UMinho | 2021

Joana Bastos Pereira **Análise de gráficos no processo de ensino/aprendizagem de funções em alunos do 10º ano de uma turma de ciências socioeconómicas.**

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Joana Bastos Pereira

Análise de gráficos no processo de ensino/aprendizagem de funções em alunos do 10º ano de uma turma de ciências socioeconómicas.

julho de 2021

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Joana Bastos Pereira

Análise de gráficos no processo de ensino/aprendizagem de funções em alunos do 10º ano de uma turma de ciências socioeconómicas.

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática
no 3° Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho Efetuado sob a orientação da
Doutora Maria Helena Martinho

julho de 2021

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a minha supervisora, doutora Maria Helena Martinho, pelo paciência e dedicação demonstrada ao longo de todo este processo.

Um agradecimento especial também para o meu orientador, José António Domingues, pelos ensinamentos passadas e pela dedicação e interesse demonstrados em fazer possível todos os meus desejos durante a intervenção pedagógica.

Num caráter mais pessoal, um agradecimento enorme aos meus pais por terem estado sempre presentes em tudo o que eu precisei e por todo o carinho, compreensão e sacrifício que sempre demonstraram ao longo de todos os meus anos académicos.

Um sincero obrigada a todos aqueles que nunca me deixaram desistir e sempre me deram forças para continuar em frente.

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

ANÁLISE DE GRÁFICOS NO PROCESSO DE ENSINO/APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES EM ALUNOS DO 10º ANO DE UMA TURMA DE CIÊNCIAS SOCIOECONÓMICAS.

RESUMO

O estudo das funções toma dimensões de grande importância quando nos deparamos com este tema da matemática quase todos os dias do nosso quotidiano, sendo comum recorrer à análise de gráficos quando se pretende realizar um estudo acerca de um qualquer tema.

Neste contexto, com a implementação do presente Projeto de Intervenção Pedagógica pretende-se atingir os três seguintes objetivos: estabelecer uma abordagem gráfica no processo de ensino de funções; avaliar a capacidade critica dos alunos em relação à representação gráfica das funções; avaliar a aprendizagem dos alunos em exercícios envolvendo funções.

Através da realização de um teste diagnóstico ficou patente que muitos dos alunos apresentam problemas ao nível da interpretação de gráficos, sendo que a maior parte não os utiliza corretamente na resolução dos problemas propostos-.

No entanto, e com uma abordagem mais gráfica dos problemas, foi possível observar uma melhoria na interpretação dos gráficos, facilitando, deste modo, a compreensão destes em situações do quotidiano.

Palavras-Chave: análise de gráficos de funções, funções, alunos com 10º ano, ciências económicas, ensino, aprendizagem, algébrica .

GRAPHICS ANALYSIS IN THE LEARNING PROCESS OF FUNCTIONS IN STUDENTS OF A 10TH GRADE CLASS OF SOCIOECONOMICS

ABSTRACT

The theme of the Supervised Pedagogical Intervention Project focuses on the "Analysis of graphs in the process of teaching and learning functions in students of the 10th year of a socio-economic science class".

The study of functions takes on dimensions of great importance when we come across this mathematical subject almost every day of our daily lives, and it is common to resort to the analysis of graphs when we want to carry out a study about any topic.

In this context, the implementation of this Pedagogical Intervention Project aims to achieve the following three objectives: to establish a graphic approach in the process of teaching functions; evaluate the critical ability of students in relation to the graphical representation of the functions; to evaluate students' learning in exercises involving functions.

Through the completion of a diagnostic test it became clear that many students have problems in the interpretation of graphs, and most of them do not use them correctly in solving the proposed problems.

However, with a more graphic approach to the problems, it was possible to observe an improvement in the interpretation of graphs, thus facilitating their understanding in everyday situations.

Keywords: analysis of function graphs, functions, students with 10th grade, economic sciences, teaching, learning, algebraic.

ÍNDICE

Agradecimentos ... **iii**

Resumo ... **v**

Abstract ... **vi**

Índice de Figuras ... **ix**

Índice de Tabelas ... **x**

Capítulo I - Introdução ... **1**

1.1. Tema e objetivos ... 1

1.2. Pertinência do estudo ... 2

1.3. Estrutura do Relatório ... 3

Capítulo II - Enquadramento Teórico ... **5**

2.1. O ensino da matemática ... 5

2.2. Interpretação e argumentação ... 9

2.3. O estudo das funções ... 15

2.4. O ensino de gráficos de funções no currículo escolar ... 17

2.5. O pensamento crítico dos alunos ... 20

Capítulo III - Enquadramento Contextual ... **22**

3.1. Caraterização da escola ... 22

3.2. Caraterização da turma ... 24

3.3. Plano Geral de Intervenção ... 24

3.3.1. Instrumentos de Recolha de Informação para a Avaliação do Projeto ... 25

3.3.2. Avaliação de Aprendizagens ... 25

CAPÍTULO IV - Intervenção Pedagógica ... **26**

4.1. Avaliação diagnóstica ... 26

4.1.1. Gráficos de funções ... 27

4.1.2. Número de zeros da função ... 30

4.1.3. Os intervalos onde a função é positiva e onde é negativa ... 31

4.1.4. Representação gráfica da função f que faz corresponder a idade (em anos) ao tempo de sono ideal (em horas). 33
4.1.5. Esboço gráfico das funções 38
4.2. Sequência de Ensino 36
4.2.1. Desenvolvimento da aula n° 1, presente no anexo I plano de aula n°1 36
4.2.2. Desenvolvimento da aula n° 4, presente no anexo II plano de aula n°4 42
4.2.3. Desenvolvimento da aula n° 7, presente no anexo IV plano de aula n°7 47
4.3. Teste de matemática 48

Capítulo V – Conclusões e balanço final do estagio 50
5.1. Estabelecer uma abordagem gráfica no processo de ensino de funções 50
5.2. Avaliar a capacidade critica dos alunos em relação a representação gráfica das funções 50
5.3. Avaliar a aprendizagem dos alunos em exercícios envolvendo funções. 50
5.4. Balanço final do estagio 51

Bibliografia 53

Anexos 62
Anexo I - Teste diagnóstico 63
Anexo II- Plano de aula n° 1 68
Anexo III- Plano de aula n°4 71
Anexo IV- Plano de aula n° 7 76
Anexo V - Elementos de avaliação 81
Anexo VI - Pedido de autorização aos Encarregados de Educação 85

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Três ações para os professores utilizarem na sala de aula de matemática para incentivar o raciocínio 14

Figura 2 – Percurso do desenvolvimento do raciocínio abstrato 17

Figura 3: Organigrama dos órgãos que constituem a escola onde eu lecionei 23

Figura 4 - Justificação do aluno A5 a questão 1 alínea C 27

Figura 5 - Linhas auxiliares feitas pelo aluno A1 na questão 1 alínea D 27

Figura 6 - Justificação do aluno A1 a questão 1 alínea D 27

Figura 7 – Resposta de um aluno à questão 1 29

Figura 8 - Resposta de um aluno à questão 1. 30

Figura 9 - Resposta à questão 2 alínea a), parcialmente correta 31

Figura 10 - Resposta à questão 2 alínea a), correta 31

Figura 11 – Resposta de um aluno à questão 2 b), parcialmente correta. 32

Figura 12 - Resposta de um aluno à questão 2 b), incorreta 32

Figura 13 - Resposta de um aluno à questão 2 b), correta 33

Figura 14 - Resposta de um aluno à questão 2 b), incorreta 33

Figura 15 - Resposta de um aluno à questão 3 34

Figura 16 – Resposta de um aluno na questão 4, incorreta 35

Figura 17 – Questão 1 alínea f) do grupo II do teste de avaliação 37

Figura 18 – Resposta do aluno 10 à questão 1, alínea f) do grupo II do teste de avaliação 37

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1- Sequência de ensino para o Plano de Intervenção Pedagógica Supervisionada 24

Tabela 2- Percentagens dos tipos de respostas na questão 1 30

Tabela 3 – Frequência de respostas à questão 1 28

Tabela 4 - Frequência de respostas à questão 2 alínea a 31

Tabela 5 - Frequência de respostas à questão 2 alínea b) 32

Tabela 6 – Frequência de respostas à questão 3 33

Tabela 7 - Frequência de respostas à questão 4 34

Tabela 8 - Classificações dos alunos no teste de avaliação 48

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

Este capítulo está organizado em três partes onde numa primeira instância se fala do tema e dos objetivos do presente trabalho, passando depois para a pertinência do estudo e por fim para a organização deste relatório.

1.1. Tema e objetivos

O tema do Projeto de Intervenção Pedagógica supervisionada incide sobre a análise de gráficos no processo de ensino-aprendizagem de funções.

A abordagem acerca deste tema será feita essencialmente ao nível da visualização gráfica utilizando as calculadoras. Trata-se de uma turma do curso científico de socioeconómicas e os gráficos fazem parte de grande parte do estudo das restantes disciplinas.

Os computadores e as calculadoras tornam possível a visualização e a manipulação de objetos matemáticos de uma forma diferente daquela que fazemos com a tecnologia do papel e lápis. A tendência é que se torne viável trabalhar com problemas reais capazes de estimular o interesse dos alunos pela matemática e pela sua aplicação (Matos, 1997, p. 41).

O estudo das funções toma dimensões de grande importância quando nos deparamos com este tema da matemática no nosso quotidiano. A simples leitura do jornal ou até o assistir ao telejornal nas horas das refeições faz com que nos deparemos com um gráfico gerado por uma relação, isto é, uma comparação de duas grandezas ou até mesmo uma função representada de outra forma sem ser a algébrica.

As funções matemáticas são muito estudadas no âmbito do ensino e aprendizagem da matemática devido à dificuldade que os alunos apresentam na sua compreensão. Por exemplo, Vinner e Dreyfuss (1989) mostraram que as conceções mentais das funções nos alunos diferem das definições matemática. Outros estudos revelam a limitação que os alunos apresentam na compreensão das funções, como por exemplo, Bloch (2003) e Skaja (2003) demonstram que os alunos não conseguem atribuir diferentes funções a um mesmo gráfico.

Neste contexto, com a implementação do presente Projeto de Intervenção Pedagógica tem-se em vista atingir os três seguintes objetivos:

1. Estabelecer uma abordagem gráfica no processo de ensino de funções;

2. Avaliar a capacidade critica dos alunos em relação a representação gráfica das funções;

3. Avaliar a aprendizagem dos alunos na resolução de exercícios envolvendo funções.

1.2. Pertinência do estudo

Para o estudo das funções a calculadora constitui-se como uma ferramenta de grande utilidade, permitindo que a aprendizagem da Matemática seja apoiada nas três formas de representação: as numéricas, gráficas e algébricas, sendo, portanto, um elemento poderoso no ensino, quando usada de forma adequada, crítica e criativa (Ponte, 1997).

Por outro lado, a necessidade de melhorar a qualidade e os resultados do ensino e da aprendizagem colocou o desenvolvimento profissional do professor no topo da agenda dos decisores políticos, administradores, educadores e pesquisadores.

Apesar de existirem vários estudos relacionados com as funções na aula de matemática, estas estão focalizados no papel do professor. Neste estudo, o enfoque será nos alunos e na forma como estes desenvolvem esta capacidade. Apesar do objetivo final do ensino ser a formação dos alunos, não será possível eliminar a figura do professor nesta dinâmica, pois o processo comunicativo na sala de aula pressupõe a existência destas duas entidades, alunos e professor. É necessário ter em conta que "as interações que se estabelecem entre os diversos intervenientes nos processos de ensino e aprendizagem (...) são essenciais" (Pedrosa, 2000, p. 149).

Logo, o professor terá aqui um papel importante pois, além de ter conhecimentos sobre todos os aspetos relativos à disciplina de matemática e ao modo de apresentar as ideias para que estas sejam adquiridas e apreendidas pelos alunos, terá que ter ainda: conhecimento relativo à forma como os alunos compreendem e aprendem os conteúdos matemáticos, perceção sobre a forma como aprender Matemática com compreensão, logo que se encontrem envolvidos em tarefas pertinentes e adequadas num contexto de sala de aula, em que as interações professor/aluno e aluno/aluno sejam valorizadas (Albuquerque, Veloso, Rocha, Santos, Serrazina, & Nápoles, 2006).

Então, o objetivo é criar todas as condições para a existência de um ambiente de aprendizagem estimulante, em que os alunos estejam totalmente envolvidos nas tarefas propostas, organizando o trabalho e "as interações que se promovem nomeadamente entre os alunos, que devem sentir que o professor considera a sua participação importante, não lhes dando apenas breves segundos para darem uma resposta fechada que é catalogada de certa ou de errada" (Albuquerque *et al.*, 2006, p.15).

Deste modo, “questões bem colocadas podem simultaneamente elucidar sobre o pensamento dos alunos e ampliá-lo”, sendo então “crucial a habilidade do professor na formulação de questões que dirijam o discurso oral e escrito na direção do raciocínio matemático” (NCTM, 1994, p. 38).

Deste modo torna-se pertinente a realização do recente estudo, focalizado no processo de ensino e aprendizagem das funções matemáticas, sendo o professor a figura central de todo esse processo. Pretende-se, então, analisar os mecanismos de aprendizagem desta temática e como esta se vai desenvolvendo e evoluindo.

1.3. Estrutura do Relatório

Este relatório encontra-se dividido em cinco capítulos: Capítulo I – Introdução; Capítulo II – Enquadramento Teórico; Capítulo III - Enquadramento contextual; Capítulo IV – Intervenção Pedagógica e Capítulo V – Discussão e Conclusões.

O Capítulo I, correspondente à Introdução, está subdividido em três subcapítulos, onde se apresenta o tema e os objetivos deste relatório, a sua pertinência e, por fim, a estrutura do mesmo.

O Capítulo II, do Enquadramento Teórico, encontra-se dividido em 5 subcapítulos, constituindo a base teórica que suporta o presente relatório, comportando a revisão da literatura que justifica as opções metodológicas e estratégias adotadas. No primeiro subcapítulo é abordado o ensino da matemática, fazendo-se referências às suas particularidades e, também, à sua utilidade e posterior aplicação no quotidiano. No segundo capítulo são abordadas questões referentes à interpretação e argumentação em matemática, onde se faz a ponte entre a ação e raciocino matemático e a interpretação suportada pela língua materna. No terceiro subcapítulo é dedicado ao estudo das funções, uma das ferramentas mais poderosas da matemática para representar e interpretar situações matemáticas como situações reais. Já no quarto subcapítulo corresponde ao ensino de gráficos de funções no currículo escolar onde se apresenta o gráfico de uma função como um conceito matemático e a justificação da sua inclusão no currículo escolar de matemática em Portugal. Por fim, o quinto subcapítulo é dedicado ao pensamento crítico dos alunos, condição essencial para um processo de ensino -aprendizagem com sucesso.

No Capítulo III apresenta-se o Enquadramento Contextual, encontrando-se dividido em três subcapítulos: a caracterização da escola, seguida da caracterização da turma onde foi realizada a intervenção pedagógica e de seguida o plano geral de intervenção, onde se apresenta a planificação da intervenção assim como as metodologias escolhidas para utilizar na mesma.

O Capítulo IV corresponde à intervenção pedagógica e encontra-se dividido em três subcapítulos. O primeiro capítulo corresponde à apresentação da avaliação diagnóstica, realizada antes da intervenção pedagógica, onde se incluem aspetos relacionados com gráficos de funções, números de zeros da função, os intervalos de função, entre outros aspetos relevantes. O segundo subcapítulo corresponde à sequência do ensino, ou seja, a intervenção pedagógica propriamente dita e, por fim, o terceiro subcapítulo diz respeito à análise do teste de matemática realizado após a intervenção pedagógica.

Por fim, o Capítulo V diz respeito às Conclusões que se divide em três subcapítulos, onde é feita uma sínteses do estudo assim como as principais conclusões retiradas com o estudo.

CAPÍTULO II - ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Nesta secção do relatório será explicada a temática lecionada e a metodologia utilizada na intervenção pedagógica. Isto será explicado em cinco subcapítulos onde se fala sobre o ensino da matemática, a interpretação e argumentação, o estudo das funções, o ensino dos gráficos de funções no currículo escolar e o pensamento crítico dos alunos.

2.1. O ensino da matemática

O ensino da matemática recorre ao uso de atividades de processamento dos conteúdos matemáticos de forma a estimular todo o processo de aprendizagem dos alunos (Vermunt & Van Rijswijk, 1988).

Não obstante reconhece-se que a motivação dos alunos está dependente das necessidades e objetivos (Hannula, 2006), e neste caso concreto, o estudo realizado por Hoyles (1982), reproduziu a observação dos alunos que estudam matemática desejosos de a descobrir e, por outro lado, outros alunos que tomam a matemática como um desafio às suas próprias capacidades. Estas observações refletem-se no modelo que é utilizado nos estudos sobre estilos de aprendizagem (Vermunt & Van Rijswijk, 1988; Vermunt, 1996, 1998, 2005).

De acordo com Ponte (2007)

> A matemática é uma das áreas fundamentais do conhecimento e uma das ciências mais antigas e, é igualmente das mais antigas disciplinas escolares, tendo sempre ocupado, ao longo dos tempos um lugar de relevo no currículo (p.2)

A Matemática é desde há muitos anos uma ferramenta útil para todos os alunos num mundo submerso em números e, representações matemáticas (Tenreiro-Vieira & Vieira, 2000). Ou seja, a Matemática integra a formação de todos, pois como resultado traz benefícios ao quotidiano e nos diferentes contextos que a vida proporciona.

De facto, a Matemática surge na nossa sociedade como uma área fundamental do conhecimento, uma grande contribuição para a formação de cada pessoa. É a partir desta contribuição que o indivíduo consegue lidar de forma mais eficiente com as situações e problemas que lhe são proporcionados ao longo da vida (Tenreiro-Vieira e Vieira, 2000).

Como é referido no novo programa (Ponte et al., 2007), os alunos ao raciocinarem matematicamente devem ser capazes de “desenvolver e discutir argumentos matemáticos” (p. 5). Boavida (2006, p. 21) afirmou que “a argumentação é uma forma racional de comunicar, dando ênfase às explicações e justificações apresentadas pelos alunos não menosprezando os desacordos que emergiam das situações criadas e que proporcionavam o desenvolvimento de atividades argumentativas." Refere ainda que "o discurso numa aula de Matemática com caráter argumentativo, provoca nos alunos a defesa das suas ideias, o debate e a análise das contribuições dos colegas, a fundamentação e validação de raciocínios com carácter matemático." Boavida (2006, p. 21). Deste modo considera-se que a comunicação matemática e a argumentação matemática estão intimamente ligadas.

As conversas produtivas, tão necessárias na aula de Matemática, irão promover momentos de discussão, esses, segundo Ponte, (2005, p.16), constituem "oportunidades fundamentais para negociação de significados e construção de novo conhecimento". Com a discussão em sala de aula envolvem-se os alunos na sua própria aprendizagem, proporcionando-lhes "oportunidades públicas de falar e jogar com as suas próprias ideias" (Arends, 2008, p.413) e motivando-os a prolongar esse envolvimento para além da sala de aula. É através da troca de ideias entre os intervenientes dessas conversas (professor/alunos e alunos/alunos) que se fica a conhecer melhor cada um dos intervenientes e as suas ligações com o conhecimento matemático, facto referido por Ponte (2006). Salientar ainda o importante papel que a discussão e a reflexão têm sobre os diversos temas que poderão emergir e as respetivas conexões resultantes, tudo isto culminando na negociação de significados.

De acordo com Silva et al., (1999)

> "Várias vezes foi citada a importância da escolha das atividades matemáticas a desenvolver na sala de aula, atendendo à diversidade de tipos de tarefas, os exercícios, os problemas, as explorações, as investigações entre outras, as de investigação são as que melhor permitem compreender a natureza dos processos de pensar matematicamente, ou seja, experimentar, explorar, identificar padrões, formular e testar conjeturas, generalizar e demonstrar; estimulam o pensamento relacionando conhecimentos matemáticos; permitem o trabalho diferenciado de alunos com diferentes níveis de aprendizagem; promovem o desenvolvimento de atitudes, capacidades e conhecimentos (p.69)

As tarefas de investigação na sala de aula de Matemática são importantes, pois constituem uma parte essencial da experiência matemática e, por isso, permitem uma visão mais completa desta ciência, para além de estimular o envolvimento dos alunos, fomentando assim uma aprendizagem significativa. Estas tarefas promovem a discussão, a comunicação e a argumentação dos alunos, permitindo que estes reflitam sobre os diferentes argumentos e aprendam criticar de forma matemática (NCTM, 2000).

Alrø e Skovsmose (2006), apresentam um modelo que assenta, como é referido anteriormente, no uso de tarefas de cariz investigativo, de modo a desenvolver eficazmente a capacidade de comunicar matematicamente, sendo esse o Modelo de Cooperação Investigativa (MCI).

