clube de Xadrez, Canguru Matemático sem Fronteiras, Oficina de Teatro, o Parlamento Jovem, clube de Línguas Estrangeiras, o Projeto do Desporto Escolar, entre outras.

2.1.2. Caraterização da Turma

O desenvolvimento da minha intervenção pedagógica supervisionada foi realizado numa turma do 11.º ano do curso de Ciências e Tecnologias. Esta turma, inicialmente era composta por vinte alunos, mas devido a desistências logo no início do ano letivo a turma foi reduzida para dezasseis alunos. No início do 2.º período, um aluno foi transferido para esta turma, vindo de outra escola do concelho de Braga, assim, quando implementei este estudo, a turma contava com dezassete alunos, dos quais treze rapazes e quatro raparigas. As idades dos alunos variavam entre os 16 e os 18 anos, treze alunos tinham 16 anos, três alunos tinham 17 anos e um aluno tinha 18 anos.

Os alunos desta turma provêm de famílias de classes económicas média e alta, uma vez que, apenas quatro alunos beneficiam de ação social educativa (ASE), três de escalão B e um aluno de escalão A. As habilitações literárias dos pais dos alunos desta turma são diversificadas, mais de metade dos pais tem formação superior (Tabela 1). A maioria dos pais encontra-se a trabalhar, havendo um pai desempregado e um pai aposentado.

Tabela 1. Habilitação literária dos pais dos alunos da turma ($n = 32$)

	Pai	Mãe	Percentagem
1.º Ciclo	1	-	3,01%
2.º Ciclo	2	-	6.1%
3.º Ciclo	3	4	21,2%
Ensino Secundário	4	2	18,18%
Ensino Superior	7	10	51,51%

Para conhecer melhor a turma e os alunos, apliquei um Questionário Inicial (Anexo 2), ao qual todos os alunos responderam. Da análise da informação recolhida por este questionário conclui-se que apenas quatro alunos destacam a Matemática como a disciplina preferida, como exemplifica a afirmação de um deles: "A minha disciplina preferida é Matemática porque é uma disciplina desafiadora". Uma das disciplinas mais mencionada pelos alunos como preferida foi Geometria Descritiva. A disciplina em que os alunos revelam sentir mais dificuldades é na Físico–Química, enquanto a Matemática é referida por cinco alunos.

Os alunos desta turma já pensam no seu futuro académico, todos eles pretendem realizar o Ensino Superior: catorze alunos pretendem seguir áreas das engenharias; um aluno ambiciona ser piloto, outro ser deputado e um aluno quer ingressar no curso de designer de interiores.

A turma, ao longo do ano letivo, pautou-se por um ótimo comportamento e apresentou-se dedicada na realização das tarefas propostas. Porém, os alunos manifestaram receio de falar, o que se traduziu numa diminuta participação nas atividades da sala de aula. A maioria dos alunos revelou ter uma boa capacidade de raciocínios. Os alunos com mais dificuldades raramente expunham as suas dúvidas, tornando-se difícil ajudá-los. Em termos de desempenho, a turma possuía diversos níveis de aprendizagem, variando entre o nível satisfatório e o nível muito bom. No geral, não tinha alunos com desempenho insatisfatório, contendo alunos maioritariamente de nível satisfatório, onde as classificações variaram entre os 10 e os 13 valores (Tabela 2).

Tabela 2. Desempenho dos alunos no 10.º e 11º. anos de escolaridade ($n = 17$)

	10.º ano	11.º ano		
	Final	1.º Período	2.º Período	3.º Período
Média	14,12	12,76	14,53	14,53
Nível MB (17-20)	5	1	5	5
Nível B (14-16)	3	5	5	5
Nível S (10-13)	9	10	7	7
Nível I (0-9)	0	1	0	0

Nota: Nível Muito Bom (MB); Nível Bom (B); Nível Satisfatório (S); Nível Insuficiente (I).

No ano letivo anterior, no 10.º ano de escolaridade, havia um aluno repetente. A média final de aproveitamento dos alunos nesse ano letivo foi de nível bom, de aproximadamente 14,12 valores. A classificação mais baixa da turma no 10.º ano foi de 11 valores e a classificação mais alta foi de 19 valores. Relativamente a este ano letivo, no 11.º ano de escolaridade, apenas no 1.º período houve um aluno que obteve 9 valores, considerado de nível insatisfatório. Este aluno melhorou a sua classificação nos períodos seguintes, atingindo o nível satisfatório. Todos os alunos frequentavam pela primeira vez o 11.º ano. No final deste ano de escolaridade, três alunos obtiveram a classificação mais alta da turma, 18 valores, e um aluno obteve a classificação mais baixa da turma, 10 valores. A média final da turma, neste ano letivo, foi de 14,53 valores, significando uma ligeira subida relativamente ao ano anterior.

As classificações ao longo dos períodos podem ser influenciadas pelas preferências dos temas abordados. Deste modo, através do questionário inicial, apurei que um dos temas mais apreciados pelos alunos foi Geometria (11 alunos), por considerarem que integra tópicos mais fáceis, concretos e práticos, havendo a possibilidade da sua visualização. Relativamente aos temas que apreciam menos, os alunos mencionaram as Funções (8 alunos), por integrar tópicos mais difíceis devido à sua natureza simbólica.

Algumas questões do Questionário inicial tinham como intuito analisar as perspetivas dos alunos acerca do tópico de Funções e sobre a utilização da calculadora gráfica. Analisando a relação dos alunos com a aprendizagem de Funções, conclui-se que 31% dos alunos consideram ter muitas dificuldades neste tema, 44% dos alunos não se sentem à vontade com o tema, mas não consideram ter muitas dificuldades, e 25% dos alunos consideram-se à vontade com este tema. Cerca de 65% dos alunos consideram o tópico de Funções importante, indicando que é um tema base da Matemática e que tem diversas aplicações no quotidiano.

Relativamente à utilização da calculadora gráfica, 82% dos alunos refere que aprenderam conceitos de Funções com utilização da calculadora gráfica no ano anterior. Apenas quatro alunos desta turma apontam algumas desvantagens da utilização da calculadora gráfica na aprendizagem de conceitos de Funções. Dois alunos referiram que ao utilizar a calculadora gráfica pode-se tornar uma dependência, não conseguindo resolver situações sem recurso à mesma. Um aluno referiu que o custo de aquisição de uma calculadora gráfica é elevado. Outro aluno mencionou que a informação retirada pela calculadora pode induzir a erros, tal como a não adequação da janela de visualização. Todos os alunos apontaram vantagens na utilização da calculadora gráfica na aprendizagem de Funções, destacando-se a possibilidade de visualização da representação gráfica das funções, sendo mais fácil estudar características de uma dada função através da análise da sua representação gráfica.

Dos diversos métodos de ensino, os alunos mostram preferências na transmissão dos conteúdos pelo professor e na resolução de exercícios do manual. O método menos escolhido pelos alunos foi ser os alunos a estabelecer as definições, regras e propriedades (12%), características de um ensino exploratório.

Tabela 3- Preferência dos alunos relativamente aos métodos de ensino $(n = 17)$

Métodos	**Frequência**	**%**
Transmissão da matéria pelo professor.	13	76
Resolver problemas relacionados com situações do quotidiano.	9	53
Realizar trabalhos com colegas, em pares ou em grupo.	9	53
Resolver exercícios do manual escolar.	11	65
Ser o aluno a estabelecer as definições, regras e propriedades.	2	12
Resolver exercícios/ problemas com recurso à calculadora gráfica.	8	47
Discutir os processos de resolução de tarefas.	10	59
Outros.	1	6

Pela análise da Tabela 3, os alunos desta turma preferem um ensino tradicional, em que apenas o professor expõe a matéria e depois realizam exercícios do manual, mostrando, assim, que esta turma não está habituada a trabalhar segundo as estratégias de um ensino exploratório. Cerca de 59% dos alunos referiram preferir discutir os processos de resoluções das tarefas. Os alunos manifestaram alguma preferência (53%) na resolução de problemas relacionados com situações do quotidiano e na realização de tarefas com os colegas, em pares ou em grupos. Já 47% dos anos preferem um ensino com recurso à calculadora gráfica, manifestando interesse na resolução de exercícios/ problemas com recurso à mesma. Ainda houve um aluno que escolheu outro método de ensino que não estava descrito no questionário, referindo que prefere a resolução de problemas com diversas resoluções, não gostando de exercícios que sejam de apenas aplicação da matéria.

2.2. Enquadramento Teórico

Este subcapítulo debruça-se sobre o enquadramento teórico deste estudo, dividindo-se em três partes. A primeira parte é dedicada ao tópico lecionado na intervenção pedagógica, as funções racionais no currículo escolar. Na segunda parte, o foco é a utilização da calculadora gráfica no ensino e na aprendizagem de funções. A última parte apresenta as dificuldades dos alunos na aprendizagem de funções através da utilização da calculadora gráfica, segundo os resultados de alguns estudos.

2.2.1. As funções racionais no currículo escolar

O estudo das funções sempre foi importante no ensino da Matemática, seja pelo facto de estar associado a outros conceitos e ao desenvolvimento do pensamento abstrato dos alunos, ou pela forma como contribui para entender situações do quotidiano, modelando fenómenos e resolvendo problemas (Rocha & Viseu, 2018). De forma a motivar a aprendizagem dos alunos e a proporcionar uma melhor compreensão dos conceitos, o professor deverá enquadrar de um ponto de vista histórico os conteúdos abordados (MEC, 2013). Neste sentido, torna-se importante entender a evolução histórica do conceito de função e analisar o estudo das funções no currículo português.

2.2.1.1. Evolução histórica do conceito de função

Para contextualizar o tópico de funções racionais, importa efetuar uma breve análise histórica da evolução do conceito de função. O conceito de função foi-se expandido ao longo dos tempos por diferentes conceções: a conceção algébrica; a conceção geométrica; a conceção atual do conceito de função (Kleiner, 1989; Raorong, 2017).

O desenvolvimento do conceito de função surgiu em 1665, por Newton, onde começou por estabelecer alguma relação entre variáveis (Insook, 1999), mas em 1667 o matemático Gregory definiu uma função como uma quantidade obtida por sucessivas operações algébricas (Raorong, 2017). Posteriormente, em 1694, John Bernoulli iniciou os estudos sobre o processo de movimento e a relação de dependência entre variáveis nesses movimentos (Raorong, 2017), porém em 1697 introduziu a definição do termo função por uma conceção algébrica, isto é, através de uma expressão analítica (Bueno & Viali, 2009).

A conceção geométrica do conceito de função apareceu entre 1692 e 1694, onde a função era caracterizada como qualquer segmento de reta obtido na construção de infinitas linhas retas correspondentes a um ponto fixo e a pontos de uma determinada curva (Bueno & Viali, 2009). Em 1673, Leibniz introduziu o termo 'função' apenas para designar a dependência de uma curva de quantidades geométricas como as subtangentes e subnormais à curva, introduzindo também as termologias de 'constante', 'variável' e 'parâmetro' (Ponte, 1990). Entre 1694 e 1698, Leibniz e Bernoulli sentiram a necessidade de introduzir um termo para representar quantidades dependentes de alguma variável por meio de uma expressão analítica. Assim, a palavra 'função' foi adaptada, aparecendo a definição de função de uma variável como uma quantidade composta, de qualquer forma, por uma variável e por constantes, em 1718 por Bernoulli (Kleiner, 1989; Ponte, 1990). O matemático Euler, em 1748, foi o responsável pelos avanços mais significativos no desenvolvimento do conceito de função (Bueno & Viali, 2009) e por retificar a definição de Bernoulli, substituindo 'quantidade' por 'expressão analítica' (Ponte, 1990).

A conceção atual do conceito de função aparece com o estudo de Euler, onde definiu uma constante como sendo uma quantidade definitiva, que assume sempre o mesmo valor, uma variável como um valor indeterminado que compreende todos os valores determinados e uma função de uma variável como uma expressão analítica composta por quantidades variáveis e números ou quantidades constantes (Bueno & Viali, 2009). Em 1775 Euler denotou uma função por $f(x)$ e Lagrange, em 1797, apresentou a sua definição de função, através da notação 'F' ou 'f' (Raorong, 2017), entendendo que as séries de potências seriam importantes para compreender o estudo de funções, tal como no cálculo diferencial e integral (Bueno & Viali, 2009). Em 1806, Lagrange definiu função como uma combinação de operações (Insook, 1999).

Em forma de síntese, o Quadro 1 apresenta a evolução do conceito de função ao longo dos séculos XVII e XVIII, em que o conceito de função foi definido como uma quantidade, operação, fórmula, expressão ou relação (Insook, 1999).

Quadro 1 Evolução do conceito de Função ao longo dos séculos XVII e XVIII (Insook, 1999)

Ano	**Matemático**	**Definição de Função**
1665	Newton	Relação entre variáveis
1667	Gregory	Uma quantidade obtida de outras quantidades, obtida por operações algébricas ou por qualquer outra operação imaginária.
1673	Leibniz	Qualquer quantidade variando ponto a ponto de uma curva.
1697	Bernoulli	Quantidades usando expressões algébricas e transcendentes de variáveis e constantes.
1714	Leibniz	Quantidades que dependem de uma variável.
1718	Bernoulli	Função de uma determinada variável como uma quantidade, que é composta por variáveis e constantes.
1748	Euler	Fórmula ou expressão analítica composta a partir dessa quantidade variável e, números ou quantidades, constantes que representam a relação entre variáveis.
1755	Euler	Se x denota uma quantidade variável, então todas as quantidades, que dependem de x ou que são determinados por x, são chamadas de funções.
1797	Lagrange	Qualquer expressão, que é útil para o cálculo, em que as variáveis entram de qualquer maneira.
1806	Lagrange	Uma combinação de operações que devem ser realizadas em quantidades para obter os valores das quantidades desconhecidas.

Pelas definições estabelecidas no Quadro 1 surgiu a necessidade de haver uma separação entre funções contínuas e descontínuas mais clara, pois, segundo Euler, uma função contínua é determinada por uma expressão analítica em todo o seu domínio, caso contrário seriam funções descontínuas (Bueno & Viali, 2009), resultando em alterações no conceito de função. Uma função também poderia ser representada por diversas expressões analíticas diferentes, assim, foram encontradas limitações e incoerências no conceito de função. Deste modo, os séculos XIX e XX (Quadro 2) foram fulcrais no desenvolvimento do conceito de função como uma correspondência arbitrária entre quaisquer conjuntos (Ponte, 1990).

Quadro 2 - Evolução do conceito de função ao longo dos séculos XIX e XX (Insook, 1999)

Ano	**Matemático**	**Definição de Função**
1829	Dirichlet	y é uma função de variável x, definida no intervalo $a < x < b$, que para qualquer valor da variável x, neste intervalo, corresponde a um valor de y. Sendo irrelevante como a correspondência é estabelecida.
1917	Carantherdory	Há a correspondência de um conjunto A para os números reais.
1939	Bourbaki	Há a correspondência entre dois conjuntos.
1939	Bourbaki	Sejam E e F dois conjuntos, não necessariamente distintos. A relação entre a variável x do conjunto E e a variável y do conjunto F é designada por relação funcional em y se, para todo x em E, existe um único y em F que esteja na relação considerada com x.
Até ao final século XX	Dirichlet/ Bourbaki	Qualquer correspondência entre dois conjuntos que atribui a cada elemento do seu domínio exatamente um elemento no intervalo

No início do século XIX, Cauchy provou o quão inadequadas são as definições propostas por Euler, de funções contínuas e descontínuas (Bueno & Viali, 2009), definindo rigorosamente os conceitos de continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade de uma função, em 1821 (Kleiner, 1989).

Ao estudar a teoria da propagação do calor, Fourier considerou a temperatura como uma função de duas variáveis, o tempo e o espaço, conjeturando que qualquer função seria possível obter um desenvolvimento em série trigonométrica, hoje designada de série de Fourier (Bueno & Viali, 2009; Ponte, 1990). Fourier destacou-se na evolução do conceito de função, pois estudou a convergência de séries e mostrou que o conceito de descontinuidade de Euler não era válido através da série de Fourier (expressão analítica, o que segundo Euler era contínua) (Kleiner, 1989).

Dirichelet, em 1829, ao analisar o trabalho desenvolvido por Fourier, foi o primeiro a facultar um exemplo, $D(x) = \begin{cases} c, se\ x\ \text{é}\ racional \\ d, se\ x\ \text{é}\ irracional \end{cases}$, de uma função (função de Dirichelet) que não era dada por uma expressão analítica, nem por uma curva desenhada. Esta função de Dirichelet é descontínua em todos os pontos e ilustra uma função de correspondência arbitrária, ver Quadro 2 (Kleiner, 1989).

Em 1890 Hilbert definiu uma função racional como uma forma algébrica em certas variáveis, mas o estudo das funções racionais vem desde 1704, quando Stirling iniciou o estudo da determinação de assíntotas ao gráfico de funções racionais $(y = \frac{f(x)}{g(x)})$, mostrando que para determinar as assíntotas verticais ao gráfico bastava igualar $g(x)$ a zero (Boyer, 2012).

No século XX foi introduzida a correspondência arbitrária entre quaisquer conjuntos, numéricos ou não (Ponte, 1990). Em 1917, Caratheodory definiu função como regra de correspondência de um conjunto para os números reais, mas em 1939 Bourbaki definiu função como regra de correspondência entre dois conjuntos (Insook, 1999). A meados do século XX, Dirichelet e Boubaki definiram uma função como uma correspondência entre dois conjuntos que atribui a cada elemento do domínio exatamente um elemento no intervalo (Insook, 1999).

2.2.1.2. O estudo de funções no currículo

As funções são um tópico central no ensino da Matemática, quer no currículo do Ensino Básico e Secundário, quer no Ensino Superior, nas unidades curriculares de Cálculo Diferencial e Integral (Trevisan et al., 2020). Em Portugal, o tópico de funções, segundo o Programa e Metas Curriculares em vigor, é abordado pela primeira vez no 7.º ano de escolaridade, tendo continuidade até ao final da escolaridade obrigatória. Apesar de no 3.º ciclo aparecer pela primeira vez as *Funções, Sequências e Sucessões*, no 2.º ciclo no domínio dos conteúdos *Organização e Tratamento de Dados* são iniciadas as bases para a aprendizagem do tópico de funções: "é o momento ideal para se introduzir a noção de gráfico cartesiano de uma correspondência, que será naturalmente revisitada com mais profundidade no 3.º ciclo no contexto das Funções" (MEC, 2012, p. 14). No 3.º ciclo dá-se a introdução formal do conceito de função, ao realizar o estudo do conceito de função, numa perspetiva algébrica, surgindo as operações entre funções numéricas, sendo consideradas as funções de proporcionalidade direta, inversa, funções afins e quadráticas (MEC, 2012).

A aprendizagem do conceito de função é iniciada no 7.º ano, conhecendo as primeiras famílias de funções, as funções constantes, linear e afins. Nesse ano de escolaridade é esperado que os alunos saibam definir funções numéricas, bem como operar com funções, definir funções de proporcionalidade direta e resolver problemas envolvendo funções de proporcionalidade direta em diversos contextos (MEC, 2012).

O primeiro contacto com os gráficos cartesianos de funções é no 8.º ano de escolaridade, é esperado que os alunos consigam identificar as equações das retas do plano, isto é, gráficos de funções afins, determinar expressões algébricas de funções afins, dados dois pontos do seu respetivo gráfico, e resolver problemas de diversos contextos (MEC, 2012). Assim, neste ano, os alunos adquirem os conhecimentos necessários na determinação de equações verticais e não verticais, com a determinação do declive e a ordenada na origem.

A introdução da definição de funções de proporcionalidade inversa é realizada no 9.º ano de escolaridade, em que é esperado que os alunos reconheçam a função de proporcionalidade inversa, saibam que o gráfico desta função é uma curva designada por 'ramo de hipérbole', resolvam problemas envolvendo funções de proporcionalidade inversa e saibam interpretar graficamente soluções de equações de segundo grau (MEC, 2012). É neste ano de escolaridade que os alunos entram em contacto com uma nova família de funções, as funções quadráticas, do tipo $y = ax^2, a \neq 0$.

Na transição do ensino básico para o ensino secundário, o tópico de Funções ganha um especial relevo no programa em vigor, tornando-se um dos tópicos centrais no enino secundário. No 10.º ano de escolaridade, os alunos entram em contacto com algumas generalidades acerca de funções reais de variável real, onde os alunos devem definir a composição de funções, função inversa e bijetiva, relacionar propriedades geométricas dos gráficos com as propriedades das respetivas funções, identificar intervalos de monotonia de funções, identificar extremos de funções e estudar funções elementares (função quadrática, cúbica, radicais quadrados e cúbicos, módulo e definida por ramos) e efetuar operações algébricas sobre funções (MEC, 2013).

No 11.º ano de escolaridade, são utilizados os conceitos do tópico das Sucessões para introduzir a noção do limite segundo Heine e posteriormente é introduzido o estudo da derivada de uma função (MEC, 2013). A aprendizagem do limite segundo Heine apresenta-se dividida nos seguintes objetivos: (i) Definir limite de uma função num ponto e estudar as respetivas propriedades fundamentais; (ii) Definir a noção de continuidade e as respetivas propriedades fundamentais; (iii) Definir assíntotas ao gráfico de uma função; (iv) Resolver problemas. Já o estudo das derivadas apresenta-se dividida pelos seguintes objetivos: (i) Definir a noção de derivada; (ii) Aplicar a noção de derivada à cinemática do ponto; (iii) Operar com derivadas; (iv) Aplicar a noção de derivada ao estudo de funções; (v) Resolver problemas.

O estudo de funções racionais inicia-se no 11.º ano, mas para tal são necessários alguns conhecimentos prévios que são trabalhados no 10.º ano de escolaridade. Assim, para iniciar o tópico de funções racionais é necessário saber algumas noções e operações de polinómios, tais como: soma, subtração, multiplicação e divisão entre polinómios. A função racional é uma função real de variável real dada por uma expressão da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, com P e Q polinómios, em que Q não poderá ser um polinómio nulo. O estudo das funções racionais é realizado através da resolução de problemas, envolvendo o estudo dos zeros e o sinal de funções racionais (MEC, 2013). É esperado que os alunos interpretem graficamente funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ e estabeleçam a noção intuitiva de assíntotas do gráfico de uma dada função (MEC, 2013).

O estudo do tópico de funções é extenso no 12.º ano, onde é realizado o estudo de funções reais de variável real, funções trigonométricas, funções exponenciais e funções logarítmicas. Neste ano de escolaridade é iniciado o contacto com o cálculo diferencial, onde é abordado a noção de primitiva de uma função. Apesar de no 11.º ano ser realizado o estudo do limite e continuidade, este estudo é complementado no 12.º ano e estendido à derivada de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades, pontos de inflexão de funções e aplicações do cálculo diferencial na resolução de problemas (MEC, 2013).

Como referido anteriormente, as bases para a introdução da noção de função são realizadas no 2.º ciclo, mas Ponte (1990) afirma ser possível esta introdução ser realizada no primeiro ciclo, tais como, por diagramas sagitais, pela introdução da ideia de máquina de transformação, entre outras. Para este autor esta introdução poderá colmatar dificuldades posteriores, dado que os alunos quando se deparam com a noção de função, no 7.º ano, têm muitas dificuldades no raciocínio abstrato. Para ultrapassar tais dificuldades, o ensino das funções deverá articular a representação numérica, a representação gráfica e a representação algébrica (Ponte, 1990). Este autor refere que o tópico das funções pode ser visto como três aspetos essenciais: (i) natureza algébrica ou funcional; (ii) generalidade do conceito; (iii) aplicação a problemas e situações reais. Já Leinhardt et al. (1990) afirmam que o estudo das funções pode ser centrado no estudo do seu conceito e no estudo do seu gráfico. Para estes autores o estudo das funções e dos seus gráficos são os temas com maior destaque no ensino, permitindo a utilização da linguagem simbólica, e, assim, expandindo os seus conhecimentos. Deste modo, o estudo dos gráficos de funções são os momentos altos da matemática (Leinhardt et al., 1990).

De forma a obter uma boa compreensão do tópico de funções os alunos deverão ter contacto com as diferentes representações (Carvalho et al., 2011). Tal perspetiva emerge nos resultados realizados por Hitt (1998), concluindo que existem níveis para a construção do conceito de função, Nível 1: ideias imprecisas do conceito, mistura de diferentes representações; Nível 2: identificação das diferentes representações; Nível 3: Preservação dos significados de uma representação para outra; Nível 4: Articulação entre diferentes representações; Nível 5: Articulação de diferentes representações na resolução de problemas. Quando os alunos estudam e analisam diversas representações matemáticas, estão perante um conjunto de ferramentas que elevam a capacidade de pensar matematicamente (NCTM, 2007).

Almeida e Oliveira (2009) realizaram um estudo com o objetivo de entender como os alunos de 11.º ano integram a calculadora gráfica, ou seja, como caraterizam o processo de génese instrumental, ao trabalharem com as funções racionais. Estes autores concluíram que os alunos utilizam a calculadora gráfica como auxílio para realizar a conversão da representação algébrica em uma representação gráfica de funções racionais. Com a utilização da calculadora, os alunos, segundo NCTM (2007), deverão ser capazes de interpretar as representações tecnológicas de forma criteriosa e eficaz.

2.2.2. A calculadora gráfica no ensino de Matemática

Ao longo dos anos, a evolução tecnológica tem vindo a ser gigantesca, e cada vez mais os currículos de matemática fazem luz à utilização da tecnologia na sala de aula. Com o aparecimento da pandemia em 2020, surgiram as aulas online, havendo a necessidade de estabelecer experiências de ensino com recurso às tecnologias de ensino e aprendizagem, tornando o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos mais significativa (Marpa, 2021). É-me pertinente esta subsecção uma vez que este estudo, para além de ser sobre a utilização da calculadora gráfica nas atividades de ensino e de aprendizagem, reflete a minha intervenção pedagógica norteada por aulas online.

Ao longo dos tempos a calculadora gráfica tornou-se indispensável no estudo de diversas áreas, destacando-se no ensino da Matemática. As calculadoras gráficas "tornaram-se cada vez mais sofisticadas, mais acessíveis e de fácil portabilidade" (Fernandes et al., 2006, p. 303). A potencialidade de uma calculadora gráfica ainda não se assemelha às do computador, mas cada vez mais desempenha diversificadas funcionalidades. Segundo Borba (1999), "as calculadoras gráficas podem ser vistas como computadores munidos de alguns aplicativos e que (ainda) não têm capacidade de comunicação" (p. 18).

Há muitos anos que o ser humano sentiu necessidade de realizar contagens, considerando-se a primeira contagem feita pelos dedos (Soares, 2016). Paulatinamente, surgiram instrumentos para realizar essa contagem, como é o caso do ábaco, da régua de cálculo e da primeira máquina de calcular (Soares, 2016). Segundo Sarmiento (1997), a origem do ábaco é desconhecida, apenas se sabe que a forma do ábaco que hoje conhecemos apareceu na China no século XII, havendo alguns desenvolvimentos e aperfeiçoamentos ao longo dos anos. A primeira régua de cálculo surgiu em 1650, elaborada por Edmund Gunter e William Oughtred e em 1642, o francês Blaise Pascal inventou a máquina de calcular (Sarmiento, 1997). A primeira calculadora mais comercializada surgiu em 1893, mas só em 1985 a Casio apresenta a primeira calculadora gráfica, a fx-7000G (Greenwald & Thomley, 2013).

A evolução desde 1985 das calculadoras gráficas tem sido enorme e certamente não irá terminar aqui, desde a portabilidade, peso, resolução dos écrans, entre outras. As calculadoras gráficas começaram a ir mais além das abordagens das múltiplas representações de funções ou tratamentos de dados. Recentemente integraram ferramentas de geometria dinâmica, folhas de cálculo interativos, sistemas de cálculo algébrico simbólico (CAS) e ferramentas de recolha e tratamento de dados em tempo real através de sensores (Domingos, 2017).

Ao longo dos anos, a utilização da calculadora gráfica tornou-se imprescindível no ensino da Matemática, mas não substituindo o papel e lápis. A introdução da calculadora gráfica no ensino da Matemática, em Portugal, começou por ser discutida em 1988. Só no ano letivo de 1997/1998 a utilização da calculadora gráfica foi obrigatória no Programa de Matemática para o 10.°, 11.° e 12.° anos de escolaridade (ME, 1997). No Quadro 3., encontra-se a evolução da integração da calculadora gráfica nos programas de Matemática.

Quadro 3 - Integração da calculadora no currículo português desde 1988 até 2018.

Ensino / Ano	Ensino Básico	Ensino Secundário
1988	Os alunos de todos os anos devem poder utilizar uma calculadora nas aulas de matemática. Assim, todos os alunos devem ter à disposição uma calcadora. A partir do 10.° ano será utilizada uma calculadora científica (APM, 2009).	
1991	A calculadora deverá ser utilizada, uma vez que desenvolve aptidões de cálculo, bem como incentiva a pesquisa (MEa, 1991; MEb, 1991).	A utilização da calculadora científica obrigatória, além de ferramenta é fonte de atividade, investigação e aprendizagem (MEc, 1991).
1997		A utilização da calculadora gráfica é obrigatória. Considerando fundamental a calculadora com "view-screen". (ME, 1997)
2001	Os alunos devem utilizar quer calculadoras elementares, quer calculadoras científicas e gráficas conforme a evolução do aluno (MEa, 2001).	Utilização da calculadora gráfica em diversas abordagens, considerando imprescindível o seu uso, quer para trabalho regular, quer para demonstrações para todos os alunos, utilizando calculadora com "view-screen". (MEb, 2001)
2002		Orientações metodológicas com recurso à calculadora gráfica nos tópicos abordados ao longo do ensino Secundário.
2007	Os alunos devem saber utilizar a calculadora, apesar de não poder substituir o cálculo mental.	
2013	O uso da calculadora só é expressamente recomendado em anos avançados, e havendo boa justificação de utilização (MEC, 2012).	Apesar de bem justificada, a utilização da calculadora gráfica deve ser utilizada na sala de aula e nos instrumentos de avaliação (MEC, 2013). Mas é obrigatório que os alunos saibam utilizá-la (MEC, 2013).
2018	Nas Aprendizagens Essenciais, só a partir do 4.° ano é sugerida a utilização da calculadora, principalmente na resolução de problemas e também na representação e tratamento de dados.	As aprendizagens essenciais só mencionam a utilização da calculadora gráfica no estudo da estatística, no 11.° ano (MEC, 2018).

Como se constata no Quadro 3, a evolução da integração da calculadora gráfica no ensino tem vindo a ser muito discutida, na forma como esta é implementada na sala de aula. Pois, a utilização da calculadora no ensino tem vindo a ser alertada a uma utilização adequada. Já em 1988, este alerta emergiu:

> a calculadora pode ser bem ou mal usada. Não faltam anedotas mostrando os alunos a fazer na máquina contas cuja resposta se pode obter mentalmente. Isto significa que os alunos têm de ser ensinados a usar correcta e criticamente as calculadoras. (APM, 2009, p. 60)

Na evolução do currículo da Matemática no Ensino Secundário, já em 1991, a calculadora científica se tornou obrigatória, devendo proporcionar uma facilidade de cálculo, mas também incentivar o espírito de pesquisa. O programa publicado logo depois, em 1997, mantém a ideia do programa anterior, acrescentando que "os alunos devem ter oportunidade de entender que aquilo que a calculadora apresenta no seu écran pode ser uma visão distorcida da realidade" (ME, 1997, p. 11), não podendo esquecer o trabalho teórico. Para tal, o aluno deverá descrever os procedimentos utilizados com a calculadora, bem como o que lhes é apresentado. Em 2001, acresce aos programas anteriores a sugestão de que os alunos devem interpretar o que a calculadora apresenta e não se limitar a copiar o que veem na calculadora. No programa e Metas Curriculares, do Ensino Secundário, em vigor desde 2013, acrescenta que a utilização da calculadora não deverá substituir a compreensão conceptual, aconselhando a uma utilização adequada. Relativamente às Aprendizagens Essenciais, de 2018, apenas sugere a utilização da calculadora gráfica no 11.º ano no estudo da Estatística.

Apesar destas sugestões, para uma utilização cuidada e adequada da calculadora gráfica no ensino, os programas indicam vários benefícios e várias sugestões na sua utilização. No caso da calculadora elementar ou científica, introduz modificações importantes na aprendizagem (MEa, 1991). Como estas calculadoras são acessíveis e baratas, todos os alunos a podem utilizar para realizar cálculos e operações complicadas, para explorar e desenvolver o espírito crítico acerca dos resultados (APM, 2009). Já relativamente à calculadora gráfica que se torna obrigatória em 1997, as orientações curriculares dos programas de 1997 e de 2001 referem vantagens na exploração da calculadora gráfica nas atividades de: (i) abordagem numérica de problemas; (ii) verificação na calculadora as resoluções analíticas de equações e inequações; (iii) resolução gráfica e posterior verificação analítica na resolução de equações e inequações; (iv) modelação e simulação de situações problemáticas; (v) ilustrar conceitos matemáticos; (vi) resolução gráfica de equações e inequações quando esta não é possível analiticamente; (vii) experiência matemática, elaboração e analise de conjeturas; (viii) estudar e classificar diferentes

Funções; (ix) antevisão de conceitos do cálculo diferencial; (x) investigação e exploração de diferentes representações num problema (ME, 1997; MEb, 2001).

Em específico no estudo das Funções, a utilização da calculadora é considerada fundamental para atingir certos objetivos na dimensão gráfica, visto que "essa dimensão só é plenamente atingida quando os alunos traçam grandes quantidades e variedades de gráficos com apoio de tecnologias adequadas (calculadoras gráficas e computadores)" (ME, 1997, p. 10). As orientações deste programa sugeriam ainda a utilização da mesma no estudo e classificação do comportamento de diferentes classes de funções. Fazendo luz à utilização da calculadora gráfica, no 11.º ano, no estudo das propriedades das funções e dos seus gráficos (domínio, contradomínio, monotonia, continuidade, extremos, simetrias, assíntotas, limites, mudanças de parâmetros no gráfico), quer em Funções Racionais, quer em Funções definidas por Ramos (ME, 1997).

As sugestões metodológicas de 1997 até às que estão em vigor, desde 2013, não se alteraram significativamente, mantendo as ideias principais na utilização da calculadora gráfica no estudo das Funções. Em 2001, o programa acresce a uma utilização da calculadora gráfica no estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos, inclusivamente das Funções Racionais (MEb, 2001). A calculadora gráfica pode servir para visualizar partes dos gráficos e as suas propriedades, obter soluções aproximadas de equações, entre outras (MEC, 2013). Neste programa, sugere-se a resolução de problemas com estudo das Funções Racionais através da sua representação gráfica.

A utilização da calculadora pode tornar o ensino mais concentrado naquilo que é de facto importante, a compreensão do significado dos conceitos, a elaboração e implementação de estratégias na resolução de problemas, bem como a sua análise e discussão (Ponte, 1990). Mas, afinal, nos dias de hoje todas as crianças estão familiarizadas com as tecnologias e aprendem a utilizá-las muito facilmente. Partindo deste pressuposto, a integração da calculadora gráfica torna um ambiente natural e autêntico para os alunos, oferecendo a oportunidade de realizar uma educação matemática realista (Drijvers, 2019).

Tal como sugerem os programas analisados no Quadro 3., Burril (2008) também considera que a utilização da calculadora gráfica é uma ferramenta fundamental para a visualização gráfica. Para este autor, a sua utilização é útil para explorar conceitos matemáticos, havendo uma conexão entre as diversas representações. As calculadoras mais recentes oferecem ainda a oportunidade de criar uma variedade de representações, pois uma mudança na representação (dado que é possível arrastar o gráfico) é logo visível na forma algébrica as respetivas alterações (Burril, 2008).

