UMinho|2021
Diana Rafaela Torres de Araújo O raciocínio na resolução de problemas do dia a dia sobre funções afins: Experiência numa turma de 8.º ano

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Diana Rafaela Torres de Araújo

O raciocínio na resolução de problemas do dia a dia sobre funções afins: Experiência numa turma de 8.º ano

julho de 2021

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Diana Rafaela Torres de Araújo

O raciocínio na resolução de problemas do dia a dia sobre funções afins: Experiência numa turma de 8.º ano

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho efetuado sob a orientação da
Doutora Maria Helena Martinho

julho de 2021

AGRADECIMENTOS

À minha supervisora, Doutora Maria Helena Martinho, por todo o apoio e ajuda prestados ao longo do ano letivo.

À minha orientadora, Professora Marília Rosário, por todas as palavras de apoio, pela ajuda, pelo conforto e pelos ensinamentos transmitidos. Sem dúvida que foi um grande pilar e exemplo.

À direção da escola cooperante e a toda a comunidade por me terem recebido de uma forma acolhedora e amável e aos alunos de todas as turmas com quem contactei por tanto me ensinarem e me deixarem ensinar.

A todos os professores de Matemática com que tive o prazer de contactar ao longo do meu percurso escolar, que desenvolveram em mim saberes e competências que impulsionaram a minha escolha profissional.

A todos os meus colegas de mestrado pela amizade, ajuda, apoio, incentivo em todas as etapas deste trabalho e ao longo dos dois anos de mestrado.

À minha colega Sara que me incentivou e ajudou nos momentos de maior indecisão durante todo o ano letivo.

À minha família pela paciência, apoio e incentivo que me ofereciam o suporte necessário para desempenhar este trabalho.

Por fim, e ao mais importante, tenho a agradecer a Deus por toda a força que me deu, por nunca me deixar baixar os braços e por hoje estar a concretizar a meta final do meu sonho.

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

O raciocínio na resolução de problemas do dia a dia sobre funções afins: Experiência numa turma de 8.º ano

RESUMO

O presente estudo incide no raciocínio na resolução de problemas do dia a dia sobre funções afins, e resulta de uma intervenção pedagógica com alunos de uma turma do 8.º ano do ensino básico, durante a lecionação do tópico Gráficos de Funções Afins.

Este estudo teve como questão principal perceber qual seria a evolução dos alunos ao longo da intervenção pedagógica que estava planeada. Para isso, formulei três questões de investigação às quais pretendo dar resposta ao longo do relatório: 1- Como é que os alunos explicitam o raciocínio na resolução de problemas?; 2- Quais as estratégias dos alunos para a resolução de problemas?; 3- Em que medida a resolução de tarefas com funções afins ajuda no desenvolvimento do raciocínio funcional?

Ao longo da intervenção pedagógica recorri a diferentes instrumentos de recolha de dados: uma ficha de diagnóstico que foi realizada no início da intervenção; tarefas que continham exercícios e problemas, cujas resoluções foram feitas individualmente e em grupo; observação e gravação de aulas, quer presencialmente, quer online, através do Google Meet.

Os alunos revelaram dificuldades na interpretação dos enunciados e na resolução das tarefas associadas a estes. Na resolução dos problemas foi analisado o raciocínio matemático que o aluno desenvolve para chegar ao resultado pretendido. É ainda avaliada a capacidade que o aluno tem para interpretar o enunciado, retirando a informação necessária para resolver o problema.

Verificou-se uma grande evolução dos alunos ao longo da intervenção relativamente à sua participação e interação com os colegas.

Palavras-chave: ensino básico; função afim; problemas; raciocínio matemático

The reason in solving daily problems about related funtions: Experience in an 8º year class

ABSTRACT

The present study focuses on the reasoning in solving day-to-day problems about similar functions, and results from a pedagogical intervention with students from a class of 8 grade of basic education, during the teaching of the topic Graphs of Related Functions.

The main issue of this study was to understand what would be the students' evolution throughout the pedagogical intervention that was planned. To this end, I formulated three research questions that I intend to answer throughout the report: 1- How do students explain their reasoning in problem solving; 2- What are students' strategies for problem solving; 3- To what extent does the resolution of tasks with related functions help the development of functional reasoning?

Throughout the educational intervention I used different data collection tools: a diagnostic form that was performed at the beginning of the intervention; tasks that contained exercises and problems, whose resolutions were done individually and in groups; observation and recording of classes, both in person and online, through Google Meet.

Students revealed difficulties in interpreting the statements and in solving the tasks associated with them. In solving the problems, the mathematical reasoning that the student develops to reach the desired result was analyzed. The student's ability to interpret the utterance is also evaluated, removing the information necessary to solve the problem.

There was a great evolution of students throughout the intervention regarding their participation and interaction with colleagues

Keywords: affine function; basic education; mathematical reasoning; problems

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE QUADROS

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Este primeiro capítulo, encontra-se dividido em três secções. Na primeira são apresentados o tema em estudo e os objetivos do mesmo. De seguida, é salientada a pertinência da escolha deste tema, e por fim, apresenta-se uma secção na qual é feita uma breve descrição da estrutura geral do relatório.

1.1. Tema e objetivos

O tema que pretendo desenvolver no âmbito do Projeto de Intervenção Pedagógica Supervisionada foca-se no raciocínio revelado na resolução de problemas do dia a dia sobre funções afins. A intervenção letiva será desenvolvida no âmbito da unidade didática "Gráficos de funções afins", numa turma do 8.º ano do ensino básico, tendo como base os objetivos de aprendizagem estabelecidos no Programa e Metas Curriculares para o Ensino Básico do Ministério da Educação (ME,2013). A escolha deste tema prende-se com um gosto pessoal relativamente ao domínio das funções e à resolução de problemas.

Nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2007), pode ler-se que a álgebra deverá ser olhada como um contínuo curricular desde o pré-escolar ao 12.º ano. Considerá-la como um fio condutor, desde os primeiros anos, ajudará os alunos a adquirirem uma base sólida para um trabalho algébrico baseado na compreensão, e por isso com consistência, no 3.º ciclo e no secundário.

Na unidade que vou estudar, "Gráficos de Funções Afins" existem dois pontos principais que se pretende que os alunos desenvolvam: (i) identificar as equações das retas do plano; (ii) resolver problemas (ME, 2013).

Segundo o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013) homologado a 17 de junho de 2013, destacam-se três grandes finalidades para o Ensino da Matemática, sendo elas, a estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade. Subsistem também cinco grandes capacidades transversais na aquisição de conhecimentos de matemática, com destaque para o conhecimento de factos e procedimentos, raciocínio matemático, comunicação matemática, resolução de problemas e a matemática como um todo coerente.

O desenvolvimento do raciocínio requer persistência, consistência e coerência. Os alunos devem sentir-se confortáveis e seguros para conseguirem lidar com os erros e partilhar ideias de modo a que defendam a sua maneira de pensar através de argumentos válidos. Devem saber avaliar criticamente os colegas, de modo a chegarem a um consenso matemático que seja relevante. Para tal, é necessário que os alunos tenham capacidade de ouvir, confiar e ajudar o outro (Boavida, 2008). Raciocinar matematicamente passa por propor-lhes tarefas desafiantes e ajudá-los a desenvolver um hábito de pensamento e na procura constante do "porquê das coisas" (Boavida, 2008).

Segundo as Aprendizagens Essenciais (2008), pretende-se que os alunos desenvolvam a capacidade de resolver problemas, raciocinar e argumentar matematicamente, progredindo na fundamentação das suas ideias e na análise dos argumentos de outros. Fortaleçam a capacidade de comunicar em Matemática, oralmente e por escrito, com a utilização da notação e simbologia matemáticas próprias dos diversos conteúdos estudados. Portanto, a resolução de problemas constitui uma importante orientação curricular para o ensino da Matemática. Permite que o aluno lide com situações complexas, enfrente dificuldades, tome decisões, corra riscos e descubra novos conceitos (Ponte, 1992).

Assim, tendo em consideração todos estes aspetos, o presente Projeto de Intervenção Pedagógica Supervisionada, tem como questões de investigação: 1- Como é que os alunos explicitam o raciocínio na resolução de problemas? 2- Quais as estratégias dos alunos para a resolução de problemas? 3- Em que medida a resolução de tarefas com funções afins ajuda no desenvolvimento do raciocínio funcional?

1.2. Pertinência do estudo

O raciocínio matemático tem ocupado um lugar de bastante destaque no desenvolvimento e na investigação da Educação Matemática. É um conceito bastante difícil de definir, uma vez que é utilizado com vários significados em práticas e abordagens teóricas distintas. Oliveira (2008) refere raciocínio matemático como um "conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (novos conhecimentos) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)" (p.3).

Similarmente, Canavarro e Pinto (2012) definem raciocínio matemático como sendo a atividade intelectual que o aluno desenvolve quando se envolve com tarefas de natureza problemática. O principal objetivo é resolver essas tarefas procurando dar sentido à situação em estudo, relacionando matematicamente os elementos relevantes, produzindo assim uma resposta. Para a realização da atividade o aluno pode recorrer a conhecimentos e estratégias que já aprendeu ou a processos criativos que ele próprio inventa. Visto que, para o ensino, um dos objetivos mais importantes para os alunos é saberem raciocinar matematicamente e não reproduzirem apenas conceitos que memorizam.

O raciocínio matemático segundo Mason, Burton e Stacey (1989), é um processo dinâmico que desenvolve a capacidade de compreensão, sendo para isso necessário particularizar, generalizar, conjeturar e convencer.

Na resolução de problemas, em Matemática, o raciocínio matemático é muito importante para desenvolver a compreensão desta ciência, como um conhecimento lógico e coerente (NCTM, 2007). Krulik e Rudnick (1993), consideram que a resolução de problemas e o raciocínio são fundamentais no dia a dia, estabelecendo a ligação entre os factos, algoritmos e situações da vida real com que nos defrontamos. A matemática é vista como resolução de problemas e a resolução de problemas como raciocínio.

Pólya (1995) entende que o professor tem de incutir nos alunos algum interesse e proporcionar-lhes oportunidades de praticar a resolução de problemas. Para essa resolução Pólya (1995) enumera quatro fases, primeiro é necessário compreender o problema, percebendo claramente o que é essencial, de seguida deve-se verificar a interligação das diversas ideias, para que se estabeleça um plano que leve a uma possível solução, depois executa-se o plano e por fim faz-se a revisão da resolução e discute-se.

Segundo Ponte (1992), para resolver um problema o aluno não dispõe de um método imediato de resolução, distinguindo assim de um exercício, visto que, o exercício exige apenas a aplicação de um método de resolução que já é conhecido. Ponte (1992) diz que a aplicação de problemas de matemática tem um princípio forte atrativo pedagógico, pois os estudantes apresentam uma postura mais participativa do que o habitual o que fará com que se envolvam em novas atividades, enfrentando as suas dificuldades ganhando confiança nas suas próprias capacidades.

1.3. Estrutura do relatório

O presente relatório está organizado em cinco capítulos: introdução, enquadramento teórico, enquadramento contextual, apresentação dos resultados, análise dos resultados e conclusões.

No Capítulo I, *Introdução*, além da apresentação da estrutura do relatório, encontra-se a apresentação do tema e os seus objetivos e ainda a pertinência do estudo deste relatório. No Capítulo II, *Enquadramento Teórico*, é apresentada a revisão da literatura que suporta esta investigação. Para além do levantamento da ideia de problema e de resolução de problemas, discute-se como se resolvem problemas e quais as estratégias a utilizar. São apresentadas, ainda, definições do raciocínio matemático e raciocínio funcional. Um estudo das funções ao longo do currículo de matemática é abordado. No Capítulo III, *Enquadramento contextual*, apresenta-se o contexto onde ocorreu a intervenção pedagógica, as opções metodológicas da intervenção pedagógica e ainda as estratégias de investigação.

No Capítulo IV, *Apresentação dos resultados*, compreende a apresentação dos resultados recolhidos durante a intervenção e posteriormente analisados. Por fim, no Capítulo V, *Discussões e conclusões*, apresentam-se e discutem-se as diferentes conclusões relativas a cada questão do estudo. Indicarei as dificuldades sentidas e como as poderei contornar em trabalhos futuros e farei algumas reflexões relativas à execução deste projeto.

CAPÍTULO II

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo está presente todo o enquadramento teórico que serviu de base para a escrita deste relatório, e encontra-se dividido em três partes. Na primeira parte abordarei os problemas e a sua resolução, na segunda parte o foco será o raciocínio e por fim, a terceira parte é dedicada ao tópico lecionado durante a intervenção pedagógica, funções afins.

2.1. Problemas e resolução de problemas

Conceito de problema

Segundo Dante (1998), um problema obriga o aluno a pensar e utilizar conhecimentos matemáticos para o conseguir solucionar. O autor salienta que um bom problema tem de ser desafiador, real, interessante, criativo, ter um determinado nível de dificuldade e não constar na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas.

Diferentes autores, tais como Kantowski, Posamentier e Krulik, definem problema como sendo uma situação que o indivíduo enfrenta e que solicita uma resolução, para a qual é desconhecido o caminho a seguir.

Kantowski (1980) menciona que o conhecimento que um sujeito possui deve ser utilizado de maneira a encontrar uma nova configuração para resolver o novo problema. Já Posamentier e Krulik (1998) defendem que o pensamento e as atitudes do ser humano são fundamentados grande parte das vezes por experiências anteriores, o que persuade a forma como se labora um certo problema.

Segundo Palhares (1980) um problema só existe quando temos um conjunto de informações sobre uma situação inicial e a situação final a que pretendemos chegar. Ao existir um obstáculo que impede o indivíduo de obter a solução de forma imediata e que o obrigue a pensar no assunto, tendo de recorrer a algum raciocínio, estamos perante um problema.

Do ponto de vista de Ponte (1992), um problema é uma tarefa na qual o aluno se deve empenhar para obter a solução desejada, não detendo um processo precocemente estudado para a resolver. A disparidade entre problema e exercício passa pelo facto de a resolução do exercício se tratar apenas de uma aplicação de um método já conhecido pelo aluno.

Segundo as Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar (NCTM, 1991) o conceito de problema, aplicado em sala de aula e na disciplina de Matemática, passa por ser uma tarefa proposta ao aluno em que este pretende resolver, mas não sabe previamente um método para o fazer. É importante querer resolver a tarefa, pois caso contrário ela não será vista como um problema.

No contexto deste estudo é adotada a definição de Ponte (1992), assumindo como problema uma tarefa onde o aluno se deve esforçar para alcançar a solução pretendida, não possuindo um método previamente estudado para a resolver.

2.1.1. Como se resolvem os problemas

Segundo Pólya (2003) a resolução de problemas inclui quatro etapas:

a) **Compreensão do problema** – nesta etapa o aluno precisa de compreender o problema, demostrar interesse e desejar resolvê-lo.
   O aluno deve considerar as partes principais do problema e estar em condições de responder às questões: - "Qual é a incógnita?"; - "Quais são os dados?";- "Qual é a condicionante?"

b) **Preparação de um plano** – O aluno tem um plano quando conhece os cálculos e sabe que procedimento efetuar para obter a incógnita. Relembrar um problema relacionado com o que está a tentar resolver, ajuda na construção do raciocínio.

c) **Execução do plano** – Para o aluno criar a ideia de resolução é preciso que além de conhecimentos anteriores, consiga ter bons hábitos mentais, concentração no objetivo e alguma sorte. Mesmo que na preparação do plano o aluno tenha adquirido algum tipo de ajuda, a ideia final deve permanecer de modo a que seja claro e nítido nas suas justificações.

d) **Verificação dos resultados** – O aluno depois de chegar à solução do problema e redigir a sua prova, tende a não rever o seu trabalho. Uma retificação na sua resolução fará com que reconsidere e reexamine o resultado, verificando de novo o caminho que produziu para chegar ao resultado, aperfeiçoando assim a sua capacidade de resolver problemas.

2.1.2. Estratégias de resolução de problemas

Utilizar esquemas, diagramas, tabelas ou gráficos é uma forma de obter a solução de um problema. Vejamos algumas estratégias, tal como propõe o programa de matemática do Ensino Básico (ME,2007):

- *Trabalhar do fim para o princípio:* é uma estratégia útil quando se conhece o ponto de chegada e o que se quer saber é o ponto de partida.
- *Simplificar o problema*: o objetivo é resolver o problema recorrendo a objetos ou modelos que simulem a situação.
- *Descobrir uma regularidade*: procura-se encontrar a solução através da generalização de soluções específicas.
- *Organizar uma sequência de passos*: a organização de uma sequência permite exaurir e visualizar todos os casos possíveis
- *Tentativa e erro*: o problema é resolvido fazendo tentativas de um modo organizado, verificando se a solução encontrada satisfaz as condições do problema.
- *Procurar um problema semelhante, mas mais simples*: exprimindo um problema mais simples, é mais fácil entender e resolver o problema dado.
- *Elaborar um problema equivalente*: utiliza-se esta estratégia quando se tem um problema com números grandes, substituindo-os inicialmente por números menores.
- *Explorar casos particulares*: é suposto resolver um problema do mesmo tipo, mas que corresponda a um caso particular daquele que se quer resolver.

Num contexto mais atual, segundo o Programa e Metas Curriculares de matemática no ensino básico (ME,2013), para a construção, desenvolvimento do raciocínio matemático e para uma boa comunicação oral e escrita deve trabalhar-se com os alunos a capacidade de compreender os enunciados dos problemas matemáticos, identificando as questões que levantam, explicando-as de modo claro, conciso e coerente, discutindo, do mesmo modo, estratégias que conduzam à sua resolução. Segundo ME (2013):

> A resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e

> treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais. (p.5)

Também, na resolução de problemas é necessário que os alunos comuniquem entre si. Comunicar em matemática tem um papel fundamental pois ajuda os alunos a construir noções informais, intuitivas e uma linguagem abstrata e simbólica. Para isso é necessário que sejam encorajados a comunicar matematicamente com os seus colegas, tendo oportunidade para explorar, organizar e conectar os seus pensamentos com diferentes pontos de vista sobre um mesmo assunto (Cândido, 2001).

2.2. Raciocínio matemático

Raciocinar está relacionado com o cálculo, compreensão, examinação, avaliação, justificação e conclusão. Na sala de aula é valorizado o raciocínio, a justificação e a argumentação na participação do aluno. É necessário ajudar o aluno a desenvolver o hábito do pensamento, questionando sempre o "porquê" (Boavida,2008). Os alunos precisam de se envolver em atividades de formulação, teste e prova de conjeturas, sentindo-se assim confortáveis e seguros para assumir riscos e partilhar ideias.

Através da argumentação devem defender o seu modo de pensar e analisando as contribuições dos colegas é esperado que cheguem a consensos alicerçados sobre o significado de ideias matemáticas. Este processo solicita que haja uma boa capacidade de escuta, respeito, confiança e ajuda mútua.

2.2.1 Processos de raciocínio

Ponte, Mata-Pereira e Henrique (2012), consideram que a elaboração de questões, a construção e teste de conjeturas, a concretização de justificações e a generalização são processos importantes de raciocínio, que partem de uma conclusão específica para formular uma conjetura de âmbito mais geral.

Segundo os mesmos autores, no ensino e aprendizagem da Matemática, é importante incentivar o aluno à justificação desde os primeiros anos, diligenciando a progressão entre as justificações simples e informais e as justificações formais. A formalização e encadeamento de justificações conduzem naturalmente à realização de demonstrações.

Para isso, é necessário entender os diferentes processos de raciocínio e refletir sobre eles. Este processo irá descobrir lacunas que os alunos apresentem, mesmo os que têm bom desempenho, sendo assim importante trabalhar essas dificuldades, principalmente em sala de aula, de forma a que o aluno se torne mais crítico e desenvolva a compreensão matemática.

É importante que os alunos desenvolvam uma rotina de pensamento relacionada com o "porquê das coisas", que se fundamente na persistência, solidez e congruência. Os alunos devem envolver-se em atividades de formulação, pois assim sentir-se-ão confortáveis e seguros para assumir riscos e partilhar ideias com os colegas. É necessário que o aluno possua uma boa capacidade de escuta para com o outro e que no grupo haja respeito e confiança, o que enriquecerá a partilha dos diferentes modos de pensar e analisar as resoluções (Boavida, 2008).

Para promover o raciocínio matemático dos alunos é muito importante o questionamento, onde o aluno não deve receber indicações para a resolução de tarefas e problemas. O professor apoia o raciocínio e o trabalho, pedindo aos alunos que reformulem o problema usando as suas próprias palavras e colocando questões, tais como, "porque é que isso funciona?" ou "como é que sabes?", que promovam o aprofundamento do seu pensamento (NCTM, 2009).

Neste mesmo entendimento, Bell (2011) defende que para desenvolver o raciocínio matemático dos alunos é essencial promover o questionamento, onde se deve evitar dar indicações. O aluno deve dar sentido a justificações, pedindo razões alternativas, evidenciando o que valida uma justificação e questionando o "porquê".

Ensinar processos de raciocínio mais formais como a justificação formal ou a demonstração é um processo complexo. Galbrait (1995) diz que o professor, para abordar a demonstração precisa de recorrer a quatro fases: (i) discutir demonstrações completas, (ii) indicar quais os aspetos lógicos a considerar, deixando as justificações para os alunos, (iii) fazer uma demonstração e (iv) levar os alunos a fazer uma demonstração onde usem sempre a mesma estrutura lógica.

A resolução de problemas é assim uma ajuda no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, o que contribui para o sucesso escolar, criando no aluno a capacidade de desenvolver o pensamento matemático, não se limitando a exercícios que se baseiem na reprodução.

2.2.2. Raciocínio na resolução de problemas

A prática de ensino de Matemática, por vezes, consiste na apresentação de ideias, técnicas e procedimentos em que o aluno apenas memoriza não compreendendo a sua razão de ser. Os problemas são encarados apenas como um meio de motivar os alunos e de aplicação de conhecimentos anteriormente aprendidos.

Segundo Boavida (2008), é importante que os alunos realizem tarefas que permitam desenvolver o pensamento matemático, laborem a criatividade e instruam novas formas de fazer frente aos desafios de aprender Matemática. A resolução de diferentes tarefas motivará o aluno a encontrar diversos procedimentos de resolução que despertem a sua curiosidade e interesse pelos conhecimentos matemáticos, desenvolvendo capacidades, de pensamento, raciocínio, questionação, partilha de estratégias e ideias de maneira a encontrar uma solução para o problema.

Segundo Sousa (2005), determinado tipo de questões não se revelam desafiantes para os alunos, como: “Este problema é uma equação do primeiro ou do segundo grau?”;“É um problema que envolve adição, subtração, multiplicação ou divisão?”; “A resposta é 9?”. Estas interrogações conduzirão o raciocínio do aluno, o que não o fará pensar sozinho. Em contrapartida, questões como: “Vamos pensar juntos?”; “Pense um pouco mais”; “É isso o que o problema está a pedir para fazer?”; “Discuta o método com o seu colega”; “Apresente ao seu colega qual o raciocínio que utilizou e pergunte-lhe como está a pensar resolver o problema”.

O aluno passa a trabalhar de forma mais autónoma, sem influência direta do professor. A síntese final deve ser explanada no quadro onde se demonstram as diferentes estratégias possíveis para o mesmo problema (Sousa, 2005).