Esse modelo tem como base alguns conceitos chave, nomeadamente, o estabelecimento do contacto, a compreensão, o reconhecimento, o posicionamento, o pensar alto, a reformulação, o desafio e a avaliação sendo constituído por situações comunicativas entre professor e alunos que poderão aprofundar a aprendizagem de uma forma única (Alrø & Skovsmose, 2006).

Uma das principais características deste modelo é o facto de se basear numa escuta ativa, onde o ouvinte apresenta uma responsabilidade bem definida, não sendo, portanto, um sujeito passivo, mas sim faz um esforço para perceber o que está a ouvir. Escuta ativa significa, então, que se estabeleceu contacto, no caso da sala de aula, entre professor e alunos, sendo que quando tal acontece, assume-se que ambos os intervenientes estão em sintonia, prontos para trabalhar em cooperação (Alrø & Skovsmose, 2006). Mas então o que significa cada conceito do Modelo de Cooperação Investigativa (MCI)? Este modelo é constituído pelos seguintes elementos: estabelecer contacto; perceber; reconhecer; posicionar-se; pensar alto. Vejamos, então, em que consiste cada um deles.

Estabelecer contacto. Esta ação pretende ser a forma de criar sintonia com os intervenientes na aula, bem como as suas ideias e opiniões, levando à participação numa atividade cooperativa. Logo, contacto significa "estar presente e prestar atenção ao outro e às suas contribuições, numa relação de respeito mútuo, responsabilidade e confiança" (Alrø & Skovsmose 2006, p. 106). Assim, quando esta primeira ação ocorre, esta é encarada tanto como uma fase preparatória para a realização da investigação, como uma atitude positiva entre os participantes mostrando disponibilidade para a realização dessa mesma investigação. Ao mencionarmos respeito mútuo, responsabilidade e confiança, estes três aspetos referem-se aos fatores emocionais que estão relacionados com o MCI, contrariamente ao que se possa pensar, os aspetos emocionais são indispensáveis ao processo de ensino-aprendizagem, proporcionando-lhe maior qualidade (Segurado & Ponte, 1998)

Perceber. É definido como "(...) descobrir alguma coisa da qual nada se sabia ou não se tinha consciência antes" (Alrø & Skovsmose, 2006, p. 106). Podem ser definidos vários atributos às perguntas que são formuladas pelo professor e pelos alunos de modo a se perceber as perspetivas que procuram, estas têm como objetivo uma investigação, ou pelo menos, demonstram espírito de descoberta, sendo questões abertas, cujas respostas se desconheciam no início desta demanda. Perceber, num contexto cooperativo, pressupõe apresentar as suas próprias ideias para o restante grupo no centro do processo de comunicação (Alrø & Skovsmose, 2006). Deste modo, aquando do surgimento de "questões hipotéticas como as questões o que acontece se, também são indicadoras de certo grau de abertura e disposição para perceber novas possibilidades" (Alrø & Skovsmose, 2006, p. 107).

Estas também "podem ser usadas com outros propósitos, tais como fazer ironia ou demonstrar desinteresse ou irrelevância" (Alrø & Skovsmose, 2006, p. 107). Logo, o importante é inferir qual é a intenção de quem a proferiu, analisando o contexto em que foi formulada para ser possível reconhecer qual a função que assume. Assim sendo, é importante ter um espírito aberto e curioso, de forma a que estas possam ser consideradas uma mais valia dentro do processo de investigação.

Reconhecer. Consiste em analisar perspetivas e ideias que foram percebidas, abrindo caminho para que seja reconhecido uma perspetiva e essa seja conhecida por todos os elementos envolvidos na investigação. Esse reconhecimento permite um aprofundamento da investigação, sendo nesta fase comum observar-se uma reformulação e alteração de procedimentos de modo a ser possível reconhecer a natureza do problema apresentado, isto é em linguagem matemática (Alrø & Skovsmose, 2006). Esta fase caracteriza-se pela utilização das questões do tipo "porquê", levando à justificação, no entanto esta aparece na forma de demonstração. Durante este processo é possível o delineamento de ideias matemáticas, que além de reconhecidas podem ser aprofundadas.

Posicionar-se. Nesta fase pretende-se que se possa "dizer o que se pensa e, ao mesmo tempo, estar recetivo à crítica das suas posições e pressupostos" (Alrø & Skovsmose, 2006, p. 112). Assim, posicionar-se está relacionado com a tomada de posições, realização de declarações e apresentação de argumentos, sendo o principal objetivo realizar uma investigação conjunta sobre um assunto ou perspetiva. Logo, esta fase assume bastante importância, pois promove a dedicação e a persistência na defesa de uma opinião, bem como ao processo de análise que ocorre antes da sua aceitação ou rejeição.

Pensar alto. Implica "(...) expressar pensamentos, ideias e sentimentos durante o processo de investigação" (Alrø & Skovsmose, 2006, p. 113). O ato de pensar alto, é por vezes, uma forma de tornar algo público, uma ideia, uma opinião, uma perspetiva. Desta forma, uma conversa entre os diferentes intervenientes, pode não ser uma conversa comum, mas sim uma forma de investigação verbalizada (Alrø & Skovsmose, 2006).

2.2. Interpretação e argumentação

A interpretação em Matemática envolve duas áreas do saber, a Matemática e a Língua materna. É possível observar a ação da matemática na resolução de problemas, através do raciocínio matemático utilizado para alcançar um resultado. Já a língua materna observa-se através da capacidade que se possui para interpretar um texto ou enunciado, retirando a informação necessária para poder resolver o problema.

Segundo Sim-Sim (1998, p. 12), "a interpretação pressupõe um conhecimento sintático da língua, que provém de um resultado de uma aquisição gradual de estruturas gramaticais mais elaboradas." Baddeley, citado por Sim-Sim (1998), refere que o processo natural pelo qual a criança assimila as regras que regulam a formulação sintática da respetiva língua materna, pela psicologia experimental, é considerado um exemplo paradigmático de apreensão implícita, que mais tarde resultará no conhecimento que o sujeito tem da sua própria língua, denominando-se conhecimento implícito ou intuitivo da língua.

A autora ainda refere o facto de que, o conhecimento implícito são os padrões de organização sintática de uma língua que o falante possui, permitindo "aferir da conformidade de um qualquer enunciado até à estrutura sintática do sistema linguístico em questão." (Sim-Sim, 1998, p. 148). Assim, para compreender um enunciado é imprescindível conhecer o significado de todas as palavras que o integram e de ter acesso aos padrões de constituição da estrutura sintática da língua. Para ser possível a transmissão de uma mensagem, as palavras isoladas e a ordenação aleatória de palavras vão refletir a inexistência de qualquer estrutura, perdendo assim o seu valor.

Segundo Sim-Sim (1998, p. 14), "numa estrutura frásica, o encadeamento de palavras deve estar de acordo com uma determinada ordenação sequencial, isto é, para se compreender e produzir frases torna-se imperativo ser capaz de estabelecer uma relação entre palavras ou agrupamentos naturais de palavras que estão organizados numa estrutura hierárquica". Logo, a compreensão de um enunciado é um processo de reconhecimento do que é ouvido e do que é lido que, segundo Sim-Sim (1998), tem que ter em conta um conjunto de estratégias que levam a uma rápida análise. Este processo é composto por várias fases, sendo elas: a seriação e a sequência de palavras no enunciado, a informação concisa de cada palavra e as chaves prosódicas e contextuais que fazem parte do que é transmitido. A interpretação, segundo Sim-Sim (1998), requer uma utilização do conhecimento implícito da língua, para compreender o que se ouve e o que lê, o que exige que se recorra repetidamente à informação guardada na memória acerca do sistema linguístico em presença e acerca do real representado na formulação linguística.

É o que apreendemos na nossa memória, não só itens lexicais como também as regras sintáticas, que nos permitem estruturar e refazer de forma rápida e automática o significado de uma mensagem, quer estejamos a lê-la ou a ouvi-la. A compreensão frásica requer que cada palavra seja armazenada temporariamente, enquanto a frase ouvida [ou lida] é gramaticalmente processada, ou seja, se estabelecem as relações entre as unidades constituintes do enunciado e se realiza a reconstrução do seu significado. Uma vez extraído o significado, as palavras exatas de cada constituinte são esquecidas, conservando o ouvinte o fundamental da informação (Sim-Sim, 1998).

Costa e Fonseca (2009), diz que o nível de compreensão do oral e da leitura depende tanto da quantidade e da variedade do vocabulário, assim como da complexidade sintática adquirida. Assim, ler fluentemente é uma das maiores finalidades no processo de ensino e aprendizagem da leitura, porque permite ao aluno descodificar automaticamente, o maior volume de informação possível.

O processo de compreensão fica em risco de falhar quando o conhecimento prévio do aluno apresenta lacunas ou se a capacidade de inferir, comparar e interpretar se encontra comprometido ou pouco desenvolvido, o que pressupões que, o desenvolvimento cognitivo dos alunos vão depender de vários fatores, biológicos e contextuais, nomeadamente, as oportunidades que estes têm de procurar informação e de a interpretar corretamente, sozinhos ou com ajuda de terceiros. (Costa & Fonseca, 2009).

Nas orientações para o desenvolvimento do currículo de Matemática (2001), quer a nível nacional, quer internacional, variadas recomendações indicam que é necessário ter atenção à argumentação na aula de Matemática; além disso, é de extrema importância serem criadas condições para os alunos participarem e se sentirem parte integrante e fundamental neste tipo de atividades (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1998; APM, 1998; NCTM, 1991, 2000; Ponte et al,1997). No programa de matemática do ensino básico (Ponte et al, 2007) e também no Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (Ministério da Educação, 2001) surgem referências claras a estas atividades; aliás, no programa, a comunicação matemática é considerada uma temática a trabalhar, de caráter transversal, sendo que a argumentação emerge como um subtema do tópico raciocínio matemático, tópico este com estreita relação com a temática da comunicação, assim como fatores de carácter metodológico.

No documento "Competências Essenciais", onde se refere o que todos os alunos devem desenvolver ao longo da educação básica, está contida a ideia de que, para validar uma afirmação é necessária uma boa argumentação, sendo esta confirmada por uma autoridade exterior; além disso, deverá existir uma vontade de realizar e testar conjeturas, dando origem a generalizações, pensando sempre de uma forma lógica (Ministério da Educação, 2001).

É realçado ainda que a comunicação matemática deve ser transversal às experiências de aprendizagem levadas a cabo pelos alunos, sendo que, na comunicação oral, é importante que ocorram as experiências de argumentação e de discussão tanto em grande, como em pequeno grupo (Ministério da Educação 2001).

Mas o que significa a argumentação? Será que podemos aceitar qualquer discurso como argumentação? Segundo (Chronaki & Christiansen, 2005) a argumentação terá como indicadores os seguintes: em primeiro lugar é percetível a existência de um processo comunicativo que obedece a uma lógica, mas sem ser necessariamente dedutivo, sobre um determinado assunto; em segundo lugar é possível observar no texto produzido através do processo descrito anteriormente, opiniões, argumentos. Assim argumentação é referida como um conjunto de argumentos interligados de uma forma lógica.

Assim, torna-se fundamental que nas aulas de matemática sejam valorizadas situações de aprendizagem onde a argumentação, a explicação e a justificação estejam presentes (Yackel & Hanna, 2003). Como podemos perceber, a comunicação matemática é percebida como um elemento inerente do fazer Matemática. Vários trabalhos comprovam este aspeto, tais como, os de Vygotsky e Bruner importaram para primeiro plano o relevo da interação social no processo de aprendizagem do Homem. Interação na aprendizagem é sinónimo de comunicação, logo o discurso é o nosso primordial modo de comunicação, por tal, a importância de fomentar conversas matemáticas na aula de matemática (Sfard, 2003).

É de extrema importância os alunos levarem a cabo a árdua tarefa de provar o que fazem, tal como é evidente, no último documento com orientações curriculares publicado pelo NCTM (2008).

Poderá existir ainda um último argumento que justifica a importância da realização de tarefas de argumentação, e na capacidade de diálogo.

Para Grácio (1992),

> a aptidão argumentativa pode ser compreendida como a capacidade de dialogar, de pensar, de escolher e de se empenhar em algo. O espaço que a argumentação abrange num dado contexto espelha a importância a liberdade de reflexão e ação aí dominou. Deste modo, a educação para a argumentação é um objetivo indubitável, pelo que importa implementá-la não apenas para o âmbito intelectual, mas também para o social e o ético (p.12).

Os argumentos apresentados possibilitam demonstrar a importância conferida ao envolvimento dos alunos em atividades de argumentação, mais propriamente na aula de matemática. Mas, apesar da valia das atividades de argumentação matemática ser largamente reconhecida, apresentam uma expressão insuficiente, ou mesmo inexistente, em muitas salas de aula (Ponte et al., 1997; Putnam, Lampert & Peterson, 1990).

O que pode muitas vezes acontecer é o facto de os professores se depararem com algumas dificuldades, nomeadamente, situações problemáticas não antecipadas, que levam a que a docência seja bem mais complexa e imprevisível do que seria se apenas explicasse conceitos ou procedimentos matemáticos, apresentando apenas exercícios, referindo-se à consolidação de conhecimentos ou se fosse a única parte decisória no que diz respeito ao valor matemático do discurso na sala de aula.

A dinâmica interativa na sala de aula é bem mais profícua, inovadora e permite uma maior envolvência por parte dos alunos. A argumentação pode ser vista como um dos parâmetros a serem desenvolvidos no processo de Comunicação, para isso, é importante que esta seja parte integrante num processo comunicativo "real" entre professores e alunos, ou entre os alunos (Chronaki & Christiansen, 2005).

De variados estudos realizados sobre o desenvolvimento da argumentação nos alunos, destaco o de Lampert (2001), que mostra que é exequível conceber contextos de aprendizagem com alunos do ensino básico em que a argumentação matemática está em destaque, sendo que, em consequência deste facto, o currículo instituído não é afastado para uma posição secundária. Apesar de ser evidente que é muito importante fomentar atividades que promovam a argumentação, são vários os estudos que demonstram que esta prática coloca algumas dificuldades aos professores.

Sherin (2002) por exemplo, defende que conceber e sustentar ambientes de aprendizagem que favoreçam o fazer matemática e falar sobre ela, é algo que acarreta algumas dificuldades para um professor; Heaton (2000), por seu lado, faz referência a surpresas e incertezas manifestadas pelo docente, quando planeia o seu ensino de forma a trabalhar com os alunos com o objetivo de produzirem argumentos matemáticos; Chazan e Ball (1999) focam problemas já vividos ao tentarem envolver as turmas em atividades de argumentação de forma a certificar a produtividade matemática das práticas argumentativas e acautelar que os alunos fossem por caminhos suscetíveis de incitar frustração ou embaraço social.

No entanto, e estando ciente das dificuldades que este tipo de atividades poderão trazer, nos dias de hoje muitos professores implementam atividades que favorecem a argumentação nas aulas de Matemática, validando o estudo de Lampert (2001), e reforçando a convicção que é possível conceber este tipo de contextos de aprendizagem com alunos do ensino básico. Os professores são um elemento fundamental para o desenvolvimento da argumentação na aula de Matemática, estes têm um papel de mediadores na fase de introdução à atividade argumentativa (Chronaki & Christiansen, 2005).

O foco principal no desafio da matemática baseia-se na perspetiva da natureza da disciplina. A matemática é vista como uma rede de ideais interconectadas. Para construir estas redes de ideias é necessário que os alunos processem diferentes conceitos e, simultaneamente, comparem os conceitos e os considerem em diferentes contextos.

A aprendizagem matemática tem em consideração a concentração e o esforço num período prolongado de tempo para a construção de conexões entre tópicos, e entender a coerência de ideias matemáticas (Anderson & Krathwohl, 2014)

A perspetiva baseia-se igualmente na hierarquia da sala de aula de experiências, que Smith e Stein (2011), descreveram como a mudança de memorização para procedimentos sem conexões para os procedimentos com conexões para tarefas.

A maior parte dos estudantes não consegue construir estas redes de ideias ou "fazer a matemática", sem o pensamento sustentado. Quando confrontados com a tarefa, que exige deles a tomada de decisão sobre o tipo de solução ou estratégica, a expetativa é que os alunos procuram resolver a tarefa por si mesmos, especialmente, quando a solução não está clara (Smith & Stein, 2011).

O desenvolvimento de mentalidades de crescimento e metas de domínio é um produto da cultura de sala de aula. Numa meta-análise de 49 estudos de pesquisa sobre a cultura na sala de aula, entre 1991 e 2011 Rolland descreveu três importantes e relevantes descobertas. (Rolland, 2012).

Em primeiro lugar, o autor identificou que os primeiros anos de escolaridade são fundamentais para a conexão de estruturas de objetivos de sala de aula e a formação de atitudes dos alunos.

Em segundo lugar, Rolland identificou que as salas de aula promovem o domínio, especificamente naqueles que se concentram na aprendizagem do conteúdo, em vez do desempenho competitivo. Estes, são mais propensos a promover atitudes positivas relativamente à aprendizagem.

E, em último lugar, Rolland concluiu com base na meta-análise que as salas de aula, em que os professores apoiam ativamente a aprendizagem dos alunos, promovem altos resultados e esforços.

Os estudantes desenvolvem uma capacidade cada vez mais sofisticada de pensamento e ações lógicas, na análise, avaliação, explicação e generalização. Os estudantes estão a raciocinar matematicamente quando explicam o seu pensamento, quando deduzem, justificam as estratégias utilizadas e as conclusões alcançadas, quando adaptam o conhecido ao desconhecido, quando transferem a aprendizagem de um contexto para outro, quando provam que algo é verdadeiro ou falso e quando comparam e contrastam ideias relacionadas e explicam as suas escolhas (Watson & Sullivan, 2008). Clarke e Braun (2013) descreveu simples para os professores utilizarem na sala de aula de matemática, para facilitar o raciocínio matemático (figura 1):

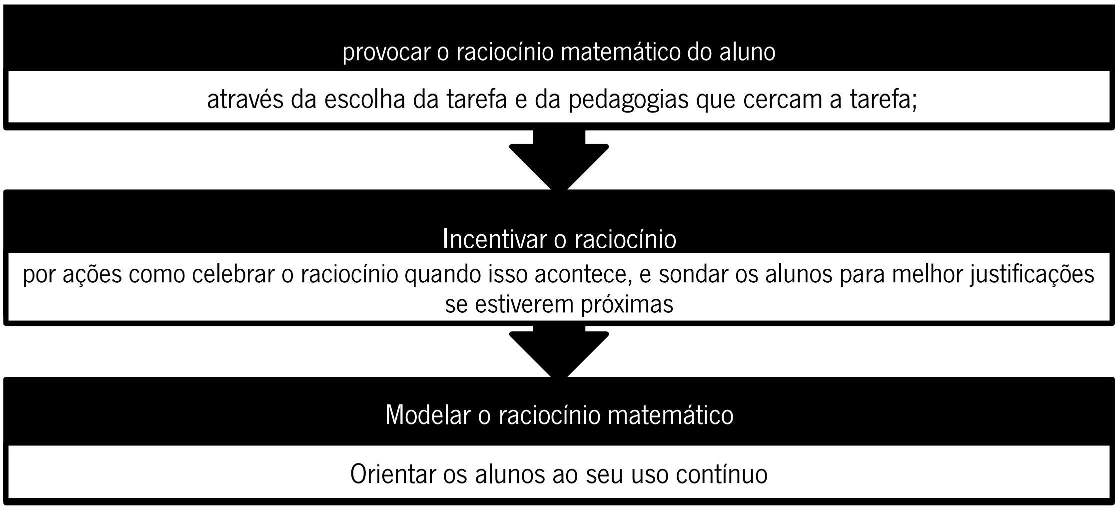


Figura 1 - Três ações para os professores utilizarem na sala de aula de matemática para incentivar o raciocínio

Anderson e Krathwohl (2014) concentraram o seu estudo em apenas uma lição em sala de aula de matemática, com alunos do 1° ciclo. Os autores, concluíram que os alunos do ensino primário estão dispostos e capazes de raciocinar por si mesmos, especialmente, nas salas de aula, nas quais a cultura do raciocínio foi estabelecida.

No ano de 2007, a Comissão Europeia publicou o Relatório Key Competences for Lifelong Learning European Reference Framework., documento que surgiu na sequencia do relatório publicado em 2002, e assumiu como principais finalidades, a) identificar e definir as competências necessárias para a realização e desenvolvimento pessoal, cidadania ativa, coesão social e empregabilidade na sociedade de conhecimento, b) apoiar o trabalho dos estados-membros ao nível da responsabilidade que assumem no desenvolvimento das competências-chave em todos os cidadãos, e c) proporcionar uma ferramenta de referência a nível europeu e um quadro de referência para posterior ação a nível comunitário. O mais importante aspeto deste relatório foi a competência matemática que se definiu como a capacidade / habilidade de aplicar o pensamento matemático no sentido de resolver um conjunto de problemas em situações do quotidiano. São o pensamento lógico e espacial, a apresentação de formulas e modelos, bem como as tabelas e gráficos.