A manipulação algébrica é importante na compreensão do tópico de funções racionais, mas os alunos ao explorarem a manipulação gráfica, como as transformações de funções, promove uma compreensão mais profunda deste tópico (Carvalho et al., 2011). Assim, a aprendizagem no estudo das funções quando é feita de ambas as formas, isto é, realizar o estudo analítico e gráfico, torna-se mais vantajosa, "a exploração de transformações de funções racionais, relacionando as representações algébricas e gráficas, pode promover a construção de imagens dinâmica dos gráficos, contribuindo para uma maior flexibilidade no trabalho com essas funções." (Carvalho et al., 2011, p. 14). Com a utilização da calculadora gráfica os alunos podem realizar conexões adequadas entre o simbólico e o gráfico de uma função, podendo ficar mais claro as diferentes representações de Funções (Cavanagh & Mitchelmore, 2003). A calculadora gráfica pode encorajar e melhorar as previsões das características gráficas das Funções, mostrando uma mais-valia na conexão entre o pensamento algébrico e o pensamento gráfico (Cavanagh & Mitchelmore, 2003; Drijvers & Doorman, 1996).

Como a calculadora gráfica permite uma visualização da mudança de parâmetros da expressão algébrica de uma função racional, além de ser abordada de forma dinâmica, também contribui para o desenvolvimento conceptual da álgebra através das conexões entre a expressão analítica e a representação gráfica (Almeida & Oliveira, 2009). Com o poder da visualização, podemos: (i) resolver problemas com a visualização da calculadora, gráficos, tabelas, etc.; (ii) confirmação gráfica dos resultados obtidos através do papel e lápis; (iii) resolver graficamente e posteriormente confirmar o resultado analiticamente; (iv) modelação e simulação de situações problemáticas com recurso à calculadora gráfica e posteriormente confirmar analiticamente, caso seja possível; (v) cenários gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos; (xi) utilizar a calculadora gráfica para resolver situações em que não é possível resolver analiticamente ou algebricamente; (vii) Realizar experiências matemáticas com a calculadora gráfica para criar hipóteses e conjeturas; (viii) Utilizar a calculadora para classificar o comportamento de diferentes funções; (ix) utilizar a calculadora para prever conceitos apenas intuitivamente; (x) investigar e explorar com a calculadora as conexões entre as diversas representações (Waits & Demana,1998).

Por sua vez, Doerr e Zangor (2000) concluíram cinco tipos de instrumento que a calculadora proporciona na interação com o professor, com os colegas e com as tarefas matemáticas. Esses tipos de instrumentos são: (i) Instrumento computacional – a calculadora gráfica é utilizada para avaliar expressões numéricas e arredondamentos (ii) Instrumento de transformação – a calculadora gráfica é utilizada para mudar a natureza das tarefas; (iii) Instrumento de recolha e análise de dados – a calculadora gráfica é usada para recolher dados, analisar fenómenos e reconhecer padrões; (iv)

Instrumento de visualização – a calculadora é utilizada para reconhecer funções simbólicas, exigir e interpretar dados e para resolver equações; (v) Instrumento de averiguação – a calculadora é usada para confirmar as conjeturas e para compreender múltiplas representações simbólicas.

Waits e Demana (1998) defendem uma abordagem equilibrada da utilização da calculadora gráfica, o que significa que o aluno: (i) resolva analiticamente, com papel e lápis, e de seguida confirmam os resultados com a calculadora gráfica; (ii) resolva com a calculadora gráfica e confirme analiticamente; (iii) resolva com a calculadora quando é impossível ou é um método muito moroso analiticamente.

Apesar da calculadora ser um bom instrumento de aprendizagem da matemática, os métodos analíticos continuarão a ser importantes, pois: (i) os alunos não deverão ser meros utilizadores; (ii) a calculadora gráfica apresenta algumas limitações; (iii) na matemática a perfeição é algo importante, isto é, as demonstrações e o cálculo exato são fundamentais (Fernandes & Vaz, 1998).

Num estudo realizado por Guin e Trouche (2002), os autores notaram cinco práticas de trabalho extremo na utilização da calculadora gráfica: (i) *Método teórico,* aplicação de raciocínios baseados na analogia, e com posterior verificação da calculadora; (ii) *Método Racional,* pouca utilização da calculadora, aplicando métodos de trabalhos tradicionais com papel e lápis; (iii) *Método Aleatório*, apresentação de dificuldades com ou sem a utilização da calculadora, havendo memorização de procedimentos; (iv) *Método Mecânico,* utilização de resoluções pela calculadora, sem consciência dos conceitos matemáticos; (v) *Método Engenhoso,* utilização da calculadora e do papel e lápis, confrontando as informações. Muitas vezes os professores limitam a utilização da calculadora gráfica por medo de que esta se torne uma muleta, então os professores apenas permitem a sua utilização para verificar resultados obtidos por papel e lápis (NCTM, 2014). Deste modo, é importante que os alunos não utilizem a calculadora de modo meramente mecânico, devem dar significado ao processo da sua utilização.

2.2.3. Génese instrumental na utilização da calculadora gráfica

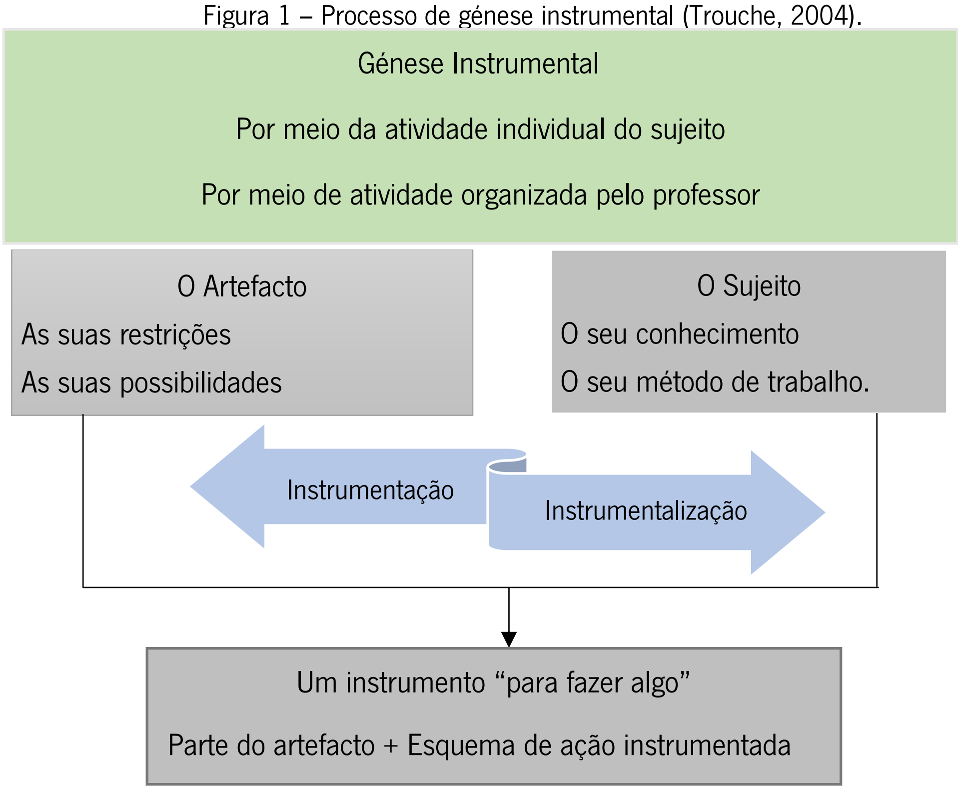
Como este estudo visa compreender como os alunos utilizam a calculadora gráfica no estudo de tópicos matemáticos, neste caso as Funções Racionais, é fundamental entender o processo de génese instrumental. A utilização da calculadora gráfica, ferramenta tecnológica para aprender matemática, não se torna apenas numa questão de transformar o pensamento matemático, mas também torna o utilizador moldável a técnicas de utilização e ainda a ferramenta molda e transforma o utilizador na prática matemática (Drijvers, 2019). Estas considerações deram origem à abordagem instrumental, tendo como base as noções de artefacto, instrumento, génese instrumental, esquema e técnica (Drijvers, 2019). Esta abordagem, instrumental, permite salientar a relação entre as técnicas da máquina e o pensamento matemático, fornecendo bases conceptuais para compreender o desenvolvimento dos esquemas dos alunos com a utilização da calculadora gráfica (Almeida & Oliveira, 2009).

A utilização da calculadora gráfica na sala de aula tornou-se algo muito frequente, em que os alunos fazem uso da mesma sem que esta seja pedida nas tarefas, principalmente quando os alunos desconhecem o caminho que devem seguir (Rocha, 2002). A calculadora gráfica é um objeto/ instrumento que os alunos terão de conhecer bem as suas funcionalidades para poder tirar partido das suas potencialidades e fazer uma boa aprendizagem (Rocha, 2002). Um instrumento é um intermediário cujas propriedades devem ser independentes dos membros e com a experiência e a prática de utilização desse instrumento significa uma aquisição de conhecimentos (Rabardel, 1995). Para este autor, o conceito de instrumento e de artefacto são fundamentais na génese instrumental. O artefacto é considerado explícita ou implicitamente como instrumento, já o instrumento é visto como entidade mista, composta pelo sujeito e pelo artefacto. Nesta perspetiva, o instrumento é composto por: (i) um artefacto material ou simbólico construído pelo utilizador; (ii) um ou mais esquemas de utilização associados aos resultados da sua própria construção ou de apropriação de padrões sociais já existentes (Rabardel, 1995).

Um instrumento pode ser considerado um artefacto material, tal como a calculadora ou um computador, mas também pode ser considerado um instrumento cognitivo não material, tal como a linguagem ou um símbolo algébrico (Drijvers & Trouche, 2008). Estes autores distinguem dois esquemas de utilização: (i) *Esquemas de uso,* que são esquemas elementares, estando diretamente relacionado com o artefacto; (ii) *Esquemas de ação instrumentada,* que são esquemas mentais coerentes e significativos; estes esquemas concentram-se na realização de transformações nos objetos matemáticos, tais como os gráficos, fórmulas, encontrar a janela apropriada na calculadora, entre outros. Assim, um esquema de ação instrumentada consiste em técnicas observáveis, técnicas essas que são guiadas pelas funcionalidades, limitações do artefacto e ainda pelos conhecimentos do aluno. Essa técnica desenvolve os conhecimentos dos alunos (Drijvers, 2019). Este autor refere ainda que "técnicas e conhecimentos podem co-emergir. É esta co-emergência que forma o coração da génese instrumental" (Drijvers, 2019, p. 10).

Para Rabardel (1995), o artefacto é visto como um objeto, enquanto o instrumento é visto como uma construção psicológica, em que o sujeito (o utilizador) se apropria do artefacto para desenvolver a componente psicológica, apropriando-se do artefacto e transformando-o em instrumento. Rabardel (1995) designou por processo de génese instrumental a transformação de um artefacto em instrumento. Este processo resulta de duas dimensões, a instrumentalização e a instrumentação. O processo de instrumentalização diz respeito à evolução do componente artefacto do instrumento, desde a seleção, funções, propriedades, transformações do artefacto por parte do sujeito. Assim, o sujeito atribui as potencialidades do artefacto. Quanto ao processo de instrumentação está relacionado com o padrão de utilização pelo sujeito, isto é, assimilar novos artefactos a esquemas já existentes. A instrumentalização poderá passar por diferentes estágios, o *estágio da descoberta* das funcionalidades relevantes do artefacto, o *estágio de personalização* e o *estágio de transformação* do artefacto (Trouche, 2004). Para este autor, não é possível distinguir estes dois processos, não se conseguindo dizer que este esquema é instrumentalização ou instrumentação. Para entender melhor o processo de génese instrumental, Touche (2004) apresentou o esquema ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Processo de génese instrumental (Trouche, 2004).



Há algum tempo que a tecnologia está presente na sala de aula. Desta forma, o professor, neste caso de Matemática, é confrontado constantemente com a questão de implementação no ensino, ficando claro a necessidade do processo de génese instrumental no ensino da Matemática (Drijvers et al., 2020). Assim, Guin e Trouche (2002) introduziram a noção de *orquestração instrumental* como um plano de ação, constituído por: (i) conjunto de indivíduos; (ii) conjunto de objetivos (relacionados à realização de tarefas ou à organização do ambiente de trabalho); (iii) a configuração didática, isto é, a estrutura geral do plano de ação; (iv) o conjunto de exploração desta configuração. Estes autores fundamentam a necessidade da orquestração instrumental de objetivos ligados aos modos de exploração dessas configurações, pois produzem traços de atividade (resultados de atividade observados por pessoas que não estão envolvidos na atividade). Estes autores classificam por níveis a aplicação de uma orquestração instrumental: (i) ao nível do artefacto; (ii) ao nível do instrumento ou um conjunto de instrumentos; (iii) ao nível da relação entre o sujeito e o instrumento (ou um conjunto de instrumentos). Posteriormente, Trouche (2004) introduziu a noção de orquestração instrumental com maior detalhe. Para este autor, esta noção foi essencial para denotar a necessidade do professor ou instituição de orientar o processo de génese instrumental. Em diversos estudos realizados em ambientes de aprendizagem computorizados, isto é, acerca de componentes materiais (calculadoras, computadores, softwares) e sobre componentes didáticos (exposição de conteúdos matemáticos), raramente abordam a organização quer do espaço de trabalho dos alunos quer por parte dos professores e o tempo dispensado (Trouche, 2004).

Ao longo do processo de génese instrumental não deixa de ser importante a orquestração instrumental, dado que os professores estão envolvidos num duplo processo de génese instrumental, incluindo o seu desenvolvimento pessoal de esquemas e nos esquemas para utilizar no ensino aos seus alunos (Drijvers, 2019). Na orquestração instrumental, o professor é responsável pela orientação dos alunos, em que o professor não executa o instrumento, mas sim verifica como este está a ser utilizado pelos alunos, cumprindo as funções de maestro (Trouche, 2004). No estudo realizado por este autor, em que utilizou uma calculadora projetada para todos os alunos, refere que existem diversos modos de explorar. Assim, o professor pode organizar as fases de trabalho de várias formas: (i) realizar as tarefas por papel e lápis; (ii) realizar a tarefa com a calculadora projetável e a calculadora de cada aluno, sob a supervisão do professor, em que todos os alunos devem ver a mesma coisa nas calculadoras; (iii) realização das tarefas por utilização das calculadoras (seja projetável ou as suas calculadoras), havendo restrição de tempo para realização; (iv) realização da tarefa com calculadora, sem a calculadora estar projetada. Em (ii), o processo de instrumentação e instrumentalização estão fortemente restringidos; em (iii), o processo de instrumentação e instrumentalização estão relativamente restringidos, uma vez que as atividades são projetáveis; já em (iv), o processo de instrumentação e instrumentalização estão fracamente restringidos (Trouche, 2004).

2.2.4. Potencialidades e limitações da utilização da calculadora gráfica

A calculadora gráfica, tal como outras ferramentas tecnológicas utilizadas nas atividades de ensino e de aprendizagem, apresenta diversas potencialidades, mas também limitações. Antes da implementação da calculadora gráfica na sala de aula, o professor deve ter consciência quer das potencialidades, quer das limitações da mesma, tornando-se imprescindível o professor realizar uma avaliação prévia acerca da calculadora gráfica.

Potencialidades da utilização da calculadora gráfica. Particularmente no ensino secundário, a utilização da calculadora gráfica é fundamental para a aprendizagem da Matemática, quer para a resolução de problemas, quer na modelação matemática (Palha, 2017). Uma das potencialidades da calculadora gráfica consiste em libertar tempo, uma vez que a calculadora realiza os cálculos rapidamente, para explorar atividades matemáticas mais profundas e significativas, desenvolvendo o pensamento, o raciocínio e as capacidades matemáticas (Drijvers & Doorman 1996; Fernandes & Vaz, 1998; Fernandes et al., 2006; Palha 2017). A utilização da calculadora gráfica para verificar resultados obtidos no papel e lápis implica um fornecimento de feedback ao aluno, o que pode ter efeitos positivos ao nível da motivação e autoconfiança do aluno (Fernandes & Vaz, 1998). Estes autores referem que a utilização da tecnologia permite aos alunos uma aprendizagem mais profunda da Matemática, sendo uma aprendizagem mais centrada em níveis cognitivos superiores. Para Palha (2017), além de aliviar o trabalho de cálculo, a calculadora gráfica torna possível examinar gráficos de funções rapidamente, permitindo ao aluno visualizar e explorar famílias de Funções. Assim, a calculadora gráfica faculta pistas aos alunos nas suas resoluções, proporcionando momentos para formular hipóteses e conjeturas (Fernandes & Vaz, 1998; Consciência, 2013; Campos et al., 2015).

Drijvers e Doorman (1996) fazem referência a cinco vantagens da utilização da calculadora gráfica, sendo elas, (i) Aplicação em contexto da realidade – por vezes a realidade dos problemas era distorcida para tornar os cálculos mais acessíveis aos alunos; com a calculadora gráfica deixa de ser um problema, pois a calculadora efetua os cálculos com números e fórmulas mais complicadas; (ii) Exploração – a calculadora gráfica estimula a formulação de novas questões e generalização de problemas, ampliando o campo de visão matemático do aluno e uma mudança de atitude em relação à matemática, passando a haver uma investigação ativa; (iii) Integração – a calculadora gráfica incentiva a integração de atividades geométricas e algébricas, estimulando os alunos a instituir ligações matemáticas; (iv) Dinâmica – como a calculadora gráfica é ideal para visualizar a influência de um parâmetro numa expressão, podendo através da observação analítica de modelos estabelecer conexões; (v) Flexibilidade – como o aluno deve ter um olhar crítico aos resultados apresentados pela calculadora gráfica, devido a algumas limitações, então deixaremos de exigir técnicas rígidas e aplicaremos um regime mais flexível.

Mais recentemente, tem sido discutido a utilização de calculadoras gráficas com sistema de cálculo algébrico simbólico (CAS). Esta dimensão nas calculadoras gráficas proporciona a criação de ambientes de aprendizagem inovadores e ricos (Domingos, 2017). A possibilidade de utilizar a manipulação simbólica e gráfica, processos esses que complementados com a manipulação algébrica resultará numa aprendizagem consistente e sólida, nomeadamente os alunos "conseguirão converter um processo num objeto" (Martins & Domingos, 2019, p. 232).

Limitações da utilização da calculadora gráfica. As análises dos programas de Matemáticas dos diferentes anos fazem referência à calculadora, estes programas apontam que a utilização da calculadora deve ser cuidada e adequada, devido às suas limitações. Todas as tecnologias, em particular, as calculadoras gráficas, têm limitações que quando não são consideradas podem levar à aprendizagem de ideias erradas (Fernandes & Vaz, 1998). Deste modo é importante o professor aprender as limitações da utilização da calculadora gráfica para depois debater com os alunos (Cavanagh & Mitchelmore, 2003). Além de compreender as limitações e constrangimentos da calculadora é necessário recorrer aos conceitos matemáticos para interpretar a informação recolhida (Consciência, 2013).

Uma das maiores utilizações da calculadora gráfica é no estudo de Funções, dado que, para conhecer o comportamento de uma dada função pode ser observável através da sua representação gráfica. Apesar da calculadora gráfica produzir rapidamente partes de gráfico de uma dada função, os alunos são confrontados com algumas limitações da calculadora, tais como: escalas desiguais, visualizações parciais, coordenadas irracionais e ainda os eixos coordenados não são rotulados, podendo levar a equívocos (Cavanagh & Mitchelmore, 2003). Consciência (2003) sugere outras limitações na utilização da calculadora gráfica, tais como, a precisão numérica, a resolução do écran, a construção do gráfico de uma função, cálculo de derivadas, integrais, extremos. Já Palha (2017) faz referência a três limitações: (i) a incerteza sobre a natureza das soluções de equações encontradas graficamente; (ii) os alunos não sabem justificar matematicamente, pois justificam que é o resultado da calculadora; (iii) a possibilidade de armazenar na calculadora vários tipos de procedimentos, tornando a matemática mecanizada.

No estudo realizado por Doerr e Zangor (2000), os autores concluíram que a calculadora levou a dois tipos de limitações: (i) utilização da calculadora como uma "caixa negra", sem interpretar e entender a sua utilidade; (ii) utilização da calculadora gráfica individualmente, limitando interações entre grupos, desenvolvendo o pensamento individualista e dificultando a discussão no grupo turma. Por vezes, a utilização da calculadora gráfica eleva a confiança do aluno em relação à Matemática, mas os alunos tendem a apresentar uma grande dependência da calculadora e acreditam que basta carregar no botão da calculadora que já está tudo resolvido, não apresentando espírito crítico (Romano et al., 2008).

As distrações dos alunos, por vezes, são o maior impedimento à aprendizagem e as calculadoras podem levar à distração e assim impedir a aprendizagem da matemática. A utilização da calculadora gráfica é aconselhada depois de saber os procedimentos analíticos (NCTM, 2014). Consciência (2003) apresenta três limitações na utilização da calculadora gráfica: (i) Precisão numérica - A calculadora gráfica tem como limitações trabalha com um número de dígitos finitos e quando efetuamos cálculos faz arredondamentos que podem influenciar no resultado; (ii) Resolução do ecrã – devidos aos pixéis da calculadora, os gráficos de uma função poderá não corresponder na integra a essa função, isto é, o que observamos no ecrã é condicionado pela escolha da janela de visualização; (iii) Construção do gráfico de uma função – o gráfico que observamos na calculadora corresponde a uma aproximação ao gráfico da função que, muitas vezes, não é muito fiável. Com a evolução das calculadoras, a facilidade de utilização levou ao aumento das limitações da calculadora, tal como a prioridade das operações, pois a calculadora assume regras próprias que por vezes induzem a erro (Rocha, 2017).

Quando as limitações da calculadora gráfica são abordadas na sala de aula, ao pedir aos alunos para explicar os resultados verdadeiros, ou não, torna parte de uma aprendizagem matemática. No caso dos resultados verdadeiros, serão aceites, mas no caso dos resultados falsos é necessária uma justificação, o que levará a um processo de raciocínio matemático (Doerr & Zangor, 2000).

2.2.5. Dificuldades dos alunos na aprendizagem de Funções através da utilização da calculadora gráfica

A disciplina de Matemática é, por vezes, rotulada de difícil e que é apenas para alguns alunos, sendo uma disciplina em que os alunos apresentam dificuldade. Para superar essa rotulagem é necessário que o professor prepare "uma aula que possa dar um contributo decisivo para ultrapassar essas dificuldades" (Ponte et al., 2017, p. 131), devendo antever o mais possível tais dificuldades. Mas, nem sempre as expectativas que o professor tem das dificuldades dos alunos serão as dificuldades reais (Rocha, 2017). Um elemento importante desta antevisão passa por um diagnóstico aos conhecimentos prévios dos alunos para a aprendizagem do novo tópico (Ponte et al., 2017).

Como já foi abordado, o conceito de função admite uma variedade de representações e algumas representações são mais complexas do que outras (Hitt, 1998), o que faz com que os alunos enfrentem dificuldades quando tentam compreender o conceito de função (Saraiva et al., 2010). A dificuldade pode estar relacionada com a ambiguidade do conceito. Os alunos têm intuições erróneas do conceito além de dificuldades com gráficos de funções (Leinhardt et al., 1990). Estes autores, após análise de diversos estudos, resumem as dificuldades dos alunos em:

(i) O que é e o que não é função? - por vezes, os alunos estabelecem um determinado padrão a uma função e ao seu gráfico, e assim não sabem reconhecer se é ou não uma função.

(ii) Correspondência – os alunos criam uma conceção errónea de que uma função deve ser uma correspondência um para um e ainda uma confusão de correspondência entre muitos para um e um para muitos.
(iii) Linearidade – os alunos centram-se na linearidade para qualquer situação, isto é, que uma função é determinada exclusivamente através de dois pontos.
(iv) Contínuo vs discreto – os alunos representam e interpretam dados contínuos de forma discreta ou representam e interpretam dados discretos de forma contínua.
(v) Representações de funções – Existem diversas representações, tais como equações, gráficos, relações, entre outras. A conexão entre as representações é por vezes difícil, sendo que os alunos sentem mais dificuldade quando se quer definir algebricamente uma função a partir de um gráfico.
(vi) Leitura e interpretação – Os alunos sentem dificuldades em construir e interpretar gráficos que representem situações reais. Tendencialmente utilizam os gráficos para procurar informações especificas, não dando atenção às propriedades da situação descrita. Originado assim, confusão no intervalo que deve ser considerado, confusão de inclinação/altura e a icónica representação (interpretar e construir gráfico). Havendo ainda confusão entre intervalo e ponto.
(vii) Conceito de variável – o conhecimento do conceito de variável é um pré-requisito para a compreensão do conceito de funções. Os alunos têm tendência para considerar símbolos comos sendo conjuntos, isto é, olham para as variáveis como etiquetas.
(viii) Noção – os alunos revelam dificuldades em construir uma escala; por vezes, no caso da construção dos eixos coordenados, alguns alunos acham pertinente apresentar uma escala no eixo positivo e outra escala no eixo negativo. Esta questão também é importante na interpretação dos gráficos, pois é necessário que os alunos entendam a influência que a escala tem na apresentação do gráfico.

No estudo das funções racionais, Nair (2010), da análise do conceito de imagem de funções racionais, assinalou alguns erros que os alunos cometem, tais como: (i) Conceito de um número racional; (ii) Conceito de fração, alguns alunos afirmam que uma função racional tem de ser apresentada na forma de fração não tendo variável no denominador; (iii) Conceito de descontinuidade, todas as funções racionais são descontínuas em algum lugar, já que os alunos observam o gráfico em duas partes e havendo sempre assíntotas verticais. Os alunos sentem dificuldades na determinação das assíntotas ao gráfico de uma função, além de errarem na determinação do domínio, os alunos tendem a afirmar que esse ponto que não pertence ao domínio será a assíntota vertical (Carvalho et al., 2011; Nair, 2010), apresentando também dificuldades na compreensão de limites (Nair, 2010), mas, para Yerushalmy (1997), as assíntotas oblíquas são onde os alunos sentem mais dificuldades.

No estudo realizado por Schnepper e McCoy (2013), os autores detetaram cinco erros frequentes que os alunos cometem na resolução de tarefas acerca de funções racionais. O erro mais frequente emerge nas respostas incompletas quando questionados pela transformação de funções racionais. Alguns alunos erram na interpretação dos dados quando questionados acerca da subtração e adição de funções racionais, enquanto outros cometem erros técnicos ao resolver equações racionais, erram na simplificação de expressões fracionárias (multiplicação e divisão) devido a aprendizagens prévias não consolidadas e revelam erros devido à alteração da definição de função racional, não conseguindo determinar o domínio da mesma.

A calculadora gráfica no estudo das funções racionais é muito vantajosa, quando bem utilizada, mas apresentando algumas limitações. Assim, a utilização da calculadora gráfica pode causar mais dificuldades no estudo das funções racionais do que quando estudadas apenas analiticamente. A configuração da janela de visualização da calculadora gráfica é um tema muito abordado, pois os alunos devem ser capazes de compreender que a tela pode não apresentar o gráfico inteiro da função, causando algumas dificuldades por parte dos alunos (Drijvers & Trouche, 2008). O que significa que os alunos devem escolher uma janela de visualização adequada. Carvalho et al. (2011) constataram que os alunos sentem dificuldades em encontrar essa janela e, por vezes, a procura da janela adequada é feita por tentativa e erro, denotando dificuldades na compreensão dos efeitos que a janela de visualização tem no gráfico de uma função.

No estudo de Carvalho et al. (2011), os alunos apresentaram dificuldades no reconhecimento de diferentes formas de representações algébricas de uma função racional, bem como relacionar as representações algébricas e gráficas.

Os alunos revelaram dificuldades em interpretar escalas desiguais e os efeitos nos gráficos, interpretar coordenadas decimais e ainda em reconhecer que um dado esboço do gráfico pode não ser representativo de uma função (Cavanagh & Mitchelmore, 2003). A conceção limitada dos alunos acerca da escala utilizada na calculadora implica uma limitação na compreensão da operação de zoom da calculadora, fazendo relação com uma lupa, achando que os valores das coordenadas se alterariam ao realizar o zoom (Mitchelmore & Cavanagh, 2000). Por vezes, as dificuldades dos alunos com a utilização da calculadora gráfica é devido ao desconhecimento de estratégias que a calculadora requer, mas com a sua prática essas dificuldades diminuem.

2.3. Estratégias de intervenção

Nesta secção constam as estratégias de intervenção. Na primeira secção apresentam-se as linhas orientadoras da lecionação das aulas, nomeadamente as metodologias de ensino e aprendizagem utilizadas, assim como a motivação da escolha dessas metodologias. Na segunda secção, apresentam-se as estratégias de avaliação implementadas na minha intervenção pedagógica.

2.3.1. Metodologias de ensino e de aprendizagem

Na minha intervenção pedagógica, o foco central incidiu sobre a atividade do aluno. Nas metodologias de ensino e aprendizagem que orientaram a minha ação pedagógica procurei que o aluno fosse um elemento interventivo na construção do seu conhecimento. Como professora, procurei ir além da mera mediação entre as intenções superiormente emanadas e os alunos (Canavarro & Ponte, 2005).

Ao longo da minha prática, estabeleci objetivos claros para orientar a tomada de decisões durante a aula e para focar os alunos no seu progresso em direção às aprendizagens pretendidas (NCTM, 2014). É relevante na ação pedagógica estimular os alunos a produzirem as suas próprias representações, constituindo um veículo para a aprendizagem (Ponte, 2014). Procurei, assim, planificar as minhas aulas de forma a envolver os alunos nas atividades propostas. Desta forma, o papel do professor e do aluno, as tarefas, o ensino exploratório, os materiais tecnológicos e a organização das aulas e das atividades dos alunos foram as minhas principais preocupações para dinamizar a minha prática pedagógica.

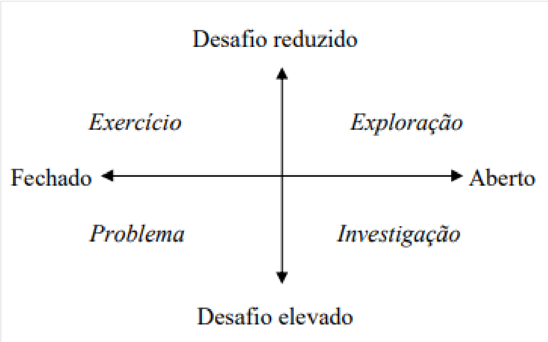
Papel do professor e do aluno. Na realização da minha intervenção pedagógica desempenhei, como professora, diferentes papéis, conforme o momento da aula. A minha principal preocupação no processo de ensino e de aprendizagem foi orientar o aluno na construção do seu conhecimento, questionando-o e desafiando-o com a finalidade de o tornar autónomo na construção da sua aprendizagem. Ao questionar e pedir justificações aos alunos, direciona-os a refletir no que pensam e, assim, questionam e/ou expressam as suas ideias matemáticas (Menezes et al., 2014). Araman et al. (2019) também consideram que os alunos devem ser convidados a abraçar as ações pelas quais o professor solicita informações, por meio de questionamentos, permitindo observar o pensamento dos alunos acerca do tema. Com base nesta perspetiva, o professor guia e apoia, por questionamentos, conduzindo o pensamento do aluno para uma determinada situação, facultando pistas, encorajando-os a pensar sobre as suas respostas. O professor informa e sugere, a partir das respostas dos alunos, valida, corrige ou aprimora as respostas, podendo também fornecer explicações e informações. O professor tenta colocar os alunos em situações desafiadoras, de modo que os alunos elevem o seu raciocínio, procurando novas formas de representação, estabelecendo novas conexões, refletindo e avaliando a situação, generalizando e justificando (Araman et al., 2019).

Na prática letiva, a planificação de longo e médio prazo, bem como os planos de cada aula, a conceção das tarefas e a condução da aula de matemática, tal como a organização do trabalho dos alunos, a criação de uma cultura de aprendizagem na sala de aula, o desenvolvimento e a regulação da comunicação e a avaliação das aprendizagens dos alunos e do ensino do professor são elementos fundamentais na prática de um professor (Ponte, 2012). Para um bom sucesso do trabalho do professor, este deve conhecer os seus alunos, despertar-lhes o interesse de encontrar soluções para as questões que os desafiam, levando-os a refletir sobre o que fazem e o que dizem nas aulas de matemática (Santos & Silva, 2015). A aprendizagem dos alunos depende do ambiente criado pelo professor na sala de aula, que resulta das experiências que envolvam os alunos a refletir sobre a resolução das tarefas propostas.

Essas experiências de aprendizagem estão fortemente dependentes das tarefas que o professor propõe (Menezes & Flores, 2017).

Tarefas. A elaboração das tarefas exigiu muita dedicação e preocupação, pois tinham como finalidade desafiar os alunos no estudo de tópicos ainda desconhecidos. Cada tarefa foi realizada com o pressuposto de elevar o raciocínio dos alunos, tendo uma natureza exploratória. Na construção das tarefas procurei que contemplassem situações e contextos variados, problemas que estimulassem o raciocínio, a comunicação matemática e a utilização de materiais diversificados e tecnológicos (MEC, 2018). Atualmente, é consensual o reconhecimento da enorme importância da natureza das tarefas como promotoras das experiências matemáticas a proporcionar aos alunos, emergindo a vantagem da diversificação de tarefas segundo o grau de desafio e de estrutura (Canavarro & Santos, 2012). O grau de desafio relaciona-se com a dificuldade que uma questão constitui, sendo de desafio reduzido ou desafio elevado. O grau de estrutura pode variar entre aberto e fechado. Numa tarefa fechada a questão é clara, refere o que é dado e o que é pedido. Uma tarefa aberta é composta por um grau de indeterminação no que é dado e/ou no que é pedido (Ponte, 2005). Cruzando estas duas dimensões, Ponte (2005) organiza as características das tarefas em quatro quadrantes, como mostra a seguinte figura.

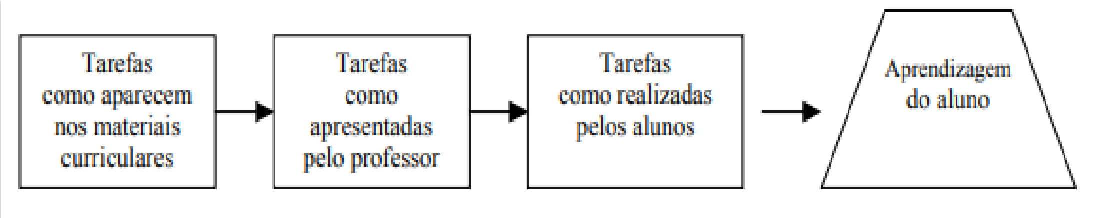
Figura 2 -– Características das tarefas segundo o grau de desafio e de estrutura (Ponte, 2005).



Como podemos observar na Figura 2, temos quatro tipos de tarefas: o exercício é uma tarefa fechada e de desafio reduzido; um problema é uma tarefa fechada e com desafio elevado; uma investigação tem desafio elevado e é uma tarefa aberta; uma exploração é uma tarefa aberta e desafio reduzido (Ponte, 2005).

Tanto a escolha das tarefas adequadas e ricas, como o desenvolvimento das tarefas na aula com os alunos, coloca grandes desafios ao professor (Canavarro & Santos, 2012). As tarefas matemáticas distinguem-se em três fases: primeiramente como as tarefas surgem no currículo; posteriormente, como as tarefas são apresentadas pelo professor; e, por fim, como elas são implementadas na sala de aula (Stein & Smith, 2009).

Figura 3 - O quadro das tarefas (Stein & Smith, 2009)



A escolha de tarefas matemáticas ricas é fundamental, mas não suficiente, para o sucesso do ensino e das aprendizagens dos alunos. A forma como as tarefas são implementadas na aula pelo professor faz toda a diferença (Menezes, 2015). O professor deve acompanhar os alunos na apresentação das tarefas, proporcionando momentos de discussão de ideias, levando-os 'a justificarem e generalizarem ideias, aspetos importantes do conhecimento' (Rodrigues et al., 2014, p.353). Deste modo, o professor evita a comunicação unidirecional de conhecimento do professor para o aluno e, assim, emprega as estratégias de um ensino exploratório

Ensino Exploratório. Durante a elaboração das tarefas, procurei que as tarefas tivessem uma perspetiva exploratória, tornando as aulas mais dinâmicas e proporcionando uma melhor aprendizagem aos alunos, e assim desviar de características do ensino tradicional. O ensino tradicional distingue-se nos momentos de introdução dos conceitos e na comunicação centrada no professor, seguida de aplicação e correção da tarefa, fundamentalmente exercícios de natureza fechada e apenas de consolidação dos conhecimentos (Ferreira & Ponte, 2017), para este ensino o aluno mecaniza procedimentos, aprendendo a saber como se faz os exercícios (Ponte, 2005). Já num ambiente de aprendizagem dinamizado por um ensino exploratório os alunos aprendem a partir da realização de tarefas valiosas, emergindo ideias matemáticas que serão sistematizadas em discussão coletiva (Canavarro, 2011). Para este ensino "as tarefas mais abertas e desafiantes assumem especial relevo" (Ferreira & Ponte, 2017, p.116). Numa aula com características exploratórias, o foco é o pensamento do aluno. Assim, o professor cria ambientes comunicativos favoráveis, "ouve os alunos para os compreender, coloca questões para clarificar, desafiar e avaliar, explica, introduz informação para reflexão dos alunos e favorece a interação, a discussão e a negociação de significados, recorrendo ao uso de linguagem e representações matemáticas" (Menezes et al., 2014, p.155).

