UMinho|2022 Raquel Cristina Teixeira Martins **Raciocínio funcional: um estudo com alunos de 10º ano na aprendizagem de funções**

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Raquel Cristina Teixeira Martins

Raciocínio funcional: um estudo com alunos de 10º ano na aprendizagem de funções

janeiro de 2022

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Raquel Cristina Teixeira Martins

Raciocínio funcional: um estudo com alunos de 10º ano na aprendizagem de funções

Relatório de Estágio
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho efetuado sob a orientação do
Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

janeiro de 2022

DIREITOS DE AUTOR E CONDIÇÕES DE UTILIZAÇÃO DO TRABALHO POR TERCEIROS

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu, supervisor deste estágio e relatório, por todo o apoio, ensinamentos, paciência e dedicação e por ter, tantas vezes, sacrificado o seu tempo para que pudéssemos discutir vários aspetos deste estudo. Acima de tudo por ser um ser humano excecional e que é um exemplo para mim. Poderia estender este agradecimento eternamente e nunca teria palavras para expressar a quão grata estou por tudo; cresci como pessoa e sei que esse crescimento se refletirá no meu futuro profissional, enquanto professora.

Agradeço à Professora Ana Paula Seixa Mourão, orientadora deste estágio pedagógico, o apoio e conselhos ao longo do ano letivo da intervenção pedagógica - um ano bastante atípico, com várias adaptações - pela disponibilidade em receber-nos, a mim e às minhas colegas de estágio, nas suas turmas, e por todo o esforço em acompanhar-me na intervenção pedagógica.

Agradeço à direção da escola por ter possibilitado a concretização da intervenção pedagógica e consequentemente deste projeto, ao pessoal docente e não docente por me terem recebido de braços abertos e a todos os alunos pela colaboração e disponibilidade que demonstraram ter ao longo do ano letivo.

Agradeço aos meus colegas de mestrado pelas partilhas, pelos bons momentos e pelo apoio que sempre houve em grupo. Às colegas de estágio, Ana e Eva, um agradecimento especial, por todos os momentos que construímos, pelas partilhas que fizemos, pelo apoio condicional que tivemos umas com as outras e pela amizade que ficou.

Agradeço às pessoas com que trabalho, Anabela Alexandre e Catarina de Sousa, que me deram força para seguir e concluir esta etapa da minha vida, foram um grande apoio; cada uma sabe o que fez e o grande estímulo que deram para que chegar ao fim fosse mais fácil.

O último e grande agradecimento e o mais especial dedico-o à família. À mãe, pai, irmã, cunhado, namorado e avó, a eles o meu mais e sentido agradecimento por tudo o que significam na minha vida.

Avô

e de mais família por me apoiarem sempre, cada um com a sua força, cada um com um orgulho diferente em ver-me vencer esta etapa que foi sonhada por quase todos desde o início e agora finalizada. Com muito orgulho termino este mestrado e sei que aqueles que sempre me apoiaram ao longo deste meu percurso académico sentem o mesmo.

Grata por tudo!

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração do presente trabalho académico e confirmo que não recorri à prática de plágio nem a qualquer forma de utilização indevida ou falsificação de informações ou resultados em nenhuma das etapas conducente à sua elaboração.

Mais declaro que conheço e que respeitei o Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

RACIOCÍNIO FUNCIONAL: UM ESTUDO COM ALUNOS DE 10.º ANO NA APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES

RESUMO

Este estudo pretende averiguar o contributo da aprendizagem do tópico de Funções por alunos do 10.º ano de escolaridade para o desenvolvimento do Raciocínio Funcional. Para a concretização deste objetivo foram formuladas as seguintes questões de investigação: (1) Que aspetos do raciocínio funcional se desenvolvem nos alunos do 10.º ano na aprendizagem de tópico de Funções?; (2) Que dificuldades revelam os alunos na aprendizagem de tópico de Funções?; e (3) Que perceções têm os alunos sobre o desenvolvimento do raciocínio funcional na aprendizagem de tópico de Funções? De forma a dar resposta a estas questões recolheram-se dados através de questionários (um no início da intervenção pedagógica e outro no final); da gravação vídeo e áudio de aulas; e das produções realizadas pelos alunos na resolução das tarefas propostas. A intervenção pedagógica foi realizada numa turma do 10.º ano de escolaridade do Curso de Ciências e Tecnologias, de uma escola secundária situada na cidade de Braga, a qual foi pautada por dois contextos distintos: aulas presencias e aulas virtuais. A principal preocupação nestes dois contextos distintos consistiu em envolver os alunos nas atividades de aprendizagem, tendo por base as características do formato de ensino exploratório, que advoga que os alunos aprendem os novos conceitos a partir das tarefas que realizam. Os resultados obtidos mostram que os processos do raciocínio funcional – Pensamento Recursivo, Pensamento Covariacional e Relação de Correspondência – estão implícitos nas resoluções das tarefas propostas aos alunos. Ao longo da intervenção foi percetível verificar a evolução dos três processos do raciocínio funcional nas resoluções e nas intervenções dos alunos, à medida que aprofundavam o seu estudo sobre tópicos de funções. Os alunos manifestaram compreender de que modo as variáveis se relacionam para que assim pudessem explicar as relações funcionais implícitas nos tópicos de funções que emergiam na resolução das tarefas com que se depararam.

Alguns alunos expressaram dificuldades na interpretação dos diferentes tipos de representação associados às funções, em reter as informações necessárias dos gráficos cartesianos que os ajudasse a retirar conclusões para estabelecer correspondências, em explicar as relações funcionais e na interpretação da informação fornecida pelas expressões algébricas. Tais dificuldades indiciam que foram um obstáculo para que alguns alunos reconhecessem as relações entre variáveis (objeto e imagem) e o comportamento das mesmas nas diferentes representações.

As perceções dos alunos sobre o contributo do estudo de tópicos de funções no desenvolvimento do raciocínio funcional indiciam que não possuem uma consciencialização do que significa este raciocínio, apesar de assumirem que diferentes aspetos associados ao raciocínio funcional são importantes para a aprendizagem e para a resolução de tarefas relacionadas com conceitos de funções.

Palavras-chave: Alunos do 10.º ano; Aprendizagem; Funções; Raciocínio Funcional.

FUNCTIONAL REASONING: A STUDY WITH 10TH-GRADE STUDENTS IN THE LEARNING OF FUNCTIONS

ABSTRAT

This study aims to investigate the contribution of learning the topic of Functions by students of the 10th grade to the development of functional reasoning. In order to attain this objective, the following research questions have been formulated: (1) What aspects of functional reasoning are developed in 10th-grade students in learning the topic of Functions?; (2) What difficulties do students reveal in learning the topic of Functions?; (3) What perceptions do students have about developing functional reasoning in learning the topic of Functions? In order to answer these questions, data were collected through questionnaires (one at the beginning of the pedagogical intervention and the other at the end); video and audio recording of lessons; and the resolution of the proposed tasks.

The pedagogical intervention was carried out in a class of the 10th grade of a Science, Technology Course, from a secondary school located in Braga, and it was undertaken in two distinct contexts: classroom classes and virtual classes. The main concern of these was to involve the students in the learning activities, based on the characteristics of the exploratory teaching format, according to which students learn the new concepts from the tasks they perform.

The results show that the processes of functional reasoning - Recursive Thinking, Covariational Thinking and Correspondence Relationship – are implicit in the resolutions of tasks proposed to students. Throughout the intervention, it was noticeable to verify the evolution of the three functional reasoning processes in the resolutions and interventions of the students, as they deepened their study of functions. The students reveal understanding of how the variables relate as they could explain the functional relationships implicit in the topic of functions after solving the proposed tasks.

Some students revealed difficulties in interpreting the different types of representation associated with functions, retaining the necessary information from Cartesian graphs that would help them establish correspondences, explaining functional relationships and interpreting the information provided by algebraic expressions. Such difficulties indicate that they were obstacles for some students to recognize the relationships between variables (object and image) and their behavior in different representations.

Students' perceptions about the contribution of the study of functions in the development of functional reasoning indicate that they do not fully understand what this reasoning means, despite assuming that different aspects associated with it are important for learning and solving tasks related to function concepts.

Keywords: 10th-grade students; Learning; Function; Functional Reasoning.

Índice

Índice de Figuras

Índice de tabelas

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Este capítulo está organizado em três secções. Na primeira secção do capítulo são apresentados os seguintes tópicos: tema em estudo, os objetivos e as questões de investigação que mostram a minha prática pedagógica. A segunda secção está direcionada no sentido de explicar a pertinência da escolha deste tema. Por último, na terceira secção é feita uma breve descrição da estrutura geral do relatório de estágio.

1.1. Tema, objetivos e questões do estudo

O tema que se pretende desenvolver no âmbito da Intervenção Pedagógica Supervisionada tem como objetivo o desenvolvimento do Raciocínio Funcional no processo de ensino e aprendizagem o tópico de funções numa turma de 10.º ano de escolaridade do Curso de Ciências e Tecnologia. A escolha deste tema relaciona-se com o facto de um dos principais objetivos do ensino de matemática consistir em promover o desenvolvimento da capacidade de raciocínio dos alunos. O raciocínio tem um papel crucial no ensino de matemática, já que é a partir desta capacidade que os alunos adquirem e articulam conhecimento. Trata-se de um processo evolutivo que implica conjeturar, generalizar, investigar o porquê e desenvolver e avaliar argumentos sobre factos e procedimentos matemáticos. Atendendo aos tópicos que estruturam o currículo escolar, tal capacidade surge conectada aos diferentes domínios programáticos, como por exemplo à álgebra, à geometria e às funções. Na transição de ciclos escolares, o raciocínio concreto - mais conciliado ao trabalho com números e com as suas operações - dá lugar, paulatinamente, ao raciocínio abstrato, o que, para o seu desenvolvimento, muito contribui o estudo das funções. É este tópico curricular que é o foco do meu projeto, partindo do pressuposto de que o estudo de relações que envolvem correspondências e variações desenvolvem o raciocínio funcional.

Porquê a escolha deste tema? Para além do interesse que tenho pelo domínio das funções, sobrepôs-se a linha temporal que rege as atividades escolares, enquadrando-se este domínio no período letivo em que realizei fazer a minha intervenção pedagógica. Trata-se de um tema com forte presença nos programas escolares do 3.º ciclo e do ensino secundário, o que remete o NCTM (2007) a considerar que desde do pré-escolar até ao secundário os alunos devam familiarizar-se e trabalhar com vários tipos de funções. Nos 2.º e 3.º ciclos, desenvolvem a compreensão de relações entre os elementos de dois conjuntos quaisquer não vazios. A noção de função alarga-se, explorando diferentes representações, a situações que contemplam relações lineares ou quadráticas. No secundário, o seu conhecimento sobre funções deverá ser mais divergente e aprendem as diferentes características dos diversos tipos de funções. Nos primeiros ciclos de ensino, os alunos estudam as relações entre tabelas, gráficos e símbolos. À medida que trabalham com as diferentes representações, tais como numéricas, gráficas e simbólicas, desenvolvem o seu conhecimento e a compreensão sobre as funções. De forma a promover o raciocínio funcional, é importante que se proporcionem experiências que desafiem os alunos a ser capazes de reconhecer e articular estruturas e relações. Assim, tendo em consideração tais pressupostos, este projeto tem como objetivo promover o desenvolvimento do raciocínio funcional de alunos do 10.º ano de escolaridade na aprendizagem de funções. Na concretização deste objetivo, pretende dar-se resposta às seguintes questões de investigação:

Q1. Que aspetos do raciocínio funcional se desenvolvem nos alunos do 10.º ano na aprendizagem de tópico de Funções?

Q2. Que dificuldades revelam os alunos na aprendizagem de tópico de Funções?

Q3. Que perceções têm os alunos sobre o desenvolvimento do raciocínio funcional na aprendizagem de tópico de Funções?

1.2. Pertinência do estudo

O conceito de tópico de Função é um dos mais importantes no âmbito da Matemática (Ponte,1990) e um dos mais complexos na matemática escolar, não só no ensino básico e secundário, mas também no ensino superior (Safuanow, 2016). No ensino de matemática, o tópico funções é introduzido pela primeira vez no 3.º ciclo do Ensino Básico, mas é no ensino secundário que é dado maior destaque a este tópico, sendo dedicado grande parte do tempo letivo para que sejam cumpridos os objetivos relacionados com o tópico Funções descritos no novo Programa e Metas Curriculares Matemática (2013). Apesar do tópico Funções ser um dos mais importantes do ensino da Matemática, é também um dos tópicos em que os alunos apresentam mais dificuldades.

O tópico Funções é um dos meus temas preferidos do ensino da Matemática, pelo que a escolha de a partir de onde poderia fazer a minha intervenção pedagógica não foi difícil, estando de acordo com a planificação proposta para que fosse possível realizar o estudo em causa. O tópico Função permite fazer ligações com a realidade do quotidiano, sendo visíveis em jornais, revistas, artigos, ou mesmo atividades triviais. A importância da matemática, contribui para despertar do gosto pela disciplina e conduzir a uma atitude mais positiva relativamente à Matemática alunos (NCTM, 2007).

Relativamente ao Raciocínio Funcional, um tema que me era desconhecido, e que me despertou de imediato o interesse, pois explorar o desconhecido abre leque para novas aprendizagens. Este tema surgiu de conversas com o supervisor que suscitaram a curiosidade em explorar mais sobre o Raciocínio

Funcional. Numa primeira fase houve uma parte investigativa de contextualização do que era o Raciocínio Funcional e posteriormente aplica-lo com as tarefas que poderiam ser propostas a alunos de 10.º ano de escolaridade associando-o aos conceitos a serem estudados. Assim, Raciocínio Funcional é um processo de raciocínio que é utilizado na construção e generalização de padrões e relações (Blanton, 2008). Na promoção deste raciocínio utilizam-se diversas ferramentas linguísticas e representacionais, explorando as relações generalizadas ou as funções que constituem este processo. O Raciocínio Funcional é um dos principais eixos do pensamento algébrico. Para desenvolver este tipo de raciocínio, uma das formas a seguir é a exploração de relações, de correspondências e de variações existentes entre duas variáveis, tendo como ponto de partida um caso particular e como conclusão a generalização (Rodrigues, 2016). Smith (2008) advoga que o raciocínio funcional implica a utilização do pensamento relacional, focando-se em especial na relação entre duas variáveis, partindo de relações particulares para a generalização. Este autor considera três formas distintas para analisar as relações: (i) o pensamento recursivo, na descoberta da variação de valores; (ii) o pensamento covariacional, analisando a forma como duas quantidades variam simultaneamente e considerando a variação como uma parte explícita e dinâmica da descrição de uma função; e (iii) a relação de correspondência, que se traduz na compreensão da relação existente entre cada valor da variável independente e da variável dependente.

Vários investigadores, como Blanton et al. (2008), têm destacado o facto de os alunos, desde o 1.º ciclo, poderem usar uma diversidade de ferramentas em prol do desenvolvimento do seu raciocínio sobre funções. Desde os níveis escolares mais elementares os alunos podem recorrer a tabelas, desenhos, gráficos, palavras ou símbolos de relações recursivas, de covariação e de correspondência.

1.3. Estrutura do Relatório

Este relatório está organizado em quatro capítulos. No primeiro capítulo denominado por Introdução é apresentado o tema, o objetivo e as questões de investigação, a pertinência do estudo, e, por fim, a estrutura do relatório.

O segundo capítulo – Enquadramento Contextual e Teórico – incide sobre a caracterização da escola e da turma onde foi realizada a intervenção pedagógica, a fundamentação teórica que sustenta este relatório e as metodologias de ensino que me orientaram na intervenção pedagógica e, por fim, as estratégias de recolha de dados utilizadas.

No terceiro capítulo, com o título de Intervenção Pedagógica, são apresentadas e analisadas a respostas a tarefas propostas aos alunos, onde são ilustrados momentos de ensino e aprendizagem de conceitos do tópico de Funções, e por fim, uma síntese da análise das resoluções às tarefas analisadas.

No quarto capítulo – Conclusões, Limitações e Recomendações – são apresentadas as conclusões deste estudo em jeito de resposta às questões de investigação formuladas e são referidas algumas limitações e recomendações a ter em conta em investigações futuras.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO

Este capítulo está organizado em três secções. Na primeira secção do capítulo apresenta-se o enquadramento contextual, tendo com finalidade descrever o contexto onde foi realizada a intervenção pedagógica, em particular, a escola e a turma. Na segunda secção direcionada ao enquadramento teórico, tendo como finalidade fundamentar os pressupostos teóricos que a sustentam quer a temática considerada neste estudo, quer as metodologias de ensino e de aprendizagem adotadas. Por fim, na terceira secção, estratégias de intervenção é feita uma clarificação dos métodos de recolha de dados utilizados ao longo da intervenção pedagógica e de avaliar.

2.1. Enquadramento Contextual

Este subcapítulo está dividido em duas secções. A primeira apresenta a caracterização da escola, enquanto a segunda se debruça sobre a carateterização da turma onde realizei a minha intervenção pedagógica de ensino.

2.1.1. Caracterização da escola

A minha Intervenção Pedagógica realizou-se na escola sede de um agrupamento de escolas do distrito de Braga. Este agrupamento é constituído por 12 escolas e abrange desde do pré-escolar até ao ensino secundário. A escola está localizada num centro urbano e funciona há mais de 130 anos, sendo inaugurada pelo rei D. Luís I em 1885 e criada no ano anterior. Em 1914, a escola sofreu algumas alterações no ensino e, por esse motivo, na década de 50, o número de alunos foi aumentando. Ao longo dos tempos a escola foi inserindo novas formações relacionadas com a formação importante da época, fundindo escolas. As instalações sofreram algumas alterações na sua localização durantes os anos. Em 1953 o projeto de construção é que ficou concluído e foi construída uma escola nova de raiz, sendo inaugurada em maio de 1958. No início da década de noventa, do século passado, com a dinâmica organizacional dos estabelecimentos de ensino público, este sofre algumas alterações. Nesta década, a escola inicia um trabalho em interação com outras escolas de Braga em torno de um projeto Educativo comum. O ano letivo 2003/2004 é marcado pelo início do Agrupamento de Escolas, mas apenas em 2013 é constituído o agrupamento de escolas onde a escola em questão está inserida e é a sede do agrupamento das escolas que o integram.

Nos últimos dez anos, no âmbito do processo de reorganização da rede escolar pública do Ministério da Educação e Ciência, têm havido alterações nas infraestruturas do agrupamento e na própria escola. O agrupamento de escolas integra cerca de 3000 alunos matriculados nos diferentes níveis de ensino, desde o pré-escolar ao ensino secundário, incluindo aqui o ensino profissional e a modalidade de educação de adultos. Dos alunos do agrupamento 71,7% dos alunos não beneficiam de qualquer tipo de apoio económico da ação social. Estes dados foram apurados na última avaliação externa feita ao agrupamento de escolas. Em relação às tecnologias de informação e comunicação, 76% dos alunos do Ensino Básico e 91% dos alunos do Ensino Secundário têm acesso a computador e à internet em casa. No agrupamento, o quadro docente é estável e experiente, sendo constituído por 319 docentes dos quais 89% pertencem aos quadros de escola, o que potencia uma ação educativa contínua, integrada e articulada, o que permite que, na distribuição do serviço anual, seja dada continuidade pedagógica. A escola onde foi feita a minha intervenção pedagógica é uma escola que privilegia essa continuidade pedagógica, ou seja, sendo os professores maioritariamente do quadro da escola, cada professor trabalhará com os alunos de uma turma durante o ciclo de ensino.

O projeto educativo do agrupamento de escolas, para desenvolver no período de 2019–2022, tem como lema "percursos com futuro". A designação do projeto educativo visa valorizar o percurso escolar, a diversidade de opções, a verticalidade formativa, a individualidade do itinerário e do projeto de vida de cada criança, jovem ou adulto, tendo por base as linhas orientadoras da educação inclusiva. Estas linhas orientadoras visam promover a construção de caminhos orientados para o futuro, com relevância na formação da criança, jovem ou adulto socialmente comprometidos porque o futuro começa nas opções que as escolas do agrupamento assumem no presente. O agrupamento foca-se em percursos inclusivos e diversificados, orientados para a valorização de uma cultura de conhecimento (saber), da formação integral (ser) e de uma cidadania ativa (estar).

No "Plano Anual de Atividades", encontra-se uma lista com várias atividades, desde visitas de estudo orientadas para os diferentes níveis de ensino, cujo objetivo é conciliar os conteúdos programáticos com atividades no exterior da escola. A estas visitas de estudo juntam-se também atividades relacionadas com a cidade onde a escola está situada, em que a finalidade é transmitir aos alunos as tradições e a cultura da cidade em que vivem/estudam. Além disso, realizam-se atividades relacionadas com as épocas festivas do país e da cidade, bem como atividades que sejam complemento curricular ao que é lecionado nas aulas. A escola oferece projetos educativos como ateliês e clubes ligados às artes e ao desporto e também desenvolve palestras, colóquios e *workshops* organizados pelos diferentes departamentos disciplinares da escola. As Olimpíadas Portuguesas da Matemática, Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, Canguru Matemático sem Fronteiras, Sala da Matemática (Jogos didáticos e exposições), Peddipaper, Clube de Xadrez, Desporto Escolar (diversas modalidades), Rádio Escolar, Voluntariado (Banco Alimentar), Mandarim, Eco Escolas, Clube de Música, Clube de Artes Visuais, Projeto de Robótica, Programa Erasmus+, entre outras, são as atividades e projetos oferecidos pela escola. A escola apresenta um conjunto diversificado de atividades para, assim, promover um ensino de qualidade. No entanto, por causa de pandemia que vivemos no ano letivo a maior parte dessas atividades não foram realizadas. Desta forma, a escola apenas realizou uma atividade direcionada para a Matemática, Olimpíadas da Matemática.

Relativamente às infraestruturas da escola, todas as salas possuem computador e vídeo projetor e algumas delas possuem quadros interativos. A escola oferece ainda para uso dos alunos e professores espaços como salas de informática e artes, laboratórios e um pavilhão multiusos onde se realizam aulas ou atividades promovidas pela escola, quer sejam organizadas por professores ou alunos. Além disso, a escola possui biblioteca e espaços de convívio e aprendizagem dos alunos.

Em jeito de síntese, a oferta que a escola disponibiliza, quer em termos formativos quer em termos das suas infraestruturas, proporciona todo um ambiente propício à dinâmica profissional dos docentes que a integram e ao desenvolvimento de competências dos seus discentes que a frequentam.

2.1.2. Caracterização da turma

A minha prática pedagógica realizou-se numa turma do 10.º ano do curso de Ciências e Tecnologias. A turma era composta por 27 alunos, 7 raparigas e 20 rapazes. Destes alunos, somente um estava a repetir a disciplina de Matemática. Os restantes alunos nunca ficaram retidos durante o seu percurso escolar. As idades dos alunos variavam entre os 15 e os 16 anos de idade. Em termos das suas preferências pelas disciplinas curriculares, 14 alunos (52%) destacam a disciplina de Matemática como sendo a sua preferida. Esta preferência baseia-se na média das qualificações de 9.º ano obtida pelos alunos, em que a média era de nível quatro. A relevância que esta disciplina tem na sua formação leva a que a maior parte dos alunos manifeste a intenção de frequentar o curso de Engenharia (51,9%), enquanto os restantes destacam outras profissões, como, por exemplo, ser arquiteto, físico, programador ou atleta profissional. Relativamente à disciplina com mais dificuldade, metade dos alunos afirma ter dificuldade a Físico-Química, enquanto 25% dos alunos indicaram a disciplina de Matemática como sendo a disciplina com mais dificuldade. Entre as disciplinas com mais dificuldade aparecem também Português, Inglês, Filosofia e Geometria Descritiva.

Ao longo do ano consegui perceber, através de um questionário aplicado aos alunos, que, em média, os alunos estudam dez horas por semana, das quais três são dedicadas ao estudo de Matemática. No estudo desta disciplina os alunos recorrem a diferentes materiais tecnológicos, máquina de calcular (gráfica ou cientifica), internet, computador, telemóvel, Tablet, entre outros. Dos alunos da turma apenas um aluno não usa qualquer tipo de material tecnológico. Da mesma forma, apenas um aluno usa outro material tecnológico diferente dos colegas, o *Photomath.* Apenas seis dos alunos da turma usam uma das tecnologias em questão, que é a máquina gráfica. Os restantes elementos da turma usam mais do que uma das tecnologias A maioria (75%) usa máquina gráfica e outra tecnologia ao mesmo tempo. Relativamente ao uso de internet, computador e telemóvel, mais de 50% da turma usam estas teleologias em simultâneo (as três ou duas) ou apenas uma delas.

Quanto aos conteúdos que os alunos elegeram como preferido, 46,5% dos alunos afirmam que Geometria é o tema que mais apreciam em Matemática. Já o conteúdo Função, a par de Trigonometria, Equações/Inequações, Álgebra, Polinómios e Estatística, os alunos apontam como o que menos apreciam. Aqui destaca-se o conteúdo Função, que anteriormente na escolha de temas mais apreciados tinha sido pouco escolhido pelos alunos, como sendo o conteúdo menos preferido. Esta escolha dos alunos mostra a relação negativa, que maior parte deles (61%) tem com este conteúdo, pois apresentam várias dificuldades na compreensão dos conceitos e na resolução de problemas envolvendo tópicos de Funções.

Relativamente ao conhecimento sobre 'Raciocínio Matemático', a maior parte dos alunos tem uma ideia sobre o que é o raciocínio sem saber descrever na íntegra o que envolve o 'Raciocínio Matemático'. Quando se fala de 'Raciocínio Funcional', a maioria dos alunos não sabe a que se refere este conceito. Alguns alunos, relativamente a este conceito, referem que 'Raciocínio funcional' é o raciocínio utilizado no estudo de funções.

Na observação de contexto de sala de aula, constatei que a turma é calma, apesar de entre si falar bastante enquanto estão a resolver as tarefas propostas. Nas aulas em que existem momentos mais práticos, como resolução de tarefas, alguns alunos da turma tendem a formar o 'seu grupo' de trabalho, enquanto os restantes resolvem as tarefas sozinhos ou com o seu colega do lado. Durante as aulas, a professora da turma procura criar alguns momentos de discussão. Um destes momentos é caracterizado pelo facto de a professora 'lançar' questões para que os alunos possam intervir e assim obter respostas promotoras de discussão sobre o que os alunos disseram ou fizeram até chegar ao ponto de interesse para o que se está a ser lecionado.