2.2.3. Desenvolvimento do raciocínio funcional na resolução de problemas

O raciocínio funcional, segundo Blanton e Kaput (2008) é um processo usado na estrutura e conceptualização de padrões e relações, recorrendo a ferramentas linguísticas e representacionais.

Para Rodrigues (2016) uma das formas de desenvolver o raciocínio funcional é a exploração de relações de correspondência e variações que existem entre duas quantidades variáveis, partindo de uma relação particular de forma a generalizá-la. A relação existente entre duas grandezas individuais, através de uma lei de formação capaz de indicar tal correspondência é designada pelo elemento central do raciocínio funcional. Este mesmo autor salienta que há três formas de estabelecer uma relação funcional, sendo elas: (i) geometricamente, quando se utilizam esquemas e gráficos; (ii) aritmeticamente, com recurso a tabelas e pares ordenados; (iii) algebricamente, utilizando símbolos e fórmulas.

Por outro lado, Smith (2008) realça três formas diferentes de analisar as relações entre as variáveis: (i) pensamento recursivo, partindo da descoberta da mudança de valores; (ii) pensamento co variacional, fundamentado na análise da variação simultânea de duas quantidades, mantendo a mudança como uma parte explícita e dinâmica da descrição de uma função; (iii) pensamento de correspondência, que se baseia identificação de uma correlação entre variáveis, ou seja, na relação entre a variável independente e a variável dependente.

Blanton (2008) destaca que se devem utilizar recursos para o processo do raciocínio funcional como ferramentas linguísticas e representacionais, investigando as relações generalizadas ou as funções que o constituem. Por isso, trabalhar com padrões generalizados é uma forma de desenvolver o raciocínio funcional nos alunos a partir de situações familiares, de maneira a que os alunos ao explorarem as relações que envolvem correspondências e variações desenvolvam este tipo de raciocínio. Ao encontrar esta relação funcional entre dois conjuntos de números pode-se assim passar da Aritmética para a Álgebra, tal como referem Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999).

Assim, para melhorar as aprendizagens dos alunos, é relevante analisar a importância do raciocínio funcional no estudo das funções, sendo fundamental compreender a sua relação funcional, onde Kieran (1992) identifica três maneiras de representar relações funcionais: (i) geometricamente, quando se usam esquemas, diagramas e gráficos; (ii) aritmeticamente, quando se recorrem a números, tabelas ou pares ordenados; (iii) algebricamente, utilizando símbolos, fórmulas e correspondências.

A resolução de problemas permite então recorrer a diferentes tipos de representações, sendo necessário interpretar e analisar as relações existentes entre as variáveis estimulando o desenvolvimento do raciocínio funcional dos alunos (Kieran, 1992).

2.3. Conceito de função

Em álgebra, nas operações aritméticas, nas transformações geométricas e em quase todos os conteúdos matemáticos, podemos encontrar funções. As funções são componentes essenciais no estudo de problemas das diversas áreas científicas, da física, ciências naturais, economia, ciências sociais e humanas.

O conceito de função é considerado por muitos autores como um dos mais importantes da matemática. As funções surgem nas operações aritméticas, nas transformações geométricas e na álgebra podendo ser encaradas de diferentes maneiras. Em concordância com a definição, uma função é uma correspondência unívoca entre dois conjuntos, observada numa situação concreta e na relação entre variáveis (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999).

É recomendado, na disciplina de matemática, que os alunos comecem a aprender o conceito de funções através da exploração e representação de situações concretas onde utilizem tabelas, gráficos e expressões com variáveis que se relacionem com situações do dia a dia. (Abrantes et al., 1999).

O recurso a tabelas, gráficos e expressões algébricas ajuda a compreender o que é uma função, recorrendo às correspondências entre dois conjuntos e às relações entre variáveis. O aluno deve saber que uma função é uma correspondência com determinadas características. Para definir uma função, necessitamos de: (i) dois conjuntos (o domínio e o conjunto de chegada) entre os quais se define a correspondência; (ii) um método em que a partir de cada elemento do primeiro conjunto (objeto) se obtém o correspondente no segundo conjunto (imagem).

O aluno deverá ainda ser capaz de relacionar o conceito de função com a ideia de variação, interpretando como a alteração numa variável se relaciona com uma alteração na outra variável (Abrantes et al., 1999).

O estudo de funções é especialmente rico em oportunidades para se estabelecerem conexões entre diversos domínios da matemática. Assim, as tabelas, os gráficos e as expressões analíticas, que o estudo das funções leva a relacionar naturalmente, estão relacionadas com padrões numéricos, representações geométricas e métodos algébricos. O aluno começa a desenvolver aspetos integrantes do processo de raciocínio, importantes na competência matemática, tais como, compreender e interpretar fórmulas, construir tabelas utilizando os valores presentes no enunciado, ler gráficos, utilizar formas simbólicas de representação e análise de situações matemáticas e compreender relações entre os vários tipos de representações matemáticas (Abrantes et al., 1999).

Para a aprendizagem do conceito de função, no capítulo de álgebra, o NCTM (2007) nomeia algumas normas: Compreender padrões, relações e funções; representar e investigar situações e construções matemáticas utilizando símbolos algébricos; usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; analisar a variação em diversos contextos.

2.4. O estudo das Funções no currículo

No programa de Matemática do Ensino Básico atualmente em vigor, as funções são referidas explicitamente, pela primeira vez, no 3.º Ciclo, inseridas no domínio Funções, Sequências e Sucessões. Os alunos têm o primeiro contacto explícito com o conceito de função no 7.º ano de escolaridade. No domínio Funções, Sequências e Sucessões é feita uma introdução ao conceito de função e de sucessão e de algumas operações entre elas. Ainda no 7.º ano, são trabalhadas as funções de proporcionalidade direta, inversa, funções afins e quadráticas.

Já no 8.º ano, o programa, relativamente ao capítulo relacionado com funções afins, espera que os alunos atinjam os seguintes conhecimentos: (i) Determinar a expressão algébrica de uma função afim dados dois pontos do respetivo gráfico; (ii) Determinar a equação de uma reta paralela a outra dada e que passa num determinado ponto; (iii) Resolver problemas envolvendo equações de retas em contextos diversos.

Para aprender os Gráficos de Funções Afins é necessário que os alunos já tenham presente conceitos como a definição de função, domínio, contradomínio e equação de retas. No final do capítulo é esperado que saibam determinar a expressão algébrica de uma função afim dados dois pontos do respetivo gráfico, determinar a equação de uma reta paralela a outra dada e que passa num determinado ponto e resolver problemas envolvendo equações de retas em diferentes contextos.

Para Ponte (1990), depois da noção de função ser introduzida no currículo, deverá passar a aparecer ciclicamente de modo a permitir um progressivo enriquecimento e aprofundamento do conceito. Primeiramente deve começar por se estudar as funções lineares e quadráticas, passando de seguida para as funções com um grau de complexidade mais elevado, funções de proporcionalidade inversa, funções polinomiais, racionais, entre outras.

Tendo em consideração tudo o que foi antes referido, pretende-se com este relatório poder contribuir para aumentar os conhecimentos acerca das dificuldades e dos erros revelados pelos alunos no conceito funções e poder solucioná-los.

CAPÍTULO III

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL

O terceiro capítulo está dividido em três partes. Na primeira parte, descreve-se o contexto de intervenção, fazendo a caracterização da escola e da turma. Na segunda parte, apresento o plano geral de intervenção, onde indico as metodologias de ensino e de aprendizagem escolhidas e exibo a planificação da intervenção pedagógica supervisionada. Por fim, na última parte, apresento as estratégias de investigação usadas durante a intervenção pedagógica.

3.1. Contexto de intervenção

Nesta secção, encontra-se a caracterização da escola e da turma onde se desenvolveu o estudo para a realização deste relatório.

3.1.1. Caracterização da escola

A Intervenção Pedagógica foi realizada numa escola de um agrupamento de escolas do concelho de Santo Tirso. Este agrupamento é constituído por vinte e uma unidades escolares e abrange a escolaridade desde o pré-escolar até ao ensino secundário.

A meados do século XX, um decreto-lei registou o nascimento da escola. Começou por ser uma escola industrial, onde predominou a laboração fabril. A partir de 1975/1976 acolhe o 7.º ano de escolaridade do ensino unificado. No ano letivo de 2009-2011 foram iniciadas as obras de modernização e requalificação da escola.

A escola distribui-se por quatro pavilhões de salas de aula, distinguidos por cores e que possuem salas adaptadas a laboratório e salas específicas para Educação Visual e Tecnológica. Encontramos ainda um edifício administrativo que integra a sala de professores, uma sala de apoio e o pavilhão desportivo. Existe um edifício destinado aos vários cursos profissionais, podemos destacar os cursos de técnico de informática, técnico de eletrónica, técnico de mecatrónica, técnico de manutenção industrial, técnico administrativo, entre outros. Todas as salas dispõem de Internet, computador e projetor, estando algumas equipadas com quadros interativos. A Biblioteca está integrada na Rede Nacional de Bibliotecas Escolares e possui um acervo documental adequado às necessidades.

Após uma leitura do Projeto Educativo do ano de 2016, disponível na página da escola, fica-se a saber que esta escola no ano letivo de 2015/2016 era frequentada por mil duzentos e um alunos, divididos entre turmas do ensino recorrente e ensino profissional. No ano letivo 2014/2015 o número de docentes era de duzentos e sessenta e seis e a média das idades do grupo de recrutamento incidia nos 47,7 anos.

No Projeto Educativo pode ainda ler-se que: "A missão do Agrupamento que aqui se apresenta tem por referência os princípios basilares que devem nortear uma escola pública, fiel aos direitos consagrados na Constituição da República Portuguesa e na Lei de Bases do Sistema Educativo, bem como aos princípios de identidade das unidades abrangidas pelo Agrupamento."

A escola pretende promover a cada ano a melhoria contínua dos resultados ao nível da avaliação sumativa externa, provas finais e exames nacionais e reduzir as taxas de retenção e de abandono escolar precoce. Relativamente ao nível de valorização do currículo evidenciam-se alguns projetos e atividades tais como o Projeto ALEA, Erasmus+, Clube Ambiental BÍOMA, Projeto de Educação Financeira, Projeto Educar Pela Arte, Mostra do Agrupamento, Desporto Escolar, entre outros. Mais relacionado com a Matemática, a escola tem como tradição participar no Canguru Matemático, nas Olimpíadas Portuguesas da Matemática e no Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos.

3.1.2. Caracterização dos alunos da turma

O desenvolvimento da prática pedagógica foi realizado numa turma de 8.º ano do ensino básico. A turma é composta por 22 alunos, seis raparigas e dezasseis rapazes, sendo que 7 elementos da turma estão a repetir o 8.º ano e os restantes nunca tiveram nenhuma retenção. As idades dos alunos, no final do 1.º período, variavam entre os 12 e os 16 anos, sendo que a média das mesmas ronda os 13 anos.

Ao observar o plano curricular foi possível constatar que as disciplinas com elevado insucesso no ano transato foram Matemática e Português. Doze alunos da turma estão abrangidos por Medidas

Universais, sendo que uma dessas alunas ainda está abrangida pelas Medidas Seletivas, tendo apoio de Educação Especial, devido também a uma situação familiar complexa.

Nas aulas, com a professora titular, os alunos da turma participam sempre que consideram necessário. A própria professora estimula isso.

No que diz respeito ao ano letivo da minha Intervenção Pedagógica, 2019/2020, as médias das classificações da turma, e os respetivos desvios padrão, em cada período, podem ser observados no *Quadro 1*.

Quadro 1: *Desempenho dos alunos da turma ao longo do ano letivo 2019/2020*

1.º Período		2.º Período		3.º Período	
Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão
2,82	0,96	2,86	0,94	2,82	0,92

Através do *Quadro 1*, verifica-se que a turma evoluiu positivamente, entre o primeiro e o segundo período, já no terceiro período voltou a descer. No final do ano letivo, 5 alunos obtiveram nível 4 e 1 aluno obteve nível 5. Relativamente a notas negativas, verificamos que 11 alunos não conseguiram superar as suas dificuldades. Com a intervenção realizada pretendeu-se compreender o modo como os alunos explicitam o raciocínio na resolução de problemas e que estratégias utilizam para resolver os mesmos problemas.

Por uma questão de segurança e para não comprometer a identidade dos alunos, tal como ficou esclarecido com o diretor da escola, foi atribuído a cada um a designação do tipo Ax, sendo x um número natural entre um e vinte e dois. A constituição dos grupos ficou a cargo da investigadora permitindo equilibrar os grupos com alunos que apresentaram mais e menos dificuldades em Matemática. A turma ficou dividida em seis grupos, quatro grupos com quatro alunos e dois grupos com três alunos, tal como podemos observar no *Quadro 2*.

Quadro 2: *Constituição dos grupos*

Grupos	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6
Elementos	A1 A3 A8 A13	A2 A4 A6 A19	A9 A11 A12 A14	A10 A15 A16	A17 A18 A21 A22	A5 A7 A20

3.2. Plano geral de intervenção

Esta secção está dividida em duas partes onde o objetivo é expor o que foi executado durante a lecionação das aulas, as metodologias de ensino escolhidas, a motivação dessas escolhas e a forma como foram organizadas as aulas da intervenção.

3.2.1. Metodologias de ensino e aprendizagem

A intervenção foi desenvolvida com base em tarefas de caracter diversificado, utilizando tarefas de exploração, problemas e exercícios de forma a desafiar os alunos na procura do conhecimento e no desenvolvimento do raciocínio.

Sardinha (2011), defende que a metodologia de trabalho cooperativo é essencial pois permite o desenvolvimento da comunicação matemática e de estratégias de resolução. Assim, a exploração dos problemas, realizada ao longo das várias aulas foi desenvolvida em pequenos grupos, onde o espírito de entreajuda foi valorizado, independentemente do grau de conhecimento de cada aluno. Ao trabalharem em grupo, os alunos partilham ideias e possíveis dificuldades desenvolvendo assim capacidades de pensamento crítico, raciocínio e compreensão mútua. Tendo isto em consideração, a intervenção contou com vários momentos, onde os alunos tiveram oportunidade de trabalhar individualmente e em grupo, apresentando e defendendo as suas ideias perante toda a turma.

Na primeira aula da intervenção, os alunos foram desafiados a recordar alguns dos conhecimentos que possuíam relacionados com funções, ao responderem a uma *Ficha de Diagnóstico* (Anexo 1). Na *Ficha de Diagnóstico,* os alunos depararam-se com o conceito de função, através de várias representações, onde teriam de indicar o domínio, contradomínio, coeficiente, conjunto de chegada e termo independente de cada uma. Precisavam de saber distinguir função constante de linear e de afim e, por fim, aplicar os conceitos em dois problemas relacionados com situações do dia a dia. Depois de feita a correção, foi dado à turma um *feedback* geral.

A realização da ficha de diagnóstico individualmente e sem qualquer auxílio do professor permitiu perceber as dificuldades de cada aluno em específico, através das respostas dadas. Assim, nas aulas seguintes foi possível trabalhar esses conceitos de maneira a consolidar as ideias.

Ao longo das restantes aulas, foi trabalhado e *desenvolvido o tópico Gráficos de Funções Afins*, nomeadamente a função constante, linear e afim e suas aplicações. As *tarefas* aplicadas nas aulas eram maioritariamente centradas no trabalho realizado pelos alunos, sendo que a aula estava dividida em quatro fases, (i) apresentação da tarefa; (ii) trabalho autónomo dos alunos; (ii) discussão coletiva; (ii) síntese final com retoma a aspetos onde os alunos demonstraram mais dificuldades (Ponte, et al., 2011).

A *apresentação da tarefa* era de extrema importância, visto que a turma na sua generalidade apresentava muitas dificuldades na interpretação dos enunciados. Esta discussão foi importante para esclarecer o significado de todos os termos presentes que estavam a embaraçar os alunos. Na segunda fase era esperado que os alunos se mostrassem motivados para a *resolução da tarefa* e começassem a trabalhar na mesma. A intervenção nas discussões, por parte do professor, é reduzida apoiando e incentivando os alunos na discussão entre o grupo, sem que interceda com sugestões de resolução.

A *fase da discussão coletiva* baseou-se no debate, onde era apoiada a participação dos alunos de modo a que todos expusessem a sua resolução e defendessem os argumentos que utilizaram na resolução.

Por fim, na síntese final, retomam-se os aspetos onde os alunos demonstraram mais dificuldades, e com a participação do grupo turma sintetizam-se os aspetos relevantes na resolução da tarefa proposta (Ponte, et al., 2011).

Segundo as Aprendizagens Essenciais (2008), pretende-se que os alunos desenvolvam a capacidade de resolver problemas, raciocinar e argumentar matematicamente, progredindo na fundamentação das suas ideias e na análise dos argumentos de outros. Fortaleçam a capacidade de comunicar em Matemática, oralmente e por escrito, com a utilização da notação e simbologia matemáticas próprias dos diversos conteúdos estudados. Portanto, a resolução de problemas constitui uma importante orientação curricular para o ensino da Matemática. Permite que o aluno lide com situações complexas, enfrente dificuldades, tome decisões, corra riscos e descubra novos conceitos (Ponte, 1992).

Durante as aulas os alunos trabalhavam individualmente, embora houvesse uma grande interação entre a professora e o grupo turma e ainda entre os elementos da mesma. Os alunos já estavam habituados a interagir com a professora titular, sendo que os que apresentavam mais dificuldades eram chamados várias vezes ao quadro para que não deixassem que as dificuldades os atrapalhassem e fizessem perder o gosto pelo estudo da matemática.

Na resolução das tarefas, houve momentos em que o trabalho foi realizado individualmente e momentos em que o trabalho foi realizado em grupo, mantendo sempre os grupos indicados no *Quadro 2*. Antes de iniciar a intervenção pedagógica, frisei que todos os membros do grupo deveriam registar e ser capazes de apresentar a resolução, já que todas as dúvidas que pudessem surgir fariam parte do grupo e não apenas de alguns elementos.

Apesar de os alunos com mais dificuldades estarem em grupos onde outros colegas apresentavam mais destreza, verificou-se que o trabalho por eles realizado era quase nulo. As tarefas entregues em folhas A4 e que continham o problema proposto para a aula estavam praticamente em branco.

O desenvolvimento do raciocínio requer persistência, consistência e coerência. Os alunos devem sentir-se confortáveis e seguros para conseguirem lidar com os erros e partilhar ideias de modo a que defendam a sua maneira de pensar através de argumentos válidos. Devem saber avaliar criticamente os colegas, de modo a chegarem a um consenso matemático que seja relevante. Para tal, é necessário que os alunos tenham capacidade de ouvir, confiar e ajudar o outro (Boavida, 2008).

O trabalho de grupo é muito importante pois permite que os alunos desenvolvam as suas capacidades de comunicação e argumentação aliadas à partilha de raciocínios. É muito importante estimular o trabalho de grupo porque, apesar da turma estar pouco habituada a este formato, constituiu uma oportunidade de progresso para todos os alunos.

O principal objetivo consiste em que os alunos lancem ideias para no final chegarem ao resultado pretendido, seguindo os propósitos propostos para o desenvolvimento do trabalho, já que estes tendem a desorientar-se facilmente. Nos momentos em que os alunos trabalharam em grupo, verificou-se falta de empatia, partilha de conhecimentos, entreajuda e solidariedade.

Dado que o mesmo voltou a acontecer em aulas posteriores, os problemas passaram a ser resolvidos em grupo turma de forma a poder controlar e solicitar a ajuda de todos. Cada aluno tinha a oportunidade de participar, expondo o seu raciocínio e podendo, com a ajuda dos restantes colegas chegar a uma resposta mais completa.

3.2.2. Planificação da intervenção pedagógica

A planificação da intervenção pedagógica é fundamental, já que as aulas devem ser planeadas para uma unidade completa, ressalvando a hipótese de não se cumprir com algumas das lições previstas, tornando-se assim necessário fazer ajustamentos à planificação estabelecida na base do que vai acontecendo aula a aula. Devem ter uma estrutura flexível, que permita relacionar, aplicar e integrar os conteúdos.

Stenhouse (1984) defende que a planificação deve seguir alguns princípios: (i) para seleção do conteúdo; (ii) para o desenvolvimento de uma estratégia de ensino e aprendizagem; (iii) para a tomada de decisões sobre as sequências; (iv) para orientar a tarefa de diagnóstico do aluno; (v) para estudar e avaliar o progresso dos alunos.

Para realizar a planificação da intervenção pedagógica foi necessário estudar o programa oficial, estabelecendo uma sequência de aulas que incluam os temas relevantes, as aulas de revisão e de avaliação. Para tal, com a ajuda da professora titular da turma e da colega de estágio, consideramos vários elementos, entre eles a identificação e ordenação dos conteúdos, a definição de estratégias mais adequadas ao desenvolvimento dos objetivos pretendidos, a definição de técnicas de avaliação e a distribuição do número de aulas pelos diferentes conteúdos.

Para que todas as aulas corressem bem, elaborei uma tabela, disponível abaixo no *Quadro 3*, onde estruturei o plano da intervenção pedagógica supervisionada. Na primeira coluna está indicada a numeração da aula e o correspondente tempo letivo da mesma, na segunda coluna o dia em que a aula foi lecionada, e na terceira coluna o respetivo sumário da aula.

Quadro 3: Plano de intervenção pedagógica supervisionada

Aula	Data	Sumário
1 **90 minutos**	**4 de março de 2020**	- Ficha de diagnóstico - Início do estudo do capítulo 5 "Gráficos de funções afins"
2 **45 minutos**	**6 de março de 2020**	- Resolução de exercícios sobre funções
3 **90 minutos**	**9 de março de 2020**	- Gráfico de função linear
4 **90 minutos**	**11 de março de 2020**	- Gráfico de função linear: resolução de exercícios
5 **45 minutos**	**13 de março de 2020**	- Realização de uma tarefa sobre gráficos de funções afins
6 **90 minutos**	**23 de março de 2020**	- Ficha de trabalho n°1 - Realização das tarefas 1 e 2 com problemas do dia a dia sobre funções afins
7 **90 minutos**	**25 de março de 2020**	- Correção da ficha de trabalho n°1 e das tarefas 1 e 2
8 **90 minutos**	**15 de abril de 2020**	- Realização da ficha de trabalho n°2 sobre funções afins
9 **45 minutos**	**17 de abril de 2020**	- Correção da ficha de trabalho n°2

É importante salientar que as aulas a partir do dia 23 de março de 2020 não foram lecionadas em regime presencial, mas sim a partir da aplicação *Zoom* e posteriormente do *Google Meet* (via *Google Classroom*), devido à pandemia COVID-19 que o país estava a enfrentar.

Ressalto, que a partir desse dia, pela falta de melhores condições, a lecionação das aulas se tornou um pouco mais complexa. Grande parte dos alunos nos primeiros dias não aderiu às sessões, o que dificultou a continuação da abordagem do capítulo.

Nas aulas através da plataforma *Google Classroom,* dada a impossibilidade de se acompanhar os alunos e interagir individualmente, foi sugerido que enviassem as resoluções para assim ser possível dar o respetivo *feedback* individual. Todas as atividades propostas aos alunos durante o ensino *online* tinham prazo de entrega, onde cada aluno deveria anexar a sua resolução na plataforma.

Neste sistema de gerenciamento de conteúdo eram também disponibilizadas todas as atividades, vídeos, tarefas, fichas de trabalho entre outros recursos utilizados no decorrer das aulas. Depois de recebidas as resoluções dos alunos, era dado o respetivo *feedback* individual, dando a oportunidade de o aluno poder melhorar a sua resolução.