Para organizar uma aula de ensino exploratório, Canavarro et al. (2012) propõem quatro fases de aula: (i) introdução da tarefa; (ii) realização da tarefa; (iii) discussão da tarefa; e (iv) sistematização das aprendizagens matemáticas. Na primeira fase, *introdução da tarefa*, o professor apresenta a tarefa aos alunos, garantindo que se sintam desafiados para a resolver. Na segunda fase da aula, *realização da tarefa*, é o momento de os alunos realizarem a tarefa, o professor ouve e observa, podendo colocar questões. Numa terceira fase da aula, *discussão da tarefa*, é o momento de o professor organizar a exposição das ideias produzidas pelos alunos à turma, promovendo discussão de ideias entre os alunos. Por fim, na última fase da aula, *sistematização das aprendizagens matemáticas,* é o momento de oficializar os conhecimentos adquiridos ao longo da aula. Para tal, o professor procura estabelecer processos de negociação de significados matemáticos, evidenciando ligações de conceitos matemáticos trabalhados na resolução da tarefa e estabelecendo conexões com aprendizagens anteriores (Canavarro et al., 2012; Oliveira et al., 2014).

Materiais Tecnológicos. Ao longo da minha intervenção pedagógica, a utilização de materiais tecnológicos foi fundamental. No ensino à distância que decorreu no terceiro período, devido à pandemia COVID19, a utilização dos materiais tecnológicos tornou-se indispensável. O programa e metas curriculares de Matemática A, em vigor, afirma que a tecnologia no Ensino Secundário deve ajudar os alunos a compreender conteúdos e relações matemáticas, sem condicionar a compreensão conceptual, a proficiência no cálculo e a capacidade de resolver problemas (MEC, 2013). A tecnologia é "um recurso essencial no ensino, ajudando os alunos a perceber as ideias matemáticas, a raciocinar, a resolver problemas e a comunicar" (MEC, 2018, p. 3). Quando os materiais tecnológicos estão disponíveis nas estratégias de ensino, os alunos podem se concentrar na tomada de decisão, reflexão, raciocínio e resolução de problemas, melhorando a sua aprendizagem (NCTM, 2007). Os materiais tecnológicos que utilizei ao longo da minha intervenção foram: emulador da calculadora gráfica; OneNote10; PowerPoint; Classroom; Google Meet; Mesa digitalizadora.

Na concretização das aulas da minha intervenção pedagógica, utilizei o Classroom, onde eram publicados avisos aos alunos, as tarefas prévias às aulas e os trabalhos de casa. Esta ferramenta tecnológica possibilitou a interação com os alunos a qualquer hora do dia, dado que o aluno podia publicar dúvidas ou dialogar com o professor. Além disso, possibilitou aos alunos publicarem as suas resoluções das tarefas prévias à aula e dos trabalhos de casa. Esta ferramenta tecnológica permitia corrigir as resoluções dos alunos, pois havia a possibilidade de selecionar parte das suas resoluções e comentar com sugestões ou correções, possibilitando a realização de feedbacks aos alunos.

A utilização do Google Meet foi o suporte de todas as aulas da minha intervenção pedagógica, foi a ferramenta que possibilitou a existência de aulas à distância. Através desta ferramenta ocorreram as aulas em vídeo, podendo o professor partilhar o seu ecrã com os alunos. Nas primeiras aulas, partilhava o PowerPoint previamente elaborado, de forma a completar com as respostas dos alunos relativamente à resolução das tarefas previamente publicadas no Classroom, transformando-se no momento de discussão da tarefa na aula. Ao partilhar o PowerPoint, além de se tornar lento, a escrita da linguagem matemática tornava-se uma tarefa complicada. Para contornar esta situação, adquiri uma mesa digitalizadora, que me facilitou nos momentos de escrita da linguagem matemática no preciso momento para os alunos. Como a mesa digitalizadora tem uma caneta, permitiu ser como um quadro na sala de aula. Para tal, recorri ao OneNote10, que contém uma página em branco tornando-se mais fácil a utilização da mesa digitalizadora. O OneNote10 tem as ferramentas indispensáveis para que seja um quadro digital com diversas canetas de cor, régua, partilha de ficheiros, gravação do quadro, escrever fórmulas matemáticas, entre outras ferramentas, que me ajudaram na concretização de uma aula mais dinâmica, proporcionando, assim, um momento de discussão da resolução das tarefas e de sintetização dos conceitos muito idêntico às aulas presenciais, registando no preciso momento as ideias dos alunos.

A utilização do emulador da calculadora gráfica foi a ferramenta que permitiu a realização deste estudo. Pois se não tivesse o emulador da calculadora gráfica, com as aulas online, a utilização deste recurso, fisicamente, tornava-se muito complicado. Assim, permitiu explorar todas as funcionalidades de uma calculadora gráfica, de forma digital e de modo a partilhar com os alunos. No Ensino Secundário, a calculadora gráfica deve ser utilizada em sala de aula (MEC, 2013). A utilização desta ferramenta nas estratégias de ensino coloca em cheque o ensino tradicional, dado que conduz a alterações nos processos aritméticos, implicando métodos totalmente diferentes, impondo uma mudança radical nos objetivos e práticas pedagógicas (APM, 2009). Desta forma, a implementação da calculadora gráfica requer uma planificação previamente à aula. Ponte (2005) considera que o professor deve preparar cuidadosamente a sua aula, ponderando diversos fatores, um deles são os materiais utilizados na aula, no caso da calculadora gráfica esta requer uma grande preparação prévia. Para que a calculadora gráfica proporcionasse a descoberta de conceito matemáticos, procurei que os alunos utilizassem a calculadora gráfica para recolher informações graficamente, sendo capazes de definir a janela de visualização, relacionar os diferentes menus da calculadora gráfica, e posteriormente raciocinar, verbalizando apresentando e registar os seus raciocínios e ainda formular, generalizar e validar conjeturas (Campos et al., 2015).

Organização das aulas e das atividades dos alunos. A utilização das tecnologias é indispensável atualmente no ensino, principalmente neste ano letivo, com a evolução do vírus SARS-CoV-2. Já Fernandes e Vaz (1998) referiam que a utilização da tecnologia nas aulas de Matemática requer uma organização do ensino. Uma vez que a utilização da tecnologia nas aulas online foi obrigatória, a organização das aulas também se modificou. As aulas online foram diminuídas e a duração das mesmas também. Os alunos do Ensino Secundário dispunham de duas aulas de 45 minutos síncronas e quatro aulas de 45 minutos assíncronas. Nas aulas síncronas, os alunos tinham de estar presentes, eram realizadas em vídeo aula. No caso das aulas assíncronas, compareciam os alunos que quisessem e estava destinada à resolução de tarefas e esclarecimento de dúvidas relativamente aos conteúdos lecionados e também da resolução de algumas tarefas.

As tarefas que seriam realizadas nas aulas síncronas, eram publicadas previamente no Classroom, havendo a possibilidade de os alunos aproveitarem as aulas assíncronas para as realizarem. Os alunos teriam de entregar as suas resoluções até à aula síncrona, permitindo que examinasse as estratégias e os raciocínios dos alunos antes da aula. Durante a aula síncrona, era o momento de discussão da resolução da tarefa e da sistematização dos conteúdos. Nalgumas aulas apresentava as resoluções dos alunos à turma para que outros alunos pudessem completar ou retificar o raciocínio na resolução que estava a apresentar. Noutras aulas, ia resolvendo as tarefas conforme as propostas que os alunos me iam transmitindo. A última questão da tarefa tinha como pressuposto generalizar os conteúdos, realizando a sistematização dos conteúdos abordados nas tarefas propostas. O restante tempo de aula estava destinado a tarefas práticas, de forma a consolidar os conteúdos abordados na aula. Algumas destas tarefas práticas eram designadas por 'desafios', uma vez que, tinha um grau de desafio mais elevado.

2.3.2. Estratégias de avaliação da ação

Nesta secção descrevem-se os procedimentos empregues na minha intervenção pedagógica para dar resposta ao objetivo e às questões de investigação delineadas para este estudo. De modo a compreender as aprendizagens dos alunos de tópicos de funções racionais, este estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa de ações, considerando abordagens específicas, como um estudo de caso (Ellinger & McWhorter, 2016). Esta abordagem metodológica permite conhecer melhor os vários fenómenos que ocorrem na escola e/ou na sala de aula, permitindo ao professor atuar de forma mais esclarecida, em conformidade com os contributos desses mesmos estudos (Cardoso & Rego, 2017). Um estudo de aula proporciona oportunidades para os professores participantes refletirem sobre as possibilidades de uma abordagem exploratória no ensino da Matemática (Quaresma & Ponte, 2017).

Para avaliar a minha intervenção pedagógica recorri a diferentes instrumentos de recolha de dados, tais como: questionários (inicial e final); produções dos alunos; e gravação vídeo e áudio.

Questionários (Inicial e Final). Os questionários são instrumentos principais de um estudo qualitativo, sendo utilizados para recolher opiniões e atitudes (Ponte, 1994). Para este autor, os questionários não são adequados para conhecer pontos de vistas, raciocínios e conhecimentos.

Na minha intervenção pedagógica, apliquei dois questionários (inicial e final) aos alunos da turma, cada um com propósitos distintos para este estudo. O questionário inicial, aplicado antes da minha intervenção pedagógica, teve como principal objetivo recolher informação, dos alunos, que me permitisse caracterizar a turma. Para tal, foi essencial recolher dados pessoais, as suas preferências relativamente à disciplina de matemática, os métodos de ensino que apreciam, as perceções sobre o tópico de Funções e sobre a utilização da calculadora gráfica nas suas aprendizagens.

De modo a complementar a informação recolhida ao longo da intervenção pedagógica, foi aplicado um questionário final. Este questionário teve como objetivo entender as perceções dos alunos relativamente à utilização da calculadora gráfica na aprendizagem de Funções Racionais e entender o contributo da minha intervenção pedagógica na sua aprendizagem. Para tal, o questionário final é constituído por perguntas abertas e por perguntas fechadas. As perguntas abertas, por vezes, facultam informações mais ricas e inesperadas, por conseguinte, as suas respostas têm de ser bem interpretadas e é necessário despender mais tempo para interpretar as suas respostas (Hill & Hill, 1998). As perguntas fechadas são mais fáceis de analisar estatisticamente e de organizar os dados sofisticadamente, mas por vezes a informação é muito vaga, sendo difícil de retirar ilações específicas (Hill & Hill, 1998). Nas questões fechadas, o aluno teria de escolher uma das cinco opções apresentadas, segundo uma escala de Likert, DT: Discordo Totalmente; DP: Discordo Parcialmente; I: Indiferente; CP: Concordo Parcialmente; CT: Concordo Totalmente. As questões abertas estão organizadas para recolher informação sobre o novo método de ensino, implementado devido à pandemia, sobre as vantagens, desvantagens e dificuldades da utilização da calculadora gráfica na aprendizagem de tópicos de Funções.

Produções dos alunos. As produções dos alunos são essenciais neste estudo, pois permitem analisar as resoluções, as dificuldades e as considerações que os alunos apresentam nas diversas tarefas propostas. Como as aulas foram lecionadas online, as tarefas propostas foram resolvidas pelos alunos previamente à aula e enviada até ao momento da aula, de modo a serem debatidas na aula. As restantes tarefas, designadas por tarefas práticas, foi estipulado um tempo para os alunos as resolverem e posteriormente debatida a sua resolução. As diferentes produções dos alunos são identificadas por A#, onde # representa um número atribuído a cada aluno, havendo produções do aluno A1 ao aluno A17.

As respostas dos alunos foram classificadas por quatro tipos de respostas, corretas (C), parcialmente corretas (PC), incorretas (I) e não respondidas (NR). Como este estudo tem como objetivo averiguar o contributo da calculadora gráfica na aprendizagem de funções racionais, as resoluções gráficas dos alunos serão consideradas corretas quando o aluno justifica a utilização deste artefacto. Neste sentido, quando os alunos construíam esboços gráficos, as respostas eram consideradas corretas quando: (i) inclui o sistema de eixos e estão rotulados; (ii) o esboço descreve a função descrita; (iii) rotula a função esboçada; e (iv) apresenta a janela de visualização utilizada na calculadora gráfica.

Gravação vídeo e áudio. Todas as aulas da minha intervenção pedagógica, que incidiu sobre os tópicos de funções reais de variável real, foram gravadas em vídeo e áudio. Este método de recolha de dados foi essencial, permitindo uma posterior observação e análise das aulas lecionadas, dado que, os vídeos e os áudios são fiéis à realidade ocorrida nas aulas. Para tal, foi realizado o pedido de autorização aos Encarregados de Educação (Anexo 1) dos alunos intervenientes neste estudo, bem como um pedido de autorização à escola. Uma vez que, obtive a autorização de todos os Encarregados de Educação e da Escola, pude recorrer a este método de recolha de dados.

A recolha das gravações vídeo e áudio permitiu não perder a informação dos diálogos que aconteceram ao longo das aulas. Assim, estas gravações permitiram-me analisar as aulas que lecionei, as questões, dúvidas colocadas pelos alunos e as justificações que os alunos apresentavam acerca dos tópicos lecionados. A informação recolhida por este método permitiu a análise das minhas aulas, para poder melhorar ações de aulas futuras e para a ilustração deste estudo.

CAPÍTULO 3

INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Este capítulo está dividido em cinco secções, que documentam os resultados obtidos ao longo da minha intervenção pedagógica. Nas três primeiras secções especifica-se momentos da minha prática pedagógica. Na quarta secção apresenta-se a avaliação do ensino ministrado. Na quinta secção apresenta-se uma síntese aos resultados obtidos na prática pedagógica De forma a cumprir o objetivo delineado para este estudo, averiguar o contributo da calculadora gráfica na aprendizagem das funções racionais por alunos do 11.º ano de escolaridade, lecionei aulas síncronas e assíncronas (Tabela 4).

Tabela 4 - Síntese das aulas síncronas da intervenção pedagógica.

Aula	Tópico	Objetivos	Recursos
1	Funções racionais	Definir função racional. Definir função soma e função diferença de funções racionais.	Calculadora gráfica / PowerPoint/ Google Meet
2	Funções racionais	Definir função produto e função quociente de funções racionais. Determinar zeros de uma função racional. Resolver equações fracionárias.	
3	Funções racionais	Determinar o sinal de uma função racional. Resolver inequações fracionárias.	
4	Funções racionais	Resolver problemas envolvendo funções racionais.	
5	Limites segundo Heine de funções reais de variável real.	Identificar ponto aderente a um conjunto de números reais e aderência de um conjunto. Definir limite de uma função num ponto aderente ao respetivo domínio.	
6	Limites segundo Heine de funções reais de variável real.	Definir limites laterais. Definir limites no infinito.	
7	Limites segundo Heine de funções reais de variável real.	Operar com limites de funções reais de variável real em pontos aderentes dos seus domínios. Definir produto de uma função limitada por uma função com limite nulo em pontos aderentes do seu domínio.	Calculadora gráfica / Onenote10 / Google Meet
8	Limites segundo Heine de funções reais de variável real.	Levantar indeterminações de limites de funções reais de variável real.	
9	Limites segundo Heine de funções reais de variável real.	Levantar indeterminações de limites de funções reais de variável real. Definir limite de uma função composta.	
10	Continuidade de funções reais de variável real.	Definir função contínua num ponto e num subconjunto do seu domínio. Justificar que dadas duas funções reais de variável real f e g contínuas num ponto a então as funções soma, diferença, produto e quociente são contínuas em a.	
11	Continuidade de funções reais de variável real. Assíntotas ao gráfico de uma função.	Estudar a continuidade de funções reais de variável real no seu domínio. Determinar assíntotas ao gráfico cartesiano de uma função real de variável real.	
12	Assíntotas ao gráfico de uma função.	Determinar assíntotas ao gráfico cartesiano de funções racionais definidas em $\mathbb{R}\backslash\{c\}$ por $f(x)=a+\frac{b}{x-c}$.	
13	Assíntotas ao gráfico de uma função.	Determinar assíntotas ao gráfico cartesiano de uma função real de variável real.	

Na Tabela 4 apresenta-se a organização das aulas síncronas, na primeira coluna a numeração das aulas, de duração de 45 minutos, na segunda e terceira colunas a descrição dos tópicos abordados em cada aula, bem como os objetivos a atingir para cada aula, e na última coluna estão os recursos utilizados ao longo das aulas. De entre as aulas descritas na Tabela 4, com o intuito de ilustrar momentos da minha ação pedagógica, descrevo e interpreto a informação que recolhi nas aulas 3, 7 e 12 (Anexo 3), que incidem sobre o estudo das funções racionais, limite segundo Heine e sobre a determinação de assíntotas ao gráfico de funções racionais.

3.1. Sinal de uma função racional e inequações fracionárias

Na promoção do estudo do sinal de funções racionais e da resolução de inequações fracionárias, propus aos alunos a resolução da Tarefa 1, realizada previamente à aula de forma a promover discussão na aula síncrona. A resolução da tarefa foi enviada pelos alunos para o Classroom até ao início da aula.

Tarefa 1. Inequações fracionárias e sinal de uma função racional

1. Considera as funções f e g definidas, respetivamente, por:

$f(x) = \frac{x+4}{x}$ e $g(x) = x$.

a) Esboça, num único referencial ortogonal, os gráficos das funções f e g. Assinala no teu esboço os pontos A e B, sabendo que A é o ponto de interseção dos gráficos no 3.º quadrante e B é o ponto de interseção dos gráficos no 1.º quadrante.

b) Estuda, analiticamente e graficamente, o sinal da função f.

c) Resolve, analiticamente e graficamente a inequação $f(x) > g(x)$.

2. Considera uma função h definida por $h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, em que P e Q são polinómios e $Q(x) \neq 0$. Estuda o sinal da função h.

A Tarefa 1 é constituída por uma sequência lógica de questões de modo a orientar o aluno a uma generalização. Com o item 1, pretendia que os alunos realizassem, graficamente e analiticamente, o estudo do sinal da função f e resolvessem uma inequação fracionária. Com o item 2, esperava que os alunos generalizassem o estudo do sinal de uma função racional, através da observação do que resolveram no item 1 (Tabela 5).

Tabela 5 - Frequência (%) das respostas dos alunos aos itens da Tarefa 1 ($n = 17$).

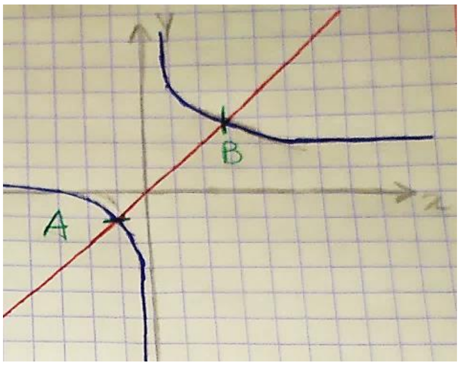
Itens e Critérios	C	PC	I	NR
1. a) Efetuar o esboço gráfico das funções f e g.	–	14 (82,35%)	–	3 (17,65%)
1. b) Estudar o sinal da função racional, analiticamente	3 (17,65%)	5 (29,41%)	4 (23,53%)	5 (29,41%)
1. b)*Estudar o sinal de uma função racional, graficamente	6 (35,29%)	–	4 (23,53%)	7 (41,12%)
1. c) Resolver a inequação fracionária, analiticamente	4 (23,53%)	–	10 (58,82%)	3 (17,65%)
1. c)*Resolver a inequação fracionária, graficamente	4 (23,53%)	–	5 (29,41)	8 (47,05%)
2. Generalizar o estudo de sinal de uma função racional	4 (23,53%)	3 (17,65%)	6 (35,29%)	4 (23,53%)

Da análise da Tabela 2, constatamos que os alunos não estão habituados a realizar esboços gráficos de funções de forma justificada, apresentam esboços gráficos pouco rigorosos. Os alunos demonstram algumas dificuldades no estudo do sinal de uma função racional analiticamente, dado que, apresentam mais respostas corretas quando realizam o estudo graficamente. Relativamente à resolução de uma inequação fracionária, 76,46% dos alunos não respondem ou respondem incorretamente. De um modo geral, estas dificuldades resultam da falta de conhecimentos prévios, uma vez que, os alunos realizaram o estudo do sinal de uma função e resolveram inequações fracionárias no 10.º ano. Por conseguinte, grande parte dos alunos (58,82%) não respondem ou apresentam respostas incorretas à generalização do estudo do sinal de uma função racional, ao item 2.

Exploração da tarefa

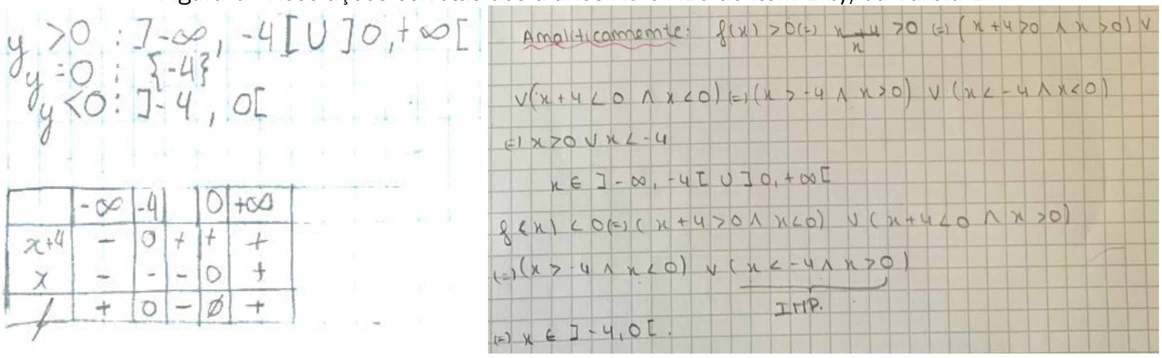
Para efetuarem o esboço gráfico das funções f e g no mesmo referencial cartesiano, os alunos recorrem a esquemas de uso e a esquemas de ação instrumentada da calculadora gráfica, ao editarem as expressões que representam as funções e ao escolherem a janela de visualização. Da análise das respostas ao item 1.a), constata-se que nenhum aluno resolveu corretamente as questões, sobretudo por não rotularem o esboço gráfico das funções que estavam a representar ou os eixos coordenados. Por essa razão, as resoluções efetuadas são consideradas parcialmente corretas (82,35%), como exemplifica a resolução do aluno A17, que não rótula os gráficos das funções esboçadas (Figura 4).

Figura 4 - Resposta parcialmente correta do aluno A17 ao item 1.a) da Tarefa 1.



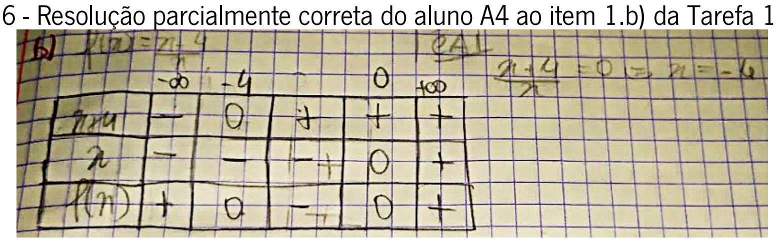
Relativamente ao estudo analítico do sinal da função f, item 1.b), somente alguns dos alunos (17,65%) respondem corretamente a este item, como ilustram as resoluções do aluno A5, que traduziu num quadro o sinal da função que resulta do quociente entre os sinais dos polinómios que definem a função racional nos intervalos considerados, e do aluno A16, que realizou o estudo do sinal da função racional por processos algébricos (Figura 5).

Figura 5 - Resoluções corretas dos alunos A5 e A16 ao item 1.b), da Tarefa 1



Quanto às respostas consideradas parcialmente corretas (29,41%) ao item 1.b), verifica-se que no estudo analítico do sinal da função f não apresentam o conjunto solução, como mostra a resolução do aluno A4 (Figura 6).

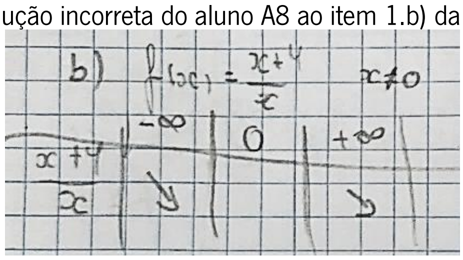
Figura 6 - Resolução parcialmente correta do aluno A4 ao item 1.b) da Tarefa 1.



O aluno não retira qualquer conclusão do quadro de sinal que elaborou e considera o quociente nulo entre um número positivo e zero, o que traduz ausência de sentido crítico na interpretação do zero do polinómio do denominador na definição da função racional.

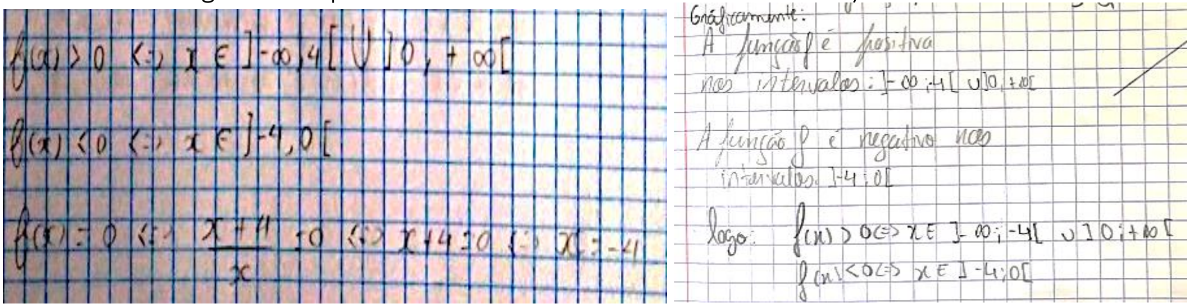
Os restantes alunos não apresentam qualquer resposta (29,41%) ao item 1.b) ou respondem incorretamente (23,53%), como expressa a resolução do aluno A8, que efetua o estudo do comportamento da função em vez do sinal nos intervalos considerados (Figura 7).

Figura 7 - Resolução incorreta do aluno A8 ao item 1.b) da Tarefa 1



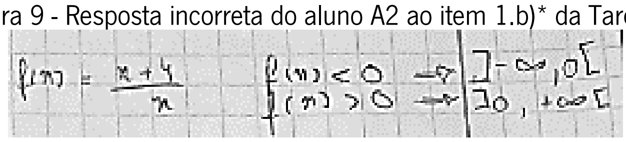
Quanto ao estudo gráfico do sinal da função f, item 1.b)*, 35,29% dos alunos respondem corretamente, como exemplificam as resoluções dos alunos A3 e A12 (Figura 8).

Figura 8 - Respostas corretas dos alunos A3 e A12 ao item 1.b)* da Tarefa 1.



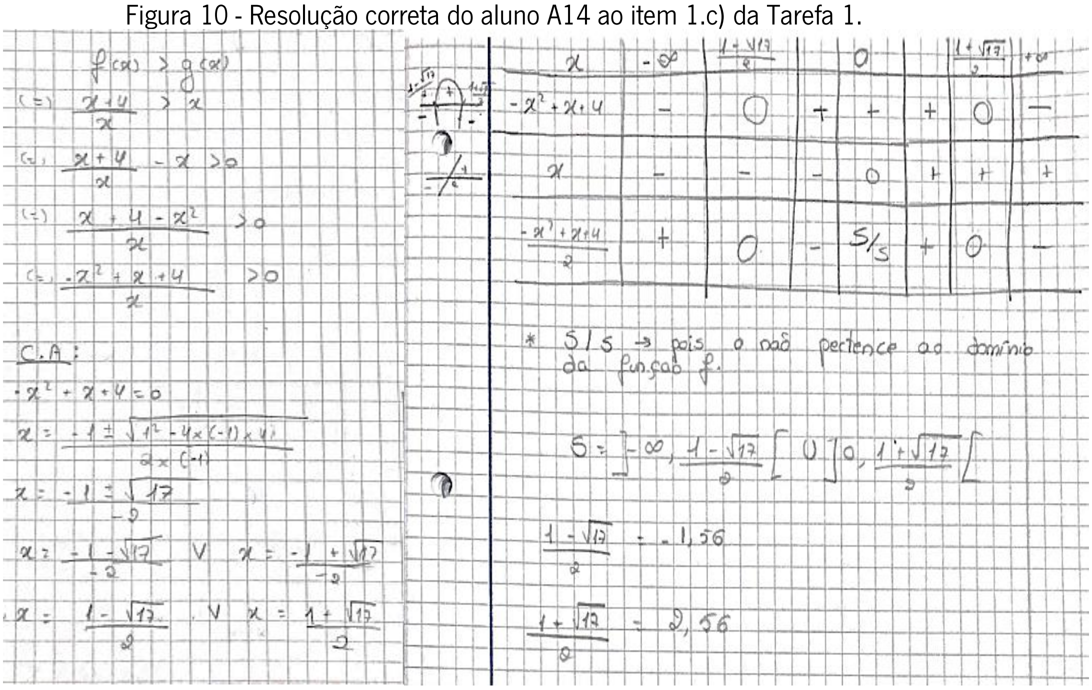
Entre os restantes alunos, alguns não apresentam qualquer resposta (41,12%) ou respondem incorretamente (23,53%), denotando que não tiram partido das potencialidades da calculadora gráfica, nem dos esboços realizados no item 1.a). As resoluções incorretas evidenciam uma observação gráfica inadequada do sinal da função, como exemplifica a resposta do aluno A2 (Figura 9).

Figura 9 - Resposta incorreta do aluno A2 ao item 1.b)* da Tarefa 1



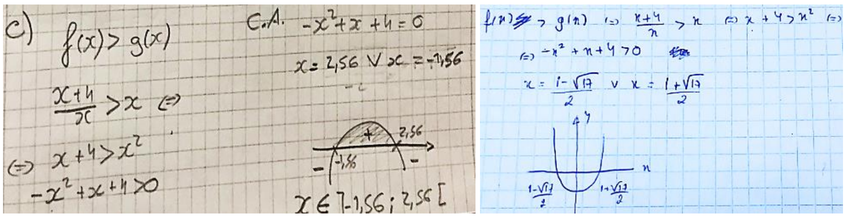
No item 1.c) da Tarefa 1, os alunos foram interpelados a resolver analiticamente a inequação $f(x) > g(x)$, o que foi concretizado corretamente por 23.53% dos alunos, como expressa a resolução do aluno A14 (Figura 10).

Figura 10 - Resolução correta do aluno A14 ao item 1.c) da Tarefa 1.



Dos restantes alunos, cerca de 17,65% não respondem ao item 1.c) e 58,82% apresentam respostas incorretas, como ilustram as resoluções dos alunos A10 e A15 (Figura 11).

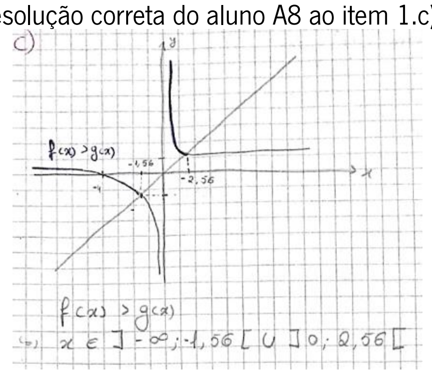
Figura 11 - Resoluções incorretas dos alunos A10 e A15 ao item 1.c) da Tarefa 1.



Os alunos A10 e A15 resolvem analiticamente a inequação fracionária tal como o faz numa equação ou como se o domínio da inequação fosse $\mathbb{R}^+$, referindo incorretamente que $f(x) > g(x) \Leftrightarrow -x^2 + x + 4 > 0$. Posteriormente, o aluno A10 realizou o esboço gráfico da função $-x^2 + x + 4$ mas nem retirou qualquer conclusão desse esboço gráfico. Já o aluno A15 não apresentou um esboço gráfico da função $-x^2 + x + 4$ correto, pois a função é uma parábola com concavidade voltada para cima e o aluno esboçou uma parábola com concavidade voltada para baixo.

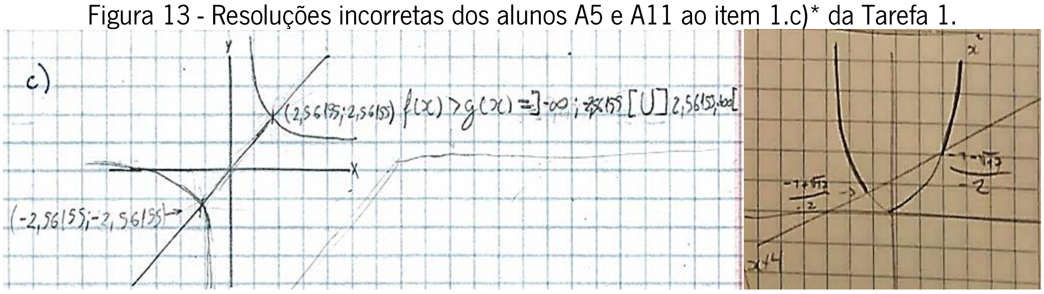
Quanto à resolução gráfica da inequação fracionária $f(x) > g(x)$, item 1.c)*, 23,53% dos alunos apresentam respostas corretas, que resultam da interpretação da informação que retiram do esboço gráfico que efetuaram das funções f e g, tal como expressa a resolução do aluno A8 (Figura 12).

Figura 12 - Resolução correta do aluno A8 ao item 1.c)* da Tarefa 1.



Um número significativo de alunos (47,05%) não apresenta qualquer resolução do item em análise e 29% respondem incorretamente, como exemplificam as resoluções dos alunos A5 e A11 (Figura 13).

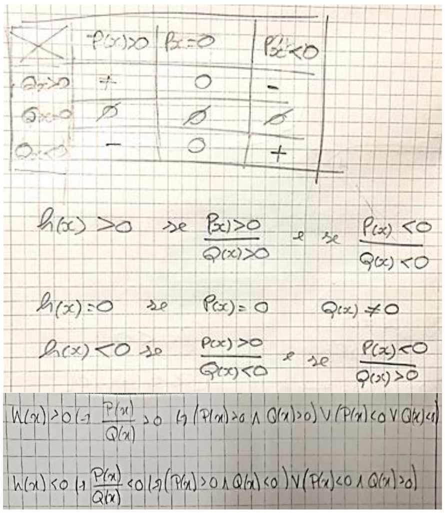
Figura 13 - Resoluções incorretas dos alunos A5 e A11 ao item 1.c)* da Tarefa 1.



O aluno A5 apresenta o esboço gráfico das funções f e g, mas não calcula corretamente o ponto de interseção dos gráficos dessas duas funções, determinando assim incorretamente o conjunto solução. Já o aluno A11, resolveu incorretamente a inequação $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x + 4 > x^2$ e apresenta o esboço gráfico da função definida por $x + 4$ e da função definida por x^2 e apenas assinala os pontos de interseção destas duas funções, sem tirar qualquer conclusão do esboço gráfico.

Por fim, o item 2 da Tarefa 1 tinha como finalidade envolver os alunos na generalização do estudo do sinal de uma função racional, o que foi conseguido por apenas 23,53% dos alunos, como exemplificam as resoluções dos alunos A10 e A2 (Figura 14).

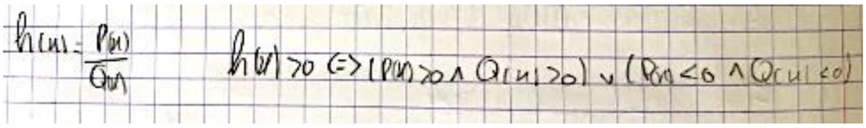
Figura 14 - Resoluções corretas dos alunos A10 e A2 ao item 2 da Tarefa 1.