A minha intervenção pedagógica realizou-se em dois momentos diferentes devido à nova realidade em que vivemos. Estes momentos distintos, em que fiz a minha intervenção pedagógica, foram pautados por aulas presenciais e aulas virtuais. Nas aulas presenciais os alunos trabalhavam em grupo, sendo os grupos constituídos pelos alunos que estavam sentados lado a lado, o que fazia com que os grupos fossem diferentes em algumas aulas. Nestes momentos de trabalho observei que os alunos interagiam entre si e no momento de partilhar as suas respostas com a turma os grupos faziam-no de forma organizada e a maioria dos elementos de cada grupo acabaria por participar. Quando as aulas passaram a ser virtuais, os métodos de trabalho mudaram para mim, como estagiária, e para os alunos. Nas aulas virtuais verificou-se uma alteração no comportamento da turma e no trabalho realizado pelos alunos. Nos momentos de aula síncrona os alunos eram menos participativos comparando com as aulas presenciais. Enquanto nas aulas presenciais a maioria da turma participava e os alunos iam completando a explicação uns dos outros, neste molde de aulas virtuais isso já não acontecia, ou era pouco frequente acontecer. Relativamente aos trabalhos que eram realizados pelos alunos em grupo, passaram a ser realizados individualmente. Os trabalhos eram enviados através do *classroom* no dia anterior para que no início da aula do dia seguinte as respostas dos alunos pudessem ser discutidas em grupo. Estas discussões realmente aconteciam, mas a maioria da turma não participava, contrariamente ao que acontecia nas aulas presenciais. Nos dois momentos distintos de lecionar notou-se uma grande diferença no trabalho realizado e na participação dos alunos.

2.2. Enquadramento Teórico

Neste subcapítulo é apresentado um enquadramento teórico que serve de base deste relatório de estágio. O mesmo encontra-se dividido em três partes. A primeira parte é dedicada à história do conceito de Função. Em relação à segunda parte foca-se na descrição de Raciocínio Funcional, a terceira parte incide nas dificuldades sentidas pelos alunos no estudo do conteúdo de função.

2.2.1. Evolução do conceito de Função e a sua integração no currículo escolar

O conceito de Função é um dos mais importantes no âmbito de Matemática (Ponte,1990) e um dos mais complexos na matemática escolar, não só no ensino básico e secundário, mas também no ensino superior (Safuanov, 2015). A evolução do conceito remonta há 4000 anos (Kleiner, 2012) e são muitos os exemplos particulares que podem ser encontrados ao longo destes anos. Por exemplo, contar, que implica a correspondência entre um conjunto de objetos e a sequência de contagem, as quatro operações aritméticas elementares, que representam funções de duas variáveis, e as tabelas babilónicas de quadrados, raízes quadradas, cubos e raízes cúbicas (Ponte, 1992). Contudo, a noção de função como conceito e como objeto de estudo em Matemática surge apenas nos finais do século XVII (Ponte, 1990). Segundo Ponte (1990), "a origem, da noção de função confunde-se com os primórdios do Cálculo Infinitesimal." (p.3). Para Kleiner (2012), o surgimento do conceito de função ocorreu por vários acontecimentos, como a extensão do conceito de números para abranger números reais (até aos complexos), a criação de uma álgebra simbólica, o estudo do movimento como problema central da ciência e ligação entre a Álgebra e a Geometria. Em 1673 Leibniz usou pela primeira vez o termo "função" para designar "em termos muitos gerais, a dependência duma curva de quantidades geométricas como as subtangentes e subnormais" (Ponte, 1990, p.3). Leibniz introduziu, também, conceitos como "constante", "variável" e "parâmetro". Para o desenvolvimento do estudo das curvas por meios algébricos foi indispensável o uso de um termo para designar/ representar quantidades dependentes de alguma variável por meio de uma expressão analítica. Desta forma, o termo "função nas correspondências trocadas entre 1694 e 1698 por Leibniz e João Bernoulli" foi adotado (Ponte, 1990).

Segundo Ponte (1990), em 1716, o termo "função" não era reconhecido e não pertencia ao glossário matemático. Apenas em 1978, Bernoulli formula pela primeira vez a definição de função, considerando uma função de uma certa variável como uma quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constantes (Kleiner, 2012). Esta definição foi aperfeiçoada por Euler, antigo aluno de Bernoulli, em 1978, que substituiu o termo "quantidade" por expressão analítica". A notação $f(x)$ para o conceito de função foi introduzida por Euler em 1734 (Safuanov, 2015). A definição proposta por Euler nos séculos XVII e XIX acabou por vigorar apesar de conduzir a diversas incoerências e limitações, pois uma mesma função poderia ser representada por diversas expressões analíticas diferentes (Ponte, 1990).

Ao longo dos anos a definição de função foi sofrendo profundas alterações devido à associação desta com as noções de continuidade e de desenvolvimento em série. Uma destas alterações resultou dos trabalhos de Fourier, que se focava em problemas da condução de calor em objetos materiais, onde considerava a temperatura de um corpo como função de duas variáveis, tempo e espaço. Fourier conjeturou que para qualquer função seria possível obter um desenvolvimento em serie trigonométrica, num intervalo apropriado. Fourier nunca apresentou uma prova matemática para esta afirmação, mas Dirichelet, mais tarde, retomou esta afirmação e apresentou condições suficientes para a representabilidade duma função por uma série de Fourier (Ponte, 1990). Dirichlet "separou então o conceito de função da sua representação analítica, formulando-o em termos de correspondência arbitrária entre conjuntos numéricos", em 1937, (Ponte, 1990, p. 4). Desta forma, uma função seria apenas uma correspondência entre duas variáveis, de tal modo que para todo o valor de variável independente se associa um e um só valor da variável independente (Ponte, 1990). O desenvolvimento da teoria de conjuntos, iniciado por Cantor, em que a noção de função incluiria tudo o que fosse correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos ou não. A noção de função não ficou definida e, da noção de correspondência, passou-se á noção de relação (Ponte, 1990).

Atualmente, o conceito de função é um dos mais importantes do currículo de matemática. Segundo o novo Programa e Metas Curriculares Matemática (2013) o domínio Funções é introduzido no 3º ciclo do ensino básico, no 7.º ano de escolaridade, aquando da abordagem do conceito de função e algumas das suas operações. No entanto, este conceito está informalmente inserido em anos escolares anteriores. Ao longo do 3.º ciclo do ensino básico o domínio de Funções será sempre abordado nos diferentes anos de escolaridade. No 7º ano de escolaridade prevê-se que os alunos saibam que dados dois conjuntos A e B fica definida uma função f (ou aplicação) de A em B quando a cada elemento x de A se associa um e um só elemento do conjunto B, representado por $f(x)$ e que saibam utilizar corretamente os termos "objeto", "imagem", "domínio", "conjunto de chegada", "contradomínio", "pares ordenados" e "variável". Para além disso, os alunos têm de saber representar através de um gráfico cartesiano uma função e associar as representações de funções através de um gráfico cartesiano às expressões algébricas. Neste ano de escolaridade os alunos não só abordam as operações com funções numéricas, como têm a primeira abordagem sobre função constante, função linear, função afim e aprendem o conceito de proporcionalidade direta. No 8º ano de escolaridade pressupõe-se que os alunos tenham adquirido conhecimentos relativos às equações de retas verticais e equações de retas não verticais. Aqui abordam o declive da reta, que é determinado por dois pontos com abcissas distintas e a ordenada na origem. No 9º ano de escolaridade, último ano do 3º ciclo do ensino básico, os conhecimentos dos alunos são aprofundados, pois deverão adquirir conhecimentos sobre as funções de proporcionalidade inversa e reconhecer uma nova família de função, reconhecer a função do tipo $y = ax^2$ $(a \neq 0)$. Neste seguimento, os alunos abordam o conjunto-solução de uma equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ como interseção da parábola de equação $y = ax^2$ com a reta de equação $y = -bx - c$. Ao concluírem o ensino básico os alunos deverão ter conhecimento sobre os diferentes tipos de função, ou seja, função afim, função linear, função constante, função da família $f(x) = ax^2$, funções de proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa.

O domínio Funções no ensino secundário continua a ser um dos mais importantes da matemática, pois ganha grande foco relativamente aos anos anteriores. No 10º ano de escolaridade, o domínio é o mais trabalhado, pelo que exige que a ele seja dedicado a máxima atenção, sendo necessário tempo suficiente para ele. No 10º ano de escolaridade, inicia-se o domínio de funções com alguns conceitos gerais sobre funções, como função injetiva e sobrejetiva, a restrição de uma função a um dado conjunto, definem-se as noções de composição de funções e de função inversa. Numa fase seguinte, estabelecem-se relações entre as propriedades de funções, como por exemplo, a paridade de uma função e as simetrias existentes no gráfico. Um dos subdomínios deste domínio – *Função* – são as transformações geométricas dos gráficos de funções através de diferentes operações, adição e multiplicação, sobre as variáveis, dependente ou independente, de uma dada função. A monotonia e extremos de uma função, função quadrática e função módulo fazem parte deste domínio. Os conceitos de função raiz quadrada e função raiz cúbica, função módulo e função definida por ramos são os conteúdos com que o domínio termina.

Se nos dias que correm o conceito de função tem um grande destaque no currículo do ensino secundário, nem sempre foi assim, apesar de já no início do século XX Felix Klein argumentar que o conceito função deveria estar presente em todo o currículo de ensino matemático. Apesar da importância da presença do conceito função nunca ter sido discutido, as funções por vezes não têm o devido destaque no currículo. Para Ponte (1990) o papel curricular do conceito função pode ser visto tendo em consideração "três aspetos essenciais: i) a natureza mais algébrica ou mais funcional da abordagem, ii) a generalidade do conceito, e iii) a sua aplicação a problemas e situações da vida real e de outras ciências" (p. 6). Para este autor existem duas formas distintas de desenvolver o estudo da álgebra. Numa é dada prioridade às equações e expressões designatórias; na outra noção de função e representação gráfica. Ambas pouco divergem, o conteúdo é praticamente o mesmo, apenas as abordagens são bastante distintas. A primeira privilegia aspetos simbólicos e formais e a segunda privilegia aspetos intuitivos e relacionais.

Para Ponte (1990), em Portugal, nunca se chegou a cair em exageros como em outros países, exageros esses cometidos no período denominado por 'Matemática Moderna'. Em Portugal, sempre houve bom senso suficiente para nunca se adotar definições no estilo bourbakista "uma definição é um conjunto de pares ordenados" (Ponte, 1990, p. 6). Ao estudo do conceito função junta-se o estudo das proporcionalidades direta e inversa, bem como as funções quadráticas e funções trigonométricas. A preocupação de introduzir muita terminologia abstrata, que nunca chega a ser usada de forma significativa, é uma tentação frequente nos programas em Portugal e em outros países (Ponte, 1990). Segundo Ponte (1990), um aspeto importante na tradição dos programas de Portugal relativamente ao ensino de funções tem sido particularmente pobre, não é dado relevo à ligação da matemática com a realidade. A ideia de função é possível ser introduzida logo no ensino primário através das relações binárias, mas tem sido feito de diversas maneiras. Os alunos deverão familiarizar-se e trabalhar com vários tipos de funções, desde o pré-escolar até ao ensino secundário (NCTM, 2007). Nesse sentido, o NCTM (2007) na descrição global das normas do pré-escolar ao 12.º ano de escolaridade, refere que os programas de ensino deverão habilitar todos os alunos a:

- Compreender padrões, relações e funções;

- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- Analisar a variação em diversos contextos.

Segundo Ponte (1990) já há algum tempo que o objetivo de um programa inovador de matemática seria introduzir conceitos abstratos o mais cedo possível, logo no ensino primário. Hoje em dia "parece ser cada vez mais aceite que a noção de função deve ser introduzida, como conceito com identidade própria, no 7° e no 8° ano de escolaridade, ou seja, no 3° ciclo do ensino básico" (Ponte, 1990, p.7). Desta forma, segundo o novo Programa e Metas Curriculares Matemática (2013) o domínio Funções é introduzido no 7° ano de escolaridade. A experiência sistemática com padrões poderá vir a desenvolver a compreensão da noção de função, por isso é essencial ter uma base sólida de um trabalho em álgebra feito desde dos primeiros anos escolares até ao 2° ciclo (NCTM, 2007). Segundo Ponte (1990) muitos alunos chegam a este ano de escolaridade ainda com muitas dificuldades no raciocínio abstrato.

A álgebra integra o estudo das funções e este é um dos domínios mais importantes da Matemática. O NCTM (2007) defende que "todos os alunos deveriam aprender álgebra" (p. 39) e por isso descreve os objetivos a serem alcançados pelos alunos entre o pré-escolar e o 12° ano de escolaridade.

Os programas de ensino do pré-escolar ao 12.° ano deverão habituar todos os alunos para: compreender padrões, relações e funções; representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos; usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; analisar a variação em diversos contextos. (NCTM, 2007, p. 39)

Segundo o NCTM (2007), o estudo de álgebra envolve o reconhecimento, a comparação e a análise dos padrões, que fazem parte do quotidiano dos alunos, sendo atividades importantes para o seu desenvolvimento intelectual. A identificação dos padrões que existem em determinados conjuntos de objetos, formas e números e a utilização desses padrões para prever o termo seguinte desenvolvem o raciocínio lógico e o pensamento pré-algébrico.

2.2.2. Raciocínio Funcional

Um dos principais objetivos do ensino de Matemática é promover o desenvolvimento do raciocínio dos alunos "o que justifica o importante papel da matemática em todos os sistemas educativos" (Ponte et al., 2012, p. 2). O raciocínio utilizado pelos alunos é fundamental na sua aprendizagem, uma vez que é partindo desta capacidade de raciocinar que os alunos adquirem novos conhecimentos. Para Ponte et al. (2012) os alunos adquirem novos conhecimentos através de um processo evolutivo do raciocínio, e, com o uso de conhecimentos prévios, alcançam novos conhecimentos.

Segundo, Domingos et al. (2013) o raciocínio matemático está associado a diferentes formas de pensar, tais como: prever resultados essenciais para a formulação de conjeturas; questionar as soluções, mesmo corretas; procurar padrões; recorrer a diferentes representações na resolução de problemas; analisar e sintetizar. A resolução de problemas ou a demonstração de alguma conjetura é impossível de realizar sem a utilização do raciocínio matemático. Em ambos, a resolução de problemas e a demonstração de conjeturas, são formas utilizadas pelos alunos para desenvolverem o seu próprio raciocínio matemático (Barbosa, 2013). As ligações entre os diferentes conteúdos, a comunicação e as representações utilizadas pelos alunos nas resoluções são a base do raciocínio matemático desenvolvido, levando a uma tomada de decisão no processo de aprendizagem de cada aluno (Barbosa, 2013). Na perspetiva de Abrantes et al. (1999) o raciocínio matemático é uma certa "atividade intelectual". Estes afirmam que para os alunos desenvolverem esta "atividade intelectual" é necessária a existência de diferentes conteúdos e a cada um associa-se uma variedade de raciocínios, respetivamente: Aritmética, Álgebra, Geometria entre outros. Assim, o ensino da matemática tem por base uma diversidade de tipos de raciocínio.

O raciocínio algébrico está associado ao domínio de Álgebra, que inclui a capacidade de manipular símbolos, mas não vai muito além disso. No NCTM (2007), o pensamento algébrico, diz respeito ao estudo de estruturas, de símbolos, à modelação e ao estudo de variação. Desta forma, as normas apresentadas no NCTM (2007) dizem respeito às aprendizagens direcionadas ao domínio Álgebra:

- Compreender padrões, relações e funções, (estudo das estruturas),
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos (simbolização),
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas (modelação),
- Analisar a variação em diversos contextos (estudo da variação) (NCTM,2007).

Como é referido anteriormente, o raciocínio algébrico é influenciado pelo pensamento algébrico, pois usa o cálculo algébrico, bem como as funções e estruturas matemáticas na interpretação e resolução de problemas.

Kaput (2008) associa o estudo de álgebra a dois aspetos centrais: (i) Formular e expressar generalizações; e (ii) Raciocinar através da manipulação dos simbolismos das generalizações. Estes aspetos integram três domínios: (i) Álgebra como estudo de estruturas e generalizações de cálculos e das relações numéricas (aritmética generalizada); (ii) A álgebra como estudo das funções, relações e variações (relações funcionais); e (iii) A Álgebra como a aplicação em situações de modelação matemática de forma a exprimir e formalizar generalizações.

Kaput e Blanton (2005) consideravam o pensamento algébrico como "um processo no qual os alunos generalizavam ideias matemáticas a partir de casos particulares, estabelecendo essas generalizações através do discurso da argumentação, expressando-as gradualmente de modos formais e apropriados à idade" (p. 413). Na promoção deste raciocínio utilizam-se diversas ferramentas linguísticas e representacionais, explorando as relações generalizadas ou as funções que constituem este processo. O raciocínio funcional é um dos principais eixos do pensamento algébrico (Kaput, 2008). Canavarro (2007) tem também uma visão sobre o pensamento algébrico direcionado a dois aspetos essenciais, tais como: (i) aprendizagem focada na aritmética generalizada; e (ii) o raciocínio funcional. Para Kieran (2007), o pensamento algébrico faculta um conjunto de estruturas matemáticas capazes de representar a generalização de relações matemáticas, dando destaque a padrões e a regras matemáticas. Para Radford (2014) o pensamento algébrico é definido como uma forma de reflexão e ação matemáticas, dando destaque à forma elementar desse pensamento considerando que não seja exclusivamente focado nos simbolismos alfanuméricos. Swafford e Langrall (2000) consideram o pensamento algébrico como a capacidade de pensar em quantidades desconhecidas como sendo conhecidas.

Na literatura é possível observar a atribuição de diferentes atribuições sobre o pensamento algébrico, mas independentemente da definição atribuída, o princípio básico do pensamento algébrico consiste na construção da generalização.

Pelas definições apresentadas o pensamento algébrico este pode assumir diversas formas, entre elas o raciocínio funcional, que Kaput (2008) referiu como sendo um dos principais eixos do pensamento algébrico, assim como Canavarro (2007). Raciocínio funcional pode ser definido como sendo um processo de raciocínio utilizado na construção e generalização de padrões e relações, tendo por base o uso de diversas ferramentas linguísticas e diferentes representações, com exploração das generalizações das relações ou funções que constituem (Blanton, 2008). Para Blanton (2008), o centro do raciocínio funcional é a relação entre duas grandezas, ou seja, usando a lei de formação de correspondência entre duas grandezas particulares. Abrantes et al. (1999) referem que como forma de desenvolver o raciocínio funcional dos alunos, deverão ser trabalhados padrões generalizados tendo como ponto de partida dados de situações que lhe são familiares. Os alunos ao explorarem este tipo de relações que envolvem correspondências e variações, virão que isso os ajuda desenvolver o raciocínio funcional dos alunos. O professor pode ajudar os alunos a desenvolverem o raciocínio funcional através de tarefas que impliquem a descoberta e generalização de padrões, conduzindo os alunos à definição de função. Segundo o NCTM (2014), Blanton e Kaput (2011), a capacidade de reconhecer padrões, conseguir relacionar dados e representar as suas correspondências através de regras funcionais bem definidas, é crucial para o desenvolvimento do pensamento algébrico e este levará ao raciocínio funcional. A generalização de padrões é uma atividade central na Matemática (Masson, 1996). A capacidade dos alunos em associarem entre padrões e a generalização dos mesmos, segundo Masson (1996), poderá levar de forma natural à expressão da generalidade. Esta atividade pode facilitar uma melhor compreensão de relações entre as quantidades implícitas nas funções matemáticas, sendo um contributo para estabelecer relações do tipo funcional (Barbosa, 2013; Blanton & Kaput, 2005; Kaput, 2011; Warren, 2008).

De forma a desenvolver o raciocínio funcional, uma das formas a seguir é a exploração de relações, de correspondências e de variações existentes entre duas variáveis, tendo como ponto de partida um caso particular e como conclusão a generalização (Rodrigues, 2016).

Smith (2008) advoga que o raciocínio funcional implica a utilização do pensamento relacional, focando-se em especial na relação entre duas variáveis, partindo de relações particulares para a generalização. Este autor considera três formas distintas para analisar as relações: (i) o pensamento recursivo, na descoberta da variação de valores; (ii) o pensamento covariacional, percebendo a forma como duas quantidades variam simultaneamente e considerando a variação como uma parte explícita e dinâmica da descrição de uma função; e (iii) a relação de correspondência, que se traduz na compreensão da relação existente entre cada valor da variável independente e da variável dependente. Também, para Rodrigues (2016) existem três formas distintas de estabelecer relações: (i) geometricamente, com o uso de esquemas e gráficos; (ii) aritmeticamente, com recurso a tabelas e pares ordenados; e (iii) algebricamente, utilizando símbolos e fórmulas. Para os autores Ursini e Triguenos (2001) a compreensão das relações funcionais das variáveis envolvem um conjunto de capacidades que os alunos têm de trabalhar, tais como:

(i) Reconhecer as correspondências entre quantidades, independentemente da representação utilizada;

(ii) Determinar o valor da variável independente e da variável dependente e vice-versa;

(iii) Reconhecer a variação conjunta das variáveis da relação, independentemente da representação utilizada;

(iv) Determinar o intervalo de variação de uma das variáveis quando já é conhecido o da outra variável;

(v) Expressar a relação funcional apresentada, com base nos dados do problema proposto, as diferentes formas de representação.

De forma geral, raciocínio funcional define-se como sendo o raciocínio utilizado para estudo das relações e correspondências entre quantidades, duas ou mais, que variam e levando à generalização. Assim fica definido o que é o raciocínio funcional e quais os aspetos relevantes do mesmo. Segundo Tanisli (2011) o raciocínio funcional é um tópico importante e central em matemática. No estudo de funções é essencial que os alunos consigam compreender de que modo as variáveis se relacionam para que possam explicitar a relação funcional existente entre elas (Matos, 2007; Matos & Ponte, 2008). Diferentes autores defendem que uma boa forma de desenvolver e analisar o raciocínio funcional dos alunos é a aplicação de tarefas em que seja possível o uso das diversas formas de representações de funções. Ao analisar a forma como cada representação é feita e o progresso entre as diferentes representações possibilita depreender o raciocínio que o aluno desenvolveu (Abrantes et al., 1999; Kaput, 1999; NCTM, 2007; Ponte et al., 2009). Para Kieran as relações funcionais podem ser representadas de três formas distintas: (i) geometricamente, transversalmente de esquemas, diagramas, gráficos, entre outros; (ii) aritmeticamente, recorrendo a números, tabelas ou pares ordenados e; (iii) algebricamente, através do uso de símbolos literais, fórmulas e correspondências. Segundo este autor o uso de tarefas que permita o uso das diferentes representações, interpretando e analisando as relações entre as variáveis irão permitir o desenvolvimento do raciocínio funcional dos alunos. Diversos investigadores (Cyruno & Oliveira, 2011; Rodrigues, 2016; Vale, 2013) afirmam que uma das formas de desenvolver e analisar o raciocínio funcional é através de tarefas que possibilitem a diversificação de diferentes formas de representação de uma função. Esta variação do uso de diferentes formas de representar uma função permite que os alunos explorem a noção de função.

Smith (2003) apresenta duas formas distintas de analisar uma função e as relações funcionais. Uma forma de analisar, deste autor, refere-se à compreensão da relação de correspondência entre os valores existentes de cada variável e a relação que está associada a cada valor que toma. Esta análise por vezes leva a que os alunos consigam representar as funções através de uma expressão algébrica ou a outro tipo de representação possível para funções. Por outro lado, o autor, diz que a análise poderá ser feita ao modo como a variação dos valores de uma variável implicam a variação da outra variável, sendo identificado como covariação (Smith, 2003). No que diz respeito ao estudo da covariação de uma função para os alunos é executado de forma mais intuitiva, como uma primeira abordagem feita para a resolução de problemas que lhe são apresentados, refere Smith (2003). O estudo da covariação permite aos alunos compreender o “comportamento” de uma função através de padrões associados a cada uma das variáveis. Uma abordagem inicial baseada em compreender as regularidades existentes poderá levar ao desenvolvimento da relação de correspondência, e assim ser representada algebricamente. Segundo Smith (2003), o estudo da covariação de uma função é importante porque a mudança que é observada e o que é retido sobre o problema apresentado é, consequentemente, o que é mais importante a ter em conta na situação apresentada. Estes modos de análise de uma função apresentados por Smith (2003) remeto-nos para as três formas distintas de analisar o raciocínio funcional, anteriormente apresentadas.

Vários investigadores, como Blanton et al. (2008), têm destacado o facto de os alunos, desde o 1.º ciclo, poderem usar uma diversidade de ferramentas em prol do desenvolvimento do seu raciocínio sobre funções. Desde os níveis escolares mais elementares os alunos podem recorrer a tabelas, desenhos, gráficos, palavras ou símbolos de relações recursivas, de covariação e de correspondência. A compreensão do conceito de função por parte dos alunos começa a desenvolver-se antes da introdução formal das funções e o professor pode ajudar os alunos a desenvolver o raciocínio funcional (NCTM, 2007), facilitando a construção e a compreensão do conceito de função desde dos primeiros ciclos de ensino. Blanton e Kaput (2005) partilham da mesma opinião e salientam a importância do raciocínio funcional ser trabalhado desde dos primeiros anos de escola, tendo por base o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos. Uma das formas de dar foco a este raciocínio é a afirmação que o raciocínio funcional leva ao pensamento algébrico, opinião partilhada por vários autores, sendo um dos principais condutores para o desenvolvimento do pensamento algébrico (Barbosa, 2013; Blanton & Kaput, 2008; Kaput, 2008)

2.2.3. Dificuldades de aprendizagem de funções

O conceito função é considerado um dos mais importantes em toda a matemática, segundo Ponte (1992). No entanto, é também um dos temas em que os alunos sentem mais dificuldade. As dificuldades existentes no estudo de funções estão bem definidas e serão resultantes da introdução de uma linguagem própria dos processos algébricos, em particular no estabelecer e definir relações entre variáveis (Canário et al., 2011). As investigações sobre as dificuldades sentidas pelos alunos no estudo de funções são várias. Estas mesmas investigações de forma geral mostram que os alunos sentem dificuldade na compreensão do conceito de funções e termos associados às funções, em cada uma das suas representações de funções e na passagem de uma representação para a outra. Sfard (1991) salienta a dificuldade dos alunos em identificarem o conceito de função com uma das suas representações que possam ser associadas. A maioria dos alunos sente dificuldade no pensamento abstrato (Ponte, 1992), em particular quando o trabalho é feito com gráficos cartesianos, com recurso a estratégias e processos de raciocínio numérico.

As principais dificuldades dos alunos no estudo de funções destacadas pelos autores Ponte et al. (2009) é o uso de uma terminologia própria, como o domínio, contradomínio, objeto, imagem, entre outras. Esta dificuldade é sentida, principalmente, quando estes aparecem em contexto exclusivamente matemático. Estes mesmos autores referem que os alunos sentem dificuldade na utilização correta da simbologia associada ao estudo de funções, na passagem de uma representação de uma função para outra representação, e na resolução de exercícios saber qual a informação correta e necessária a utilizar e na interpretação das soluções obtidas no contexto dos problemas dados. De forma a ajudar os alunos a colmatar estas dificuldades estes autores apresentam estratégias, como a utilização de tarefas com aproximação à realidade e não só tarefas com resolução exclusivamente matemática, ou seja, mais abstrata em que é necessário a manipulação simbólica das expressões algébricas. Matos (2007) salienta essas dificuldades sentida pelos alunos. Ou seja, os alunos demonstram dificuldades na análise e na descrição do comportamento da variação das variáveis assim como na passagem, interpretação e construção das representações de uma função, nomeadamente na representação gráfica de uma função (Matos, 2007). As dificuldades podem surguir pelo facto de os professores utilizarem tarefas de forma inadequada e a dificuldade na interpretação da representação gráfica. Estas dificuldades fazem com que não haja contextualização da situação e descrição feita para alunos.