3.3. Estratégias de investigação e avaliação da ação

Neste subcapítulo estão presentes as estratégias de investigação, onde explano quais foram os instrumentos de recolha de dados utilizados para responder às questões de investigação deste estudo. Referencia-se, ainda, a forma como foram analisados os dados e apresentados os resultados no próximo capítulo.

3.3.1. Instrumentos de recolha de dados

Ao longo da intervenção pedagógica foram utilizados vários instrumentos de recolha de dados, uma ficha de diagnóstico, produções dos alunos, gravação de aulas, uma ficha de avaliação e questionários, que se descrevem a seguir.

Uma alteração foi o facto de estar programado que todas as tarefas seriam resolvidas em pequenos grupos, o que não foi possível visto que a plataforma que estávamos a utilizar para realizar as videoconferências não o permitia. Assim, os alunos passaram a resolver as tarefas individualmente enviando foto das resoluções, para a *Classroom*.

Ficha de Diagnóstico

No início do projeto foi aplicada a *Ficha de Diagnóstico* (Anexo 1), composta por 5 questões, onde duas delas eram problemas com funções relacionados com situações do dia a dia, que tinham o objetivo de verificar se os alunos conseguiam resolver, tentando seguir uma lógica e observando o gráfico dado. A ficha de diagnóstico permitiu perceber quais as dificuldades dos alunos, através das respostas dadas de modo que nas aulas seguintes houvesse um maior foco nesses conceitos de maneira a os clarificar. A realização da ficha individualmente e sem qualquer auxílio do professor permitiu perceber as dificuldades de cada aluno em específico.

Produções dos alunos

Este estudo tinha como objetivo analisar o raciocínio dos alunos na resolução de problemas relacionados com situações do dia a dia sobre funções afins, que podem ser encontrados no Apêndice 1. Assim, ao longo da intervenção nas aulas presenciais foram distribuídas tarefas onde os alunos se organizavam em grupos de 3 ou 4 elementos (Quadro 2) para debaterem e chegarem às respetivas respostas.

No horário da aula, em regime *online*, era disponibilizado no *Google Classroom* a atividade que iriamos trabalhar na aula, assim como os respetivos avisos e horários de entrega das produções realizadas durante a aula e dos trabalhos de casa que eram pedidos. Foram disponibilizados *Power Points*, expostos nas aulas, produzidos com os conteúdos lecionados e apresentados nas aulas, vídeos e questionários da *Khan Academy* onde os alunos poderiam aprofundar e consolidar os conteúdos trabalhados durante a aula.

Gravação de aulas

Para realizar gravações das aulas e registos fotográficos, uns meses antes da intervenção foi criada uma autorização para o diretor da escola (Anexo 6) e para os pais de todos os alunos (Anexo 7) de maneira a poder fazê-lo sem nenhum inconveniente. Em regime a distância as aulas lecionadas foram gravadas com a colaboração de uma colega de estágio. Esses vídeos permitiram recolher a informação necessária para o projeto, onde estavam gravados todos os momentos da aula.

Ficha de avaliação

Estava também previsto, no final do capítulo aplicar uma ficha de avaliação a realizar individualmente, com problemas semelhantes aos da ficha de diagnóstico, o que não foi possível devido às circunstâncias de ensino a distância com que nos deparámos. Esta ficha de avaliação tinha como objetivo verificar a evolução do aluno na resolução de problemas, avaliar o grau de desenvolvimento e apresentação das suas resoluções e perceber qual o raciocínio utilizado para chegar ao resultado final.

Questionários

Uma alternativa aos questionários que já eram realizados em papel ao longo do ano letivo foi a realização de pequenos questionários *online* (Anexo 4), que se tornaram fundamentais para avaliar as dificuldades dos alunos. Estes questionários foram assim uma alternativa encontrada para substituir a ficha de avaliação, que estava programa inicialmente e que não foi possível aplicar, dispondo assim de um novo sistema para avaliar a turma.

Outro questionário que a turma preencheu no início do terceiro período (Anexo 5) teve como objetivo avaliar as aulas a distância na disciplina de matemática, verificando se as orientações dadas, o apoio e a disponibilidade prestados pelas professoras, o tempo para a realização das tarefas, a utilização do *Google Classroom* e o uso das videoconferências foram bem-sucedidos. Havia ainda espaço para os alunos escreverem sugestões para melhoria nas futuras aulas de matemática.

3.3.2. Análise dos dados

Para dar resposta às questões instituídas, dos dados recolhidos durante a intervenção, selecionei 4 tarefas, que continham problemas, de um conjunto de 10 aplicadas em diferentes momentos da intervenção.

Os alunos tiveram contacto com problemas ao longo de toda a intervenção. O projeto inicia-se com a aplicação de dois problemas na *ficha de diagnóstico*. No decorrer das aulas os alunos resolveram problemas relacionados com o conteúdo programático, incidente no tema do relatório, assim como outros conteúdos.

O principal objetivo consistiu em selecionar diferentes problemas, relacionados com diferentes conteúdos abordados ao longo das aulas. O interesse do estudo relativamente a cada problema escolhido, recai sobre os resultados obtidos, sendo descritas as estratégias desenvolvidas pelos alunos na resolução do problema, as dificuldades sentidas na resolução do mesmo, a comunicação escrita dos alunos na apresentação da resolução do problema, as opções tomadas e o trilho percorrido até alcançarem certas reproduções.

A observação das aulas foi um dos elementos fundamentais no decorrer deste estudo e que contribuiu muito para a análise dos dados. Para a lecionação do tópico "Gráficos de Funções Afins" foi importante arranjar diferentes estratégias para que os alunos tivessem um papel ativo na aprendizagem da matemática, utilizando como linha orientadora da lecionação das aulas, o trabalho exploratório (Ponte, 2005).

Neste estudo, os dados foram analisados de forma indutiva, este método de análise tem o intuito de chegar a uma conclusão, tendo como ponto de partida a observação para elaborar a teoria, tentando que o foco recaísse principalmente no raciocínio desenvolvido pelo aluno e não no produto final. Todos os dados que recolhi focam-se numa natureza descritiva, onde recorri aos registos escritos e às transcrições dos diálogos entre os alunos, nas aulas que foram presenciais, e ainda, a fotografias e representações que fotografei.

Na análise dos dados era esperado que apresentassem uma diversidade de respostas, o que não aconteceu. Talvez os problemas escolhidos, ou o momento escolhido para a sua aplicação, causassem esta falta de diversidade nas respostas. Várias respostas obtidas eram semelhantes, o que dificultava o trabalho de análise já que todas focavam no mesmo. Posto isto, foi pedido aos alunos para explicarem detalhadamente todo o seu raciocínio e cálculos efetuados.

É ainda importante referir que desde o início da lecionação do tópico os alunos estavam inseguros na abordagem de problemas por não estarem muito familiarizados com a resolução nas aulas de Matemática.

CAPÍTULO IV

APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste quarto capítulo serão apresentados os resultados obtidos através da análise dos dados recolhidos, em tarefas apresentadas aos alunos, ao longo de intervenção pedagógica. O capítulo está dividido em quatro secções, onde em cada secção se analisa um problema. Dois dos problemas estão relacionados com situações do dia a dia e foram apresentados na ficha de diagnóstico, a qual deu início à intervenção pedagógica. Na secção seguinte, constam os resultados da resolução de um problema com relação direta à matéria lecionada durante a intervenção, sendo que na quarta secção estarão os resultados da resolução de outro problema sem relação direta com o conteúdo a ser estudado.

Ao longo da intervenção pedagógica, relacionada com o conteúdo em estudo, gráficos de funções afins, foram propostas à turma algumas tarefas alistadas com situações do dia a dia. As tarefas podem ter natureza muito diversa. Pólya (1945) diferencia entre exercício e problema, conforme a pessoa que a vai realizar disponha ou não de um método de resolução imediato, em função do seu conhecimento prévio.

Ponte (2005) sugere que é necessário haver uma diversidade de tarefas, visto que cada tipo de tarefa desempenha um papel específico na aprendizagem. As tarefas fechadas, como exercícios e problemas, são importantes para o desenvolvimento da capacidade de relacionar de forma precisa a informação dada.

De seguida são apresentados os resultados obtidos na análise feita das tarefas, relativamente às estratégias utilizadas pelos alunos, às dificuldades que estes demonstraram e ainda ao modo como apresentaram as suas respostas.

4.1. Tarefa da "Máquina de lavar roupa"

Figura 1: Problema da máquina de lavar roupa

4. A máquina de lavar roupa da Cristina avariou. Para solucionar o problema ligou para uma empresa especializada e foi informada que o custo da reparação seria 25 euros para a deslocação da máquina e 10 euros por hora de trabalho.

Número de horas	Custo do arranjo (€)
1	35
2	
3	
...	...
x	$y = \cdots$

4.1. Completa a tabela.
4.2. Se a máquina levou 30 minutos a arranjar, quanto pagou a Cristina?

4.3. Se a Cristina pagou pelo arranjo da máquina 75 euros, quanto tempo foi necessário para arranjar a máquina?

Estratégias desenvolvidas pelos alunos na resolução do problema

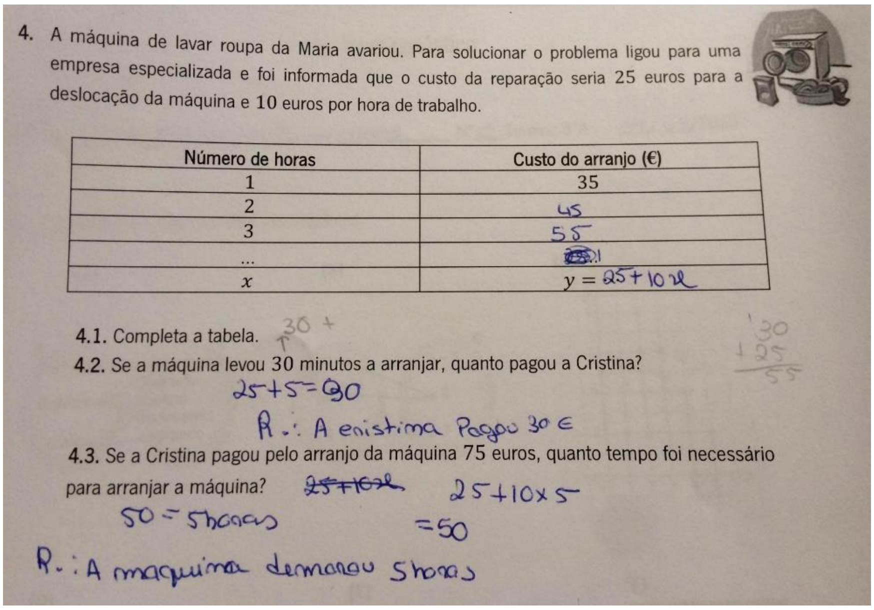
Para a resolução deste problema, era suposto que os alunos começassem por completar a tabela através da interpretação do enunciado apresentado, tentando descobrir uma lógica que, ao entenderem que a Cristina terá de pagar obrigatoriamente os 25 euros fixos, que se referem à deslocação da máquina, e depois, consoante o número de horas de trabalho, terá de pagar mais 10 euros por cada hora.

Após análise das resoluções, foi possível verificar que alguns dos alunos conseguiram fazer uma boa interpretação e preencher corretamente a tabela. Na resolução deste problema, as estratégias mais utilizadas pelos alunos foram a de *descobrir uma regularidade/regra*, ou seja, procurar encontrar a solução através da generalização de soluções específicas, a *organização de uma sequência de passos* que permite visualizar casos concretos para depois descobrir o caso geral e ainda *tentativa erro,* ao resolver o problema através de tentativas de um modo orientado, verificando em cada caso se a solução encontrada satisfaz as condições do problema.

De seguida, é possível observar algumas das resoluções realizadas pelos alunos da turma.

Nas figuras 2 e 3, podemos observar as resoluções dos alunos A6 e A17, onde com a ajuda da tabela organizaram uma sequência de valores, conforme o número de horas apresentado, chegando assim à solução geral, que lhes foi útil para resolver as alíneas 4.2 e 4.3 A expressão geral foi assim útil para resolver as restantes alíneas.

Figura 2: Resolução do problema da máquina de lavar roupa, pelo aluno A6



4. A máquina de lavar roupa da Maria avariou. Para solucionar o problema ligou para uma empresa especializada e foi informada que o custo da reparação seria 25 euros para a deslocação da máquina e 10 euros por hora de trabalho.

Número de horas	Custo do arranjo (€)
1	35
2	45
3	55
...	
x	$y = 25 + 10x$

4.1. Completa a tabela.

4.2. Se a máquina levou 30 minutos a arranjar, quanto pagou a Cristina?

25+5=30

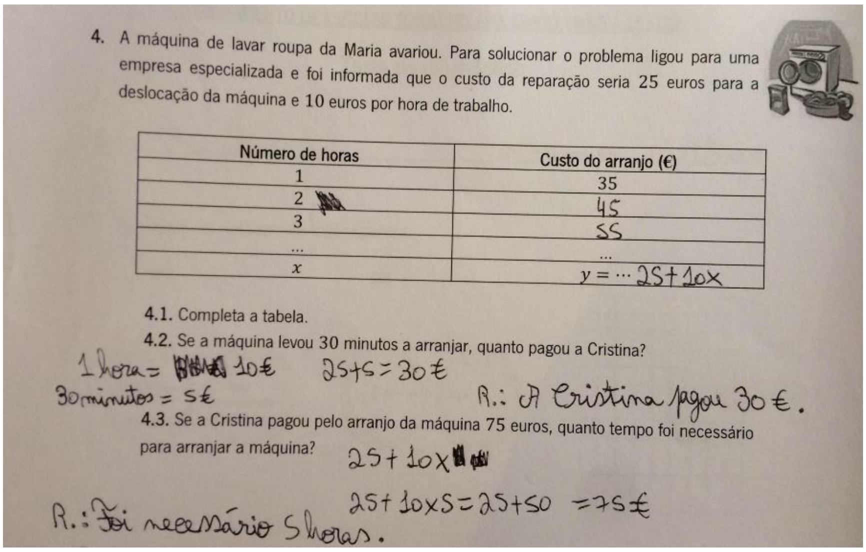
R.: A cristina Pagou 30 €

4.3. Se a Cristina pagou pelo arranjo da máquina 75 euros, quanto tempo foi necessário para arranjar a máquina? ~~25+10x~~ 25+10×5 =50

50 = 5horas

R.: A maquina demorou 5horas

Figura 3: Resolução do problema da máquina de lavar roupa, pelo aluno A17.



4. A máquina de lavar roupa da Maria avariou. Para solucionar o problema ligou para uma empresa especializada e foi informada que o custo da reparação seria 25 euros para a deslocação da máquina e 10 euros por hora de trabalho.

Número de horas	Custo do arranjo (€)
1	35
2	45
3	55
...	...
x	$y = \cdots$ 25+10x

4.1. Completa a tabela.

4.2. Se a máquina levou 30 minutos a arranjar, quanto pagou a Cristina?

1hora = 10€ 25+5 = 30€

30minutos = 5€ R.: A Cristina pagou 30 €.

4.3. Se a Cristina pagou pelo arranjo da máquina 75 euros, quanto tempo foi necessário para arranjar a máquina? 25+10x

25+10x5=25+50 =75€

R.: Foi necessário 5horas.

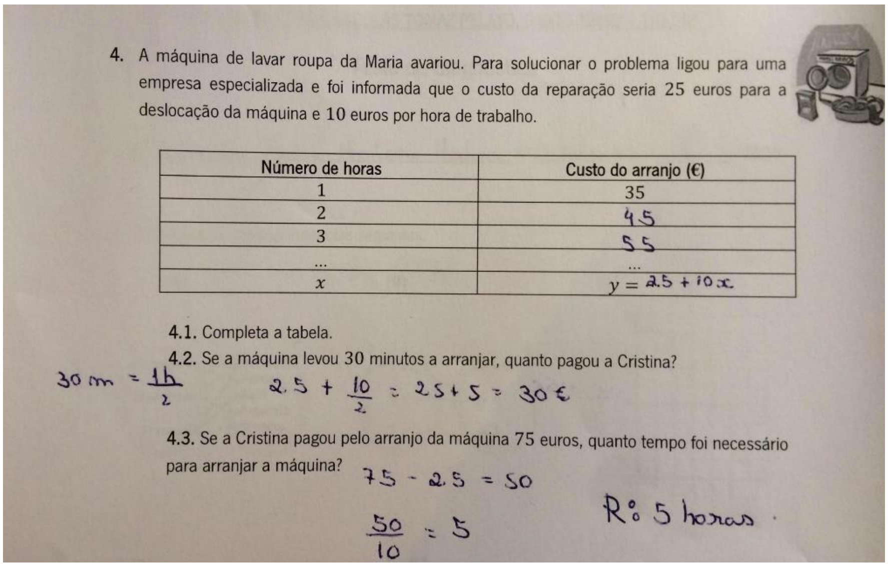
Averiguamos que os alunos na alínea 4.1 verificaram que se numa hora de trabalho a Cristina tinha de pagar dez euros, então em trinta minutos a Cristina pagaria apenas cinco euros. Cada aluno verificou que os vinte e cinco euros da deslocação da máquina são valor fixo. Assim, somaram esse valor aos cinco euros correspondentes aos trinta minutos de arranjo, chegaram à conclusão de que em trinta minutos a Cristina pagaria trinta euros.

Na resolução da alínea 4.2 os alunos optaram por uma espécie de cálculo mental e verificação, a partir da expressão geral obtida na tabela, substituíram a incógnita x, que representa o número de horas, por cinco e verificaram que dava setenta e cinco euros. O aluno A17 começou por indicar o valor a que corresponde uma hora de trabalho e de seguida o valor que corresponde a meia hora de trabalho que era o pedido no exercício e de seguida a partir do cálculo mental e verificação chegou ao resultado.

Na alínea 4.3 a incógnita que se pretendia descobrir era o x, onde era necessário igualar a expressão geral a 75 para descobrir o número de horas. Os alunos A6 e A17 não resolveram a equação explicitamente, mas conseguiram chegar ao resultado pretendido. Verifica-se que atribuíram um valor ao número de horas, desenvolveram os cálculos e chegaram ao valor 75. Assumiram assim, depois de descoberto o 75 que a incógnita x que pretendiam encontrar era 5 horas.

Observemos agora a resolução deste mesmo problema pelo aluno A19, figura 4, onde é possível encontrar uma resolução organizada, clara e correta.

Figura 4: Resolução do problema da máquina de lavar roupa, pelo aluno A19.



4. A máquina de lavar roupa da Maria avariou. Para solucionar o problema ligou para uma empresa especializada e foi informada que o custo da reparação seria 25 euros para a deslocação da máquina e 10 euros por hora de trabalho.

Número de horas	Custo do arranjo (€)
1	35
2	45
3	55
...	...
x	$y = 25 + 10x$

4.1. Completa a tabela.

4.2. Se a máquina levou 30 minutos a arranjar, quanto pagou a Cristina?

$30\,m = \frac{1h}{2}$ $\quad 25 + \frac{10}{2} = 25 + 5 = 30\,€$

4.3. Se a Cristina pagou pelo arranjo da máquina 75 euros, quanto tempo foi necessário para arranjar a máquina?

$75 - 25 = 50$

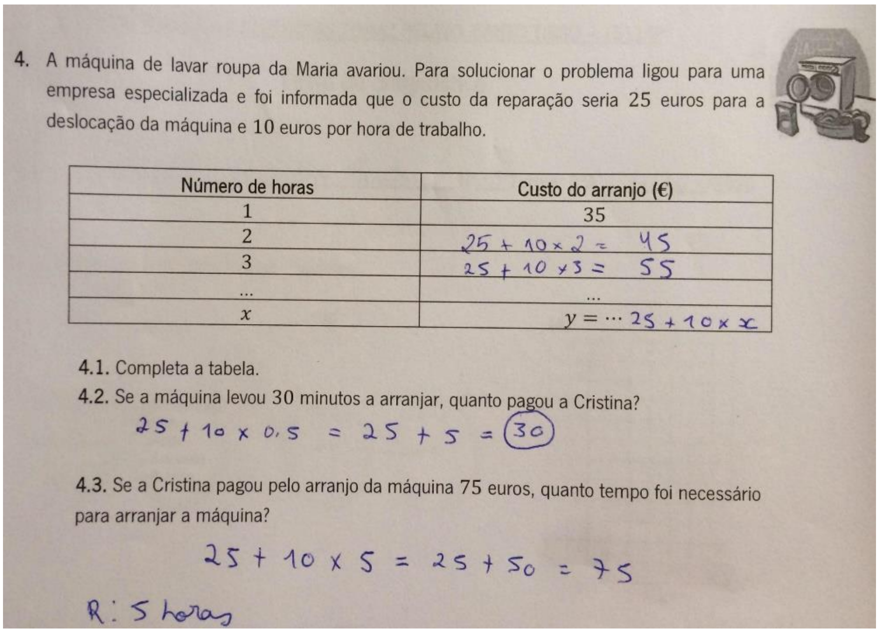
$\frac{50}{10} = 5$

R: 5 horas.

Verificamos que a tabela está completa sem qualquer erro. Na alínea 4.2 o aluno começa por indicar que trinta minutos corresponde a metade de uma hora, chegando assim ao resultado correto. Já na alínea 4.3 escolhe um método de resolução completamente diferente dos apresentados anteriormente, podemos considerar que o raciocínio está a ser trabalhado do fim para o princípio. Começa por ir aos setenta e cinco euros e retirar os vinte e cinco euros que correspondem ao valor cobrado pela deslocação, obtendo assim cinquenta euros. Sabendo que cada hora de trabalho corresponde a dez euros, o aluno divide os cinquenta euros pelos dez euros e obtém assim que foram necessárias cinco horas para arranjar a máquina.

Por fim, averiguemos a resolução do aluno A15, figura 5.

Figura 5: Resolução do problema da máquina de lavar roupa, pelo aluno A15.



4. A máquina de lavar roupa da Maria avariou. Para solucionar o problema ligou para uma empresa especializada e foi informada que o custo da reparação seria 25 euros para a deslocação da máquina e 10 euros por hora de trabalho.

Número de horas	Custo do arranjo (€)
1	35
2	$25 + 10 \times 2 = 45$
3	$25 + 10 \times 3 = 55$
...	...
x	$y = \cdots 25 + 10 \times x$

4.1. Completa a tabela.

4.2. Se a máquina levou 30 minutos a arranjar, quanto pagou a Cristina?

$25 + 10 \times 0{,}5 = 25 + 5 = 30$

4.3. Se a Cristina pagou pelo arranjo da máquina 75 euros, quanto tempo foi necessário para arranjar a máquina?

$25 + 10 \times 5 = 25 + 50 = 75$

R: 5 horas

Através da observação da resolução da alínea 4.1 o aluno exprime os cálculos para chegar à expressão geral. É evidente que o enunciado foi interpretado de forma correta, conseguindo construir as expressões respetivas para cada número de horas de trabalho de forma a obter o custo do arranjo.