O aluno A10 apresenta um quadro síntese das possibilidades do sinal da função h, resultante da variação do sinal dos polinómios numerador e denominador na definição da função racional. Quando o polinómio denominador é nulo, o aluno entende que este estudo não tem qualquer significado, traduzindo-o com o símbolo "$\emptyset$" em vez de "s/s", abreviatura que costuma ser usada para referir que o quociente entre polinómios não tem significado nos zeros do denominador. Já o aluno A2 generaliza o estudo do sinal da função h em função do quociente ser positivo ou negativo, sem precisar de recorrer a um quadro de sinais. Para o caso da função h ser positiva, o aluno concluiu que o sinal dos polinómios numerador e denominador deverão ser iguais. Para o caso da função h ser negativa o aluno conclui que os sinais dos polinómios numerador e denominador deverão ser diferentes.

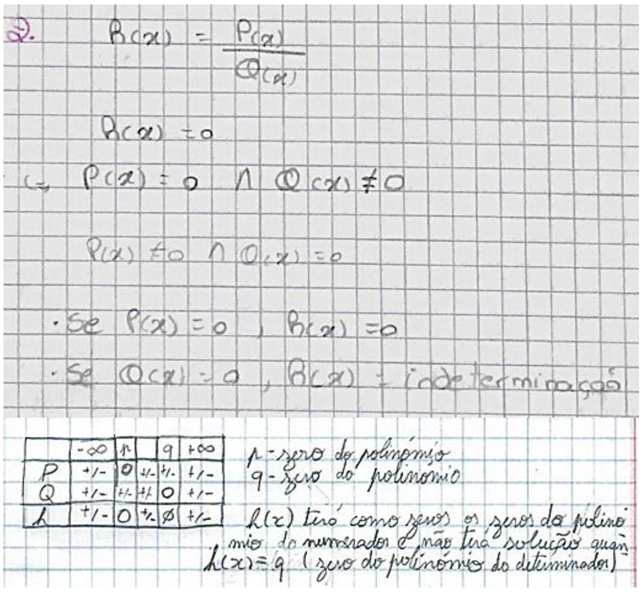
Nem todos os alunos esgotam as possibilidades que garantem o estudo do sinal de uma função racional, o que se traduz numa resposta parcialmente correta (17,65%), tal como ilustra a resposta do aluno A12 (Figura 15).

Figura 15 - Resolução parcialmente correta do aluno A12 ao item 2 da Tarefa 1.



Dos restantes alunos, cerca de 23,53% dos alunos não apresentam qualquer resposta ao item 2 da tarefa 1 e 35,29% apresentam respostas incorretas, como expressa as resoluções dos alunos A14 e A5 (Figura 16).

Figura 16 - Resoluções incorreta dos alunos A14 e A5 ao item 2 da Tarefa 1.

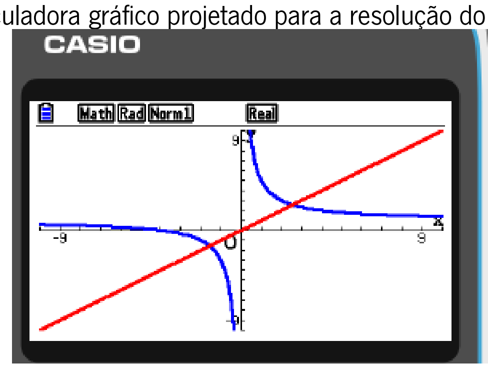


O aluno A14 apenas refere os casos dos polinómios numeradores e denominadores sejam polinómios nulos, não apresentando qualquer estudo do sinal da função h. O aluno A5 apresenta um quadro de sinal sem retirar qualquer conclusão relativamente ao estudo de sinal da função h.

Discussão da tarefa

No momento da discussão da tarefa 1, comecei por projetar a representação gráfica da função f e g efetuada no emulador da calculadora gráfica (Figura 17), à qual os alunos não apresentaram dúvidas.

Figura 17 -Emulador da calculadora gráfico projetado para a resolução do item 1.a) da Tarefa 1.



Na análise da resolução gráfica do item 1. b)*, com recurso à calculadora gráfica, procurei averiguar como os alunos entendiam o estudo do sinal de uma função racional.

Professora: Graficamente, como consegues estudar o sinal da função f?

A3:	Tem um zero, que é o -4.
Professora:	O que consegues observar mais?
A3:	O zero não tem imagem. Eu não sei explicar...
Professora:	Olhando para o gráfico, quando é que a função é negativa?
A3:	Quando $x \in]-4{,}0[$.
Professora:	E agora, quando é que a função é positiva?
A3:	É de $-\infty$ a -4 e de 0 a $+\infty$.
A8:	No zero é aberto, porque se fosse fechado era impossível, visto que, o zero não tem imagem.

A resolução gráfica do sinal da função f serviu de mote para o seu estudo analítico. Os alunos revelaram dificuldades na elaboração do quadro de sinal da função, evidenciando falta de conhecimento de conteúdos lecionados no 10.º ano de escolaridade. Aproveitando as respostas dos alunos A3 e A8, orientei os alunos a preencher o quadro de sinal que esperava obter (Figura 18).

Figura 18 - Quadro de aula ao resolver o item 1.b) da Tarefa 1.

x	$-\infty$	-4		0	$+\infty$
$x+4$	-	0	+	+	+
x	-	-	-	0	+
$\frac{x+4}{x}$	+	0	-	S.S.	+

Por observação da tabela,

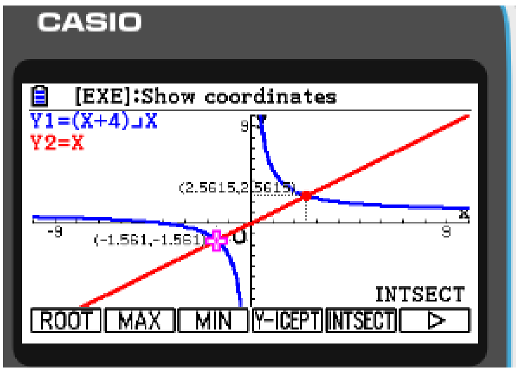
$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-4{,}0[$

Alguns alunos manifestaram dificuldade em compreender que o quociente de um número positivo por zero não tem significado, dado que esse valor não pertence ao domínio da função.

Na discussão gráfica do item 1.c)*, elucidei os alunos como se determinavam os pontos de interseção de gráficos de funções, com o intuito de promover os esquemas de ação instrumentada da calculadora gráfica (Figura 19).

Figura 19- Emulador da calculadora gráfica, projetado para resolver o item 1.c)* da Tarefa 1.



De seguida, questionei os alunos, através da observação do esboço gráfico apresentado pela calculadora, qual seria a solução da inequação $f(x) > g(x)$.

Professora: Por observação da representação na calculadora gráfica, qual é a solução da inequação $f(x) > g(x)$?

A5: De $-\infty$ a -1.561 aberto, união com 2.5615 aberto a $+\infty$.

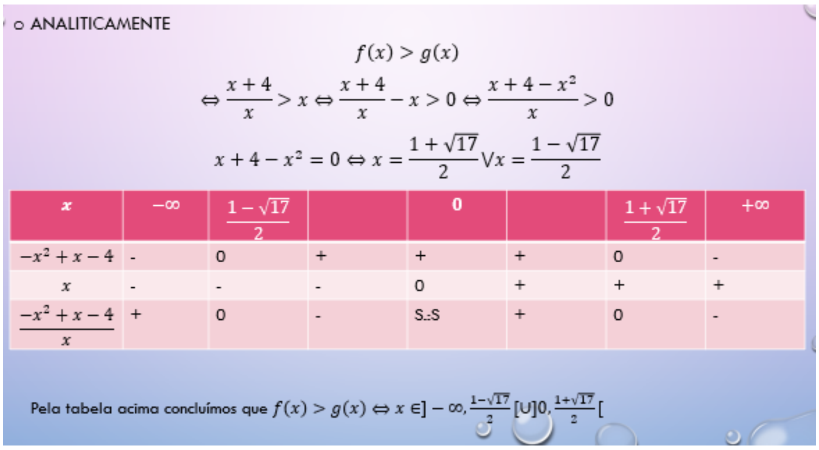
Professora: Muito bem, alguma dúvida? (silêncio) E agora, analiticamente como resolvemos a inequação $f(x) > g(x)$?

A14: Resolvi a inequação $f(x) > g(x)$, colocando $f(x) - g(x) > 0$, fiz os cálculos, determinei os zeros do numerador e do denominador e completei a tabela de sinais.

Professora: Então, indica-me passo a passo como o fizeste.

Após este diálogo, alguns alunos ajudaram o aluno A14 a obter o seguinte quadro:

Figura 20 - Quadro de aula na resolução do item 1.c) da Tarefa 1 durante a discussão na aula.


o ANALITICAMENTE

$$f(x) > g(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{x} > x \Leftrightarrow \frac{x+4}{x} - x > 0 \Leftrightarrow \frac{x+4-x^2}{x} > 0$$

$$x + 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$		0		$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$	$+\infty$
$-x^2+x-4$	-	0	+	+	+	0	-
x	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{-x^2+x-4}{x}$	+	0	-	S.:S	+	0	-

Pela tabela acima concluímos que $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{1-\sqrt{17}}{2}[\cup]0, \frac{1+\sqrt{17}}{2}[$

Na discussão sobre a resolução do item 2 da Tarefa 1, apercebi-me de que alguns alunos não entenderam o que era pedido, de conjeturar o estudo do sinal de uma função racional qualquer:

Professora: Na questão 2 é pedido para estudar o sinal de uma função racional h, como vamos fazer este estudo?

A12: Eu fiz pouca coisa, porque eu não percebi o que era pedido exatamente.

Professora: Queremos estudar o sinal de uma função racional, então, comecemos por estudar quando é que a função h é positiva.

A12: Quando $P(x)$ é maior que zero e $Q(x)$ é maior que zero.

A11: Também podem ser os dois negativos.

Professora: Portanto, para que a função h seja positiva, os polinómios P e Q podem ser ambos positivos ou ambos negativos. Agora, quando é que a função h é negativa?

A2: Pode ser quando $(P(x) < 0 \wedge Q(x) > 0) \vee (P(x) > 0 \wedge Q(x) < 0)$.

3.2. Limite segundo Heine de funções reais de variável real

No estudo das operações com limites entre funções, em pontos aderentes ao seu domínio, e no estudo do limite do produto de uma função limitada por uma função cujo limite é nulo, os alunos foram desafiados a formular conjeturas e a generalizá-las, através da resolução das seguintes tarefas:

Tarefa 1. Operações com limites entre funções reais de variável real em pontos aderentes aos seus domínios

Considera as funções reais de variável real f e g definidas, respetivamente, por $f(x) = x^2 - 4x$; $g(x) = 2x - 2$

1. Completa a seguinte tabela:

Função	Esboço gráfico	Determina:
$f(x) = \cdots; Df = \cdots$		$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \cdots$
$g(x) = \cdots; Dg = \cdots$		$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \cdots$
$(f+g)(x) = \cdots; D_{f+g} = \cdots$		$\lim\limits_{x\to 1}(f+g)(x) = \cdots$
$(f-g)(x) = \cdots; D_{f-g} = \cdots$		$\lim\limits_{x\to 1}(f-g)(x) = \cdots$
$(f\times g)(x) = \cdots; D_{f\times g} = \cdots$		$\lim\limits_{x\to 1}(f\times g)(x) = \cdots$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \cdots; D_{\frac{f}{g}} = \cdots$		$\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \cdots; \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \cdots$
$[g(x)]^2 = \cdots ; D_g = \cdots$		$\lim\limits_{x\to 1}\left(g(x)\right)^2 = \cdots$

2. Considera a função real de varável real h definida por $h(x) = 5 + \frac{1}{x}$.

Determina $\lim\limits_{x\to+\infty}[h(x)+2]$; $\lim\limits_{x\to-\infty}[h(x)\times 4]$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}$ e $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(h(x)\right)^3$.

3. Considera f e g duas funções reais de variável real, b e c dois números reais tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ e a ponto aderente aos domínios das funções f e g ou igual a $\pm\infty$. Que relações estabeleces na determinação do limite das operações entre as funções f e g?

Tarefa 2. Produto de uma função limitada por uma função com limite nulo

Considera a funções reais de variável real h e t definidas, respetivamente, por: $h(x) = \cos x$; $t(x) = x^2 - 4$

1. Esboça os gráficos das funções h e t no mesmo sistema de eixos cartesiano.
2. Comenta a seguinte afirmação: "A função h é limitada."
3. Por observação do gráfico da função t, determina $\lim\limits_{x\to 2} t(x)$.
4. O que concluis quanto ao $\lim\limits_{x\to 2}[h(x)\times t(x)]$.
5. Dadas duas funções reais de variável real f e g e a um ponto aderente aos seus domínios, sabendo que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e g é limitada, determina $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\times g(x)]$.

As tarefas 1 e 2 são constituídas por uma sequência lógica de itens de modo a orientar o aluno a uma generalização. Com o item 1 da tarefa 1 pretendia que os alunos, por observação gráfica, determinassem o limite, em pontos aderentes ao domínio, das funções f e g, bem como o limite das operações com essas funções. Com o item 2 da tarefa 1, pretendia que os alunos determinassem o limite, quando $x \to \pm\infty$. Já com o item 3, da tarefa 1, esperava que os alunos generalizassem a determinação dos limites das operações entre funções, através do que realizaram no item 1 e 2 (Tabela 6).

Com a Tarefa 2, os alunos determinaram o limite do produto entre uma função limitada e uma função de limite nulo. Com o item 1 desta tarefa, os alunos tinham de realizar os esboços gráficos das funções h e t para auxiliar na resposta dos itens seguintes. Com o item 2, os alunos deveriam concluir que a função h é limitada. O item 3 tinha como pressuposto determinar o limite da função t e o item 4 determinar o limite do produto entre a função h e t. Com o item 5, esperava que os alunos generalizassem o limite do produto entre uma função limitada e uma função de limite nulo.

Para efetuar o esboço gráfico das funções contempladas na tarefa 1 e na tarefa 2, os alunos recorreram a esquemas de uso e a esquemas de ação instrumentada da calculadora gráfica, ao editarem as expressões que representam as funções e ao escolherem a janela de visualização adequada ao gráfico de cada função. Para determinar o limite das funções através da observação gráfica é previsível que os alunos tirem partido das potencialidades da calculadora gráfica.

Exploração das tarefas

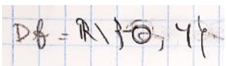
A análise das respostas dos alunos ao item 1, da Tarefa 1, incide sobre a informação obtida no estudo de cada uma das funções e das respetivas operações. A seguinte tabela diz respeito à performance dos alunos no estudo da função f (Tabela 1).

Tabela 6 - Frequência (%) do tipo de respostas ao estudo da função f do item 1 da Tarefa 1 $(n = 17)$

Critérios	**C**	**PC**	**I**	**NR**
Determinar o domínio da função f.	8 (47,06%)	–	2 (11,76%)	7 (41,18%)
Efetuar o esboço gráfico da função f.	–	6 (35,29%)	4 (23,53%)	7 (41,18%)
Determinar o limite da função f, no ponto aderente $x = 1$.	10 (58,82%)	–	–	7(41,18%)

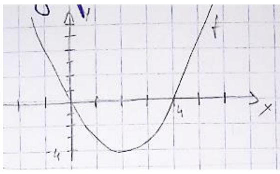
Da análise das respostas dos alunos ao estudo da função f, constata-se que um número significativo de alunos (41,18%) não apresenta resposta ao estudo da função f. Alguns alunos (47,06%) apresentam respostas consideradas corretas na determinação do domínio da função f e dois alunos (11,76%) apresentam respostas incorretas, como ilustra a resposta do aluno A6 (Figura 21).

Figura 21 - Resposta incorreta do aluno A6 na determinação do domínio da função f, item 1 da tarefa 1.



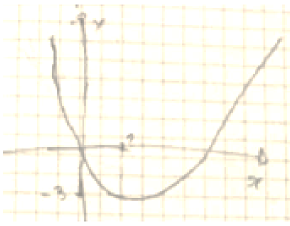
Da análise das respostas dos alunos relativamente à representação gráfica da função f, nenhum aluno apresenta um esboço rigoroso e, consequentemente, nenhum aluno apresenta uma resposta considerada correta. Alguns alunos (35,29%) apresentam esboços gráficos da função f sem indicar a janela de visualização utilizada na calculadora gráfica ou sem rotular os eixos coordenados nem a função f, resultando em respostas consideradas parcialmente corretas, como exemplifica a resolução do aluno A2, que não identifica a janela de visualização utilizada (Figura 22).

Figura 22 - Resposta parcialmente correta do aluno A2 na realização do esboço da função f, item 1 da tarefa 1.



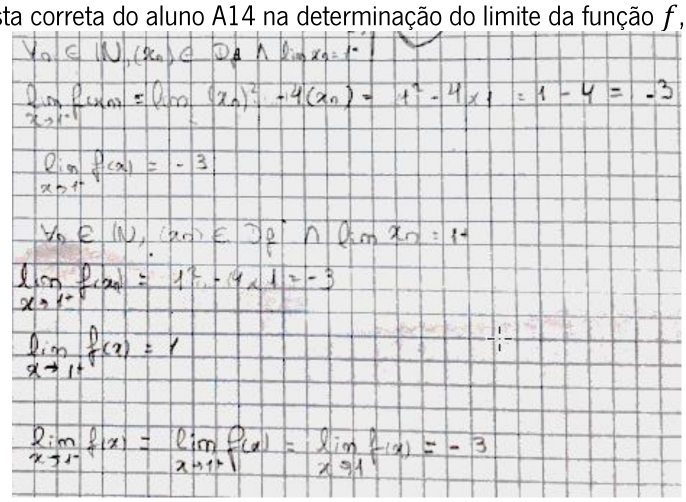
As resoluções que apresentam esboços gráficos que não representam a função f que lhes foi fornecido pela calculadora gráfica são consideradas resposta incorretas, tal como o esboço gráfico do aluno A9 (Figura 23), que representa incorretamente o vértice da parábola.

Figura 23 - Resposta incorreta do aluno A9 na realização do esboço da função f, item 1 da tarefa 1.



A maioria dos alunos (58,82%) apresenta respostas consideradas corretas na determinação do limite da função f no ponto aderente $x = 1$, como exemplifica a resolução do aluno A14 (Figura 24), que determinam o limite da função f por definição de limite segundo Heine.

Figura 24 - Resposta correta do aluno A14 na determinação do limite da função f, item 1 da tarefa 1.



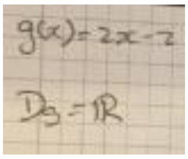
Relativamente ao estudo da função g, procedeu-se a uma análise das respostas dos alunos análoga à efetuada com as da função f (Tabela 7).

Tabela 7 - Frequência (%) do tipo de respostas ao estudo da função g do item 1 da Tarefa 1 ($n = 17$)

Critérios	**C**	**PC**	**I**	**NR**
Determinar o domínio da função g.	8 (47,06%)	–	2 (11,76%)	7 (41,18%)
Efetuar o esboço gráfico da função g.	–	5 (29,41%)	5 (29,41%)	7 (41,18%)
Determinar o limite da função g, no ponto aderente $x = 1$.	9 (52,94%)	–	1 (5,88%)	7(41,18%)

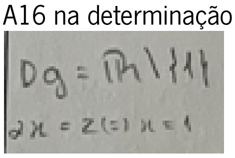
Na determinação do domínio da função g, um número significativo de alunos (41,18%) não efetua qualquer resposta. Alguns alunos (47,06%) apresentam uma resposta considerada correta, como exemplifica a resolução do aluno A10 (Figura 25).

Figura 25 - Resposta correta do aluno A10 na determinação do domínio da função g, item 1 da tarefa 1.



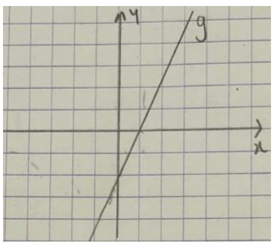
Dois alunos (11,76%) apresentam uma resposta considerada incorreta, como exemplifica a resolução do aluno A16 (Figura 26), que apresenta a resolução da equação $2x = 2$, estando presente a ideia errônea de que a função não poderia ser nula.

Figura 26 - Resposta incorreta do aluno A16 na determinação do domínio da função g, item 1 da tarefa 1.



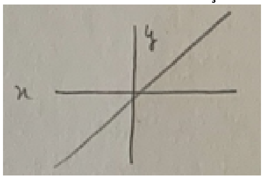
Quanto ao esboço gráfico da função g, um número significativo de alunos (41,18%) não apresenta qualquer resposta. Os restantes alunos recorrem a esquemas de ação instrumentada da calculadora gráfica para visualizarem um esboço gráfico da função. Porém, nenhum aluno apresenta um esboço adequado. Alguns alunos (29,41%) apresentam esboços gráficos pouco rigorosos, sem explicitar a janela de visualização utilizada na calculadora ou não rotulam os eixos coordenados, resultando em respostas consideradas parcialmente corretas, como ilustra o esboço gráfico do aluno A12 (Figura 27).

Figura 27 -Resposta parcialmente correta do aluno A12 na realização do esboço da função g, item 1 da tarefa 1.



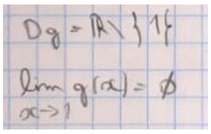
Os restantes alunos (29,41%) apresentam respostas consideradas incorretas, como exemplifica a resolução do aluno A16 que ao esboçar o gráfico da função g, indicia que interseta incorretamente a origem do referencial (Figura 28).

Figura 28 - Resposta incorreta do aluno A16 na realização do esboço da função g, item 1 da tarefa 1.



Na determinação do limite da função g, no ponto aderente $x = 1$, a maioria dos alunos (52,94%) apresenta respostas corretas. Um aluno (5,88%) apresenta uma resposta incorreta, referindo que o limite é vazio, o que indicia dever-se à incorreta determinação do domínio da função g, visto que, para este aluno, o 1 não pertence ao domínio da função g (Figura 29).

Figura 29 - Resposta incorreta do aluno A6 na determinação do limite da função g, item 1 da tarefa 1.



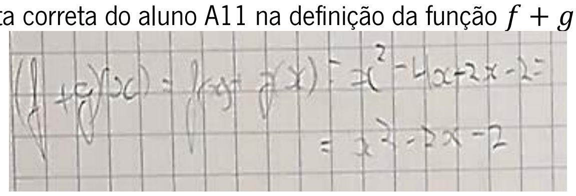
Para o estudo da função soma entre as funções f e g, procedeu-se a uma análise das respostas dos alunos semelhante à efetuada anteriormente (Tabela 8).

Tabela 8 - Frequência (%) do tipo de respostas ao estudo da função $f + g$ do item 1 da Tarefa 1 ($n = 17$)

Critérios	**C**	**PC**	**I**	**NR**
Definir a função $f + g$	10 (58,82%)	–	–	7 (41,18%)
Determinar o domínio da função $f + g$.	8 (47,06%)	–	2 (11,76%)	7 (41,18%)
Efetuar o esboço gráfico da função $f + g$.	–	5 (29,41%)	5 (29,41%)	7 (41,18%)
Determinar o limite da função $f + g$, no ponto aderente $x = 1$.	9 (52,94%)	1 (5,88%)	–	7 (41,18%)

Da análise do tipo de respostas dos alunos no estudo da função $f + g$, constata-se que um número significativo de alunos (41,18%) não apresenta resposta. Os restantes alunos apresentam respostas corretas na definição da função $f + g$, como exemplifica a resolução do aluno A11 (Figura 30).

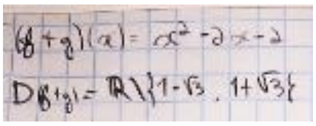
Figura 30 - Resposta correta do aluno A11 na definição da função $f + g$ item 1 da tarefa 1.



Na determinação do domínio da função soma, alguns alunos (47,06%) apresentam respostas corretas. Dois alunos (11,76%) apresentam respostas incorretas, como exemplifica a resolução do aluno

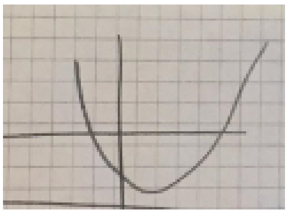
A6, referindo que o domínio da função não admite os zeros da expressão que traduz a soma das expressões das funções em estudo (Figura 31).

Figura 31 - Resposta incorreta do aluno A6 na determinação do domínio da função $f + g$, item 1 da tarefa 1.



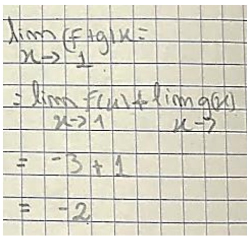
Os esboços gráficos da função $f + g$ apresentados pelos alunos são poucos rigorosos, refletindo assim, que nenhum aluno apresenta resposta correta. Assim, alguns alunos (29,41%) apresentam respostas parcialmente corretas, sem identificar os eixos coordenados ou sem referir a janela de visualização utilizada na calculadora gráfica. Os restantes alunos (29,41%) apresentam esboços pouco rigorosos, com falta de informação no seu esboço, tal como exemplifica a resolução do aluno A15, que nem identifica os eixos coordenados (Figura 32).

Figura 32 - Resposta incorreta do aluno A15 na realização do esboço da função $f + g$, item 1 da tarefa 1.



Relativamente à determinação do limite da função soma, no ponto aderente $x = 1$, a maioria dos alunos (52,94%) responde corretamente. Um aluno (5,88%) apresenta uma resposta parcialmente correta, tal como ilustra a resolução do aluno A12 (Figura 33), que realiza corretamente o limite da função soma como sendo a soma dos limites, mas não determina corretamente o limite da função g.

Figura 33 - Resposta parcialmente correta do aluno A12 na determinação do limite da função $f + g$, item 1 da tarefa 1.



Para o estudo da função diferença entre as funções f e g, procedeu-se a uma análise das respostas dos alunos idêntica às efetuadas anteriormente (Tabela 9).

Tabela 9 - Frequência (%) do tipo de respostas ao estudo da função $f - g$ do item 1 da Tarefa 1 ($n = 17$)

Critérios	**C**	**PC**	**I**	**NR**
Definir a função $f - g$	10 (58,82%)	–	–	7 (41,18%)
Determinar o domínio da função $f - g$.	8 (47,06%)	–	2 (11,76%)	7 (41,18%)
Efetuar o esboço gráfico da função $f - g$.	–	5 (29,41%)	5 (29,41%)	7 (41,18%)
Determinar o limite da função $f - g$, no ponto aderente $x = 1$.	9 (52,94%)	–	1 (5,88%)	7 (41,18%)

Da análise dos tipos de respostas dos alunos no estudo da função $f - g$, constata-se que os alunos mantêm a frequência de respostas ao estudo da função $f + g$ (Tabela 8). Assim, um número significativo de alunos (41,18%) não apresenta resposta ao estudo da função $f - g$. A maioria dos alunos (58,82%) apresenta a definição da função $f - g$ corretamente. Relativamente à determinação do domínio da função $f - g$, dois alunos (11,76%) continuam a apresentar uma resposta incorreta, referindo que a função não admite os zeros da expressão que traduz a função subtração. Os esboços gráficos da função $f - g$ dos alunos continuam pouco rigorosos (29,41%) e apresentam falta de atenção na transcrição do que observam na calculadora para o caderno, resultando em respostas incorretas (29,41%). A maioria dos alunos (52,94%) apresenta respostas corretas na determinação do limite da função $f - g$, no ponto aderente $x = 1$. O aluno A12 (5,88%) volta a referir incorretamente que o limite da função g é um, obtendo uma resposta incorreta na determinação do limite da função $f - g$.

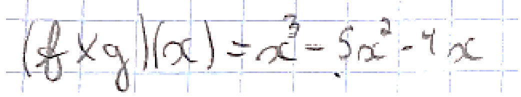
Para o estudo da função produto entre as funções f e g, procedeu-se a uma análise das respostas dos alunos análoga à efetuada anteriormente (Tabela 10).

Tabela 10 - Frequência (%) do tipo de respostas ao estudo da função $f \times g$ do item 1 da Tarefa 1 ($n = 17$)

Critérios	**C**	**PC**	**I**	**NR**
Definir a função $f \times g$.	9 (52,94%)	–	1 (5,88%)	7 (41,18%)
Determinar o domínio da função $f \times g$.	8 (47,06%)	–	2 (11,76%)	7 (41,18%)
Efetuar o esboço gráfico da função $f \times g$.	–	6 (35,29%)	4 (23,53%)	7 (41,18%)
Determinar os limites laterias da função $f \times g$, no ponto aderente $x = 1$.	6 (35,29%)	–	4 (23,53%)	7 (41,18%)

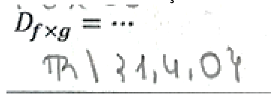
Da análise do tipo de respostas dos alunos no estudo da função produto, constata-se que um número significativo de alunos (41,18%) não apresenta resposta. A maioria dos alunos (52,94%) apresenta respostas consideradas corretas na definição da função $f \times g$. O aluno A6 apresenta uma resolução incorreta (5,88%), dado que dividiu a expressão que obteve para a esta função por 2 (Figura 34).

Figura 34 - Resposta incorreta do aluno A6 na definição da função $f \times g$, item 1 da tarefa 1.



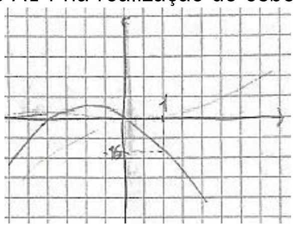
Um número significativo (47,06%) de alunos determinou corretamente o domínio da função produto. Porém, dois alunos (11,76%) apresentam respostas consideradas incorretas, como exemplifica a resolução do aluno A16 (Figura 35).

Figura 35 - Resposta incorreta do aluno A16 na determinação do domínio da função $f \times g$, item 1 da tarefa 1.



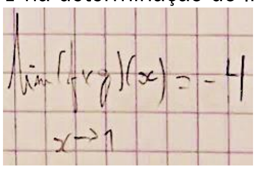
Na realização do esboço gráfico da função $f \times g$, alguns alunos (35,29%) apresentam respostas parcialmente corretas, uma vez que, apresentam esboços pouco cuidados. Os restantes alunos (23,53%) apresentam esboços gráficos considerados incorretos, tal como ilustra a resolução do aluno A14 (Figura 36).

Figura 36 - Respostas incorreta do aluno A14 na realização do esboço da função $f \times g$, item 1 da tarefa 1.



Na determinação do limite da função produto no ponto aderente $x = 1$, alguns alunos (35,29%) apresentam respostas consideradas corretas. Porém, alguns alunos (23,53%) apresentam respostas consideradas incorretas, tal como ilustra a resolução do aluno A11 (Figura 37), que determina incorretamente o limite devido ao seu esboço gráfico pouco rigoroso.

Figura 37 - Resposta incorreta do aluno A11 na determinação do limite da função $f \times g$, item 1 da tarefa 1.



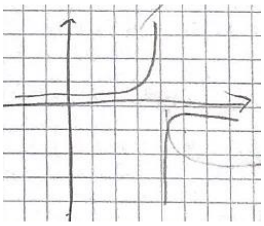
Analogamente à análise realizada no estudo das funções anteriores, a Tabela 11 expressa a frequência (%) dos tipos de respostas dos alunos ao estudo da função quociente entre as funções f e g.

Tabela 11 - Frequência (%) do tipo de respostas ao estudo da função $\frac{f}{g}$ do item 1 da Tarefa 1 $(n = 17)$

Critérios	**C**	**PC**	**I**	**NR**
Definir a função $\frac{f}{g}$	10 (58,82%)	–	–	7 (41,18%)
Determinar o domínio da função $\frac{f}{g}$	10 (58,82%)	–	–	7 (41,18%)
Efetuar o esboço gráfico da função $\frac{f}{g}$.	–	5 (29,41%)	5 (29,41%)	7 (41,18%)
Determinar os limites laterias da função $\frac{f}{g}$, no ponto aderente $x = 1$.	6 (35,29%)	–	4 (23,53%)	7 (41,18%)

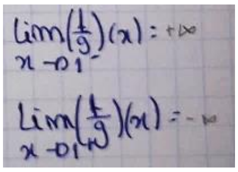
Da análise do tipo de respostas dos alunos no estudo da função $\frac{f}{g}$, verifica-se que um número significativo de alunos (41,18%) não apresenta resposta. Os restantes alunos (58,82%) apresentam respostas corretas quer na definição da função $\frac{f}{g}$, quer na determinação do domínio da função quociente. Tal como se constata nas situações anteriores, os alunos apresentam esboços gráficos pouco rigorosos. Alguns alunos (29,41%) apresentam esboços considerados incorretos, como exemplifica a resolução do aluno A14 (Figura 38), que apresenta um esboço que não representa a função $\frac{f}{g}$.

Figura 38 - Resposta incorreta do aluno A14 na realização do esboço gráfico da função $\frac{f}{g}$, item 1 da tarefa 1.



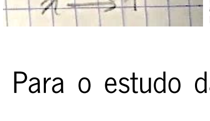
Relativamente à determinação dos limites laterais da função quociente no ponto de aderência $x = 1$, alguns alunos (35,29%) apresentam respostas corretas, como exemplifica a resolução do aluno A2 (Figura 39).

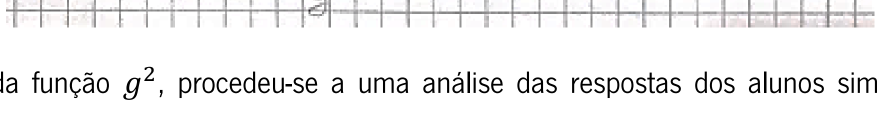
Figura 39 - Resposta correta do aluno A2 na determinação dos limites laterias da função $\frac{f}{g}$, item 1 da tarefa 1.



Alguns alunos (23,53%) apresentam respostas consideradas incorretas, uma vez que, não respondem ao que era pedido neste item, tal como ilustram as respostas dos alunos A4 e A14 (Figura 40). Estes alunos respondem ao limite da função no ponto de aderência $x = 1$ ao invés dos limites laterais da função f no ponto 1.

Figura 40 - Resposta incorreta dos alunos A4 e A14 na determinação dos limites laterias da função $\frac{f}{g}$, item 1 da tarefa 1





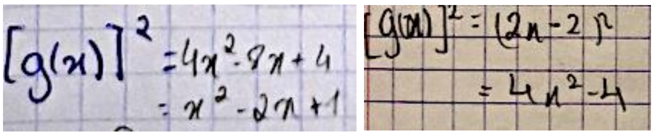
Para o estudo da função g^2, procedeu-se a uma análise das respostas dos alunos similar à efetuada anteriormente (Tabela 12).

Tabela 12 – Frequência (%) do tipo de respostas ao estudo da função g^2 do item 1 da Tarefa 1 ($n = 17$)

Critérios	**C**	**PC**	**I**	**NR**
Definir a função g^2	6 (35,29%)	–	4 (23,53%)	7 (41,18%)
Determinar o domínio da função g^2.	8 (47,06%)	–	2 (11,76%)	7 (41,18%)
Efetuar o esboço gráfico da função g^2.	–	2 (11,76%)	8 (47,06%)	7 (41,18%)
Determinar os limites laterias da função g^2, no ponto aderente $x = 1$.	7 (41,18%)	–	3 (17,65%)	7 (41,18%)

Da análise do tipo de respostas dos alunos no estudo da função g^2, constata-se que um número significativo de alunos (41,18%) não apresenta resposta. Na definição da função g^2, alguns alunos (35,29%) apresentam respostas corretas. Porém, alguns alunos apresentam respostas incorretas (23,53%), como exemplifica as resoluções dos alunos A2 e A12 (Figura 41).

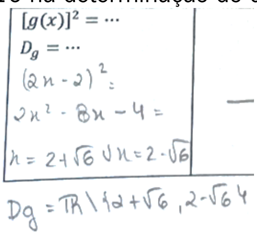
Figura 41 - Resposta incorreta dos alunos A2 e A12 na definição da função g^2, item 1 da tarefa 1.



O aluno A2 apresenta uma resolução incorreta, pois dividiu a expressão que obteve por 4. Já o aluno A12 denota dificuldades em aplicar o quadrado da diferença de dois termos.