Segundo Sierpinska (1992), as dificuldades dos alunos evidenciam-se quando é necessário realizar cálculos, ou seja, quando os alunos têm que calcular o valor do objeto dada uma imagem e vice-versa. Este fato está relacionado com o que Domingos (1994) refere, que os alunos assumem que a cada valor de x corresponde a um e um só valor de y e que o caso contrário também é verdade quando se associa os valores das variáveis. Em suma, Domingos (1994) refere que os alunos têm dificuldade na identificação das variáveis envolvidas nas tarefas apresentadas e na compreensão do conceito de variável. Segundo este autor a compreensão do conceito de variável é fundamental para compreender as relações funcionais e as representações gráficas, conduzindo assim à compreensão das funções. Esta dificuldade é defendida por Smith (2003) que aponta que a noção de variável é uma das principais dificuldades dos alunos no estudo das funções. Este autor defende que de forma a combater esta dificuldade o professor em sala de aula deve criar discussão que envolva o conceito de variável.

Saraiva e Teixeira (2009) defendem que as dificuldades que os alunos apresentam é o facto que não conseguirem memorizar o conceito função. Da mesma forma, Sajka (2003) atribui as dificuldades sentidas pelos alunos ao próprio conceito de função. Ou seja, $f(x)$ pode representar a função f, ou valor de um certo objeto, a imagem. Da mesma forma quando no certo contexto do problema/tarefa representamos y este pode ser apenas a representação do valor de um par ordenado ou então estamos a referir-nos a um valor de uma função. Assim, Prates et al. (2001) afirmam que a interpretação do contexto do problema apresentado pode confundir os alunos e assim gerar algumas dificuldades. Vinner (1983) menciona duas principais dificuldades sentidas pelos alunos: (i) a noção de função, e (ii) a utilização correta por parte dos alunos da noção de função. Estas dificuldades vão de encontro às dificuldades apresentadas por Sajka (2003). Para Kaput (1999) o facto de os alunos terem de lidar com símbolos formais algébricos e de terem de relacionar as várias representações é referida como uma dificuldade no estudo de funções, defendendo que os alunos devem realizar tarefas que possam envolver as diferentes formas de representação. A aplicação destas tarefas ajudará os alunos na aprendizagem de funções e no desenvolvimento do pensamento algébrico. Saraiva e Teixeira (2009) partilham da mesma opinião em relação à aplicação destas tarefas, pois salientam que este tipo de tarefas ajudará a desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Além disso, poderá ajudar os alunos na compreensão entre as relações das variáveis, na compreensão e manipulação dos símbolos existentes, sendo estas dificuldades apresentadas por estes autores.

As dificuldades apresentadas pelos autores mencionados anteriormente envolvem a manipulação das expressões algébricas, ou seja, uso incorreto da terminologia associada às funções, assim como, a passagem de uma representação para a outra utilizada nas funções. Outras dificuldades dos alunos evidenciadas pelos autores referem-se à identificação das relações entre as variáveis, a variação das mesmas e a compreensão do conceito de função. Além da passagem de uma representação para a outra, os alunos apresentam dificuldade fazer as próprias representações das relações funcionais, sendo elas gráficas, tabelas e algébricas. As dificuldades anteriores levam os alunos a terem dificuldades na resolução de problemas e tarefas envolvendo funções.

2.3. Estratégias de Intervenção

Esta secção é composta por duas partes, na primeira parte, pretendo apresentar as metodologias de ensino utilizadas durante a minha intervenção pedagógica. Na segunda parte, serão apresentadas as estratégias de avaliação que implementei na minha intervenção pedagógica.

2.3.1. Metodologias de ensino e de aprendizagem

As metodologias de ensino e de aprendizagem pensadas para aplicar na minha intervenção pedagógica tem como foco os alunos, ou seja, que os alunos tivessem uma participação ativa na sua aprendizagem e na elaboração dos conceitos matemáticos. A minha prioridade eram os alunos pois estes precisam de oportunidade para que possam raciocinar matematicamente sobre ideias importantes e atribuir sentido ao conhecimento matemático que surge em discussões de tarefas propostas pelo professor em sala de aula (NCTM, 2007).

A minha intervenção pedagógica teve dois momentos de intervenção distintos, aulas presenciais e aulas virtuais, tendo por base o ensino exploratório. Num primeiro momento, a minha intervenção pedagógica realizou-se em aulas presenciais, tendo por base o modelo de ensino exploratório. O ensino exploratório da matemática defende que os alunos aprendem a partir das tarefas que realizam. Na realização das tarefas, os alunos têm possibilidade de rever e desenvolver conhecimentos e procedimentos matemáticos e, simultaneamente, desenvolver as capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemática, permitindo assim o desenvolvimento crítico dos alunos. Este tipo de ensino dá destaque ao trabalho realizado pelos alunos. Para Ponte (2005), a característica principal do ensino exploratório é que "o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos" (p. 13). Uma aula de ensino exploratório está dividia em quatro fases: (I) introdução da tarefa; (II) desenvolvimento da tarefa; (III) discussão da tarefa; e (IV) sistematização das aprendizagens matemáticas (Canavarro et al., 2012).

Num primeiro momento das aulas, *Introdução da tarefa*, apresentava uma tarefa aos alunos, explicando o que deviam fazer, quais os objetivos com a realização da tarefa, e esclarecendo as dúvidas que surgiam, garantindo assim que os alunos interpretassem adequadamente a tarefa. Como referem Ponte et al. (2011), informava os alunos do tempo disponível para a realização da tarefa. Para estes autores, a apresentação da tarefa de forma esclarecedora e detalhada é importante para que os alunos comecem a resolução da mesma com maior motivação.

Na segunda fase, *Desenvolvimento da tarefa,* os alunos desenvolveram a tarefa de forma autónoma, em que a minha função, como professora, consistiu em incentivar e orientar os alunos, fazendo questões essenciais ou realizar apenas comentários sobre o trabalho, para que chegassem ao que era pretendido com a tarefa. Neste momento da aula procurava garantir que os alunos desenvolvessem a tarefa e conseguissem organizar as ideias para a apresentação e para a discussão da mesma no momento seguinte. Neste segundo momento as tarefas foram resolvidas, sobretudo, em grupo para permitir aos alunos a troca de ideias e a apresentação de diferentes tipos de resolução.

Após a conclusão das tarefas por parte dos alunos, surge o momento da *Discussão da tarefa.* Neste momento de aula promovia a discussão entre os alunos, pedindo explicações e justificações sobre as suas resoluções. Procurava assegurar que não existissem repetições, organizando as apresentações dos alunos de modo que se complementassem no seguimento das apresentações. Desta forma o grupo/aluno que tinha a resolução mais detalhada e/ou avançada era quem fazia a sua apresentação no quadro. Este momento permitiu aos alunos confrontar estratégias de resolução diferentes e argumentar a sua resolução que apresentavam aos restantes colegas de turma. Por fim, na *sistematização das aprendizagens matemáticas*, considerava as ideias dos alunos, sintetizando os aspetos mais importantes relativamente a procedimentos de resolução e tópicos matemáticos explorados na resolução da tarefa, como também estabelecia conexões entre as aprendizagens que surgiam e as aprendizagens anteriores. Este modelo foi escolhido para que envolvesse os alunos nas atividades das aulas que lecionei e assim valorizar o que os alunos diziam e faziam.

Na minha intervenção, após ter definido o tipo de ensino, de forma a envolver os alunos no decorrer da aula houve necessidade de pensar nas tarefas e no tipo de tarefas a propor-lhes. Além de criar oportunidade de tornar os alunos mais ativos na aula havia necessidade de criar oportunidade para os alunos raciocinarem matematicamente. Este envolvimento dos alunos nas tarefas é importante para a descoberta e construção dos seus conhecimentos. A aprendizagem dos alunos depende das tarefas que são propostas para que possam sentir interesse na resolução das mesmas. Desta forma, as tarefas propostas aos alunos devem ser diversificadas e ricas matematicamente (Ponte, 2005). Este autor refere ainda que não basta escolher boas tarefas é preciso ter em atenção como o professor pretende conduzir a aula e a forma como vai propor a tarefa aos alunos. As tarefas a propor aos alunos podem ser mais desafiantes ou então mais acessíveis, umas abertas outras mais fechadas, umas apenas com conteúdos matemáticos e outras com aplicação na realidade. Ponte (2005) classifica as tarefas de duas formas distintas: grau de desafio e grau de estrutura. O grau de desafio matemático relaciona-se com a dificuldade de uma questão, que varia entre desafio reduzido e elevado, enquanto o grau de estrutura varia entre o aberto e o fechado. Uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é aquele onde há um determinado grau de indeterminação do que é dado e/ou do que é pedido. Na construção das minhas tarefas tive em atenção as dimensões referidas anteriormente, grau de desafio matemático e o grau de estrutura. Assim, pretendi que as tarefas que integrei nas minhas estratégias de ensino fossem diversificadas de forma a desafiar os alunos a construir o seu próprio conhecimento.

Após o dia 18 de março o país entrou em confinamento e as aulas passaram a ser virtuais. De forma a continuar a minha intervenção, e tendo por base o ensino exploratório, os passos deste tipo de ensino foram readaptados. Desta forma, num primeiro momento, enviava a tarefa aos alunos, no dia anterior à aula, para que a resolvessem. No momento posterior, já em aula virtual, a mesma era exibida e os alunos iam apresentando as suas respostas e assim era gerada a discussão entre eles sobre as diferentes resoluções. Após esta discussão e numa fase final da aula virtual, que durava 50 minutos, era feita a síntese de acordo com os pontos trabalhados na aula.

2.3.2. Estratégias de avaliação

Na intervenção pedagógica que realizei recorri a deferentes instrumentos de recolha de dados, tais como: gravações áudio e vídeo das aulas que lecionei; produções dos alunos (resolução de tarefas propostas em aula); e questionário inicial e final. Esta recolha de dados ao longo da minha intervenção pedagógica tem como objetivo o estudo do raciocínio funcional dos alunos no estudo de função no 10.º ano de escolaridade.

A gravação vídeo e áudio das aulas que lecionei registou as discussões, dúvidas e diálogos entre os alunos e entre professora e alunos que aconteciam durante as aulas. Para que esta recolha fosse possível foi pedida autorização ao diretor da escola e, posteriormente, aos encarregados de educação dos alunos para se gravar as aulas, em vídeo e áudio, ao longo da intervenção realizada (Anexo 1 e Anexo 2). A autorização por parte dos encarregados foi favorável, tendo todos autorizado a gravação de vídeo e áudio das aulas. Desta forma, foram gravados todos os momentos da minha prática pedagógica. Como a minha intervenção pedagógica teve aulas presenciais e aulas virtuais, as gravações áudio e vídeo no primeiro método de ensino correu como planeado inicialmente. Já nas aulas virtuais, as gravações foram apenas de áudio.

No decorrer das aulas os alunos foram desafiados a resolver tarefas propostas por mim. Essas tarefas serviram para a aquisição e exploração dos conteúdos e foram desenvolvidas individualmente ou em grupo, para uma posterior análise sobre a relação que os alunos fazem entre os conteúdos lecionados e a resolução das tarefas. Durante as aulas virtuais as tarefas foram resolvidas individualmente. A resolução em pequenos grupos teve como objetivo promover a interajuda entre os alunos. Nestes momentos de trabalho em grupo esperava que os alunos partilhassem ideias entre si e que conseguissem sustentar as suas ideias. Outra análise a considerar foi a capacidade que os alunos tinham na partilha das suas ideias aos outros colegas da turma. De forma a fazer esta análise, as tarefas foram resolvidas pelos alunos e posteriormente discutidas no quadro, por um aluno, para assim comunicarem matematicamente o seu raciocínio e salientarem características do raciocínio funcional que os alunos foram desenvolvendo. A análise da resolução das tarefas tem como foco a capacidade do aluno estabelecer algum tipo de relação entre as variáveis, dando ênfase ao raciocínio funcional desenvolvido pelos alunos e a evolução desse mesmo raciocínio durante a intervenção pedagógica. As produções dos alunos são identificadas por A# em que # representa um número distinto atribuído a cada aluno. No decorrer das aulas houve momentos de exploração dos conteúdos, mas também momentos de intervenção dos alunos e descoberta por parte deles, de modo a que o seu raciocínio fosse desenvolvido. O desenvolvimento do raciocínio vai ao encontro de um dos objetivos salientados na Lei de Bases do Sistema Educativo (LBSE) que acentua que se deve “assegurar o desenvolvimento do raciocínio, de reflexão e da curiosidade científica” (LBSE, 2005).

De forma a recolher informação individual dos alunos foram realizados questionários. Os questionários (Anexo 3 e Anexo 5) foram realizados no início e no final da minha intervenção pedagógica e tiveram análises diferentes. O questionário inicial teve como objetivo principal obter informação sobre os gostos, preferências e as dificuldades dos alunos relativamente à matemática e ao estudo de funções, materiais tecnológicos usados pelos alunos e as perceções que tinham relativamente ao raciocínio e ao raciocínio funcional. O questionário final proposto aos alunos teve com objetivo perceber se sentiram dificuldade na aprendizagem de funções, recolher as suas perceções sobre as componentes a serem analisadas sobre o raciocínio funcional (os três pontos do raciocínio funcional) e perceber qual o contributo da minha intervenção na sua aprendizagem de funções. No questionário final havia três questões direcionadas às diferentes modalidades de ensino durante a minha intervenção (aulas presenciais e aulas virtuais). No questionário final o primeiro grupo era constituído por questões de resposta fechada em que cada aluno teve de escolher uma de cinco opções apresentadas, segundo a seguinte escala: DT: Discordo Totalmente; DP: Discordo Parcialmente; I: Indiferente; CP: Concordo Parcialmente; CT: Concordo Totalmente. O grupo seguinte era constituído por respostas abertas onde os alunos foram questionados sobre os diferentes métodos de ensino e quais as suas vantagens e desvantagens. De seguida, foram apresentadas questões sobre as vantagens/desvantagens das tarefas para a evolução do raciocínio funcional e na aprendizagem de funções. Por fim, surge uma questão sobre as dificuldades sentidas no estudo de funções e outra questão sobre o que os alunos ficaram a entender por raciocínio funcional no fim do estudo sobre funções.

Os instrumentos referidos anteriormente utilizados para a recolha de dados contribuíram para a análise da informação obtida que será feita no Capítulo 3 deste relatório.

CAPÍTULO 3

INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Este capítulo está divido em duas secções onde são apresentados os resultados obtidos ao longo da minha intervenção pedagógica. Para dar resposta às questões que me propus a responder sobre o contributo do estudo de funções para o desenvolvimento do raciocínio funcional, selecionei aulas para fazer a minha intervenção pedagógica. Desta forma todas as aulas estão relacionadas com o estudo de funções e com tópicos das mesmas (Tabela 1).

Tabela 1. Planificação da intervenção pedagógica

Aula	Tópicos	Objetivos	Método de ensino
1	-Preenchimento do questionário inicial	- Identificar características dos alunos - Diagnosticar conhecimentos prévios dos alunos sobre funções	Aulas presenciais
2	- Recordar os conceitos sobre funções	-Definição de função Reconhecer as diferentes representações gráficas - Reconhecer as diferentes funções algébricas	
3	- Generalidade de funções	- Identificar o produto cartesiano de dois conjuntos - Identificar o gráfico de uma função - Função real de variável real - Identificar a restrição de uma função a um dado conjunto - Caraterização de uma função	
4	- Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva.	- Reconhecer função injetiva, sobrejetiva e bejitiva	
5	-Função composta	- Caracterizar a função composta e duas funções.	
6	- Função Inversa	- Caracterizar a função inversa de uma função.	Aulas virtuais
7	- Função par e função ímpar.	- Classificar a paridade de uma função.	
8	- Transformações do gráfico de uma função	-Reconhecer as transformações associadas ao gráfico de uma função	
9	- Transformações do gráfico de uma função	-Reconhecer as transformações associadas ao gráfico de uma função	
10	- Transformações do gráfico de uma função	- Sistematizar conhecimentos adquiridos sobre as transformações de gráficos de funções	
11	- Monotonia e extremos de uma função. - Preencher o questionário final	- Identificar intervalos de monotonia de funções reais de variável real.	

Na Tabela 1 é apresentada uma planificação da estratégia utilizada que foi o fio condutor para a realização da intervenção pedagógica. Durante esta tive o cuidado de elaborar planos de aulas detalhados (Anexo 4). Ao longo das aulas os alunos resolveram tarefas sobre os conteúdos que estavam a ser lecionados. A este respeito, apresento, de seguida, a minha interpretação sobre as mesmas tendo como foco o desenvolvimento do raciocínio funcional dos alunos.

3.1 Momentos de Intervenção Pedagógica

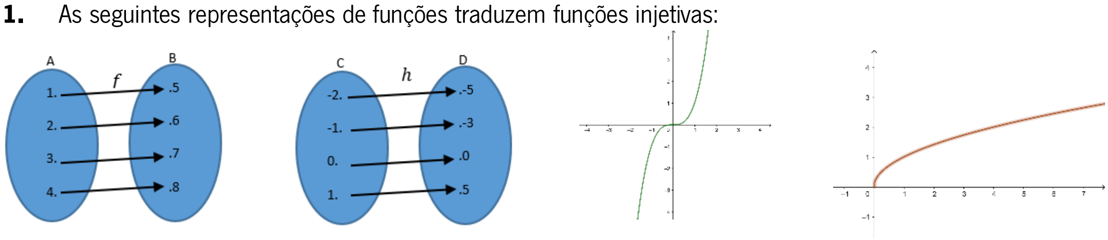
Nesta secção descrevo, analiso e interpreto momentos de aulas que lecionei no estudo de tópicos de funções, tais como: função injetiva, função sobrejetiva e função bijetiva; função composta; e transformações do gráfico de uma função. Na seleção destes tópicos ponderei refletir a vivência da minha prática pedagógica num ano letivo marcado pelo quadro pandémico derivado ao SARS-Cov-2A, o que fez com que as atividades letivas decorressem em dois formatos distintos: presencial e a distância. Com o intuito de traduzir a minha ação pedagógica em cada um destes formatos, selecionei os dois primeiros tópicos que foram trabalhados com os alunos em aulas presenciais e o terceiro tópico em aulas virtuais.

3.1.1. Função Injetiva, Função Sobrejetiva e Função Bijetiva

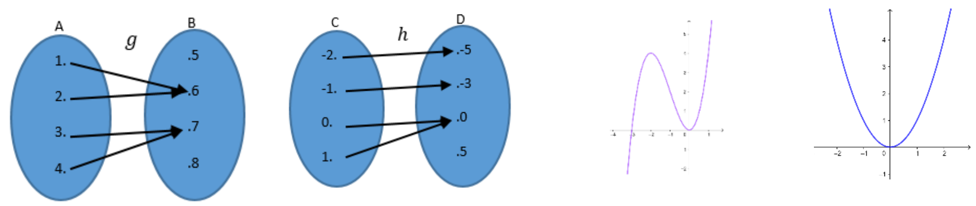
No estudo do conceito de 'função injetiva, função sobrejetiva e função bijetiva', os alunos trabalharam individualmente, em contexto de sala de aula, e envolveram-se na resolução da Tarefa 1, que era constituída por representações que ilustram exemplos e não exemplo de tais conceitos. Trata-se de uma tarefa constituída por uma sequência lógica de três questões cujo objetivo foi pensado para levar os alunos a definirem função injetiva, função sobrejetiva e função bijetiva. Cada questão apresenta oito exemplos de funções, dos quais quatro contemplam características referentes ao tópico em estudo e outras quatro não contemplam. Em cada questão, os alunos começavam por observar as características das funções apresentadas, para posteriormente conjeturarem uma definição de função injetiva, função sobrejetiva e função bijetiva. No estudo da função injetiva, os alunos exploraram a primeira questão da Tarefa 1:

Tarefa 1
Classificação de funções quanto à injetividade

1. As seguintes representações de funções traduzem funções injetivas:



As seguintes representações de funções traduzem funções não injetivas



1.1. Da análise das relações estabelecidas entre os objetos e as respetivas imagens de cada uma das funções definidas, que características distinguem as que são injetivas das que não são injetivas?

1.2. Define função injetiva.

As respostas dos alunos a esta questão são consideradas corretas (C), em 1.1, se identificam nos exemplos e nos não exemplos as características que traduzem ou não o tópico em estudo e, em 1.2, se o definem corretamente; parcialmente corretas (PC), em 1.1, se identificam nos exemplos e nos não exemplos apenas algumas caraterísticas do tópico e, em 1.2, se apresentam a definição sem a generalização com a característica apresentada em 1.1; incorretas (I) se apresentam ideias erradas sobre as funções injetivas; e, por fim, não responde (NR), caso os alunos não respondam à questão. Na Tabela 2 são apresentados os resultados das respostas dos alunos à questão 1 da Tarefa 1.

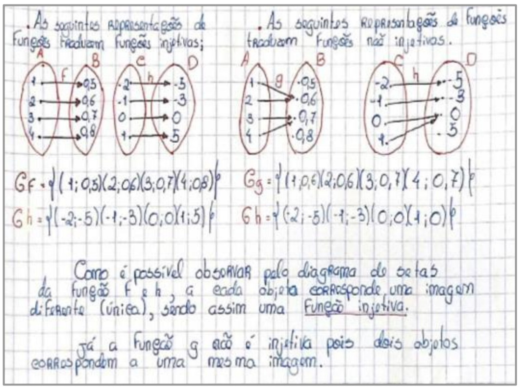
Tabela 2. Frequência (%) dos diferentes tipos de resposta dos alunos à questão 1 da Tarefa 1 ($n = 27$)

Tipos de resposta	Alíneas da questão 1	
	1.1	1.2
C	9 (33,33%)	0 (0%)
PC	16 (59,26%)	10 (37,04%)
I	2 (7,41%)	0 (0%)
NR	0 (0%)	17 (62,96%)

Na alínea 1.1 da questão 1, os alunos tinham que referir as características que distinguem as funções representadas que são injetivas das que não são injetivas. Na alínea 1.2, os alunos teriam que referir que uma função é injetiva se e só se quaisquer que sejam os objetos diferentes do seu domínio correspondem imagens diferentes no conjunto de chegada, o que não foi definido por qualquer aluno.

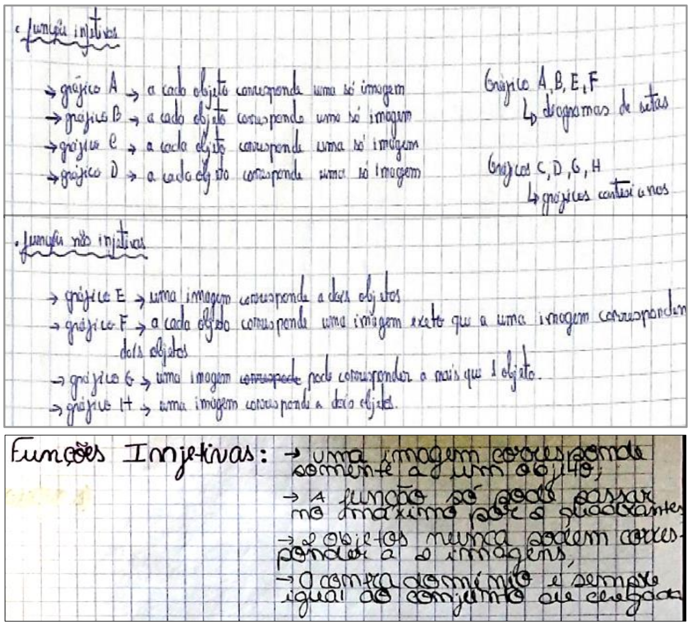
Da análise das respostas dos alunos à alínea 1.1, verifica-se que nove alunos (33,33%) apresentam uma resposta correta, como comprova a resposta do aluno A5 (Figura 1):

Figura 1. Resolução correta do aluno A5 à alínea 1.1 da questão 1 da Tarefa 1



Porém, o aluno limita-se a focar a sua atenção na análise de funções de domínio de variável contínua, o que traduz a sua resposta à alínea 1.2 como sendo parcialmente correta, tal como expressam a resposta da maioria dos alunos, como ilustram as dos alunos A27 e A25 (Figura 2):

Figura 2. Resolução parcialmente correta dos alunos A27 e A25 à alínea 1.2 da questão 1 da Tarefa 1


• funções injetivas

→ gráfico A → a cada objeto corresponde uma só imagem
→ gráfico B → a cada objeto corresponde uma só imagem
→ gráfico C → a cada objeto corresponde uma só imagem
→ gráfico D → a cada objeto corresponde uma só imagem

Gráfico A, B, E, F
↳ diagramas de setas

Gráficos C, D, G, H
↳ gráficos contínuos

• funções não injetivas

→ gráfico E → uma imagem corresponde a dois objetos
→ gráfico F → a cada objeto corresponde uma imagem exceto que a uma imagem correspondem dois objetos
→ gráfico G → uma imagem pode corresponder a mais que 1 objeto.
→ gráfico H → uma imagem corresponde a dois objetos.

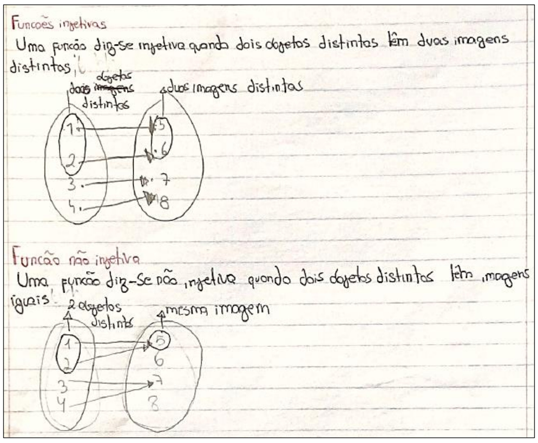
Funções Injetivas: → uma imagem corresponde somente a um objeto;
→ A função só pode passar no máximo por 2 quadrantes
→ 2 objetos nunca podem corresponder a 2 imagens,
→ O contradomínio é sempre igual ao conjunto de chegada

O aluno A27 analisou isoladamente a representação de cada uma das funções apresentadas nos exemplos e nos não exemplos de funções injetivas, evidenciando capacidade para interpretar e confrontar a informação fornecida quer por diagramas sagitais quer por gráficos cartesianos. Ao considerar que nas funções injetivas "cada objeto corresponde uma só imagem, o aluno relaciona as variáveis, objetos e imagens de uma função, sem salientar que a objetos diferentes correspondem imagens diferentes, o que já acontece nas características que identifica nos não exemplos.