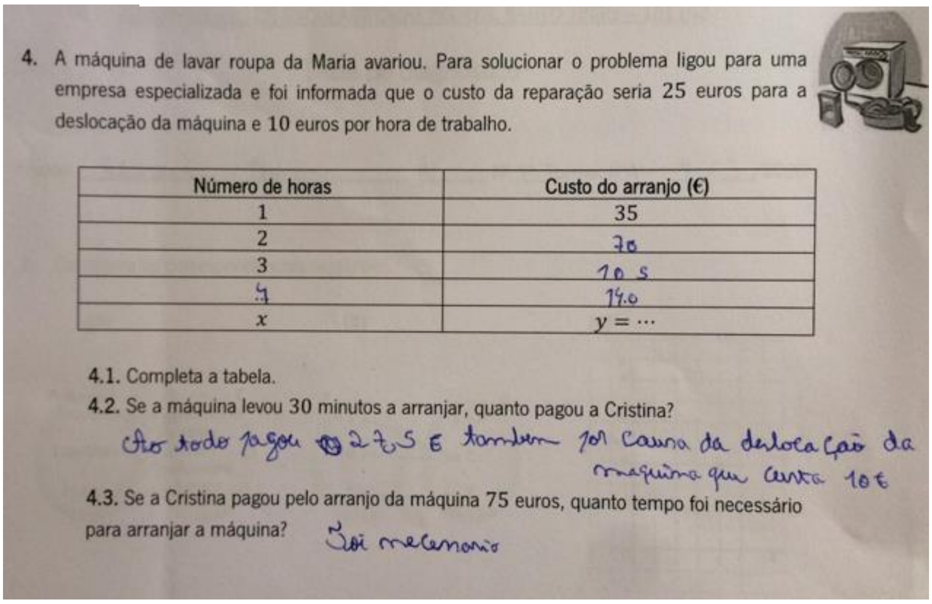
Nas alíneas 4.2 e 4.3 recorre também à expressão geral, substituindo o valor da incógnita x e obtendo assim respostas corretas, no entanto, não apresenta o processo seguido. Na alínea 4.2 o aluno não indica a resposta, apenas calcula o valor da expressão que obteve, mas não conclui, nem indica nenhuma resposta relacionada com o exercício, circulou o número revelando que compreendeu, mas sem o explicitar. As expressões preenchidas são mais uma verificação do que uma resolução.

Dificuldades dos alunos na resolução do problema

Na análise das resoluções dos alunos foram detetadas dificuldades na *compreensão do enunciado* do problema, na *escolha de um plano* para desenvolver o mesmo e na *execução* desse mesmo plano. De seguida, apresentam-se resoluções que exemplificam essas dificuldades, da figura 6 à figura 8.

Resolução do aluno A1, figura 6.

Figura 6: Resolução do problema da máquina de lavar roupa, pelo aluno A1.



4. A máquina de lavar roupa da Maria avariou. Para solucionar o problema ligou para uma empresa especializada e foi informada que o custo da reparação seria 25 euros para a deslocação da máquina e 10 euros por hora de trabalho.

Número de horas	Custo do arranjo (€)
1	35
2	70
3	10 5
4	14.0
x	$y = \cdots$

4.1. Completa a tabela.

4.2. Se a máquina levou 30 minutos a arranjar, quanto pagou a Cristina?

Ao todo pagou 27,5 € também por causa da delocação da máquina que custa 10 €

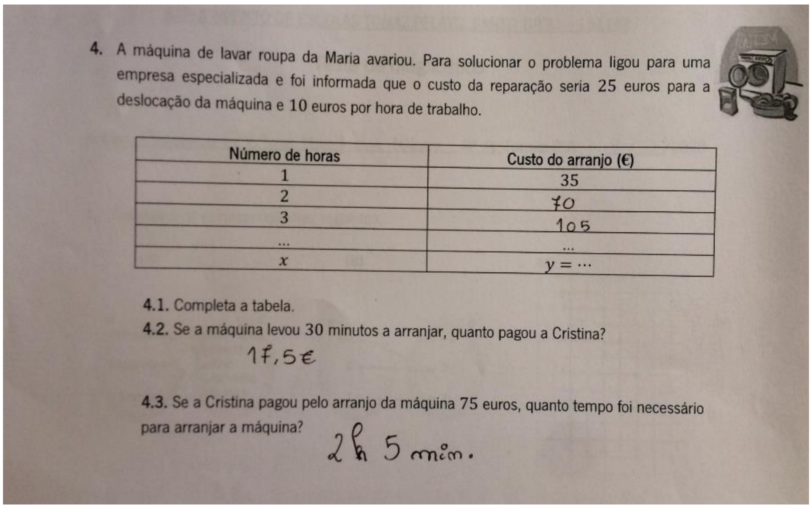
4.3. Se a Cristina pagou pelo arranjo da máquina 75 euros, quanto tempo foi necessário para arranjar a máquina?

Foi [illegible]

O aluno A1 manifestou várias dificuldades na resolução do problema. Denota-se que não compreendeu o enunciado, o que podemos verificar na resolução que apresentou, visto que considerou que uma hora de trabalho são trinta e cinco euros, para duas horas de trabalho multiplicou o trinta e cinco por dois, para três horas de trabalho multiplicou o trinta e cinco por três e assim sucessivamente, esquecendo que a deslocação era um valor fixo. Já na alínea 4.2 o aluno voltou a seguir a mesma lógica e como trinta minutos corresponde a metade de uma hora, foi ao custo do arranjo da máquina quando demora uma hora e dividiu por dois, obteve assim 17,5 euros e como o custo de deslocação é de dez euros, somou esse valor obtendo assim os 27,5 euros indicados. O aluno assume aqui o valor da deslocação, apesar de o trocar.

Verifiquemos de seguida mais duas resoluções que demonstram muitas dificuldades no processo de resolução para chegar ao resultado, figuras 7 e 8.

Figura 7: Resolução do problema da máquina de lavar roupa, pelo aluno A3.



4. A máquina de lavar roupa da Maria avariou. Para solucionar o problema ligou para uma empresa especializada e foi informada que o custo da reparação seria 25 euros para a deslocação da máquina e 10 euros por hora de trabalho.

Número de horas	Custo do arranjo (€)
1	35
2	70
3	105
…	…
x	$y = \cdots$

4.1. Completa a tabela.

4.2. Se a máquina levou 30 minutos a arranjar, quanto pagou a Cristina?

17,5€

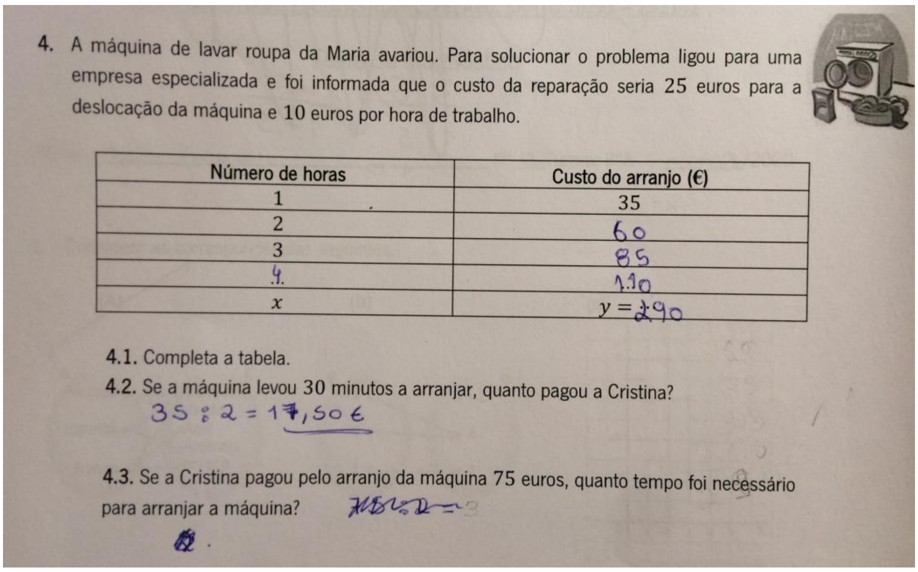
4.3. Se a Cristina pagou pelo arranjo da máquina 75 euros, quanto tempo foi necessário para arranjar a máquina?

2h 5 min.

O aluno A3 na alínea 4.1 seguiu o mesmo raciocínio que o aluno A1. Já na alínea 4.2 pensou que por uma hora de trabalho a Cristina paga trinta e cinco euros, então por meia hora, limitou-se a dividir o custo por dois, sem ter atenção que independentemente das horas de trabalho a Cristina teria obrigatoriamente de pagar vinte e cinco euros pela deslocação da máquina.

Já na alínea 4.3 tentou através da observação da tabela ver onde se situavam os setenta e cinco euros e assim dizer que o arranjo demorou duas horas e cinco minutos, mas não explica como chegou a esse valor. Provavelmente, como 2 horas correspondem a 70€, o aluno assume que é 75€ porque foram mais 5 minutos.

Figura 8: Resolução do problema da máquina de lavar roupa, pelo aluno A13.



4. A máquina de lavar roupa da Maria avariou. Para solucionar o problema ligou para uma empresa especializada e foi informada que o custo da reparação seria 25 euros para a deslocação da máquina e 10 euros por hora de trabalho.

Número de horas	Custo do arranjo (€)
1	35
2	60
3	85
4.	110
x	$y = 290$

4.1. Completa a tabela.

4.2. Se a máquina levou 30 minutos a arranjar, quanto pagou a Cristina?

35 : 2 = 17,50 €

4.3. Se a Cristina pagou pelo arranjo da máquina 75 euros, quanto tempo foi necessário para arranjar a máquina?

Na figura 8 observamos a resolução do aluno A13, que permite perceber que há um valor fixo e outro em função do número de horas. Nota-se que o seu raciocínio foi congruente pois utilizou um esquema do género do que é apresentado de seguida, para encontrar o valor do custo do arranjo.

Se $x = 1$ → 25+10= 35

Se $x = 2$ ⟶ 50+10=60

Se $x = 3$ ⟶ 75+10=85

Se $x = 4$ ⟶ 100+10=110

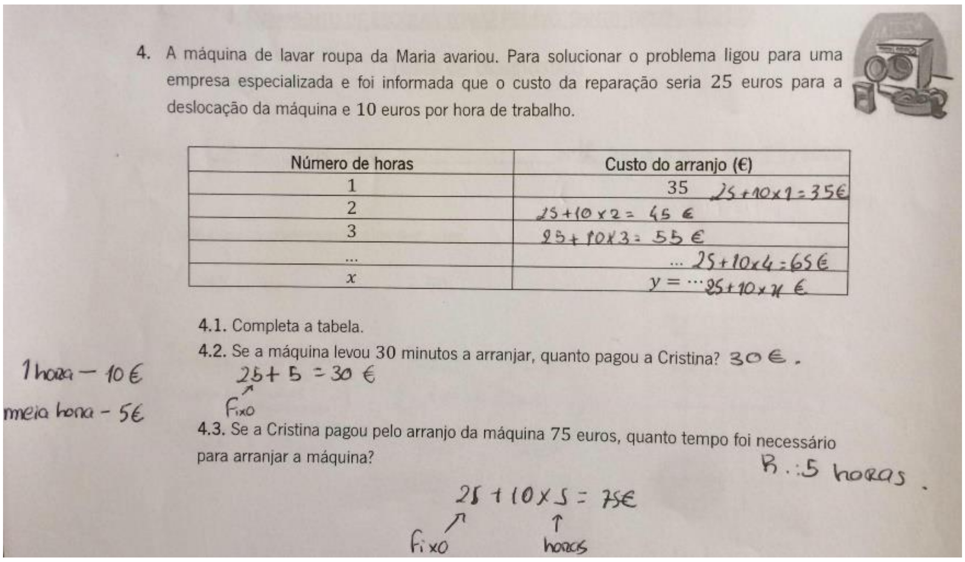
Seguindo a mesma lógica, quando o aluno conclui que o custo do arranjo é 290€, deverá ter realizado 280+10=290. Já na alínea 4.2 o aluno pensou como o colega A3.

Comunicação escrita dos alunos na apresentação da resolução do problema

A análise da comunicação escrita começa pela compreensão do problema, por parte dos alunos. Praticamente 50% dos alunos compreenderam o que era pedido e recolheram devidamente a informação, enquanto que os restantes revelaram muitas dificuldades na compreensão do enunciado, tendo alguns deixado a resposta em branco.

Podemos verificar um exemplo, presente na figura 9, onde o aluno reescreveu os dados recolhidos com a sua própria linguagem.

Figura 9: Resolução do problema da máquina de lavar roupa, pelo aluno A12.



4. A máquina de lavar roupa da Maria avariou. Para solucionar o problema ligou para uma empresa especializada e foi informada que o custo da reparação seria 25 euros para a deslocação da máquina e 10 euros por hora de trabalho.

Número de horas	Custo do arranjo (€)
1	35 25+10×1=35€
2	25+10×2= 45 €
3	25+10×3= 55 €
...	... 25+10×4=65€
x	$y =$ ··· 25+10×x €

4.1. Completa a tabela.

4.2. Se a máquina levou 30 minutos a arranjar, quanto pagou a Cristina? 30 € .

1 hora – 10 €

meia hora – 5€

25+ 5 = 30 €

Fixo

4.3. Se a Cristina pagou pelo arranjo da máquina 75 euros, quanto tempo foi necessário para arranjar a máquina?

R.: 5 horas .

25 + 10 × 5 = 75€

Fixo

horas

Na figura, verifica-se que o aluno A12 ao completar a tabela não se limitou a colocar os resultados, tendo explicado o processo que realizou. Nas outras alíneas também tentou explicitar o processo de resolução que ajudou a chegar ao resultado.

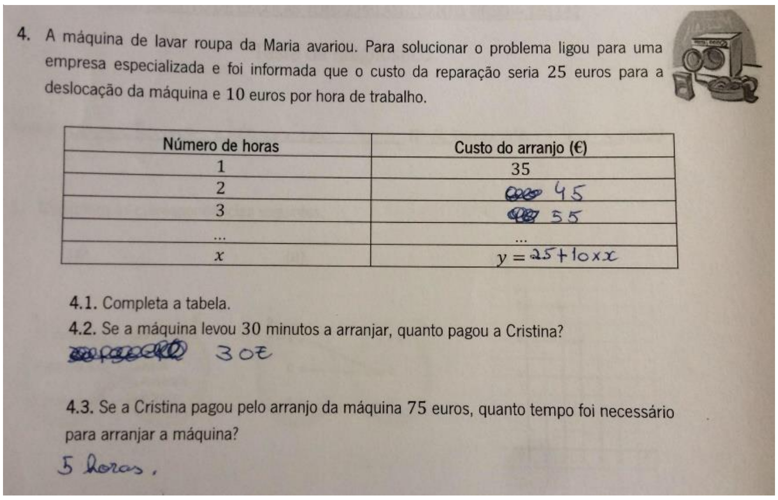
Classificação das respostas

Relativamente à classificação das respostas apresentadas na alínea 4.1 apenas 9 alunos apresentaram uma resposta correta, sendo que essa resposta consistia em apresentar a tabela preenchida corretamente na sua totalidade, na alínea 4.2, 11 alunos apresentaram uma resposta correta: "A Cristina pagou trinta euros", e na alínea 4.3, 10 alunos apresentaram uma resposta correta: "Foram necessárias cinco horas para arranjar a máquina". Entre as respostas para a alínea 4.2, cinco alunos responderam que a Cristina pagou 17,50 euros (figuras 7 e 8) e um aluno escreveu que a Cristina pagou 27,50 euros (figura 6), os restantes não responderam. Em relação à alínea 4.3, 3 alunos responderam que foram necessárias duas horas e cinco minutos para o arranjo da máquina (figura 7) e os restantes não responderam.

Verifiquemos agora o nível de *explicitação das respostas dos alunos*. Alguns alunos conseguem explicar de forma clara o processo que realizaram para chegar ao resultado, mas isso não é um processo fácil para todos, principalmente quando interpretam mal e são levados a resolver, mesmo que de uma forma errada. Na figura 5 e na figura 9, os alunos deixaram claro qual foi o seu raciocínio através da apresentação de todos os cálculos.

No entanto, tal não acontece na resposta apresentada na figura 10, onde o aluno se limita a apresentar os resultados não apresentando qualquer justificação para os mesmos.

Figura 10: Resolução do problema da máquina de lavar roupa, pelo aluno A8.



4. A máquina de lavar roupa da Maria avariou. Para solucionar o problema ligou para uma empresa especializada e foi informada que o custo da reparação seria 25 euros para a deslocação da máquina e 10 euros por hora de trabalho.

Número de horas	Custo do arranjo (€)
1	35
2	45
3	55
...	...
x	$y = 25 + 10 \times x$

4.1. Completa a tabela.

4.2. Se a máquina levou 30 minutos a arranjar, quanto pagou a Cristina?

30€

4.3. Se a Cristina pagou pelo arranjo da máquina 75 euros, quanto tempo foi necessário para arranjar a máquina?

5 horas.

Neste caso, o aluno limita-se a indicar os resultados sem apresentar os cálculos que efetuou para obter tais valores. É necessário que explicite o seu raciocínio, fundamentando todas as suas respostas. Sem que isso aconteça, qualquer pessoa que visualize esta resolução não consegue entender de onde vieram tais respostas.

No *Quadro 4* são apresentadas frequências dos tipos de resposta relativas ao problema da tarefa "Máquina de lavar roupa".

Quadro 4: *Frequências dos tipos de resposta dos alunos ao problema da tarefa "Máquina de lavar roupa"*

	Tipos de resposta			
Alíneas	**Correta**	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não responde**
4.1.	9	3	9	1
4.2.	11	0	10	1
4.3.	10	0	7	5

4.2. Tarefa da "Viagem de automóvel"

O segundo problema a ser analisado foi a viagem de automóvel, onde podemos observar uma viagem entre as cidades de Coimbra e Porto, passando por Albergaria.

Figura 11: Problema da viagem de automóvel

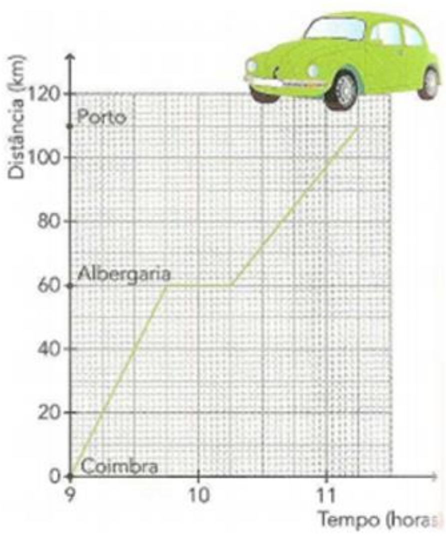
5. O gráfico mostra a viagem de um automóvel entre Coimbra e Porto, passando por Albergaria.

   a) Onde estava o automóvel às 9 horas? E às $10h05$?

   b) Quanto tempo esteve o automóvel parado em Albergaria?

   c) Qual a distância entre Coimbra e Albergaria? E entre Coimbra e Porto?

   d) Quanto tempo demorou a viagem?



Estratégias desenvolvidas pelos alunos na resolução da tarefa

Todos os alunos resolveram o exercício proposto por observação do gráfico. Vejamos nas figuras 12 e 13 em que se apresenta a resolução de dois alunos, A17 e A19, globalmente corretas. O aluno A17 tem o cuidado de apresentar respostas completas, no entanto o aluno A19 limita-se a escrever apenas o resultado.

Figura 12: Resolução do problema da viagem de automóvel, pelo aluno A17.

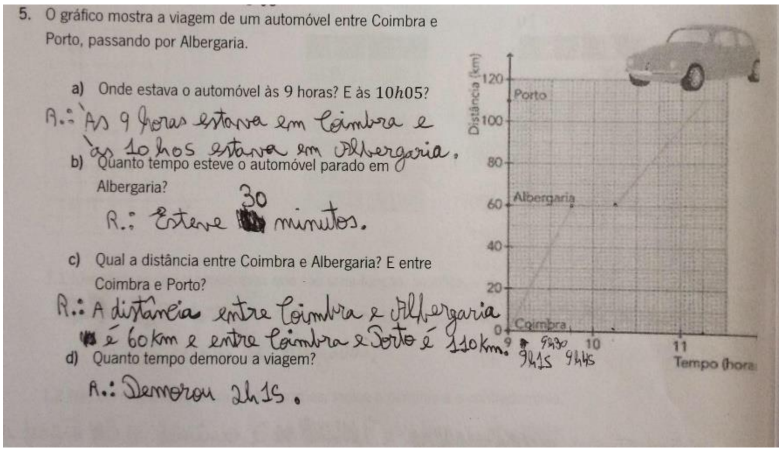
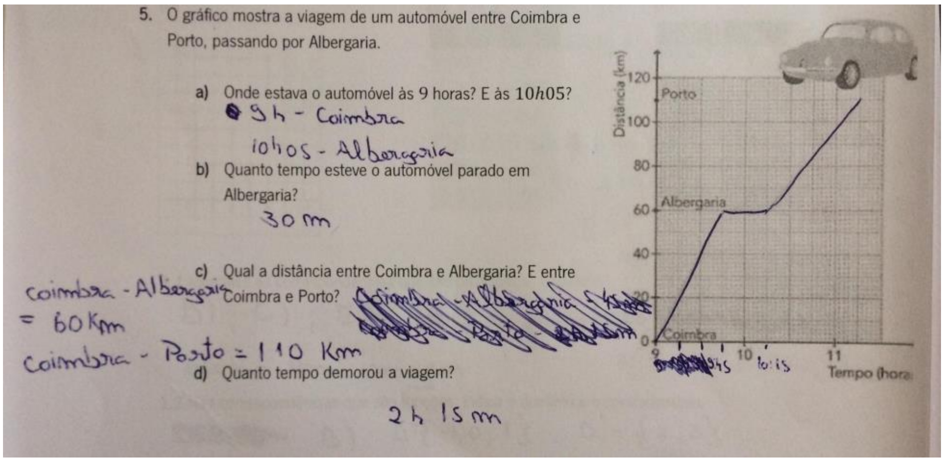


Figura 13: Resolução do problema da viagem de automóvel, pelo aluno A19.



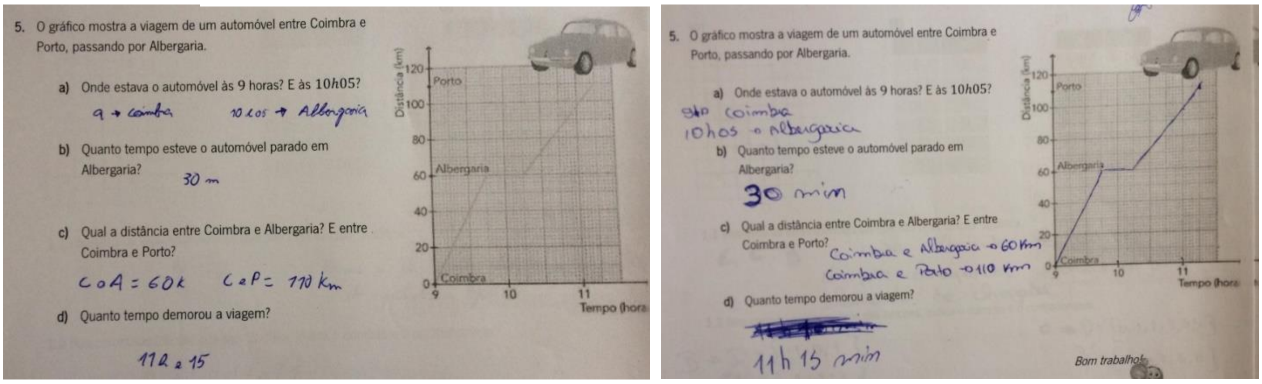
Os gráficos são representações de dados com o objetivo de destacar informações de maneira a que fique mais fácil a sua compreensão. O aluno deve em primeiro lugar conferir se as informações do gráfico estão relacionadas com as informações do enunciado do exercício, o que se verifica que aconteceu. Os alunos A17 e A19 conseguiram interpretar o gráfico dado e assim responder às questões. Aparentemente, através da leitura do gráfico foi fácil para estes alunos perceber onde estava o automóvel em diferentes horas e qual o intervalo de tempo em que esteve parado.