Ao comparar os números ao nível mais básico, implica que as crianças olhem para dois números (por exemplo, 4 e 9) e respondem à questão "qual é maior?" e "Qual o menor?".

2.3. O estudo das funções

O conceito de função é um dos mais importantes na área da matemática. A sua origem acompanhou os primórdios do cálculo infinitesimal e, surgiu de uma forma confusa nos "fluentes" e "fusões" de Newton (1642-1727).

Ponte (1990) utilizou os termos "relata quantitas" para designar de variável dependente e "genita" que designava uma quantidade obtida a partir de outras por meio das quatro operações aritméticas principais.

O primeiro autor a utilizar o termo "função" foi Leibniz (1646-1716) para designar em termos gerais, a dependência duma curva de quantidades geométricas como as subtangentes e subnormais e, introduziu a terminologia "constante", "variável" e "parâmetro".

Através desenvolvimento do estudo de curvas através de meios algébricos, tornou-se um termo para representar quantidades dependentes de variáveis e de uma expressão analítica. Assim, a palavra função foi adotada na correspondência trocada entre 1694 e 1698, por Leibniz(1647-1748) e João Bernoulli (1667-1748).

A noção de função era assim identificada na prática por meio da expressão analítica, a situação que vigorou nos séculos XVIII e XIX, apesar de ter sido identificado que uma mesma função pode ser representada por diversas expressões analíticas diferentes. É pois, uma noção que está associada a noções de continuidade e desenvolvimento em série, que teve diversas ampliações e clarificações que alteraram a sua natureza e significado.

Posteriormente, com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, que se iniciou através de Cantor (1845-1918), o conceito de função foi estendido no século XX com o sentido de incluir as correspondências arbitrárias, como os conjuntos numéricos ou não.

Assim, através do conceito de correspondência passou-se para a noção de relação, que constituiu um conceito primitivo da Teoria das Categorias.

De acordo com Youschkevitch (1976) "Foi o método analítico de introduzir funções que revolucionou a Matemática e, por causa da sua extraordinária eficiência, reservou um lugar central para a noção de função em todas as ciências exatas"(p.39).

O conceito de função não surgiu por acaso na matemática, de acordo com Bento Caraça (1951) surgiu como uma ferramenta matemática indispensável para o estudo quantitativo dos fenómenos naturais, iniciada por Galileu (1564-1642) e Kepler (1571-1630).

Existem diversas formas para ensinar as funções. Quando as funções são introduzidas na álgebra, os alunos adquirem a definição pouco clara de funções. Outras vezes, as definições não são mencionadas e os alunos devem descobrir as suas próprias definições baseadas em exemplos dados na aula.

Por outro lado, o papel curricular do conceito de função pode ser visto com base em três importantes aspetos:

- A natureza mais algébrica ou funcional da abordagem
- A generalidade do conceito
- A sua aplicação a problemas e situações da vida real e de outras ciências

O desenvolvimento do ensino da matemática no século XX e a sua utilização para outras ciências e tecnologias fizeram com que o conceito de função tivesse cada vez mais importância. Por exemplo, na álgebra e a geometria analítica, a expressão função diz respeito a uma função polinomial do 1° grau com uma variável; e, uma função linear admite uma expressão geral explicita da forma $y = ax + b$, em que a e b são números reais.

Neste caso concreto, as quatro letras que foram utilizadas possuem papéis diferentes, ou seja, o x é o argumento da função, a variável independente, y é um valor que a função tem para cada argumento, a variável dependente, a é o declive e b a ordenada de origem.

De acordo com Matos (2007)

> A interpretação das variáveis numa relação funcional envolve as seguintes capacidades: (i) reconhecer a correspondência entre quantidades, independentemente do tipo de representação que é usado; (ii) determinar do

> valor da variável independente dado o valor da variável dependente; (iii) determinar do valor da variável dependente dado o valor da variável independente; (iv) reconhecer a variação conjunta das variáveis que intervêm numa relação, qualquer que seja a sua forma de representação; (v) determinar os intervalos de variação de uma das variáveis quando se conhecem os da outra; e (vi) expressar uma relação funcional de forma tabular, gráfica e/ou analítica, com base nos dados de um problema. (p.17).

Designa-se de expressão analítica de uma função a uma expressão que traduz a regra que associa os objetos e as respetivas imagens. Como exemplo, o perímetro do círculo é função do seu raio. Esta função exprime-se por: $P(r) = 2\pi r$. E, o domínio da uma função consiste no maior conjunto de valores através dos quais a sua expressão analítica tem sentido. Assim, pode-se omitir a referência concreta ao domínio e descreve-se como:

$$f\ (x) = \frac{x - 1}{x - 3}$$

2.4. O ensino de gráficos de funções no currículo escolar

O estudo da matemática tem um grande contributo para o desenvolvimento do aluno, através do desenvolvimento do raciocínio abstrato, e num percurso que inclui três dimensões (figura 2):

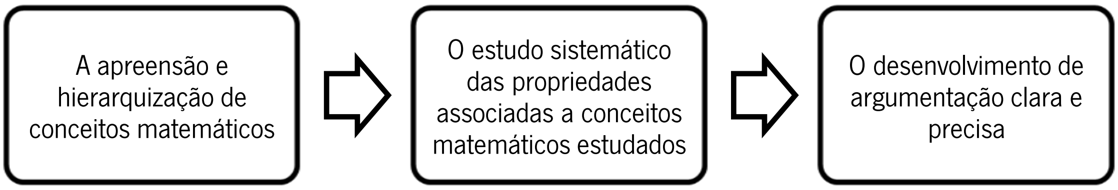


Figura 2 – Percurso do desenvolvimento do raciocínio abstrato

Deste modo, pode-se afirmar que um dos principais objetivos do ensino da matemática é a aplicação ao mundo real uma vasta diversidade de áreas de conhecimento.

Igualmente, o novo programa de matemática de Portugal (DGIDC, 2008/2009) deu grande enfase às representações como um dos objetivos gerais do ensino da matemática. Assim, são quatro os sistemas de representação atualmente reconhecidos como fundamentais, verbal, gráfico, simbólico e tabular, sendo os mais comuns no ensino da matemática os sistemas de representação gráfica e simbólico (Carraher & Schliemann, 2007).

O que representa o raciocínio matemático e como podemos caracterizá-lo? Esta questão sustenta o desenvolvimento do modelo de raciocínio matemático (Jeannotte, 2015). Embora os documentos curriculares em todo enfatizem a promoção do raciocino matemático, como o objetivo mais importante, a forma como este é descrito nos documentos tende a ser vaga, não sistemática e até contraditória.

De acordo com Erdem e Gürbüz (2015), o raciocínio matemático define-se como o processo para chegar a uma decisão, através da utilização do pensamento crítico e lógico. Segundo os autores, o raciocínio inclui habilidades como acompanhar e avaliar as cadeias de argumentos, sabendo que diferem de outros tipos de raciocínios.

Não obstante na comunidade de pesquisa em educação matemática, o discurso sobre o raciocínio matemático não é monolítico, não consiste numa única voz. Existem diversas visões da matemática e do ensino. Um fator adicional aumenta a confusão, tal como descrito por Yackel e Hanna (2003), "escrever sobre raciocínio em matemática é complicado pelo fato de que o termo raciocínio, como a compreensão, é amplamente utilizado com a suposição implícita de que existe acordo sobre o seu significado" (p. 228).

No entanto, entre os autores que definem o raciocínio matemático, são enfatizados diversos aspetos. Arsac (1996) e Cabassut (2005) enfatizam a sua dupla natureza (produto versus processo). Lithner (2008) refere que o raciocínio matemático produz novos conhecimentos.

Reid (2010), Rivera (2008) e Meyer (2010) referem a importância do raciocínio abdutivo na descoberta matemática. Ao contrario do aspeto estrutural da forma do raciocínio matemático, alguns estudos referem a sua caracterização, e enfatizam os seus processos subjacentes (Stylianides, 2008).

Com base na visão cognitiva e sociocultural, o raciocínio matemático pode ser contextualizado como uma atividade discursiva. Avaliar o raciocínio matemático como uma atividade discursiva, conduz ao quadro de conhecimento desenvolvido por Sfard (2008, 2012).

Sfard (2008) define a cognição como o "termo que inclui o pensamento (cognição individual) e a comunicação interpessoal. Através da associação das palavras comunicação e cognição, o autor refere que estes dois processos são diferentes. Na estrutura da comunicação, o discurso é central, sendo que, o discurso é um "tipo especial de comunicação que se distingue do reportório de ações admissíveis. E "os discursos da linguagem são distinguíveis pelos seus vocabulários, mediadores visuais, rotinas e narrativas transferidas" (p. 297).

O gráfico de uma função representa um conceito matemático, ou seja, para cada x que pertence ao domínio de uma função, determina-se o seu correspondente valor de y ($y = f(x)$).

Assim, o conjunto de todos os pontos (x, y) obtidos através deste processo é o gráfico da função f. A representação gráfica pode ser efetuada no papel ou num quadro, e numa representação em papel milimétrico para que seja mais precisa.

A representação do gráfico de uma função pode ser efetuada através das escalas horizontal e vertical, localizando de forma rigorosa os pontos ou, efetuando de forma qualitativa sem dar importância aos aspetos métricos.

O programa de Matemática do Ensino Secundário de 2013 aborda a questão da utilização das calculadoras gráficas, em particular para a obtenção de valores aproximados de soluções de equações envolvendo funções reais de variável real, aproveitando-se os conhecimentos adquiridos acerca do estudo analítico de funções para justificar a validade de determinados procedimentos e analisar criticamente os diversos usos que podem ser feitos deste tipo de tecnologias neste contexto (DES. 2013, p.10).

O mesmo deve-se salientar que a calculadora gráfica deve ser considerada como um instrumento de pesquisa e não somente como um instrumento de cálculo, pois possui um papel fundamental na exploração das tarefas propostas. Antigamente, o ensino da matemática utilizava como recursos de ensino e aprendizagem da matemática, o quadro, o lápis, a borracha e o papel. E, atualmente, existem outros recursos que são indispensáveis na sala de aula, como as calculadoras.

Quando o aluno utiliza de forma correta a calculadora, aprende matemática de forma mais significativa. É, pois necessário ajudar os alunos a desenvolverem um espirito crítico para que possam detetar a informação.

Segundo Rocha (2001)

> Compreender o que é o gráfico de uma função e saber interpretar a informação que este nos disponibiliza, efetuando uma leitura adequada da respetiva escala, é muito diferente de perceber que o gráfico de qualquer função, por mais curvo que seja, pode ser visualizado como uma reta, desde que limitemos a nossa observação a uma zona adequadamente escolhida (p.241)

De acordo com Rocha (2012) a calculadora alterou a dinâmica da sala de aula de matemática, bem como a maneira de resolver os problemas isto porque, "tradicionalmente, tanto a formulação do problema matemático como a interpretação da solução eram vistos pelos professores com menor importância em comparação com o processo de resolução do problema" (p. 498). Ou seja, através da calculadora para a resolução de problemas, os alunos possuem mais possibilidades de desenvolvimento das suas capacidades cognitivas, a simplificação do cálculo permite que os alunos tenham mais tempo para explorar as atividades matemáticas mais profundas e significativas (Taylor, 2013)

Para Ponte et al. (1997) a utilização da calculadora na resolução de tarefas permite estimular os alunos a formar conjeturas e ao mesmo tempo, desenvolver a capacidade de investigar argumentos válidos.

2.5. O pensamento crítico dos alunos

O pensamento crítico envolve o raciocínio profundo e uma consideração do que recebemos, ou seja, faz com que os indivíduos pensem, questionem, desafiem ideias, gerem soluções relativamente a problemas e tomem decisões inteligentes quando confrontados com desafios (Mansoor & Pezeshki, 2012).

A aplicação do pensamento critico em ambientes escolares desenvolve as habilidades do pensamento, isto porque, as pessoas constroem e avaliam argumentos, detetam erros comuns no raciocínio e resolvem problemas sistematicamente.

De acordo com Pagano e Roselle (2009), o pensamento crítico é um processo de avaliação de informação e opinião colhidas na fase de reflexão de forma sistemática, proposital e eficiente das habilidades para resolver problemas.

Para poder explorar o pensamento crítico, é preciso saber como retratar o pensamento dos alunos (Prayitno & Suarniati, 2017). Um mapa cognitivo é uma técnica para representar como o sujeito pensa sobre um determinado problema ou situação para que os pesquisadores possam ter uma determinada atitude para a próxima etapa (Ackermann, Eden, Cropper, & Cropper, 2004).

Na resolução de problemas matemáticos, os alunos podem identificar problemas resolvidos. Neste caso, permite que os alunos entendam o problema e com base nisso o compreendam e elaborem estratégicas de resolução. No planeamento estratégico, os alunos podem encontrar as ideias certas ou as soluções que permitam as estratégicas eficazes para resolver o problema (In'am, 2014).

O pensamento crítico é, assim, um pensamento intencional, racional e dirigido para uma determinada meta, podendo esta ser a resolução do problema ou de uma tomada de decisão (Halpern, citado por Tenreiro-Vieira e Vieira, 2000, p. 25).

De acordo com Portugal e Marchão (2014)

> (...) a construção e desenvolvimento do pensamento crítico são, em si, processos que influem na forma como o sujeito, no caso a criança, constrói e organiza o conhecimento. Precocemente, as crianças precisam de ser apoiadas e estimuladas a usarem e agilizarem as estruturas do pensamento,

> aprendendo a estruturá-las e a complexificá-las, ou seja, a tornarem o seu pensamento inteligente, num ambiente pedagógico de natureza socioconstrutivista (p.98).

Para que o aluno possa aprender de forma eficaz, é necessário ter motivação para agir, observar com os olhos bem abertos, e a mente desperta para analisar (Guerra, 2000). Então, nesta perspetiva é importante identificar o que os alunos pensam sobre esta forma de ensino?

A resposta a esta questão é que a educação com base no pensamento crítico irá proporcionar a formação de bons cidadãos, embora para que isto seja possível, é necessário que a sala de aula e a escola representem uma micro-sociedade crítica (Moura & Gonçalves, 2013).

CAPÍTULO III - ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL

Este capítulo irá incidir sobre a descrição da escola onde foi realizado o estágio bem como da turma onde foi aplicado o estudo em questão. Serão, também, indicadas estratégias de ensino utilizadas e métodos utilizados para a recolha de dados da investigação.

3.1. Caraterização da escola

A cidade de Guimarães está situada no distrito de Braga e a sua beleza histórica é incontornável. Muitas vezes denominada por "Cidade Berço", a cidade de Guimarães proporciona uma viagem no tempo no seu centro histórico, tendo em grande parte das suas fachadas presente as influências deixadas ao longo dos tempos por todos os que lá passaram.

Os avanços manifestados com o decorrer do tempo fez os Vimaranenses lutar pela sua sobrevivência, tendo encontrado na fiação e na tecelagem do linho e do algodão, nos curtumes, na cutelaria, na quinquilharia e no artesanato, a principal fonte de economia desta cidade. Era então necessária a formação da população para estas áreas, por isso, foi lançado, a 20 de dezembro de 1864, um Decreto para que fossem criadas as primeiras três escolas industriais do país: em Guimarães, Covilhã e Portalegre. Com o decorrer do tempo o decreto ficou esquecido nas páginas do Diário do Governo, até que, em 1884, a sociedade de Martins Sarmento juntamente com Alberto Sampaio tomam a iniciativa de realizar uma exposição industrial do concelho, destinada a mostrar as faces da indústria Vimaranense.

A intenção era evidenciar aquilo que se fazia com o que se tinha e mostrar o que se poderia fazer com a reforma de meios, fazendo assim com que a escola antes escrita em decreto fosse trazida para a terra. E assim, nasceu, em 1884, a escola onde eu lecionei.

A escola terá sido lançada com um currículo mais prático no início dos tempos, mas, após o 25 de Abril, com todas as alterações no sistema educativo foi sofrendo alterações no seu currículo até chegar a vasta oferta que dispõe hoje para os seus alunos.

Em 2009, com o programa de modernização da Parque Escolar, a escola sofreu alterações tanto no seu interior como no exterior e é nesta escola que foi elaborada a presente intervenção pedagógica.

A escola, então descrita, está situada no centro da cidade de Guimarães e carrega um importante compromisso com a sua cidade, desde a primeira aula, de desenho industrial, lecionada a 14 de Janeiro de 1884.

Através dos últimos dados a que se tem acesso, do ano letivo 2013-2014, o agrupamento era constituído por 2687 alunos, dos quais 52 são do ensino pré-escolar, 388 do 1° ciclo, 176 do 2° ciclo, 289 do 3° ciclo, 23 do ensino vocacional e 1759 do ensino secundário (onde 1430 pertencem a cursos científico-humanísticos, 25 pertencem ao ensino recorrente e 304 estão inseridos num curso profissional).

Esta escola está organizada de acordo com o organigrama apresentado na figura 3:

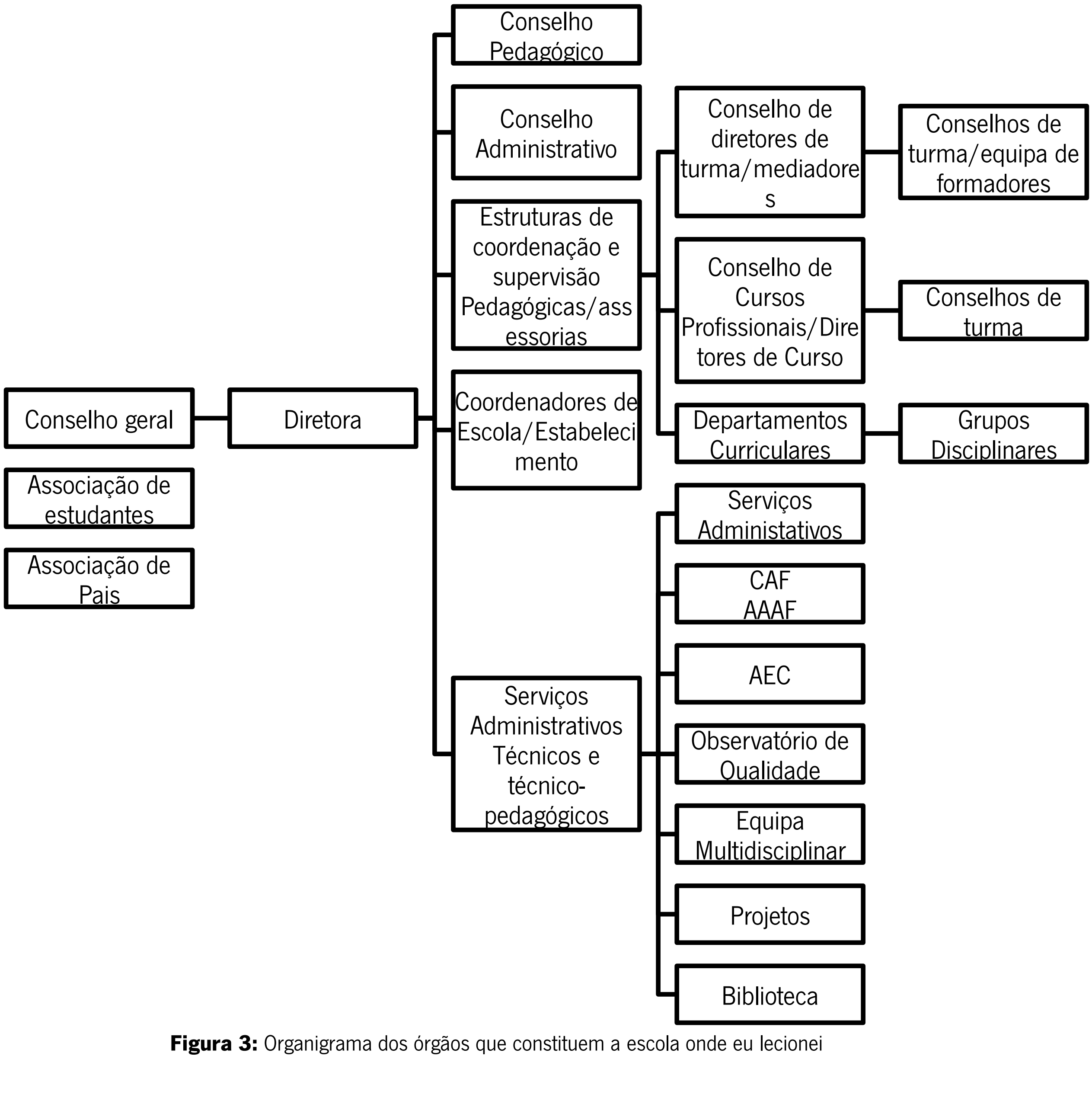


Figura 3: Organigrama dos órgãos que constituem a escola onde eu lecionei

As aulas, neste agrupamento, são ministradas por 212 docentes, onde apenas 12 dos quais são professores contratados, o bom funcionamento das escolas é garantido por 78 assistentes, dos quais 12 são assistentes técnicos e 66 assistentes operacionais, já o serviço de psicologia e orientação conta, apenas, com uma pessoa destacada para essa função.