Já para o aluno A25, uma função para ser injetiva integra quatro caraterísticas, sendo uma delas a que faz com que uma imagem corresponda somente a um objeto. Esta característica contempla a que se esperava que os alunos identificassem na análise dos exemplos que traduzem funções injetivas. Porém, ao confrontar as características patentes nos exemplos e nos não exemplos apresentados, o aluno faz evidenciar características que o desvia do essencial, como é o caso da referência ao gráfico que representa uma função injetiva "passar no máximo por dois quadrantes", o que se deve a um raciocínio funcional ainda pouco desenvolvido. Na sequência do estudo de funções, os alunos perceberão que existem funções injetivas cuja representação gráfica pode 'passar' por mais do que dois quadrantes, como acontece, por exemplo, com o gráfico da função cúbica $y = 0.5x^3 - 5$. Quanto à referência do contradomínio ser sempre igual ao conjunto de chegada, percebe-se a força da informação veiculada pelos diagramas sagitais em detrimento da que o aluno poderia retirar na segunda representação gráfica dos exemplos de funções injetivas. Verifica-se, assim, que o aluno A25 indicia ter mais facilidade de lidar com representações de funções com um domínio discreto do que representações de funções com um domínio contínuo.

Entre as respostas consideradas parcialmente corretas, destaca-se a do aluno A10 por salientar o estádio de desenvolvimento do raciocínio funcional de muitos dos alunos que frequentam o 10.º ano de escolaridade (Figura 3).

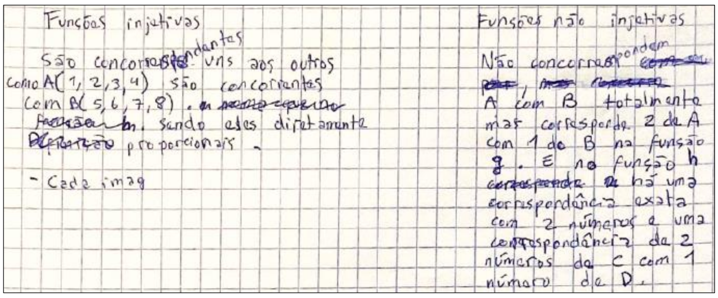
Figura 3. Resolução parcialmente correta do aluno A10 à alínea 1.2 da questão 1 da Tarefa 1



Apesar de o aluno identificar a característica essencial que traduz uma função injetiva, restringe essa característica, através de diagramas sagitais para expressar o seu raciocínio, a somente a alguns valores do domínio da função, o que indicia dever-se à dificuldade de generalizar a característica identificada em qualquer que seja o domínio que se considere.

As duas respostas consideradas incorretas recorrem a características que não fazem sentido no estudo de funções injetivas, tal como exemplifica a do aluno A4 (Figura 4).

Figura 4. Resolução incorreta do aluno A4 à alínea 1.1 da questão 1 da Tarefa 1



Para o aluno, uma função injetiva é toda a função que faz com que os elementos do conjunto de partida correspondam a todos os elementos do conjunto de chegada. Tal interpretação leva a problematizar a formulação dos exemplos positivos de funções injetivas através de um diagrama sagital. Um desses exemplos deveria contemplar uma situação que fizesse com que todos os objetos diferentes tivessem imagens diferentes, mas que existissem no conjunto de chegada elementos que não fizessem parte do contradomínio da função. Uma outra característica que o aluno indicia ter identificado no primeiro exemplo de função injetiva é a lei de formação, que transforma os objetos nas respetivas imagens. O aluno revela falta de capacidade crítica pelo facto de não verificar se esta característica está ou não contemplada nos restantes exemplos. Na sua resposta, o aluno dá a entender que somente se focou nos diagramas sagitais. A ausência de referência aos exemplos apresentados sob a forma de gráficos cartesianos sugere que o aluno teve dificuldade em confrontar a informação que retirou na análise dos diagramas sagitais com a informação proveniente dessas representações, o que o impossibilitou de definir função injetiva.

Após a resolução da tarefa por parte dos alunos, a mesma foi recolhida e foram discutidas no grupo turma:

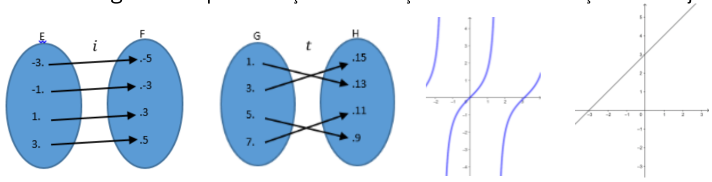
Professora: Quais as características das funções injetivas visíveis nas representações?
Aluno 9: Todas as imagens têm objetos diferentes.
Aluno 26: Na correspondência do diagrama de setas todos os objetos correspondem a uma imagem distinta.
Professora: Da análise das funções representadas por diagramas sagitais e por gráficos cartesianos, uma função é injetiva quando a objetos diferentes do seu domínio correspondem imagens diferentes no seu conjunto de chegada.

O objetivo desta discussão sobre as características das funções injetivas era generalizar a definição de função injetiva. Pela análise das resoluções dos alunos foi possível verificar que neste tipo de tarefa foi consolidado um dos processos do raciocínio funcional - a relação de correspondência.

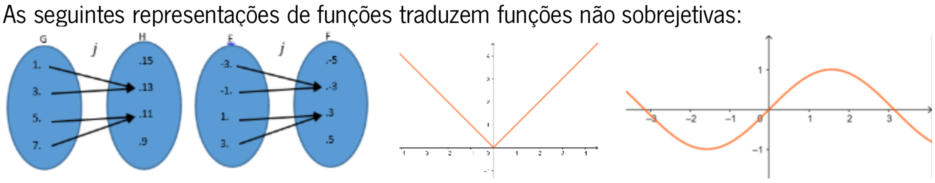
Analogamente, a estratégia delineada para o estudo de função sobrejetiva foi similar à do estudo de função injetiva, distinguindo as características das funções sobrejetivas das que não são sobrejetivas, através da resolução da questão 2 da Tarefa1:

Classificação de funções quanto à sobrejeividade

2. As seguintes representações de funções traduzem funções sobrejetivas:



As seguintes representações de funções traduzem funções não sobrejetivas:



2.1. Da análise das relações estabelecidas entre o conjunto de chegada e o contradomínio de cada uma das funções definidas, que características distinguem as que são sobrejetivas das que não são sobrejetivas?

2.2. Define função sobrejetiva.

Na questão 2 da Tarefa 1 as respostas dos alunos são consideradas corretas (C), em 2.1, se apresentam as características das funções sobrejetivas, e, em 2.2, se definem corretamente função sobrejetiva; parcialmente correta (PC), em 2.1, se apresentam apenas algumas caraterísticas de funções sobrejetivas, e, em 2.2, se apresentam a definição funções sobrejetivas sem a generalização com a característica apresentada em 2.1; incorreta (I) se apresentam ideias erradas sobre as funções sobrejetivas. Por fim, não responde (NR), caso os alunos não respondam à questão. Na tabela 3 são apresentados os resultados das respostas dos alunos à questão 2 da Tarefa 1.

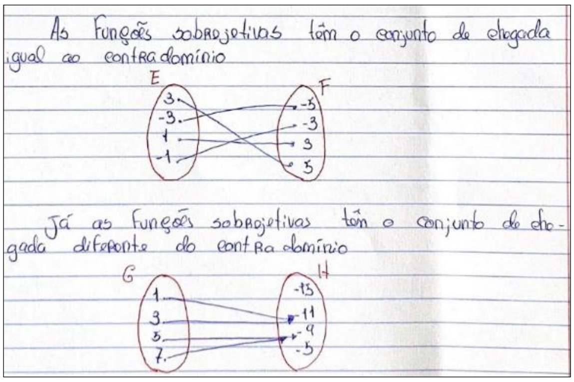
Tabela 3. Frequência (%) dos diferentes tipos de resposta dos alunos à questão 2 da Tarefa 1 ($n = 27$)

Tipos de resposta	Alíneas da questão 2	
	2.1	2.2
C	19 (70,38%)	2 (7,41%)
PC	4 (14,81%)	17 (62,96%)
I	4 (14,81%)	3 (11,11%)
NR	0 (0%)	5 (18,52%)

Na alínea, 2.1, os alunos tinham de referir as características que distinguem funções que são sobrejetivas das que não são sobrejetivas. Na alínea 2.2, os alunos teriam que considerar que uma função é sobrejetiva se e só se todos os elementos do conjunto de chegada são imagens de pelo menos um objeto do domínio da função.

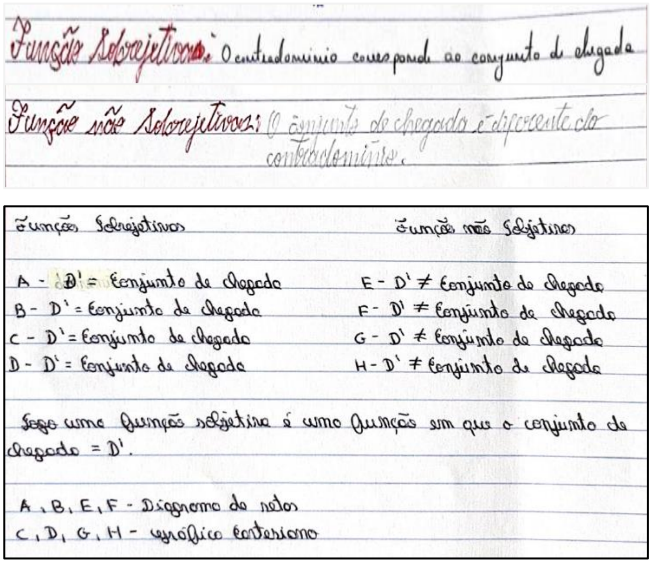
Da análise das respostas à alínea 2.1, verifica-se que a maioria dos alunos apresenta uma resposta correta, como ilustra a do aluno A5 (Figura 5):

Figura 5. Resolução correta do aluno A5 à alínea 2.1 à questão 2



Para o aluno, uma função sobrejetiva tem o conjunto de chegada igual ao contradomínio, característica que identifica na análise dos exemplos expressos por diagramas sagitais. A ausência de referência aos exemplos apresentados sob a forma de gráficos cartesianos sugere que o aluno sentiu dificuldade em confrontar a informação que retirou da análise dos diagramas sagitais com a informação que era proveniente dessas representações. Ao restringir a sua resposta mediante a informação que retira dos exemplos e dos não exemplos representados por diagramas sagitais, considera-se que o aluno apresenta, em 2.2, de forma parcialmente correta a definição de função sobrejetiva. Faltou a sua generalização, por linguagem corrente ou matemática, de que todos os elementos do conjunto de chegada de uma dada função são imagens de pelo menos um objeto do domínio da função. A ausência de generalização na definição de função sobrejetiva também se verificou nos restantes alunos que responderam à alínea 2.2., tal como mostram as respostas dos alunos A12 e A2 (Figura 6):

Figura 6. Resolução parcialmente correta dos alunos A12 e A2 à alínea 2.2 à questão 2



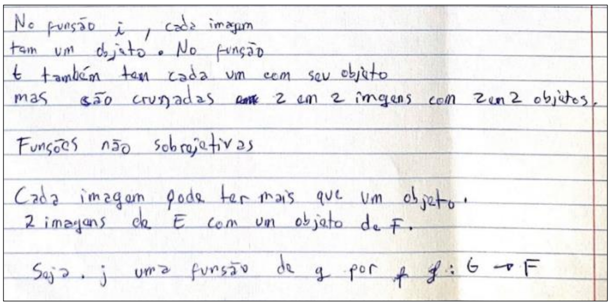
Ao considerar que numa função sobrejetiva o contradomínio corresponde ao conjunto de chegada, o aluno A12 reconhece conceitos que aprendeu em anos de escolaridade anteriores. Na sua resposta, o aluno não confronta a informação fornecida pelos diferentes tipos de representação de uma função, o que indicia dever-se à falta de capacidade de estabelecer conexões entre as representações fornecidas.

Já o aluno A2 identifica a coincidência entre o conjunto de chegada e o respetivo contradomínio nas funções que são sobrejetivas, como também identifica a inexistência dessa relação nas funções que não são sobrejetivas. Tal interpretação indicia que o aluno reconhece e relaciona os conceitos aprendidos em anos de escolaridade anteriores referentes ao tema funções, como também indicia capacidade de estabelecer conexões desses conceitos em diferentes representações de funções. Na definição de função sobrejetiva, o aluno A2 também não generaliza a característica que identificou, de modo que todos os elementos do conjunto de chegada são imagens de pelo menos um elemento do domínio da função sobrejetiva.

Pela análise efetuada às suas resoluções, verifica-se que um dos processos do raciocínio funcional está patente nos seus raciocínios de resolução. O processo em causa é denominado por relações de correspondência, e notório nas resoluções quando estes verificam as relações entre as variáveis e fazem a sua correspondência, verificando posteriormente a conclusão pretendida para funções sobrejetivas, em que os elementos do contradomínio são iguais ao conjunto de chegada. Desta forma, pode-se afirmar que estes alunos em estudo apresentam um estado de desenvolvimento de raciocínio funcional para o processo em causa.

Das respostas dadas à questão 2, somente quatro (14,81%) apresentaram uma resposta incorreta na alínea 2.1 e três (11,11%) à alínea 2.2, como ilustra a do aluno A4 (Figura 7):

Figura 7 - Resolução incorreta do aluno A4 às alíneas 2.1 e 2.2 da questão 2



No função i, cada imagem
tem um objeto. No função
t também tem cada um com seu objeto
mas são cruzadas 2 em 2 imagens com 2 em 2 objetos.

Funções não sobrejetivas

Cada imagem pode ter mais que um objeto.
2 imagens de E com um objeto de F.

Seja. j uma função de g por ~~f~~ $g: G \to F$

O aluno A4 começa por analisar a função i e a função t referindo que cada imagem tem um objeto. Uma outra característica que o aluno indicia identificar no primeiro exemplo de função sobrejetiva é a lei de formação que transforma os objetos nas respetivas imagens, ao referir que "2 em 2 imagens com 2 em 2 objetos". O aluno revela falta de capacidade crítica pelo facto de não verificar se esta característica está ou não contemplada nos restantes exemplos. Na sua resposta, o aluno dá a entender que somente se focou nos diagramas sagitais, pois só referiu os exemplos das funções que estão assim representadas. A ausência de referência aos exemplos apresentados sob a forma de gráficos cartesianos sugere que o aluno teve dificuldade em confrontar a informação que retirou da análise dos diagramas sagitais com a informação proveniente dessas representações, o que dificultou a apresentação da definição de função sobrejetiva.

Após a resolução da tarefa foram discutidos os resultados apresentados pelos alunos em grupo turma:

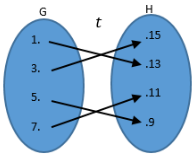
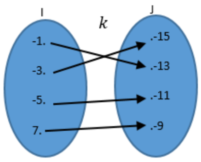
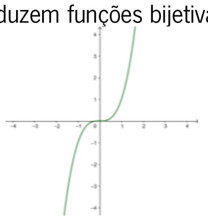
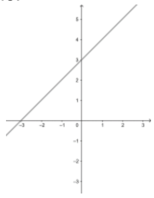
Professora:	Quais são as características das funções sobrejetivas que encontraram?
Aluno 26:	O contradomínio é igual ao conjunto de chegada.
Aluno 16:	Nestas funções o conjunto de chegada vai ser sempre igual ao contradomínio como disse o meu colega.

Após a discussão, sobre as características das funções sobrejetivas, o objetivo era concluir em grupo turma a definição de função sobrejetiva, partindo dos casos particulares para a generalização. Com a resolução da questão 2 da Tarefa 1 foi possível verificar a capacidade dos alunos em relacionar os elementos do contradomínio com o conjunto de chegada.

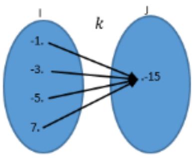
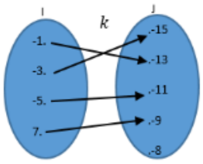
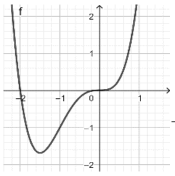
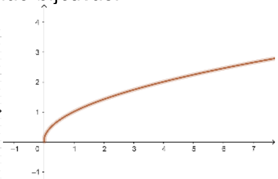
Para terminar a resolução desta tarefa, os alunos resolveram a alínea 3 da Tarefa 1, num processo idêntico aos anteriores:

Classificação de funções quanto à bijetividade

3. As seguintes representações de funções traduzem funções bijetivas:

As seguintes representações de funções traduzem funções não bijetivas:

3.1. Da análise das representações de cada uma das funções definidas, que características distinguem as que são bijetivas das que não são bijetivas?

3.2. Define função bijetiva.

Na questão 3 da Tarefa 1 as respostas dos alunos são consideradas corretas (C), em 3.1., se apresentam as características das funções bijetivas, e, em 3.2, as definem corretamente; parcialmente corretas (PC), em 3.1, se apresentam apenas algumas caraterísticas, e, em 3.2, algumas ideias sobre as funções bijetivas; incorreta (I) se apresentam ideias erradas sobre as funções bijetivas; e, por fim, não responde (NR), caso os alunos não respondam à questão. Na tabela 4 são apresentados os resultados das respostas dos alunos à questão 3 da Tarefa 1.

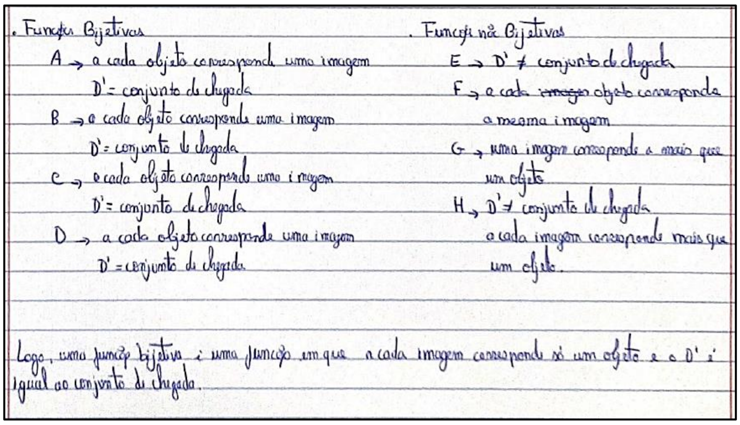
Tabela 4. Frequência (%) dos diferentes tipos de resposta dos alunos à questão 2 Tarefa 1 ($n = 27$)

Tipos de resposta	Alíneas da questão 3	
	3.1	3.2
C	18 (66,67%)	4 (14,81%)
PC	2 (7,41%)	15 (55,56%)
I	0	0
NR	7 (25,92%)	8 (29,63%)

Na questão 3, na alínea, 3.1, os alunos tinham que referir as características que distinguiam as funções que eram bijetivas das que não eram bijetivas. Na alínea 3.2, os alunos, partindo da característica identificada na alínea anterior teriam de referir que funções injetivas e funções sobrejetivas eram funções bijetivas e teriam que apresentar uma definição para função bijetiva.

Pela análise da Tabela 4, constata-se que em ambas as alíneas aproximadamente um quarto dos alunos não respondeu a ambas as questões, como também se verifica que entre os que responderam a essas questões não existem respostas incorretas. A maior parte dos alunos apresentou uma resposta correta na alínea 3.1, o que na alínea 3.2 só se verificou em quatro alunos (14,81%), como patenteia a do aluno A2 (Figura 8):

Figura 8- Resolução correta do aluno A2 à alínea 3.1 e 3.2 à questão 3



. Funções Bijetivas

A → a cada objeto corresponde uma imagem
D' = conjunto de chegada

B → a cada objeto corresponde uma imagem
D' = conjunto de chegada

C → a cada objeto corresponde uma imagem
D' = conjunto de chegada

D → a cada objeto corresponde uma imagem
D' = conjunto de chegada

. Funções não Bijetivas

E → D' ≠ conjunto de chegada

F → a cada ~~imagem~~ objeto corresponde a mesma imagem

G → uma imagem corresponde a mais que um objeto

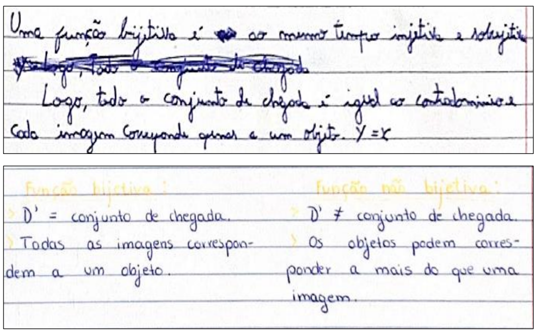
H → D' ≠ conjunto de chegada
a cada imagem corresponde mais que um objeto.

Logo, uma função bijetiva é uma função em que a cada imagem corresponde só um objeto e o D' é igual ao conjunto de chegada.

Para o aluno, uma função bijetiva "é uma função em que a cada imagem corresponde só a um objeto e o D' é igual ao conjunto de chegada", o que garante que a função seja simultaneamente injetiva e sobrejetiva. O aluno começou por analisar cada representação das funções bijetivas e apresentou a definição de função bijetiva, apesar de esta não ser apresentada de forma generalizada. Esta resolução indicia que o aluno tem capacidade de conectar a informação que retira de diferentes representações de funções e de identificar as relações existentes entre as variáveis das funções. Apesar do aluno não ter generalizado a resposta, esta foi considerada correta pois o aluno apresentou a definição de função bijetiva com mais detalhe, e com alguma simbologia matemática.

Da análise das respostas dos alunos verifica-se que, enquanto na alínea 3.1 (66,67%) a maioria dos alunos apresenta uma resolução correta, já na alínea 3.2 a maioria dos alunos apresenta uma resposta parcialmente correta, como exemplificam as respostas dos alunos A3 e A15 (Figura 9):

Figura 9. Resolução correta do aluno A3 à alínea 3.1 e parcialmente correta do aluno A15 à alínea 3.2 da questão 3 da Tarefa 1



Uma função bijetiva é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva
~~Logo, todo o conjunto de chegada~~
Logo, todo o conjunto de chegada é igual ao contradomínio e cada imagem corresponde apenas a um objeto. Y = X

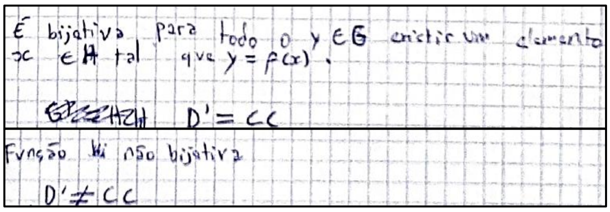
Função bijetiva:
D' = conjunto de chegada.
Todas as imagens correspondem a um objeto.

Função não bijetiva:
D' ≠ conjunto de chegada.
Os objetos podem corresponder a mais do que uma imagem.

Para o aluno A3, uma função bijetiva é "ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva. Logo, todo o conjunto de chegada é igual ao contradomínio e cada imagem corresponde apenas a um objeto". Já o aluno A15 apresenta uma resposta equivalente, ao apontar que numa função bijetiva "cada imagem tem um objeto" e que o conjunto de chegada é igual ao contradomínio. Estes alunos reconheceram os conceitos já lecionados em anos anteriores e revelam capacidade para interpretar a informação fornecida através de diferentes tipos de representação de funções.

Da análise das respostas às alíneas da questão 3 da Tarefa 1 identificou que alguns alunos apresentam uma resposta parcialmente correta em ambas as alíneas, como exemplifica a do aluno A4 (Figura 10):

Figura 10. Resolução parcialmente correta do aluno A4 às alíneas 3.1 e 3.2 da questão 3 da Tarefa 1


É bijetiva para todo o $y \in G$ existir um elemento $x \in H$ tal que $y = f(x)$.

$D' = CC$

Função não bijetiva

$D' \neq CC$

Para o aluno A4, uma função "é bijetiva para todo o $y \in G$ existir um elemento $x \in H$ tal que $y = f(x)$. $D' = CC$", o que não traduz totalmente as características contempladas na definição de função bijetiva, faltando salientar a existência de "um e um só elemento $x \in H$ tal que $y = f(x)$". Tal resposta é considerada parcialmente correta por garantir a sobrejetividade mas não a injetividade.

Após a resolução da tarefa houve um momento de discussão em grupo turma com o objetivo de elaborar a definição da função bijetiva partindo das caraterísticas das funções apresentadas na tarefa.

Professora: O que me têm a dizer sobre as características das funções bijetivas?
Aluno 3: Objetos diferentes têm imagens diferentes?
Professora: E que mais?
Aluno 9: Neste caso os domínios são iguais ao conjunto de chegada.
Professora: Será uma característica importante?
Aluno 10: Vai acontecer o que acontecia nas funções sobrejetivas.
Aluno 27: Função bijetiva são funções injetivas e funções sobrejetivas. Então tem características das duas funções anteriores ao mesmo tempo.
Professora: Tais características que identificam levam-nos a concluir que uma função bijetiva faz com que todos os elementos do conjunto de chegada de uma função sejam imagens de um e um só objeto do domínio da função.

Com este momento foi possível verificar que alguns alunos reconheceram a relação existente entre as variáveis das funções bijetivas e das funções não bijetivas e que após a discussão a definição foi concluída de forma generalizada. No final da discussão e da análise das resoluções dos alunos foi possível verificar que maioria, sendo esta maioria os que apresentavam respostas corretas ou parcialmente corretas um processo do raciocínio funcional mas suas respostas, em ambos os momentos, na resposta escrita ou na discussão em grupo. O processo mais vinculado a esta resolução é verificado quando os alunos verificavam a relação existem entre as variáveis e a sua correspondência, sendo este processo designado por relações de correspondência.

3.1.2. Função Composta

Na aprendizagem do conceito de função composta, os alunos trabalharam em grupo, de dois ou três elementos, e envolveram-se na atividade proposta de modo que a mesma fosse um processo essencialmente de descoberta do conceito e não exclusivamente de exposição de conteúdos e procedimentos por parte do professor. Desta forma, os alunos começaram o estudo da função composta com a resolução da seguinte tarefa:

Tarefa 4: Função Composta

Considera as funções reais de variável real f e g definidas por: $f(x) = \sqrt{x-4}$ e $g(x) = x^2$.

1. Determina os domínios das funções f e g.

2. Calcula $g(5)$ e $f(25)$. A partir das funções dadas, que função podes definir que te permita determinar a imagem de 5?