Dificuldades dos alunos na resolução da tarefa

Na análise das resoluções dos alunos, foram detetadas dificuldades na interpretação do gráfico, que condicionam as questões apresentadas posteriormente.

Os alunos A16 e A14 revelaram dificuldades, como podemos observar na figura 14.

Figura 14: Resolução do problema da viagem de automóvel, pelos alunos A16 e A14.



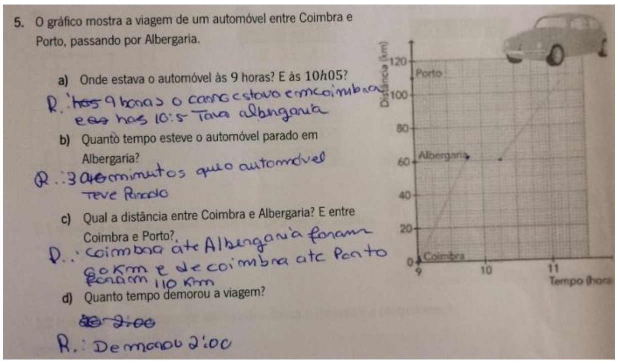
Os alunos A16 e A14 têm as três primeiras alíneas corretas, já na alínea d) apesar de terem colocado a mesma resposta, esta está errada. Podem ter-se esquecido que o tempo começa nas 9 horas e não nas 0 horas, o que condicionou o resultado apresentado, ou então podem ter atribuído outro significado ao eixo das abcissas.

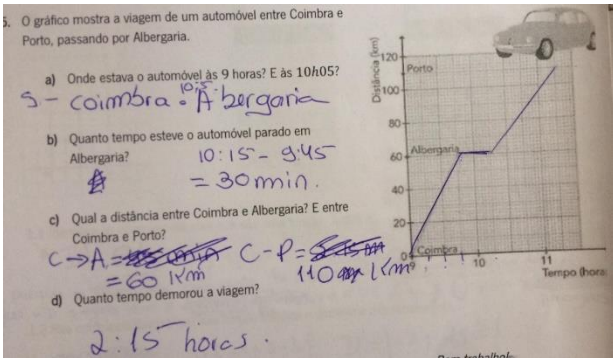
Comunicação escrita dos alunos na apresentação da resolução do problema

A análise deste problema consistiu na compreensão e interpretação de um gráfico, por parte do aluno, e consequentemente na descrição, detalhes e informação aquando apresenta a sua resposta. A maioria dos alunos consegue interpretar a informação destacada no eixo das ordenadas e no eixo das abcissas.

Na figura 15 apresentam-se mais duas resoluções, dos alunos A6 e A21, que evidenciam algumas falhas na notação escrita e na interpretação gráfica.

Figura 15: Resolução do problema da viagem de automóvel, pelos alunos A6 e A21.





Na resolução da alínea a) os alunos escreveram 10:5 em vez de 10:05 o que deverá corresponder a 10h e 5m. Trata-se, assim, de falha na notação escrita e não de compreensão da questão ou interpretação do gráfico.

No decorrer da análise das respostas dos alunos, é notório que muitos possuem várias dificuldades associadas ao conceito de funções e interpretação gráfica. Na leitura de um gráfico, o aluno deve compreender o que representam todas as variáveis e a escala utilizada, de modo a compreender todas as informações apresentadas. Na resolução da alínea d) é possível verificar que alguns alunos tiveram dificuldade em fazer a leitura da informação destacada no eixo das abcissas, que representava os valores do tempo em horas.

Verifica-se em algumas das resoluções que consideraram o ponto inicial como sendo as 0 horas e não as 9 horas, o que demonstra dificuldades em converter o registo gráfico em registo natural ou em registo simbólico, tal como podemos observar, por exemplo, pelas respostas apresentadas na alínea d) da figura 15.

No *Quadro 5*, podem observar-se as frequências dos tipos de resposta relativas ao problema da viagem de automóvel. Este problema partia da observação gráfica onde se representava uma viagem de automóvel entre as cidades de Coimbra e Porto, passando por Albergaria. Verifica-se que nas alíneas apresentadas ainda se obtêm várias respostas incorretas, o que mais uma vez evidencia que os alunos têm muita dificuldade na interpretação gráfica.

Quadro 5: *Frequências dos tipos de resposta dos alunos ao problema da tarefa "Viagem de automóvel"*

	Tipos de resposta			
Alíneas	**Correta**	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não responde**
a)	17	1	3	1
b)	10	1	10	1
c)	15	5	1	1
d)	8	2	11	1

4.3. Tarefa do "Consumo de água"

A análise dos resultados obtidos relativamente à tarefa do consumo de água, segue uma estrutura semelhante à apresentada nas tarefas anteriores. Esta tarefa foi proposta na aula imediatamente após ter sido lecionado o conceito de gráficos de funções afins.

Na aula foi proposto um problema (tarefa 3 do anexo)

Figura 16: Tarefa do consumo de água

A Ana e o João vivem em localidades diferentes e o custo mensal do consumo de água da rede pública, em cada uma dessas localidades, é calculado como a seguir se indica.

Na localidade da Ana

Taxa fixa mensal: 14€

Preço de cada m^3 de água: 0,80€

Na localidade do João

Taxa fixa mensal: 20€

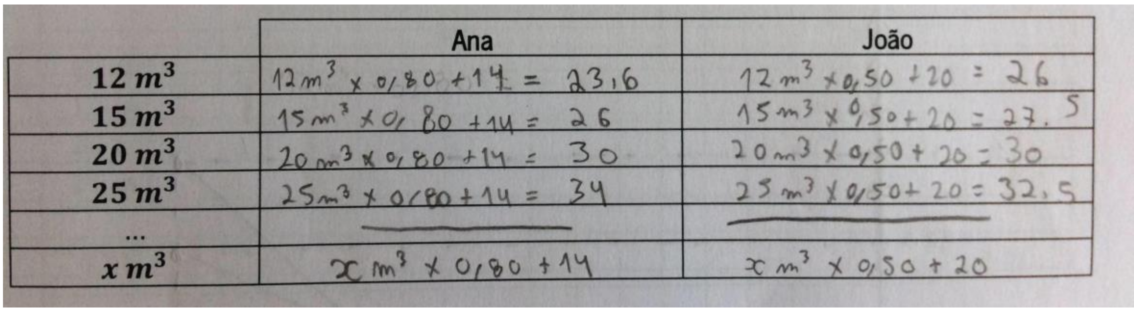
Preço de cada m^3 de água: 0,50€

1. Determina o preço a pagar pela Ana e pelo João se o consumo mensal de cada um deles for:

	Ana	**João**
$\mathbf{12\ m^3}$		
$\mathbf{15\ m^3}$		
$\mathbf{20\ m^3}$		
$\mathbf{25\ m^3}$		
…		
$\mathbf{x\ m^3}$		

Verifiquemos de seguida o exemplo de uma resposta correta.

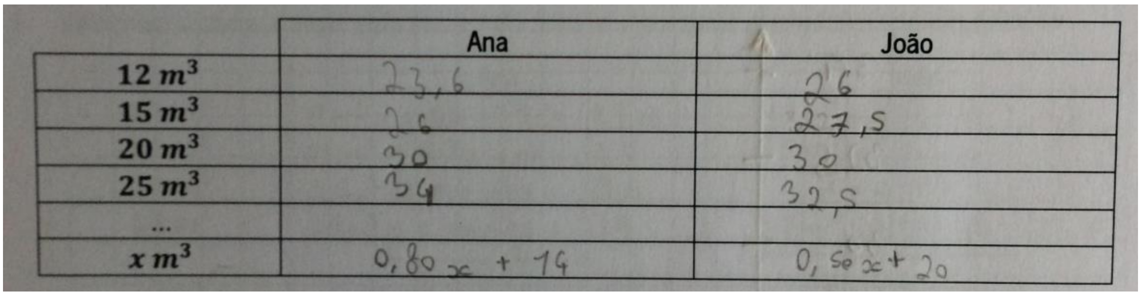
Figura 17: Resolução da questão 1 da tarefa do consumo de água, pelo aluno A15.



	Ana	João
$12\ m^3$	$12 m^3 \times 0,80 + 14 = 23,6$	$12 m^3 \times 0,50 + 20 = 26$
$15\ m^3$	$15 m^3 \times 0,80 + 14 = 26$	$15 m^3 \times 0,50 + 20 = 27,5$
$20\ m^3$	$20 m^3 \times 0,80 + 14 = 30$	$20 m^3 \times 0,50 + 20 = 30$
$25\ m^3$	$25 m^3 \times 0,80 + 14 = 34$	$25 m^3 \times 0,50 + 20 = 32,5$
…		
$x\ m^3$	$x\ m^3 \times 0,80 + 14$	$x\ m^3 \times 0,50 + 20$

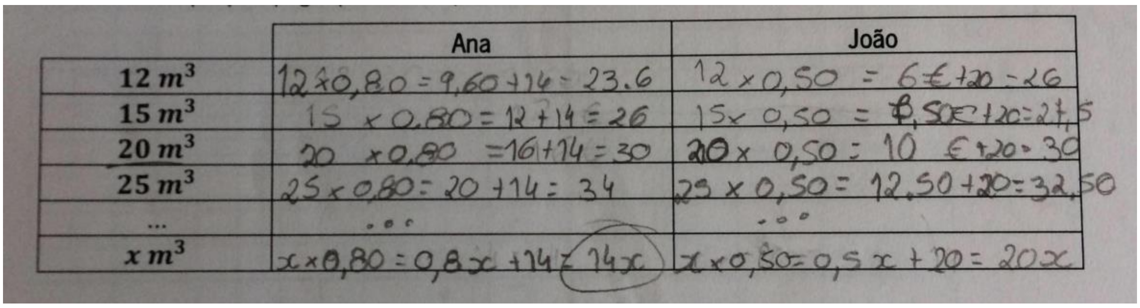
O aluno A15 (figura 17) conseguiu determinar corretamente, indicando todos os cálculos realizados, o preço que a Ana e o João pagam pelos vários consumos de água indicados. Chegou, ainda, ao caso geral. Alguns alunos, apesar de calcularem corretamente os vários consumos de água, revelaram dificuldades na escrita matemática.

Figura 18: Resolução da questão 1 da tarefa do consumo de água, pelo aluno A14.



	Ana	João
$12\ m^3$	23,6	26
$15\ m^3$	26	27,5
$20\ m^3$	30	30
$25\ m^3$	34	32,5
…		
$x\ m^3$	$0,80x + 14$	$0,50x + 20$

Figura 19: Resolução da questão 1 da tarefa do consumo de água, pelo aluno A3.



	Ana	João
$12\ m^3$	$12 \times 0,80 = 9,60 + 14 = 23.6$	$12 \times 0,50 = 6€ + 20 = 26$
$15\ m^3$	$15 \times 0.80 = 12 + 14 = 26$	$15 \times 0,50 = 7,50€ + 20 = 27,5$
$20\ m^3$	$20 \times 0,80 = 16 + 14 = 30$	$20 \times 0,50 = 10€ + 20 = 30$
$25\ m^3$	$25 \times 0,80 = 20 + 14 = 34$	$25 \times 0,50 = 12,50 + 20 = 32,50$
…	…	…
$x\ m^3$	$x \times 0,80 = 0,8x + 14 = 14x$	$x \times 0,50 = 0,5x + 20 = 20x$

O aluno A14 coloca apenas as respostas, não apresentando o processo de resolução. Limitou-se a colocar os valores finais, não explicando como chegou aos resultados, não sendo assim a resposta considerada como correta. O aluno A3 demonstra dificuldade de escrita matemática, já que explica o processo seguido, no entanto, a forma como escreve (em "comboio") está errada. Além disso conclui que $0{,}5x + 20 = 20x$ e $0{,}8x + 14 = 14x$. Chegou à expressão geral e aos valores, mas corretamente deveria apresentar os casos gerais como sendo $0{,}5x + 20$ e $0{,}8x + 14$. Já o aluno A14. As respostas dos alunos A3 e A14 foram consideradas parcialmente corretas.

Por fim, vejamos o exemplo de uma resposta incorreta.

Figura 20: Resolução da questão 1 da tarefa do consumo de água, pelo aluno A10.

	Ana	João
$12\ m^3$	23.6	26
$15\ m^3$	26.02	27.5
$20\ m^3$	30	30.5
$25\ m^3$	34	32.5
...		
$x\ m^3$		

O Aluno A10 (figura 20) limitou-se a colocar os valores na tabela e não concluiu na sua totalidade. Para completar a tabela o aluno deve apresentar os cálculos que realizou para chegar ao resultado. Deveria ser pedido no enunciado que os alunos além de completarem a tabela justificassem com cálculos todos os resultados.

Passemos agora à análise da questão 2 da tarefa do consumo de água, onde se pretende que os alunos escrevam uma expressão analítica do custo em função do consumo de água da Ana e do João.

Figura 21: Questão 2 da tarefa do consumo de água

2. Em cada uma das situações, o custo é função do consumo. Seja x o consumo mensal em metros cúbicos e $f(x)$ e $g(x)$ o custo mensal a pagar (em euros), respetivamente, pela Ana e pelo João.

Indica uma expressão analítica da função:

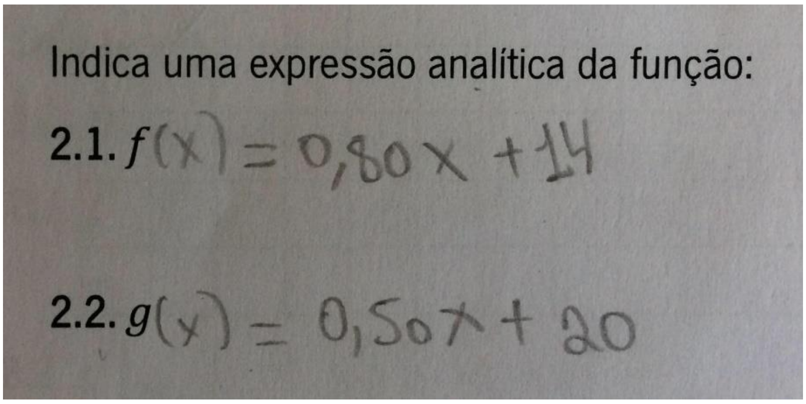
2.1. f

2.2. g

Na questão 2 verificou-se que 21 alunos responderam de forma correta e apenas um dos alunos respondeu de forma incorreta. As respostas consideradas corretas foram iguais à do aluno A17 (figura

22), onde escreveu a expressão analítica da função que representa em cada uma das funções o custo que é função do consumo.

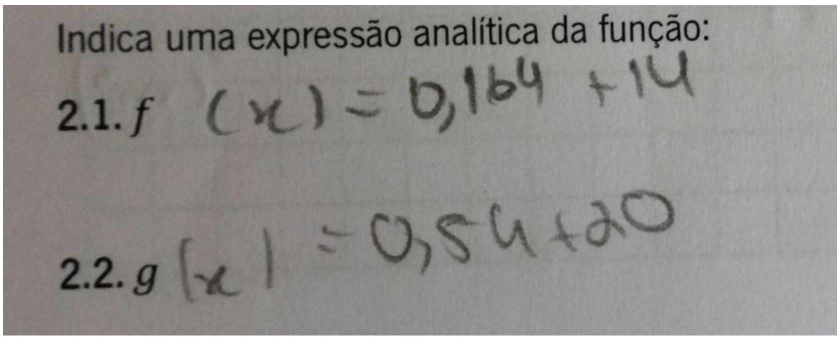
Figura 22:Resolução da questão 2 da tarefa do consumo de água, pelo aluno A17.



No caso da Ana, a taxa fixa mensal era de 14€ e o preço varia consoante os m^3 de água, sabendo que $1m^3$ é 0,80€. O João tem uma taxa fixa mensal de 20€ e o preço de m^3 de água é 0,50€. Assim, sendo x o consumo mensal em metros cúbicos e assumindo $f(x)$ e $g(x)$ o custo mensal a pagar (em euros), respetivamente, pela Ana e pelo João, o custo traduz-se nas expressões analíticas $f(x) = 0{,}80x + 14$ e $g(x) = 0{,}50x + 20$, tal como responderam vários alunos.

Verifiquemos agora a resposta do aluno A18 (figura 22), que não conseguiu obter as expressões analíticas pretendidas.

Figura 23: Resolução da questão 2 da tarefa do consumo de água, pelo aluno A18.



Na função $f(x)$ o aluno apresenta uma soma entre dois valores, sendo que não utiliza a variável x que representa o consumo mensal e que varia ao longo dos meses. Na função $g(x)$ não é muito percetível se indica a resposta pedida ou se teremos de novo apenas a adição de dois valores distintos.

Aparentemente terá cometido o mesmo erro, já que depois de analisada a resposta da questão 1 se verifica que não completou a tabela.

Posteriormente é analisada a questão 3 da tarefa do consumo de água (figura 24), onde se pretende descobrir qual o consumo de água da Ana e o valor a ser pago pelo João, no mês de maio.

Figura 24: Questão 3 da tarefa do consumo de água

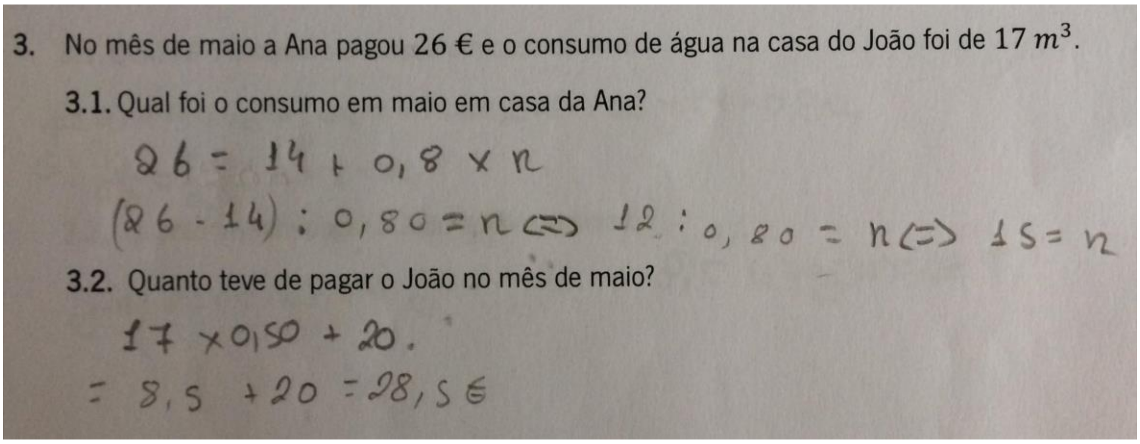
3. No mês de maio a Ana pagou 26 € e o consumo de água na casa do João foi de $17\ m^3$.

3.1. Qual foi o consumo em maio em casa da Ana?

3.2. Quanto teve de pagar o João no mês de maio?

O aluno A5 (figura 25) conseguiu chegar a uma resposta correta nas duas alíneas. Escreveu legivelmente todo o processo de raciocínio utilizado. A obtenção das expressões analíticas das funções ajudou na resolução da questão.

Figura 25: Resolução da questão 3 da tarefa do consumo de água, pelo aluno A5.



3. No mês de maio a Ana pagou 26 € e o consumo de água na casa do João foi de $17\ m^3$.

3.1. Qual foi o consumo em maio em casa da Ana?

$26 = 14 + 0,8 \times n$

$(26 - 14) : 0,80 = n \Leftrightarrow 12 : 0,80 = n \Leftrightarrow 15 = n$

3.2. Quanto teve de pagar o João no mês de maio?

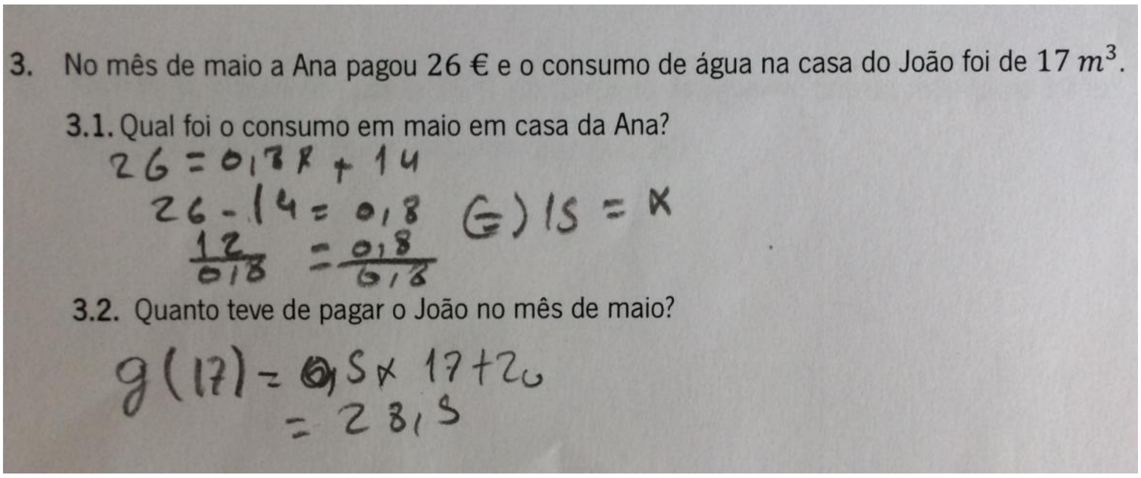
$17 \times 0,50 + 20.$

$= 8,5 + 20 = 28,5$ €

Na questão 3.1 o objetivo é descobrir o consumo mensal feito pela Ana, sendo assim é necessário encontrar o valor da incógnita x sabendo que a Ana pagou 26 euros. Fazendo os cálculos, o aluno A5 obteve que o consumo da Ana foi de $15\ m^3$, valor este que também poderia ser encontrado através da observação da tabela da pergunta 1. Já na alínea 3.2. sabendo que no mês de maio o João consumiu $17m^3$ de água era necessário obter o valor pago por ele. Com recurso novamente à expressão analítica, o aluno A5 substituiu a variável x por 17, e descobriu que o João teve de pagar $28{,}5$ euros.

De seguida é analisada a resolução do aluno A22 (figura 26), que também chega a resultados corretos. Na alínea 3.1 o aluno A22 começa por indicar corretamente a equação que deverá resolver, já a certo momento nos seus cálculos intermédios esqueceu-se da incógnita, mas apresenta o resultado correto. Na alínea 3.2, o aluno A22 já sabia o consumo de água gasto pelo João no mês de maio e recorrendo à função $g(x)$ calculou o valor que teve de pagar.

Figura 26: Resolução da questão 3 da tarefa do consumo de água, pelo aluno A22.