3.2. Caraterização da turma

A turma em que se realiza a intervenção é do curso de socioeconómicas, do ensino regular, no 10.º ano de escolaridade. É constituída por 13 raparigas e 14 rapazes com uma média de idades de aproximadamente 15 anos. Existem 8 repetentes.

Passando mais especificamente para a Matemática, entre os alunos da turma, 12 consideram a matemática a sua disciplina favorita e apenas 4 admitem ter dificuldades na disciplina. Sendo uma turma de um curso científico de socioeconómicas, as representações gráficas poderão contribuir para que os alunos desenvolvam o seu interesse pela disciplina de Matemática, visto que, os gráficos estão constantemente a aparecer em economia e a análise crítica destes, bem como a interpretação, é importante nesta área.

A amostra dos alunos é constituída por 52% do género masculino e 48% do género feminino e, com idades principalmente nos 15 anos (61%)

3.3. Plano Geral de Intervenção

A intervenção pedagógica decorreu com um total de 9 blocos de 90 minutos, como se pode ver na tabela 1.

Tabela 1- Sequência de ensino para o Plano de Intervenção Pedagógica Supervisionada

Data	Tópico
03/05	**Teste diagnostico** **Introdução às funções definidas por ramos**
04/05	**Tarefas envolvendo funções definidas por ramos** **Introdução da função módulo.**
09/05	**Função módulo** **Equações com módulo**
10/05	**Inequações com módulo**
11/05	**Tarefas acerca da matéria dada nas aulas anteriores**
16/05	**Continuação da realização das tarefas acerca da matéria dada nas aulas anteriores**
17/05	**Funções definidas por radicais quadráticos**
18/05	**Equações com radicais quadráticos**
23/05	**Inequações com radicais quadráticos**

3.3.1. Instrumentos de Recolha de Informação para a Avaliação do Projeto

Durante a realização do projeto vários foram os métodos utilizados para recolher informação, de forma a responder aos objetivos propostos, gravações, observação e produção dos alunos

Gravação de Vídeo e Áudio. Antes de iniciar as aulas de intervenção foi dado a cada aluno um papel a explicar o que seria gravado durante as aulas de intervenção do projeto onde no final os encarregados de educação autorizavam ou não a gravação da imagem dos seus educandos. Houve apenas um encarregado de educação que não permitiu a recolha de imagens do seu educando, por isso este aluno foi para o fundo da sala de modo a não serem captadas imagens suas.

Assim, em todas as aulas estaria, ao fundo da sala, uma câmara que permitia o registo das atividades em sala de aula. Para que não houvesse falhas no áudio, por a câmara estar no fundo da sala, coloquei também um telemóvel na mesa do professor a gravar apenas o áudio.

No final de cada aula o ficheiro de vídeo e de áudio era descarregado da câmara e do telemóvel para o meu computador pessoal, para que não houvesse problemas de espaço na memória na gravação da aula seguinte.

Esta estratégia de recolha foi importante para a realização da minha dissertação de mestrado pois assim, numa fase posterior as aulas que eu lecionei, pude ver e recordar as dificuldades sentidas pelos alunos durante as aulas.

Produções dos Alunos. As produções feitas pelos alunos tiveram grande importância, posteriormente, para analisar as suas aprendizagens. Depois de realizarem os teste de avaliação sumativa e de este estar corrigido pelo orientador, pedi para que cada um deles me desse o teste para fotocopiar e depois foi-lhes devolvido. Foram recolhidos, também, os testes diagnósticos que estes realizaram de forma a comparar a evolução dos alunos antes e depois das aulas a lecionar.

3.3.2. Avaliação de Aprendizagens

Tal como foi dito anteriormente, o ponto de partida da minha intervenção pedagógica foi feito com um teste diagnostico de modo a aferir em que ponto os alunos estavam no início da intervenção.

Posteriormente a avaliação das aprendizagens foi feita através de uma ficha de avaliação sumativa onde estavam relacionadas com a matéria dada nas aulas por mim lecionadas.

CAPÍTULO IV - INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

O capítulo 4 está dividido em 3 secções, e relaciona-se com a apresentação dos resultados colhidos durante os momentos de intervenção, o antes, o durante e o depois, para que possa ir ao encontro dos objetivos propostos para o projeto. Assim, irei analisar os momentos mais relevantes das aulas e do teste e questionário.

4.1. Avaliação diagnóstica

Nesta etapa, com a finalidade de responder ao objetivo do projeto, pretende-se diagnosticar as aprendizagens anteriores dos alunos sobre os conceitos de funções, nomeadamente, os intervalos onde a função é positiva e onde é negativa, representação gráfica da função. E, para tal, foi realizado um teste de diagnóstico.

No teste diagnóstico (Anexo I) incluíram-se questões sobre as funções representadas graficamente, zeros da função, intervalos onde a função é positiva e onde é negativa.

A seguinte tabela mostra as percentagens de perguntas corretas e incorretas, assim como as percentagens de respostas corretas com justificações erradas e de respostas corretas com justificações corretas.

Tabela 2 - Percentagens dos tipos de respostas na questão 1

	Respostas:		
	Correta		**Incorreta**
	Justificação correta	**Justificação incorreta**	
A	85,19%	14,81%	3,57%
B	81,82%	18,18%	21,43%
C	85,19%	14,81%	3,57%
D	88%	12%	10,71%

É visível através da tabela anterior que a maior parte dos alunos acerta a dizer se o gráfico se trata ou não de uma função. A pergunta que parece suscitar mais duvidas é a alínea B, pois tem uma percentagem maior de respostas erradas, 21,43%, isto acontece, provavelmente, porque os alunos não se aperceberam que parte do gráfico contém uma reta vertical, onde apenas um objeto correspondem infinitas imagens, o que faz com que este gráfico não corresponda ao gráfico de uma função.

Também se pode observar pela tabela que muitos alunos, embora não seja a maior parte, erram nas justificações que dão a sua resposta de ser ou não um gráfico de uma função. Analisando as suas justificações, a maior confusão que parece haver entre os alunos é entre a definição de função e a definição de função injetiva, como mostra o exemplo que se segue.

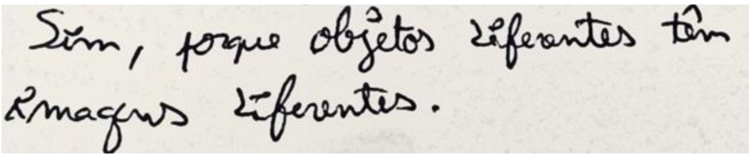


Figura 4 - Justificação do aluno A5 a questão 1 alínea C

Esta justificação dada pelo aluno vai de encontro a definição de função injetiva, onde a cada imagem corresponde um e um só objeto, quando deveria ter justificado com a definição de função, onde a cada objeto corresponde uma e uma só imagem.

Há ainda um aluno que justifica e responde à pergunta corretamente, mas desenha linhas auxiliares na horizontal em vez de ser na vertical, o que pode indicar que o aluno trocou a posição dos objetos com a posição das imagens como mostram as seguintes figuras.

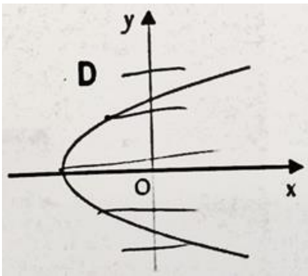


Figura 5 - Linhas auxiliares feitas pelo aluno A1 na questão 1 alínea D

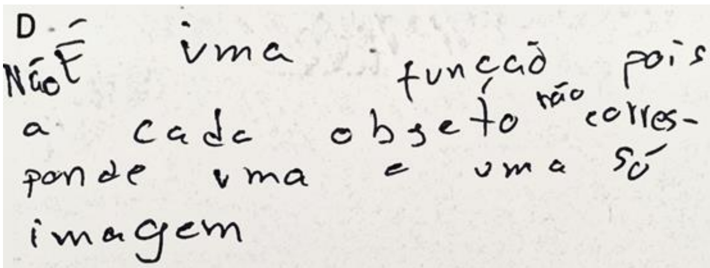


Figura 6 - Justificação do aluno A1 a questão 1 alínea D

4.1.1. Gráficos de funções

Nesta questão, introduzi quatro esquemas de gráficos e coloquei a questão: "Dos gráficos que se seguem indica, justificando, quais representam gráficos de funções". A inclusão deste exercício justifica-se pela importância, cada vez mais crescente, da visualização no ensino da matemática, ou seja, por outras palavras, da interpretação gráfica.

Na tabela 3 apresentam-se os resultados relativos à questão 1 do teste diagnóstico que se encontra na secção dos anexos no anexo I.

Tabela 3 – Frequência de respostas à questão 1

	Respostas			
	Correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não responde**
Esquema A				
Esquema B	18	10	2	-
Esquema C	22	5	3	-
Esquema D	18	6	6	-

Através dos resultados apurados na primeira questão sobre a representação gráfica de uma função, os alunos responderam corretamente na maior parte das questões, embora a sua justificação nalguns casos não foi totalmente correta.

Segue-se, como exemplo, a resposta de um aluno (figura 7), que se revelou parcialmente correta, mas onde falta uma justificação mais eficiente.

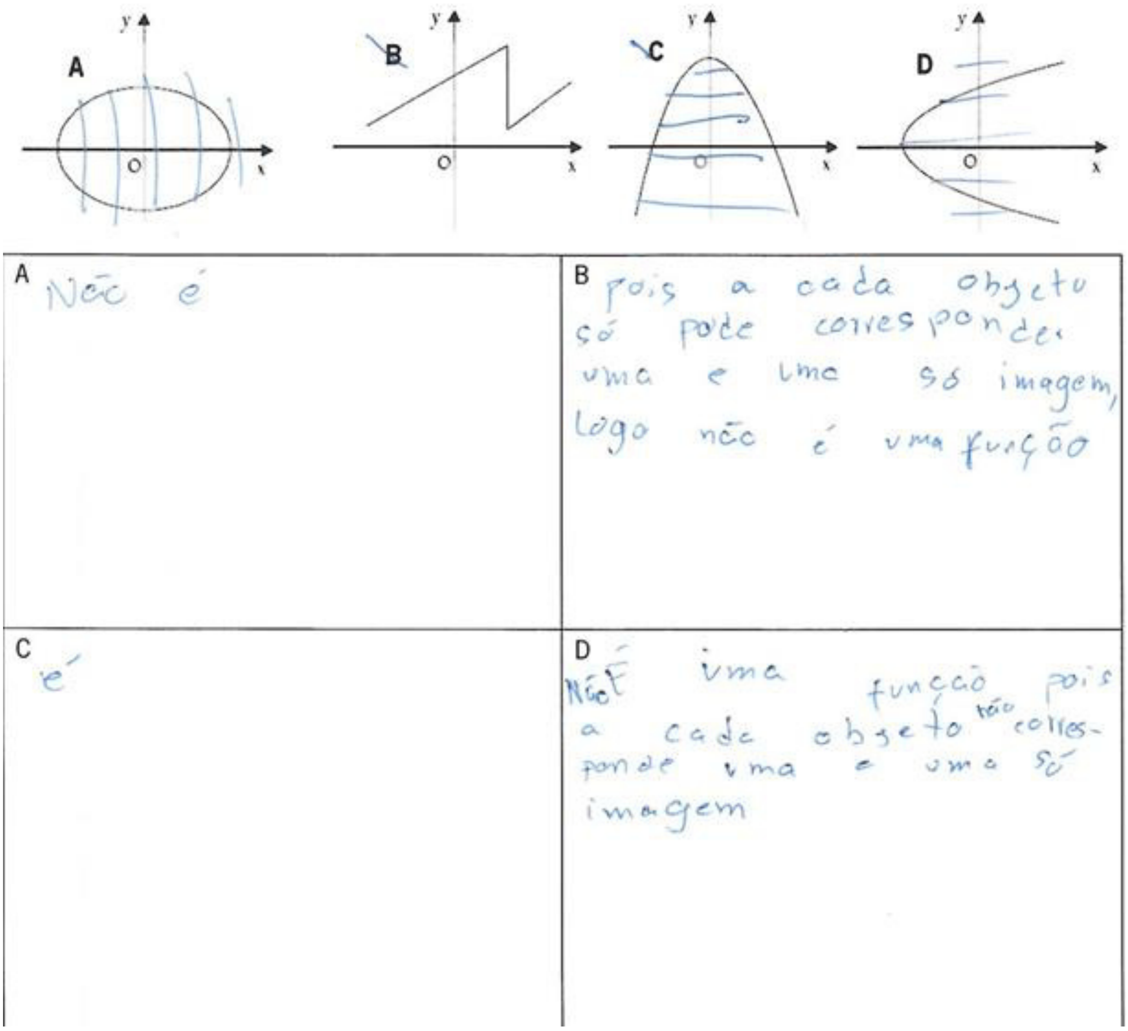


Figura 7 – Resposta de um aluno à questão 1

O gráfico de uma função é um conceito puramente matemático: para cada x pertencente ao domínio da função, determina-se o correspondente valor de y (y = f(x)). O conjunto de todos os pontos (x, y) obtidos por este processo é o gráfico da função f. Neste caso, o aluno deveria ter justificado a alínea A dizendo que este não era uma função uma vez que y≠ f(x), ou seja, a cada objeto de x não corresponde uma e só imagem de y. Do mesmo modo, na alínea C a justificação devia-se basear na premissa básica de uma função em que y = f (x), ou seja, a cada objeto vai corresponder uma e apenas uma imagem.

Outros alunos, responderam incorretamente à questão, não relacionando a definição gráfica de uma função, com todos os seus pontos essenciais.

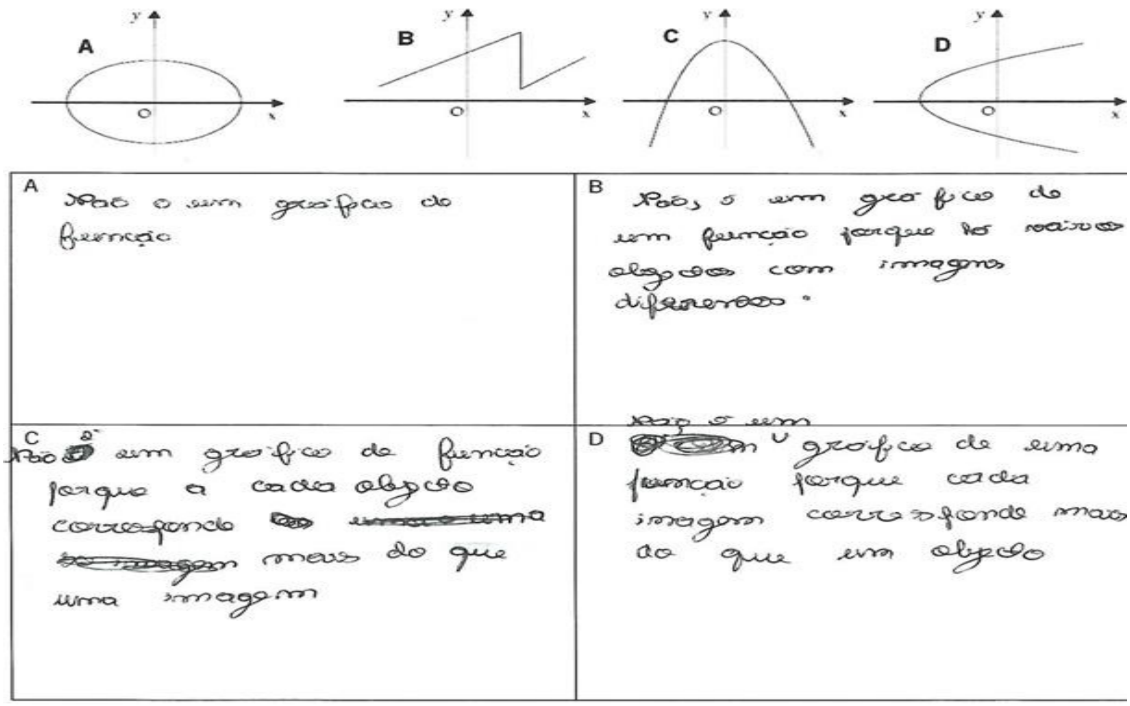


Figura 8 - Resposta de um aluno à questão 1.

Apesar da leitura e interpretação de gráficos ser uma habilidade matemática crucial para ser alfabetizado na interpretação e análise nos dias de hoje, esta é uma atividade complexa. Prova desta realidade são as respostas que podem ser observadas na figura 8, em que, o aluno não justifica a alínea A e nas alíneas B e D, o aluno confunde a definição trocando os conceitos matemáticos de imagem e objeto. A resposta C está errada, sendo que o aluno não considera ser um gráfico de uma função.

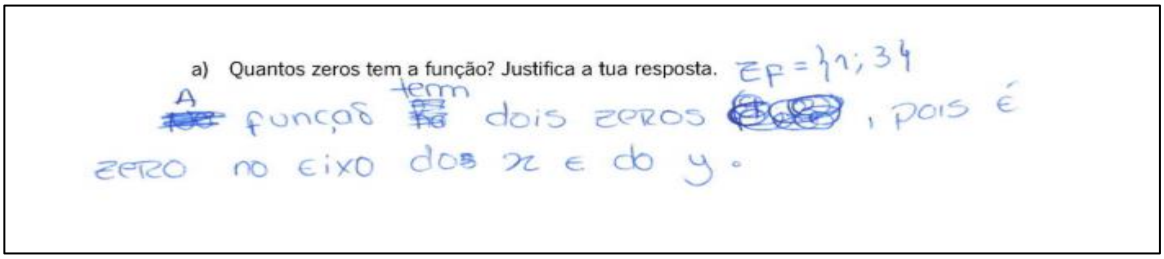
4.1.2. Número de zeros da função

Designa-se por zero de uma função todo o valor da variável independente x que tem por imagem o valor zero. Ou seja, o zero de uma função é todo o valor de Ox, pertencente ao domínio dessa função, tal que $f(x) = 0$. Graficamente, o zero de uma função corresponde ao valor das abcissas dos pontos de interseção do gráfico de com o eixo x. Houve então a necessidade de avaliar o conhecimento acerca da identificação dos zeros da função, sendo que as frequências de resposta podem ser observadas na tabela 4:

Tabela 4 - Frequência de respostas à questão 2 alínea a

	Resposta			
	Correta	Parcialmente correta	Incorreta	Não responde
Dois zeros da função	25	5	0	0

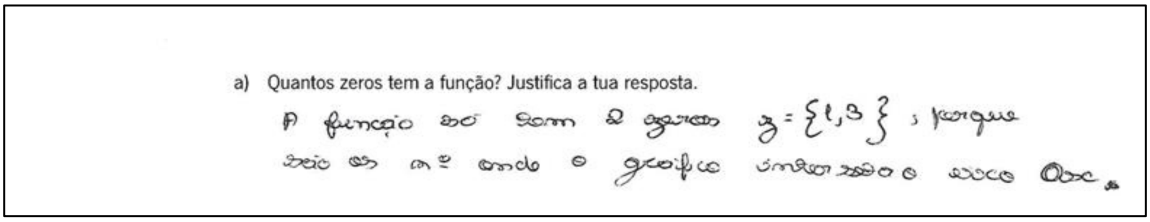
Observa-se que todos os alunos responderam corretamente à questão. No entanto, 5 alunos não a fundamentaram da melhor forma.


a) Quantos zeros tem a função? Justifica a tua resposta. Ep = {1; 3}

A função tem dois zeros, pois é zero no eixo dos x e do y.

Figura 9 - Resposta à questão 2 alínea a), parcialmente correta

No exemplo apresentado na figura 9, o aluno responde corretamente ao número de zeros da função, mas apresenta uma justificação errada uma vez que este responde que existem dois zeros na função devido ao valor nos eixo tanto do x como do y serem zero, em vez de dizer que a função interseta o eixo das abcissas ou o eixo Ox duas vezes. Na figura 10 é possível observar uma resposta certa, com a resposta que seria esperada para este exercício:


a) Quantos zeros tem a função? Justifica a tua resposta.

A função só tem 2 zeros z = {1,3}, porque são os nº onde o gráfico interseta o eixo Ox.