3. Determina a expressão que define $f[g(x)]$ e de seguida calcula o valor de $f[g(5)]$.

4. A função que definiste chama-se função composta de f com g. Caracteriza essa função.

5. Caracteriza a função $(g \circ f)\ (x)$.

A tarefa é constituída por um conjunto de questões que orientaram os alunos a definir e caracterizar uma função composta. Na resolução desta tarefa, os alunos começaram por rever os conceitos de domínio de uma função composta, requisito importante para a caracterização desta função. Noutro momento da tarefa, os alunos recordaram o conceito de expressão algébrica para assim definir a expressão da função composta e ao longo desta os alunos calcularam as imagens de objetos das funções dadas e da função composta. Esta sequência lógica de questões da tarefa teve como objetivo levar os alunos a definir e a caraterizar a função composta. As respostas dos alunos são consideradas corretas (C), se na questão 1 apresentam o domínio correta das duas funções; na questão 2 se apresentam corretamente a imagem da função do objeto 5 e determinam de forma correta a imagem do objeto de 5 partindo das duas funções; na questão 3 se apresentam se forma correta a expressão algébrica e a imagem do objeto 5, por fim, as questões 4 e 5, os alunos têm de apresentar de forma correta a caracterização da função composta. As respostas dos alunos são consideradas parcialmente corretas (PC), se na questão 1 apresentam só um dois domínios corretos, na questão 2 se determinam o cálculo da imagem do objeto 5 referente a cada função e não resolvem a restante; a questão 3 teriam que apresentar corretamente ou a expressão algébrica ou a imagem o objeto 5 referente a função

$f[g(x)]$; na questão 4 e 5 se apresentassem elementos importantes para a caracterização da função compostas mas não apresentassem uma caracterização correta. As respostas dos alunos eram consideradas incorreta (I) se estiverem totalmente errados na resposta que apresentam; e, por fim, os alunos que não responderam às questões também foram contabilizados (NR). Na aula em que foi realizada a Tarefa 4, sete alunos estiveram ausentes, razão pela qual se analisam as resoluções de 20 alunos. Na Tabela 5 são apresentados os resultados das respostas dos alunos a cada uma das questões da Tarefa 4.

Tabela 5. Frequência (%) dos tipos de resposta às questões da Tarefa 4 ($n = 20$)

Tipos de resposta	Questões				
	1	2	3	4	5
C	6 (30%)	0 (0%)	8 (40%)	0 (0%)	0 (0%)
PC	13 (65%)	18 (90%)	2 (10%)	5 (25%)	1 (5%)
I	1 (5%)	0 (0%)	1 (5%)	3 (15%)	3 (15%)
NR	0 (0%)	2 (10%)	9 (45%)	12 (60%)	16 (80%)

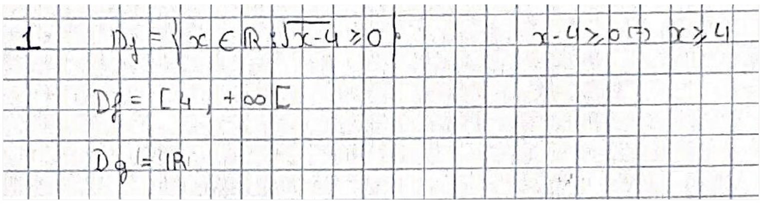
Na primeira questão, os alunos teriam de determinar os domínios das funções apresentadas, sendo a função f uma função que envolve radicais e a função g uma função quadrática. Os alunos teriam de determinar o domínio de cada uma das funções e desta forma saber associar cada domínio à função em questão. Na Tabela 6 são apresentados os resultados à questão 1 em que os alunos foram classificados da seguinte forma: correta (C), se apresentam o domínio correto de cada uma das funções; parcialmente correta (PC), se apresentam corretamente o domínio de apenas umas das funções; incorreta (I), se apresentam incorretamente o domínio de ambas as funções; e, por fim, não responde (NR), se não responderam à questão. Nesta mesma tabela são apresentados os resultados que cada aluno obteve no domínio apresentado para cada função, sendo classificados da seguinte forma: correta (C), se apresentam o domínio correto da função; parcialmente correta (PC), se apresentam cálculos corretos apesar de não apesentarem do domínio correto da função em causa; incorreta (I), se apresentam incorretamente o domínio de ambas as funções; e, por fim, não responde (NR), se não responderam à questão.

Tabela 6. Frequência (%) dos tipos de resposta à questão 1 da Tarefa 4 ($\mathrm{n} = 20$)

Tipos de resposta	Questão 1	
	D_f	D_g
C	9 (45%)	12 (55%)
PC	4 (20%)	5 (30%)
I	7 (35%)	3 (15%)
NR	0 (0%)	0 (0%)

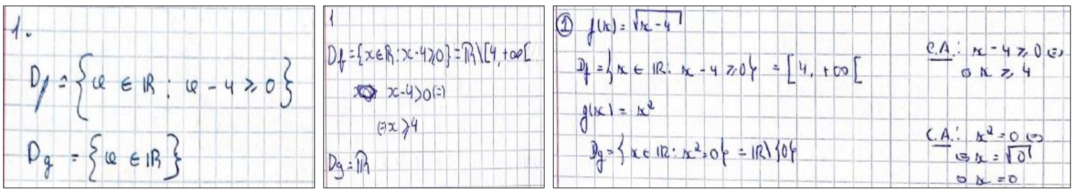
Na determinação dos domínios das funções, a maioria dos alunos determinou corretamente o domínio da função g, representada por uma expressão polinomial, o que já não se verificou na determinação do domínio da função f, representada por uma expressão irracional. Entre as respostas consideradas corretas à questão em análise, considerou-se correta a resolução do aluno A22, que definiu em compreensão o conjunto que determina o domínio da função f impondo que toda a expressão que a representa assuma valores não negativos em vez de considerar somente a expressão que incide no radicando (Figura 11):

Figura 11. Resposta correta do aluno A22 à questão 1 da Tarefa 4



Na determinação do domínio da função g, o aluno indicia ter identificado a função como sendo polinomial. Nos cálculos que efetuou, o aluno revela conhecimento da simbologia e de conceitos necessários para a determinação de domínios de funções reais de variável real. O mesmo já não se verifica nas respostas de outros alunos, como exemplificam as dos alunos A5 e A17, que foram consideradas parcialmente corretas (Figura 12).

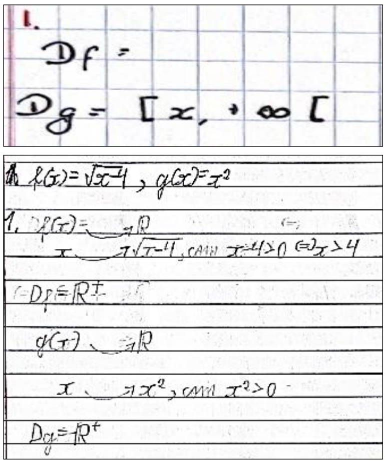
Figura 12. Resposta parcialmente correta dos alunos A5, A17 e A2 à questão 1 da Tarefa 4



O aluno A5 definiu a condição que permite determinar o domínio de f, sem o circunscrever em extensão. O aluno A17 foi capaz de resolver tal condição, mas, inexplicavelmente, considerou o conjunto complementar, exceto o 4, do que verifica essa condição. Já o aluno A2, obteve uma resposta parcialmente correta por determinar corretamente o domínio da função f, o que não acontece na determinação do domínio da função g. Os alunos A5 e A17 revelam um défice na descoberta dos valores da variável independente para o cálculo de domínios de expressões irracionais, o que indicia terem um fraco desenvolvimento do pensamento recursivo, pois através de valores conhecidos não conseguem descobrir novos e como estes variam dependendo do anterior.

Entre as resoluções incorretas, exemplificam-se as dos alunos A6 e A20 (Figura 13):

Figura 13. Resposta incorreta dos alunos A6 e A20 à questão 1 da Tarefa 4



O aluno A6 não apresentou qualquer domínio para a função f e para a função g considerou um intervalo delimitado à esquerda, visto estar fechado, sem explicar o seu raciocínio. Este aluno indicia não distinguir as expressões polinomiais das que são irracionais, o que denota ter dificuldade em relacionar os valores que a variável independente pode tomar. Segundo os processos do raciocínio funcional, o aluno revela encontrar-se num estado inicial de desenvolvimento das relações funcionais que podem ser aplicadas em contexto matemático.

Quanto à resolução do aluno A20, constata-se que o aluno reconhece que a variável x tem que respeitar uma determinada condição, explicitando que reconhece a terminologia, a simbologia e os conceitos associados ao estudo de funções apreendidos em anos anteriores. Apesar de restringir os domínios das duas funções, o aluno indicia ter capacidade para determinar valores que dão validade à variável, independente – pensamento recursivo e o processo de correspondência, indiciando estar num estado inicial de desenvolvimento dos processos do raciocínio funcional.

No momento da discussão da tarefa surgiu o seguinte diálogo sobre o domínio da função g:

Professora: Que valores pode tomar a variável x na função g?
Aluno 27: Qualquer valor! Estamos em $\mathbb{R}$.
Professora: Porque é que o domínio é $\mathbb{R}$?
Aluno 27: Qualquer número negativo ao quadrado fica sempre positivo.
Professora: Mas o vosso colega estava a dizer $[0, +\infty[$.
Aluno 11: Enganei-me, professora. Agora pensando, esse é o contradomínio.

Com este momento de discussão verificou-se que os alunos reconheciam os conceitos em estudo e conseguiram calcular os valores da variável em causa e determinar os domínios pretendidos, apesar de algumas dificuldades sentidas por alguns alunos.

Relativamente à questão 2 da tarefa, os alunos tinham de responder à seguinte questão:

2. Calcula $g(5)$ e $f(25)$. A partir das funções dadas, que função podes definir que te permita determinar a imagem de 5?

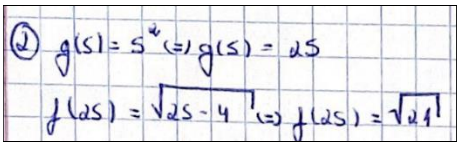
A esta questão, 10% dos alunos não apresentaram qualquer resposta, enquanto a resposta dos restantes 90% foi considerada parcialmente correta. Para analisar com detalhe esta questão subdividi-a em três critérios: (i) Calcular $g(5)$; (ii) Calcular $f(25)$; e (iii) Definir a função que permita determinar a imagem de 5. Desta forma, a resposta parcialmente correta é atribuída aos alunos quando abrange corretamente no máximo dois destes critérios. Na Tabela 7 são apresentados os resultados à questão 2 e a cada um dos critérios delineados da mesma.

Tabela 7. Frequência (%) dos tipos de resposta à questão 2 da Tarefa 4 ($n = 20$)

Tipos de resposta	Questão 2			
	2	(i)	(ii)	(iii)
C	0 (0%)	18 (90%)	18 (90%)	0 (0%)
PC	18 (90%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
I	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	4 (20%)
NR	2 (10%)	2 (10%)	2 (10%)	16 (80%)

Relativamente aos critérios (i) e (ii), enquanto quatro alunos (10%) não resolveram a questão, a maioria dos alunos (90%) apresentou uma resposta correta, como exemplifica a resolução do aluno A27 (Figura 14):

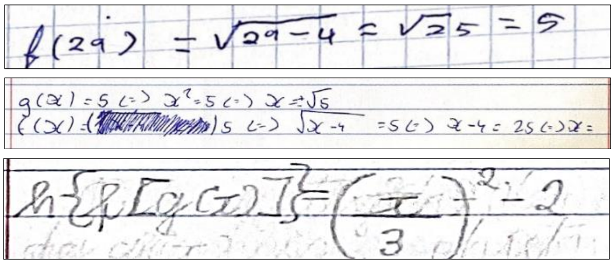
Figura 14. Resposta correta do aluno A27 aos critérios (i) e (ii) da questão 2



Da análise da resolução do aluno, constata-se que revela capacidade para determinar as imagens de um dado objeto a partir da expressão analítica que representa uma função, seja ela polinomial ou irracional, associando em cada uma das funções a correspondência entre um objeto e uma imagem.

Quanto ao critério (iii), a maioria dos alunos (80%) não deu qualquer resposta. Os quatro alunos (20%) que responderam fizeram-no incorretamente, como ilustram as resoluções dos alunos A17, A19 e A20 (Figura 15):

Figura 15. Resposta incorreta dos alunos A17, A19 e A20 ao critério (iii) da questão 2



O aluno A17 determinou a imagem de 29 pela função f em vez de 25. O aluno A19, procura obter os objetos que têm imagem 5 pela função g, indiciando ter conhecimento sobre a resolução de equações de primeiro e segundo grau, e pela função g, o que não consegue determinar por desconhecer ainda como se resolvem equações irracionais. O aluno A20, partindo das funções dadas, criou uma nova função, a função h, sem se perceber as relações que efetuou.

Após a resolução da tarefa por parte dos alunos, foram discutidos em grupo os seus resultados.

Professora: Vamos à primeira parte da questão 2.
Aluno 27: $g(5) = 5^2 = 25$.
Aluno 19: $f(25) = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$
Professora: Na segunda parte da segunda pergunta, a partir das funções dadas, que função podes definir que te permita determinar a imagem de 5?
Aluno 16: $f(g(5))$.
Professora: Exato.
Aluno 16: Fazemos primeiro $g(5)$, que dá 25.
Aluno 8: E $f(25)$ é igual a $\sqrt{21}$.

O aluno A16 apresentou uma resposta correta apesar de na resolução não ter respondido. A explicitação das respostas pelos alunos ajudou os alunos a compreender a possível relação existente entre as duas funções para definir uma nova função e determinar a imagem de 5, o que traduz a forma como as variáveis se relacionam.

A resolução da questão 2 serviu de ligação à introdução da função composta de duas funções através da questão 3:

3. Determina a expressão que define $f[g(x)]$ e de seguida calcula o valor de $f[g(5)]$.

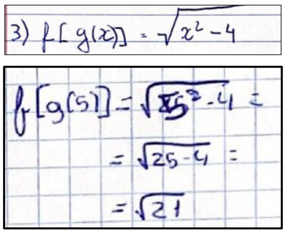
A resposta a esta questão foi considerada correta (C) caso contemplasse os seguintes critérios: (i) Determinar a expressão que define $f[g(x)]$; e (ii) Calcular o valor de $f[g(5)]$. As respostas dos alunos que acertem a um destes critérios e falhem o outro são consideradas parcialmente corretas (PC); caso não contemplem nenhum dos critérios, são denominadas de incorretas (I); e se não existir qualquer resposta à questão classificaram-se de (NR). Na Tabela 8 são apresentados os resultados à questão 3.

Tabela 8. Frequência (%) dos tipos de resposta à questão 3 da Tarefa 4 ($n = 20$)

Tipos de resposta	Questão 3		
	3	(i)	(ii)
C	8 (40%)	8 (40%)	10 (50%)
PC	2 (10%)	0 (0%)	0 (0%)
I	1 (5%)	3 (15%)	1 (5%)
NR	9 (45%)	9 (45%)	9 (45%)

Da análise da Tabela 8 verifica-se que nove em vinte alunos não respondem à questão, enquanto dois em cinco alunos respondem corretamente ao critério (i) e um em dois ao critério (ii), tal como exemplificam as respostas dos alunos A25 e A16 (Figura 16).

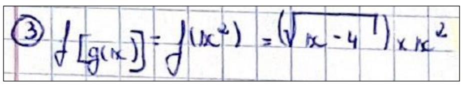
Figura 16. Resposta correta dos alunos A25, ao critério (i), e A16, ao critério (ii), da questão 3 da Tarefa 4



O aluno A25 relacionou as duas funções, considerando em primeiro lugar a função g e de seguida o transformado desta função pela função f. O aluno A16 revela capacidade de relacionar o valor das quantidades das duas variáveis de formas distintas, através da expressão algébrica e na descoberta da imagem associada ao objeto de valor cinco. E assim, o aluno analisa o comportamento das variáveis (objeto e imagem) e compreender a relação existente entre elas.

Na determinação da expressão algébrica que define a função composta entre as funções f e g, apenas 3 alunos (15%) apresentaram uma resposta incorreta, como exemplifica a do aluno A2 (Figura17).

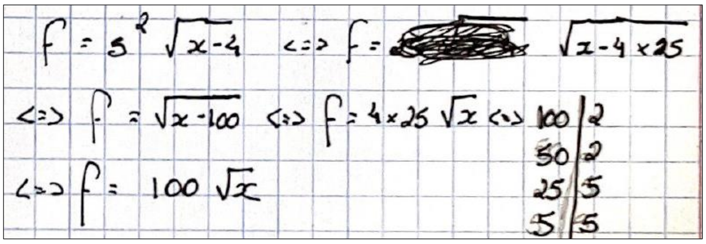
Figura 17. Resposta incorreta do aluno A2 ao critério (i) da questão 3 da Tarefa 4



Este aluno, começa por considerar $g(x)$ como um 'objeto', revelando compreender que a primeira função a aplicar é a função g, o que lhe permite obter $f(x^2)$. Inexplicavelmente, ao determinar esta transformação, revela dificuldade na interpretação do papel que desempenha x^2 na expressão que representa a função f, acabando por as multiplicar.

No que respeita ao critério (ii) considerado na análise das respostas dos alunos à questão 3, somente o aluno A6 apresentou uma resposta incorreta (Figura 18).

Figura 18. Resposta incorreta do aluno A6 ao critério (ii) da questão 3 da Tarefa 2



O aluno considerou a função f como sendo $x^2\sqrt{x-4}$. O aluno no cálculo da imagem do objeto cinco, apenas substituiu o valor da variável x (objeto) que estava fora do radical pelo valor cinco, sendo que a expressão que estava dentro da raiz não substitui a variável x (objeto) por qualquer tipo de valor. Tal interpretação indicia que o aluno associou que a função $g(x)$ seria para calcular a imagem quando o objeto era cinco, mas teve dificuldade em associar esse valor à função $f(x)$. Na resolução também é percetível a dificuldade do aluno na resolução e no cálculo de equações.

Após a resolução da questão 3 pelos alunos, seguiu-se a sua correção no grupo turma:

Professora: Como fica $f[g(x)]$?
Aluno 20: No lugar de $g(x)$ fica x^2.
Aluno 9: $f(x^2)$ é igual a $\sqrt{x^2-4}$.

Após a resolução da questão 3, seguiu-se a caracterização da função composta de duas funções através da resolução da questão 4.

4. A função que definiste chama-se função composta de f com g. Caracteriza essa função.

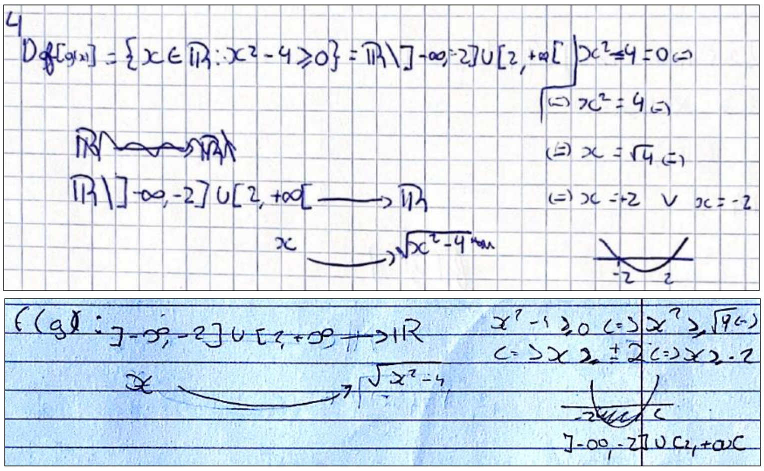
As respostas dos alunos foram analisadas da seguinte forma: Corretas (C), se apresentam corretamente a expressão que representa a função composta e o respetivo domínio; Parcialmente Correta (PC) se se apresentassem elementos importantes para a caracterização da função compostas mas não apresentassem a expressão da caracterização de forma correta e Incorreta (I) se a caracterização da função composta estivesse apresentada de forma incorreta e se os cálculos que apresentassem para sustentar a caracterização estivessem incorretos. Por fim, os alunos que não respondiam à questão também foram contabilizados (NR). Na Tabela 9 são apresentados os resultados da análise feita às resoluções dos alunos.

Tabela 9. Frequência (%) dos tipos de resposta à questão 4 da Tarefa 2 ($n = 20$)

Tipos de resposta	Questão 4
C	0 (0%)
PC	5 (25%)
I	3 (15%)
NR	12 (60%)

A maioria dos alunos (60%) não respondeu à questão 4, o que foi efetuado por oito alunos (40%). Destes alunos, cinco (25%) responderam parcialmente correto e três (15%) responderam incorretamente. São exemplo das respostas consideradas parcialmente corretas as dos alunos A16 e A9 (Figura 19):

Figura 19. Resposta parcialmente correta dos alunos A16 e A9 à questão 4 da Tarefa 2



A resposta do aluno A16 foi considerada parcialmente correta porque apresentou todos os passos pretendidos corretamente, exceto o domínio da função composta. Na resolução o aluno reconheceu que o parâmetro (variável x, objeto) que estava no interior do radical, que este poderia tomar valores superiores a zero, e assim calcular o domínio. Para o cálculo do domínio, o aluno resolveu uma equação, fê-lo de forma correta e sem dificuldade, com os detalhes importantes para a resolução da mesma. A resolução desta equação era importante para o cálculo do domínio da função composta, $f \circ g$.

Assim como o aluno A16 o aluno A9 apresentou a caraterização da função composta parcialmente correta, onde se verifica apenas algumas falhas de simbologia. As falhas apresentadas pelo aluno são tais como: o fecho do intervalo e a designação de função. Contudo, o aluno soube identificar o intervalo que era possível a variável x (objeto) variar. Desta forma, demonstra ter capacidade em relacionar os valores que as variáveis (objeto e imagem) podem tomar e analisar o comportamento da variável (objeto) em causa. Na resolução o aluno mostra ter capacidade crítica ao apresentar os cálculos auxiliares, representações gráficas, e intervalos de forma a justificar o raciocínio algébrico na resolução da tarefa. Pela resolução apresentada é possível verificar que o aluno tem facilidade em verificar os zeros e representá-los em gráficos, uma vez que fez um esboço para acompanhar o cálculo da equação de segundo grau que era parâmetro do radical.

Quanto às três respostas incorretas à questão 4, as dos alunos A5 e A20 exemplificam que o conceito e o procedimento da função composta de duas funções ainda não estavam formados (Figura 20)

Figura 20. Resposta incorreta dos alunos A5 e A20 à questão 4 da Tarefa 2


A função g serve de complemento à função f.

4. Uma função compostta é uma função em função de outra.

Os alunos reconhecem que uma função composta é uma relação entre duas funções, mas sem a determinar simbolicamente.

Por fim, seguiu-se a resolução da questão 5, com uma finalidade idêntica à da questão anterior, caracterizar a composição de duas funções, mas com a particularidade de salientar que esta 'lei' nem sempre goza da propriedade comutativa:

5. Caracteriza a função $(g \circ f)\ (x)$.

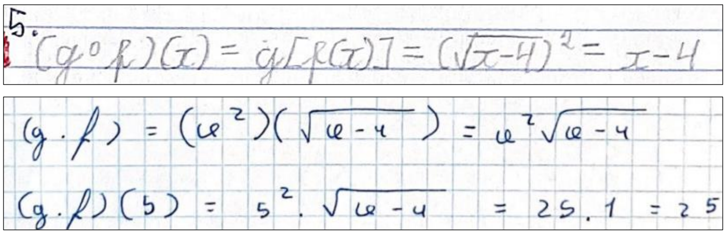
A análise das respostas dos alunos a esta questão seguiu os critérios estipulados na questão anterior. Na Tabela 10 são apresentados os resultados da análise das resoluções dos alunos.

Tabela 10. Frequência (%) dos tipos de resposta à questão 5 da Tarefa 2 ($n = 20$)

Tipos de resposta	Questão5
C	0
PC	1 (5%)
I	3 (15%)
NR	16 (80%)

A questão em análise não obteve qualquer resposta pela maioria dos alunos (80%). Apenas quatro alunos (20%) reponderam à questão, um (5%) de forma parcialmente correta e três (15%) incorretamente, como expressam as respostas dos alunos A20 e A11 (Figura 21).

Figura 21. Resposta parcialmente correta, do aluno A20, e incorreta, do aluno A11, à questão 5 da Tarefa 2



O aluno A20 relaciona as duas funções obtendo uma expressão algébrica para a função composta em causa, não salvaguardando somente a validade da simplificação que efetuou, o que estaria correto caso usasse o módulo do radicando. Na resolução o aluno indicia ter capacidade de reconhecer terminologia, simbologia e conceitos que facilitam o desenvolvimento das resoluções de tarefas que envolvam tópicos de funções, no que diz respeito a expressões algébricas. Apesar destes aspetos positivos, o aluno não foi capaz de caracterizar a função composta que se pretendia que efetuasse.

A resposta do aluno A11, considerada incorreta, expressa dificuldade em reconhecer os conceitos de função composta de duas funções e de caracterização de uma função. Na determinação da expressão algébrica para a função composta $(g \circ f)\ (x)$ o aluno aplicou a multiplicação entre duas funções, o que revela dificuldades na terminologia associada a funções. Na determinação da imagem do objeto cinco da função composta em causa, o aluno começa por atribuir à variável x (objeto) o valor cinco. Esta substituição acontece em dois passos, num primeiro o aluno faz a substituição da variável ao quadrado. Posteriormente, o aluno apresenta a expressão com a substituição aplicada em todas as vezes que a variável x (objeto) aparece (25.1). A forma que o aluno usa para calcular a imagem pretendida, demonstra que poderá ter dificuldades na descoberta da quantidade das variáveis.

Relativamente ao momento de debate das respostas da questão 5 da Tarefa 2, esta foi análoga à questão 4, pelo que a questão 5 foi resolvida no quadro.

Professora: Temos $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(\sqrt{x-4}\big) = (\sqrt{x-4})^2$.
Aluno 9: O quadrado corta com a raiz.
Professora: Só podem efetuar essa simplificação caso assegurem, através do módulo, que a expressão obtida não gere valores negativos.

O comentário do aluno A9 foi importante para a definição algébrica da função composta. O aluno A9 não conseguiu reconhecer que a expressão dentro do radical teria que ser superior ou igual a zero, e assim verificar que os valores dentro do radical eram sempre positivos. Após apurar esta condição o aluno conseguiria perceber como as variáveis iriam variar, o que o aluno A9 não conseguiu fazer. Desta forma, o aluno indicia ter dificuldade em reconhecer os valores das variáveis e relaciona-las.

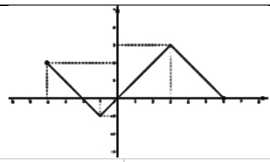
3.1.3. Transformações do gráfico de uma função – Translações e Reflexões

Na lecionação do tópico ‘transformação do gráfico de uma função’, os alunos já se encontravam no ensino à distância devido à pandemia provocada pelo SARS-CoV-2. Esta situação aconteceu no ano letivo 2019/2020. O método de ensino virtual fez com que o método de ensino que adotei, ensino exploratório, para a minha intervenção pedagógica, fosse reajustado. Desta forma, num primeiro momento enviava uma tarefa no dia anterior à aula, para que assim os alunos a pudessem resolver e enviar antes de esta acontecer. No momento posterior, já em aula virtual, a mesma era exibida para que os alunos apresentassem as suas respostas com o intuito de gerar a discussão sobre as diferentes resoluções. Após esta discussão, no final da aula virtual, que durava 50 minutos, era feita a sistematização de conhecimentos de acordo com os tópicos que emergiam da atividade dos alunos.