3. No mês de maio a Ana pagou 26 € e o consumo de água na casa do João foi de $17\ m^3$.

3.1. Qual foi o consumo em maio em casa da Ana?

$26 = 0{,}8x + 14$

$26 - 14 = 0{,}8 \Leftrightarrow 15 = x$

$\frac{12}{0{,}8} = \frac{0{,}8}{0{,}8}$

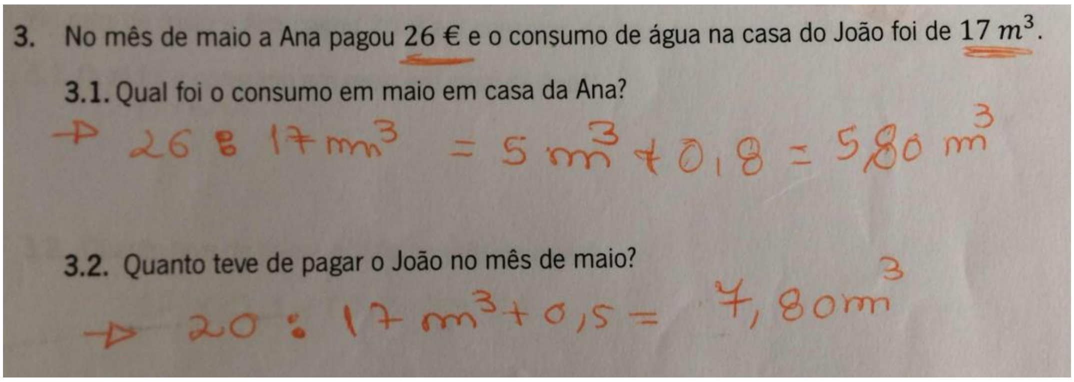
3.2. Quanto teve de pagar o João no mês de maio?

$g(17) = 0{,}5 \times 17 + 20$

$= 28{,}5$

Vejamos agora o caso do aluno A11 (figura 27), onde é evidente que não interpretou corretamente o que era pedido.

Figura 27: Resolução da questão 3 da tarefa do consumo de água, pelo aluno A11



3. No mês de maio a Ana pagou 26 € e o consumo de água na casa do João foi de $17\ m^3$.

3.1. Qual foi o consumo em maio em casa da Ana?

→ $26 : 17\ m^3 = 5\ m^3 + 0{,}8 = 5{,}80\ m^3$

3.2. Quanto teve de pagar o João no mês de maio?

→ $20 : 17\ m^3 + 0{,}5 = 7{,}80\ m^3$

O aluno A11 começou por dividir o valor que a Ana pagou no mês de maio pelo o consumo de água do João nesse mesmo mês e obteve $5m^3$, o que não está correto e de seguida ainda somou $0{,}8$. O aluno não conseguiu perceber o que era pedido e realizou alguns cálculos aleatórios que nenhumas relações têm com aquilo que é pedido.

Já na alínea 3.2 voltou a utilizar nos seus cálculos o consumo de água do João no mês de maio. Os valores 20 e $0{,}5$ não estão relacionados com o pedido. E o resultado da expressão apresentada não está correto.

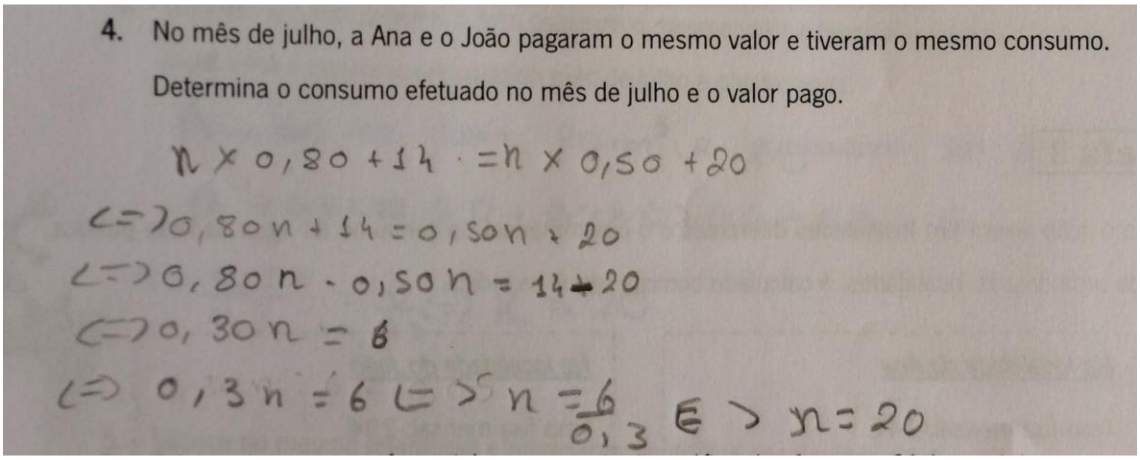
Relativamente à questão 4 da tarefa do consumo de água (figura 28), é pedido que os alunos descubram qual o consumo e o valor pago no mês de julho, sabendo que a Ana e o João pagaram o mesmo valor e tiveram o mesmo consumo.

Figura 28: Questão 4 da tarefa do consumo de água

4. No mês de julho, a Ana e o João pagaram o mesmo valor e tiveram o mesmo consumo. Determina o consumo efetuado no mês de julho e o valor pago.

Na figura 29 é apresentada a resolução do aluno A5 e na figura 30 a resolução do aluno A15, que conseguiram chegar a uma resposta correta por dois processos diferentes.

Figura 29: Resolução da questão 4 da tarefa do consumo de água, pelo aluno A5


4. No mês de julho, a Ana e o João pagaram o mesmo valor e tiveram o mesmo consumo. Determina o consumo efetuado no mês de julho e o valor pago.

$n \times 0{,}80 + 14 = n \times 0{,}50 + 20$

$\Leftrightarrow 0{,}80n + 14 = 0{,}50n + 20$

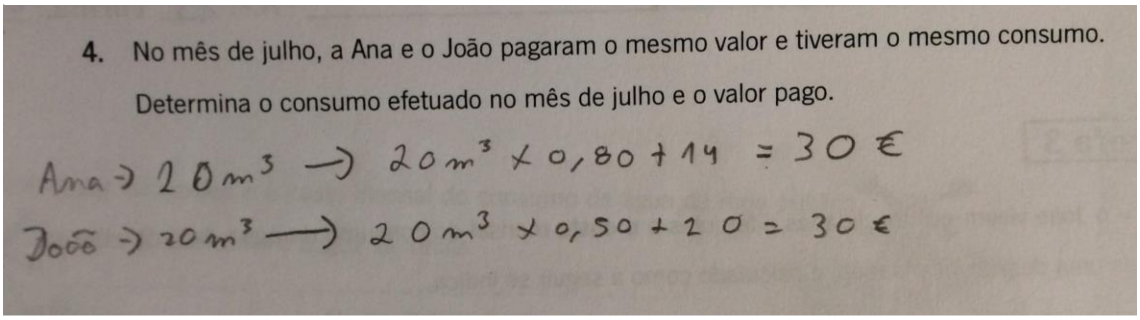
$\Leftrightarrow 0{,}80n - 0{,}50n = 14 + 20$

$\Leftrightarrow 0{,}30n = 6$

$\Leftrightarrow 0{,}3n = 6 \Leftrightarrow n = \frac{6}{0{,}3} \Leftrightarrow n = 20$

O aluno A5 começou por igualar a expressão analítica, que representa o consumo realizado pela Ana, à expressão analítica, que representa o consumo realizado pelo João, e assim, resolver a equação em ordem à incógnita x, descobrindo o consumo efetuado no mês de julho. O aluno A5 (figura 29) não respondeu à segunda parte da questão que pedia para indicar qual foi o valor pago.

Figura 30: Resolução da questão 4 da tarefa do consumo de água, pelo aluno A15.



4. No mês de julho, a Ana e o João pagaram o mesmo valor e tiveram o mesmo consumo.

Determina o consumo efetuado no mês de julho e o valor pago.

Ana → $20 m^3$ → $20 m^3 \times 0,80 + 14 = 30$ €

João → $20 m^3$ → $20 m^3 \times 0,50 + 20 = 30$ €

O aluno A15 (figura 30) verificou, talvez pela observação da tabela da questão 1, que o valor pago pela Ana e pelo João era igual quando o consumo de água dos dois era de $20\ m^3$. Assim, quando consomem $20\ m^3$ de água pagam uma fatura de 30 euros.

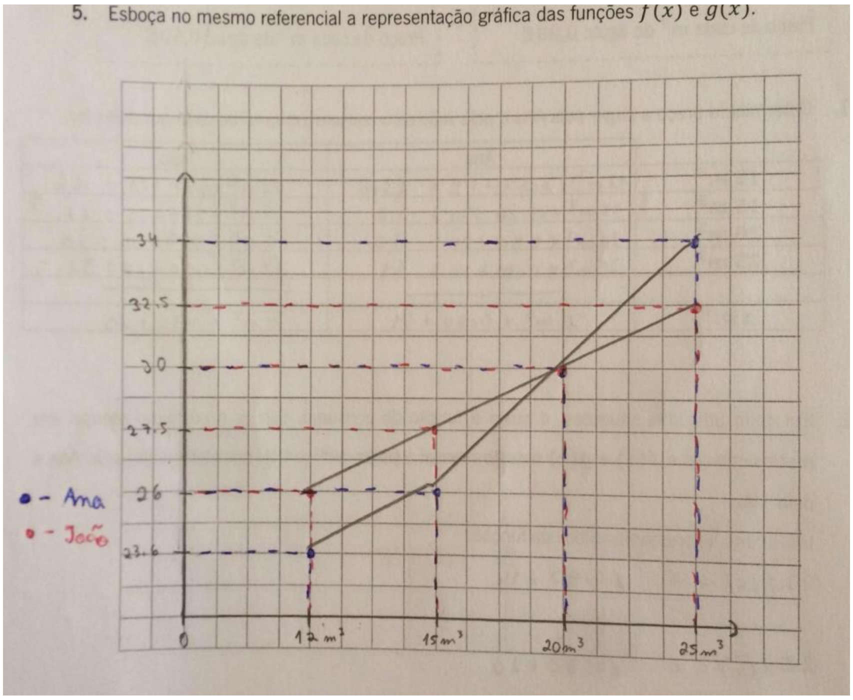
Por fim, a questão 5 (figura 31), última questão da tarefa, foi a que suscitou mais dúvidas, apenas 1 aluno respondeu de forma correta e a maioria dos alunos não respondeu.

Figura 31: Questão 5 da tarefa do consumo de água

5. Esboça no mesmo referencial a representação gráfica das funções $f(x)$ e $g(x)$.

Analisemos a resposta do aluno A15 (figura 32), que foi considerada correta, visto que marcou todos os pontos no referencial, traçando as respetivas retas referentes à Ana e ao João.

Figura 32: Resolução da questão 5 da tarefa do consumo de água, pelo aluno A15.



O aluno retirou as coordenadas dos pontos obtidas na questão 1 quando completou a tabela e marcou esses mesmo pontos no respetivo referencial cartesiano, onde a cor azul representa o consumo mensal a pagar pela Ana e o vermelho representa o consumo mensal a pagar pelo João.

O gráfico de uma função afim é representado sempre por uma reta crescente ou decrescente. O aluno ao unir os pontos que representam o consumo da Ana não obteve uma reta, o que aconteceu porque a escala utilizada não estava desenhada corretamente.

Assim, foi sugerido a todos os alunos que acedessem ao *GeoGebra*, já instalado nos seus telemóveis, e procurassem qual seria a representação das funções f e g. No caderno os alunos desenharam a representação gráfica das funções f e g. Relativamente a essas representações foram construídas algumas questões para os alunos indicarem o coeficiente, o termo independente, se se trata de uma função crescente, decrescente entre outras.

Relativamente à *apresentação e resolução das tarefas*, é possível observar que na sua grande maioria as questões não despoletaram muitas dificuldades. No que diz respeito ao nível de fundamentação das respostas, vários alunos limitaram-se a colocar o resultado sem indicar os cálculos realizados. Os alunos tiveram de recorrer a estratégias como tentativa erro, exploração de casos particulares e desenho de um gráfico. Durante a realização das tarefas o aluno deve ser capaz de exprimir as suas ideias, compreender e refletir sobre as ideias que são apresentadas nas discussões em torno dos processos matemáticos utilizados na resolução. Esses processos de resolução são pensados e, posteriormente, durante a correção, em grupo turma, registados por escrito nos seus cadernos. A dificuldade dos alunos na realização desta tarefa está na interpretação do enunciado, tal como já se teria verificado em momentos anteriores. A resolução desta tarefa foi feita individualmente e todos os alunos responderam. No *Quadro 6* é possível analisar as frequências dos tipos de resposta dos alunos ao problema da tarefa "Consumo de água".

Quadro 6: Frequências dos tipos de resposta dos alunos ao problema da tarefa "Consumo de água"

	Tipos de resposta			
Pergunta	**Correta**	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Não responde**
1	8	13	1	0
2.1	21	0	1	0
2.2	19	0	3	0
3.1	10	9	2	1
3.2	17	0	3	2
4	10	9	2	1
5	1	5	2	14

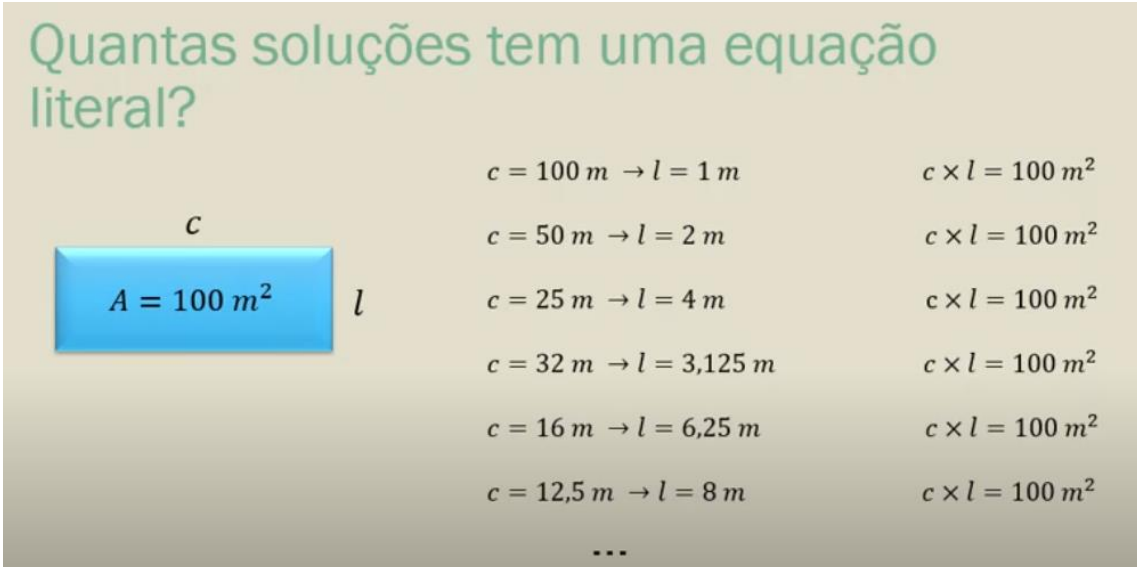
4.4. Tarefa de "Equações literais"

A aula cujo tema foram as "Equações literais" realizou-se no dia 20 de abril de 2020 em regime online, visto que os alunos estavam confinados devido à pandemia de Covid-19. Esta aula teve início com um vídeo sobre o sobre o mesmo tema e que pode ser consultado no link: https://www.youtube.com/watch?v=gJwkE498V8o&feature=emb_logo&ab_channel=DianaAra%C3%BAjo, com o intuito de facilitar a perceção dos alunos acerca deste tema.

Surgiu uma dúvida relativamente a uma parte do vídeo, apresentado na figura 33 e a que se seguiu um diálogo apresentado no episódio seguinte.

Relativamente à situação referida apresenta-se um retângulo, com área igual a $100m^2$, onde c representa o comprimento e l representa a largura. Este exemplo em concreto, permite que os alunos entendam como se descobrem as soluções para uma equação literal.

Figura 33: Imagem do vídeo sobre "Equações Literais"



<u>Episódio:</u>

Aluno A6: Naquela parte em que uma equação literal tinha várias soluções, eu não percebi isso.

Prof: Ok, então, por exemplo tu viste o exemplo daquele retângulo em que nós designávamos por c o comprimento e por l a largura e a área era 100 metros quadrados. Recordas-te?

Aluno A6: Sim, sim.

Prof: Ok, então nós demos o exemplo de quando o comprimento é 100 metros e a largura 1 metro e verificaste. Se calculasses a área.... Como é que calculamos a área do retângulo?

Aluno A6: É o comprimento vezes a largura

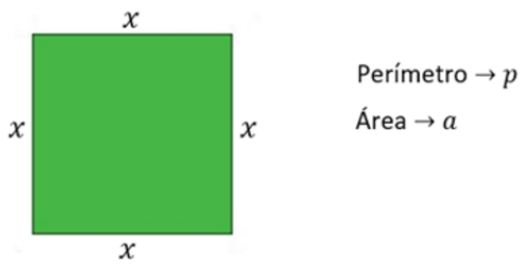
Prof: Comprimento vezes a largura e então se fizéssemos neste caso o comprimento de 100 metros e a largura de 1 metro dava 100 metros quadrados. Mas então tu também poderias considerar o comprimento como sendo 25 metros e a largura como sendo 4 metros. Ao fazer novamente os cálculos verificas que a sua área dá 100 metros quadrados. E poderias assim arranjar mais valores para o comprimento e para a largura. Como está indicado, é possível concluir que existem várias possibilidades para o comprimento e várias possibilidades para a largura. Assim, a equação que representa a área do retângulo irá ter várias soluções, neste caso, infinitas soluções.

Aluno A6: Ah ok, já percebi.

Com este diálogo pretende-se explicar ao aluno que equações literais têm mais do que uma variável, ou seja, têm pelo menos duas incógnitas. Seja $ax + by = c$, com $a, b\ e\ c\ \in\ \mathbb{Q}$, estas podem ter uma infinidade de soluções ou nenhuma no caso de $a = 0, b = 0$ e $c \neq 0$. É um exemplo prático, onde é apresentada uma imagem, para facilitar a visualização e compreender a conclusão. De seguida os alunos passaram para a resolução da ficha de trabalho 3 (Ver anexo). O objetivo desta ficha foi consolidar os conhecimentos adquiridos a partir da visualização do vídeo.

Figura 34: Questão 1 da tarefa de equações literais

1. Um quadrado de lado x tem perímetro p e área a ($p > 0$ e $a > 0$).



1.1. Escreve uma igualdade que represente o perímetro do quadrado.

1.2. Escreve uma igualdade que represente a área do quadrado.

1.3. Existe algum quadrado de perímetro 20 cm e de área 24 cm^2?

Durante a resolução da ficha de trabalho surgiram várias dúvidas que se tornaram complicadas de esclarecer pelo facto de não conseguir escrever a resolução para os alunos. Seguem-se alguns dos diálogos com os alunos.

Aluno A14: Professora, tenho aqui uma dúvida. Não estou a perceber muito bem a $1.1.$ mas eu pus que o p era igual a $2x$+$2x$.

Prof: Ok e agora se somares o $2x$+ $2x$quanto é que dá?

Aluno A14: $4x$

Prof: Pronto e já tens a igualdade que representa o perímetro do quadrado porque somaste todos os lados do quadrado.

Nesta intervenção deveria ter questionado o aluno pelo facto de ter escrito $2x$+$2x$ e não ter colocado logo $4x$. Faria sentido perceber qual o raciocínio que utilizou e porque não somou logo todos os lados.

Aluno A2: Oh professora na $1.2.$ por exemplo fica $a = x \times x$ que a é então igual a $2x$?

Prof: Não. $x \times x$ não dá $2x$. $x + x$ é que dá $2x$. $x \times x$ dá x^2. Sim?

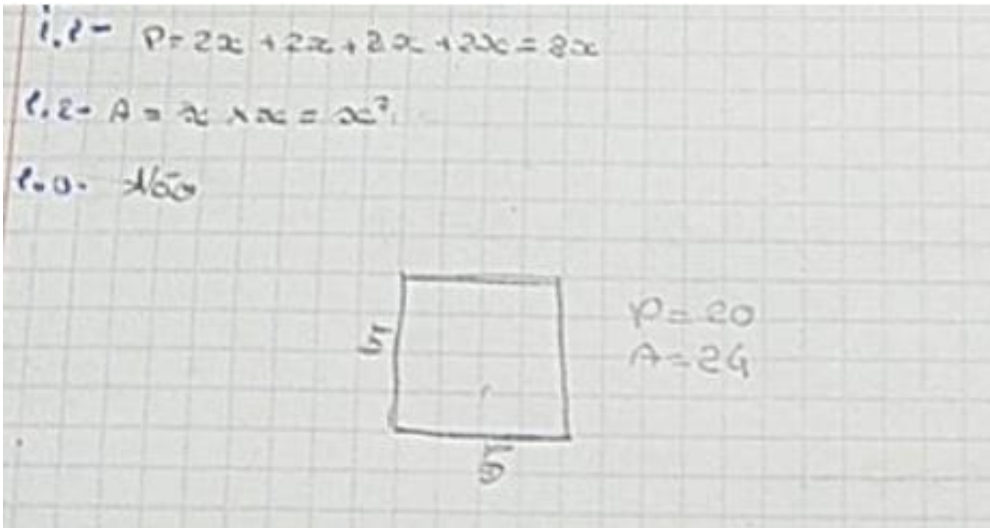
Aluno A2: Oui.

Com esta intervenção deu para perceber que o aluno ainda tem dificuldades em somar e multiplicar variáveis. Este erro é muito frequente nos alunos quando os conteúdos não estão bem consistentes.

Estratégias desenvolvidas pelos alunos na resolução dos exercícios

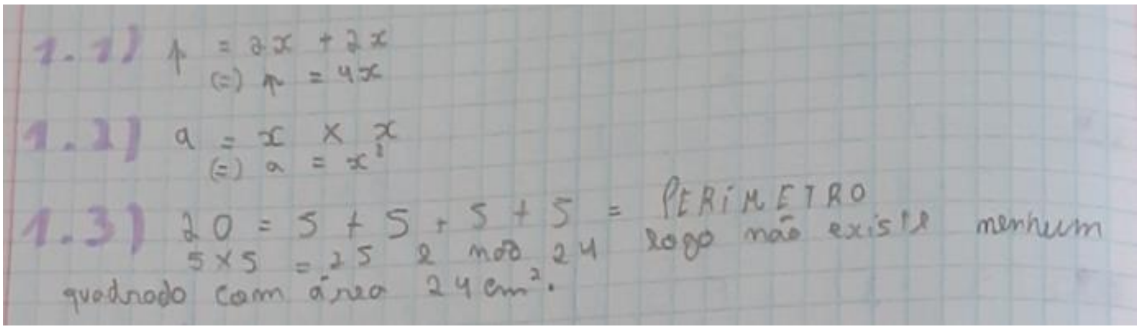
O objetivo do exercício 1 era que os alunos aplicassem conhecimentos adquiridos em anos anteriores, relacionados com perímetros e áreas e ao indicarem a expressão que designa o perímetro e a área da figura apresentada, construíam uma equação.