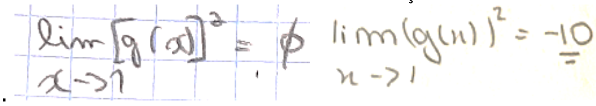
Na determinação do domínio da função g^2, alguns alunos (47,06%) apresentam respostas corretas. Mas alguns alunos (11,76%) apresentam respostas consideradas incorretas, como ilustra a resolução do aluno A16, que além de definir incorretamente a função g^2, determina o domínio da função de tal forma que a função não admite os seus zeros (Figura 42).

Figura 42 - Resposta incorreta do aluno A16 na determinação do domínio da função g^2, item 1 da tarefa 1.



Na determinação do limite da função g^2 no ponto aderente $x = 1$, um número significativo de alunos (41,18%) apresenta respostas corretas. Alguns alunos (17,65%) apresentam respostas incorretas, tal como exemplificam as resoluções dos alunos A6 e A16, que apresentam o limite incorretamente devido à incorreta definição da função g^2 (Figura 43).

Figura 43 - Resposta incorreta dos alunos A6 e A16 na determinação do limite da função g^2, item 1 da tarefa 1



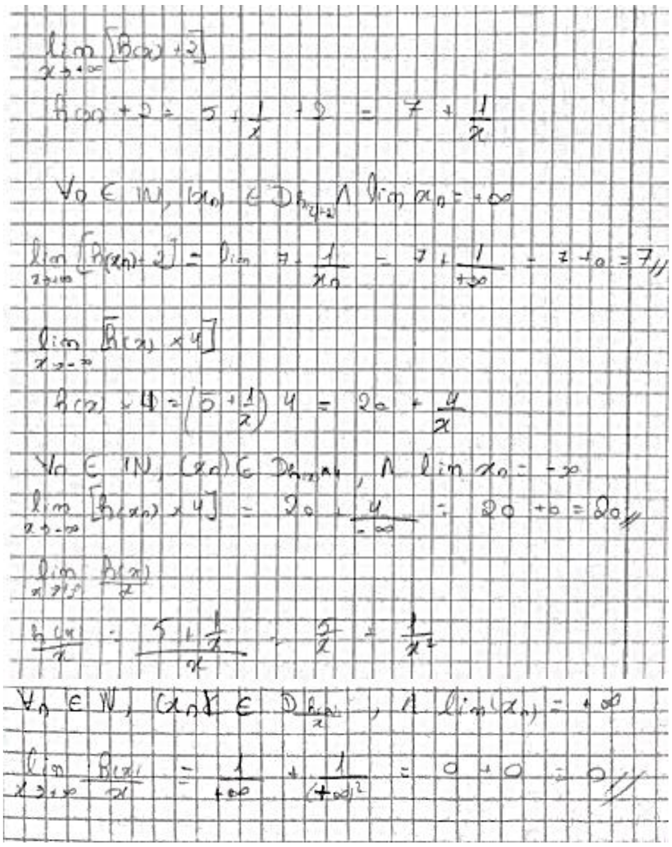
A Tabela 13 expressa o tipo de respostas dos alunos ao item 2 e 3 da tarefa 1.

Tabela 13 - Frequência (%) do tipo de respostas dos alunos ao item 2 e 3 da Tarefa 1 $(n = 17)$

Critérios	**C**	**PC**	**I**	**NR**
Determinar $\lim_{x\to+\infty} [h(x) + 2]$.	3 (17,65%)	6 (35,29%)	–	8 (47,06%)
Determinar $\lim_{x\to-\infty} [h(x) \times 4]$.	3 (17,65%)	6 (35,29%)	–	8 (47,06%)
Determinar $\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x}$.	3 (17,65%)	6 (35,29%)	–	8 (47,06%)
Determinar $\lim_{x\to-\infty} \left(h(x)\right)^3$.	1 (5,88%)	4 (23,53%)	2 (11,76%)	10 (58,82%)
Generalizar o limite das operações entre funções.	2 (11,76%)	3 (17,65%)	1 (5,88%)	10 (58,82%)

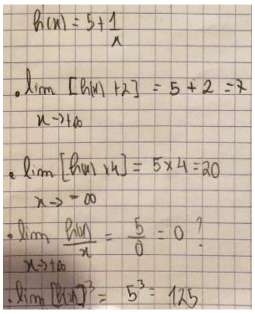
Na determinação dos limites do item 2, um número significativo de alunos (47,06%) não apresenta resposta, porém há um aumento de alunos (58,82%) que não determina o $\lim_{x\to-\infty} \left(h(x)\right)^3$. Alguns alunos apresentam respostas consideradas corretas na determinação dos limites das funções do item 2, como exemplifica a resolução do aluno A14, que utiliza a definição de limite segundo Heine (Figura 44).

Figura 44 - Resposta correta do aluno A14 na determinação dos limites do item 2 da tarefa 2.



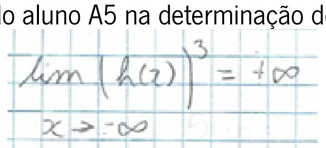
Alguns alunos apresentam o resultado dos limites do item 2 corretamente, mas não justificam os seus resultados, isto é, não utilizam a definição de limite segundo Heine nem recorrem à observação do gráfico da função. Estes alunos apresentam respostas consideradas parcialmente corretas, como exemplifica a resolução do aluno A12 (Figura 45).

Figura 45 - Resposta parcialmente correta do aluno A12 na determinação dos limites do item 2 da tarefa 2.



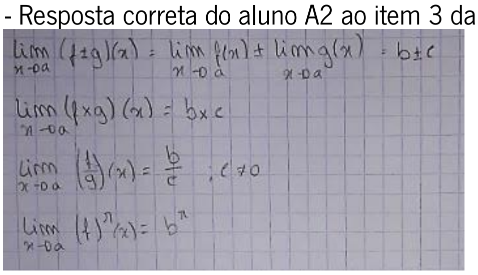
Da análise da Tabela 13, observa-se que os alunos sentiram maior dificuldade na determinação de $\lim_{x \to -\infty} \left(h(x)\right)^3$. Inclusive, há respostas consideradas incorretas (11,76%), como ilustra a resolução do aluno A5, que refere que o limite é $+\infty$ (Figura 46)

Figura 46 - Resposta incorreta do aluno A5 na determinação dos limites do item 2 da tarefa 1.



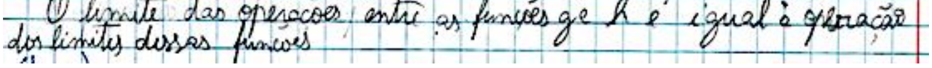
Por fim, observando o item 1 e 2 da tarefa 1, o item 3 tem como pressuposto generalizar o limite das operações entre funções. A maioria dos alunos (58,82%) não apresenta resposta a este item. Dois alunos (11,76%) apresentam respostas consideradas corretas, como ilustra a resolução do aluno A2 (Figura 47).

Figura 47 - Resposta correta do aluno A2 ao item 3 da tarefa 1.



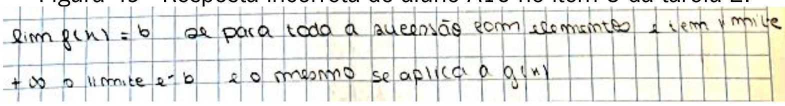
Alguns alunos (17,65%) apresentam respostas consideradas parcialmente corretas, como ilustra a resolução do aluno A5, que refere que o limite das operações entre funções é igual às operações dos limites dessas funções, mas não refere quais as operações (Figura 48).

Figura 48 - Resposta parcialmente correta do aluno A5 no item 3 da tarefa 1.



O aluno A16 apresenta uma resposta considerada incorreta, referindo a definição de limite segundo Heine, mas não respondendo ao que era pedido no item 3 (Figura 49).

Figura 49 - Resposta incorreta do aluno A16 no item 3 da tarefa 2.



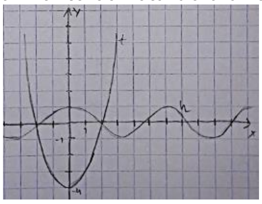
Por fim, a Tabela 14 expressa os tipos de respostas dos alunos à tarefa 2, sobre o estudo do limite do produto entre uma função limitada e uma função de limite nulo.

Tabela 14 - Frequência (%) do tipo de respostas dos alunos à Tarefa 2 $(n = 17)$

Itens e Critérios	C	PC	I	NR
1. Efetuar o esboço gráfico das funções h e t.	–	4 (23,53%)	4 (23,53%)	9 (52,94%)
2. Comentar a afirmação "a função h é limitada".	7 (41,18%)	1 (5,88%)	–	9 (52,94%)
3. Determinar o $\lim_{x \to 2} t(x)$.	7 (41,18%)	–	1 (5,88%)	9 (52,94%)
4. Concluir o $\lim_{x \to 2}[h(x) \times t(x)]$.	7 (41,18%)	–	1 (5,88%)	9 (52,94%)
5.Generalizar o limite do produto entre uma função limitada e uma função de limite nulo.	6 (35,29%)	–	–	11 (64,71%)

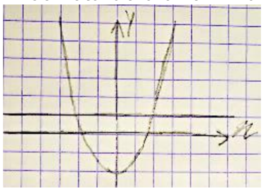
Da análise das resoluções dos alunos à tarefa 2, constata-se que a maioria dos alunos não apresenta qualquer resposta aos itens 1, 2, 3 e 4 (52,94%), havendo um aumento de alunos (64,71%) que não apresenta resposta ao item 5, na qual era pedida a generalização do estudo realizado nos itens anteriores. Os alunos mantêm os seus esboços pouco rigorosos e assim nenhum aluno apresenta uma resposta considerada correta. Porém, alguns alunos (23,53%) apresentam respostas consideradas parcialmente corretas, como exemplifica a resolução do aluno A2, que esboça as funções h e t corretamente, mas não refere a janela de visualização utilizada na calculadora gráfica (Figura 50).

Figura 50 - Resposta parcialmente correta do aluno A2 ao item 1 da tarefa 2.



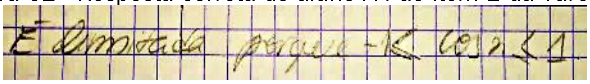
Os restantes alunos (23,53%) apresentam respostas consideradas incorretas na realização do esboço gráfico das funções h e t, como exemplifica a resolução do aluno A4, que além de realizar um esboço pouco rigoroso, apresenta o esboço da função h, definida por $\cos(x)$, como uma função constante (Figura 51).

Figura 51 - Resposta incorreta do aluno A4 ao item 1 da Tarefa 2.



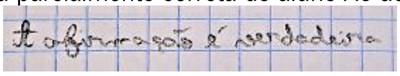
Quanto aos comentários dos alunos à afirmação “A função h é limitada”, alguns alunos (41,18%) apresentam respostas consideradas corretas, justificando a afirmação, tal como ilustra a resolução do aluno A4 (Figura 52).

Figura 52 - Resposta correta do aluno A4 ao item 2 da Tarefa 2.



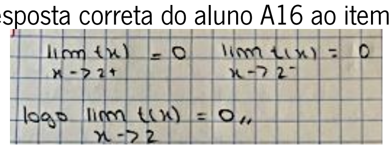
O aluno A6 apresenta uma resposta considerada parcialmente correta (5,88%), uma vez que apenas menciona que a afirmação é verdadeira sem qualquer justificação (Figura 53).

Figura 53 - Resposta parcialmente correta do aluno A6 ao item 2 da tarefa 2.



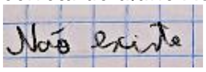
Um número significativo de alunos (41,18%) determinou corretamente o $\lim_{x \to 2} t(x)$, como exemplifica a resolução do aluno A16, que por observação gráfica determina que o limite é zero (Figura 54).

Figura 54 - Resposta correta do aluno A16 ao item 3 da tarefa 2.



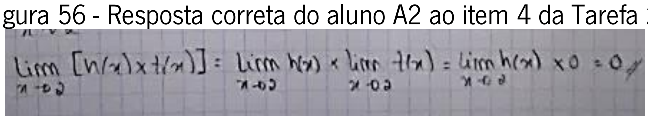
O aluno A6 apresenta uma resposta considerada incorreta (5,88%), este afirma que o limite da função t no ponto aderente $x = 2$ não existe (Figura 55).

Figura 55 - Resposta incorreta do aluno A6 ao item 4 da tarefa 2.



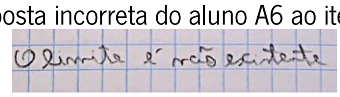
Na determinação do limite do produto entre a função h e t, um número significativo de alunos (41,18%) apresenta respostas acertadas, tal como ilustra a resolução do aluno A2 (Figura 56).

Figura 56 - Resposta correta do aluno A2 ao item 4 da Tarefa 2.



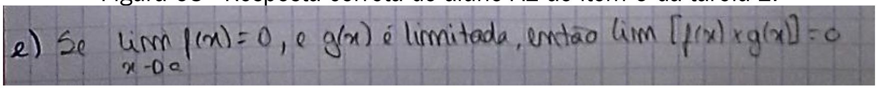
Porém, o aluno A6 referiu que o limite da função t, no ponto aderente $x = 2$, não existia então também concluiu erroneamente que o limite do produto entre as duas funções não existe (Figura 57).

Figura 57 - Resposta incorreta do aluno A6 ao item 4 da tarefa 2.



Na generalização do cálculo do limite do produto entre uma função limitada e uma função cujo limite é nulo, alguns alunos (35,29%) apresentam respostas consideradas corretas, como exemplifica a resolução do aluno A2 (Figura 58). Os restantes alunos (64,71%) não apresentam qualquer resposta.

Figura 58 - Resposta correta do aluno A2 ao item 5 da tarefa 2.

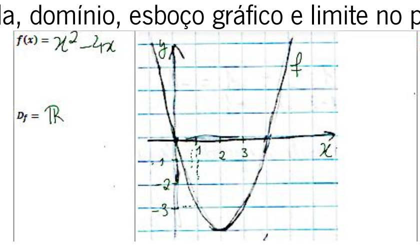


Discussão da Tarefa

No momento da discussão da tarefa 1, comecei por projetar a Tabela do item 1 com os esboços gráficos, realizados pelos alunos, das funções f e g e as respetivas operações entre estas funções. No estudo da função f, projetei a resolução parcialmente correta do aluno A5 e pelo diálogo com os alunos determinamos o domínio e o limite da função f (Figura 59).

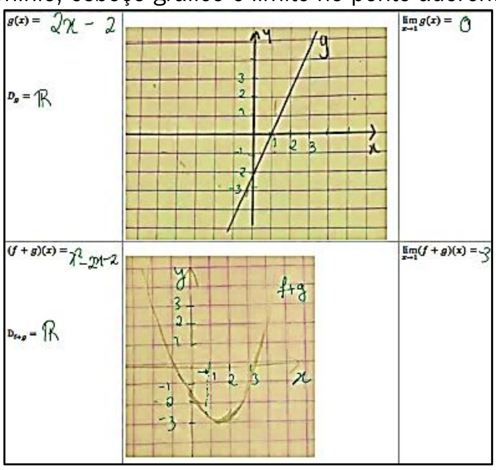
Professora:	A função f está definida no enunciado. Mas qual é o seu domínio?
A11:	Não é $\mathbb{R}$?
Professora:	Há algum aluno que discorde?
A16:	Eu coloquei que a função não poderia ser nula, $\mathbb{R}\backslash\{0,4\}$.
Professora:	A função f é uma função polinomial, certo?
A16:	Sim, então tem domínio $\mathbb{R}$.
Professora:	Certo! Aqui está o esboço gráfico de um aluno, saliento novamente que é necessário identificar os eixos coordenados e a função que representa o esboço, bem como alguns pontos relevantes da função (acrescentei no esboço os eixos e alguns pontos, Figura 59). Por observação gráfica, qual o limite de f quando x tende para 1?
A9:	É -3.

Figura 59 - Quadro de aula, domínio, esboço gráfico e limite no ponto aderente $x = 1$ da função f



A discussão do estudo da função g e da função soma entre a função f e g, item 1 da tarefa 1, decorreu analogamente ao estudo da função f. Através do diálogo com os alunos foi realizado o preenchimento da tabela (Figura 60).

Figura 60 - Quadro de aula, domínio, esboço gráfico e limite no ponto aderente $x = 1$ da função g e $f + g$



Relativamente ao estudo da função diferença entre f e g, projetei uma resolução parcialmente correta, do aluno A5 cuja escala do eixo do x era diferente à escala do eixo do y, mas sem referir a janela de visualização nem alguns pontos (Figura 61).

Professora: Como está definida a função diferença entre f e g?

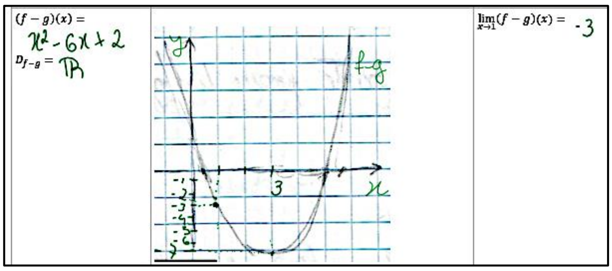
A13: É $x^2 - 6x + 2$ e tem domínio $\mathbb{R}$.

Professora: Certo, vamos observar o gráfico do aluno A5, por observação gráfica qual o limite da função diferença quando x tende para 1?

A16: Pelo gráfico, é -1, mas eu obtive -3.

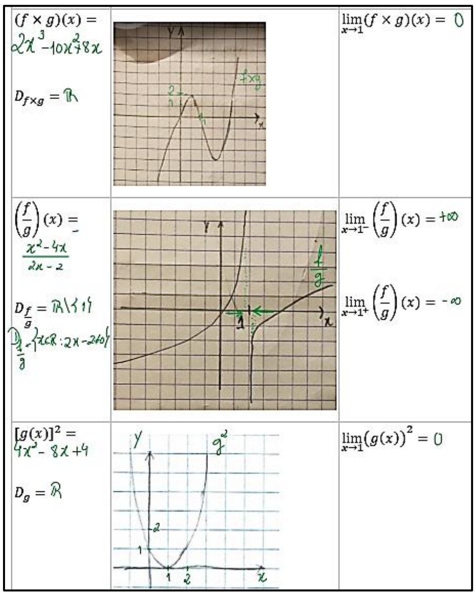
Professora: Certo, uma vez que o aluno A5 não indicou a janela de visualização utilizada na calculadora gráfica, nem referiu a escala utilizada nos eixos coordenados, poderíamos concluir o limite incorretamente, portanto a escala dos eixos coordenados seria esta.

Figura 61 - Quadro de aula, definição, domínio, esboço gráfico e limite da função $f - g$.



A discussão do estudo das restantes funções, $f \times g$, $\frac{f}{g}$ e g^2 procedeu-se de forma análoga, através do diálogo e por observação dos gráficos projetados, concluindo-se o item 1 da tarefa 1.

Figura 62 - Quadro de aula, definição, domínio, esboço gráfico e limite das funções $f \times g$, $\frac{f}{g}$ e g^2.



De forma a iniciar a discussão do item 2 da tarefa 1, foi projetado a resolução do cálculo dos limites, utilizando a definição de limite segundo Heine, do aluno A16 (Figura 63).

Professora: Consideram a resolução do aluno A16 correta, incorreta ou acrescentariam algo?

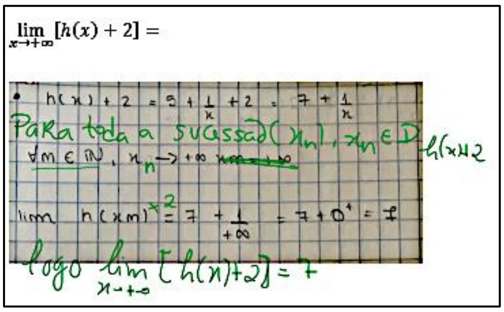
A9: Temos de utilizar a definição de limite segundo Heine, como o aluno A16 fez?

Professora: Como até agora só aprenderam assim, têm de resolver por definição de limite, ou então realizar o esboço gráfico e justificar o cálculo do limite.

A9: Na resolução do aluno A16 falta considerar uma sucessão de domínio igual a $h(x)+2$.

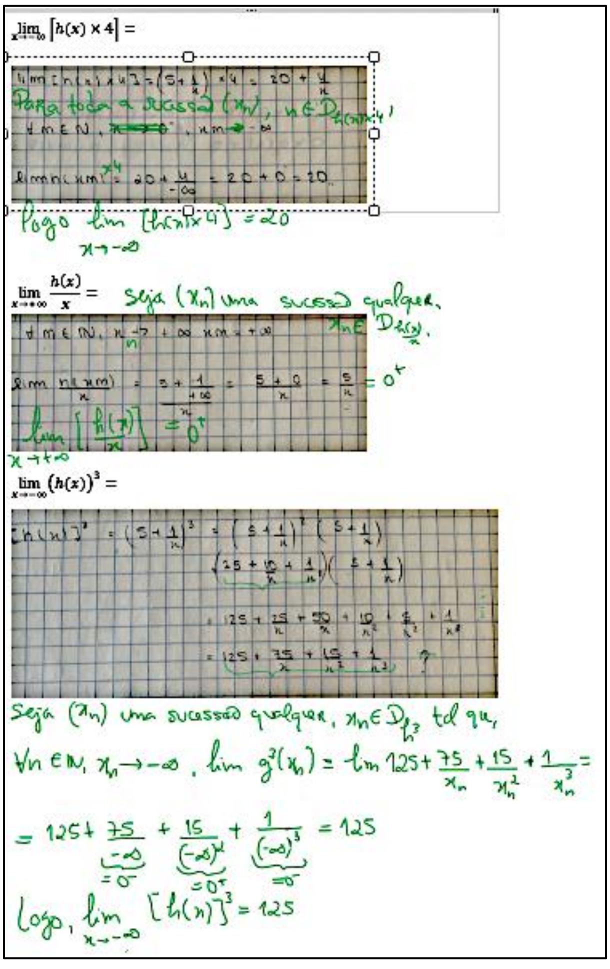
Professora: Muito bem.

Figura 63 - Quadro de aula, determinação do limite da função $h+2$.



A discussão da determinação dos restantes limites, item 2 da tarefa1, procedeu de forma análoga. Através do diálogo que foi possível dinamizar com os alunos concluíram os restantes limites (Figura 64).

Figura 64 - Quadro de aula, determinação dos limites do item 2 da tarefa 1.



Os alunos foram questionados sobre a generalização do cálculo do limite envolvendo operações entre as funções f e g , surgindo o seguinte diálogo:

Professora: A que conclusão chegaram na determinação do limite envolvendo operações entre duas funções?

A10: Eu tenho uma, mas está um bocado rebuscada, mas o limite das operações que nós temos com as funções, será o resultado das operações dos limites.

Professora: Vamos ver então cada operação, comecemos pela soma e diferença (Figura 45).

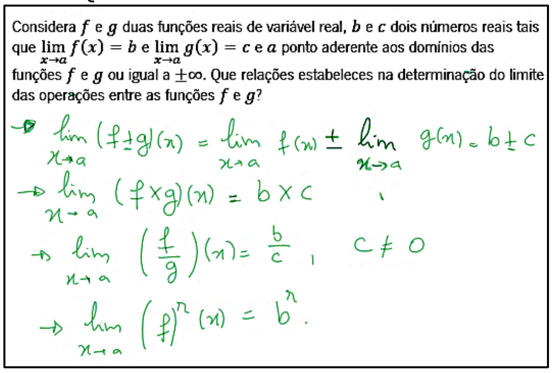
A10: Fica então o limite de f, quando x tende para a mais ou menos o limite de g, quando x tende para a, que pelo enunciado, ainda é igual a b mais ou menos c.

Professora: Esta propriedade também é válida quando x tende para $\pm\infty$?

A11: Sim, desde que sejam iguais.

A9: Isso comprovou-se na pergunta 2.

Figura 65 - Quadro de aula ao resolver o item 3 da tarefa 1.



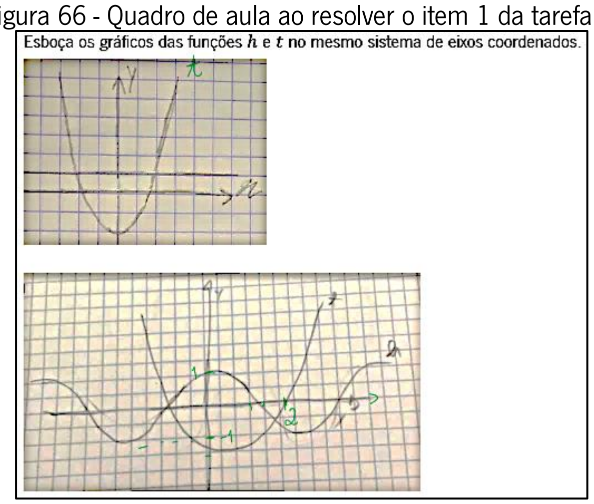
Ao dar início à tarefa 2, os alunos foram confrontados com um esboço gráfico incorreto e um parcialmente correto (Figura 66).

Professora: Observando o esboço gráfico aqui projetado, acham que este esboço representa a função h?

A11: A minha calculadora também apresentou a função assim, mas já resolvi o problema, a calculadora estava em graus.

Professora: Exatamente, temos de colocar a calculadora em radianos, nós sabemos que a função cosseno não é uma função afim.

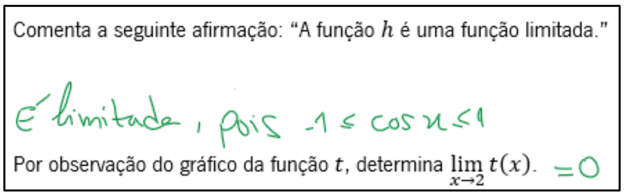
Figura 66 - Quadro de aula ao resolver o item 1 da tarefa 2.



Os alunos foram questionados acerca do item 2 e 3 da tarefa 2, surgindo o seguinte diálogo:

Professora: O que têm a dizer sobre a afirmação “A função h é limitada”?
A11: É limitada porque a função é convergente.
A9: A função nunca ultrapassa os valores de -1 e 1.
A11: Todas as funções convergentes são limitadas.
Professora: Então é limitada, pois a função cosseno é limitada pelos por valores -1 e 1(Figura 67).
A11: Sim.
Professora: Por observação do esboço gráfico, qual o limite da função t, quando x tende para 2?
A16: É zero.

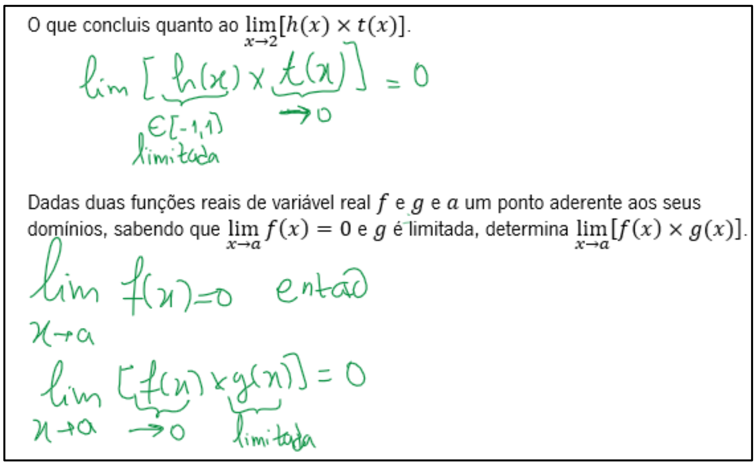
Figura 67 - Quadro de aula ao resolver os itens 2 e 3 da tarefa 2



Para finalizar a Tarefa 2, seguiu-se a discussão dos itens 4 e 5:

Professora: Agora, o que concluímos acerca do limite do produto entre as funções h e t?
A5: É o produto dos dois limites.
Professora: Assim? (Figura 68)
A5: Sim, e sabemos que o limite de t é zero e o limite de h será um número qualquer.
Professora: Número qualquer, pode ser 4? Ou ∞?
A5: Não pode se infinito porque é uma função limitada.
A16: Não pode ser 4, o limite da função cosseno pertence entre -1 e 1.
Professora: Certo, então o limite do produto é?
A5: Dá zero.
Professora: Sim, agora generalizando, sempre que tivermos o limite do produto entre uma função limitada e uma função cujo limite é nulo, qual será o seu limite?
A16: Dá sempre zero, como o limite de f é zero e o limite de g é sempre um número real, então zero vezes qualquer número real é zero. (Figura 68).

Figura 68 - Quadro de aula ao resolver os itens 4 e 5 da tarefa 2



3.3. Assíntotas ao gráfico de uma função racional

Na promoção da noção de assíntotas ao gráfico de funções racionais definidas por expressões do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, os alunos foram desafiados a formular conjeturas e a generalizar, através da resolução da seguinte tarefa:

Tarefa 1. Assíntotas ao gráfico de funções racionais definidas por expressões do tipo $y = a + \frac{b}{x-c}$

Considera as funções reais de variável real f, g, h e i definidas, respetivamente, por

$$f(x) = \frac{6x-8}{2x+4};\ g(x) = \frac{2x-8}{x-3};\ h(x) = \frac{1-x}{x+2};\ i(x) = \frac{4x-3}{2x-5}$$

1. Completa a seguinte tabela:

Função definida por uma expressão da forma $a + \frac{b}{x-c}$	Esboço gráfico	Domínio	Assíntotas verticais	Assíntotas horizontais	Monotonia
$f(x) = \cdots$					
$g(x) = \cdots$					
$h(x) = \cdots$					
$i(x) = \cdots$					

2. Considerando uma função real de variável real j definida por $j(x) = a + \frac{b}{x-c}$, com a, b e c números reais, determina as assíntotas verticais e horizontais ao gráfico da função j.

Para realizar o esboço gráfico das funções f, g, h e i, os alunos recorrem a esquemas de uso e a esquemas de uso instrumentada da calculadora gráfica, ao editarem as expressões que representam as funções e ao escolherem a janela de visualização adequada ao gráfico de cada função. Para determinar as assíntotas ao gráfico das funções através da observação gráfica é previsível que os alunos tirem partido das potencialidades da calculadora gráfica.

Exploração da Tarefa

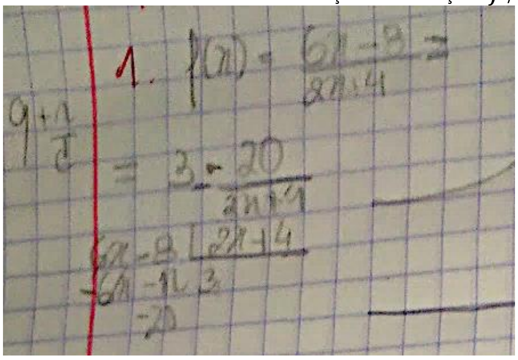
A análise das respostas dos alunos ao item 1, da Tarefa 1, incide sobre a informação obtida no estudo de cada uma das funções. A seguinte tabela diz respeito à performance dos alunos no estudo da função f (Tabela 15).

Tabela 15 - Frequência (%) do tipo de respostas ao estudo da função f do item 1 da Tarefa 1 $(n = 17)$

Critérios	**C**	**PC**	**I**	**NR**
Definir a função f por uma expressão da forma $a + \frac{b}{x-c}$.	6 (35,29%)	1 (5,88%)	1 (5,88%)	9 (52,94%)
Efetuar o esboço gráfico da função f.	2 (11,76%)	5 (29,41%)	3 (17,65%)	7 (41,18%)
Determinar o domínio da função f.	10 (58.82%)	–	–	7 (41,18%)
Determinar as assíntotas verticais ao gráfico da função f.	9 (52,94%)	–	1 (5,88%)	7 (41,18%)
Determinar as assíntotas horizontais ao gráfico da função f.	9 (52,94%)	–	1 (5,88%)	7 (41,18%)
Estudar a monotonia da função f.	1 (5,88%)	1 (5,88%)	7 (41,18%)	8 (47,06%)

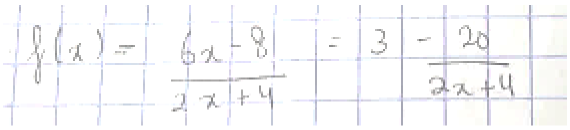
Da análise das respostas dos alunos ao estudo da função f, constata-se que a maioria dos alunos (52,94%) não apresenta resposta na definição da função f por uma expressão da forma $a+\frac{b}{x-c}$. Alguns alunos apresentam resoluções consideradas corretas (35,29%), pois realizam o algoritmo da divisão entre dois polinómios corretamente e apresentam a expressão da função na forma $a+\frac{b}{x-c}$, tal como exemplifica a resolução do aluno A4 (Figura 69).

Figura 69 - Resposta correta do aluno A4 na definição da função f, item 1 da Tarefa 1.



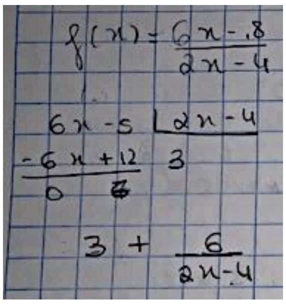
As respostas em que os alunos reescrevem a razão entre dois polinómios numa expressão equivalente que resulta da aplicação da noção de divisão inteira, mas sem a ilustrar, são consideradas parcialmente corretas (5,88%), tal como ilustra a resposta do aluno A7 (Figura 70).

Figura 70 - Resposta parcialmente correta do aluno A7 na definição da função f, item 1 da Tarefa 1



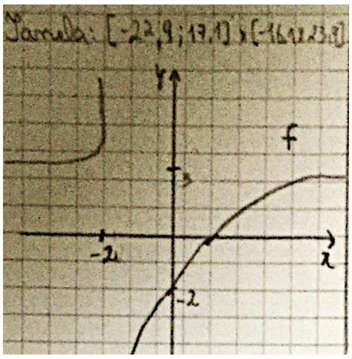
Quanto à resposta incorreta (5,88%), o aluno troca o termo constante de cada um dos polinómios e engana-se na soma de dois números inteiros, o que traduz um registo incorreto da expressão que representa a função f na forma $a+\frac{b}{x-c}$ (Figura 71).

Figura 71 - Resposta incorreta do aluno A16 na definição da função f, item 1 da Tarefa 1.



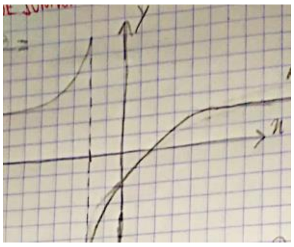
Após a representação analítica da função f segundo tal expressão, pretendia-se que os alunos a representassem graficamente. Alguns alunos (41,18%) não apresentam qualquer resposta. Somente dois alunos apresentam respostas consideradas corretas (11,76%), ao registarem o esboço gráfico da função f que obtiveram através de esquemas de ação instrumentada da calculadora gráfica, indicando a janela de visualização utilizada na calculadora gráfica e os rótulos dos eixos coordenados, como exemplifica a resolução do aluno A12 (Figura 72).

Figura 72 - Resposta correta do aluno A12 do esboço gráfico da função f, item 1 da Tarefa 1.



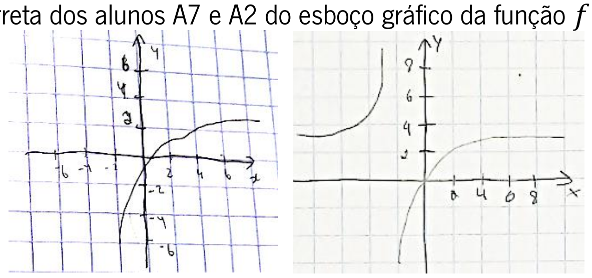
As resoluções que apresentam esboços gráficos da função f sem indicar a janela de visualização utilizada na calculadora gráfica ou sem rotular os eixos coordenados nem a função f são consideradas parcialmente corretas (29,41%), como exemplifica a resolução do aluno A3 (Figura 73).

Figura 73 - Resposta parcialmente correta do aluno A3 do esboço gráfico da função f, item 1 da Tarefa 1.



Os alunos que efetuam um esboço que não representa a função f que lhes foi fornecido, tal como os esboços gráficos representados pelos alunos A7 e A2 (Figura 74), apresentam resoluções incorretas (17,65%).

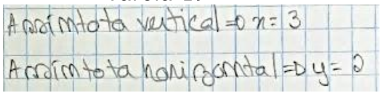
Figura 74 - Respostas incorreta dos alunos A7 e A2 do esboço gráfico da função f, item 1 da Tarefa 1.