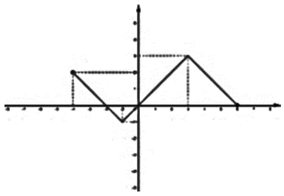
No estudo do tópico transformações do gráfico de uma função, os alunos trabalharam individualmente a Tarefa 3, constituída por uma representação gráfica de uma função real de variável real, da qual se pedia o esboço do gráfico que resulta das transformações solicitadas desse gráfico e, consequentemente, o domínio, o contradomínio e os zeros da função obtida por tais transformações.

Tarefa 3 – Transformação do gráfico de uma função

1. Seja i uma função real de variável real cuja representação gráfica se apresenta na figura.



1.1. Considera a seguinte tabela:

Função definida por:	Esboço gráfico	Domínio	Contradomínio	Zeros
$i(x)$		$D = [-4,6]$	$D' = [-1,3]$	$\{-2,0,6\}$
$a(x) = i(x) + 3$				
$h(x) = i(x) - 2$				

1.1.1. Completa a tabela.

1.1.2. Da análise da informação que retiras da tabela, o que podes concluir sobre as relações existentes entre os gráficos das funções a e h e o gráfico da função i?

1.1.3. Considerando f uma função real de variável real, como obténs o gráfico de uma função g definida por $g(x)=f(x)+k$?

Com a resolução desta tarefa pretendia que os alunos compreendessem o efeito da transformação do gráfico de uma função, através de translações associadas a vetores com direção vertical, na identificação do que é invariante e o que se transforma em relação à função dada. Na resolução da tarefa, os alunos começaram por observar o gráfico de uma função, denominada por função i, da qual se conhecia o domínio, o contradomínio e os zeros. Consequentemente, na primeira questão, os alunos teriam de apresentar o gráfico, calcular o domínio, o contradomínio e os zeros de duas novas funções partindo da função i. O gráfico destas duas novas funções são obtidas através de uma translação vertical do gráfico da função i. Na questão seguinte, teriam que analisar todo o processo feito na alínea anterior e tirar conclusões sobre os domínios, contradomínios, zeros e gráficos cartesianos apresentados. Posteriormente, numa terceira alínea, teriam de definir e caraterizar a translação vertical associada ao vetor $\vec{u}(0, k)$.

As respostas dos alunos são consideradas corretas (C) se, em 1.1.1 apresentar corretamente todos os itens que eram para determinar; em 1.1.2 reconhecer a translação associada ao gráfico e identifica-la, por fim, em 1.1.3 generalizar a translação identificada em 1.1.2. A resposta era considerada parcialmente correta (PC) se na alínea 1.1.1 os alunos apresentassem dois dos itens corretos dos quatro que teriam de determinar; na alínea 1.1.2. reconhecessem as relações existentes entre os gráficos, mesmo que não identificassem as translações e as relações entre os itens determinados, na alínea 1.1.3 se identificassem a translação, mas não a generalizassem. A resposta era classificada como incorreta (I) se a resolução apresentada pelo aluno estivesse totalmente incorreta. Por fim, os alunos que não responderam às questões também foram contabilizados (NR).

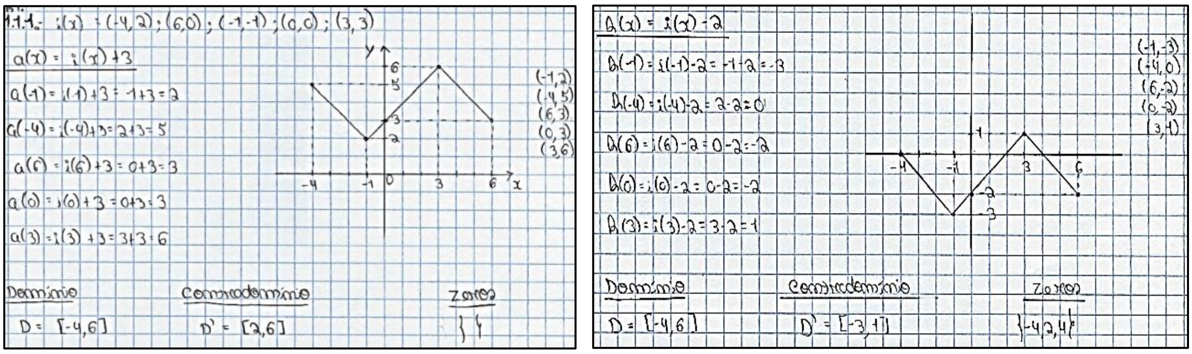
Na primeira alínea, completar a tabela, os alunos tinham que representar o esboço gráfico que traduz cada uma das transformações do gráfico da função i e determinar os domínios, contradomínios e os zeros para cada função obtida. De seguida, esperava-se que estabelecessem relações entre os gráficos obtidos e o de partida, e, numa ultima questão, que generalizassem essas relações no estudo da função definida por $g(x) = f(x) + k$ (Tabela 11).

Tabela 11. Frequência (%) dos diferentes tipos de resposta dos alunos à Questão 1.1 da Tarefa 3 ($n = 27$)

Tipos de resposta	1.1.1		1.1.2	1.1.3
	$a(x)$	$h(x)$		
C	18 (66,67%)	17 (62,96%)	8 (29,63%)	9 (33,33%)
PC	2 (7,41%)	2 (7,41%)	11 (40,74%)	0
I	2 (7,41%)	2 (7,41%)	1 (3,70%)	12 (44,45%)
NR	5 (18,51%)	6 (22,22%)	7 (25,93%)	6 (22,22%)

Pela análise da Tabela 11 verifica-se que, em todas a alíneas, menos de 26% dos alunos não responderam às alíneas da questão em estudo. No que diz respeito à questão que solicitava os alunos a preencher a tabela (1.1.1), a maior parte dos alunos apresentou uma resposta correta, como exemplifica a do aluno A15 (Figura 22):

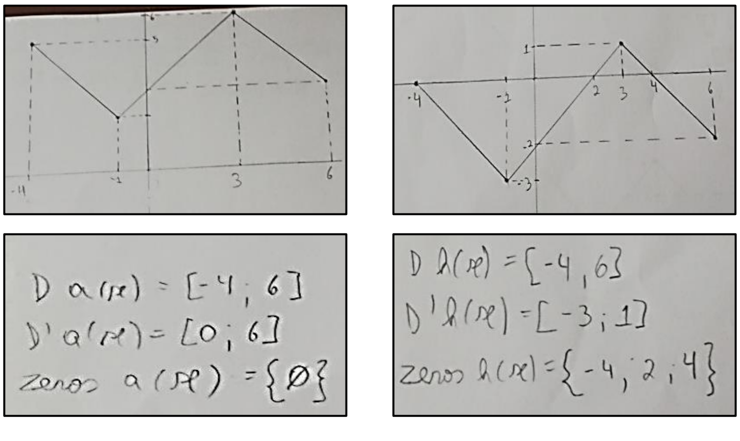
Figura 22. Resolução correta do aluno A15 à questão 1.1.1 da Tarefa 3



O aluno reconhece a simbologia dos conceitos em estudo, denotando capacidade para efetuar transformações de gráficos de funções que resultam da interpretação que faz da invariância dos objetos e da alteração da ordenada de cada um dos pontos que pertencem ao domínio da função. Tal interpretação indicia que o aluno relaciona os valores das variáveis e analisa o comportamento de uma função de forma explícita e dinâmica, reconhecendo as relações funcionais.

Apenas dois alunos apresentaram uma resolução parcialmente correta para a função a e para a função h, como ilustra a resposta do aluno A8 (Figura 23):

Figura 23. Resolução parcialmente correta pelo aluno A8 à questão 1.1.1 da Tarefa 3

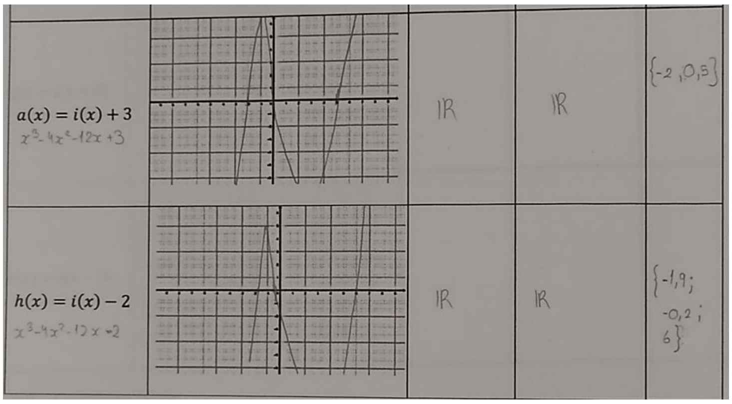


Na resolução é possível verificar que este aluno tem facilidade em construir gráficos cartesianos apesar de algumas falhas, tais como na identificação dos eixos Ox e Oy. A simbologia utilizada para identificar os entes das funções não foi a correta, mas, segundo Ponte, Branco e Matos (2009), é uma das principais dificuldades sentidas pelos alunos. Relativamente à função a foi o aluno A8 apresentou um contradomínio incorreto. Todos os outros itens a determinar estavam corretos. Já quanto à função h

o aluno apresentou todos os itens corretos, desde a representação do gráfico cartesiano, domínio, contradomínio e zeros. Pela resolução apresentada o aluno revela ter capacidade de relacionar a variação dos valores das variáveis e conseguiu analisar a forma como as duas funções variavam simultaneamente.

Das respostas incorretas à alínea em análise, surgiram duas resoluções incorretas para a função a e outras duas para a função h, como exemplifica a do aluno A13 (Figura 24).

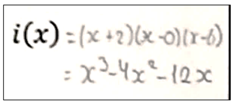
Figura 24. Resolução incorreta do aluno A13 à questão 1.1.1 da Tarefa 3



$a(x) = i(x) + 3$ $x^3-4x^2-12x+3$		IR	IR	$\{-2, 0, 5\}$
$h(x) = i(x) - 2$ $x^3-4x^2-12x-2$		IR	IR	$\{-1,9; -0,2; 6\}$

Na sua resolução, o aluno começou por assumir que a função i é definida por uma expressão polinomial do 3.º grau, como revela a sua resolução (Figura 25).

Figura 25. Definição da função i pelo aluno A13

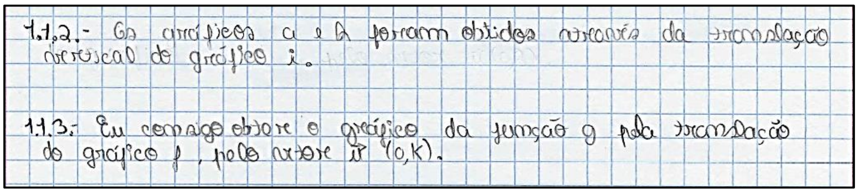


$i(x) = (x+2)(x-0)(x-6)$
$= x^3-4x^2-12x$

Tal interpretação indicia que o aluno ainda não desenvolveu ainda a sua capacidade de visualização que lhe permita reconhecer a representação gráfica de uma função cúbica, assim como indicia não ter capacidade crítica de confrontar o gráfico que obteve com o gráfico de partida. Na definição da expressão polinomial, o aluno recorre aos zeros da função i que retira da análise da sua representação gráfica. Consequentemente, determinou erradamente os domínios, os contradomínios e os zeros das funções a e h.

Relativamente às questões 1.1.2 e 1.1.3, alguns alunos não lhes deram qualquer resposta (aproximadamente, em média, 24%). No que diz respeito à questão 1.1.2, somente oito alunos (29,63%) apresentaram uma resposta correta, como expressa a do aluno A15 (Figura 26).

Figura 26. Resolução correta do aluno A15 à questão 1.1.2 e 1.1.3 da Tarefa 3



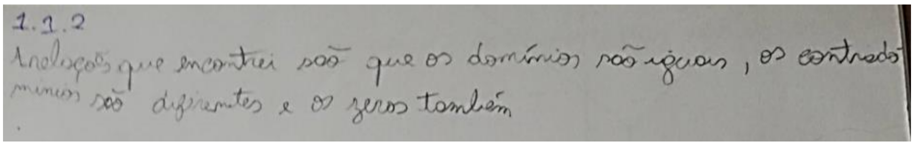
1.1.2.- Os gráficos a e h foram obtidos através da translação vertical do gráfico i.

1.1.3.- Eu consigo obter o gráfico da função g pela translação do gráfico f, pelo vetor $\vec{u}$ (0,k).

Ao reconhecer as relações funcionais entre as variáveis fez com que o aluno conseguisse identificar a relação existente entre a função i e o parâmetro k, ou seja, a relação existente entre o gráfico da função i e o gráfico das outras funções em estudo, em que é aplicado uma translação de vetor, generalizando, na alínea 1.1.3, essa relação para qualquer $k \in \mathbb{R}$ (Figura 26).

Focando a análise nas respostas dos alunos à alínea 1.1.2, verifica-se que 11 alunos (40,74%) apresentam uma resposta parcialmente correta, como são exemplo as dos alunos A8 e A21 (Figura 27):

Figura 27. Resolução parcialmente correta dos alunos A8 e A21 à questão 1.1.2 da Tarefa 3


1.1.2
Relações que encontrei são que os domínios são iguais, os contrado-
minios são diferentes e os zeros também

1.1.2- Observamos uma translação pelo eixo Ox das funções.

1.1.3- K= ponto de interseção da função, e o y da função varia em 3 unidades

O aluno A8 mostra ter capacidade de relacionar a variação dos valores das variáveis nas transformações obtidas, reconhecendo que os domínios são invariantes, enquanto os contradomínios e os zeros se alteram em conformidade com a translação aplicada o gráfico da função i. No entanto, tal interpretação indicia que o aluno tem dificuldade em justificar o que o fez a levar a tal pensamento, o que indicia ser a razão por não responder à alínea 1.1.3.

Já o aluno A21 referiu, na alínea 1.1.2, a translação dos gráficos das funções que representou, o que revela ter capacidade para reconhecer as relações funcionais, compreender o comportamento dessas relações, o que lhe permite expressar os procedimentos em contexto matemático. Este aluno destaca-se do A8 por ter respondido à alínea seguinte, descrevendo o comportamento do gráfico das funções obtidas, apesar de revelar algumas dificuldades na clarificação da generalização pretendida.

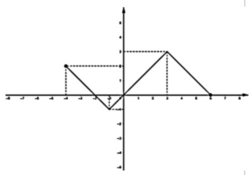
Na discussão sobre a resolução da alínea 1.1.1 da Tarefa 3 no grupo turma, alguns alunos expressaram adequadamente as conclusões a retirar quanto ao domínio, contradomínio e zeros de uma função obtidas do gráfico que resulta da translação com direção vertical do gráfico de uma dada função:

Aluno 9: Pegar no gráfico da função e andar três unidades para cima.
Professora: Explica lá, como fica o domínio? E o contradomínio?
Aluno 9: O domínio é o mesmo e o contradomínio adiciona três unidades, $[2,6]$.
Professora: E os zeros?
Aluno 9: Não tem.
Professora: Consegues completar a linha debaixo?
Aluno 9: O domínio é o mesmo e o contradomínio é $[-3,1]$. Os zeros são: $-4,2,4$.
Professora: Que conclusões tiramos desta tabela?
Aluno 5: Os domínios são todos iguais.

Aluno 7: Os contradomínios mudam em função do 3 e do -2 naqueles dois casos.
Aluno 9: Existe translação no eixo oy.
Professora: Se eu ando segundo a direção do eixo dos oy, para cima e para baixo, então posso dizer que é uma translação quê?
Aluno 7: Vertical!
Professora: Mais alguma coisa?
Aluno 20: Os zeros mudam.
Professora: Então agora após isto tudo quero que me digam como posso obter o gráfico da função g que e é definida por $g(x) = f(x) + k$.
Aluno 5: Podemos criar uma vetor que faça a translação do gráfico cartesiano de f para transformar, assim dizendo, a função g.

Após o estudo da transformação de gráficos de uma função real de variável real através de translações associadas a um vetor com direção vertical, seguiu-se o estudo da transformação de gráficos associada a translações horizontais, através das alíneas da questão 1.2 da Tarefa 3.

1.2. Considera a seguinte tabela:

Função definida por:	Esboço do gráfico	Domínio	Contradomínio	Zeros
$i(x)$		$D = [-4,6]$	$D' = [-1,3]$	$\{-2,0,6\}$
$t(x) = i(x+2)$				
$r(x) = i(x-3)$				

1.2.1. Completa a tabela.
1.2.2. Da análise da informação que retiras da tabela, o que podes concluir sobre as relações existentes entre os gráficos das funções t e r e o gráfico da função i?
1.2.3. Considerando f uma função real de variável real, como obténs o gráfico de uma função g definida por $g(x) = f(x-k)$?

Na alínea 1.2.1 os alunos efetuaram o esboço gráfico resultante da translação do gráfico da função i com direção horizontal e, de seguida, determinaram o domínio, o contradomínio e os zeros das novas funções obtidas. Nas alíneas seguintes, retiraram conclusões do que obtiveram sobre os domínios, contradomínios, zeros e gráficos cartesianos apresentados, para as generalizarem no estudo de transformações de gráficos de uma função com base na translação horizontal associada ao vetor $\vec{u}(k, 0)$. As respostas dos alunos são consideradas corretas (C) se, em 1.2.1 apresentar corretamente todos os itens que eram para determinar; em 1.2.2 reconhecer a translação associada ao gráfico e identifica-la, por fim, em 1.2.3 generalizar a translação identificada em 1.2.2. A resposta era considerada parcialmente correta (PC) se na alínea 1.2.1 os alunos apresentassem dois dos itens corretos dos quatro que teriam de determinar; na alínea 1.2.2. reconhecessem as relações existentes entre os gráficos, mesmo que não identificassem as translações e as relações entre os itens determinados, na alínea 1.2.3 se identificassem a translação, mas não a generalizassem. A resposta era classificada como incorreta (I) se a resolução apresentada pelo aluno estivesse totalmente incorreta. Por fim, os alunos que não responderam às questões também foram contabilizados (NR).

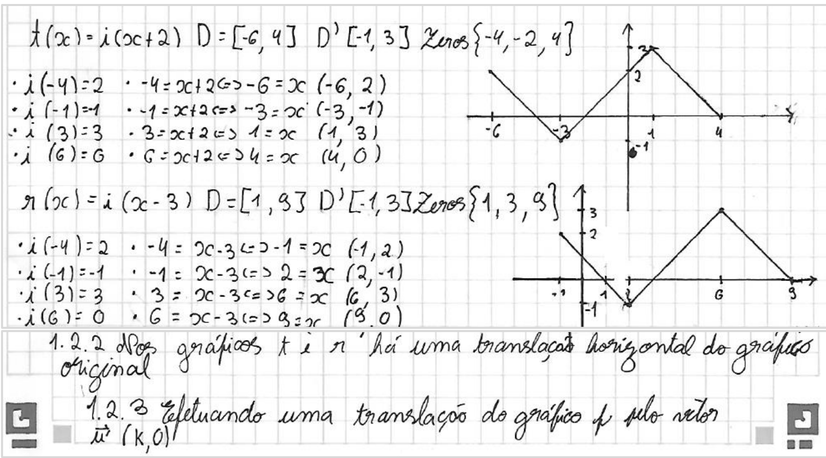
Na análise das resoluções dos alunos da alínea 1.2.1, a que diz respeito ao estudo das funções t e r foi efetuada em separado (Tabela 12).

Tabela 12. Frequência (%) dos diferentes tipos de resposta dos alunos à Questão 1.2 da Tarefa 3 ($n = 27$)

Tipos de resposta	1.2.1		1.2.2	1.2.3
	$t(x)$	$r(x)$		
C	11 (40,74%)	11 (40,74%)	5 (18,52%)	5 (18,52%)
PC	0 (0,00%)	0 (0,00%)	15 (51,85%)	12 (44,45%)
I	11 (40,74%)	11 (40,74%)	0 (0,00%)	0 (0,00%)
NR	5 (18,52%)	5 (18,52%)	7 (25,93%)	10 (37,03%)

Pela análise da tabela 12 verifica-se que cinco alunos não responderam à alínea 1.2.1, sete alunos não responderam à alínea 1.2.2 e dez não responderam à alínea 1.2.3. Em contrapartida, dos alunos que apresentaram uma resposta, constata-se que 11 responderam corretamente à alínea 1.2.1 e cinco às alíneas 1.2.2 e 1.2.3, como exemplifica a resposta do aluno A15 (Figura 28):

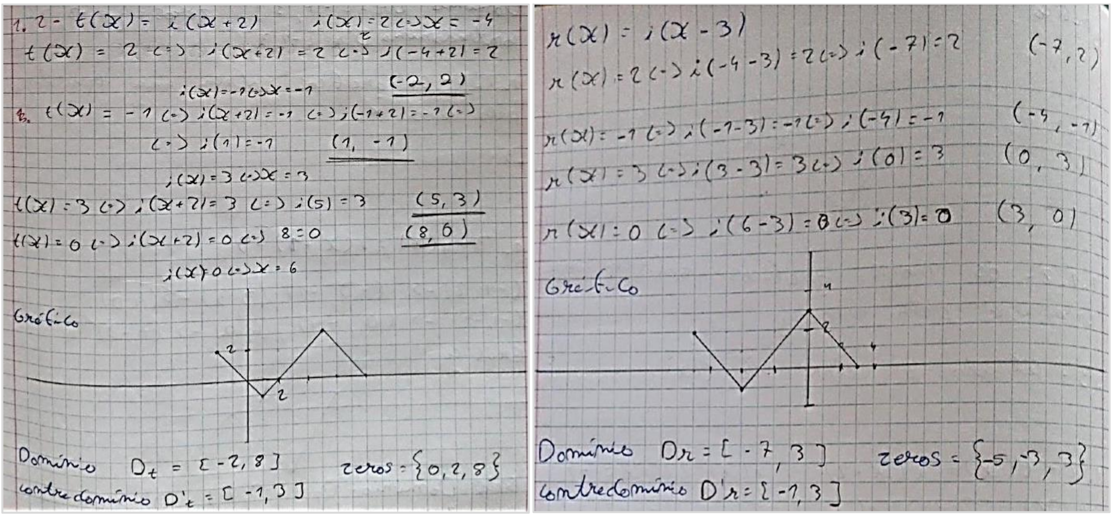
Figura 28. Resolução correta do aluno A15 às alíneas 1.2.1, 1.2.2 e 1.2.3 da questão 1.2 da Tarefa 3



O aluno apresentou uma resolução bastante detalhada, revelando pensamento covariacional ao aperceber-se que na translação do gráfico da função i segundo uma direção horizontal os valores da variável independente se alteram e os valores da variável dependente são invariantes. O aluno mostra reconhecer o comportamento da variação das variáveis e, consequentemente, analisa a relação entre o gráfico da função i tanto com o gráfico da função t como com o gráfico da função r. Estas representações resultaram da adequada determinação e identificação no sistema de eixos cartesianos dos pares ordenados, apesar de não identificar os eixos coordenados Ox e Oy no gráfico cartesiano. Na alínea 1.2.3, o aluno descreve genericamente como pode obter a função g a partir da translação do gráfico da função f segundo o vetor $\vec{u}(k, 0)$.

As respostas incorretas à alínea 1.2.1 deveram-se essencialmente à troca do sentido da translação do gráfico da função i segundo as indicações dadas para a obtenção dos gráficos das funções t e r, como exemplifica a resolução do aluno A9 (Figura 29):

Figura 29. Resolução incorreta do aluno A9 à questão 1.2.1 da Tarefa 3



Apesar de apresentar uma resolução incorreta, o aluno A9 expressa capacidade para reconhecer e usar em contexto matemático a terminologia, simbologia associados aos conceitos que estavam a ser trabalhados (domínio, contradomínio e zeros). O aluno associa os conceitos e simbologia de forma a construir o gráfico cartesiano das funções em causa, apesar de apresentar algumas falhas nessa construção, tais como: identificação dos eixos, apesar de ao marcar os pontos de coordenadas saber identificá-los; e marcação de pontos importantes no gráfico cartesiano, sendo assim notória a interpretação da informação fornecida e através dela a representação gráfica da função em estudo.

Quanto às respostas consideradas parcialmente corretas às alíneas 1.2.2 e 1.2.3, os alunos tendem a responder às duas alíneas, como ilustra a resposta do aluno A21 (Figura 30):

Figura 30. Resolução parcialmente correta do aluno A21 às questões 1.2.2 e 1.2.3 da Tarefa 3

1.2.2- As funções são uma translação da função i pelo eixo Ox.

12.3- K representa a variação do x

O aluno A21 reconheceu a relação existente entre a variável e o parâmetro k. Desta forma, identificou o comportamento gráfico das funções. Tal interpretação deve-se à capacidade que tem de analisar a forma como duas quantidades variam em simultâneo, considerando as funções como tendo uma parte explícita (a função i) e uma dinâmica. Apesar de o aluno reconhecer estas relações funcionais em contexto matemático, apresenta dificuldades a descrevê-las genericamente na alínea 1.2.3. Nesta alínea, o aluno refere que o parâmetro k representa a variação, mostrando falta de capacidade critica ao não justificar a sua resposta.

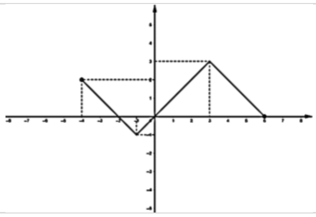
Alguns alunos expressaram adequadamente as conclusões a retirar quanto ao domínio, contradomínio e zeros de uma função obtidas do gráfico que resulta da translação com direção vertical do gráfico de uma dada função, na aula síncrona, no momento de discussão da resolução da questão 1.2 da Tarefa 3, salientou-se a participação do aluno A19:

Aluno 19: $4, -6$ o domínio.
Professora: Como?
Aluno 19: $[-6,4]$ o domínio.
Professora: E o contradomínio?
Aluno 19: $[-4, \ldots]$ enganei-me é $[-1,3]$.
Professora: E os zeros sabes dizer quais são?
Aluno 19: Quais é ou são?
Professora: Quantos zeros são? Observa o teu gráfico.
Aluno 19: São 4?
Professora: Concordam?
Aluno 19: São 3 zeros, o $-4, -2\ e\ 4$.
Aluno 19: O próximo, domínio $[-1,9]$, contradomínio $[-1,3]$ e zeros 3 e 9.
Professora: Não falta nenhum?
Aluno 19: O 1, os zeros são $1, 3\ ,9$.
Professora: Que conclusões se podem tirar?
Aluno 19: Tem sempre três zeros. Os contradomínios iguais.
Aluno 7: O domínio altera em função do k. Na translação, andou duas unidades para a esquerda no caso da função t.
Professora: E o que acontece na função r?
Aluno 7: Andou 3 unidades para a direita.
Professora: Existe uma relação para os zeros, alguém sabe explicar?
Aluno 7: Também alteram em função de k!