Figura 35: Resolução da questão 1 da tarefa de equações literais, pelo aluno A7



Na figura 35 o aluno A7 na alínea 1.1. quando lhe é pedido para calcular o perímetro do quadrado faz $2x + 2x + 2x + 2x = 8x$. Este aluno demonstrou dificuldade ao considerar que o lado do quadrado mede $2x\ cm$, o que não está correto. Talvez uma distração fez com que este aluno se enganasse na medida do lado do quadrado, o que afetou o valor do perímetro. Relativamente à alínea 1.2. onde era pedido que calculasse a área, respondeu acertadamente. Por fim, na alínea 1.3. limitou-se a desenhar um quadrado de lado 5, e escrever o valor do perímetro e da área, não justificando detalhadamente porque não era possível existir um quadrado nas condições pedidas.

Figura 36: Resolução da questão 1 da tarefa de equações literais, pelo aluno A15



Na figura 36 o aluno A15, relativamente ao exercício 1, apresenta uma resolução onde em todas as alíneas estão bem organizadas. Nas alíneas 1.1. e 1.2. são apresentados os cálculos necessários para chegar à equação que responde às questões pedidas.

Já na alínea 1.3. o aluno começa por indicar qual o valor do lado do quadrado quando o perímetro é $20cm$. De seguida calcula a área do quadrado com lado $5cm$ e está na posse de concluir que não existe nenhum quadrado nas condições indicadas. O aluno A15 não demonstrou dificuldades na resolução do exercício, tornando a sua resolução de fácil compreensão para apresentar ao professor ou ao grupo turma.

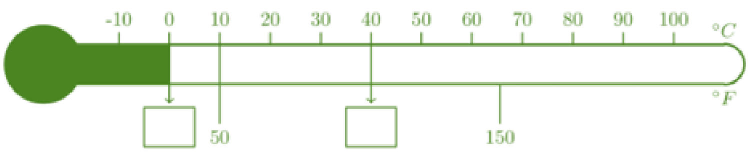
Vejamos agora a figura 37 que é uma tarefa relacionada com as temperaturas em Portugal.

Figura 37: Questão 2 da tarefa de equações literais

2. Em Portugal, para medir a temperatura, utilizam-se termómetros graduados em graus Celsius (°C), mas, por exemplo, em Inglaterra, utiliza-se a graduação em graus Fahrenheit (°F).
Uma fórmula que relaciona os graus Celsius e os graus Fahrenheit é a seguinte:

$$\boldsymbol{F = \frac{9}{5}\,C + 32}$$

2.1. Utilizando a fórmula anterior, calcula, em graus Fahrenheit, a temperatura correspondente a 0°C e 40 °C, preenchendo corretamente os retângulos da figura.



2.2. Calcula, em graus Celsius, o valor da temperatura correspondente a 212 °F. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

2.3. A quantos graus Celsius correspondem 32 °F ?

2.4. E 32 °C a quantos Fahrenheit correspondem?

2.5. Copia a tabela, usando, quando necessário, valores aproximados às décimas.

Temperatura em graus Fahrenheit	**50**		100		**10**
Temperatura em graus Celsius		25		37	

2.6. Resolve a equação $F = \frac{9}{5}\,C + 32$ em ordem a C (ou seja, considerando C como a incógnita e F como uma constante).

Os alunos resolveram individualmente este exercício e à medida que surgiam dúvidas iam questionando. Verifiquemos, de seguida, uma dessas dúvidas:

Aluno A12: Professora tenho dúvidas no 2.6.

Prof: Já começaste a escrever alguma coisa?

Aluno A12: Não.

Prof: Tens de resolver a equação de maneira a que a variável C fique sozinha. Começa por enviar o 32 para o primeiro membro. Como é que vai ficar?

Aluno A12: $F - 32 = \frac{9}{5}\,C$

Prof: E agora o que vais fazer para o C ficar sozinho?

Aluno A12: Passar o $\frac{9}{5}$ a dividir para o outro lado.

Prof: Exatamente. Então vai ficar $(F-32)\colon\frac{9}{5}=C$. E depois?

Aluno A12: $-32 : \frac{9}{5}$

Prof: Não, porque tu tens de ter tudo, tens de ter o $F-32$ dentro de parênteses. Tens de abrir parênteses e colocar $(F-32) : \frac{9}{5}$ e o que podes fazer agora é passar o $(F-32)$ a multiplicar pelo inverso de $\frac{9}{5}$. E então vai ficar $(F-32) \times \frac{5}{9}$

Aluno A12: Mas o $F-32$ tem de continuar dentro de parenteses?

Prof: Sim, sim. Tem de continuar dentro de parenteses.

Aluno A12: Agora fazemos a coisa distributiva?

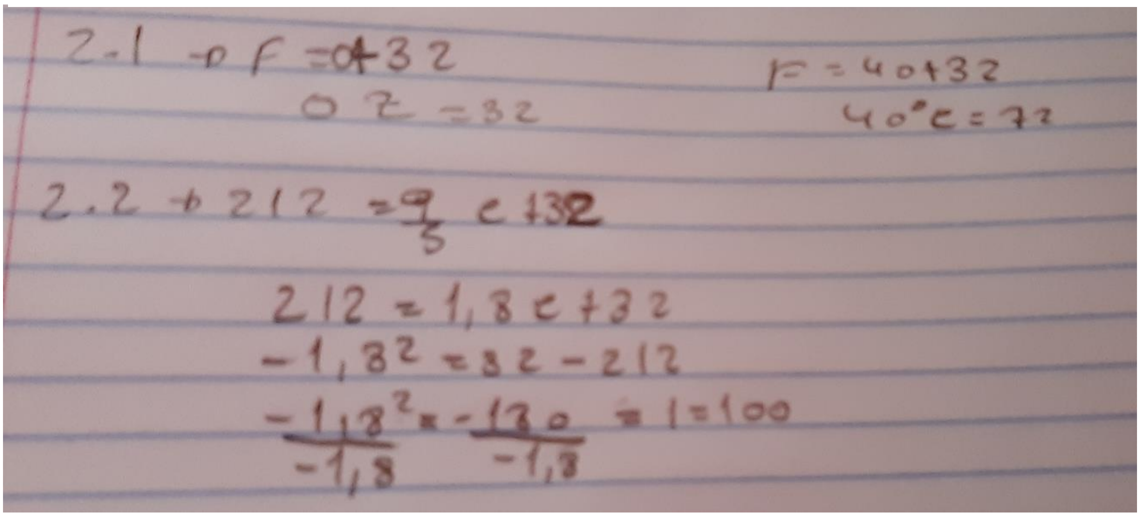
Prof: A propriedade distributiva, sim. Então depois diz-me como é que te deu.

Tal como a este aluno surgiram dúvidas parecidas aos restantes colegas, visto que a resolução estava a ser explicitada por um método mais complicado. Foi então que a professora titular sugeriu reduzir tudo ao mesmo denominador, eliminando de seguida os denominadores e tornando assim a equação mais simples recorrendo a um método mais prático.

De seguida, perante novas próximas dúvidas desta mesma questão a explicação já foi de outra forma, o que sem dúvida tornava a resolução bem mais simples e muito mais percetível pois simplificava os cálculos.

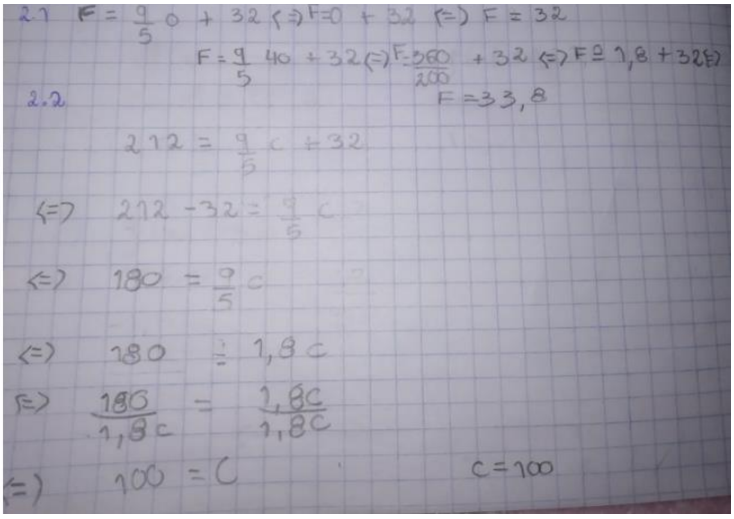
Vejamos agora a figura 38 onde está presente a resolução do aluno A3.

Figura 38: Resolução da questão 2 da tarefa de equações literais, pelo aluno A3



O aluno A3 revela algumas dificuldades na resolução do problema. Estas dificuldades podem estar relacionadas com a interpretação do enunciado, ao não compreender a expressão dada que relaciona os valores da temperatura em graus Celsius e graus Fahrenheit. Na primeira parte da alínea 2.1. o aluno não indica corretamente a temperatura Fahrenheit que corresponde a $0°\text{C}$, uma vez que escreve na sua resolução uma variável z. Ao descobrir a quantos Fahrenheit correspondem $40°\text{C}$, o aluno na expressão ignora o $\frac{9}{5}$, obtendo assim resultado errado. Relativamente à alínea 2.2. começa por indicar corretamente a equação que deverá resolver para encontrar a temperatura pedida, mas a certa altura na sua resolução perde a incógnita C, tendo, portanto, revelado alguma falta de concentração. Vejamos agora na figura 39 a resolução do aluno A6.

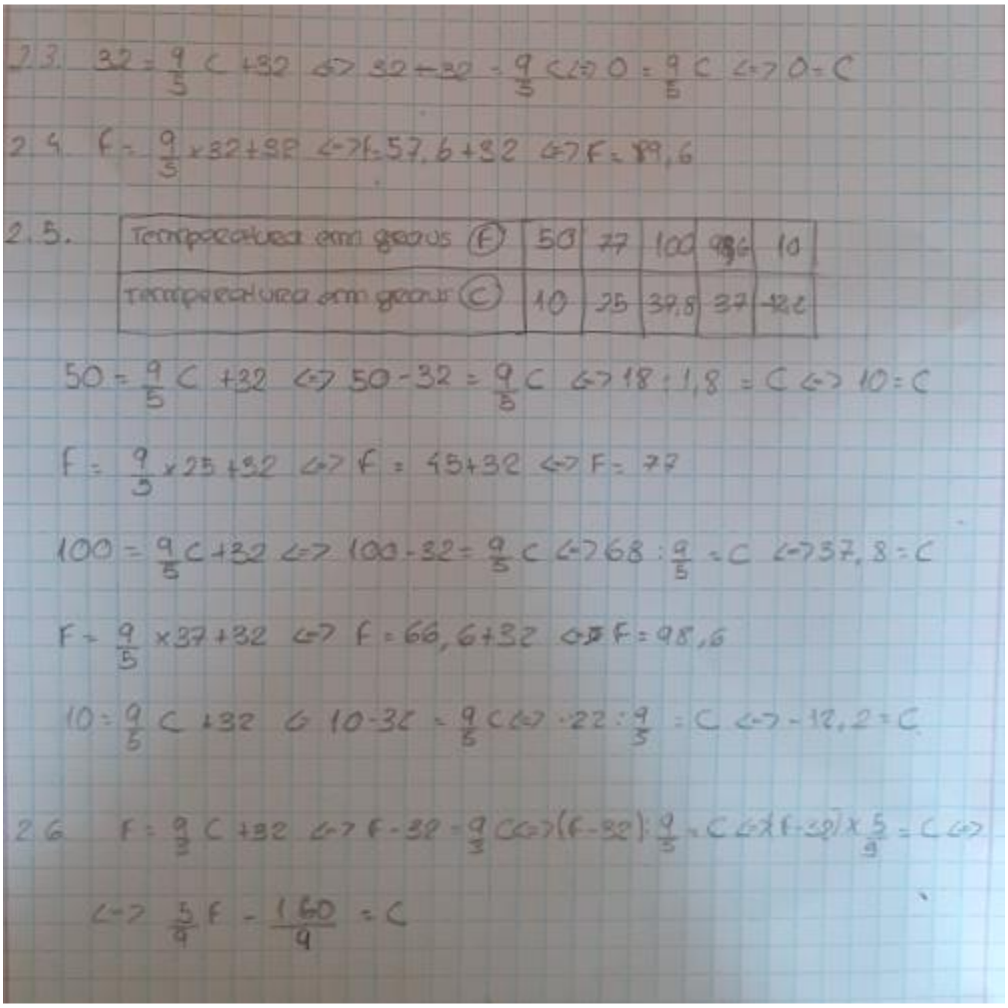
Figura 39: Resolução da questão 2 da tarefa de equações literais, pelo aluno A6



Na alínea 2.1 para a temperatura correspondente a $0°\text{C}$ o aluno calculou bem. Já no que diz respeito aos $40°\text{C}$, os cálculos estão errados. O aluno substituiu bem a variável C por 40, já os cálculos seguintes não estão bem, visto que o aluno multiplicou o numerador e o denominador da fração $\frac{9}{5}$ por 40. Esta falha ao aplicar o processo de multiplicação demonstra que o aluno ainda não tem bem consolidada essa temática. O processo de multiplicar frações é simples, o aluno deve multiplicar o numerador de uma fração pelo numerador da outra e o denominador de uma fração pelo denominador da outra, neste caso deveria ser $\frac{9}{5} \times 40 = \frac{9}{5} \times \frac{40}{1} = \frac{360}{5} = 72$. A resolução da alínea 2.2. está correta e o processo detalhado, o que facilita ao leitor perceber todos os cálculos.

Na figura 40 podemos observar uma resolução que revela muita organização, sendo um bom exemplo para expor aos restantes colegas, pelo detalhe e clareza das respostas.

Figura 40: Resolução da questão 2 da tarefa de equações literais



Nesta figura podemos observar a resolução das restantes alíneas da ficha de trabalho. A estratégia desenvolvida pelo aluno na resolução destas alíneas consistiu no método de substituição. Verifica-se que não surgiram dificuldades e todas as questões foram de fácil resolução. O aluno apresenta uma resolução bem organizada, detalhada e de fácil compreensão.

CAPÍTULO V

DISCUSSÕES E CONCLUSÕES

Este último capítulo encontra-se dividido em três secções. Na primeira secção, é apresentada uma síntese do estudo. Na segunda secção, constam as conclusões da investigação. Por fim, a última secção é destinada a pequenas reflexões sobre a aprendizagem pessoal, que a elaboração deste projeto permitiu e as limitações sentidas ao longo deste trabalho, juntamente com sugestões para investigações futuras.

5.1. Síntese do estudo

O principal objetivo do projeto de intervenção pedagógica foi estudar o raciocínio na resolução de problemas do dia a dia sobre funções afins, numa turma de 8.º ano. Para tal, pretende-se dar resposta às seguintes questões:

1. Como é que os alunos explicitam o raciocínio na resolução de problemas?
2. Quais as estratégias dos alunos para a resolução de problemas?
3. Em que medida a resolução de funções afins ajuda no desenvolvimento do raciocínio funcional?

Para responder a estas questões, foram utilizados diferentes instrumentos de recolha de dados. No início da lecionação foi realizado um teste de diagnóstico e todas as aulas foram preparadas recorrendo a tarefas que envolvem situações do dia a dia, relacionadas com funções afins. Todas as aulas foram documentadas recorrendo a gravações de vídeo e áudio. Estas gravações foram devidamente autorizadas pelos encarregados de educação e pelo diretor da escola onde foi realizado o estágio.

A metodologia de aprendizagem adotada esteve em torno da resolução de tarefas relacionadas com situações do dia a dia. Ao longo das aulas os alunos trabalharam individualmente e em grupos na resolução das tarefas com recurso ao *GeoGebra*.

5.2. Conclusões

Apresentam-se aqui os resultados deste estudo, organizado em três secções que correspondem a cada uma das questões de investigação.

5.2.1. Questão 1: Como é que os alunos explicitam o raciocínio na resolução de problemas?

Para dar resposta à primeira questão de investigação, foram analisadas as produções dos alunos recolhidas ao longo da investigação. As tarefas apresentadas levaram os alunos a mobilizarem os conhecimentos que já possuíam e a aplicá-los ao serviço de uma nova situação problemática.

Ponte et al. (2015) defendem que um conceito de tarefa no ensino da Matemática que valoriza o papel ativo dos alunos é essencial, uma vez que neste caso as tarefas são reconhecidas como elemento organizador da atividade dos alunos. A partir das tarefas realizadas foi possível verificar que não basta colocar na tarefa uma frase a pedir ao aluno que explane o seu raciocínio. Ponte et al. (2012), apontam que raciocinar não é dizer ideias ao acaso, mas sim usar a informação dada para obter uma nova informação válida no respetivo domínio de conhecimento.

Nos registos escritos, foi possível observar que o raciocínio não é naturalmente explicitado. Era necessário pedir aos alunos que explicassem oralmente qual foi o raciocínio utilizado para chegar ao resultado pretendido. Com o ensino a distância foi conseguido muito pouco, de um modo geral. A expressão oral e a escuta da turma, em ensino presencial, iriam despoletar e estimular nos alunos a necessidade de perceber que existem outros métodos de resolução e também de explicarem como pensaram e resolveram o problema.

A oralidade é assim um bom caminho que desperta e familiariza o aluno com as singularidades dos instrumentos associados ao registo escrito do raciocínio.

Quando se solicita a um aluno que verbalize os procedimentos que adotou, justificando-os, ou comentando o que escreveu, representando ou esquematizando, permite-se que modifique conhecimentos prévios e construa novos significados para as ideias matemáticas, revendo o que não entendeu, explicitando as suas dúvidas e dificuldades (Cândido, 2001).

É importante dar oportunidade aos alunos de pensar no problema e serem eles próprios a encontrar estratégias para os resolver, divulgando essas mesmas estratégias. A resolução de problemas ajuda os alunos a desenvolverem as suas próprias estratégias, tornando-se capazes de obter a solução. O aluno desperta assim o seu interesse pela exploração de conceitos matemáticos, pedindo, sempre que necessário ajuda ao professor para o acompanhar no raciocínio, sendo incentivado a chegar às conclusões.

5.2.2. Questão 2: Quais as estratégias dos alunos para a resolução de tarefas?

Na resolução das tarefas, os alunos começam por apresentar estratégias de resolução mais informais, recorrendo a esboços, diagramas ou outras representações, pelo que devem ser estimulados a investigar progressivamente métodos mais formais.

Uma das dificuldades dos alunos em enfrentarem problemas é terem que descobrir sozinhos qual a melhor estratégia para a sua resolução (Sousa, n.d) Para compreender um problema é necessário, assumir a procura da melhor solução, superando as dificuldades que possam surgir não sendo suficiente compreender as suas palavras, linguagem e símbolos (Soares & Pinto, n.d.).

Assim, foi dada permissão aos alunos para utilizaram o *Geogebra* como recurso e auxiliar na resolução dos problemas. Pelo que se verificou pela observação das aulas, os alunos usaram esse recurso no sentido de os auxiliar no raciocínio.

Segundo Almeida e Brito (2005) uma estratégia de ensino e aprendizagem da Matemática é relacionar os conteúdos escolares com a realidade, já que, aproximar a Matemática da linguagem cotidiana facilita a sua compreensão.

Várias foram as estratégias utilizadas: tentativa e erro, trabalhar do fim para o princípio, utilizar uma regra. Por vezes, no mesmo grupo e para o mesmo problema, os alunos utilizavam mais que uma estratégia. Quando os alunos não conseguiam dar resposta ao problema seguindo uma estratégia, optavam por outra, o que é muito bom e demonstra persistência até encontrar o valor pretendido.

5.2.3. Questão 3: Em que medida a resolução de tarefas com funções afins ajuda no desenvolvimento do raciocínio funcional?

O conceito de função é trabalhado em todas as tarefas da intervenção realizadas ao longo do ano letivo. Outra forma de representação da função é a sua representação em expressão algébrica, onde surgem muitas dificuldades na construção dessa mesma expressão.

Matos (2007) diz que a compreensão da linguagem algébrica é essencial para o desenvolvimento cognitivo do aluno, sendo fundamental em diversos processos matemáticos, tais como a resolução de problemas, o raciocínio, a comunicação, a conexão e a representação.

Grande parte dos alunos, nas suas resoluções, procurou justificar as respostas, usando uma linguagem matemática adequada ao tema das funções, conseguindo demonstrar que conhecem os conceitos base de função, assim como a definição, apresentando compreensão quando aplicam esses conhecimentos.

Através da análise das respostas dadas e pelas dificuldades encontradas, verifica-se que existe um grupo de alunos que consegue identificar as funções através de várias representações, como gráficos ou expressões algébricas.

Blanton e Kaput (2008) descrevem o raciocínio funcional como um processo utilizado na construção e generalização de padrões e relações, por meio de ferramentas linguísticas e representacionais. O elemento central do raciocínio funcional é a relação existente entre duas grandezas particulares, por meio de uma lei de formação capaz de indicar tal correspondência. Neste estudo, nota-se uma melhor compreensão do conceito de função ao longo da intervenção e do desenvolvimento do raciocínio funcional.

Ao longo da intervenção letiva os alunos foram progredindo nas suas aprendizagens a nível da compreensão da relação entre as variáveis, reconhecendo essa relação nos vários tipos de reprodução. Identificaram os diferentes tipos de funções constante, linear e afim, desenvolvendo o seu raciocínio funcional.

O progresso e firmeza na mudança entre as diferentes representações permitiu uma melhor compreensão no domínio das funções, beneficiando a resolução de problemas e apresentando um progressivo desenvolvimento do raciocínio funcional dos alunos.

5.3. Reflexões sobre o projecto

5.3.1. Limitações e reflexão sobre uma experiência no ensino a distância

No progresso e implementação deste projeto, surgiram algumas limitações. A limitação principal foi o facto de as aulas passarem para regime *online*, já que, o plano que estava delineado teve de ser refeito. De repente tudo mudou, a implementação do projeto estava a meio quando as aulas em regime presencial teriam de ser interrompidas devido à situação de pandemia que o país estava a atravessar. Foi uma notícia assustadora, de um momento para o outro as coisas que estavam planeadas teriam de ser refeitas o mais rápido possível. A metodologia de trabalho teria de ser adaptada ás novas circunstâncias. Começaram as aulas *online*, através primeiramente do *zoom* e depois do *Meet*. As primeiras semanas foram muito complicadas porque o número de alunos que estavam presentes nas aulas era mínimo, o que iria dificultar a recolha de dados.

Contudo, depois das férias da Páscoa, a presença dos alunos já aumentou porque foram distribuídos meios tecnológicos aos que não tinham. Mesmo assim, a presença era marcada, mas nem todos ficavam a assistir à aula porque quando eram questionados não era obtida resposta do outro lado. Findada esta aventura, é hora de refletir e verifica-se que há mais desvantagens do que vantagens no ensino a distância. O controle sobre os alunos com mais dificuldades era quase nulo pois eles não davam qualquer tipo de *feedback* e raramente enviavam as resoluções das atividades propostas.

Por outro lado, foi uma forma de aprendermos a aprender, principalmente com as plataformas disponibilizadas e com os meios tecnológicos, visto que no nosso país o ensino a distância não era comum. Acima de tudo, devemos ver as limitações como aprendizagens para o futuro e não como algo negativo.

5.3.2. Futuras recomendações

Num estudo futuro, uma estratégia será mudar um pouco o plano e começar por colocar os alunos a resolver tarefas sem relação direta com o conteúdo que está a ser trabalhado, passando depois a propor tarefas com relação ao tema que se pretende lecionar.