Figura 10 - Resposta à questão 2 alínea a), correta

4.1.3. Os intervalos onde a função é positiva e onde é negativa

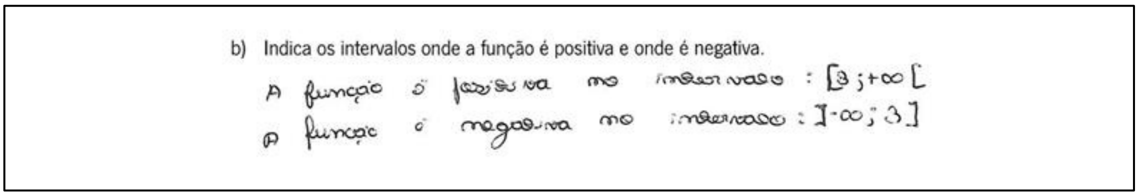
Neste exercício o objetivo é estudar o sinal de uma função que consiste em determinar os intervalos nos quais a função tem imagem negativa e os intervalos nos quais a função tem imagem positiva. As distribuição das respostas dadas a este exercício, encontram-se na tabela 5, relativos à questão 2, alínea b) (Anexo I):

Tabela 5 - Frequência de respostas à questão 2 alínea b)

	Respostas		
	Correta	Incorreta	Não responde
Intervalo onde a função é positiva	19	8	1
Intervalo onde a função é negativa	12	15	1

Observa-se que maior parte dos alunos respondeu de forma correta ao intervalo onde a função é positiva, no entanto, no intervalo onde a função é negativa, os alunos apresentam maiores dificuldades, como por exemplo, identificar o zero da função quando esta é negativa.

Na figura 11 é possível observar um exemplo de uma resposta parcialmente correta. Neste exemplo o aluno responde corretamente ao intervalo onde a função é positiva, $[3, +\infty[$ mas quando responde à parte correspondente ao intervalo onde a função é negativa não excluiu o 1 deste intervalo, por este ser um zero da função, assim como indica que o intervalo é $]-\infty, -3]$ em vez de indicar corretamente a abcissa que é 3.



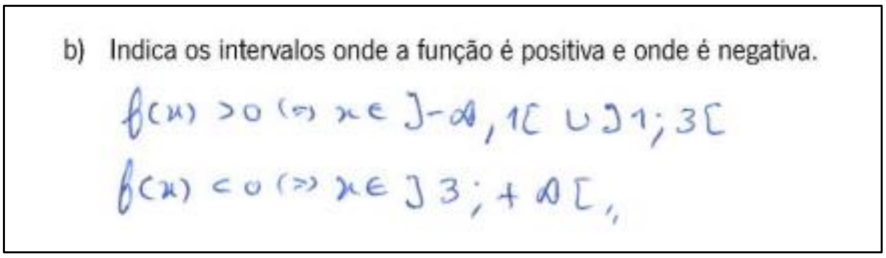
b) Indica os intervalos onde a função é positiva e onde é negativa.

A função é positiva no intervalo : $[3;+\infty[$

A função é negativa no intervalo : $]-\infty;3]$

Figura 11 – Resposta de um aluno à questão 2 b), parcialmente correta.

Na figura 12 é possível observar uma resposta incorreta, uma vez que o aluno o aluno trocou os intervalos, ou seja, trocou a parte negativa pela parte positiva. Assim, a forma correta de responder a esta pergunta seria $f(x) > 0 \Leftrightarrow]3; +\infty[$ e $f(x) < 0 \Leftrightarrow]-\infty, 1[\text{U}]1{,}3[$.



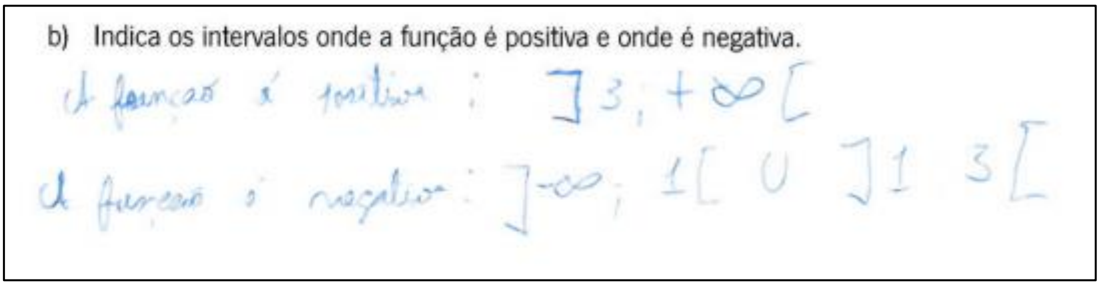
b) Indica os intervalos onde a função é positiva e onde é negativa.

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]1;3[$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]3;+\infty[,$

Figura 12 - Resposta de um aluno à questão 2 b), incorreta

No exemplo da figura 13 pode-se observar uma resposta de um aluno totalmente correta.

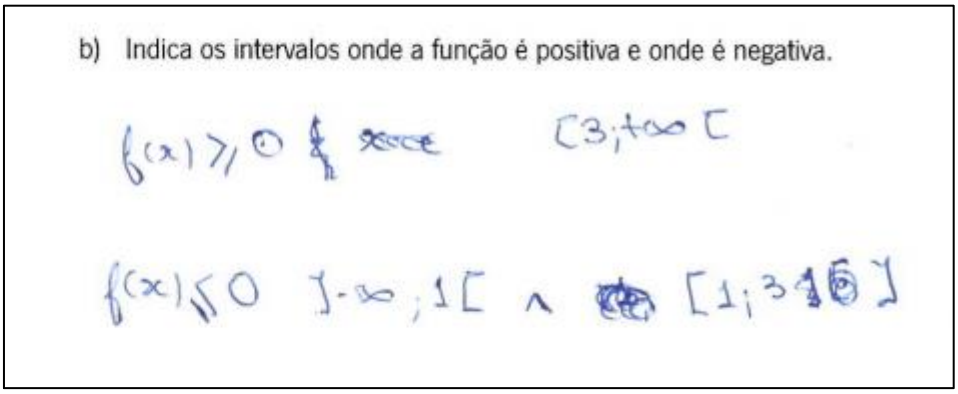

b) Indica os intervalos onde a função é positiva e onde é negativa.

A função é positiva: $]3; +\infty[$

A função é negativa: $]-\infty; 1[\cup]1\ 3[$

Figura 13 - Resposta de um aluno à questão 2 b), correta

Ainda relativamente à identificação dos intervalos positivos e negativos de uma função, é possível observar na figura 14 uma dificuldade apresentada por alguns alunos, em que eles consideram os zeros da função como parte dos intervalos onde a função é positiva ou negativa. Quando é pedida a parte da função onde esta é negativa ou positiva não se incluem os zeros da função, pois estes tem um valor de zero, que não é nem positivo nem negativo.


b) Indica os intervalos onde a função é positiva e onde é negativa.

$f(x) \geq 0$ $[3; +\infty[$

$f(x) \leq 0$ $]-\infty; 1[\wedge [1; 3]$

Figura 14 - Resposta de um aluno à questão 2 b), incorreta

4.1.4. Representação gráfica da função f que faz corresponder a idade (em anos) ao tempo de sono ideal (em horas).

Tabela 6 – Frequência de respostas à questão 3

	Respostas		
	Correta	Incorreta	Não responde
a) De acordo com o gráfico indica:			
i. O número de horas que a Ana, de 18 anos, deve dormir.	22	5	3
ii. A idade do Luís sabendo que precisa de dormir 12 horas.			
b) Indica o domínio e o contradomínio da função f.	28	2	0
c) Qual é a imagem de 16 pela função f?	25	5	0
d) Qual é o objeto que pela função f tem imagem 15?	22	5	3
e) completar as expressões	27	3	0

Observa-se que em relação à questão sobre a representação gráfica da função, na sua maioria os alunos respondeu de forma correta a maior parte das alíneas, com exceção da alínea a), e alínea d)

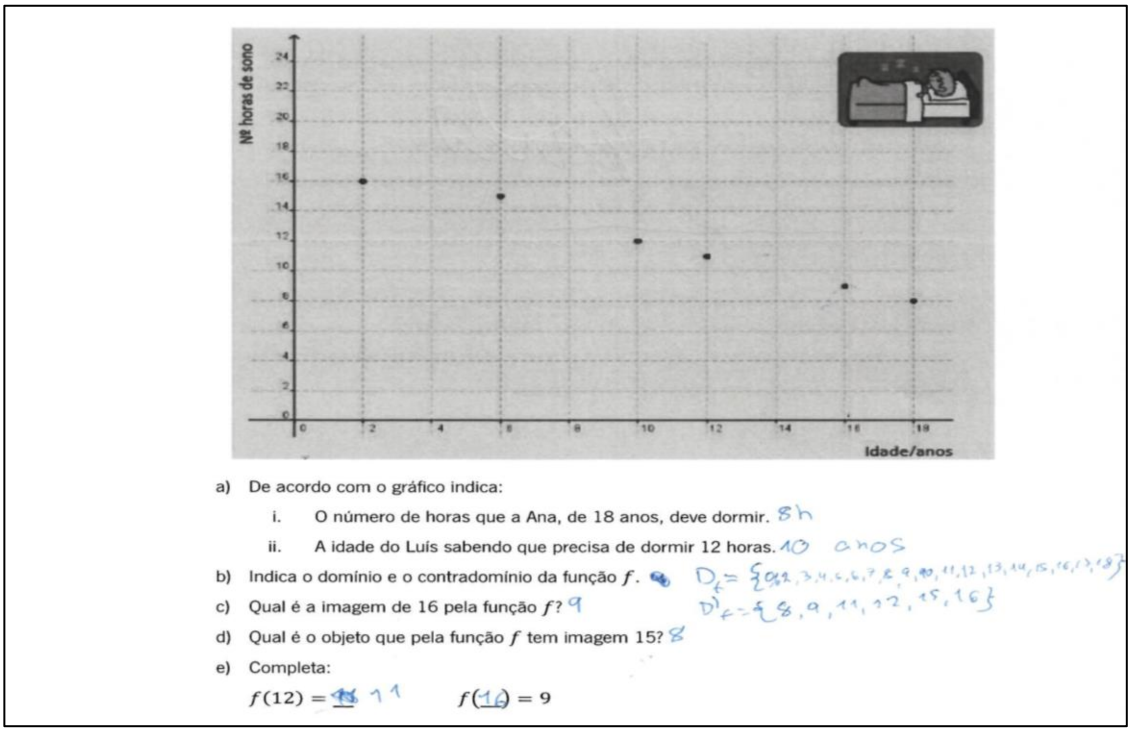


Figura 15 - Resposta de um aluno à questão 3

O aluno respondeu erradamente à alínea a), não tendo realizado os cálculos necessários para se obter o valor correto. O mesmo aconteceu com a questão d), não tendo sido capaz de dizer qual o objeto com imagem 15.

4.1.1. Esboço gráfico das funções

Na tabela 7 estão presentes os resultados à questão 4 do teste diagnóstico (Anexo I):

Tabela 7 - Frequência de respostas à questão 4

	Respostas		
	Correta	**Incorreta**	**Não responde**
Alínea a)	18	9	3
Alínea b)	22	8	0

Observa-se que nesta questão alguns alunos erraram tanto a questão na alínea a) e b), pelo facto de não conseguirem representar graficamente a função e por não apresentarem os dados respetivos.

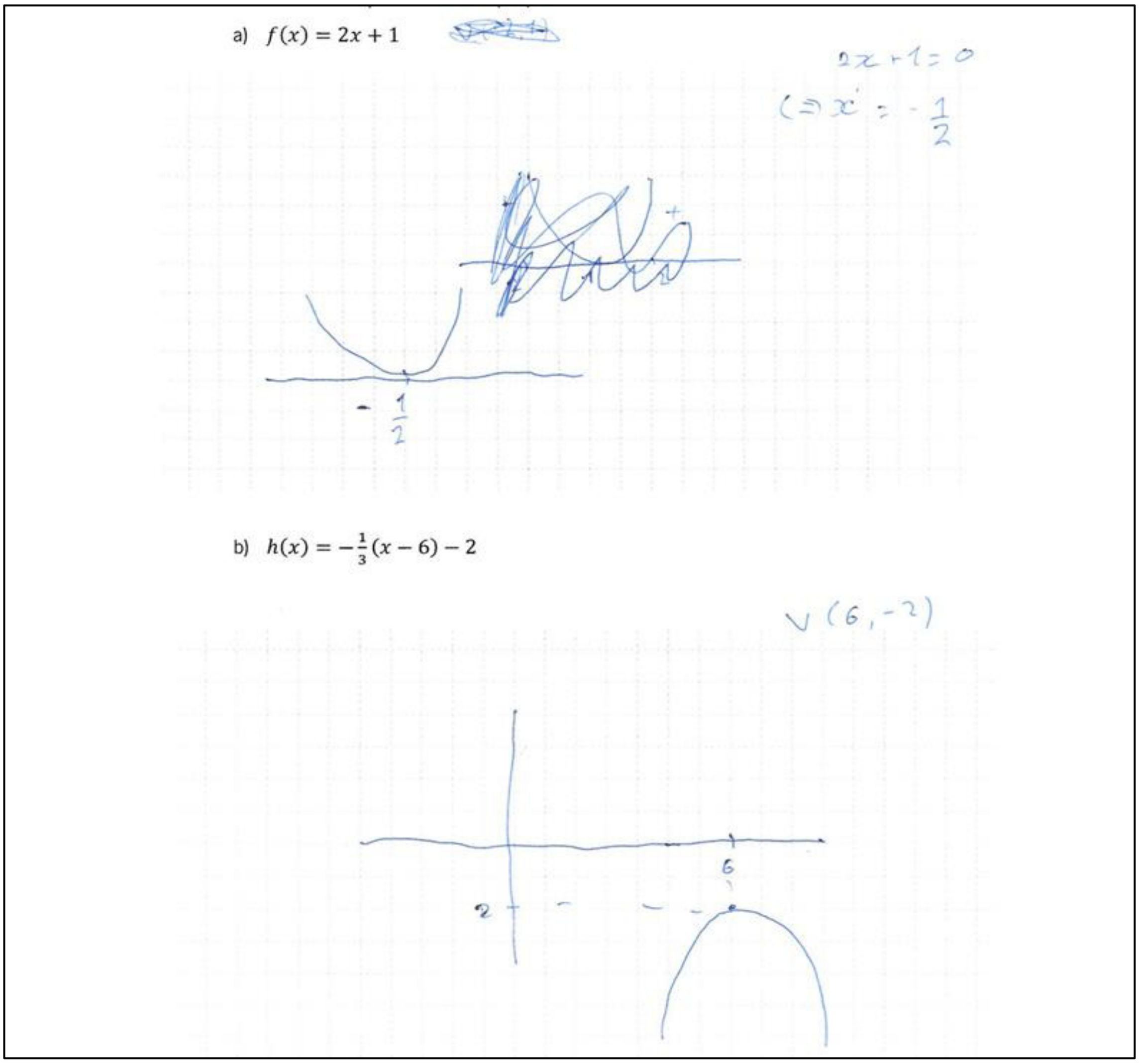


Figura 16 – Resposta de um aluno na questão 4, incorreta

Como se pode observar, o aluno não foi capaz de fazer a representação gráfica das funções, mostrando dificuldades na transposição da equação para a sua forma gráfica, ou seja, mostra dificuldades na capacidade de passar de uma forma de representação para outra. Estas dificuldades foram confirmadas, também, num estudo realizado com alunos do ensino secundário por Elia, Gagtasis & Demetriou (2007). Os resultados demonstraram as dificuldades sentidas com os alunos na resolução de problemas com funções que incluem conversões de diferentes modos de representação. Estes autores concluíram, através dos resultados obtidos, que os alunos olham para as diferentes representações de um função como se fossem objetos matemáticos distintos e autónomos e não diferentes formas de expressar o mesmo objeto (Elia et al., 2007).

4.2. Sequência de Ensino

Em seguida, apresento três das aulas do projeto da qual segui a planificação mostrada anteriormente na secção 3.3.

4.2.1. Desenvolvimento da aula nº 1, presente no anexo I plano de aula nº1

Como a função definida por ramos não difere muito das funções a que os alunos estão habituados esta aula foi pensada de modo a que os alunos só fizessem exercícios, onde na primeira tarefa fossem orientados para os pontos a ter em atenção neste tipo de funções e os restantes fossem capazes de os fazer sozinhos.

Foi então apresentado um gráfico de um função e as alíneas desta tarefas delineavam os passos que os alunos teriam que seguir para no final chegarem a função definida por ramos.

As tarefas seguintes os alunos foram resolvendo sozinhos ou em grupos de 2 a 3 pessoas, sendo sempre corrigidas no quadro, as respostas, no final.

Transcrição da aula da realização da tarefa 4 do plano de aula n°1:

Professora: Só faltava um exercício, não era? Vocês têm aí a ficha, não têm?
Aluno: Sim.
Professora: Têm todos?
Alunos: Sim
Professora: Então não é preciso projetar. Então diz aí para definir a função f por ramos. Alguém já fez o 4.1? Então vamos lá fazer.

(pausa)

Professora: Já sabem, sabem o vértice, que neste caso é $(2,0)$ e utilizam a expressão para determinar expressão da parábola. Conseguem ver bem o gráfico não conseguem? Que isto ficou um bocadinho pequenino.

(pausa para resolver o exercício)

Professora: Que outro ponto é que nós temos dessa parábola?
Aluno 1: O ponto $(4,0)$. O $(0,4)$.
Professora: Quem quer vir determinar a expressão da parábola só? Só da parábola.

(aluno vai ao quadro)

Professora: e agora, o domínio da parábola qual é?
Aluno: e o resto da função? Como é que se chama?
Professora: Depois caraterizamos a função toda.
Professora: A seguir, dois pontos da outra função, da reta?
Aluno 1: $(3,1)$.
Aluno 2: E $(5,-2)$.

Professora: Ora deixem ver, $(3,1)$ e?
Alunos: $(5,-2)$.
Professora: $(5,-2)$ isso! Quem quer vir calcular? A equação desta reta. E depois, já agora, define esta aqui. (olha para o quadro e corrige o aluno que está a resolver) Não podemos chamar f porque a f vai ser a anterior. Quem quer vir acabar o exercício?

(vai outro aluno ao quadro)

Aluno: O intervalo é aberto?
Professora: Sim, é aberto.
Professora: Agora na 4.2, isto é simples, não é? É só substituir, mas só têm de ter atenção a uma coisa. Que é aos domínios, ou seja, se queremos substituir $\frac{1}{2}$ vamos ver a que domínio é que ele pertence, não é? $\frac{1}{2}$ é menor do que 3 então vamos substituir onde?
Aluno 3: $x - x^2$.
Professora: Isso! É só isso que têm de ter em atenção ao substituir.

(pausa para resolver o resto do exercício)

Professora: Vai ao quadro fazer a alínea b) e tu vai fazer a alínea c)
Aluno: Eu queria fazer a c) em vez de fazer a línea b)
Professora: Vai lá! Vão vocês os dois que vocês nunca vão ao quadro. Apaguem o quadro daquele lado. Vá, toca a acelerar!

(fim do exercício)

Nas tarefas que se seguiram utilizei o GeoGebra para que os alunos pudessem ver melhor os gráficos com que estavam a trabalhar.

Quando passei para as calculadoras gráficas, para lhes dar uma opção que eles pudessem usar com mais facilidade em casa, foi onde senti maior dificuldade porque os alunos têm modelos diferente, uns mais avançados que outros, mas o orientador nesta parte ajudou-me para que todos os alunos ficassem esclarecidos.

A aula correu como previsto e foi dado tudo a que me tinha proposto no plano.

4.2.2. Desenvolvimento da aula nº 4, presente no anexo II plano de aula nº4.

A aula apresentada foi pensada de modo a que os alunos pudessem acompanhar as transformações que surgiam na função módulo quando era intersetada por uma reta horizontal, portanto a maior ajuda nesta aula foi o GeoGebra.

Os alunos puderam ver através dos gráficos das funções o que cada alteração na expressão analítica fazia e acompanhar assim o processo até chegar a conclusão, onde era mostrado o caso mais geral de cada condição.

Depois foram mostrados dois exemplos onde os alunos, com a minha ajuda, viam primeiro o que teria de acontecer através do gráfico e só depois realizavam analiticamente a inequação, chegando sempre a conclusão que os resultados pela observação do gráfico e pelo método analítico eram iguais.

Transcrição da aula do plano de aula n°4:

Professora: Está? Agora vão escrever assim em grande título: Função Módulo. Função Módulo. Vocês lembram-se o que é um módulo? O que é que faz o módulo? Por exemplo, quanto é que é o módulo de 1?

Alunos: É 1.

Professora: E o módulo de menos 1?

Alunos: É 1.

Professora: Então o que é que faz o módulo?

Aluno 1: É o valor do número.

Aluno 2: É a distância.

Professora: É o valor absoluto do número, sim? Então e como é que isso se escreve? (escreve no quadro$|\mathbf{1}|$) Então quando queremos o módulo de um número qualquer vamos pôr o módulo de x (escreve no quadro $|\boldsymbol{x}|$). Vamos ter então a função módulo. Escrevam a definição. À função que a cada número real faz corresponder o seu valor absoluto dá-se o nome de função módulo e representamos por, isto: $f(x) = |x|$. Vamos ver então o gráfico da função.

(projeta o gráfico na tela)

Professora: O gráfico da função módulo, ou seja, seria a função $y = x$ mas todos os valores que eram negativos passaram para cima, sim? Passaram a ser positivos. Então é uma função par, ou seja, quando $x = 1$ ela dá 1 e quando $x = -1$ ela também dá 1. Podem ver que tem um eixo de simetria, qual é o eixo de simetria?