Na verbalização das suas ideias são notadas algumas dificuldades na determinação do domínio e do contradomínio por parte do aluno A19. Já o aluno A7 mostrou capacidade de analisar o comportamento e descrever a relação entre a variação das variáveis.

Após o estudo da transformação do gráfico de uma função segundo um vetor com uma das suas coordenadas nulas, direção vertical ou horizontal, seguiu-se a transformação de gráficos associada a vetores com coordenadas não nulas (questão 1.3 da Tarefa 3).

1.3. Considera a seguinte tabela:

Função definida por:	Esboço do gráfico	Domínio	Contradomínio	Zeros
$i(x)$		$D = [-4{,}6]$	$D' = [-1{,}3]$	$\{-2{,}0{,}6\}$
$q(x) = i(x+1) - 3$				
$s(x) = i(x-2) + 1$				

1.3.1. Completa a tabela.

1.3.2. Da análise da informação que retiras da tabela, o que podes concluir sobre as relações existentes entre os gráficos das funções q e s e o gráfico da função i?

1.3.3. Considerando f uma função real de variável real, como obténs o gráfico de uma função g definida por $g(x) = f(x-a) + b$?

Na questão 1.3.1 os alunos teriam de apresentar o gráfico, determinar o domínio, o contradomínio e os zeros das novas funções obtidas a partir da translação do gráfico da função i segundo o vetor $\vec{u}(a,b)$. Na questão seguinte teriam de analisar todo o processo feito na alínea anterior e tirar conclusões sobre os domínios, contradomínios, zeros e gráficos cartesianos apresentados. E, posteriormente, numa terceira alínea, teriam que definir e caraterizar a translação do gráfico da função f associada ao vetor $\vec{u}(a,b)$, em que $f(x) = g(x-a) + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Daqui os alunos concluem que o gráfico da função g é obtido através de uma translação de vetor $\vec{u}(a,b)$.

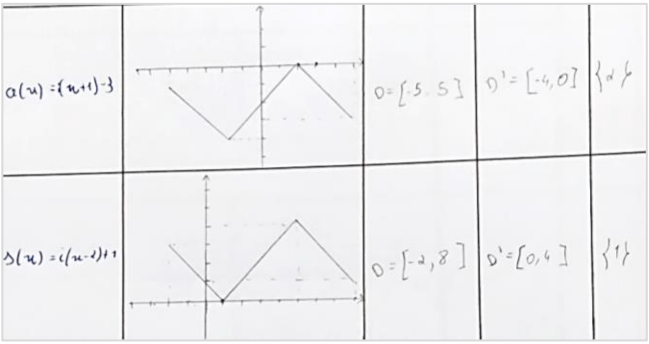
As respostas dos alunos são consideradas corretas (C) se, em 1.3.1 apresentar corretamente todos os itens que eram para determinar; em 1.3.2 reconhecer a translação associada ao gráfico e identifica-la, por fim, em 1.3.3 generalizar a translação identificada em 1.2.2. A resposta era considerada parcialmente correta (PC) se na alínea 1.3.1 os alunos apresentassem dois dos itens corretos dos quatro que teriam de determinar; na alínea 1.3.2. reconhecessem as relações existentes entre os gráficos, mesmo que não identificassem as translações e as relações entre os itens determinados, na alínea 1.2.3 se identificassem a translação, mas não a generalizassem. A resposta era classificada como incorreta (I) se a resolução apresentada pelo aluno estivesse totalmente incorreta. Por fim, os alunos que não responderam às questões também foram contabilizados (NR). (Tabela 13).

Tabela 13. Frequência (%) dos diferentes tipos de resposta dos alunos à Questão 1.3 da Tarefa 3 ($n = 27$)

Tipos de resposta	1.3.1		1.3.2	1.3.3
	$q(x)$	$s(x)$		
C	12 (44,45%)	12 (44,45%)	6 (22,22%)	6 (22,22%)
PC	0 (0,00%)	0 (0,00%)	12 (40,74%)	9 (33,33%)
I	9 (33,33%)	8 (29,63%)	0 (0,00%)	0 (0,00%)
NR	6 (22,22%)	7 (25,92%)	9 (33,33%)	12 (44,45%)

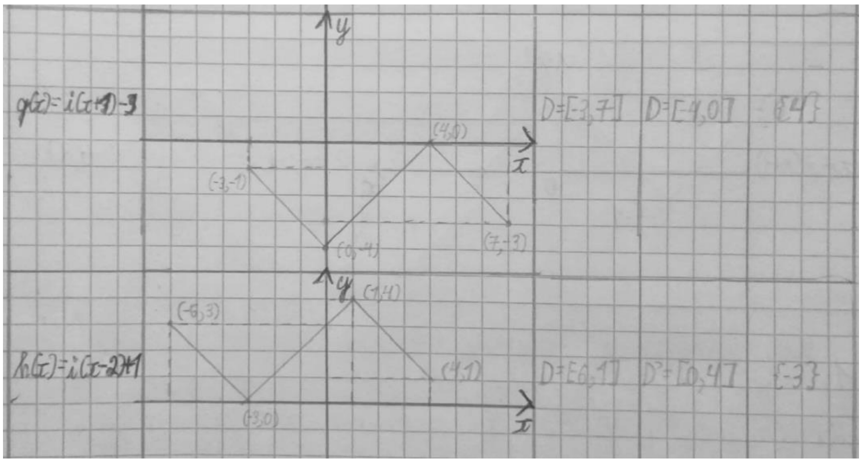
Por observação da Tabela 13 averigua-se que, na alínea 1.3.1, aproximadamente, em média, 24% dos alunos não apresentaram qualquer resposta, o que aumenta nas alíneas seguintes. Relativamente às respostas corretas à alínea 1.3.1, aproximadamente 45 em 100 alunos apresentaram um esboço gráfico que reflete o deslocamento pretendido do gráfico da função i, assim como a determinação do domínio, contradomínio e dos zeros das funções assim representadas, como exemplifica a do aluno A22 (Figura 31):

Figura 31. Resolução correta do aluno A22 à alínea 1.3.1 da questão 1.3 da Tarefa 3



Quanto às resoluções consideradas incorretas à alínea em análise, observa-se que resultam de nove alunos na obtenção do esboço gráfico da função q e de oito alunos relativamente ao gráfico da função s, como ilustra a resposta do aluno A20 (Figura 32):

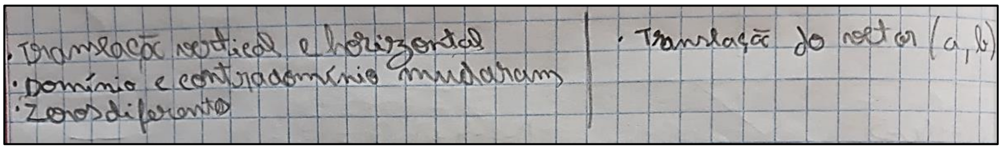
Figura 32. Resolução incorreta do aluno A20 à alínea 1.3.1 da questão 1.3 da Tarefa 3



Ao efetuar a representação gráfica das novas funções, o aluno, em vez de aplicar uma translação ao gráfico de i o vetor $\vec{u}(-1,-3)$ para obter o esboço gráfico da função q e o vetor $\vec{v}(2,1)$ para obter o esboço gráfico da função s, aplicou outros vetores para obter tais gráficos. Estas representações revelam a dificuldade do aluno em compreender a variação de uma função à medida que varia o seu argumento. Porém, o aluno indicia não ter dificuldade em usar a terminologia e a simbologia relacionadas com a interpretação da informação relativa à obtenção do domínio, contradomínio e dos zeros a partir das transformações efetuadas ao gráfico da função i.

Da análise às respostas dos alunos às alíneas 1.3.2 e 1.3.3 (Tabela 13), constata-se que seis alunos (22,22%) apresentaram uma resposta correta, como revela a do aluno A11 (Figura 33):

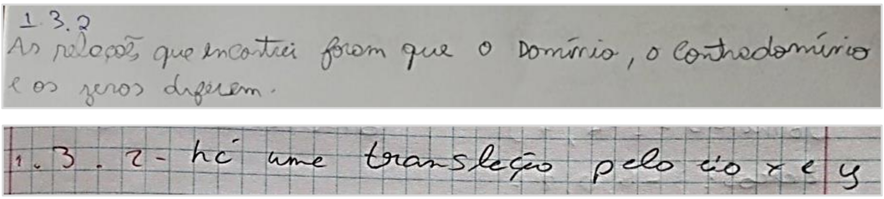
Figura 33. Resolução correta do aluno A11 às alíneas 1.3.2 e 1.3.3 da questão 1.3 da Tarefa 3



O aluno identificou a transformação gráfica e a mudança no domínio, contradomínio e nos zeros da função i. Ao identificar a representação gráfica das funções q e s, o aluno indicia ter capacidade em decifrar a informação que a representação gráfica veicula. Esta capacidade é verificável também quando reconhece o domínio, o contradomínio e zero(s) da cada uma das funções. Na alínea 1.3.3, o aluno identificou que a transformação do gráfico derivou de uma translação de vetor $\vec{u}(a,b)$. Tal interpretação sugere que o aluno, através da análise do comportamento gráfico da função, expressa capacidade de descrever a relação entre as variáveis e a forma como as duas representações gráficas das funções variam.

Focando a análise nas respostas parcialmente corretas à alínea 1.3.2, apura-se que este tipo de resposta se deveu por apresentar somente alguns atributos esperados, tais como contemplam as respostas dos alunos A13 e A9 (Figura 34):

Figura 34. Resolução parcialmente correta dos alunos A13 e A9 à alínea 1.3.2 da questão 1.3 da Tarefa 3



O aluno A13 averiguou que os domínios, contradomínios e zeros diferem, mas não referiu se verificou alguma alteração no gráfico cartesiano. Já o aluno A9 aludiu que se verificou uma translação associada ao eixo Ox e ao eixo Oy. Tal interpretação indicia que o aluno A9 compreendeu a informação fornecida por representações de funções através de gráficos cartesianos, reconheceu as relações entre as variáveis e como as quantidades das duas variáveis se alteram.

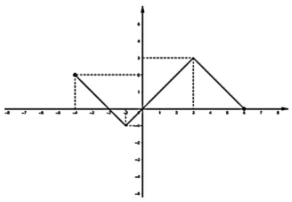
Na aula síncrona, proporcionou-se um momento para discutir a resolução da alínea 1.3.1 da Tarefa 3:

Aluno 15: O domínio é $[-5,5]$, o contradomínio $[-4,0]$ e zero é o 2.
Professora: Alguém discorda? (...) Como ninguém questiona o que foi referido, como resolveste a próxima situação?
Aluno 15: Domínio $[-2,8]$, contradomínio $[0,4]$ e o zero é 1.
Professora: Sabes explicar o que podes concluir daqui?
Aluno 15: Houve uma translação horizontal e vertical. O domínio, contradomínio e os zeros mudaram.

Neste momento de partilha das resoluções e de diálogo entre alunos e professor, o aluno A15 revelou capacidade para descrever a relação entre a variação das variáveis.

Por fim, seguiu-se o estudo da reflexão do gráfico de uma função segundo os eixos das abcissas e das ordenadas através da seguinte tarefa:

1.4. Considera a seguinte tabela:

Função definida por:	Esboço do gráfico	Domínio	Contradomínio	Zeros
$i(x)$		$D = [-4,6]$	$D' = [-1,3]$	$\{-2,0,6\}$
$p(x) = -i(x)$				
$z(x) = i(-x)$				

1.4.1. Completa a tabela.
1.4.2. Da análise da informação que retiras da tabela, o que podes concluir sobre as relações existentes entre os gráficos das funções p e z e o gráfico da função i?
1.4.3. Considerando f uma função real de variável real, como obténs o gráfico de uma função g definida por $g(x) = -f(x)$?
1.4.4. Considerando f uma função real de variável real, como obténs o gráfico de uma função g definida por $g(x) = f(-x)$?

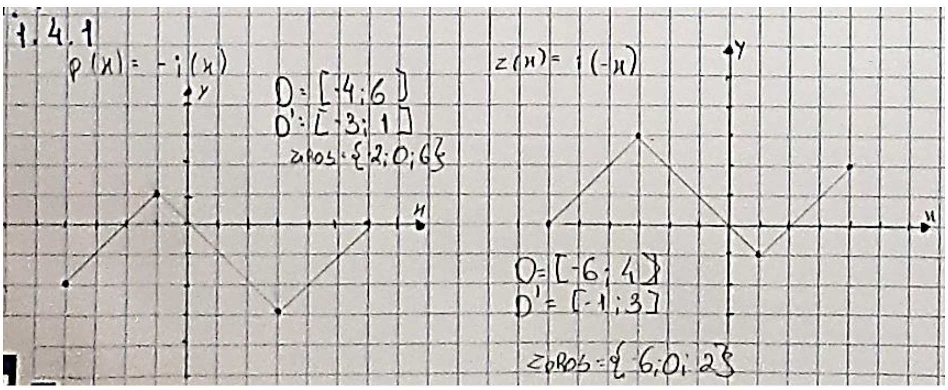
Nesta tarefa, na questão 1.4.1, os alunos teriam de apresentar o gráfico, determinar o domínio, o contradomínio e os zeros das funções p e z partindo do gráfico da função i, através de uma transformação do gráfico da função i denominada por reflexões do gráfico de uma função. Na questão seguinte teriam que analisar o processo feito na alínea anterior e tirar conclusões sobre os domínios, contradomínios, zeros e gráficos cartesianos apresentados e de como estes podem ser obtidos partindo do gráfico da função i. Posteriormente, nas alíneas seguintes, 1.4.3 e 1.4.4, os alunos teriam que definir e caraterizar uma transformação do gráfico de uma função a partir de reflexões segundo os eixos do sistema cartesiano. As respostas dos alunos são consideradas corretas (C) se, em 1.4.1 apresentar corretamente todos os itens que eram para determinar; em 1.4.2 reconhecer a translação associada ao gráfico e identifica-la, por fim, em 1.4.3 e 1.4.4 generalizar a translação identificada em 1.4.2. A resposta era considerada parcialmente correta (PC) se na alínea 1.4.1 os alunos apresentassem dois dos itens corretos dos quatro que teriam de determinar; na alínea 1.4.2. reconhecessem as relações existentes entre os gráficos, mesmo que não identificassem as translações e as relações entre os itens determinados, na alínea 1.4.3 e 1.4.4 se identificassem a translação, mas não a generalizassem. A resposta era classificada como incorreta (I) se a resolução apresentada pelo aluno estivesse totalmente incorreta. Por fim, os alunos que não responderam às questões também foram contabilizados (NR). (Tabela 14).

Tabela 14. Frequência (%) dos diferentes tipos de resposta dos alunos à questão 1.4 da Tarefa 3

Tipos de resposta	1.4.1		1.4.2	1.4.3	1.4.4
	$p(x)$	$z(x)$			
C	16 (59,26%)	16 (59,26%)	5 (18,52%)	4 (14,82%)	4 (14,82%)
PC	3 (11,11%)	3 (11,11%)	10 (37,03%)	11 (44,74%)	11 (44,74%)
I	2 (7,41%)	2 (7,41%)	0 (0,00%)	1 (3,70%)	1 (3,70%)
NR	6 (22,22%)	6 (22,22%)	12 (44,45%)	11 (44,74%)	11 (44,74%)

Por observação da Tabela 14 averigua-se que, aproximadamente, 22% dos alunos não reponderam à alínea 1.4.1, 44% dos alunos não responderam à alínea 1.4.2 e 45% dos alunos não responderam às alíneas 1.4.3 e 1.4.4. A primeira alínea da questão em análise foi a que obteve um maior número de respostas corretas (aproximadamente 59%), como exemplifica a do aluno A16 (Figura 35):

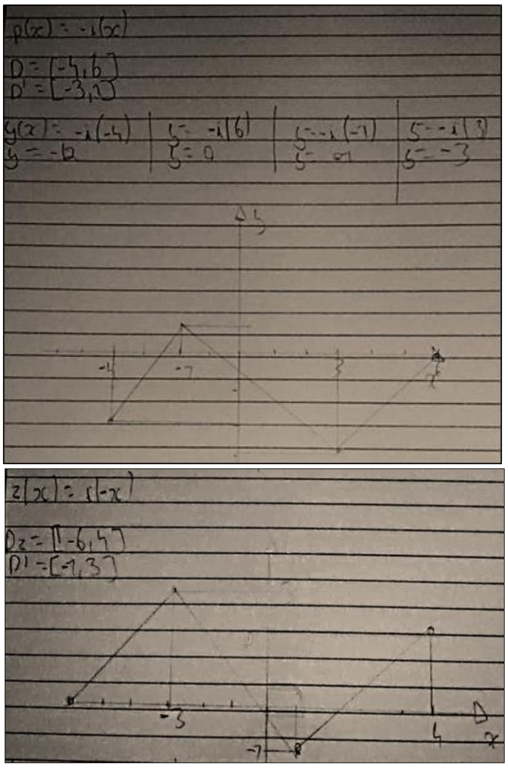
Figura 35. Resolução correta do aluno A16 à alínea 1.4.1 da questão 1.4 da Tarefa 3



O aluno reconhece e aplica a terminologia, simbologia associada aos conceitos a determinar (domínio, contradomínio e zeros). Em relação à representação gráfica das funções, o aluno identifica os métodos e as convenções usadas para construir as representações gráficas das funções em estudo. O aluno revela capacidade para decifrar a informação que as representações gráficas veiculam sobre uma função.

Quanto às respostas consideradas parcialmente corretas na alínea 1.4.1, constata-se que três alunos não contemplam todos os aspetos inquiridos, como ilustra a resposta do aluno A1 (Figura 36):

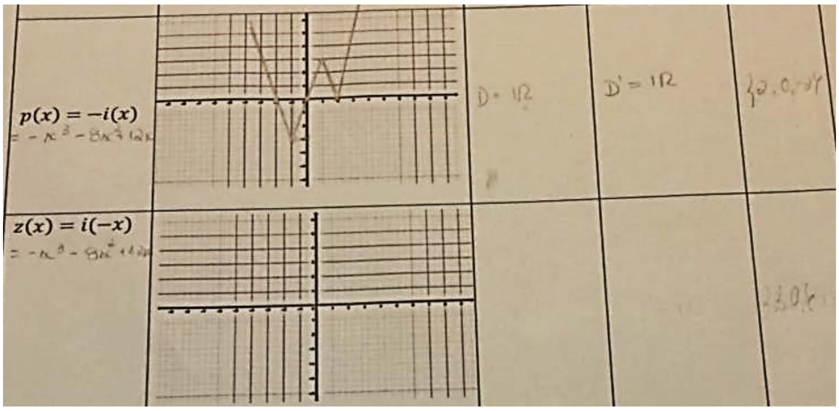
Figura 36. Resolução parcialmente correta do aluno A1 à alínea 1.4.1 da questão 1.4 da Tarefa 3



O aluno A1 não determinou os zeros das funções, para cada uma delas apresentou corretamente o gráfico cartesiano, o domínio e o contradomínio. Em relação às representações gráficas das funções p e z o aluno manifesta reconhecer os métodos e as convenções necessárias para as construções dos gráficos cartesianos. Relativamente à função p apresentou cálculos auxiliares para encontrar as coordenadas de pontos que o ajudaram a construir o gráfico da função. Estes cálculos indiciam capacidade para descobrir e relacionar valores das variáveis.

Na alínea em análise, somente dois alunos obtiveram uma resposta incorreta, como exemplifica a do aluno A13 (Figura 37):

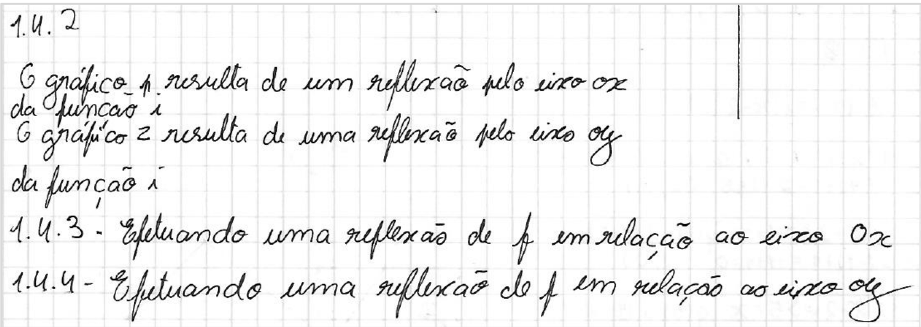
Figura 37. Resolução incorreta do aluno A13 à alínea 1.4.1 da questão 1.4 da Tarefa 3



Tal como aconteceu na resolução de uma questão anterior da Tarefa 3, o aluno define a função i como sendo polinomial do 3.º grau, o que indicia que o dificultou a responder ao que lhe era pedido.

Focando a análise nas resoluções das alíneas 1.4.2, 1.4.3 e 1.4.4, verifica-se que poucos foram os alunos que apresentaram uma resposta correta, como é exemplo a do aluno A3 (Figura 38):

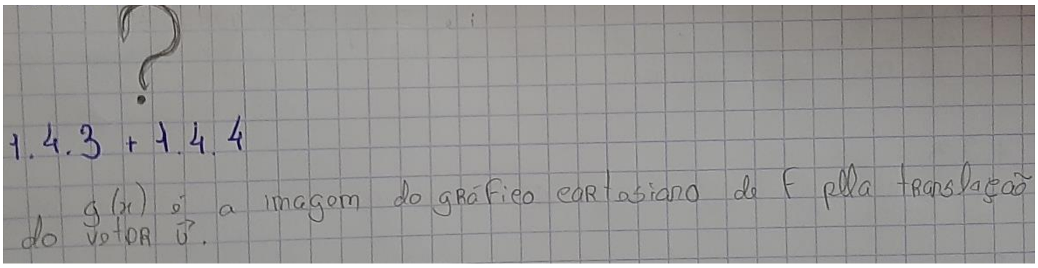
Figura 38. Resolução correta do aluno A3 às alíneas 1.4.2, 1.43 e 1.4.4 da questão 1.4 da Tarefa 3



O aluno reconheceu a relação entre o gráfico da função i e o gráfico das funções p e z e identificou a transformação do gráfico de uma função, e expressa capacidade de raciocínio abdutivo na transição do exemplo particular para a generalização. Pela resolução apresentada, percebe-se que o aluno tem capacidade de traduzir e compreender as relações existentes entre as variáveis, retirando a informação fornecida pelos gráficos cartesianos e confrontando-a para tirar conclusões.

Relativamente às alíneas em análise, alguns alunos obtiveram uma resposta parcialmente correta, como ilustra a do aluno A1 (Figura 39):

Figura 39. Resolução do aluno A1 às alíneas 1.4.2, 14.3 e 1.4.4 da questão 1.4 da Tarefa 3



O aluno verificou que os gráficos das funções se alteraram, mas revela dificuldade em analisar e descrever as alterações do gráfico das funções através das transformações do gráfico da função i, como também revela dificuldades em generalizar tais transformações.

Na aula síncrona, no seguimento de analisar as resoluções das tarefas enviadas em turma, surgiu o seguinte diálogo:

Aluno 10:	O domínio da função $p(x)$ é $[-4{,}6]$ e o contradomínio é $[-3{,}1]$.
Professora:	E os zeros?
Aluno 10:	$-2, 0, 6$, continua igual.
Professora:	E o próximo sabes?
Aluno 15:	O domínio é $[6{,}4]$!
Professora:	O domínio é $[6, 4]$?
Aluno 15:	Domínio $[-6{,}4]$, enganei-me! (Fez a correção após uma observação do gráfico)
Aluno 10:	Faltava aqui o menos por isso troquei-me! O contradomínio é $[-1{,}3]$.
Professora:	E os zeros?
Aluno 10:	$-6, 0, 2$.
Professora:	Então o que me consegues dizer desta relação?
Aluno 10:	p e z foram btidos através de uma simetria do eixo Ox e do eixo Oy.
Professora:	Sabes qual a translação da função p?
Aluno 10:	Em relação ao eixo Ox.
Professora:	E a outra função?
Aluno 10:	A z simetria em relação ao eixo Oy.

Neste momento de discussão o aluno A10 mostrou ter capacidade para analisar o comportamento e descrever a relação entre a variação das variáveis, assim como verificou a relação existem entre os valores das variáveis.

Síntese

A análise das resoluções das tarefas permite evidenciar algumas considerações sobre o raciocínio funcional desenvolvido pelos alunos do 10.º ano de escolaridade da turma em que realizei a minha intervenção pedagógica. Nessa análise recorri aos processos do raciocínio funcional considerados por Smith (2008): (i) O *pensamento recursivo*, na descoberta da variação de valores; (ii) O *pensamento covariacional*, na análise da forma como duas quantidades variam simultaneamente, considerando a variação como uma parte explícita e dinâmica da descrição de uma função; e (iii) A *relação de correspondência*, que se traduz na compreensão da relação existente entre a variável independente e a variável dependente.

Na resolução das questões da Tarefa 1, sobre a função injetiva, função sobrejetiva e função sobrejetiva, os alunos indiciaram ter presente nas suas resoluções um dos processos do raciocínio funcional (PRF), o de correspondência entre as relações das varáveis (Tabela 15).

Tabela 15. Síntese dos processos do raciocínio funcional explicitados na resolução da Tarefa 1

PRF \ Questão	1		2		3	
	1.1	1.2	2.1	2.2	3.1	3.2
(i) Pensamento Recursivo	–	–	–	–	–	–
(ii) Pensamento covariacional	–	–	–	–	–	–
(iii) Pensamento Correspondência	√	√	√	√	√	√

Tais relações refletem a correspondência que há entre as variáveis das funções estudadas que a classifica como injetivas, sobrejetivas e bijetivas. Os alunos distinguem a variável independente (objeto) da variável dependente (imagem), as relações que há entre os objetos e as imagens, e a diferença entre conjunto de chegada e contradomínio. Na identificação das características das funções estudadas, a maior parte dos alunos revelou compreender a particularidade que diferencia o estudo da injetividade do estudo da sobrejetividade de funções: enquanto na primeira relação existe uma correspondência que faz com que a objetos diferentes correspondem a imagens diferentes, na segunda relação a correspondência entre as variáveis impele a verificar que todos os elementos do conjunto de chegada são imagens de pelo menos um objeto do domínio. Para além de identificarem as características das funções assim classificadas, a maior parte dos alunos também identificou as características de uma função bijetiva. O estudo das três características das funções traduz a compreensão da relação existente entre a variável independente e a variável dependente de uma dada função.

A resolução da Tarefa 2 analisada teve por base o estudo da função composta. Nas cinco questões que a estruturam os alunos apresentaram nas suas resoluções processos do raciocínio funcional, sendo maioritariamente verificáveis o 'Pensamento Recursivo', o 'Pensamento Covariacional' e o 'Pensamento de Correspondência' (Tabela 16).