É recomendado que a exploração do conteúdo seja realizada com mais tempo, para a possibilidade de discussões mais alargadas. O facto das tarefas propostas envolverem um determinado conteúdo, conduziu a que não houvesse uma grande diversidade na escolha das estratégias para a resolução das mesmas. Recomendo a utilização de tarefas variadas sem relação direta com qualquer conteúdo em específico. Seria pertinente, num estudo futuro, recorrer a problemas do dia a dia, propostos pelos alunos e por situações que eles próprios identifiquem a presença de funções.

Por fim, apesar de todas as dificuldades e limitações sentidas, esta investigação respondeu aos objetivos propostos. Foi possível estudar o contributo da utilização de tarefas do dia a dia na aprendizagem dos conteúdos da função afim, dando assim resposta a todas as questões de investigação.

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). A matemática na educação básica. Lisboa: ME, DEB.

Almeida, L. M. W., & Brito, D. S. (2005). Atividades de modelagem matemática: Que sentido os alunos podem lhe atribuir. *Ciência & Educação, 11*(3), 483-498.

Bell, C. (2011) Proofs without words: A visual application of reasoning and proof. *Mathematics Teacher*, *104*(9), 690-695.

Blanton, M. (2008). Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming. Portsmouth, NA: Heinemann.

Blanton, M., & Kaput, J. (2008) Building district capacity for teacher development in algebraic reasoning. In: J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.). *Algebra in the Early Grades*, (pp. 133-160). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Boavida, A. M. (2008). Raciocinar para aprender a raciocinar. *Educação e Matemática*, *100,* 1.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. NY: Springer.

Rodrigues, A. F. A. (2016). *O raciocínio funcional de alunos de 8.º ano na resolução de tarefas*. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Universidade de Lisboa.

Canavarro, A. P., & Pinto, M.E. (2012). O raciocínio matemático aos seis anos: Características e funções das representações dos alunos. *Quadrante*, *21*(2), 51-79.

Cândido, P. T. (2001). Comunicação em Matemática. In: K. S. Smole & M. I. Diniz, M. I. (Orgs.). *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 15-28). Porto Alegre: Artmed.

Dante, L.R. (1998). *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. 2ªed. São Paulo: Ática.

Galbrait, P. (1995) Mathematics as reasoning*. The Mathematics Teacher*, *88*(5), 412-417.

Kantowski, M. G. (1980). Some thoughts on Teaching for Problem Solving. In S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics* (pp. 195-203). Reston, Virgínia: NCTM.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmilliam Publishing Company

Krulik, S., & Rudnick, J. (1993). *Reasoning and problem solving: A handbook for elementary school teachers.* Massachusetts: Allyn and Bacon.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1989). *Pensar Matematicamente.* Madrid: Editorial Labor.

Matos, A. S. S. M. (2007). *Explorando relações funcionais no 8.º ano: um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico.* Dissertação de Mestrado em Educação, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.

MEC (2012). *Programa de Matemática: Ensino Básico.* Ministério de Educação e Ciência.

MEC (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério de Educação e Ciência.

MEC (2018) *Aprendizagens Essenciais: Matemática, 8.º ano, 3.º Ciclo do Ensino Básico*.

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Associação de Professores de Matemática.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Associação de Professores de Matemática.

NCTM (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making.* Reston, VA: NCTM.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática*, *100*, 3-9.

Polya, G. (1945). *A arte de resolver problemas (How to solve it).* Rio de Janeiro: Interciência.

Pólya, G. (1995). *A Arte de Resolver Problemas: Um novo aspeto do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência Lida.

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas* (Tradução do original inglês de 1945). Lisboa: Gradiva

Ponte, J. P. (1992). Problemas de matemática e situações da vida real. *Revista de educação, 2*(2), 95-107.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Associação de Professores De Matemática.

Ponte, J., Quaresma, M., & Branco, N. (2011). Tarefas de exploração e investigação na aula de matemática. *Educação Matemática em Foco*, *1*(1), 9-29.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa, 7*(2), 355–377.

Ponte, J., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista,M. (2015). *Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professores num estudo de aula. Quadrante, 14*(2), ...

Ponte, J. P. (1990). O conceito de função no currículo da Matemática. *Educação e Matemática, 15*, 3-9.

Ponte, J.P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Posamentier, A. S., & Krulik, S. (1998). *Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions: A resource for the mathematics teacher*. Thousand Oaks, Califórnia: Corwin Press, Inc

Palhares, P. (1980). Histórias com Problemas Construídas por Futuros Professores de Matemática. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho & I. Vale (Orgs.), *Resolução de Problemas na Fomação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos Contextos e Perspetivas* (pp. 159-188). Aveiro: Grupo de Investigação em Resolução de Problemas.

Sardinha, M. (2011). Histórias com problemas e a sua ligação à promoção da numeracia e da literacia no 1.º Ciclo do Ensino Básico. Universidade do Minho.

Smith, E. (2008). *Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum*. New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Santos, V. (2005). Linguagens e comunicação na aula de Matemática. In: A. Nacarato & C. Lopes (eds.). *Escritas e Leituras na Educação Matemática* (pp. 117-125). Belo Horizonte: Autêntica.

Soares, M. T. C., & Pinto, N. B. (n.d). *Metodologia da resolução de problemas.* http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf

Sousa, A. B. (n.d.). *A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática*. Brasília: Universidade Católica de Basília.

Stenhouse, L.(1984). *Investigación y desarollo del curriculum.* Madrid, Ed. Morata.

ANEXOS

ANEXO 1

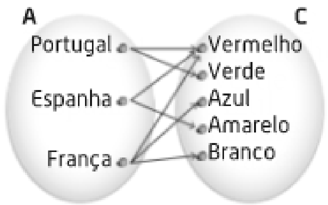
Ficha de Diagnóstico

Ficha de diagnóstico

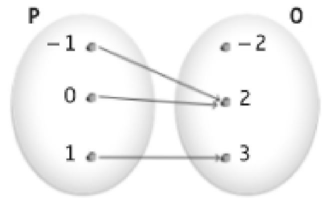
Nome: ____________________________________ **Nº**___**Turma: 8ºA** ___/___/2020

1. Considera as correspondências seguintes.

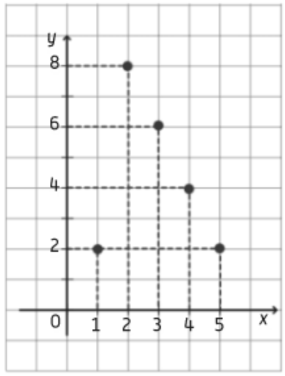
(A)



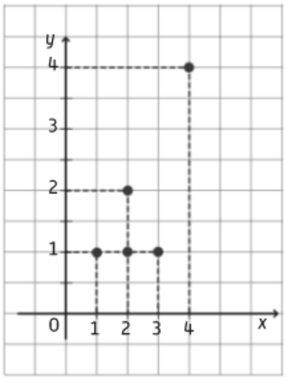
(B)



(C)



(D)



(E)

x	y
0	3
1	4
2	6
3	9
4	13
5	18

(F)

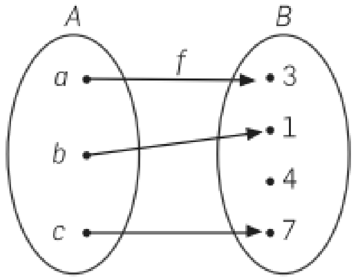
x	y
0	0
0	4
2	6
2	9
3	1
4	8

1.1 Identifica as correspondências que são uma função. Justifica.

1.2 Nas correspondências que são funções, indica o domínio e o contradomínio.

2. A função f está representada por um diagrama de setas.

2.1. Indica:



a) O domínio da função f.

b) O contradomínio da função f.

c) O conjunto de chegada da função f.

2.2. Observa a representação da função f e indica:

a) $f(a) =$ ______

b) $f($____$) = 7$

3. Considera as funções, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, definidas por:

$$f(x) = 7 - 3x \qquad g(x) = -8x \qquad h(x) = 5$$

3.1. Indica o coeficiente e o termo independente das funções f, g e h.

3.2. Indica se cada uma das funções é constante, linear ou afim, justificando a resposta.

3.3. Determina, apresentando os cálculos efetuados:

a) $f(-1) =$

b) a imagem de 0 por meio da função h.

c) $g(\quad) = -1$

3.4. Indica um ponto que pertença ao gráfico da função f ?

Tarefa da "Máquina de lavar roupa"

4. A máquina de lavar roupa da Maria avariou. Para solucionar o problema ligou para uma empresa especializada e foi informada que o custo da reparação seria 25 euros para a deslocação da máquina e 10 euros por hora de trabalho.

Número de horas	Custo do arranjo (€)
1	35
2	
3	
…	…
x	$y = \cdots$

4.1. Completa a tabela.

4.2. Se a máquina levou 30 minutos a arranjar, quanto pagou a Cristina?

4.3. Se a Cristina pagou pelo arranjo da máquina 75 euros, quanto tempo foi necessário para arranjar a máquina?

Tarefa da "Viagem de automóvel"

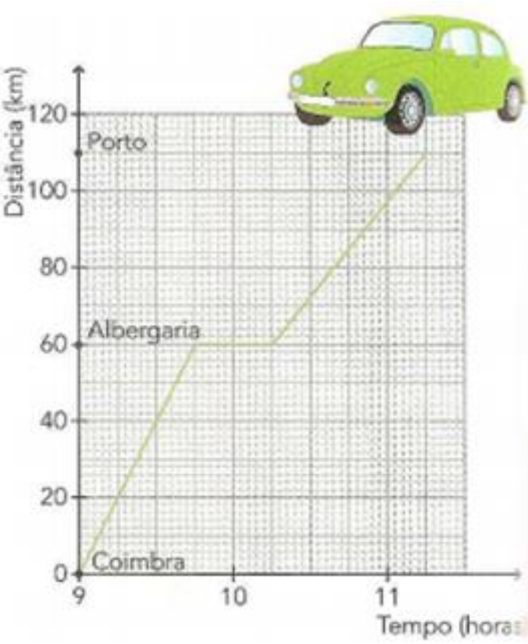
5. O gráfico mostra a viagem de um automóvel entre Coimbra e Porto, passando por Albergaria.

a) Onde estava o automóvel às 9 horas? E às $10h05$?

b) Quanto tempo esteve o automóvel parado em Albergaria?

c) Qual a distância entre Coimbra e Albergaria? E entre Coimbra e Porto?

d) Quanto tempo demorou a viagem?



Bom trabalho!

ANEXO 2

Tarefa do Consumo de água

Nome: ____ N.º: ______ Turma.: ______

Tarefa do consumo de água

A Ana e o João vivem em localidades diferentes e o custo mensal do consumo de água da rede pública, em cada uma dessas localidades, é calculado como a seguir se indica.

Na localidade da Ana

Taxa fixa mensal: $14€$

Preço de cada m^3 de água: $0{,}80€$

Na localidade do João

Taxa fixa mensal: $20€$

Preço de cada m^3 de água: $0{,}50€$

1. Determina o preço a pagar pela Ana e pelo João se o consumo mensal de cada um deles for:

	Ana	**João**
$12\ m^3$		
$15\ m^3$		
$20\ m^3$		
$25\ m^3$		
…		
$x\ m^3$		

1. Em cada uma das situações, o custo é função do consumo. Seja x o consumo mensal em metros cúbicos e $f(x)$ e $g(x)$ o custo mensal a pagar (em euros), respetivamente, pela Ana e pelo João. Indica uma expressão analítica da função:

1.1. f

1.2. g

2. No mês de maio a Ana pagou 26 € e o consumo de água na casa do João foi de $17\ m^3$.

2.1. Qual foi o consumo em maio em casa da Ana?

2.2. Quanto teve de pagar o João no mês de maio?

3. No mês de maio a Ana pagou 26 € e o consumo de água na casa do João foi de $17\ m^3$.

3.1. Qual foi o consumo em maio em casa da Ana?

3.2. Quanto teve de pagar o João no mês de maio?

4. No mês de julho, a Ana e o João pagaram o mesmo valor e tiveram o mesmo consumo.

Determina o consumo efetuado no mês de julho e o valor pago.

5. Esboça no mesmo referencial a representação gráfica das funções $f(x)$ e $g(x)$.

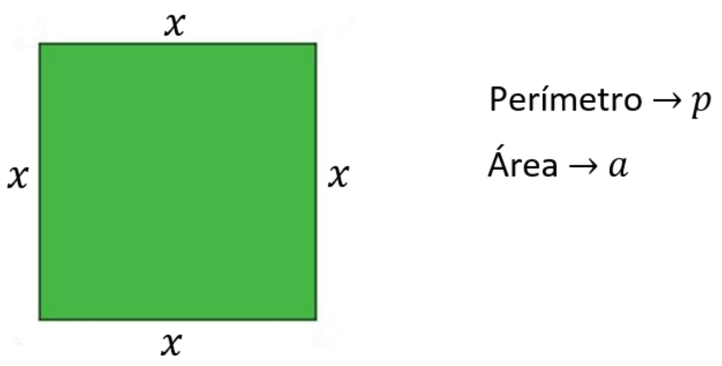
ANEXO 3

Tarefa de “Equações literais”

Tarefa de equações literais

Nome: ______________________________ **Nº**___**Turma: 8ºA** ___/___/2020

1. Um quadrado de lado x tem perímetro p e área a ($p > 0$ e $a > 0$).



1.1. Escreve uma igualdade que represente o perímetro do quadrado.

1.2. Escreve uma igualdade que represente a área do quadrado.

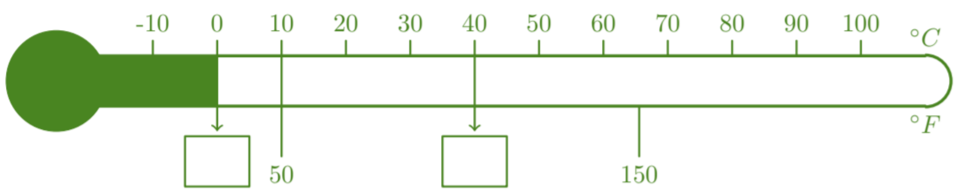
1.3. Existe algum quadrado de perímetro $20\ cm$ e de área $24\ cm^2$?

2. Em Portugal, para medir a temperatura, utilizam-se termómetros graduados em graus Celsius (°C), mas, por exemplo, em Inglaterra, utiliza-se a graduação em graus Fahrenheit (°F).

Uma fórmula que relaciona os graus Celsius e os graus Fahrenheit é a seguinte:

$$\boldsymbol{F = \frac{9}{5}C + 32}$$

2.1. Utilizando a fórmula anterior, calcula, em graus Fahrenheit, a temperatura correspondente a 0°C e 40 °C, preenchendo corretamente os retângulos da figura.



2.2. Calcula, em graus Celsius, o valor da temperatura correspondente a $212\ °\mathrm{F}$. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

2.3. A quantos graus Celsius correspondem $32\ °\mathrm{F}$?

2.4. E $32\ °\mathrm{C}$ a quantos Fahrenheit correspondem?

2.5. Copia a tabela, usando, quando necessário, valores aproximados às décimas.

Temperatura em graus Fahrenheit	**50**		100		**10**
Temperatura em graus Celsius		25		37	

2.6. Resolve a equação $F = \frac{9}{5}C + 32$ em ordem a C (ou seja, considerando C como a incógnita e F como uma constante).

ANEXO 4

Questionário de equações literais e sistemas 8.º ano

Realizado no Google Classroom

Q2 Equações literais e sistemas 8ºano

*Obrigatório

Email *

O seu email

Nome completo *

A sua resposta

Nº *

A sua resposta

Seguinte

Perguntas

Qual dos pares ordenados seguintes é solução do sistema * 4 pontos

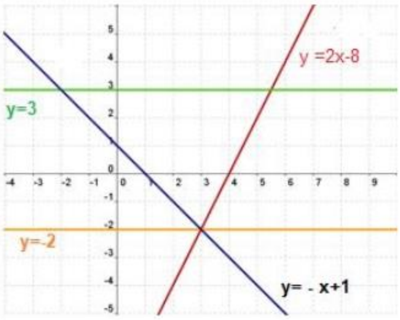
$$\begin{cases} y = x \\ x + y = 3 \end{cases}$$

- ◯ (2,1)
- ◯ (1,5; 1,5)
- ◯ (1,1)
- ◯ (4, -1)

Relativamente à equação: x+y=7 , qual das afirmações é verdadeira? * 4 pontos

- ◯ A equação tem apenas uma solução: (3,4).
- ◯ A equação tem uma infinidade de soluções.
- ◯ A equação tem apenas as soluções: (3,4) , (2,5) e (1,6) .
- ◯ A equação não tem soluções.

A partir da informação dada na representação gráfica, assinala a afirmação verdadeira: * 4 pontos



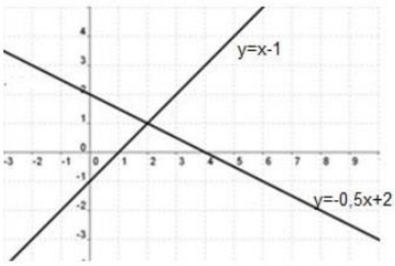
- O sistema dado pelas equações y = 2x-8 e y= -x +1 possível indeterminado
- O sistema dado pelas equações y =3 e y= -x +1 é impossível.
- O sistema dado pelas equações y = 3 e y= 2 é possível determinado.
- O sistema dado pelas equações y = 3 e y = 2 é impossível.

O sistema de equações: * 4 pontos

$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -x \end{cases}$$

- tem uma infinidade de soluções.
- tem duas soluções.
- não tem solução.
- tem uma e uma só solução.

Usa a informação dada pelo gráfico cartesiano da figura para indicares a afirmação verdadeira: * 4 pontos



A solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} y = -0{,}5x + 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

- é: (0,2)
- é: (0,-1)
- é: (2,1)
- é: (1,2)

ANEXO 5

Questionário de avaliação das aulas a distância na disciplina de matemática

Secção 1 de 2

Questionário de avaliação das aulas a distância na disciplina de Matemática

Encontramo-nos sensivelmente a meio deste período de ensino a distância. As tuas respostas a este questionário são muito importantes para melhorar o processo de ensino e aprendizagem na disciplina de Matemática.
Obrigada!

Nome completo *

Texto de resposta curta

Número *

Texto de resposta curta

Secção 2 de 2

Perguntas:

Descrição (opcional)

Como avalias as orientações dadas, em cada aula de matemática, para a realização das tarefas ? *

	1	2	3	4	
Muito confusas	○	○	○	○	Muito claras

Como avalias o apoio/disponibilidade dado pelas professoras na resolução das tarefas ? *

	1	2	3	4	
Insuficiente	○	○	○	○	Muito bom

Como avalias o tempo dado para a realização das tarefas, nas aulas assíncronas. *

	1	2	3	4	
Nada adequado	○	○	○	○	Totalmente adequado

Como avalias a utilização da Google Classroom na disciplina de Matemática. *

	1	2	3	4	
Muito fácil	○	○	○	○	Muito difícil

Como avalias o uso da videoconferência na disciplina de Matemática. *

	1	2	3	4	
Fraco	○	○	○	○	Excelente

Dá sugestões para a melhoria das aulas de Matemática a distância.

Texto de resposta longa

ANEXO 6

Pedido de autorização ao Diretor da Escola

Logótipo da escola onde foi realizada a intervenção pedagógica

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Ex.mo Sr. º Diretor do Agrupamento de Escolas **_nome do agrupamento_**

Eu, Diana Rafaela Torres de Araújo, professora estagiária na Escola **_nome da escola_** , do grupo 500 e aluna no Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário, da Universidade do Minho, venho por este meio solicitar a Vossa Excelência a autorização para a gravação de áudio e recolha fotográfica de aulas no âmbito do Projeto de Intervenção Pedagógica e Supervisionada do Relatório de estágio.

O Projeto de Intervenção tem como princípio geral a realização de uma investigação pedagógica que apoie a compreensão e melhoria das práticas de ensino e aprendizagem de docência. Com vista a este objetivo, propus-me a realizar uma investigação intitulada "***O raciocínio na resolução de problemas do dia a dia sobre funções afins: experiência numa turma de 8.º ano",*** que terá incidência na turma A do 8.º ano de escolaridade. O desenvolvimento desta investigação implica a recolha de dados, que serão obtidos através da resolução de tarefas e da observação das aulas. Para uma melhor compreensão das atividades que se desenvolvem na aula de Matemática, necessito de proceder à recolha de dados através de gravações (áudio e fotográfico). Para esse fim, venho por este meio solicitar autorização para proceder ao registo em suporte áudio e fotográfico dos dados necessários à concretização das experiências de ensino e de aprendizagem na sala de aula.

Comprometo-me a usar os dados apenas para fins académicos e a não divulgar o nome da escola e dos alunos. Comprometo-me também a garantir que qualquer registo fotográfico não incluirá o rosto dos alunos e qualquer possibilidade de identificação do aluno. Interessa apenas a informação que me ajude a melhorar as estratégias de ensino em prol da aprendizagem dos alunos. Comprometo-me ainda a proceder à destruição de todas as gravações após a realização do estágio. Caso seja concedida a autorização, pretende-se que a recolha seja realizada entre março e abril do corrente ano, em contexto de sala de aula. Estarei disponível para qualquer esclarecimento adicional que considere oportuno.

Solicito, assim, a autorização de Vossa Excelência para a concretização desta investigação.

Desde já agradeço a sua atenção.

Santo Tirso, fevereiro de 2020

Com os melhores cumprimentos,

A professora estagiária de Matemática

____

(Diana Rafaela Torres de Araújo)

Autorização

Santo Tirso, _____ de fevereiro de 2020

O Diretor

____

ANEXO 7

Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Logótipo da escola onde foi realizada a intervenção pedagógica

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Ex.m° Senhor(a) Encarregado(a) de Educação,

Eu, Diana Araújo, Professora Estagiária de Matemática na escola frequentada pelo seu educando, no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.° Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade do Minho, pretendo desenvolver uma investigação em Educação Matemática, intitulada ***O raciocínio na resolução de problemas do dia a dia sobre funções afins: experiência numa turma de 8.º ano.*** Com esta experiência de ensino pretendo dar resposta às seguintes questões:

1- Como é que os alunos explicitam o raciocínio na resolução de problemas?
2- Quais as estratégias dos alunos para a resolução de problemas?
3- Em que medida a resolução de tarefas com funções afins ajuda no desenvolvimento do raciocínio funcional?

Para realizar esta investigação, há a necessidade de efetuar uma recolha de dados que, no meu estudo, pretendo que seja feita com recurso a gravações áudio e registos fotográficos de resoluções (não incluirão rostos dos alunos), para facilitar a posterior análise de dados recolhidos. Para este fim, venho, desta forma, solicitar a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio das aulas de Matemática bem como os registos escritos ao longo da intervenção pedagógica.

Salvaguardo, desde já, que serei a única pessoa com acesso a esses dados, comprometendo-me a usar os mesmos apenas para fins académicos. Além disso, a identidade de qualquer aluno será sempre preservada, já que nunca serão referidos os nomes dos alunos nem será identificada a escola no trabalho a realizar.

Grata pela atenção,
Com os melhores cumprimentos,

________________________, ______ de fevereiro de 2020

A Professora Estagiária,

____

(Diana Rafaela Torres de Araújo)

- -

Eu, ____,
encarregado(a) de educação do(a) aluno(a) ____, da turma ______, autorizo/não autorizo a gravação de áudio e autorizo/não autorizo o registo fotográfico das aulas de Matemática inseridas na intervenção pedagógica.

________________________, ______ de fevereiro de 2020