A resolução do aluno A7 evidencia apenas um dos ramos da hipérbole do gráfico da função f, indiciando possivelmente que o aluno não utilizou uma janela de visualização adequada na calculadora gráfica. Já o aluno A2 mostra uma incorreta observação do esboço gráfico na calculadora, apesar de apresentar um dos ramos da hipérbole correta, o aluno esboça o outro ramo incorretamente, dado que esboça a função intersetando o eixo do x na origem em vez de ser em $x = 2$.

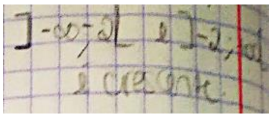
Quanto à determinação do domínio da função f, a maioria dos alunos apresenta uma resposta correta (58,82%), enquanto os restantes não patenteiam qualquer resposta (41,18%). Tais resultados refletem-se na determinação de assíntotas ao gráfico da função f, com uma ligeira nuance. Um dos alunos que determinou corretamente o domínio desta função apresenta uma resposta incorreta na determinação das assintotas, dado que considera a equação da reta da assíntota vertical como sendo a assíntota horizontal e vice-versa (Figura 75).

Figura 75 - Resposta incorreta do aluno A2 na determinação das assíntotas ao gráfico da função f, item 1 da Tarefa 1.



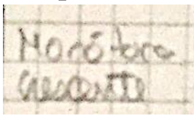
Em relação ao estudo da monotonia da função f, somente um aluno, A4, apresenta uma resposta correta (Figura 76), os restantes alunos revelam dificuldades no estudo da monotonia de uma função, manifestando poucos conhecimentos prévios adquiridos no 10.º ano.

Figura 76 - Resposta correta do aluno A4 no estudo da monotonia da função f, item 1 da Tarefa 1



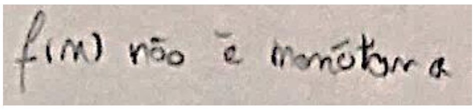
Um outro aluno, A12, apresenta uma resposta parcialmente correta, referindo que a função f é crescente sem mencionar que a função é estritamente crescente e sem especificar em que intervalos do domínio da função é crescente (Figura 77).

Figura 77 - Resposta parcialmente correta do aluno A12 no estudo da monotonia da função f, item 1 da Tarefa 1



Um número significativo de alunos (41,18%) apresenta respostas incorretas, que se devem à mera referência de que a função f não é monótona, como salienta a resposta do aluno A15 (Figura 78).

Figura 78 - Resposta incorreta do aluno A15 no estudo da monotonia da função f, item 1 da Tarefa 1.



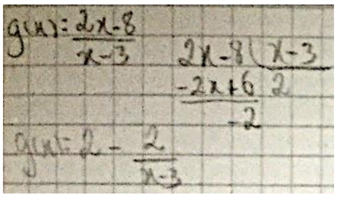
Relativamente ao estudo da função g, procedeu-se a uma análise das respostas dos alunos análoga à efetuada com as da função f (Tabela 16).

Tabela 16 - Frequência (%) do tipo de respostas ao estudo da função g do item 1 da Tarefa 1 $(n = 17)$

Critérios	**C**	**PC**	**I**	**NR**
Definir a função g por uma expressão da forma $a + \frac{b}{x-c}$.	3 (17,65%)	4 (23,53%)	1 (5,88%)	9 (52,94%)
Efetuar o esboço gráfico da função g.	3 (17,65%)	6 (35,29%)	1 (5,88%)	7 (41,18%)
Determinar o domínio da função g.	10 (58,82%)	–	–	7 (41,18%)
Determinar as assíntotas verticais ao gráfico da função g.	10 (58,82%)	–	–	7 (41,18%)
Determinar as assíntotas horizontais ao gráfico da função g.	10 (58,82&)	–	–	7 (41,18%)
Estudar a monotonia da função g.	1 (5,88%)	1 (5,88%)	7 (41,18%)	8 (47,06%)

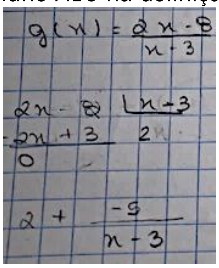
Na definição da função g por uma expressão do tipo $a + \frac{b}{x-c}$, a maior parte dos alunos (52,94%) não efetua qualquer resposta. Dos restantes, somente três alunos (17,65%) reescrevem corretamente a razão dos polinómios dados através da divisão inteira, como exemplifica a resolução do aluno A12 (Figura 79).

Figura 79 - Resposta correta do aluno A12 na definição da função g, item 1 da Tarefa 1.



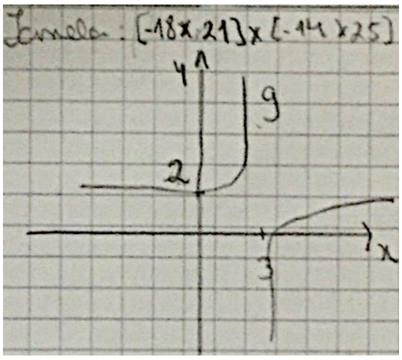
Alguns alunos (23,53%) apresentam apenas a expressão que define função g na forma $a + \frac{b}{x-c}$ sem apresentar o algoritmo da divisão, o que foi considerado como sendo uma resposta parcialmente correta. Apenas um aluno, A16, apresenta uma resposta incorreta, evidenciando falta de atenção nos cálculos efetuados (Figura 80).

Figura 80 - Resposta incorreta do aluno A16 na definição da função g, item 1 da Tarefa 1.



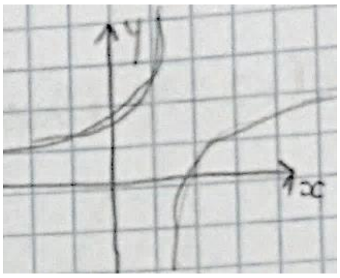
Quanto ao esboço gráfico da função g, um número significativo de alunos (41,18%) não apresenta qualquer resposta. Os restantes alunos recorrem a esquemas de uso instrumentada da calculadora gráfica para visualizarem um esboço gráfico da função. Porém, apenas três (17,65%) apresentam um esboço adequado, como ilustra a resolução do aluno A12, que apresenta o intervalo da janela de visualização utilizada na calculadora gráfica e rotula os eixos coordenados (Figura 81).

Figura 81 - Resposta correta do aluno A12 do esboço gráfico da função g, item 1 da Tarefa 1.



Entre os alunos que recorrem à calculadora gráfica, alguns (35,29%) apresentam esboços gráficos pouco rigorosos, não explicitam a janela de visualização utilizada na calculadora gráfica e/ou não rotulam os eixos coordenados e a função g, o que traduzem respostas consideradas parcialmente corretas. Somente um aluno, A8, efetua um esboço gráfico incorreto (5,88%), pois não apresentou qualquer informação ao seu esboço (Figura 82).

Figura 82 - Resposta incorreta do aluno A8 do esboço gráfico da função g, item 1 da Tarefa 1



Na determinação do domínio da função e das assíntotas da sua representação gráfica, a maioria dos alunos (58,82%) apresenta respostas corretas, enquanto os restantes (41,18%) não apresentam qualquer resposta. Igual tendência de respostas acontece com o estudo da monotonia da função g, sobre o qual um número considerável de alunos também não apresenta qualquer resposta (47,06%) ou apresenta respostas incorretas (41,18%), referindo que a função não é monótona. Apenas um aluno exibe uma resposta correta e um outro aluno apresenta uma resposta parcialmente correta, o que se deveu a não referir o intervalo onde a função é crescente.

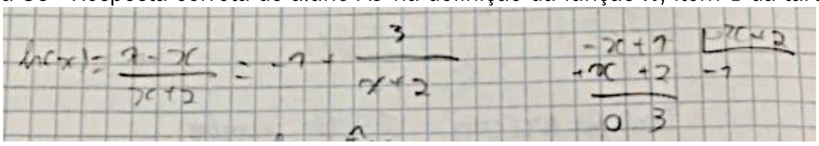
Analogamente à análise realizada no estudo das funções f e g, a Tabela 17 expressa a frequência dos tipos de respostas dos alunos ao estudo da função h.

Tabela 17- Frequência (%) do tipo de respostas ao estudo da função h do item 1 da Tarefa 1 $(n = 17)$

Critérios	**C**	**PC**	**I**	**NR**
Definir a função h por uma expressão da forma $a + \frac{b}{x-c}$.	2 (11,76%)	5 (29,41%)	–	10 (58,82%)
Efetuar o esboço gráfico da função h.	2 (11,76%)	2 (11,76%)	4 (23,53%)	7 (41,18%)
Determinar o domínio da função h.	10 (58,82%)	–	–	7 (41,18%)
Determinar as assíntotas verticais ao gráfico da função h.	10 (58,82%)	–	–	7 (41,18%)
Determinar as assíntotas horizontais ao gráfico da função h.	9 (52,94%)	–	1 (5,88%)	7 (41,18%)
Estudar a monotonia da função h.	1 (5,88%)	1 (5,88%)	7 (41,18%)	8 (47,06%)

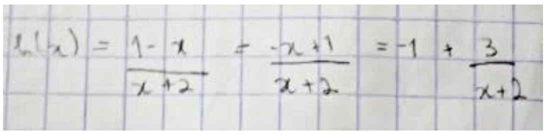
Na definição da função h por uma expressão do tipo $a + \frac{b}{x-c}$, a maior parte dos alunos (58,82%) não apresenta qualquer resposta. Somente dois alunos (11,76%) apresentam corretamente a razão dos polinómios dados através da divisão inteira, como exemplifica a resolução do aluno A9 (Figura 83).

Figura 83 - Resposta correta do aluno A9 na definição da função h, item 1 da tarefa 1.



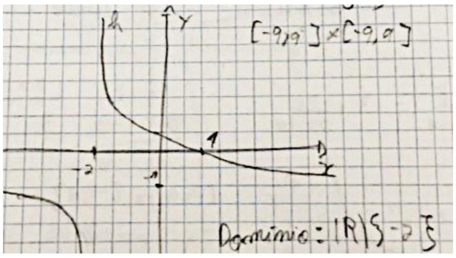
Alguns alunos (29,41%) apresentam apenas a expressão que define função h na forma $a + \frac{b}{x-c}$ sem apresentar o algoritmo da divisão, o que foi considerado como sendo uma resposta parcialmente correta, como exemplifica a resolução do aluno A7 (Figura 84).

Figura 84 - Resposta parcialmente correta do aluno A7 na definição da função h, item 1 da tarefa1.



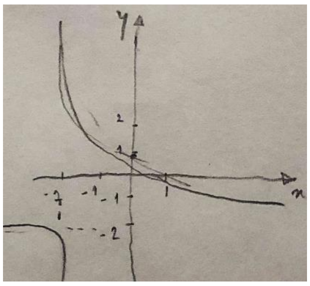
Quanto ao esboço gráfico da função h, um número significativo de alunos (41,18%) não apresenta qualquer resposta. Os restantes alunos recorrem a esquemas de uso instrumentada da calculadora gráfica para visualizarem um esboço gráfico da função. Porém, apenas dois (11,76%) apresentam um esboço adequado, como ilustra a resolução do aluno A9, que exibe o intervalo da janela de visualização utilizada na calculadora gráfica e rotula os eixos coordenados (Figura 85).

Figura 85 - Resposta correta do aluno A9 na realização do esboço da função h, item 1 da tarefa 1.



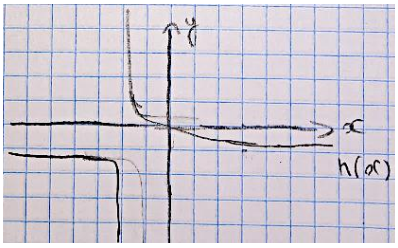
Entre os alunos que recorrem à calculadora gráfica, alguns (11,76%) apresentam esboços gráficos pouco rigorosos, não explicitam a janela de visualização utilizada na calculadora gráfica e/ou não rotulam os eixos coordenados e a função h, o que se traduz em respostas consideradas parcialmente corretas, como ilustra o esboço gráfico do aluno A15 (Figura 86).

Figura 86- Resposta parcialmente correta do aluno A15 na realização do esboço da função h, item 1 da tarefa 1.



Os restantes alunos (23,53%) apresentam respostas consideradas incorretas, como exemplifica a resolução do aluno A8 que esboça o gráfico da função h intersetando a origem do referencial (Figura 87).

Figura 87 - Resposta incorreta do aluno A8 na realização do esboço gráfico da função h, item 1 da tarefa 1.



Na determinação do domínio da função h e da assíntota vertical da sua representação gráfica, a maioria dos alunos (58,82%) apresenta respostas corretas, enquanto os restantes (41,18%) não apresentam qualquer resposta. Na determinação da assíntota horizontal ao gráfico da função h, a maioria dos alunos (52,94%) apresenta respostas corretas e um aluno, A16, ostenta uma resposta incorreta ao indicar que a assíntota horizontal ao gráfico da função h é a reta de equação $y = 1$ em detrimento de $y = 1$.

Para o estudo da monotonia da função h, um número considerável de alunos também não apresenta qualquer resposta (47,06%), ou apresenta respostas incorretas (41,18%), ao referirem que a função não é monótona. Apenas um aluno expressa uma resposta correta e um outro aluno apresenta uma resposta parcialmente correta, uma vez que não indicou o intervalo de monotonia da função.

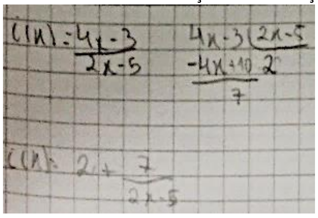
Para o estudo da função i, procedeu-se a uma análise das respostas dos alunos análoga à efetuada para as funções f, g e h (Tabela 18).

Tabela 18 - Frequência (%) do tipo de respostas ao estudo da função i do item 1 da Tarefa 1 ($n = 17$)

Critérios	**C**	**PC**	**I**	**NR**
Definir a função i por uma expressão da forma $a + \frac{b}{x-c}$.	3 (17,65%)	5 (29,41%)	–	9 (52,94%)
Efetuar o esboço gráfico da função i.	2 (11,76%)	1 (5,88%)	7 (41,18%)	7 (41,18%)
Determinar o domínio da função i.	10 (58,82%)	–	–	7 (41,18%)
Determinar as assíntotas verticais ao gráfico da função i.	10 (58,82%)	–	–	7 (41,18%)
Determinar as assíntotas horizontais ao gráfico da função i.	10 (58,82%)	–	–	7 (41,18%)
Estudar a monotonia da função i.	1 (5,88%)	1 (5,88%)	8 (47,06%)	7 (41,18%)

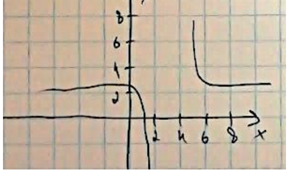
Na definição da função i pela expressão na forma $a + \frac{b}{x-c}$, a maioria dos alunos (52,94%) não apresenta resposta. Alguns alunos (29,41%) não explicitam o algoritmo da divisão que lhes permite traduzir a expressão fracionária que define a função i na expressão pretendida, o que foi considerado como uma resposta parcialmente correta. Os restantes alunos (17,65%) recorrem corretamente ao algoritmo da divisão para definirem a função i na expressão pretendida, como exemplifica a resposta do aluno A12 (Figura 88).

Figura 88 - Resposta correta do aluno A12 na definição da função i, do item 1 da tarefa 1



Quanto ao esboço gráfico da função em estudo, um número significativo de alunos (41,18%) não apresenta qualquer resposta. Poucos alunos (11,76%) efetuam corretamente o esboço gráfico da função, revelando uso de esquemas de ação e de esquemas de instrumentada do artefacto, o que se traduz na edição da expressão que define a função e na procura de uma janela de visualização que se adequa à representação gráfica da função. Dos restantes alunos, um deles patenteia uma resposta parcialmente correta, uma vez que não apresenta a janela de visualização utilizada na calculadora gráfica que lhe permitiu obter o esboço gráfico da função i, e um número significativo de alunos (41,18%) efetuou esboços gráficos pouco rigoroso, como ilustra a resposta do aluno A2 (Figura 89).

Figura 89 - Resposta incorreta do aluno A2 na realização do esboço gráfico da função i, do item 1 da tarefa 1



A falta de rigor do aluno A2 na transposição da informação que retira da calculadora gráfica para o seu caderno faz com que um dos ramos da hipérbole do gráfico da função i intersecte a assintota horizontal de equação $y = 2$, como também indica incorretamente o ponto de interseção do gráfico da função com o eixo das ordenadas.

Na determinação do domínio da função i e das assíntotas da sua representação gráfica, a maioria dos alunos (58,82%) apresenta respostas corretas, enquanto os restantes (41,18%) não apresentam qualquer resposta. Relativamente ao estudo da monotonia da função i, um número considerável de alunos também não apresenta qualquer resposta (47,06%) ou apresenta respostas incorretas (41,18%), referindo que a função não é monótona. Apenas um aluno exibe uma resposta correta e um outro aluno apresenta uma resposta parcialmente correta, o que se deveu por não referir o intervalo de monotonia.

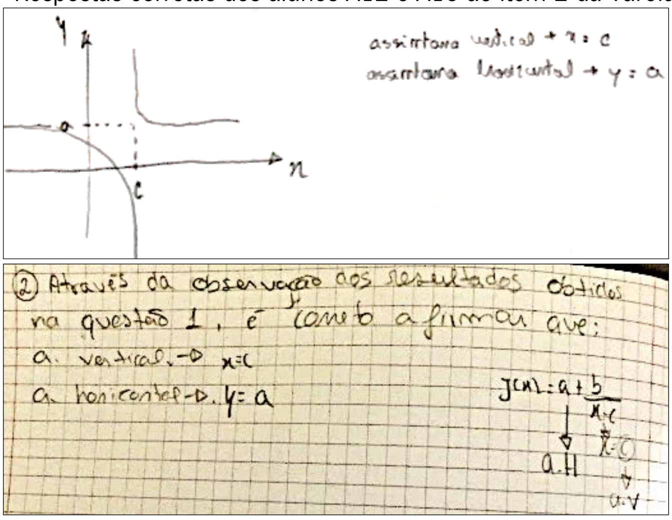
Por fim, na resposta ao item 2 da Tarefa 1, a maior parte dos alunos efetua corretamente uma generalização da determinação das assintotas ao gráfico de uma função real de variável real j definida por $j(x) = a + \frac{b}{x-c}$, com a, b e c números reais (Tabela 19).

Tabela 19 - Frequência (%) dos tipos de respostas dos alunos do item 2 da Tarefa 1 $(n = 17)$

Critérios do item 2	**C**	**PC**	**I**	**NR**
Determinar a assíntota vertical ao gráfico da função j.	10 (58,82%)	–	–	7 (41,18%)
Determinar a assíntota horizontal ao gráfico da função j.	9 (52,94%)	–	1 (5,88%)	7 (41,18%)

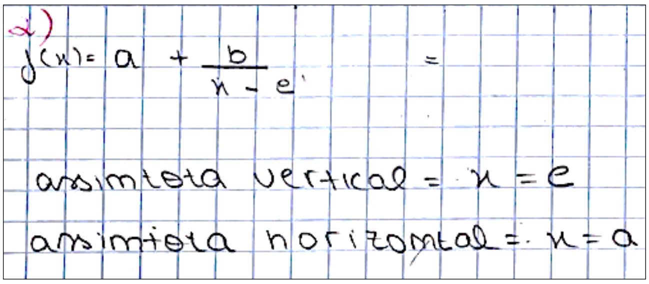
Da análise das resoluções dos alunos, constata-se que cerca de 58,82% obtêm uma resposta correta na determinação da assíntota vertical ao gráfico da função j e 52,94% apresentam uma resposta correta na determinação da assíntota horizontal ao gráfico da função j, como exemplificam, respetivamente, as resoluções dos alunos A12 e A15 (Figura 90).

Figura 90 - Respostas corretas dos alunos A12 e A15 ao item 2 da Tarefa 1.



Entre os restantes alunos, um número significativo (41,18%) não apresenta qualquer resposta à determinação das assintotas pedidas ao gráfico da função j e o aluno A16 apresenta uma resposta parcialmente correta ao traduzir $x = a$ como sendo a assíntota horizontal ao gráfico da função j em vez de $y = a$ (Figura 91).

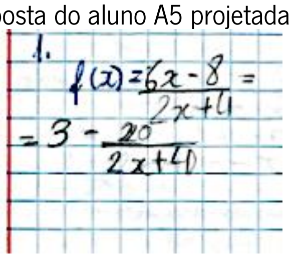
Figura 91 - Resposta incorreta do aluno A16 ao item 2 da Tarefa 1



Discussão da Tarefa

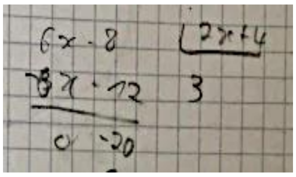
No momento da discussão da tarefa 1, comecei por projetar a resolução do aluno A5 (Figura 92), que apresentava uma resolução parcialmente correta.

Figura 92 - Resposta do aluno A5 projetada na aula



O aluno A9 apontou que faltava realizar o algoritmo da divisão entre polinómios.

A9: O aluno A5 não realizou o algoritmo da divisão. Eu fiz a divisão de $6x - 8$ por $2x + 4$.



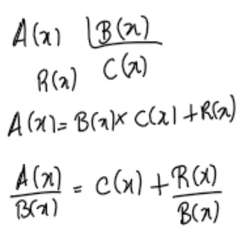
Professora: Vejamos o que fez o A9. Através desta divisão, como podemos escrever a expressão da função f na forma $a + \frac{b}{x-c}$?

A16: O 3 fica número isolado da fração e depois pomos o resto no numerador da fração e em baixo pomos $2x + 4$.

Professora: Como viram no 10.º ano, quando realizamos uma divisão entre polinómios, obtemos um quociente e um resto, certo?
Quando realizamos o algoritmo da divisão, $A(x)$ é igual a quê?

A9: $A(x) = B(x) \times C(x) + R(x)$.

Professora: Mas nós queremos saber como fica a expressão de $\frac{A(x)}{B(x)}$, como fazemos? (silêncio)
Basta dividirmos ambos os membros por $B(x)$.



A16: Tenho uma dúvida, quando diz na tabela para pôr nessa forma, tem lá $x - c$ pode ficar $2x + 4$ ou obrigatoriamente ficar só x?

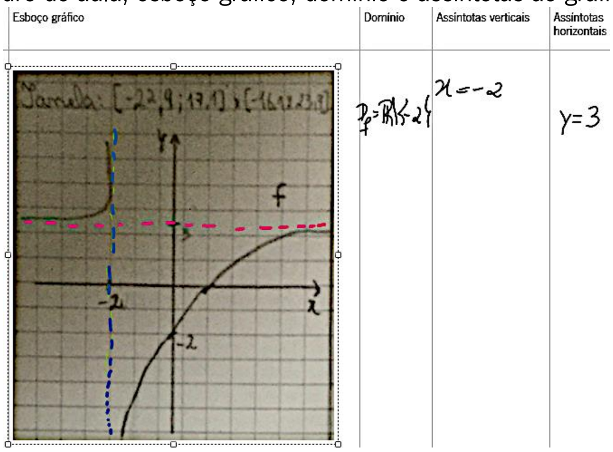
Professora: Temos de obter x e $-c$.

A16: Então f é igual a $3 +$ agora dividimos por dois e fica $\frac{-10}{x-(-2)}$.

Durante a discussão da resolução da tarefa com os alunos, projetei o esboço gráfico do aluno A12 (Figura 93), que permitiu resolver o restante estudo da função f, isto é, permitiu determinar as assíntotas ao gráfico da função f e estudar a monotonia da função f. Os alunos não apresentaram qualquer dificuldade na determinação do domínio da função f. Relativamente ao estudo das assíntotas ao gráfico da função f, emergiu uma maior dificuldade na determinação das assíntotas horizontais, pois nenhum aluno soube explicar como se fazia.

Professora: Quais são as assíntotas verticais ao gráfico da função f?
A3: $x = -2$
Professora: Porquê? (desenhei no esboço gráfico a reta de equação $x = -2$, ver Figura 93)
A3: Porque os limites à esquerda de -2 tendem para $+\infty$ e os limites à direita para $-\infty$.
Professora: Certo, neste caso temos ambos os limites laterais a tender para infinito. Quais as assíntotas horizontais ao gráfico da função f?
A4: $y = 3$.
Professora: Porquê? (desenhei no esboço gráfico a reta de equação $y = 3$, ver Figura 93)
A4: Não me lembro porquê.
Professora: Olhando para o esboço gráfico tens alguma ideia?
(Silêncio)
Professora: Portanto, o limite quando x tende para mais infinito é 3 e também verificamos quando x tende para menos infinito também é igual a 3.

Figura 93 - Quadro de aula, esboço gráfico, domínio e assíntotas ao gráfico da função f.



Na discussão sobre a monotonia da função f realizada durante a aula, evidenciou-se que os alunos não se recordavam do conceito de monotonia de uma função.

Professora: Agora veremos a monotonia da função f. Qual o intervalo de monotonia da função f?
A5: Ela é monótona decrescente no intervalo $]-\infty, -2[$.
Professora: Porquê que é decrescente?
A5: Porque o y à medida que avança pelo eixo x ia decrescendo, mas isso é na direção contrária, então f é monótona crescente de $]-\infty, -2[$ e depois tem ainda que é decrescente de $]-2, +\infty[$.

Professora: No intervalo $]-2,+\infty[$ é crescente ou decrescente?
A5: O y continua a aumentar por isso é estritamente crescente.

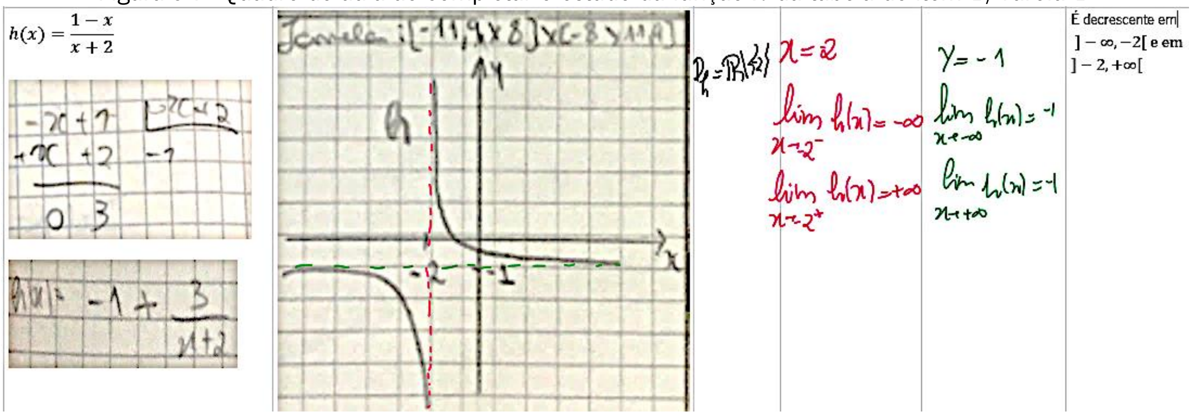
A discussão acerca do estudo da função g, decorreu analogamente à realizada no estudo da função f, que através do diálogo com os alunos foi realizado o preenchimento da tabela.

Ao dar início à discussão da determinação das assíntotas ao gráfico da função h, como já evidenciamos na Tabela 17, muitos alunos determinaram corretamente as assíntotas ao gráfico da função, mas durante a discussão desta tarefa na aula alguns alunos revelaram dificuldades na determinação das assíntotas horizontais.

Professora: Quais as assíntotas verticais ao gráfico da função h.
A10: $x=-2$
Professora: Porquê?
A10: Observando o gráfico da função h, vejo que forma uma reta vertical.
Professora: Como vimos, o ponto -2 é um ponto crítico, pois não pertence ao domínio da função h, mas é um ponto aderente. Logo há a possibilidade de ser a reta de equação $x=-2$ a assíntota vertical ao gráfico da função h. Mas como podemos verificar se esta equação é assintota vertical?
A10: Um dos limites laterais ser infinito. E o limite quando x tende para -2 por valores negativos a -2 é $-\infty$ e também o limite quando x tende para -2 por valores superiores a -2 é $+\infty$.
Professora: Disseste por valores negativos, mas nem sempre são valores negativos. O limite lateral é designado por valores inferiores a -2. Quais as assíntotas horizontais ao gráfico da função h?
A11: Observando o gráfico diria $y=-1$, mas não sei justificar.
Professora: Alguém me indica como determinar a assíntota horizontal? (silêncio)

Apesar de já ter sido justificado a determinação das assíntotas verticais e horizontais ao gráfico das funções f e g, o aluno A11 revelou dificuldades na determinação analítica da assíntota horizontal ao gráfico da função h e nenhum aluno participou neste discurso. Com este momento de aula apercebi-me que os alunos sentiam dificuldades na determinação das assíntotas horizontais ao gráfico, ou não estariam atentos à discussão presente na aula.

Figura 94 - Quadro de aula ao completar o estudo da função h da tabela do item 1, Tarefa 1.



Os alunos foram questionados acerca da generalização do estudo das assíntotas ao gráfico de funções racionais do tipo $y = a + \frac{b}{x-c}$, item 2 da Tarefa 1, surgindo o seguinte diálogo:

Professora: Tendo a função j expressa na forma $a + \frac{b}{x-c}$, como conseguimos determinar as assíntotas ao gráfico da função?

A6: Eu diria que a assíntota horizontal seria $y = a$ e a assíntota vertical seria $x = x$ que está no denominador.

Professora: Concordam que a assíntota horizontal é a equação $x = x$?

A13: Eu não sei.

Professora: Todos concordam com a resolução do aluno A9, em que o domínio da função j é $\mathbb{R}\backslash\{c\}$?

A17 e A11: Sim!

Professora: Está projetado o esboço do Aluno A5, podes-me explicar porque realizaste este esboço gráfico?

A5: Eu fiz um gráfico genérico para não me esquecer qual é a assintota vertical e qual é a assintota horizontal. Da mesma forma que fizemos na questão 1, pegando no ponto c, vimos que o domínio da função j é $\mathbb{R}\backslash\{c\}$. Então nós sabemos $x = c$ será uma assíntota vertical dessa função e $y = a$ será a assíntota horizontal, pois o limite quando x tende para $\pm\infty$ é a.

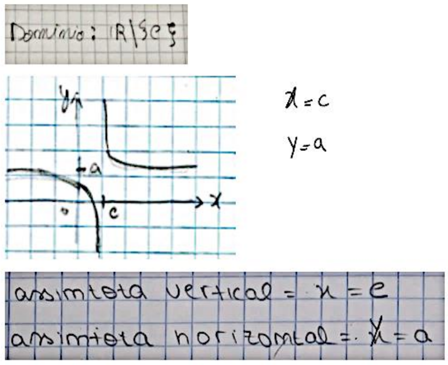


Figura 95 - Quadro de aula realizado durante a discussão do item 2 da Tarefa 1.

3.4. Síntese

Na resolução das tarefas propostas nas aulas, os alunos recorreram ao artefacto calculadora gráfica Casio nas suas atividades de aprendizagem através, a nível instrumental, do processo da génese instrumental. Este processo integra dois esquemas: (i) esquemas de uso – atividades que estão relacionadas diretamente com o artefacto; (ii) esquemas de ação instrumentada – atividades ligadas ao objeto da ação.

Na resolução dos itens da Tarefa da aula 1, que requerem a utilização da calculadora, os alunos seguem alguns passos de apropriação da calculadora gráfica na sua aprendizagem, esquemas de ação instrumentada, que são esquemas mentais construídos pelos alunos, de acordo com os seus significados pessoais. Estes incorporam os esquemas de uso, que se traduzem em ações do aluno sobre o artefacto, tal como, ligar e desligar a calculadora gráfica ou clicar num determinado menu deste artefacto, que são necessários para a realização dos esquemas de ação instrumentada (Tabela 20).

Tabela 20 - Esquemas que os alunos procederam na resolução dos itens da Tarefa 1 da aula 1.

	Atividades	**Esquemas de uso**	**Esquemas de ação instrumentada**
Aula 1- Sinal de uma função racional e inequações	1. a) Efetuar o esboço gráfico das funções f e g.	▪ Ativar o **menu – Graph;** ▪ Ativar **Draw;** ▪ Selecionar os comandos **G-Solv – ISCT.**	▪ Editar a expressão analítica das funções. ▪ Explorar a representação gráfica de funções. ▪ Identificar os pontos de interseção do gráfico de uma dada função com os eixos coordenados ou dos gráficos das funções.
	1. b)*Estudar o sinal de uma função racional, f, graficamente	▪ Clicar nas setas para observar o comportamento da função.	▪ Identificar os valores de x para os quais a função é negativa, positiva e nula.
	1. c)*Resolver a inequação fracionária, graficamente	▪ Clicar nas setas para observar o comportamento das funções.	▪ Identificar os valores de x que fazem com que os valores de f sejam superiores aos da função g.
	2. Generalizar o estudo de sinal de uma função racional		▪ Generalizar o estudo de sinal de uma função racional a partir da visualização da variação do sinal de duas funções representadas graficamente no mesmo ecrã.

Nas suas resoluções, os alunos mostram que ainda não estão familiarizados com a utilização da calculadora gráfica na resolução de tarefas, pois tendem a não justificar a sua utilização. Porém, alguns alunos apresentam respostas corretas no estudo gráfico do sinal de uma função racional e na resolução de inequações fracionárias. Há alunos que atribuem à calculadora gráfica processos de ação instrumentada (Tabela 20), dando significado ao que retiram da utilização deste artefacto nas suas atividades. De um modo geral, o ponto crítico da resolução de itens da tarefa com a calculadora gráfica deu-se na resolução gráfica da inequação fracionária, traduzido num maior número de alunos que não esboçou qualquer resposta. Alguns alunos sentiram dificuldades na tradução de conceitos abordados no 10.º ano, não se recordando do estudo do sinal de uma função, enquanto outros revelaram não compreender o domínio de uma função racional.

Na segunda aula analisada, para estudar as operações com limites entre funções e o limite do produto entre uma função limitada e uma função cujo limite é nulo, os alunos recorreram à calculadora gráfica seguindo alguns passos na apropriação da calculadora gráfica na sua aprendizagem (Tabela 21).

Tabela 21- Esquemas que os alunos procederam na resolução dos itens da Tarefa 1 e 2 da aula 2.

	Atividade	**Esquemas de uso**	**Esquemas de ação instrumentada**
Aula 2 – Limite segundo Heine de funções reais de variável real	1 – Estudar as operações com limites entre funções.	▪ Ativar o **menu – Graph**; ▪ Clicar nas setas para observar o comportamento da função.	▪ Editar a expressão analítica de funções e as expressões que resultam das operações entre essas funções. ▪ Explorar a representação gráfica das funções. ▪ Determinar o limite de funções e das respetivas operações entre funções em pontos de acumulação do respetivo domínio e para valores infinitamente grandes. ▪ Conjeturar a determinação do limite de operações com funções em pontos de acumulação dos respetivos domínios e para valores infinitamente grandes.
	2 – Estudar o limite produto entre uma função limitada e uma função de limite nulo.	▪ Ativar o **menu – Graph**; ▪ Clicar nas setas para observar o comportamento da função h; ▪ Clicar **Shift –F2 (V-Window).**	▪ Editar a expressão analítica das funções. ▪ Explorar a representação gráfica de funções. ▪ Definir a janela de visualização de acordo com o domínio da função produto de h por t. ▪ Interpretar, por visualização, que a função h é limitada. ▪ Determinar o limite da função h. ▪ Concluir o limite da função produto entre h e t. ▪ Conjeturar a determinação do limite produto entre uma função limitada e uma função de limite nulo

Os alunos, apesar de se apropriarem das potencialidades da calculadora gráfica nas suas atividades de aprendizagem, não justificam a sua utilização adequadamente. Tendem a atribuir à calculadora gráfica processos de ação instrumentada (Tabela 21), na realização do estudo do limite das operações entre funções e do limite produto entre uma função limitada e uma função de limite nulo. Nesta aula, na resolução da Tarefa 1, alguns alunos realizaram esboços gráficos que não representavam as funções, resultando na determinação incorreta do limite. Houve uma maior dificuldade dos alunos em converter o seu estudo com a calculadora numa generalização da determinação do limite de operações com funções, revelando-se num maior número de alunos que não apresentou resposta. Na Tarefa 2, alguns alunos não manifestaram espírito crítico quando obtiveram a função cosseno na calculadora como sendo a reta de equação $x = 1$ porque a calculadora estava em graus.