Aluno 1: É o eixo do y.

Professora: E agora, a função módulo pode se escrever por ramos. Façam então uma nota. Podemos escrever a função módulo, $f(x) = |x|$ através de uma função definida

por ramos. Agora escrever mesmo a pergunta: Como é que fazemos isso? O que é que faz o módulo? Por exemplo, quando nós temos o módulo de 5 o que é que acontece ao 5? Não faz nada não é? Fica 5. Mas quando nós temos o módulo de -5 o que é que faz?

Aluno 3: Temos de substituir.

Professora: Troca-lhe o sinal não é? Então é isso que vão escrever a seguir. Se o que está dentro do módulo for positivo, podemos tirar o módulo à vontade porque não acontece nada. Se o que está dentro do módulo for negativo, podemos tirar o módulo desde que troquemos o sinal do que está lá dentro. Então, a função $f(x) = |x|$, se a quisermos escrever por ramos com é que vamos fazer? Quantos ramos é que acham que ela vai ter?

Aluno 1: 2.

Aluno 4: 2.

Professora: 2. Então, se o $x \geq 0$ e se o $x < 0$. Então se o x for maior do que zero como é que fica aqui?

Aluno 1: $x = x$

Professora: Fica x. Isto significa que como o x é positivo, os números são todos positivos então podemos tirar o módulo à vontade, não é? E agora, se os x forem todos negativos, se os números forem todos negativos, vamos ter de fazer o quê?

Alunos: $-x$

Professora: Vamos ter de pôr o simétrico, então vamos pôr $-x$. E é assim que transformamos uma função módulo numa função definida por ramos. Vamos agora ver uns exemplos. Escrevam então: exemplos. Representa as seguintes funções graficamente. (escreve as funções no quadro). Como é que vocês acham que será a representação gráfica daquela função? Em relação a função anterior que tínhamos visto, do módulo de x, qual é a diferença em relação aquela?

Aluno 3: Aquela tem $x + 2$. Tem um numero a seguir.

Professora: E o que é que faz esse número a seguir? O que é que vocês deram? Qual é a alteração que faz?

Aluno 1: Uma deslocação.

Professora: Uma deslocação, para onde?

Alunos: Para a direita.

Professora: Para a direita. Então como é que acham que vai ser o gráfico?

Aluno 1: Vai estar a ponta no 2.

Professora: Em vez de estar aqui, vai se deslocar 2 unidades para a direita. Agora, outra. Passem este gráfico! E aquela nova função, o que é tem de diferente?

Aluno 5: Tem um menos.

Professora: E o que é que faz aquele menos?

Aluno 5: Altera tudo lá dentro.

Professora: Altera tudo lá dentro?

Aluno 5: Fica igual a +2.

Aluno 1: Passa para baixo.

Professora: Fica igual a +2? Temos o módulo. Com um parênteses. Imagina que em vez de $|x - 2|$ tinhas um $f(-x)$ o que é que aquilo fazia? Quando tinhas as transformações o que estava positivo passava a negativo e isto aqui vai fazer a mesma coisa. Ora, se isto está tudo positivo mesmo que seja módulo, como o menos está fora do módulo, vai passar tudo para baixo. Então vai ser assim. (projeta o gráfico correto). E agora qual é a alteração em relação ao anterior?

Aluno 1: Tem um 3 fora.

Professora: E o que é que faz aquele +3?

Aluno 1: Subir 3 unidades.

Aluno 2: Vai subir.

Professora: Vai subir 3 unidades, então isto vai ficar tudo igual e o que é que vai acontecer?

Aluno 1: Vai para o 3.

Professora: Exatamente. Então vai ficar assim. (projeta o gráfico do novo exemplo) Não passas aluno 6?

André: Já fiz.

Professora: Está? Já passaram o gráfico?

Alunos: Não.

Professora: Agora escrevam em baixo. De um modo geral, os gráficos das funções do tipo, escrevem isto aqui são obtidos a partir do gráfico da função $y = |x|$ utilizando sucessivas transformações anteriormente estudadas. Agora tentem escrever aquela ultima função por ramos, a $g(x)$. Vão aquela notinha que nós escrevemos e não se esqueçam, não é só o x que tem de ser maior do que zero, é o que está dentro do módulo.

(pausa para resolverem o exercício)

Professora: Então quais é que vão ser as condições? As condições? O que está dentro do módulo tem de ser ou maior que zero ou menor que zero.

Aluno 1: É uma é maior ou igual que dois.

Professora: Mas o quê?

Aluno 6: 3 maior que..

Professora: 3maior ou igual a 0?

Aluno 6: Não, x.

Aluno 1: $x \geq 2$.

Professora: $x \geq 0$?

Aluno 1: A 2.

Professora: Sim, mas com calma. Primeiro vamos pôr tudo. Vamos pôr $x - 2 \geq 0$ nesta e aqui $x - 2 < 0$. Agora vamos ver, quando este é positivo o que é que acontece para tirar os módulos e quando este é negativo o que é que acontece para tirar os módulos. Cuidado que tem um menos atrás. Então, para tirar os módulos quando é positivo como é que é?

Aluno 7: $-(x - 2) + 3$

Professora: Vamos ficar com – $(x - 2)$, pomos os parênteses para não nos enganarmos no sinal, +3. Aqui é negativo então o que é que temos de fazer?

Aluno 1: Meter o menos.

Professora: Trocar o sinal. Então vai ficar menos, que era este menos daqui, $-(-(x - 2) + 3)$. Agora vamos resolver tanto as expressões como as condições, então isto vai ficar...(resolve o exercício no quadro). Sim? Ficou percebido? Ou tem dúvidas? Se tiverem duvidas digam! Digam agora ou calem-se para sempre! Estou a brincar. Mas tiveram dúvidas? Mas agora fazer exercícios. Exercício 1. Define por ramos a função f, de domínio R, tal que (escreve a função no quadro). Ah! Eu tinha aqui uma coisa para vos mostrar, esperem aí, para vocês verem aqui as funções daquele tipo. Olhem para aqui. As funções daquele tipo, olhem, quando mexemos no a o que é que vai acontecer? Quando o a fica positivo ele fica assim, quando ele começa a vir para o negativo inverte a função módulo estão a ver? Quando é zero ficamos com uma reta horizontal. Quando mexemos no h ele vai andar assim. Quando mexemos no k ele anda para cima e para baixo estão a ver? A função módulo é quando o k é zero o h é zero e o a é um. Isto é a função módulo estão a ver? Por isso é que qualquer função módulo pode se escrever desta forma.

Professora: Pronto, agora o exercício. Alínea a). A seguir quem quer vir fazer a alínea b)? Alínea b) quem quer vir fazer? Outra vez tu? Não, deixa ver se vem outra pessoa. Pronto vai lá Diogo. Está certo.

(pausa para resolverem o resto do exercício)

Professora: Façam o exercício 90 (projetado no quadro).

(pausa para resolverem o novo exercício).

Orientador: Joana, o Aluno 6 fez, ele vai lá fazer.
Professora: Vai lá fazer Aluno 6 ao quadro. Estás nervoso?
Aluno 6: Não!
Professora: Falta o eixo de simetria. A tracejado, faz a tracejado. Mas eu queria que tu me dissesses a equação do eixo de simetria.
Aluno 6: Isso já não sei.
Professora: O que é que tu ias fazer? Era uma reta de que tipo?
Aluno 6: Vertical.
Professora: Então e como é que se escreve uma equação de uma reta vertical?
Aluno 6: $y = -4$
Professora: $y = -4$? Então faz aí o $y = -4$, no gráfico. Então está realmente a passar no eixo dos y's?
Aluno 6: Ó é o x enganei-me.
Professora: É isso. Não precisas de fazer no gráfico, quero a equação só. Era só para tu veres que estavas errado.
Aluno 6: Tem razão.
Professora: Já alguém fez a alínea a) do 90.2? Estas 4 meninas vêm fazer a 90.2 toda! Agora decidam que alínea é que vem cada uma de vocês.
Aluno 8: Eu faço a primeira.
Professora: Para passar cadernos podiam passar em casa. A primeira então quem vem?

(aluno vai ao quadro)

Professora: Quando subtraímos 2 o que é que acontece? Mas não estamos a fazer no x.
Aluno 8: Vai para baixo duas unidades.
Professora: Vai para baixo duas unidades. Mas ele continua no 4. É o $f(x)$. Não da para ver agora mas isto é o módulo de $x + 4$. Então, como é que o André fez à bocado? Estava aqui no quatro e era assim, não é? Ele desceu duas unidades. E agora, o eixo de simetria qual é?
Aluno 8: $x = -4$
Professora: Continua a ser $x = -4$. Alínea b). Queres ir?
Aluno 9: Sim

Professora: Onde é que se vê o contradomínio?
Aluno 9: No eixo dos y's.
Professora: Próxima.
(aluno vai ao quadro)
Professora: Falta o eixo de simetria. Qual é o eixo de simetria?
Aluno 10: É este.
Professora: Qual é a reta vertical que divide de modo que faz um eixo de simetria?
Aluno 10: Aqui.
Professora: E qual é a equação dessa reta?
Aluno 10: Não sei.
Professora: Quando queremos uma reta vertical é x igual a alguma coisa. Só falta a outra menina.

(aluna vai ao quadro)

Professora: Na alínea d), o 2 aqui atrás o que é que faz?
Aluno 11: Multiplica.
Professora: Sim, multiplica, mas ao gráfico vai fazer o que?
Aluno 11: Dilata.
Professora: Não dilata, ele vai contrair, sim? Porque ele vi se manifestar mais depressa, não é? Na alínea d) nós vamos ter, olhem para aqui! Quando o x é 1 o y vai ser 2, então vamos ter uma coisa deste género, só que ele vai descer uma unidade, então como é?
Aluno 11: Assim?
Professora: Isso. Qual é o eixo de simetria então? E o contradomínio qual é que vai ser?
Aluno 11: É -1 a $+\infty$.
Professora: Agora tens de vir fazer a e). Olha, se com o 2 contraiu com $\frac{1}{3}$ vai?
Aluno 12: Dilatar?
Professora: Dilatar.
Aluno 1: Professora, como é que nós vemos quando é contraído? Por exemplo, com é que nós sabemos que contraiu?
Professora: Tu aí tens de arranjar, imagina se fizeres por ramos, se dividires por ramos o módulo, tu vais ter duas retas não é? Só que no módulo tu vais ter duas retas iguais, se encontrares dois pontos em cada reta tu consegues saber bem como é que é a reta. Pronto ficamos por aqui.

O que foi proposto no plano foi cumprido mas senti dificuldades para que os alunos falassem, apenas uma parte me respondia as questões colocadas. Este problema poderia ser resolvido se eu os pusesse em pequenos grupos ou até que os chamasse para eles virem ao computador escrever no GeoGebra, o que faria com que eles se sentissem mais envolvidos nas atividades.

4.2.4. Desenvolvimento da aula nº 7, presente no anexo IV plano de aula nº7

Esta aula foi pensada para que os alunos trabalhassem em grupos de 5 a 6 pessoas onde eram expostos quatro exemplos de funções irracionais no quadro e cada grupo ficaria com um deles para preencher os espaços na tabela. Os alunos fizeram o exercício sozinhos sem qualquer ajuda, a ideia seria ver as conceções e as estratégias que eles iriam utilizar para resolver as tarefas que lhes foram propostas.

Mais tarde foi feita uma conclusão genérica acerca das funções irracionais em conjunto com os alunos e neste caso eles estavam mais participativos. No final foram feitos exercícios para consolidar a matéria.

Neste aula senti dificuldades em controlar algum burburinho que havia devido aos grupos, penso que isso poderia ser evitado se os grupos fossem mais pequenos, de 4 pessoas. Senti ainda que pude chegar mais facilmente às dúvidas dos alunos pois quando eles tentavam fazer os exercícios iniciais sozinhos iam me fazendo perguntas e eu pude esclarecê-las com mais facilidade a todos eles. Por isso esta tática de trabalho ao mesmo tempo que mostrou algumas dificuldades mostrou-se mais proveitosa para os alunos.

Não consegui chegar as equações irracionais nesta aula porque as duvidas e as questões dos alunos, que iam surgindo no decorrer da aula, tomaram algum tempo, mas a matéria foi reposta na aula seguinte.

Nestas aulas notava-se os alunos mais inquietos, por isso na altura da resolução de exercícios tendiam a ficar mais faladores, mas a ordem era logo reestabelecida pelo professor. As aulas que eram mais teóricas os alunos já não estavam tão dispersos o que ajudava sempre no decorrer normal da aula.

Estes alunos não faziam muitas perguntas e não mostravam grande interesse em ir ao quadro, aliás, as idas ao quadro, para corrigir tarefas que eles estavam a realizar, eram sempre feitas pelos mesmos alunos. No que toca a este assunto de tirar duvidas e de participar nas atividades promovidas na sala de aula, estes alunos eram mais apáticos, o que não facilitou a elaboração do projeto, mas com os devidos incentivos as aulas foram ficando cada vez mais interessantes.

Em síntese, a maior parte dos alunos revela algumas insuficiências na capacidade de representar graficamente as funções matemáticas, tanto ao nível oral como na escrita. Ao nível oral, os alunos revelaram uma dificuldade em exprimir as suas ideias, faltando lógica na ligação entre os assuntos e evidenciaram fraco domínio nos aspetos de representação gráfica. A resposta do aluno na questão 4 (figura 16, p.40) é evidente esta dificuldade.

4.3. Teste de matemática

O teste de matemática efetuado pelos alunos teve alguma oscilação na classificação. A tabela seguinte indica as classificações respetivas.

Tabela 8 - Classificações dos alunos no teste de avaliação

Classificação	Número de alunos
[0, 10[	6
[10, 12[	7
[12, 14[	8
[14, 16[	2
[16, 18[	4
[18, 20[	1

Observa-se que as notas dos alunos no teste de matemática foram positivas na sua maioria, com apenas 6 notas abaixo de 10 valores. O que significa que as aulas dadas sobre as funções foram bem compreendidas e os alunos empenharam-se.

Como exemplo, a questão 1 alínea f) do grupo II que representa graficamente uma função (figura 17), a maior parte dos alunos acertou, embora alguns parcialmente.

Este aluno, embora tenha a resposta parcialmente correta, demonstra conhecimentos acerca da resolução de funções através da observação do seu gráfico (figura 18). Em alguns alunos foram consideradas respostas "parcialmente corretas", quando era identificado pelo menos um dos elementos que constituíam o lugar geométrico, faltando os restantes, ou quando todos os elementos do lugar geométrico se encontram referidos, mas referidos de forma incorreta.

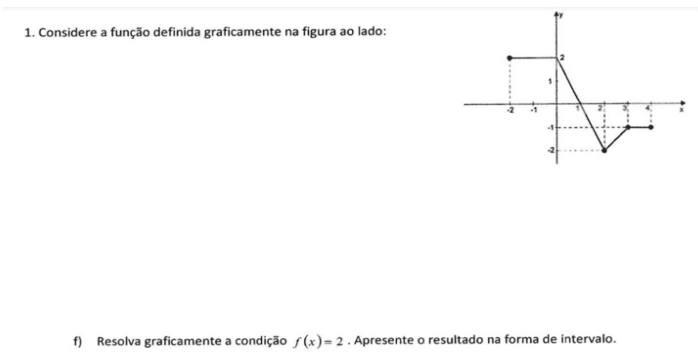


Figura 17 – Questão 1 alínea f) do grupo II do teste de avaliação

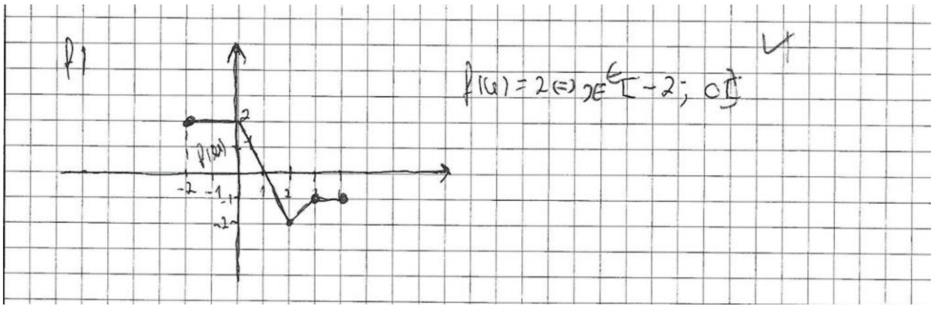


Figura 18 – Resposta do aluno 10 à questão 1, alínea f) do grupo II do teste de avaliação

CAPÍTULO V – CONCLUSÕES E BALANÇO FINAL DO ESTÁGIO

Nesta secção apresentam-se as principais conclusões obtidas no estudo, organizando-as de acordo com cada objetivo previamente definido para o presente trabalho. Assim como o balanço final do estagio.

5.1. Estabelecer uma abordagem gráfica no processo de ensino de funções

Na determinação da abordagem gráfica no processo de ensino de funções, por parte dos alunos foi aplicado um teste diagnóstico, antes do início da intervenção.

Ao efetuar as questões aos alunos sobre um problema que estão a resolver ajuda-os a pensar sobre a estrutura do problema e as estratégias potenciais que poderiam utilizar para o resolver. O modelo reflexivo utilizado, questionando os alunos a pensar em voz alta demonstra os passos do processo do seu pensamento.

As respostas incorretas obtidas no teste diagnóstico, nomeadamente a não identificação dos zeros da função, a troca de intervalos da parte negativa da parte positiva e a transposição da equação para representação gráfica e vice-versa, são representativas das dificuldades que muitos estudantes de nível secundário têm com esse problema depois de concluir uma unidade de livro didático tradicional sobre funções.

5.2. Avaliar a capacidade critica dos alunos em relação a representação gráfica das funções

De uma perspetiva filosófica, o pensamento crítico envolve o uso de critérios para fazer julgamentos ou apoiar decisões (Case, 2005; Lipman, 1988). Critérios são necessários para avaliar os argumentos e posições de outros, para avaliar evidências, e para avaliar os próprios pensamentos. Esses critérios podem vir na forma de padrões - "padrões para julgar a adequação das alegações sobre o significado; a credibilidade das declarações feitas por autoridades; a força dos argumentos indutivos; e a adequação das razões da moral, legal e estética" (Bailin, Case, Coombs & Daniels, 1999, p. 291).

5.3. Avaliar a aprendizagem dos alunos em exercícios envolvendo funções.

Em relação às aulas que já tinha pensado para o projeto, elas foram sofrendo várias alterações ao longo do ano, no inicio por ver como era a turma e ao que eles estariam mais habituados, depois pensei que eles poderiam envolver-se mais nas atividades se lhes mostrasse a matéria de maneira diferente e no final tive de mudar certos aspetos devido às dificuldades que eles apresentaram no teste diagnóstico. Agora, que já lecionei as aulas, penso que ainda poderia ter feito de outra forma.

A profissão de professor pode por muitos ser vista como que o trabalho seja apenas ensinar, mas no final deste ano, a conclusão que tiro é que, por muito que estejamos a ensinar os alunos, nós próprios estamos em constante aprendizagem. Quando falo de aprendizagem não me refiro a conteúdos que tenham a ver com a matemática, mas sim a métodos de ensino, cada aluno tem as suas dificuldades e cada turma tem o seu ritmo de aprendizagem, por isso, mais do que ensinar conteúdos, o trabalho de professor é gerir e moldar os seus métodos de aprendizagem aos seus alunos de forma a que estes possam tirar o maior proveito da aula e das atividades que lhes são propostas.

É difícil, para um professor, dizer que se pudesse dar a aula de novo não mudaria nada, há sempre pequenos detalhes que podemos mudar, há sempre arestas a serem limadas. No meu caso, se pudesse realizar de novo o projeto teria deixado mais tempo para os alunos responderem, teria deixado os alunos experimentar e ver como eles lidavam com funções que não estão habituados a ver e utilizava erros que eles dessem como forma de os ensinar o "porquê" de não poderem resolver daquela forma e serem obrigados a resolver pela forma que eu apresentei.

5.4. Balanço final do estágio.

O ano de estágio é sem dúvida o ano que mais nos enriquece como futuros professores, as vivências e experiências com que nos deparamos todos os dias durante um ano inteiro faz nos crescer bastante nesta modalidade de ensinar.

Quando comecei o ano de estágio tinha um misto de emoções em mim para além de um monte de perguntas – como serão os alunos, como serei eu como professora, como lidar com uma turma inteira, etc. Estas dúvidas facilmente se tornam em medos que levamos para a sala de aula, mas não podemos deixar que estes medos interfiram na nossa performance. Eu estava muito entusiasmada com o ano do estágio e com tudo o que iria viver embora ao mesmo tempo me sentisse nervosa e ansiosa com tudo. À medida que avançamos no ano os alunos deixam de ser um bicho de sete cabeça, porque lidamos com eles quase todos os dias e, embora o nervosismo esteja sempre lá, consegui utilizá-lo a meu favor.