Para a terceira aula, os alunos recorreram à calculadora gráfica para estudar as assíntotas ao gráfico de funções racionais definidas por expressões do tipo $y = a + \frac{b}{x-c}$, seguindo alguns passos de apropriação da calculadora gráfica nas suas atividades de aprendizagem (Tabela 22).

Tabela 22 - Esquemas que os alunos procederam na resolução dos itens da Tarefa 1 da aula 3.

	Atividades	Esquemas de uso	Esquemas de ação instrumentada
Aula 3 – Assíntotas ao gráfico de uma função racional	1 – Efetuar o esboço gráfico das funções; Determinar as assíntotas verticais e horizontais aos gráficos; Estudar a monotonia das funções.	▪ Ativar o **menu – Graph**; ▪ Clicar **Shift –F2 (V-Window).**	▪ Editar a expressão analítica das funções. ▪ Explorar a representação gráfica de funções. ▪ Analisar o comportamento do gráfico de uma função racional em torno de valores que não pertencem ao domínio ou para valores infinitamente grandes. ▪ Analisar os intervalos de monotonia de funções.
	2 – Generalizar as assintotas verticais e horizontais a uma função racional definida por uma expressão do tipo $y = a + \frac{b}{x-c}$		▪ Conjeturar a determinação das assíntotas ao gráfico de uma função racional definida por uma expressão do tipo $y = a + \frac{b}{x-c}$.

Paulatinamente, os alunos apropriaram-se das potencialidades da calculadora gráfica para realizar o estudo das assíntotas ao gráfico de uma função racional. Atendendo à efetividade da calculadora gráfica nas suas atividades, um maior número de alunos justifica a utilização da calculadora gráfica. Alguns alunos apresentam dificuldade no estudo da monotonia da função racional, em conceitos abordados no 10.º ano, o que se reflete mais nos alunos que apresentam respostas incorretas. De um modo geral, os alunos revelam apropriarem-se das potencialidades da calculadora gráfica na generalização do estudo das assíntotas aos gráficos das funções racionais, o que resulta dos significados que retiram da exploração deste artefacto.

3.5. Avaliação do ensino ministrado

A avaliação do ensino ministrado resulta ao nível das atitudes reveladas pelos alunos, através da informação recolhida por meio de um questionário aplicado no final da minha intervenção pedagógica. Este questionário tinha como principal objetivo perceber as perceções dos alunos sobre o contributo da calculadora gráfica na aprendizagem de tópicos de funções. O questionário final era constituído por um grupo de afirmações de natureza fechada, às quais os alunos responderam mediante a escolha de uma opção que traduzisse o seu grau de concordância segundo uma escala tipo Likert. A informação proveniente das respostas dos alunos a tais questões é expressa neste relatório através de frequências, em torno de quatro categorias: (i) tópico de funções; (ii) calculadora gráfica; (iii) dificuldades; e (iv) método de ensino. Para além das frequências de resposta a cada questão, também se considera o valor da média e do desvio padrão que resulta da atribuição a cada grau da escala tipo Likert um valor, isto é, o valor um a discordo totalmente (DT), dois a discordo parcialmente (DP), três a indiferente (I), quatro a concordo parcialmente (CP) e cinco a concordo totalmente (CT). Na Tabela 23 apresenta-se a avaliação que os alunos fazem da aprendizagem relativamente ao tópico de funções.

Tabela 23. Frequência das perceções dos alunos relativamente ao tópico funções ($n = 14$).

Afirmação	DT/DP	I	CP/CT	$\overline{x}$	s
Gostei de aprender os tópicos de Funções.	1	5	8	3,64	0,811
As tarefas resolvidas no estudo de tópicos de Funções despertaram o meu interesse pela Matemática.	6	5	3	2,5	1,12
O estudo de tópico de Funções não é importante para a minha formação.	7	4	3	2,64	1,11

A maioria dos alunos expressa, em média, por um lado, um grau de concordância quanto ao gosto de estudar o tópico funções, como também expressa um grau de discordância/indiferença quanto ao contributo das tarefas exploradas nas aulas em despertar interesse pela Matemática. Quanto à relevância do estudo de funções, metade da turma concorda que é um tópico importante para a sua formação.

Relativamente à utilização da calculadora gráfica, a maior parte dos alunos concorda que a calculadora gráfica os ajudou na compreensão dos tópicos de funções, que a interpretação da informação da calculadora gráfica contribuiu para a aprendizagem de funções, que lhes facilitou a estabelecer definições e propriedades de tópicos em estudo, e que lhes permitiu visualizar alguns dos conceitos estudados (Tabela 24).

Tabela 24. Frequência das perceções dos alunos relativamente à utilização da calculadora gráfica na aprendizagem de tópicos de funções ($n = 14$).

Afirmação	DT/DP	I	CP/CT	$\overline{x}$	s
A utilização da calculadora gráfica ajudou-me a compreender os tópicos estudados de Funções.	–	–	14	4,71	0,452
A interpretação da informação gerada pela calculadora gráfica foi essencial na aprendizagem de tópicos de Funções.	1	–	13	4,64	0,811
A calculadora gráfica ajudou-me a estabelecer definições e propriedades de tópicos de Funções.	–	2	12	4,14	0,634
A calculadora gráfica ajudou-me a visualizar os conceitos estudados nos tópicos de Funções.	–	–	14	4,5	0,5

Em relação à utilização da calculadora gráfica no desenvolvimento de atitudes e capacidades dos alunos, em média, a maioria dos alunos considera que a calculadora gráfica, além de imprescindível, os desafiou a pensar acerca das atividades propostas, o que os levou a considerar que gostariam de estudar outros tópicos matemáticos com recurso à calculadora gráfica. Metade dos alunos considera que a calculadora gráfica os ajudou a desenvolver a capacidade de espírito crítico na formação dos conceitos (Tabela 25).

Tabela 25. Frequência das perceções dos alunos relativamente à utilização da calculadora gráfica no desenvolvimento de atitudes e capacidades ($n = 14$).

Afirmação	DT/DP	I	CP/CT	$\overline{x}$	s
A utilização da calculadora gráfica ajudou-me a desenvolver o espírito crítico na formação dos conceitos estudados.	3	4	7	3,29	0,795
A utilização da calculadora gráfica desafiou-me a pensar sobre as atividades realizadas.	–	7	7	3,64	0,718
Não precisei de utilizar a calculadora gráfica nas atividades que realizei no estudo de tópico de Funções.	13	1	–	1,36	0,61
Gostaria de aprender outros tópicos matemáticos com recurso à calculadora gráfica.	1	3	10	4	1,134

A maioria dos alunos recorre à calculadora gráfica para validar resultados obtidos analiticamente e também recorre a processos analíticos para validar resultados obtidos com a calculadora gráfica. A maioria dos alunos considera que aprende mais os tópicos de funções quando utiliza a calculadora gráfica, ou quando utilizava em simultâneo a calculadora gráfica e processos analíticos (Tabela 26).

Tabela 26. Frequência das perceções dos alunos relativamente à aprendizagem no confronto entre a resolução analítica e a resolução com calculadora gráfica ($n = 14$).

Afirmação	DT/DP	I	CP/CT	$\overline{x}$	s
Recorri à calculadora gráfica para validar resultados obtidos analiticamente.	1	–	13	4,5	0,824
Recorri a processos analíticos para validar resultados obtidos na calculadora gráfica.	3	1	10	3,5	1,402
Aprendi mais os tópicos de Funções quando utilizava processos analíticos do que com a calculadora gráfica.	7	4	3	2,64	1,109
Aprendi mais os tópicos de Funções quando utilizava a calculadora gráfica do que com processos analíticos.	2	4	8	3,86	1,301
Aprendi mais os tópicos de Funções quando utilizava simultaneamente a calculadora gráfica e processos analíticos.	2	1	11	4,21	1,264

Sendo questionados sobre as dificuldades no tópico de funções e sobre a utilização da calculadora gráfica, a maioria dos alunos não sentiu dificuldades na utilização da calculadora gráfica para resolver as tarefas propostas, mas alguns alunos sentiram dificuldades em transcrever para o caderno a informação fornecida pela calculadora. De um modo geral, os alunos concordam que a calculadora gráfica não dificultou a sua aprendizagem do tópico de funções, mesmo os alunos que sentiram mais dificuldades neste tópico (Tabela 27).

Tabela 27. Frequência das perceções dos alunos relativamente às dificuldades na aprendizagem de funções e na utilização da calculadora gráfica ($n = 14$).

Afirmação	DT/DP	I	CP/CT	$\overline{x}$	s
Tive mais dificuldades na aprendizagem de tópicos de Funções do que noutros tópicos matemáticos.	5	4	5	3	0,845
Senti dificuldades em transcrever para o caderno a informação obtida pela calculadora gráfica.	10	1	3	2,21	1,264
Senti dificuldades em comprovar na calculadora gráfica as resoluções efetuadas no caderno.	11	3	–	2	0,655
A calculadora gráfica dificultou a minha aprendizagem de tópicos de Funções.	14	–	–	1,07	0,258

Quanto às preferências dos alunos relativamente ao método de ensino, a maioria prefere que seja o professor a expor os conteúdos e que resolva as tarefas propostas e não aprecia os métodos que os incentivam a descobrir os conteúdos e a resolver as tarefas propostas sozinhos, o que pode dever-se ao ensino a distância resultante do quadro pandémico (Tabela 28).

Tabela 28. Frequência das perceções dos alunos relativamente ao método de ensino $(n = 14)$.

Afirmação	DT/DP	I	CP/CT	$\bar{x}$	s
Gosto mais das aulas quando o professor expõe os conteúdos em estudo e resolve as tarefas propostas.	2	–	12	4	0,926
Gosto mais das aulas quando descubro os conteúdos em estudo e resolvo as tarefas propostas sozinho(a).	6	4	4	3,07	1,163

De modo a recolher as perceções dos alunos sobre as estratégias de ensino implementadas na minha intervenção pedagógica, foram indagados, através de questões de natureza aberta que integram a segunda parte do questionário, a indicar três vantagens e três desvantagens do ensino a distância, três vantagens e três desvantagens da utilização da calculadora gráfica na aprendizagem dos tópicos de funções, dificuldades na aprendizagem de funções e diferenças entre a resolução de tarefas com recurso à calculadora e a resolução analítica. A análise das repostas dos alunos a tais questões fez emergir categorias que agrupam as afirmações dos alunos em torno das suas preferências.

Relativamente às vantagens do ensino a distância, os alunos destacam a possibilidade de criar a sua própria autonomia de trabalho e gerir com mais facilidade o seu tempo de trabalho. Alguns alunos reconhecem que têm menor carga horária de aulas, pois passaram a ter aulas de 45 minutos, metade do tempo das aulas presenciais, e também que os professores estão mais disponíveis para esclarecer dúvidas a qualquer horário. Com o ensino a distância foi possível utilizar novos recursos tecnológicos até então não utilizados, ajudando a dinamização das aulas online. Como no ensino online os alunos estão no conforto da sua casa, faz com que alguns refiram que se sentem mais à vontade para intervir na aula (Tabela 29).

Tabela 29. Frequência das vantagens do ensino a distância na aprendizagem dos alunos $(n = 14)$

Categorias	Fr.
Criação de autonomia de trabalho.	9
Gerir mais facilmente os trabalhos.	7
Facilidade de contacto com o professor para esclarecer dúvidas.	3
Menor carga horária.	3
Sinto-me mais à vontade para participar na aula.	2
Exploração de novos recursos.	2
Nenhuma.	2

Quanto às principais desvantagens do ensino a distância, os alunos apontam que esta modalidade de ensino torna a aprendizagem mais reduzida, pois a transmissão de conteúdos é muito mais complicada do que presencialmente. Alguns alunos referem que, como estão em casa, se distraem mais nas aulas e sentem dificuldades em expressar as suas dúvidas. Como a aula a distância requer a utilização de material tecnológico, alguns alunos reconhecem que as aulas causam cansaço visual e que não têm boa rede de internet nem material tecnológico adequado. Houve um aluno que referiu que com as aulas online não houve avaliações e assim não pode melhorar a sua média (Tabela 30).

Tabela 30. Frequência das desvantagens do ensino a distância na aprendizagem dos alunos ($n = 14$).

Categorias	**Fr.**
A aprendizagem é mais reduzida.	10
Não estar atento às aulas.	9
Transmissão dos conteúdos não é eficaz.	8
Não ter equipamento tecnológico adequado.	5
Não ter boa rede de internet em casa.	5
Dificuldade em expressar as dúvidas.	3
Cansaço visual.	3
Não houve avaliações.	1

Das vantagens que os alunos mencionaram relativamente à utilização da calculadora gráfica, destacam-se a possibilidade de visualizar os conceitos, o que para alguns ajudou na aprendizagem dos tópicos de funções e na resolução das tarefas propostas nas aulas. Alguns alunos referem que a calculadora gráfica permite a verificação dos resultados obtidos analiticamente e ficam mais confiantes nas suas respostas. A utilização da calculadora gráfica requer uma boa interpretação da informação que fornece, o que leva a alguns alunos a considerar que as tarefas se tornam mais desafiantes (Tabela 31).

Tabela 31. Frequência das vantagens da utilização da calculadora gráfica na aprendizagem dos alunos ($n = 14$)

Categorias	**Fr.**
Visualização dos conceitos.	10
Ajuda na aprendizagem do tópico de funções.	9
Ajuda na resolução das tarefas.	6
Verificação dos resultados obtidos analiticamente.	4
Torna as tarefas mais desafiantes.	3
Sair do ensino tradicional.	2
Elevação do raciocínio.	1

A maioria dos alunos não apresenta qualquer desvantagem na utilização da calculadora gráfica. Mas alguns alunos, como não estavam habituados a utilizar a calculadora gráfica nas aulas, referem como desvantagem não saber utilizar as potencialidades da calculadora. Três alunos referem que a utilização da calculadora desencoraja a aprendizagem da resolução analítica e um aluno considera que a calculadora não apresenta os passos para obter os resultados, fazendo com que apresente respostas sem justificação. Dois alunos referem que a leitura incorreta da informação fornecida pela calculadora gráfica os pode induzir a erro (Tabela 32).

Tabela 32. Frequência das desvantagens da utilização da calculadora gráfica na aprendizagem $(n = 14)$.

Categorias	**Fr.**
Nenhuma.	10
Não saber utilizar as potencialidades da calculadora.	4
A calculadora desencoraja a aprendizagem da resolução analítica.	3
É preciso saber retirar a informação da calculadora, caso contrário induz a erro.	2
Não mostrar os passos para obter os resultados.	1
Apresentar resposta às tarefas sem justificação.	1

A maioria dos alunos não apresenta quaisquer dificuldades na aprendizagem de tópicos de funções. Os que sentiram dificuldades, apontam o tópico de limites no levantamento de indeterminações e na determinação de limites laterais. Houve um aluno que referiu dificuldades na compreensão das definições abordadas nos tópicos das funções (Tabela 33).

Tabela 33. Frequência das dificuldades dos alunos na aprendizagem de tópicos de funções $(n = 14)$.

Categorias	**Fr.**
Nenhuma.	8
Levantamento de indeterminações.	4
Determinação de limites laterias.	2
Compreensão das definições.	1

De entre as diferenças que os alunos referem entre a resolução de tarefas com a utilização da calculadora gráfica e entre a resolução analítica, a maioria dos alunos favorece a utilização da calculadora gráfica em detrimento da resolução analítica. A maior parte dos alunos refere que a resolução com a calculadora é mais rápida, mais fácil e mais intuitiva do que a resolução analítica. Três alunos mencionam uma desvantagem da resolução analítica, considerando que esta resolução faz com que os alunos mecanizem processos de resolução, para um aluno que esta resolução é mais demorada. Já dois alunos aludem que a resolução analítica fornece valores exatos, enquanto a resolução com a calculadora gráfica fornece valores aproximados. Ainda um aluno menciona que a resolução analítica eleva o raciocínio (Tabela 34).

Tabela 34. Frequência das diferenças que os alunos sentem entre a resolução analítica e a resolução com a calculadora gráfica $(n = 14)$.

Categorias	**Fr.**
Resolver com a calculadora é mais fácil e rápido do que resolver analiticamente	9
A tarefa com recurso à calculadora é mais intuitiva devido à sua visualização.	8
A resolução analítica faz com que o aluno mecanize procedimentos.	3
A calculadora não fornece o valor exato e analiticamente podemos obter resultados exatos	2
A resolução analítica é mais simples de perceber.	1
A resolução analítica eleva o raciocínio.	1
A resolução analítica demora mais.	1

De um modo geral, os alunos consideram que a utilização da calculadora gráfica foi benéfica na sua aprendizagem de tópico de funções, podendo visualizar os conceitos. Apesar de alguns alunos manifestarem que sentiram dificuldades com o tópico de funções, mas estes alunos não sentiram dificuldades com a utilização da calculadora gráfica. A maioria dos alunos demonstra preferir recorrer à calculadora gráfica na resolução das tarefas, desafiando-os e elevando o seu raciocínio.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Este capítulo está dividido em quatro secções. A primeira secção apresenta as conclusões deste estudo, em jeito de resposta às questões de investigação delineadas. A segunda secção releva, à luz do que foi vivenciado na componente empírica da prática pedagógica, recomendações para estudos futuros. A terceira secção elenca algumas limitações inerentes à realização deste trabalho. E, por fim, a quarta secção trata de uma sinopse em jeito de reflexão da minha prática pedagógica.

4.1. Conclusões

Este estudo tem como objetivo averiguar o contributo da calculadora gráfica na aprendizagem de funções racionais de alunos do 11.º ano de escolaridade. Na concretização deste objetivo pretende-se responder às seguintes questões de investigação:

(1) Como os alunos utilizam a calculadora gráfica na aprendizagem de funções racionais?
(2) Que dificuldades manifestam os alunos na aprendizagem de funções racionais? Que papel desempenha a calculadora gráfica na clarificação dessas dificuldades?
(3) Quais as perceções dos alunos sobre a utilização da calculadora gráfica na aprendizagem de funções racionais?

As respostas a estas questões surgem da informação que é apresentada na ilustração de momentos da prática pedagógica e nas respostas dos alunos a um questionário sobre as estratégias de ensino de funções racionais.

4.1.1. Como os alunos utilizam a calculadora gráfica na aprendizagem de funções racionais?

Ao longo da minha intervenção pedagógica, os alunos recorreram à utilização da calculadora gráfica para resolver as tarefas propostas, a par de processos analíticos. Verifica-se que, para estes alunos, prevalece a forma de resolver as tarefas com a calculadora gráfica e posterior verificação dos resultados através de processos analíticos. Esta verificação de resultados é reiterada por Waits e Demana (1998), que consideram que a utilização da calculadora gráfica deve ser equilibrada, isto é, recorrer à calculadora para verificar os resultados obtidos analiticamente, resolver primeiro com a calculadora e posteriormente verificar analiticamente e resolver com a calculadora quando não é possível analiticamente. As recomendações metodológicas dos programas Curriculares de 1997 e 2001, aquando da introdução obrigatória da calculadora gráfica nas aulas de matemática, defendiam a resolução gráfica e posterior verificação analítica. Em continuidade, o programa em vigor sugere a resolução de tarefas acerca das funções racionais pela sua representação gráfica (MEC, 2013). Mas, segundo o NCTM (2014), a forma de utilização da calculadora gráfica que é mais permitida pelos professores é apenas para verificação de resultados obtidos analiticamente.

Os alunos utilizaram a calculadora gráfica mesmo que esta não fosse explicitamente enunciada na tarefa, principalmente quando lhes era pedido para esboçar os gráficos das funções ou quando era referido para resolver graficamente. Este facto é destacado no estudo de Consciência (2013), que identificou que os alunos recorrem à calculadora gráfica quando é pedida a representação gráfica e quando é dada a expressão analítica de funções.

As calculadoras gráficas são um grande apoio para a representação gráfica, fazendo com que os alunos se sintam mais motivados para realizar o estudo de conceitos (Domingos, 2017). Este ambiente tecnológico na sala de aula pode suscitar fenómenos inspiradores e desenvolver o espírito de investigação (Drijvers, 2019). A resolução dos alunos das tarefas propostas, que estavam estruturadas de forma a generalizar o estudo de tópicos com a calculadora gráfica, corrobora estas perspetivas, evidenciando que os alunos conjeturavam conceitos através das suas explorações com recurso à calculadora gráfica. Tal como Consciência (2013) considera, a calculadora gráfica é "um importante agente mediador na formulação e teste de conjeturas" (p. 516).

Com o decorrer das aulas, os alunos adquiriram maior habilidade na utilização da calculadora gráfica, o que se traduz no registo e justificação, nas suas resoluções, das estratégias utilizadas na calculadora gráfica. No início da minha prática pedagógica, os alunos optavam por representar o esboço gráfico da função, sem realizar o registo das estratégias utilizadas na calculadora, "sem atender à definição dos intervalos que lhes permitia perceber o comportamento dessa função" (Campos et al., 2015, p. 596). Posteriormente, os alunos começaram a registar nas suas resoluções a janela de visualização utilizada na calculadora. A definição da janela de visualização, adequada para uma dada função, na calculadora é um esquema de ação instrumentada. Segundo Consciência (2013), a procura da janela de visualização fortalece as conexões entre representações. Os alunos também desenvolveram a estratégia de articular diferentes menus da calculadora, tais como o editor de funções, a janela de visualização, o gráfico e o zoom, revelando pouca tendência em recorrer à representação numérica na tabela, tal como constatou Consciência (2013).

A interação entre os esquemas de uso e os esquemas de ação instrumentada podem fortalecer a aprendizagem, originando a génese instrumental, surgido pelas técnicas de utilização do instrumento e pela cognição matemática (Drijvers, 2019). Os esquemas de uso e os esquemas de ação instrumentada estão dependentes um do outro, uma vez que para desenvolver os esquemas de ação instrumentada é necessário que os alunos utilizem os esquemas de uso (Drijvers & Trouche, 2008). Os alunos para realizarem as tarefas propostas ao longo das aulas recorreram à calculadora gráfica, aplicando esquemas de uso ao clicar nas teclas da calculadora gráfica. Posteriormente, os alunos passaram a utilizar esquemas de ação instrumentada quando começaram a dar significado à informação que retiravam da calculadora gráfica nos seus estudos. Paulatinamente, os alunos desenvolveram o processo de génese instrumental com recurso à calculadora gráfica, que permitiu formular e/ou validar conjeturas dos tópicos abordados. Assim, verificou-se que através do processo de génese instrumental a calculadora gráfica desempenhou um papel fulcral para a aprendizagem dos tópicos de funções racionais. De acordo com o NCTM (2007), a calculadora gráfica permite uma melhor compreensão na aprendizagem de tópicos de funções, desenvolvendo o conceito imagem dos alunos na elaboração de gráficos de funções racionais, na determinação de possíveis assintotas desses gráficos, e no estudo dessas funções (por exemplo, injetividade, sobrejetividade, zeros, sinal, monotonia) e do seu comportamento quer localmente, em torno de valores do seu domínio, quer para valores infinitos. Conclui-se, assim, que a calculadora gráfica potencia o desenvolvimento do conceito imagem de tópicos de funções racionais, como também potencia o desenvolvimento do conceito definição desses tópicos (Tall & Vinner, 1981).

4.1.2. Que dificuldades manifestam os alunos na aprendizagem de funções racionais? Que papel desempenhou a calculadora gráfica na clarificação dessas dificuldades?

Os alunos apresentaram algumas dificuldades na aprendizagem dos tópicos de funções, muitas vezes devido a aprendizagens prévias que não estavam bem consolidadas, o que se verificou em algumas aulas. Esta dificuldade também foi expressa por Schnepper e McCoy (2013), que detetaram que os alunos sentem dificuldades na determinação do domínio de funções racionais, cometendo erros técnicos ao resolver equações racionais e na simplificação de expressões fracionárias. Os alunos revelaram estas dificuldades no estudo de sinal de funções racionais e de inequações fracionárias, denotando algumas dificuldades na determinação do domínio de funções racionais e na resolução de inequações fracionárias, que resolveram como se fossem equações.

Os alunos tendiam a realizar esboços gráficos descuidados, o que resultava em esboços gráficos incorretos, que não representavam a função em estudo. Assim, alguns alunos denotavam dificuldades em transcrever o esboço visualizado na calculadora gráfica para o papel. Esta dificuldade é constatada no estudo de Carvalho et al. (2011), para quem os alunos revelam dificuldades em relacionar as representações gráficas e algébricas. Por vezes, os alunos apresentaram o esboço gráfico incorreto devido à escolha incorreta da janela de visualização, que, segundo Rocha (2002), é uma das maiores dificuldades dos alunos na utilização da calculadora gráfica. Após a escolha da janela de visualização, os alunos tendiam em não a alterar, o que pode conduzir a conclusões erróneas, sendo essencial ampliar ou reduzir o esboço para analisar a representação gráfica (Consciência, 2013). A construção e interpretação de gráficos foi uma dificuldade frequente nos alunos, que não tinham em atenção os intervalos a considerar, havendo confusão entre intervalo e ponto (Leinhardt et al., 1990).

Na aula em que realizaram o estudo do limite do produto entre uma função limitada e uma função de limite nulo, alguns alunos apresentaram o esboço gráfico da função $\cos(x)$ incorretamente. Além de não terem um olhar crítico para os resultados apresentados pela calculadora, estes alunos revelaram dificuldades em estabelecer uma ligação entre a expressão analítica e a expressão gráfica. Uma das dificuldades dos alunos no estudo de funções diz respeito ao estabelecimento de conexões entre representações de uma função (Consciência, 2013).

No estudo de assíntotas ao gráfico de funções racionais do tipo $y = a + \frac{b}{x-c}$, alguns alunos evidenciaram dificuldades. Alguns alunos denotaram dificuldades em manipular a expressão que define uma dada função racional de modo a obter uma expressão do tipo $y = a + \frac{b}{x-c}$, manifestando não se recordarem do algoritmo da divisão entre dois polinómios abordado no 10.º ano. Este resultado é reiterado por Schnepper e McCoy (2013), que constataram que os alunos cometem erros na manipulação algébrica de funções racionais. Um aluno denotou dificuldades na determinação de assíntotas ao gráfico de uma função racional. Por vezes, os alunos adquirem uma conceção errónea de que todos os valores que não pertencem ao domínio de uma função racional correspondem a assíntotas verticais. Tal como advogam Carvalho et al. (2011), nem sempre os alunos consideram que, para além de valores que não pertencem ao domínio da função, o gráfico de uma função pode ter assíntotas verticais em valores do domínio nos quais a função é descontínua. Os alunos também denotaram dificuldade na determinação das assíntotas horizontais ao gráfico de uma função racional, que segundo Nair (2010) se devem à dificuldade de compreensão do conceito de limite.

Apesar da calculadora gráfica ajudar os alunos a formular e/ou validar conjeturas, alguns alunos não responderam à generalização do estudo em causa ou apresentavam respostas incompletas, notando-se alguma dificuldade na realização de tarefas de caráter exploratório. Segundo Consciência (2013), os alunos tendem a sentir dificuldades em formular e validar conjeturas.

Por vezes, os alunos clarificavam algumas das suas dificuldades, na aprendizagem de tópicos de funções racionais, através da utilização da calculadora gráfica. Na aula do estudo do sinal de funções racionais e no estudo de inequações fracionárias, constatou-se que as dificuldades surgiram devido a aprendizagens prévias, do 10.º ano de escolaridade, que não estavam devidamente consolidadas. Apesar de não se recordarem de como realizar esses estudos, quando recorriam à calculadora gráfica para esboçar o gráfico das funções, alguns alunos conseguiram responder corretamente, através da visualização do comportamento das funções. Carvalho et al. (2011) concluem que os alunos parecem entender melhor os conceitos através do gráfico das funções do que por processos algébricos.

Na determinação de assíntotas ao gráfico de uma função racional do tipo $y = a + \frac{b}{x-c}$, alguns alunos denotaram dificuldades na manipulação algébrica da função racional de modo a expressar a função numa expressão do tipo $y = a + \frac{b}{x-c}$, mas esta dificuldade não interferiu no estudo das assíntotas ao gráfico da função racional. Os alunos através da realização do esboço gráfico, com recurso à calculadora gráfica, conseguiram 'observar' corretamente as assíntotas ao respetivo gráfico, mas quando questionados acerca da determinação da assíntota horizontal por definição, alguns alunos não souberam responder como calcular o limite de forma a determinar a assíntota. Mas os alunos só podem recorrer à calculadora gráfica para resolver uma dificuldade algébrica quando não houver imposição de resolução analítica (Consciência, 2013).

Os alunos podem ultrapassar as suas dificuldades no estudo de funções racionais recorrendo à calculadora gráfica. Segundo Rocha (2002), os alunos denotam dificuldades devido ao desconhecimento do funcionamento da calculadora gráfica. Porém, esta autora também refere que a calculadora gráfica poderá colmatar as dificuldades de resolução analítica.

4.1.3. Quais as perceções dos alunos sobre a utilização da calculadora gráfica na aprendizagem de funções racionais?

Na evolução da minha intervenção pedagógica foram lecionados diversos tópicos de funções racionais com recurso à calculadora gráfica. Para tal, foram propostas tarefas aos alunos para que estudassem esses tópicos com a calculadora e obtivessem uma generalização aos seus estudos. Esta abordagem permitiu perceber o contributo da calculadora gráfica na aprendizagem de tópicos de funções racionais. Desta forma, tornou-se importante perceber quais as perceções dos alunos sobre a utilização da calculadora gráfica nas suas aprendizagens.

Da análise do questionário inicial, aplicado antes da minha prática letiva, evidencia-se que a maioria dos alunos considera o estudo de tópicos de funções importante no quotidiano. Relativamente à calculadora gráfica, todos os alunos apresentaram vantagens na sua utilização, mencionando a possibilidade de visualizar gráficos de funções, tornando o seu estudo mais acessível.

No questionário final, aplicado após a minha intervenção pedagógica, os alunos mantiveram algumas opiniões manifestadas no questionário inicial. Da análise daquele questionário, evidencia-se a importância que os alunos dão à utilização da calculadora gráfica na aprendizagem de tópicos de funções racionais. Todos os alunos manifestaram que a calculadora gráfica os ajudou a visualizar os conceitos estudados nos tópicos de funções racionais. Segundo Consciência (2013), a calculadora gráfica é um artefacto importante na conversão da representação algébrica na representação gráfica, permitindo uma melhor compreensão de tópicos de funções.

A maioria dos alunos referiu que gostou de estudar tópicos de funções racionais, mas que este tópico não despertou interesse pela disciplina de Matemática, nem que seria um tópico importante na sua formação, contrariando o que referiram no questionário inicial. Porém, quando os alunos são questionados acerca da aprendizagem de tópicos de funções racionais, quase todos os alunos referem que a calculadora gráfica os ajudou a compreender os tópicos, que através da interpretação da informação da calculadora os ajudou a estabelecer definições e propriedades de tópicos de funções racionais. Segundo Leinhardt et al. (1990), a interpretação da informação gerada pela calculadora gráfica é uma tarefa muito complexa.

Os alunos manifestaram interesse em aprender outros tópicos matemáticos com recurso à calculadora gráfica e afirmam que este recurso foi imprescindível na sua aprendizagem acerca do tópico de funções racionais. Porém, as opiniões dividem-se quando são questionados acerca do seu desenvolvimento de atitudes e capacidades através da calculadora gráfica, tal como: desenvolver o espírito crítico e desafiar a pensar. O que se refletiu nos resultados deste estudo, é que alguns alunos não apresentaram um olhar crítico às informações retiradas da calculadora gráfica.

Segundo as perceções em relação à utilização da calculadora gráfica ou apenas no estudo analítico de funções racionais, os alunos recorreram à calculadora para resolver tarefas e para verificar resultados obtidos analiticamente. A maioria dos alunos manifesta que aprenderam mais os tópicos de funções racionais por processos com a calculadora gráfica do que por processos analíticos, ou quando utilizavam em simultâneo os dois processos. Estes alunos não sentiram grandes dificuldades na utilização da calculadora gráfica nas suas atividades de aprendizagem. Mas, alguns alunos sentiram dificuldades em transcrever para o papel a informação obtida pela calculadora gráfica. Os alunos apercebem-se da importância de confrontar o que pensam com o que registam pela informação retirada da calculadora gráfica (Campos et al., 2015).

A utilização da calculadora gráfica na aprendizagem dos diversos tópicos de funções racionais conduz diversas vantagens para os alunos. Segundo os alunos, a utilização da calculadora nas tarefas permite uma melhor visualização dos conceitos abordados neste tópico, ajudando na sua aprendizagem e na resolução de tarefas. Alguns alunos referem que a utilização deste recurso no estudo de funções racionais permitiu verificar os resultados obtidos analiticamente, tornando as tarefas mais desafiantes. Na resolução de tarefas os alunos manifestam que quando recorrem à calculadora gráfica a tarefa torna-se mais fácil, mais intuitiva e mais rápida.

Por outro lado, as perceções dos alunos também apontam algumas desvantagens na utilização da calculadora gráfica nas atividades de aprendizagem. Uma das desvantagens identificadas é a dificuldade em interpretar a informação da calculadora, o que os poderá induzir a erros. Alguns alunos não sabem utilizar as potencialidades da calculadora, o que dificulta a sua aprendizagem com este recurso. Porém, alguns alunos sentem que o facto de a resolução de tarefas com a calculadora ser mais fácil, intuitivo e rápido os desencorajaram a resolver tarefas analiticamente.

4.2. Recomendações

Como na realização deste estudo se obtiveram resultados favoráveis na utilização da calculadora gráfica na aprendizagem de funções racionais, sugiro a realização de estudos que envolvam a calculadora gráfica na aprendizagem de outros tópicos matemáticos.

Um outro estudo que se pode concretizar, com base no que foi realizado neste relatório, prende-se com a resolução de tarefas com e sem a calculadora gráfica. A solicitação aos alunos para resolver tarefas pelos dois processos permitirá explorar as vantagens e desvantagens destes dois processos de resolução na aprendizagem de funções racionais. Através desse estudo torna-se possível confrontar as aprendizagens e dificuldades nestes dois processos de resolução.

Como já foi referido, a calculadora gráfica apresenta algumas limitações, que quando discutidas poderão elevar o espírito crítico e beneficiar a aprendizagem dos alunos. Assim, uma recomendação para um estudo futuro seria a utilização dessas limitações da calculadora gráfica para originar momentos de confronto da informação retirada na calculadora com as resoluções analíticas. Além das limitações, poderiam ser aprofundadas as potencialidades da calculadora gráfica, aprofundando todos os menus disponibilizados pela calculadora. Desta forma, pode-se constatar o contributo das potencialidades e das limitações da calculadora para a aprendizagem dos alunos.

A apropriação da calculadora gráfica no processo de aprendizagem é um estudo complexo, mas pertinente em averiguar as apropriações que os alunos fazem da calculadora gráfica. Esta abordagem, com tarefas exploratórias e/ou investigativas, pode envolver o aluno e o professor em debates de processos de resolução e de tópicos matemáticos, com recurso à calculadora e aos seus diversos menus.

Por fim, também pode ser realizado um estudo com base nos erros e dificuldades que os alunos manifestam na aprendizagem de funções racionais com recurso à calculadora gráfica. Seria possível averiguar o contributo dos seus erros ou dificuldades na sua aprendizagem. Para tal, importa confrontar as resoluções incorretas dos alunos no grupo turma, originando um ambiente de discussão de ideias. E, assim, verificar o desenvolvimento de atitudes e capacidades dos alunos, como, por exemplo, o espírito crítico, comunicação, argumentação, entre outras.

4.3. Limitações

Na concretização deste estudo, tendo em conta a sua pertinência, salientaram-se diversas limitações. Uma delas foi o ensino a distância, que interferiu em alguns aspetos da minha prática pedagógica. A redução horária semanal das aulas e a tentativa de cumprir o programa em vigor originaram uma concentração de tópicos abordados em apenas 45 minutos. Ao longo das aulas, denotava-se que participavam sempre os mesmos alunos e, por vezes, quando outros alunos eram questionados, diziam que não tinham rede ou simplesmente que não tinham microfone. Com o passar das aulas notou-se uma menor atenção à disciplina de Matemática, pois estavam concentrados nos exames nacionais de 11.º ano, que tinham de realizar no final do ano letivo.