As aulas que tive oportunidade de lecionar sozinha, só eu e os alunos, ajudaram bastante a construir tanto uma relação com eles como a fazer-me sentir mais confiante e certa de que era isto que eu queria para a minha vida. Ter uma turma na nossa mão embora no início pareça assustador no final torna-se gratificante por sabermos que superamos este momento sozinhos.

Os seminários no fim das aulas com a supervisora foram muito enriquecedores porque me ajudaram a ver o que tinha corrido mal na sala de aula e o que poderia melhorar na aula seguinte. Também as indicações do orientador no fim de cada aula permitiram que melhorasse todos os dias.

Todos estes fatores fizeram com que eu quisesse sempre mais e tanto a escola como o orientador, supervisora e alunos, com quem pude partilhar esta experiência, nunca irei esquecer, porque me fizeram crescer tanto como pessoa como como profissional desta área.

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P., Serrazina, L, & Oliveira, I. (1998). *Matemática 2001 – Diagnóstico e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

Ackermann, Eden, Cropper, & Cropper. (2004). Getting Started with Cognitive Mapping

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2006). *A Matemática na formação inicial de professores*. Lisboa: APM e SPCE.

Alrø, H. & Skovsmose, O. (2006). *Diálogo e aprendizagem em educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Anderson, L. & Krathwohl, D. (2014). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: a revision of Bloom's.* Essex: Pearson

APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática*. Lisboa: APM.

Arends, R. (2008). *Aprender a ensinar*. (7.ª edição). New York: Editora McGraw-Hill.

Arsac, G. (1996). L'origine de la démonstration: Essai d'épistemologie didactique. *Récherches en Didactique des Mathématiques,* 8(3).

Bailin, S., Case, R., Coombs, J. R., & Daniels, L. B. (1999). Conceptualizing critical thinking. *Journal of Curriculum Studies, 31*(3), 285–302.

Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledgeenable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics*, *52*(1), 3–28

Boavida, A. (2006). Colaborando a propósito da argumentação na aula de Matemática. *Quadrante, 15*(1-2), 65-94.

Cabassut, R. (2005). *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne*. Unpublished doctoral dissertation. Université Paris Diderot.

Caraça, B. (1951). *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Gradiva.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). *Early algebra and algebraic reasoning*. In F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 669–705). Charlotte, NC: Information Age.

Case, R. (2005). Moving critical thinking to the main stage. *Education Canada, 45*(2), 45–49.

Chazan, D. & Ball, D. (1999). Beyond Exhortations not to Tell: The Teacher's Role in Discussion-Intensive Mathematics Classes. *Learning of Mathematics, 19* (2), 2-10.

Chronaki, A. & Christiansen, I. M. (Eds.) (2005). *Challenging perspectives on mathematics classroom communication.* Greenwich, Connecticut: Information Age Publishing.

Clarke, V. & Braun, V. (2013) *Thematic analysis.* In *A. C. Michalos (Ed.), Encyclopaedia of quality of life research*. New York: Springer.

Costa, A.M. & Fonseca, L. (2009). *Os números na interface da língua portuguesa e da matemática – Actas do XIX EIEM*. Vila Real: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

DES. (2013). *Programa de matemática A do ensino secundário.* p.10

DGIDC - Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Elia, I., Gagatsis, A., Demetriou, A. (2007). The Effects of Different Modes of Representation on the Solution of One-step Additive Problems. *Learning and Instruction,* 17, 658-672.

Erdem, E., & Gürbüz, R. (2015). An analysis of seventh-grade students' mathematical reasoning. *Cukurova University Faculty of Education Journal*, 44, 123–142.

Grácio, S. (1992). *Política Educativa Portugal 1980-1990 | Educação Especial–Portugal–1980-1990 | Reforma do Ensino–Portugal | Prioridades da Educação*. Porto : ASA.

Guerra, M. (2000). *A escola que aprende*. Porto: Asa

Hannula, M. S. (2006). Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions*. Educational Studies in Mathematics*, 63, 165-178.

Heaton, R. (2000). *Teaching mathematics to the new standards*. New York: Teachers College Press.

Hoyles, C. (1982). *The pupil's view of mathematics learning*. *Educational Studies in in Mathematics*, 13, 349–372.

In'am, A. (2014). The implementation of the Polya method in solving Euclidean geometry problems. *International Education Studies*, *7*(7), 149–158.

Jeannotte, D. (2015). *Un modèle conceptuel du raisonnement mathématique pour l'apprentissage et l'enseignement au niveau secondaire*. Montréal: Université du Québec.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale University Press.

Lipman, M. (1988). Critical thinking—What can it be? *Educational Leadership, 46*(1), 38–43.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255–276.

Mansoor, F & Pezeshki, M.(2012). Manipulating Critical Thinking Skills In Test Taking. *International Journal of Education*, *4*(1), 153-160.

Matos, J. M. (1997). *Algumas linhas de força da investigação em Educação Matemática em Portugal.* Conferência Plenária apresentada ao V Seminário de Investigação em Educação Matemática. Leiria, 7 de Novembro de 1994.

Matos, A. (2007). *Explorando relações funcionais no 8.º ano.* Lisboa: APM.

Meyer, M. (2010). Abduction - A logical view for investigating and initiating processes of discovering mathematical coherences. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(2), 185–205.

Ministério da educação. (2001). Decreto - lei N.º 6/2001

Moura, G. M. & Gonçalves, D. (2013). *Promoção do Pensamento Crítico no Contexto do 1º Ciclo do Ensino Básico*. Vieira (Org.). Pensamento crítico na educação: perspetivas atuais no panorama internacional. Aveiro: Universidade de Aveiro. pp. 291-314.

NCTM. (1991). *Normas para o currículo e avaliação em matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

NCTM. (1994). *Implementing the NCTM standards*
a bridge to the classroom: grades 5-8 and 9-12

MCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM

NCTM (2008). *Princípios e Normas para a Matemática escolar* – tradução dos Principles and standards for school mathematics do NCTM, Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação educacional.

Pagano, M., & Roselle, L. (2009). Beyond reflection through an academic lens: Refraction and international experiential education. *Frontiers: The Interdisciplinary Journal of Study Abroad, 18*(2), 217–229.

Pedrosa. M. H. (2000). *A comunicação na sala de aula: As perguntas como elementos estruturadores da interação didática*. In J. P. Ponte, & L. Serrazina (Eds.), Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália: Atas da escola de verão em educação matemática, 1999 (pp. 149-153). Lisboa: SPCE - Secção de Educação Matemática.

Ponte, J. P. (2005). *Gestão Curricular em matemática.* In GTI (Ed), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2006). *Estudos de caso em educação matemática*. Bolema, 25, 105-132. Retirado em Fevereiro 22, dehttp://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docspt/06 Ponte%20 (Estudo%20caso).pdf (acedido a 17/06/2019)

Ponte, J.P. (1997). *The history of the concept of function and some educational implications. The Mathematics Educator, 3*(2), 3–8.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães. H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., & Oliveira, P. (2007). *Programa de matemática do ensino básico.* Lisboa: Ministério de Educação/DGIDC.

Portugal, G. & Marchão, A. d. (2014). *No Jardim de Infância e na Escola de 1.º Ciclo do Ensino Básico: Práticas Pedagógicas que contribuem para construir o Pensamento Crítico*. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Prayitno, A. & Suarniati, W. (2017). Construction Students' Thinking in Solving Mathematics Problem Using Cognitive Map. January 2017 · *Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 13* (6), 2735-2747.

Putnam, R., Lampert, M. & Peterson, P. (1990). Chapter 2: Alternative Perspectives on Knowing Mathematics in Elementary Schools. *Review of Research in Education*, *16* (1), 57-150.

Reid, D.A. (2010). *Proof in mathematics education*. Rotterdam, NL: Sense.

Rivera, F.D. (2008). On the pitfalls of abduction: Complicities and complexities in patterning activity. *For the Learning of Mathematics*, *28*(1), 17–25.

Rocha, H. (2001). Calculadoras gráficas: Que utilização? In L. Serrazina, & I. Oliveira (Ed.), *Actas do Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 233-251). Lisboa: APM.

Rocha, H. (2012). *A integração da calculadora gráfica no ensino da Matemática: Estudo sobre as práticas curriculares de professores do ensino secundário*. Tese de Doutoramento, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

Rolland, R. G. (2012). Synthesizing the evidence on classroom goal structures in middle and secondary schools: A meta-analysis and narrative review. *Review of Educational Research, 82* (4), 396-435.

Segurado, I., & Ponte, J. P. (1998). Conceções sobre a Matemática e trabalho investigativo. *Quadrante, 7*(2), 5-40

Sfard, A. (2003). Balancing the unbalanceable: The NCTM Standards in light of theories of learning mathematics. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principals and Standards for School Mathematics* (pp. 353–392). Reston, VA: NCTM.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse - some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, 51, 1–9.

Sherin, M. G. (2002*).* When teaching becomes learning. *Cognition and Instruction, 20*(2), 119-150.

Silva, A., Veloso, E., Porfírio, J., & Abrantes, P. (1999). O currículo de Matemática e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 69-88). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Sim-Sim, I. (1998). *Desenvolvimento da Linguagem.* Lisboa: Universidade Aberta.

Skaja, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function—A case study. *Educational Studies in Mathematics, 53*(3), 229–254.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston, VA: NCTM.

Stylianides, G. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics, 28*(1), 9–16.

Taylor, J. (2013). *Translation of Function: A Study of Dynamic Mathematical Software and Its Effects on Students Understanding of Translation of Function*. EUA: University of Wyoming.

Tenreiro-Vieira, C. & Vieira, R. M. (2000). *Promover o Pensamento Crítico dos Alunos - Propostas Concertas para a Sala de Aula*. Porto: Porto Editora.

Vermunt, J. & Van Rijswijk, F. (1988). Analysis and development of students' skill in selfregulated learning. *Higher Education*, 17, 647-682.

Vermunt, J. (1996). Metacognitive, cognitive and affective aspects of learning styles and strategies: A phenomenographic analysis. *Higher Education*, 31, 25-50.

Vermunt, J. (1998). The regulation of constructive learning processes. *British Journal of Educational Psychology*, 68, 149-171.

Vermunt, J. (2005). Relations between student learning patterns and personal and contextual factors and academic performance. *Higher Education*, 49, 205-234.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Watson and Sullivan. (2008). *Teachers learning about tasks and lessons*

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W.G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to the principles and standards for school mathematics* (pp. 333-352). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Youschkevitch, A. (1976). The concept of function. *Archive for History of Exact Sciences, 16* (1), 37-85.p.39

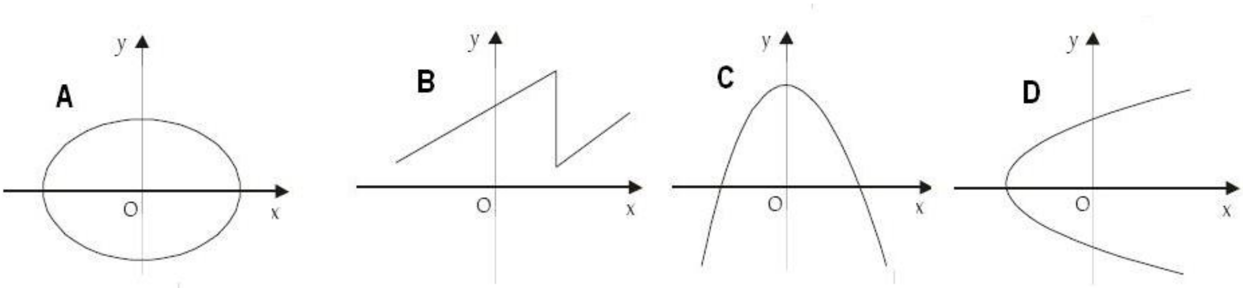
ANEXOS

Anexo I - Teste diagnóstico

Nome:____ Nº______

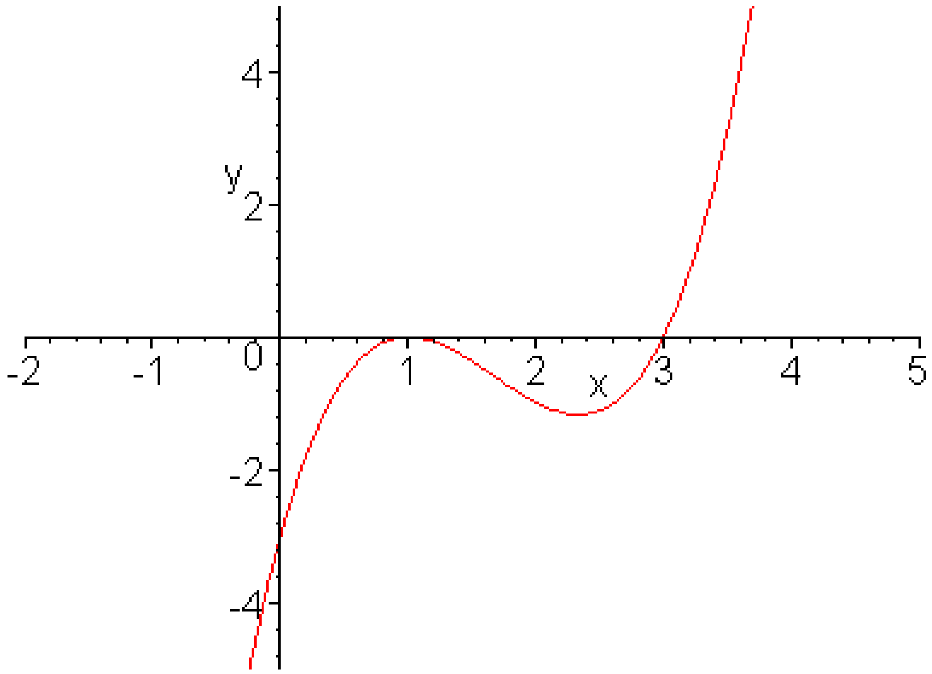
Teste Diagnóstico

1. Dos gráficos que se seguem indica, justificando, quais representam gráficos de funções.



A	B
C	D

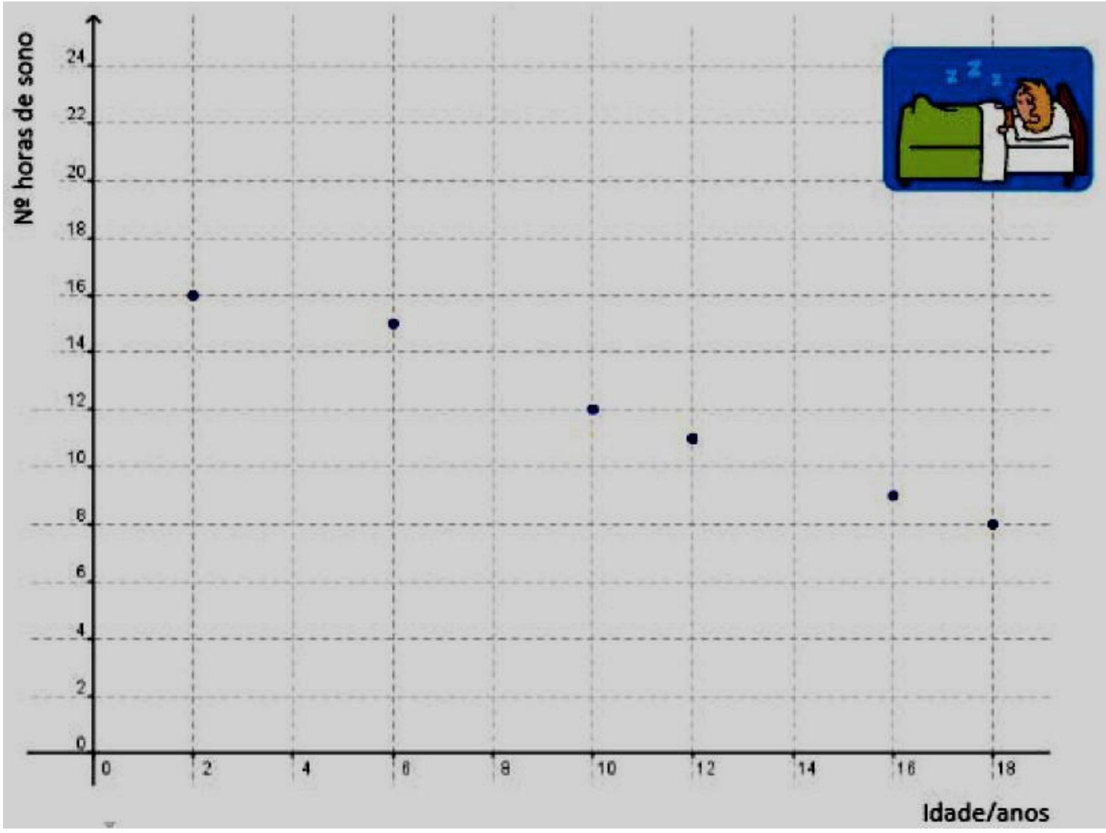
2. Considera o seguinte gráfico de uma função



a) Quantos zeros tem a função? Justifica a tua resposta.

b) Indica os intervalos onde a função é positiva e onde é negativa.

3. Na figura está representado graficamente a função f que faz corresponder a idade (em anos) ao tempo de sono ideal (em horas).



a) De acordo com o gráfico indica:

   i. O número de horas que a Ana, de 18 anos, deve dormir.

   ii. A idade do Luís sabendo que precisa de dormir 12 horas.

b) Indica o domínio e o contradomínio da função f.

c) Qual é a imagem de 16 pela função f?

d) Qual é o objeto que pela função f tem imagem 15?

e) Completa:

$f(12) = \_\_$ $\qquad\qquad$ $f(\_\_) = 9$

4. Para cada uma das seguintes funções faz um esboço do seu gráfico. Apresenta todos os cálculos e procedimentos que precisares efetuar.

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $h(x) = -\frac{1}{3}(x - 6) - 2$

Anexo II- Plano de aula nº 1

Plano de Aula nº1

Plano da 1ºaula - Matemática A 10ºano			
	Docente: Estagiária: Joana Pereira		Ano letivo: 2016/2017
	Turma: CS1	Nº de alunos:28	Data: 03/05/2017

Comentários

Duração da aula: 45 minutos.

Tema: Funções reais de variáveis reais
Tópico: Funções definidas por ramos
Conteúdo: Caraterização de funções definidas por ramos, resolução de
Objetivos Específicos: Pretende-se que os alunos:
- Representem graficamente funções definidas por ramos;
- determinem a expressão algébrica de uma função cujo gráfico seja constituído apenas por retas e parábolas;

Capacidades Transversais: Comunicação, linguagem e raciocínio matemático.
- Usar corretamente os símbolos matemáticos, quer na comunicação oral quer na escrita;
- Descobrir relações entre conceitos.

Conhecimentos Prévios:
- Equação reduzida de uma reta e declive da reta.
- Domínio, contradomínio e extremos de uma função
- Funções polinomiais: monotonia e extremos, factorização, sinal e zeros, variação.
- Restrição do domínio de funções.

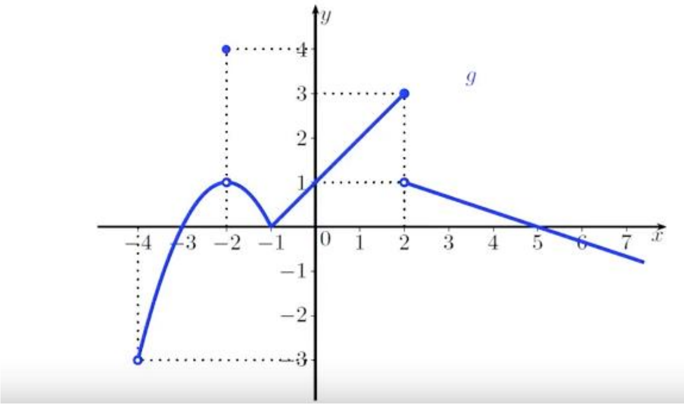
Metodologias: trabalho em pares com discussão das atividades.
Recursos: Projetor, computador e calculadora.

Nesta tarefa os alunos estarão a caraterizar sequencialmente a função definida por ramos apercebendo-se apenas no fim que o fizeram.

Desenvolvimento da aula

Tarefa 1

Seja g a função definida pelo seguinte gráfico:



a) Define a função $f(x)$ tal que que $x \in]-4,-1]\backslash\{2\}$.
b) Define a função $h(x)$ tal que $x \in [-1,2]$.

As tarefas serão ditadas aos alunos e posteriormente resolvidas no quadro.

c) Define a função $i(x)$ tal que $x \in]2, +\infty[$.

d) Carateriza a função $g(x)$.

Tarefa 2

Representa graficamente a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & se\ x < 3 \\ -2x+8 & se\ x \geq 3 \end{cases}$$

Tarefa 3

Seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} -x^2+1 & se\ x < 1 \\ x-1 & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

Representa g graficamente.

No final de cada um destas tarefas será mostrado aos alunos na calculadora como obter este gráfico.

Tarefa 4

Na figura está representado o gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, constituído por uma semirreta e parte de uma parábola.

4.1 Define a função f por ramos.

4.2 Determina:

a) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

b) $f(3)$

c) $f(12)$

Anexo III- Plano de aula nº 4

Plano de Aula nº4

Plano da 4ºaula - Matemática A 10ºano			
	Docente: Estagiária: Joana Pereira		Ano letivo: 2016/2017
	Turma: CSE1	Nº de alunos:28	Data: 10/05/2017

Comentários

Duração da aula: 90 minutos.

Tema: Funções reais de variáveis reais
Tópico: Inequações com módulos
Conteúdo: Caraterização de funções definidas por ramos, resolução de
Objetivos Específicos: Pretende-se que os alunos:

- Consigam identificar no gráfico os intervalos pretendidos;
- Saibam resolver analiticamente inequações com módulos

Capacidades Transversais: Comunicação, linguagem e raciocínio matemático.

- Usar corretamente os símbolos matemáticos, quer na comunicação oral quer na escrita;
- Descobrir relações entre conceitos.

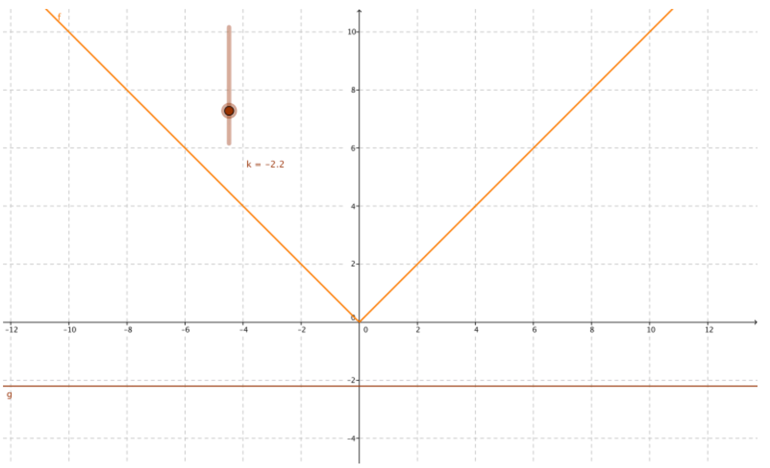
Conhecimentos Prévios:
- Equação reduzida de uma reta e declive da reta.
- Inequações do 1º e 2º graus

Metodologias: trabalho em pares com discussão das atividades.
Recursos: Projetor, computador e calculadora.

Desenvolvimento da aula

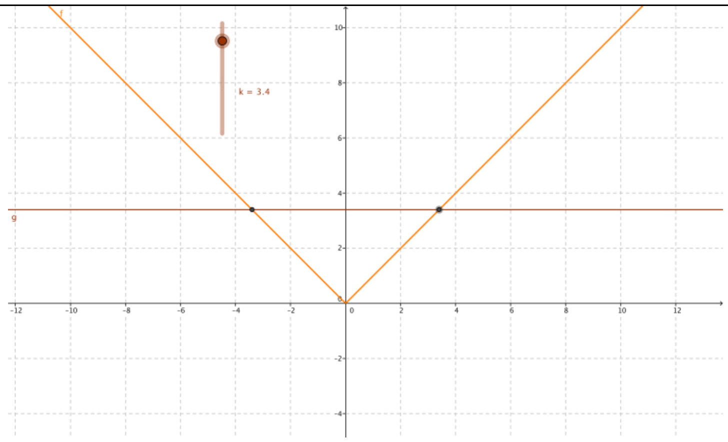
Inequações de dois tipos:

- $|x| < k, k \in \mathbb{R}$
  - Se $k \leq 0$, condição impossível.



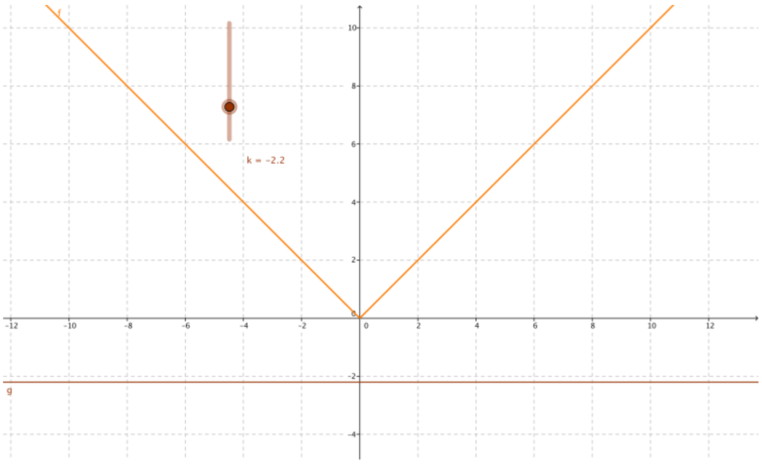
Estas imagens serão projetadas com o auxilio do GeoGebra

  - Se $k > 0$



$|x| < k \Leftrightarrow x > -k \ \wedge \ x < k \Leftrightarrow x \in \,]-k, k[$

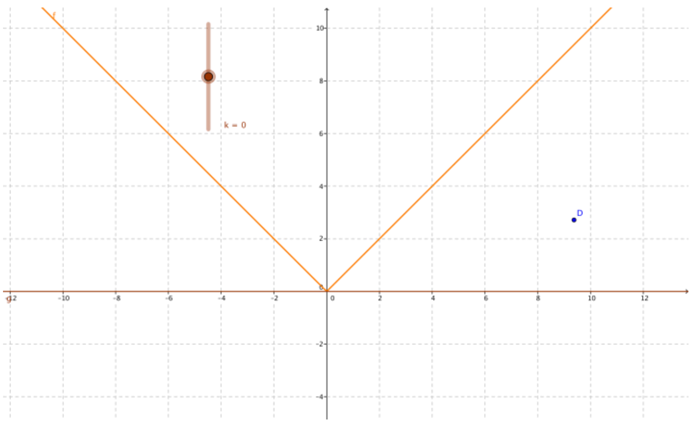
- $|x| > k, k \in \mathbb{R}$
  - Se $k < 0$



$|x| > k$, condição universal

C.S.: $\mathbb{R}$

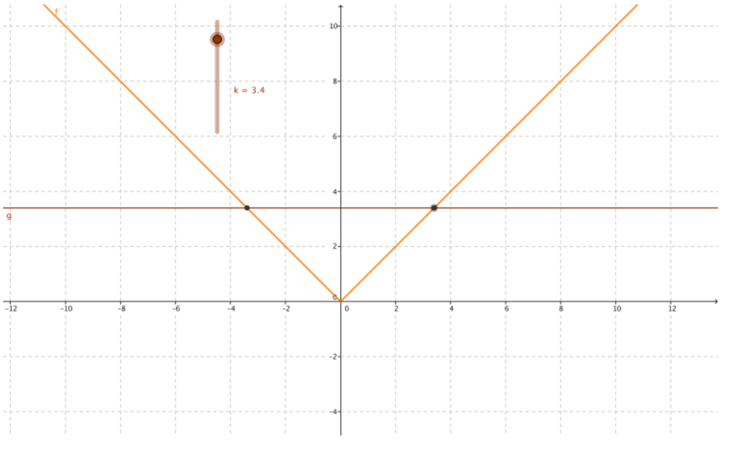
  - Se $k = 0$



Serão feitas aos alunos perguntas que os levem a chegar sozinhos a solução.

$$|x| > k \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

- Se $k > 0$



$$|x| > k \Leftrightarrow x > k \vee x < -k \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$$

Exemplos:

Os exemplos vão ser resolvidos pelos alunos em conjunto com o professor.

Resolve as seguintes inequações:

a) $|3x - 1| \leq 5$

b) $|4 - x| > 3$

Tarefa 1

Resolve as inequações:

a) $|x + 3| \leq 2$

b) $|x - 2| > 1$

c) $|1 - 5x| + 3 \geq 1$

d) $1 - |1 - x| \geq 2$

As tarefas serão escritas no quadro e depois serão corrigidas.

e) $|2x + 3| > 5$

f) $3 - |x + 3| > 5$

Tarefa 2

Considera a função g definida por $g(x) = 5 + |x - 6|$

a) Escreve a função g sem utilizar módulos

b) Identifica a parte do domínio onde a função é decrescente

c) Resolve a condição $g(x) \leq 8$

d) Resolve a condição $g(x) > 6$

Tarefa 3

Resolve as seguintes inequações:

a) $|x^2 - 3x| \leq 4$

b) $|x - 2x^2| > 1$

Anexo IV- Plano de aula nº 7

Plano de Aula nº7

Plano da 7ºaula - Matemática A 10ºano			
	Docente: Estagiária: Joana Pereira		Ano letivo: 2016/2017
	Turma: CSE1	Nº de alunos: 28	Data: 17/05/2017

Comentários

Duração da aula: 90 minutos.

Tema: Funções reais de variáveis reais
Tópico: Funções definidas por radicais quadráticos
Conteúdo: Caraterização de funções definidas por radicais quadráticos

Objetivos Específicos:
Pretende-se que os alunos:

- Consigam representar graficamente funções do tipo $y = a \times \sqrt{x-b} + c, a \neq 0$;
- Identifiquem o domínio e o contradomínio de funções do tipo $y = a \times \sqrt{x-b} + c, a \neq 0$;
- Saibam resolver graficamente equações com radicais quadráticos
- Saibam resolver analiticamente equações com radicais quadráticos;

Capacidades Transversais:

- Comunicação, linguagem e raciocínio matemático.
- Usar corretamente os símbolos matemáticos, quer na comunicação oral quer na escrita;
- Descobrir relações entre conceitos.

Conhecimentos Prévios:

- Radicais quadráticos;
- Monotonia de uma função;
- Concavidades de funções;
- Determinar os zeros de uma função;
- Encontrar o domínio e o contradomínio de funções.

Metodologias: trabalho em grupos de 5 a 6 alunos com discussão das atividades.
Recursos: Projetor, computador e calculadora.

Breve introdução das funções definidas por radicais quadráticos.

Cada grupo ficará com um dos exemplos para estudar a função e no final serão discutidos os resultados.

Desenvolvimento da aula

Exemplo:

Faz o esboço do gráfico das seguintes funções:

1. $y = \sqrt{x}$
2. $y = \sqrt{x-3}$

3. $y = 2 \times \sqrt{x-3}$
4. $y = 2 \times \sqrt{x-3} + 1$

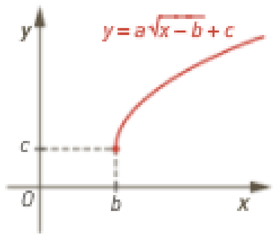
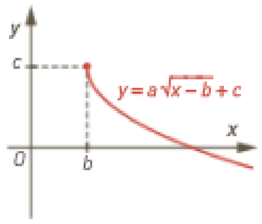
Para cada um dos seguintes exemplos preenche a seguinte tabela:

	$y = \sqrt{x}$	$y = \sqrt{x-3}$	$y = 2 \times \sqrt{x-3}$	$y = 2 \times \sqrt{x-3} + 1$
Domínio				
Contradomínio				
Zeros				
Monotonia				
Concavidade				

Então, no geral, as funções definidas por radicais quadráticos são do tipo

$$y = a \times \sqrt{x-b} + c, a \neq 0$$

em que, resumidamente, vamos obter:

$a > 0$	$a < 0$
 **Domínio:** $[b, +\infty[$ **Contradomínio:** $[c, +\infty[$ **Monotonia:** estritamente crescente **Mínimo absoluto:** c	 **Domínio:** $[b, +\infty[$ **Contradomínio:** $]-\infty, c]$ **Monotonia:** estritamente decrescente **Máximo absoluto:** c

Domínio das funções irracionais:

Quando estamos perante uma função irracional em que o índice da sua raiz é par temos de garantir que o que está dentro da raiz é zero ou positivo, ou seja, se tivermos $y = \sqrt[PAR]{A(x)}$, então $D = \{x \in \mathbb{R}: A(x) \geq 0\}$

Discutir as soluções com os alunos.

Exercícios de aplicação:

1. Seja f a função definida por $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x-2} + 5$.
   a. Determina o domínio de f.
   b. Faz o esboço do gráfico de f a partir do gráfico de $y = \sqrt{x}$.
2. Considera a função f definida por:

$$f(x) = -3\sqrt{x+1} + 6$$

   a. Determina o domínio de f.

b. Mostra que 3 é zero da função e justifica que f não tem qualquer outro zero.
c. Faz um esboço do gráfico de f e indica o contradomínio.

Resolver passo a passo com os alunos.

Equações envolvendo radicais quadráticos
Exemplos:
Resolve graficamente as seguintes equações:
1. $\sqrt{x} = x - 2$
2. $x = (x-2)^2$

Escrever a conclusão no quadro.

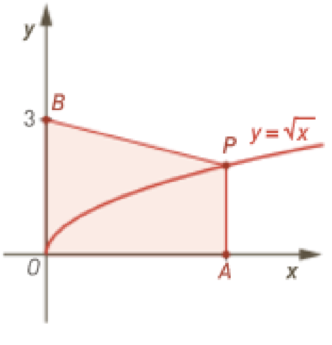
Resolver analiticamente $\sqrt{x} = x - 2$.

Então, no geral, para resolver uma equação que envolva radicais quadráticos temos de seguir os passos seguintes:
1º Determinar o domínio;
2º Resolver a equações elevando ambos os membros ao quadrado;
3º Fazer a verificação das soluções.
4º Escrever o conjunto-solução.

Os alunos resolvem os exercícios em grupos. No final serão corrigidos no quadro.

Exercícios de aplicação:
1. Resolve as equações:
   a. $-2 + \sqrt{x-4} = 0$
   b. $-2 + \sqrt{x-4} = 3$
   c. $-2 + \sqrt{x-4} = -1$
   d. $\sqrt{x-3} = x + 1$
   e. $\sqrt{2x+1} = x - 1$
   f. $\sqrt{x+2} = \sqrt{x} + 1$
   g. $\sqrt{x-2} = \sqrt{x+1} - 3$
   h. $\sqrt{x-3} + \sqrt{x} = \sqrt{2x+1}$

2. Na figura está representado o trapézio $[OAPB]$, sendo P um ponto pertencente à curva $y = \sqrt{x}$ com $x \in]0, 9]$.



a. Mostra que a área do trapézio é dada, em função de x, pela expressão:
$A(x) = 1{,}5x + 0{,}5x\sqrt{x}$

b. Determina a abcissa do ponto P para que a área seja igual a 15.
Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

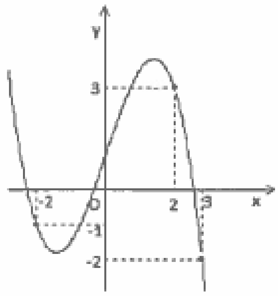
Anexo V - Elementos de avaliação

	PROVA ESCRITA DE AVALIAÇÃO MATEMÁTICA *10ª CSE1 – 1 DE JUNHO DE 2017*
	Ano Letivo 2016/2017 Versão 2

GRUPO I

- As cinco questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais apenas uma está correta.
- Escreva na sua folha a letra correspondente à alternativa que escolher para cada questão.
- **Não apresente cálculos.**

1. Considere as funções f e g, reais de variável real, estando representada na figura parte da função f e sendo g tal que $g(x)=\dfrac{2x+3}{3}$.

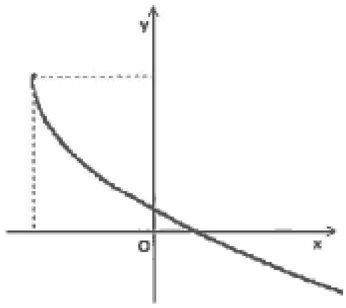


O valor de $\left(f^{-1}\circ g\right)(3)$ é:

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{11}{2}$

2. No referencial da figura está representada uma função f tal que $f(x)=a\sqrt{x-b}+c$, com $a\neq 0$.

Das seguintes afirmações, indique a verdadeira.



(A) $a>0$; $b>0$; $c>0$

(B) $a<0$; $b>0$; $c<0$

(C) $a>0$; $b<0$; $c>0$

(D) $a<0$; $b<0$; $c>0$

3. Considera a família de funções f tais que $f(x)=-(x+2)^2+3-2k$.

Os valores de k para os quais f tem zeros são:

(A) $k\in\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[$ (B) $k\in\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$ (C) $k\in IR^{+}$ (D) $k\in IR^{-}$

4. De uma função quadrática sabe-se que -5 é um dos seus zeros e que $x=1$ é uma equação do seu eixo de simetria. Pode afirmar-se que:

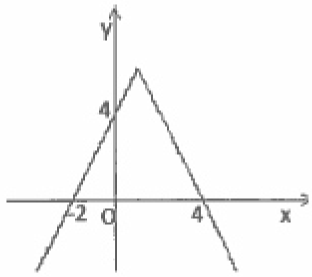
(A) $f(5)\times f(8)=0$ (B) $f(-2)\times f(8)>0$

(C) $f(1)\times f(4)<0$ (D) $f(7)\times f(4)=0$

5. Na figura está representada a função f tal que $f(x) = a|x-b|+c$.

Os zeros de f são -2 e 4 e o ponto $(0;4)$ pertence ao gráfico de f.

O contradomínio da função g tal que $g(x) = -4f(x-5)-1$ é:



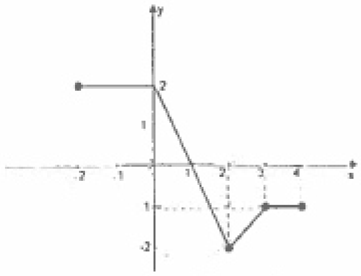
(A) $]-\infty, 5]$ (B) $[-25, +\infty[$

(C) $]-\infty, 20]$ (D) $[-21, +\infty[$

GRUPO II

Apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Considere a função definida graficamente na figura ao lado:



a) Calcule $\dfrac{2f(-1)-f(3)}{f(4)\times f(3{,}5)}$.

b) Indique: b1) D_f b2) D'_f b3) Z_f.

c) Determine, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação: "$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$".

d) Estude o sinal da função.

e) Elabore a tabela de variação de f.

f) Resolva graficamente a condição $f(x) = 2$. Apresente o resultado na forma de intervalo.

g) Determine todos os valores reais de b para os quais a equação $f(x) = b$ tem infinitas soluções.

h) Identifique os extremos da função e caracterize-os.

i) Esboce o gráfico da função $g(x) = |f(x)|$

2. Determine as coordenadas do vértice da parábola definida pela função quadrática:

a) $f(x) = -2x^2 - \frac{1}{3}$ b) $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$

3. Escreva, na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, a função $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$.

4. Resolva, em IR, cada uma das inequações:

a) $(x+2)^2 < (3x-2)^2 + 5x$ b) $|5 - 2x| \leq \frac{2}{3}$

c) $5 + |3 - x| \geq 3$ d) $|3 - x^2| < 1$

5. Determine, em IR, o domínio da função $f(x) = \dfrac{\sqrt{5-x} + \sqrt{x-2}}{x-4}$.

6. Resolva, em IR, cada uma das condições:

a) $x + \sqrt{x-1} = 5$ b) $\sqrt{2 + \sqrt{x+2}} = \sqrt{2x}$ c) $\sqrt{2x-1} < x - 2$

Anexo VI - Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Exmo.(a). Senhor(a)

Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática, da Universidade do Minho, enquanto professora estagiária, pretendo desenvolver algumas atividades de ensino que potenciam a aprendizagem dos alunos do tema “Funções”. O desenvolvimento destas atividades implica a recolha de dados, que serão obtidos através da resolução de tarefas e da observação das aulas. Para uma melhor compreensão das atividades e das interações que se desenvolvem na aula de Matemática necessito de fazer uma recolha de dados através de gravações (áudio e vídeo). Para esse fim, venho desta forma solicitar a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio e vídeo dos dados necessários à concretização das experiências de ensino e de aprendizagem na sala de aula do seu educando.

Comprometo-me a usar os dados apenas para fins académicos e a não divulgar o nome da escola e dos alunos, nem expor qualquer indicador que envolva o seu educando. Só me interessa a informação que me ajude a melhorar as minhas estratégias de ensino. Os dados das gravações serão apenas usados para efeitos do estudo a realizar e não terão qualquer influência nas classificações escolares dos alunos. Comprometo-me ainda a proceder à destruição de todas as gravações após a realização dos trabalhos.

Agradeço a sua colaboração.

Braga, de Maio 2017

A estagiária de Matemática,

____

(Joana Bastos Pereira)

- -

Autorizo que se faça o registo em áudio e vídeo das atividades de ensino e aprendizagem nas aulas de Matemática que envolvem o meu educando desde que seja salvaguardado o anonimato do seu nome e de qualquer indicador que o indicie.

O Encarregado de Educação

____