Quando iniciei a implementação deste estudo, na modalidade de ensino a distância, fui confrontada com uma nova realidade. Com efeito, a preparação das aulas e das tarefas seguiram outra estrutura, as tarefas eram realizadas pelos alunos antes da aula. Os alunos enviavam as suas resoluções até ao momento da aula e assim nem sempre tinha tempo para analisar as suas resoluções. Nas primeiras aulas, elaborei PowerPoints com espaços para completar com o que os alunos iam dialogando, mas como estava a projetar, o computador ficava muito lento e atrasava a aula. Posteriormente, esta limitação foi ultrapassada, pois adquiri uma placa digital para escrever mais rapidamente.

A recolha de dados também foi uma limitação neste estudo. Como os alunos estavam em casa, alguns apresentaram respostas descuidadas enquanto outros não enviavam as suas resoluções. A maioria dos alunos enviavam as suas resoluções em fotografias com pouca resolução, tornando-se difícil de analisar as suas respostas. A recolha de resoluções durante a aula tornou-se impossível, dado que os alunos mostraram resistência em enviar as resoluções no momento. Como a aula tinha pouca duração, não podia esperar que os alunos enviassem as suas resoluções.

Uma das limitações presentes em todas as aulas da minha intervenção pedagógica foi a gestão dos objetivos curriculares impostos pelo extenso currículo de Matemática. Com efeito, após o estado de emergência, em que os alunos ficaram sensivelmente um mês sem aulas, restou poucas aulas para cumprir o programa estipulado para o 11.º ano. Esta limitação, juntamente com a redução horária, imposta após o quadro pandémico, tornou-se complicada a implementação de tarefas para confrontar as resoluções analíticas com resolução apenas com recurso à calculadora. Esta situação tornou complicada a exploração de diferentes menus da calculadora gráfica ao longo da resolução de tarefas, e a exploração de tarefas em grupos.

4.4. Reflexão

Ao realizar uma reflexão final, relativamente à projeção e realização deste estudo, considero que esta experiência profissional enriqueceu a minha formação enquanto professora de Matemática. Ao longo deste processo, a minha principal atenção foi a aprendizagem dos alunos, tentei sempre que não saíssem prejudicados por estar a ser implementado este estudo. Considero que foi possível conciliar as aprendizagens dos alunos na implementação deste trabalho. Ao longo deste desafio senti um grande desenvolvimento pessoal, conseguindo compreender melhor o papel do professor. Todos os detalhes do trabalho desenvolvido pelo professor são essenciais para as suas aulas e consequentemente para a aprendizagem dos alunos. A planificação da aula, das tarefas e dos recursos didáticos a utilizar na aula foi um dos trabalhos principais que desenvolvi na minha ação de professora. Ao desempenhar o papel de investigadora, pude compreender, mais a posteriori, o pensamento dos alunos.

A utilização da calculadora gráfica na aprendizagem dos alunos revelou-se um instrumento fulcral. A apropriação deste artefacto num instrumento é um processo que foi surgindo com a evolução da minha prática pedagógica. Este processo começou na integração da calculadora gráfica nas atividades realizadas, tornando-se mais eficaz quando confrontava os alunos com diversas situações matemáticas. Apesar de na minha implementação pedagógica os alunos utilizarem a calculadora gráfica em apenas quatro tópicos de funções racionais, a apropriação da calculadora gráfica foi mais notória nas últimas aulas. Na minha perspetiva, seria vantajoso continuar este estudo, com os mesmos alunos, mas já no 12.º ano de escolaridade. Esta abordagem realizada com os alunos permitiu-me conhecer melhor as potencialidades e limitações da calculadora gráfica. Foi-me importante esta descoberta e perceber como este artefacto pode ser útil na aprendizagem dos alunos.

A realização do estágio revelou-se um enorme desafio para mim, principalmente quando realizei a implementação pedagógica, dado que as aulas foram lecionadas online. A descoberta do ensino online permitiu-me evoluir bastante, quer na utilização de materiais tecnológicos, quer na comunicação com os alunos. Quando lecionei aulas na sala de aula, podia comunicar as minhas ideias e ir ilustrando no quadro situações, resolver tarefas com os alunos, anotar ideias, entre outras coisas. Já no ensino a distância apenas podia projetar o meu ecrã, o que me desafiou a evoluir a minha comunicação com os alunos, bem como me permitiu explorar a mesa digitalizadora (quadro digital). Um dos meus maiores desafios neste percurso foi analisar as respostas que os alunos me enviavam, pois tinha de vestir 'a pele' dos alunos e de entre as suas ideias/resoluções erróneas entender a origem de tais erros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almeida, A., & Oliveira, H. (2009). O processo de génese instrumental e a calculadora gráfica. *Quadrante, XVIII* (1,2), 87-118.

APM (2009). *Renovação do currículo de Matemática – Seminário de Vila Nova de Milfontes 1988.* Edição comemorativa. Associação de Professores de Matemática.

Araman, E., Serrazina, M., & Ponte, J. (2019). "Eu perguntei se o cinco não tem metade": ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. *Educação Matemática Pesquisa, 21*(2), 466-490.

Boyer, C. (2012). *História da matemática*. Edgard Blucher.

Borba, M. C. (1999)*. Calculadora Gráfica e Educação Matemática*. Art Bureau.

Bueno, R. W. da S., & Viali, L. (2009). A construção histórica do conceito de função. *Educação Matemática em Revista - RS, 1*(10), 37–47.

Burril, G. (2008). *The role of handheld technology in teaching and learning secondary school mathematics*. In ICME 11. https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.463.5000&rep=rep1&type=pdf

Campos, S., Viseu, F., Rocha, H., & Fernandes, J. A., (2015). A calculadora gráfica na promoção da escrita matemática. In S. Carreira, & N. Amado (Eds.), *12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT12*) (pp. 590-598). http://hdl.handle.net/1822/51107

Canavarro, A. P., & Ponte J. P. (2005). O papel do professor no currículo de Matemática. In GTI (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 63–89). APM.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.

Canavarro, A. P., & Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática*, 99-104.

Canavarro, A., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Prática de ensino exploratório da matemática: O caso de Célia. In L. Santos (Ed.), *Investigação em Educação Matemática 2012: Prática de ensino da Matemática* (pp. 255-266). SPIEM.

Cardoso, A. P., & Rego, B. (2017). Metodologias de investigação na formação de professores: a investigação-ação e o estudo de caso. *Olhares sobre a educação: em torno da formação de professores,* 21-33.

Carvalho, L., Ferreira, R. A. T., & Ponte, J. P. (2011). Representações no estudo das funções racionais. In A. Henriques, C. C. Nunes, A. Silvestre, H. Jacinto, H. Pinto, A. Caseiro, & J. P. Ponte (Orgs.), *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 179-192). APM.

Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2003). Graphics calculators in the learning of mathematics: Teacher understandings and classroom practices. M*athematics Teacher Education and Development, 5*, 3-18.

Consciência, M. M. C. (2003). *Calculadoras gráficas: algumas limitações. Gazeta da Matemática*, 145, 34-42, SPM.

Consciência, M. M. C. (2013). *A calculadora gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa. Repositório Institucional da Universidade de Lisboa. http://hdl.handle.net/10451/10521

Doerr, H. M., & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics, 41* (2), 143-163.

Domingos, A. (2017). O papel da tecnologia na aprendizagem da matemática: contributos da investigação. *Educação e Matemática*, 144 e 145, 59-64

Drijvers, P. (2019). Embodied instrumentation: Combining diferent views on using digital technology in mathematics education. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the eleventh congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 8–28). Freudenthal Group & Freudenthal Institute. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02436279

Drijvers, P., & Doorman, M. (1996). The graphics calculator in mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 15* (4), 425-440.

Drijvers, P., Grauwin, S., & Trouche, L. (2020). When bibliometrics met mathematics education research: the case of instrumental orchestration. *ZDM,* 52, 1455–1469.

Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In M. K. Heid, & G. W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Cases and Perspectives* (Vol. 2, pp. 363-448). NCTM & Information Age Publishing, Inc.

Ellinger, A. D., & McWhorter, R. (2016). Qualitative case study research as empirical inquiry. *International Journal of Adult Vocational Education and Technology (IJAVET), 7*(3), 1-13.

Fernandes, J. A., & Vaz, O. (1998). Porquê usar tecnologias nas aulas de matemática? *Boletim da SPM*, *39*, 43-55.

Fernandes, J. A., Alves, M. P., Viseu, F., & Lacaz, T. M. (2006). Tecnologias de informação e comunicação no currículo de Matemática do ensino secundário após a reforma curricular de 1986. *Revista de Estudos Curriculares, 4*(2), 291-329

Ferreira, N., & Ponte, J. P. (2017). Propondo tarefas sobre números racionais: as ações de futuras professoras durante a prática de ensino supervisionada. *Quadrante, 27*(1), 113-136.

Greenwald, S. J., & Thomley, J. E. (2013). Using the history of mathematics technology to enrich the classroom learning experience. In P. Bogacki (Ed.), *Twenty-fourth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* (pp. 82–91). Pearson Education, Inc.

Guin, D., & Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: Necessity of instrumental orchestrations. *ZDM, 34*(5), 204–211.

Hill, M. M., & Hill, A. (1998). *A construção de um questionário*. https://repositorio.iscte-iul.pt/bitstream/10071/469/4/DINAMIA_WP_1998-11.pdf

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-137.

Insook, I. (1999), Mathematical and Pedagogical Discussions of the Function Concept. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in mathematical education, 3*(1), 35-56.

Kleiner, I (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *College Mathematics Journal. 20*(4), 282–300.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research Spring, 60* (1), 1-64.

Marbán, J., & Sintema, E. (2020). Pre-service secondary teachers' knowledge of the function concept: A cluster analysis approach. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education. 5*(1), 38-53.

Marpa, E. P. (2021). Technology in the teaching of mathematics: An analysis of teachers' attitudes during the COVID-19 pandemic. *International Journal on Studies in Education (IJonSE), 3*(2), 92-102.

Martins, H., & Domingos, A. (2019). Utilização de cálculo algébrico simbólico (CAS) em contexto de ensino e aprendizagem com alunos do 12.º ano. In *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*, EIEM 2019, 217-233.

MEa (1991). *Programa Matemática – Plano de Organização do Ensino Aprendizagem: Ensino Básico 3.º Ciclo Volume I*. Ministério da Educação.

MEb (1991). *Programa Matemática – Plano de Organização do Ensino Aprendizagem: Ensino Básico 3.º Ciclo Volume II*. Ministério da Educação.

MEc (1991). *Programa Matemática A 10.º ano.* Ministério da Educação.

ME (1997). *Matemática – Programas 10.º, 11.º e 12.º ano*. Ministério da Educação.

MEa (2001). *Currículo Nacional Ensino básico - Competências Essenciais*. Ministério da Educação

MEb (2001). *Programa de Matemática A – 10.º ano*. Ministério da Educação.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação

MEC (2012). *Programa de Matemática: Ensino Básico.* Ministério de Educação e Ciência

MEC (2013). *Programa de Matemática A*. Ministério de Educação e Ciência

MEC (2018) *Aprendizagens Essenciais de Matemática A: Articulação com o perfil dos alunos*. Ministério de Educação e Ciência

Menezes, L., Tomás Ferreira, R., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais de professores de Matemática* (pp. 135-164). Instituto de Educação

Menezes, L., (2015). Design de tarefas matemáticas com criatividade. In A. Barbosa, A. Peixoto, G. Barbosa, L. Fonseca, L. Saraiva, & L. Neves (Orgs.), *Ensinar e Aprender com Criatividade dos 3 aos 12 anos – atas 2015* (pp. 127-130). ESEVC.

Menezes, L., & Flores, P. (2017). O humor no ensino da Matemática pode ser coisa séria! *Educação e Matemática,* 141, 7-12.

Mitchelmore, M., & Cavanagh, M. (2000). Students' difficulties in operating a graphics calculator. *Mathematics Education Research Journal,12*(3), 254-268.

Nair, G. S. (2010). College students' concept images *of asymptotes, limits, and continuity of rational functions.* Doctoral dissertation, The Ohio State University.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Associação de Professores de Matemática.

NCTM (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for all*. VA: Author.

Oliveira, H., Canavarro, A.P., & Menezes, L. (2014). Casos multimédia na formação de professores que ensinam Matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 429-461). Instituto de Educação.

Palha, S. (2017). O uso da tecnologia na Holanda: um impulso através dos novos programas? *Revista Educação e Matematica,143*, 43-47.

Ponte, J. P. (1990). O conceito de função no currículo de matemática. *Educação e Matemática*, 15, 3-9.

Ponte, J. P. (1994). O professor de Matemática: Um balanço de dez anos de investigação. *Quadrante, 3*(2), 79-114.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y prática de la educación matemática* (pp. 83-98). Graó.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 13–30). Encontros de Educação.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. A (2017). A adaptação dos estudos de aula ao contexto português. In *Atas do XXVIII Seminário de Investigação em Educação Matemática*, 129. APM.

Quaresma, M., & Ponte, J. P. D. (2017). Dinâmicas de aprendizagem de professores de Matemática no diagnóstico dos conhecimentos dos alunos num estudo de aula. *Quadrante, 26*(2), 43-68.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains.* Armand Colin.

Raorong, N. (2017). Discussion and Research of the Concept of Function Teaching under the New Curriculum Standard. In *Proceedings of the 2017 International Conference on Humanities Science, Management and Education Technology (HSMET 2017)* (pp. 1249-1253). Atlantis Press. https://doi.org/10.2991/hsmet-17.2017.231

Relatório do Agrupamento de Escolas (2020). *Garantia da qualidade para o ensino e a formação profissional (Quadro EQAVET) - Documento Base*. Agrupamento de escolas.

Rocha, H. (2002). A utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica nas aulas de Matemática. *Quadrant*e, XI (2), 3-28.

Rocha, H. (2017). O professor e a fidelidade matemática da calculadora gráfica no estudo de funções. In *Atas do XXVIII Seminário de Investigação em Educação Matemática, 116.* APM.

Romano, E., Mercê, C., & Ponte, J. P. (2008). As calculadoras no ensino: Estudos sobre as concepções, as práticas e a formação do professor de Matemática In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín, & L. B. Nieto (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 567-575). SEIEM.

Rodrigues, C., Menezes, L., & Ponte, J. P. (2014). Tarefas matemáticas no ensino da álgebra. In J. Brocardo, A. M. Boavida, C. Delgado, E. Santos, F. Mendes, J. Duarte, M. Baía, & M. Figueiredo (Eds.), *Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática (EIEM2014)* (pp 353-367). ESE.

Santos, C. M., & Silva, K. R. X (2015). Ensino e Aprendizagem na resolução de Problemas: Aprender a Aprender. *Revista Uniabreu,* 8(20), 380-397.

Saraiva, M. J., Teixeira, A. M., & Andrade, J. M. (2010). Estudo das funções no programa de Matemática com problemas e tarefas de exploração. *Projecto IMLNA-Promover a aprendizagem Matemática em Números e Álgebra.*

Sarmiento, J. (1997). New technologies in mathematics*. Eric microfiche.*

Schnepper, L. C., & McCoy, L. P. (2013). Analysis of Misconceptions in High School Mathematics. *Networks: An Online Journal for Teacher Research, 15* (1), 1-7.

Siqueira, D. A., & Beust, A. C. (2008). O ensino de funções através da interpretação gráfica*. Disc. Scientia. Série: Ciências Naturais e Tecnológicas, 46* (9), 45- 66

Soares, E. C. (2016). *CO 68: A invenção da calculadora sobre três olhares históricos: O Ábaco, a régua de cálculo e a pascaline*. XI SNHM - Seminário Nacional de História da Matemática.

Stein, M., & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática (artigo original publicado em 1998). *Educação e Matemática, 105*, 22-28.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Trevisan, A., Ribeiro, A., & Ponte, J. P. (2020). Professional learning opportunities regarding the concept of function in a practice-based teacher education program. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15*(2), 1-14.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9* (3), 281-307.

Viseu, F., Rocha, H. (2018). Percepções de professores de Matemática sobre o ensino de funções e sobre o uso de materiais tecnológicos Introdução. *Educação Matemática Pesquisa, 20* (2), 113–139.

Waits, B. K., & Demana, F. (1998). *The role of graphing calculators in mathematics reform*. The Ohio State University, 1-6.

Yerushalmy, M. (1997). Reaching the Unreachable: Technology and the Semantics of Asymptotes. International *Journal of Computers for Mathematical Learning, 2*, 1–25.

ANEXOS

Anexo 1 – Pedido de Autorização aos Encarregados de Educação

Exmo(a). Senhor(a). Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade de Minho, enquanto professora estagiária, pretendo desenvolver experiências de ensino que potenciem a aprendizagem dos alunos de tópicos do tema "A aprendizagem de limites de funções reais de variável real com recurso à calculadora gráfica de alunos do 11.º ano". O desenvolvimento dessas experiências de ensino implica a recolha de dados, que serão obtidos através da resolução de tarefas e da observação de aulas. Para uma melhor compreensão das atividades que se desenvolvem na aula de Matemática necessito de proceder à recolha de dados através de gravações (áudio e vídeo). Para esse fim, venho por este meio solicitar a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio e vídeo dos dados necessários à concretização das experiências de ensino e de aprendizagem na sala de aula do seu educando.

Comprometo-me a usar os dados apenas para fins académicos e a não divulgar o nome da escola e dos alunos, nem expor qualquer indicador que envolva o seu educando. Só me interessa a informação que me ajude a melhorar as minhas estratégias de ensino. Os dados das gravações serão apenas usados para efeitos do estudo a realizar e não terão qualquer influência nas classificações dos alunos. Comprometo-me ainda a proceder à destruição de todas as gravações após a realização do estágio.

Agradeço desde já a sua colaboração.

Braga, janeiro de 2020

A estagiária de Matemática

____

(Ana Maria Sousa Freitas)

\- -

Autorização

Eu, ____, Encarregado de Educação do(a) aluno(a) ____, autorizo que se faça o registo em áudio e vídeo das atividades de ensino e de aprendizagem nas aulas de Matemática que envolvam o meu educando desde que seja salvaguardado o anonimato do seu nome e de qualquer indicador que o indicie.

O Encarregado(a) de Educação

____

Anexo 2 – Questionário Inicial

Este questionário tem como finalidade recolher informação que me permita conhecer características dos alunos da tua turma relativamente à disciplina de Matemática, destacando o desempenho nesta disciplina no ano letivo anterior e a utilização de materiais tecnológicos nas atividades de aprendizagem. As tuas opiniões são importantes para o estudo que estou a realizar relativamente à aprendizagem de tópicos de Funções Reais de Variável Real com recurso à calculadora gráfica. Para obter resultados válidos, é da maior importância que respondas de forma refletida a todas as questões que te são apresentadas. Comprometo-me a utilizar os dados apenas para efeitos da investigação e de forma anónima.

Dados Gerais

1. Idade: ____

2. Sexo: M ☐ F ☐

3. Que classificação obtiveste na disciplina de Matemática no ano anterior? ________

4. Quais são as tuas disciplinas mais preferidas e menos preferidas? Porquê?

____

____

5. Em que disciplina tens mais dificuldades? Porquê?

____

____

6. Que classificação obtiveste na disciplina de Matemática no ano anterior? ________

7. Quais são os temas que mais aprecias na disciplina de Matemática? Porquê?

____

____

8. Quais são os temas que menos aprecias na disciplina de Matemática? Porquê?

____

____

9. Quando estudas Matemática, quais os materiais tecnológicos utilizas?

Telemóvel ☐ Internet ☐ Calculadora Gráfica ☐ Softwares ☐ Tablet ☐

Com que finalidade utilizas os materiais tecnológicos que indicaste?

____

____

Perspetivas sobre Funções e sobre a utilização da calculadora Gráfica

1. Desde o 7.º ano que estudas Funções. Como caracterizas a tua relação com a aprendizagem de Funções?

____

____

2. Qual a finalidade do estudo de Funções nas aprendizagens de Matemática?

____

____

3. Na tua perspetiva, qual é a importância do estudo de Funções?

____

____

4. Em anos anteriores aprendeste conceitos de Funções com utilização da calculadora gráfica? ______

Que vantagens e desvantagens teve essa utilização na tua aprendizagem de conceitos de Funções.

Vantagens:____

____

Desvantagens:____

____

5. Com que finalidade utilizas a calculadora gráfica no teu estudo na disciplina de Matemática?

____

____

6. De entre os vários métodos de ensino, seleciona quais os métodos da tua preferência:

- ☐ Transmissão da matéria pelo professor.
- ☐ Resolver problemas relacionados com situações do quotidiano.
- ☐ Realizar trabalhos com colegas, em pares ou em grupo.
- ☐ Resolver exercícios do manual escolar.
- ☐ Ser o aluno a estabelecer as definições, regras e propriedades.
- ☐ Resolver exercícios/ problemas com recurso à calculadora gráfica.
- ☐ Discutir os processos de resolução de tarefas.
- ☐ Outros? Quais? ____

Obrigada pela sua colaboração!

Anexo 3 – Planos de Aula

Plano de Aula 3

Tópico: Funções Racionais.
Objetivos: Determinar o sinal de uma função racional. Resolver inequações fracionárias.
Formato de ensino: Ensino exploratório

Tarefa 1. Inequações fracionária e Sinal de uma função racional

1. Considera as funções f e g definidas, respetivamente, por: $f(x) = \frac{x+4}{x}$ e $g(x) = x$.

- **a)** Esboça, num único referencial ortogonal, os gráficos das funções f e g. Assinala no teu esboço os pontos A e B, sabendo que A é o ponto de interseção dos gráficos no 3.º quadrante e B é o ponto de interseção dos gráficos no 1.º quadrante.
- **b)** Estuda, analiticamente e graficamente, o sinal da função f.
- **c)** Resolve, analiticamente e graficamente a inequação $f(x) > g(x)$.

2. Considera uma função h definida por $h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, em que P e Q são polinómios e $Q(x) \neq 0$. Estuda o sinal da função h.

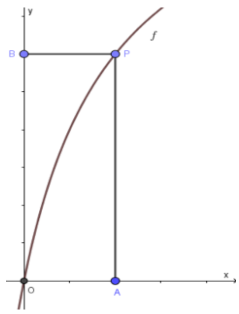
Prática

1. Resolve, analiticamente e graficamente, a seguinte inequação:

$$\frac{2}{x-2} \leq \frac{1}{2}x - 1$$

2. Estuda, analiticamente e graficamente, o sinal da função definida por:

$$f(x) = \frac{x^2-7}{x-2} - \frac{6}{x}$$



3. No referencial cartesiano está representado um retângulo $[OAPB]$, em que o vértice P, de abcissa positiva, pertence ao gráfico da função f definida por $f(x) = \frac{6x}{x+1}$.

Sendo x a abcissa do ponto P, determina, analiticamente e graficamente, o seu valor de modo que:

- **a)** $[OAPB]$ seja um quadrado;
- **b)** A área do retângulo $[OAPB]$ seja menor que 8.

Desafio

A Catarina vai sempre de carro para a escola, saindo de casa entre as sete e meia e as oito horas da manhã, tendo aula às 8h30m. Admite que, quando a Catarina sai de casa t minutos depois das **sete e meia**, a duração da viagem, em minutos, é dada por

$$d(t) = \frac{45t^2 + 7900}{t^2 + 300}$$

1. Caracteriza a função d.
2. Estuda o sinal da função d.
3. Justifica a seguinte afirmação "Se a Catarina sair de casa às 7h 40m, chega às 8h 11m, mas se sair de casa às 7h 55m, já chega atrasada às aulas".
4. Recorrendo à calculadora gráfica, determina até que horas a Catarina pode sair de casa de modo a não chegar atrasada às aulas.
A tua resolução deverá indicar:

- Uma expressão que traduza o problema em questão;
- O esboço gráfico no contexto do problema e as janelas utilizadas na calculadora gráfica;
- A resposta ao problema, graficamente, devidamente justificada em horas e minutos.

Materiais: Manual do aluno; Calculadora gráfica.

Comentários
Turma do 11.º ano do curso científico humanístico de ciências e tecnologia

Duração: 45 minutos

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) Introdução da tarefa; (ii) Exploração da tarefa; (iii) Discussão.

Com a Tarefa 1 pretende-se que os alunos resolvam inequações fracionárias e efetuem o estudo do sinal de uma função racional.

Com as tarefas da Prática pretende-se que os alunos sistematizem os conhecimentos adquiridos na resolução de inequações fracionários e no estudo do sinal de uma função racional.

Com o desafio pretende-se que os alunos elevem o seu raciocínio no estudo de sinal de função racional e na resolução de inequações fracionárias.

Plano de Aula 7

Tópico: Limite segundo Heine de funções reais de variável real.

Objetivos: Operar com limites de funções reais de variável real em pontos aderentes dos seus domínios. Definir produto de uma função limitada por uma função com limite nulo em pontos aderentes do seu domínio.

Formato de ensino: Ensino exploratório

Tarefa 1. Operações com limites entre funções reais de variável real em pontos aderentes aos seus domínios

Considera as funções reais de variável real f e g definidas, respetivamente, por

$$f(x) = x^2 - 4x \, ; g(x) = 2x - 2$$

1. Completa a seguinte tabela:

Função	Esboço gráfico	Determina:
$f(x) = \cdots$ $Df = \cdots$		$\lim_{x\to 1} f(x) = \cdots$
$g(x) = \cdots$ $Dg = \cdots$		$\lim_{x\to 1} g(x) = \cdots$
$(f+g)(x) = \cdots$ $D_{f+g} = \cdots$		$\lim_{x\to 1}(f+g)(x) = \cdots$
$(f-g)(x) = \cdots$ $D_{f-g} = \cdots$		$\lim_{x\to 1}(f-g)(x) = \cdots$
$(f\times g)(x) = \cdots$ $D_{f\times g} = \cdots$		$\lim_{x\to 1}(f\times g)(x) = \cdots$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \cdots$ $D_{\frac{f}{g}} = \cdots$		$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \cdots$ $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \cdots$
$[g(x)]^2 = \cdots$ $D_g = \cdots$		$\lim_{x\to 1}\big(g(x)\big)^2 = \cdots$

2. Considera a função real de varável real h definida por $h(x) = 5 + \frac{1}{x}$

Determina $\lim_{x\to+\infty}[h(x)+2]$; $\lim_{x\to-\infty}[h(x)\times 4]$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}$ e $\lim_{x\to-\infty}\big(h(x)\big)^3$.

3. Considera f e g duas funções reais de variável real, b e c dois números reais tais que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$ e a ponto aderente aos domínios das funções f e g ou igual a $\pm\infty$. Que relações estabeleces na determinação do limite das operações entre as funções f e g?

Tarefa 2. Produto de uma função limitada por uma função com limite nulo

Considera a funções reais de variável real h e t definidas, respetivamente, por:

$$h(x) = \cos x \, ; \quad t(x) = x^2 - 4$$

1. Esboça os gráficos das funções h e t no mesmo sistema de eixos cartesiano.

2. Comenta a seguinte afirmação: "A função h é limitada."

3. Por observação do gráfico da função t, determina $\lim_{x\to 2} t(x)$.

4. O que concluis quanto ao $\lim_{x\to 2}[h(x)\times t(x)]$.

5. Dadas duas funções reais de variável real f e g e a um ponto aderente aos seus domínios, sabendo que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e g é limitada, determina $\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)]$.

Comentários

Turma do 11.º ano do curso científico humanístico de ciências e tecnologia

Duração: 45 minutos

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) Introdução da tarefa; (ii) Exploração da tarefa; (iii) Discussão.

A tarefa 1 tem por finalidade envolver os alunos no estudo de Operações com limites entre funções reais de variável real.

A tarefa 2 tem como finalidade envolver os alunos no estudo do produto de uma função limitada por uma função com limite nulo.

Prática:

1. Considera as funções reais de variável real h e s definidas, respetivamente, por:

$$h(x) = \sqrt[3]{x-2}\,;\; s(x) = \begin{cases} 4 & se\ x < 1 \\ 2 & se\ x = 1 \\ x^2 - 3x & se\ x > 1 \end{cases}$$

Determina, por observação dos gráficos das funções h e s:

a) $\lim\limits_{x\to 3^-} (h+s)(x)\,;$ **b)** $\lim\limits_{x\to 3^+} \left(\frac{h}{s}\right)(x);$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\frac{s}{h}\right)(x);$ **d)** $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\sqrt{s(x)}\right)$

2. Considera a função real de variável real de variável real f, definida por $f(x) = 3 + \frac{1}{x^2}$.

a) Esboça o gráfico da função f.

b) Esboça e determina uma possível função real de variável real h, de tal modo que:

$\boldsymbol{b_1})$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) + h(x) = 7$

$\boldsymbol{b_2})$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \times h(x) = +\infty$

$\boldsymbol{b_3})$ $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$

3. Justifica, recorrendo à calculadora gráfica, que $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{x\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right) = 0$.

Com os momentos de Prática pretende-se que os alunos sistematizem os conhecimentos que adquiriram no estudo das propriedades operatórias sobre limites de funções reais de variável real.

Plano de Aula 12

Tópico: Assíntotas ao gráfico de uma função real de variável real

Objetivos: Determinar assíntotas ao gráfico cartesiano de funções racionais definidas em $\mathbb{R}\backslash\{c\}$ por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$.

Formato de ensino: Ensino exploratório

Tarefa 1. Assíntotas ao gráfico de funções racionais definidas por expressões do tipo $y = a + \frac{b}{x-c}$

Considera as funções reais de variável real f, g, h e i definidas, respetivamente, por

$$f(x) = \frac{6x-8}{2x+4};\ g(x) = \frac{2x-8}{x-3};\ h(x) = \frac{1-x}{x+2};\ i(x) = \frac{4x-3}{2x-5}$$

1. Completa a seguinte tabela:

Função definida por uma expressão da forma $a + \frac{b}{x-c}$	Esboço gráfico	Domínio	Assíntotas verticais	Assíntotas horizontais	Monotonia
$f(x) = \cdots$					
$g(x) = \cdots$					
$h(x) = \cdots$					
$i(x) = \cdots$					

2. Considerando uma função real de variável real j definida por $j(x) = a + \frac{b}{x-c}$, com a, b e c números reais, determina as assíntotas verticais e horizontais ao gráfico da função j.

Prática

1. Determina as assíntotas ao gráfico da função k definida por $k(x) = \frac{3x+1}{2x-8}$ e esboça o gráfico e as respetivas assíntotas.
2. Do gráfico cartesiano da função real de variável real f definida por $f(x) = \frac{20-10x}{x-3}$ sabe-se que:
   - a é a assíntota horizontal e b é a assíntota vertical ao gráfico da função f;
   - A é o ponto de interseção do gráfico da função f com o eixo Ox;
   - B é o ponto de interseção do gráfico da função f com o eixo Oy;
   - D é o ponto de interseção das assíntotas a e b;
   - C é o ponto de interseção da assintota a com o eixo Oy;

   Realiza um esboço gráfico da função f que considere as características apresentadas e determina a área do quadrilátero $[ABCD]$.

Desafio

Considera a função real de variável real f definida por $f(x) = \frac{kx+1}{x+k}$, sendo k um número real positivo. Seja A o ponto de interseção das assíntotas do gráfico da função f.

1. Mostra que $\overline{AO} = \sqrt{2}k$, sendo O a origem do referencial cartesiano.
   Para responder a esta questão deves:
   - Determinar as assíntotas ao gráfico da função f;
   - Realiza um esboço gráfico da função f indicando as coordenadas do ponto A;
   - Determina a distância do ponto O ao ponto A.
2. Supondo que $k = 2,$ determina graficamente e analiticamente as assíntotas ao gráfico da função g definida por $g(x) = (x-3) \times f(x)$.

Comentários

Turma do 11.º ano do curso científico humanístico de ciências e tecnologia

Duração: 45 minutos

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) Introdução da tarefa; (ii) Exploração da tarefa; (iii) Discussão.

Com a Tarefa 1 pretende-se que os alunos efetuem o estudo de assíntotas ao gráfico de funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$

Com os momentos de Prática pretende-se que os alunos sistematizem os conhecimentos que adquiriram no estudo de assíntotas ao gráfico de uma função racional.

Com o desafio pretende-se que os alunos aprofundem o seu conhecimento sobre a determinação de assíntotas ao gráfico de uma função.

Anexo 5 – Questionário Final

As tuas opiniões são importantes para o estudo que estou a realizar relativamente à aprendizagem de Funções racionais com recurso à calculadora gráfica. Para obter resultados válidos é de maior importância que respondas de forma refletida a todas as questões que te são apresentadas. A informação recolhida será utilizada apenas para efeitos do meu estudo e asseguro o anonimato da mesma.

1. Das afirmações que se seguem, assinala com uma cruz **(X)** a opção que mais se adequa ao teu grau de concordância atendendo à seguinte escala: **DT:** Discordo Totalmente; **DP:** Discordo Parcialmente; **I:** Indiferente; **CP:** Concordo Parcialmente; **CT:** Concordo Totalmente.

Afirmações	**DT**	**DP**	**I**	**CP**	**CT**
Gostei de aprender os tópicos de Funções.					
Tive mais dificuldades na aprendizagem de tópicos de Funções do que noutros tópicos matemáticos.					
As tarefas resolvidas no estudo de tópicos de Funções despertaram o meu interesse pela Matemática.					
O estudo de tópico de Funções não é importante para a minha formação.					
A utilização da calculadora gráfica ajudou-me a compreender os tópicos estudados de Funções.					
A utilização da calculadora gráfica incentivou-me a estabelecer conexões entre a resolução gráfica e analítica das tarefas propostas.					
A interpretação da informação gerada pela calculadora gráfica foi essencial na aprendizagem de tópicos de Funções.					
Senti dificuldades em transcrever para o caderno a informação obtida pela calculadora gráfica.					
Senti dificuldades em comprovar na calculadora gráfica as resoluções efetuadas no caderno.					
A calculadora gráfica ajudou-me a estabelecer definições e propriedades de tópicos de Funções.					
A calculadora gráfica ajudou-me a visualizar os conceitos estudados nos tópicos de Funções.					
A utilização da calculadora gráfica ajudou-me a desenvolver o espírito crítico na formação dos conceitos estudados.					
A utilização da calculadora gráfica desafiou-me a pensar sobre as atividades realizadas.					
Recorri à calculadora gráfica para validar resultados obtidos analiticamente.					
Recorri a processos analíticos para validar resultados obtidos na calculadora gráfica.					
Aprendi mais os tópicos de Funções quando utilizava processos analíticos do que com a calculadora gráfica.					
Aprendi mais os tópicos de Funções quando utilizava a calculadora gráfica do que com processos analíticos.					
Aprendi mais os tópicos de Funções quando utilizava simultaneamente a calculadora gráfica e processos analíticos.					
A calculadora gráfica dificultou a minha aprendizagem de tópicos de Funções.					
Não precisei de utilizar a calculadora gráfica nas atividades que realizei no estudo de tópico de Funções.					
Gostaria de aprender outros tópicos matemáticos com recurso à calculadora gráfica.					
Gosto mais das aulas quando o professor expõe os conteúdos em estudo e resolve as tarefas propostas.					
Gosto mais das aulas quando descubro os conteúdos em estudo e resolvo as tarefas propostas sozinho(a).					

2. Devido ao Covid-19, o método de ensino passou a ser virtual (aulas assíncronas e síncronas). Indica **três vantagens** deste método de ensino.

3. Devido ao Covid-19, o método de ensino passou a ser virtual (aulas assíncronas e síncronas). Indica **três desvantagens** deste método de ensino.

4. O ensino de tópico de Funções foi realizado com recurso à calculadora gráfica. Indica **três vantagens** da utilização da calculadora gráfica na tua aprendizagem.

5. O ensino de tópico de Funções foi realizado com recurso à calculadora gráfica. Indica **três desvantagens** da utilização da calculadora gráfica na tua aprendizagem.

6. Que dificuldade sentiste na aprendizagem dos tópicos de Funções?

7. Indica diferenças entre a resolução das tarefas com recurso à calculadora gráfica e a resolução das tarefas analiticamente.