Tabela 16. Síntese dos processos do raciocínio funcional explicitados na resolução da Tarefa 2

PRF \ Questão	1	2	3	4	5
(i) Pensamento Recursivo	√	√	√	–	–
(ii) Pensamento covariacional	–	√	√	√	–
(iii) Pensamento Correspondência	–	–	√	√	√

Na análise das resoluções dos alunos emerge os diferentes processos do raciocínio funcional. Na primeira questão, definir o domínio de duas funções distintas, os alunos reconheceram com alguma dificuldade os valores que a variável x (variável dependente) poderia tomar. Em relação ao domínio da outra função, revelaram mais facilidade para identificar os valores que a variável dependente poderia tomar e assim definir o domínio da função. No cálculo destes dois domínios desponta um processo do raciocínio funcional – pensamento recursivo –, na descoberta do valor da variável dependente. Tal pensamento é verificável quando é descrito aos alunos o valor do objeto para descobrirem as respetivas imagens referentes às funções em estudo. Alguns alunos definiram uma função a partir das funções dadas o que lhes permitiu determinar a imagem de um dado objeto, o que explicita o pensamento covariacional. Porém, tal processo está ainda pouco patente nas resoluções dos alunos.

As questões seguintes são relacionadas com a expressão algébrica de uma função em que os processos do raciocínio funcional também estão envolvidos na resolução dos alunos, nomeadamente o pensamento covariacional e o pensamento de correspondência. O pensamento covariacional reflete-se na relação que os alunos fazem entre a coordenação (ligação) das variáveis (variável dependente e variável independente) quando se fixa uma função, ou seja, quando se fixa a variável dessa função e como podermos obter novos valores havendo alteração da variável fixa, e assim conseguir definir uma nova função com referência na função fixada. Posteriormente, este pensamento está envolvido na apresentação da função composta que os alunos teriam que apresentar. A resolução para a determinação destas expressões também integra o pensamento de correspondência, que permitiu aos alunos verificar qual a variável x (objetos) ou a variável y (imagens) que diferiam das já encontradas anteriormente. Nas suas resoluções, os alunos apresentaram cálculos para determinarem este valore, a imagem do objeto cinco, as "novas variáveis" (objeto e imagem) da função composta. Na análise da resolução dos alunos é verificável alguma dificuldade na apresentação para a determinação da função composta e a imagem de um certo objeto dessa mesma função.

Na resolução da Tarefa 3, que tem como estudo as transformações do gráfico de uma função – Translações e Reflexões, é verificável que os processos do raciocínio funcional estão presentes, com mais destaque para o 'Pensamento Covariacional', que se reflete na descrição do comportamento do gráfico das funções (Tabela 17).

Tabela 17. Síntese dos processos do raciocínio funcional explicitados na resolução da Tarefa 3

Questão	1.1			1.2			1.3			1.4			
PRF	.1	.2	.3	.1	.2	.3	.1	.2	.3	.1	.2	.3	.4
(i) Pensamento Recursivo	√	–	–	√	–	–	√	–	–	√	–	–	–
(ii) Pensamento covariacional	–	√	√	–	√	√	–	√	√	–	√	√	√
(iii) Pensamento Correspondência	√	–	–	√	–	–	√	–	–	√	–	–	–

Da análise das respostas dos alunos a esta tarefa sobre as transformações do gráfico de uma função é verificável que têm presentes capacidades relacionadas com os processos do raciocínio funcional (Tabela 17). De um modo geral, os alunos através da observação e da analise sobre a forma comos duas variáveis alteram e, por consequência, como duas funções variam em simultâneo tendo em consideração a variação da função, sendo que uma parte da função explicita e outra dinâmica, sendo este processo do raciocínio funcional nomeado por pensamento covariacional.

Os alunos desenvolveram de forma adequada a representação gráfica revelando reconhecer os métodos e as convenções usadas para contruir representações gráficas. Na determinação dos domínios, contradomínios e zeros, os alunos demonstraram reconhecer os conceitos, terminologias e simbologias associadas. Nesta determinação emerge a capacidade de compreender a relação de correspondência existente entre as variáveis, o que explicita este processo do raciocínio funcional dos alunos. O pensamento covariacional surge no reconhecimento e na descrição da relação entre o gráfico da função i e os gráficos das funções que resulta das transformações referidas. Tal processo também fica patente na comparação entre os gráficos, o que faz com que os alunos, através da análise da forma como as funções variam simultaneamente, descrevam essa variação. Em relação à última alínea, os alunos revelam dificuldade em generalizar tal descrição, ou seja, apresentam dificuldades em generalizar as transformações em estudo. Apesar das dificuldades apresentadas, os alunos desenvolvem, paulatinamente, capacidades que lhes permitem envolver e aplicar processos do raciocínio funcional no estudo de tópicos de funções reais de variável real.

3.3 Avaliação do ensino ministrado

A avaliação do ensino ministrado é o resultado de uma análise à informação recolhida do questionário final que solicitei aos alunos para responderem no final da minha intervenção pedagógica. Este questionário teve por finalidade recolher as perceções dos alunos sobre o contributo do estudo do tópico de funções para o desenvolvimento do raciocínio funcional, sendo constituído por questões de natureza fechada e por questões de natureza aberta. No grupo de questões de natureza fechada, os alunos escolheram uma opção que traduzisse o seu grau de concordância segundo uma escala tipo Likert. A informação obtida é apresentada em torno de cinco dimensões: (i) tópico de funções; (ii) tarefas; (iii) dificuldades; (iv) raciocínio funcional; e (v) método de ensino. As respostas dos alunos a cada um dos itens que estrutura o questionário são apresentadas através da frequência absoluta, do valor da média e do desvio padrão que resulta da conversão numérica de cada um dos graus de escala de Likert: um para discordo totalmente (DT); dois para discordo parcialmente (DP); três para indiferente (I); quatro para concordo parcialmente (CP); e cinco para concordo totalmente (CT).

Relativamente às perceções dos alunos sobre a aprendizagem de Funções, a maioria expressa a sua concordância quando ao gosto que sentiram em estudar os tópicos deste tema (Tabela 18).

Tabela 18. Frequência das perceções dos alunos relativamente à aprendizagem de tópicos de Funções ($n = 27$)

Afirmações	**DT/DP**	**I**	**CP/CT**	$\bar{x}$	s
Gostei de aprender os tópicos de Funções.	–	2	25	4,28	0.558
Tive mais dificuldades na aprendizagem de tópicos de Funções do que noutros tópicos matemáticos.	17	6	4	2,39	0,951
Não tive dificuldades na aprendizagem de tópicos de Funções.	12	6	9	2,94	1,13

Porém, questionados sobre a possibilidade de terem sentido dificuldades na aprendizagem desses tópicos, a média das suas respostas tende a traduzir um grau de indiferença, o que indicia dever-se à sua indecisão quanto ao grau de concordância a indicar, o que pode ser explicado pelo nível de desenvolvimento do raciocínio funcional dos alunos no inicio do ensino secundário que ainda está na sua génese. A natureza abstrata dos tópicos que estruturam os diferentes temas matemáticos estudados pelos alunos leva-os a discordar, em média, de que sentiram mais dificuldades na aprendizagem dos tópicos de Funções do que nos de outros temas, apesar de Ponte (1992) considerar que os tópicos de Funções são dos mais difíceis e da Matemática.

Relativamente às tarefas exploradas pelos alunos na aprendizagem de tópicos de Funções revelam um grau de concordância (total) de que os desafiou a pensar, como também expressam um grau de concordância (parcial) sobre a resolução das tarefas quanto à ajuda proporcionada para generalizar conceitos e que a possibilidade da análise de exemplos positivos e negativos lhes permitiu estabelecer definições dos conceitos em estudo (Tabela 19).

Tabela 19. Frequência das perceções dos alunos relativamente à resolução das tarefas ($n = 27$)

Afirmações	**DT/DP**	**I**	**CP/CT**	$\bar{x}$	s
As tarefas realizadas permitiram-me generalizar conceitos de Funções a partir de casos particulares.	–	5	22	4,17	0,681
A análise de exemplos positivos e exemplos negativos permitiu-me estabelecer definições de conceitos de Funções.	–	5	22	4,28	0,730
As tarefas propostas desafiaram-me a pensar.	–	2	25	4,67	0,577
As tarefas propostas incentivaram-me a trabalhar somente com a representação algébrica de Funções.	16	5	6	2,39	0,809
As tarefas propostas incentivaram-me a trabalhar somente com a representação gráfica de Funções.	13	8	6	2,5	1,213
As tarefas propostas incentivaram-me a trabalhar somente com a representação numérica/tabelar de Funções.	18	5	4	2,28	1,145

A resolução das tarefas propostas promoveu a conexão entre as diferentes representações de Funções (algébrica, gráfica, numérica/tabelar).	–	2	25	4,69	0,591
A discussão de diferentes resoluções das tarefas propostas ajudou-me a entender melhor os conceitos estudados.	–	3	24	4,33	0,667
Na resolução de tarefas sobre tópicos de Funções senti necessidade de recorrer à representação gráfica para clarificar o meu raciocínio.	3	3	21	3,89	0,875

Os alunos, em média, concordam parcialmente que recorreram à representação gráfica para clarificar os raciocínios nas resoluções das tarefas sobre os conceitos em estudo. Contudo, das três afirmações apresentadas sobre o incentivo das tarefas em explorar somente uma das representações das funções, os alunos expressam um grau de discordância parcial/indiferença. O incentivo para a representação algébrica e para a representação numérica/tabelar traduz-se, em média, no grau de discordância. Tal significa que as tarefas que resolveram não os incutiram a explorar somente uma das representações, tal como salienta o grau de concordância elevado dos alunos sobre o intuito das tarefas em promover as conexões entre as diferentes representações de Funções. O mesmo se verifica no contributo que a discussão teve na compreensão dos conceitos em estudo de tópico de Funções.

Na aprendizagem de tópicos de funções os alunos expressaram que sentiram mais dificuldades em generalizar conceitos, e menos na passagem da representação analítica para a representação gráfica e em estabelecer uma relação entre a representação gráfica e a analítica (Tabela 20). As dificuldades relativas ao estabelecimento das relações entre as variáveis são relevantes para o professor as atender nas suas estratégias de ensino que visam o desenvolvimento do raciocínio funcional (Blanton, 2008).

Tabela 20. Frequência das perceções dos alunos relativamente às dificuldades na aprendizagem de tópico de Funções ($n = 27$)

Afirmações	**DT/DP**	**I**	**CP/CT**	$\overline{x}$	s
Senti dificuldades na passagem da representação analítica para a representação gráfica de funções	15	8	5	2,44	0,956
Senti dificuldades em estabelecer relações entre as variáveis.	16	5	6	2,56	1,066
Senti dificuldades em generalizar conceitos de funções	3	12	12	3,5	1,066
Senti dificuldades em estabelecer uma relação entre a representação gráfica e a representação analítica.	20	5	2	2,00	0,816

Quanto ao contributo das características das tarefas nesse desenvolvimento, os alunos expressam um grau de concordância elevado com o papel das tarefas em incentivar, descrever, identificar e em estabelecer relações estre as variáveis (objeto imagem), sendo estes descritivos aspetos do raciocínio funcional (Smith, 2008). Para os alunos, as tarefas com que se depararam foram desafiantes para que pudessem estabelecer relações entre as variáveis e analisar o comportamento de uma das variáveis quando a outra sofre alterações, requisito favorável ao desenvolvimento do pensamento covariacional (Tabela 21).

Tabela 21. Frequência das perceções dos alunos relativamente ao contributo do estudo de tópico de funções no desenvolvimento do Raciocínio Funcional ($n = 27$)

Afirmações	**DT/DP**	**I**	**CP/CT**	$\bar{x}$	s
A resolução de tarefas sobre tópicos de Funções desenvolveu a minha capacidade de raciocínio.	–	2	25	4,28	0,558
A resolução das tarefas desafiou-me a estabelecer relações entre variáveis.	–	3	24	4,33	0,667
Para estabelecer relações entre as variáveis analisei o comportamento dos seus valores.	–	3	24	4,33	0,667
As tarefas propostas incentivaram-me a descrever as relações de correspondência.	2	6	19	3,94	0,848
As tarefas propostas incentivaram-me a identificar as relações de correspondência.	2	6	19	3,89	0,809

Quanto às preferências dos alunos relativamente ao método de ensino, a maioria prefere que seja o professor a expor os conteúdos e que resolva as tarefas propostas (Tabela 22). Contudo, quase metade dos alunos aprecia o método que lhe permite descobrir os conteúdos em estudo ao resolver as tarefas autonomamente, o que pode manifestar-se pelo facto de terem sido lecionadas aulas à distância.

Tabela 22. Frequência das perceções dos alunos relativamente ao método de ensino aplicado ($n = 27$)

Afirmações	**DT/DP**	**I**	**CP/CT**	$\bar{x}$	s
Gosto mais das aulas quando o professor expõe os conteúdos em estudo e resolve as tarefas propostas.	-	8	19	3,89	1,10
Gosto mais das aulas quando descubro os conteúdos em estudo e resolvo as tarefas propostas.	7	8	12	3,39	1,253

Após as questões de natureza fechada, os alunos também responderam a questões de natureza abertura de modo a recolher as suas perceções sobre as estratégias de ensino implementadas na minha intervenção pedagógica. Nesta segunda parte do questionário final os alunos teriam de indicar três vantagens e desvantagens do ensino a distância e da resolução de tarefas para a evolução do raciocínio funcional no estudo de funções; como também podiam apresentar dificuldades que sentiram na aprendizagem das funções, o que entendiam por raciocínio funcional, e por fim, três vantagens e três desvantagens das tarefas propostas para a evolução deste raciocínio. A análise das repostas dos alunos a estas questões fez emergir categorias para agrupar as dileções dos alunos.

Relativamente às vantagens do ensino a distância, os alunos destacam o conforto e a responsabilidade que ganharam nesta modalidade de ensino. Alguns alunos apontam a liberdade no horário, onde podiam fazer uma gestão do tempo mais personalizada e de acordo com os seus interesses, tendo uma aprendizagem mais autónoma. Com o ensino a distância os alunos referem ainda que a aprendizagem foi mais pacífica, tinham mais tempo para pensar nas tarefas e facilidade em contactar a professora para tirar dúvidas (Tabela 23).

Tabela 23. Frequência das vantagens do ensino a distância na aprendizagem dos alunos ($n = 27$)

Categorias	**Fr.**
Liberdade de horário	5
Gestão do tempo de forma mais personalizado e de acordo com as necessidades	4
Aprendizagem mais clama	1
Mais tempo para pensar no que não faz sentido e tentar fazer	1
Aprendizagem mais autónoma	4
Mais responsabilidade	7
Mais tempo para estudar e/ ou descansar	4
Mais facilidade de tirar duvidas	1
Maior conforto	8
Grande variedade de ensino	2
Pesquisa no momento	2
Nenhuma	1

Quanto às desvantagens do ensino a distância, os alunos destacam a interação entre colegas e professor, reforçando a ideia de que o contacto pessoal passou a ser pouco expressivo entre os mesmos. Alguns alunos referem que o número de tarefas durante este modelo de ensino era elevado e que sentiam mais dificuldade em resolver as tarefas propostas. Outra desvantagem apresentada por alguns alunos foi a sistemática falha tecnológica, que por vezes dificultava o processo de comunicação e transmissão da aula, que, por consequência, dificultou a realização das atividades de aprendizagem dos conceitos em estudo. Além das desvantagens referidas, os alunos referem ainda que o facto de terem de ligar o microfone sempre que era preciso falar era desvantajoso, para fazer as avaliações e dificuldades em expor as dúvidas que sentiam durante o estudo (Tabela 24).

Tabela 24. Frequência das desvantagens do ensino a distância na aprendizagem dos alunos ($n = 27$)

Categorias	**Fr.**
Mais dificuldade em resolver problemas	6
Ter de ligar o microfone sempre que é preciso falar	2
Maior número de tarefas	7
Falha tecnológicas	5
Menos interação	11
Dificuldade nas avaliações	1
Dificuldade em expor as dúvidas	3
Nenhuma	1

No que respeita às dificuldades na aprendizagem de funções durante a minha intervenção pedagógica, grande parte dos alunos não apresenta qualquer tipo de dificuldade. Os alunos que sentiram dificuldades apontam que se deveram à curta duração (aulas virtuais) das aulas lecionadas, o que teve implicações, posteriormente, em compreender os conceitos que estavam a ser estudados. Alguns alunos referem que sentiram dificuldade em resolver inequações e tratar a informação que os levasse à passagem da representação analítica para a representação gráfica. Além disso, três alunos referem que o uso da calculadora gráfica dificultou a aprendizagem de tópicos de funções, como, por exemplo, nas transformações do gráfico de uma função e no estudo dos extremos de uma função (Tabela 25).

Tabela 25. Frequência das dificuldades dos alunos na aprendizagem de tópico de funções ($n = 27$)

Categorias	**Fr.**
Inequações envolvendo funções	3
Na passagem da representação analítica para a representação gráfica	3
Uso da calculadora	3
O curto tempo de aula não ajuda a aprender os conceitos	5
Transformações no gráfico de uma função	2
Extremos de uma função	2
Nenhuma	11

Na questão "O que entendes por Raciocínio Funcional?", as respostas apresentadas foram divididas em seis categorias, tendo três alunos apresentado a resposta "não sei". As outras cinco categorias estão interligadas entre si, em que os alunos referem que o raciocínio funcional é o raciocínio que se aplica na aprendizagem e/ou resolução de novos conceitos de funções; é o raciocínio que mobiliza novos conceitos e diferentes representações (Tabela 26).

Tabela 26. Frequência do entendimento de Raciocínio Funcional ($n = 27$)

Categorias	**Fr.**
Raciocínio relacionado com a aprendizagem de um novo conceito	5
Raciocínio utilizado nos exercícios que envolvem funções mobilizando novos conceitos e diferentes representações.	5
Processo de pensamento	5
Raciocínio que é desenvolvido através dos exercícios feitos com funções	4
Raciocinar de uma forma a obter resultados mais eficazes	5
Não sei	3

Relacionando o Raciocínio Funcional com o estudo de Funções, os alunos apontam algumas vantagens das tarefas propostas para a evolução do mesmo. Alguns alunos consideram que as tarefas fizeram pensar, o que conectam com o raciocínio que se baseia no estudo de funções, destacando estes dois aspetos como vantagens para a evolução do raciocínio funcional. Para esta evolução muito contribuiu as tarefas propostas por implicarem a interpretação de gráficos e de expressões algébricas, o que os fazia pensar nas estratégias de resolução. Porém, cinco alunos não apresentaram nenhuma vantagem das tarefas aplicadas para a evolução do raciocínio funcional (Tabela 27).

Tabela 27. Frequência das vantagens das tarefas para a evolução do Raciocínio Funcional ($n = 27$)

Categorias	**Fr.**
Interpretação gráfica e de expressão algébricas	2
Fazer pensar	6
Arranjar estratégias	2
Transformar problemas para a vida real	3
Diversidade de tarefas	1
Necessidade de pensar	2
Raciocínio rápido	4
Raciocínio que se baseia no estudo de funções	6
Nenhuma	5

Relativamente às desvantagens das tarefas propostas para a evolução do raciocínio funcional, aproximadamente metade dos alunos não apresentou nenhuma. Dos restantes, alguns apontam que o elevado número de tarefas os impediu de desenvolver este raciocínio, o que também se deveu à escassez de tempo para as resolver. Um aluno considera que a matéria era um pouco confusa, o que dificultou a resolução das tarefas e por sua vez o desenvolvimento do raciocínio funcional (Tabela 28).

Tabela 28. Frequência das desvantagens das tarefas para a evolução do Raciocínio Funcional ($n = 27$)

Categorias	**Fr.**
Aulas de 45 minutos é lecionada mais rápido não ajuda a desenvolver o raciocínio	6
Escassez de tempo para realizar tarefas	7
Muitas tarefas ao mesmo tempo para desenvolver o raciocínio	7
Matéria um bocado confusa	1
Nenhuma	13

De um modo geral, os alunos consideram que o raciocínio funcional evoluiu com a resolução das tarefas aplicadas no estudo de tópico de funções, embora alguns deles manifestem que sentiram dificuldades no estudo de tópicos de funções.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Ao incidir a minha intervenção pedagógica no ensino e na aprendizagem de tópicos de Funções, que para Ponte (1990) consiste num dos temas mais importantes da Matemática (Ponte, 1990; Tanisli, 2011), pretendi averiguar o contributo da aprendizagem do tópico de Funções por alunos do 10.º ano de escolaridade para o desenvolvimento do Raciocínio Funcional. De forma a concretizar o objetivo delineado pretendo responder às seguintes questões de investigação: Que aspetos do raciocínio funcional se desenvolvem nos alunos do 10.º ano na aprendizagem de tópicos de Funções? Que dificuldades revelam os alunos na aprendizagem de tópicos de Funções? Que perceções têm os alunos sobre o desenvolvimento do raciocínio funcional na aprendizagem de tópicos de Funções?

4.1. Conclusões

As respostas às questões delineadas emergem da análise da informação recolhida durante a intervenção pedagógica, em particular a que se apresenta no Capítulo 3, sendo sustentadas, sempre que possível, com o enquadramento teórico apresentado.

4.1.1. Que aspetos do raciocínio funcional se desenvolvem nos alunos do 10º ano na aprendizagem de tópicos de Funções?

Os alunos expressaram os aspetos do raciocínio funcional em diferentes situações e nas diversas tarefas apresentadas. Os aspetos considerados no desenvolvimento do raciocínio funcional foram os processos considerados por Smith (2008): (i) O *pensamento recursivo*, no estudo da variação de valores das variáveis (objeto e imagem) e cálculo de novos valores das variáveis; (ii) O *pensamento covariacional*, na análise da forma como duas quantidades variam simultaneamente, considerando a variação como uma parte explícita e dinâmica da descrição de uma função; e (iii) A *relação de correspondência*, que se traduz na compreensão da relação existente entre a variável independente e a variável dependente. Para este autor, estes três processos focam-se em especial na relação entre duas variáveis, partindo de relações particulares para a generalização. Assim, a utilização dos três processos do raciocínio funcional ficou iminente, paulatinamente, nas resoluções das tarefas apresentadas por alguns alunos.

O processo de correspondência está patente nas resoluções dos alunos na tarefa sobre 'funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas', apesar de estar presente nas resoluções das restantes tarefas apresentadas aos alunos. Além deste processo apresentado por Smith, por vezes verifica-se que os alunos apresentam uma de três formas distintas de relação funcional destacada por Kieran (1992), a forma geométrica, ou seja, quando são referidos os diagramas de setas nas justificações e/ou exemplos apresentados pelos alunos. Tal resultado também se verificou no estudo realizado por Rodrigues (2016) com alunos do 10.º ano de escolaridade. Apesar das dificuldades que apresentavam nas resoluções das tarefas, o(a) autor(a) constatou que os alunos revelavam capacidade de reconhecer as correspondências entre as variáveis, sendo um processo do raciocínio funcional também apresentado por Ursini e Triguenos (2001).

Os outros dois aspetos, pensamento recursivo e pensamento covariacional, estão presentes nas resoluções apresentadas pelos alunos das tarefas referentes à 'função composta' e às 'transformações do gráfico de uma função', além da já referida anteriormente. O pensamento recursivo é desenvolvido pelos alunos quando na resolução das tarefas vão à descoberta de valores que sejam pedidos para determinar, ou quando vão à descoberta de valores importantes que orientam para obterem a conclusão final. Alusivamente ao pensamento covariacional, segundo Carlson (2003), são "as atividades cognitivas envolvidas na coordenação de duas quantidades que variam quando se presta atenção às formas como cada uma delas muda com referência à outra" (p. 124). É notória a ininterrupção deste processo do raciocínio funcional ao longo das resoluções apresentadas pelos alunos do 10.º ano de escolaridade quando desenvolvem as tarefas relacionadas com as transformações de gráficos de funções. Estes dois processos são desenvolvidos por alguns alunos quando fazem a representação das funções através de algum tipo de representação de função e quando identificam que a variação dos valores de uma variável implica a variação da outra variável (Smith, 2003). Por vezes, os alunos revelam dificuldades em desenvolverem estes dois processos nas suas resoluções, o que, paulatinamente, alguns deles mostram que evoluíram à medida que aprofundavam o seu estudo de tópicos de funções.

De um modo geral, os alunos envolvem um conjunto de capacidades que levam à compreensão das relações funcionais das variáveis, tais como: (i) Reconhecer as correspondências entre quantidades, independentemente da representação utilizada; (ii) Determinar o valor da variável independente e da variável dependente, e vice-versa; (iii) Reconhecer a variação conjunta das variáveis da relação, independentemente da representação utilizada; (iv) Determinar o intervalo de variação de uma das variáveis quando já é conhecido o da outra variável; (v) Expressar a relação funcional apresentada, com base nos dados do problema proposto, através de diferentes formas de representação. Este conjunto de capacidades são trabalhadas e desenvolvidas pelos alunos nas resoluções das tarefas apresentadas, podendo assim concluir-se que o raciocínio funcional é desenvolvido pelos alunos do 10.º ano de escolaridade no estudo de tópicos de Funções. Os alunos desenvolveram e evoluíram ao longo da intervenção estes três processos, sendo essencial para que consigam compreender de que modo as variáveis se relacionam para que assim possam explicar a relação funcional entre elas (Matos, 2007; Matos & Ponte, 2008).

4.1.2. Que dificuldades revelam os alunos na aprendizagem de tópicos de Funções?

Os alunos apresentam diversas dificuldades na aprendizagem de tópicos de Funções. Pelos dados recolhidos através das resoluções dos alunos, no estudo da 'função injetiva, sobrejetiva e bijetiva', as dificuldades começam logo a surgir quando a aprendizagem de novos conceitos de Funções envolve gráficos cartesianos. Os alunos estabelecem sem dificuldade as correspondências entre as variáveis independente e dependente (objeto e imagem) em diagrama de setas, contudo, apresentam dificuldades em retirar informações necessárias dos gráficos cartesianos que os ajudassem a retirar conclusões para estabelecer correspondências e relações entre as variáveis dependente e independente (objetos e imagens). Conclui-se que os alunos apresentam dificuldade, salientada por Canário et al. (2011), em estabelecer e definir relações entre as variáveis. Além disso, Ponte (1192) aponta ainda que o trabalho com os gráficos cartesianos associados ao pensamento abstrato, que vai acontecendo ao longo da resolução das tarefas apresentadas desde o início da intervenção pedagógica, se torna uma dificuldade na aprendizagem do conteúdo que envolve Funções, sendo também detetada nas resoluções analisadas.

Os alunos manifestam dificuldade na interpretação da informação fornecida por expressões algébricas, dado que a maioria apresentou um domínio incorreto para expressões quando estas eram apresentadas por este tipo de representação (Saraiva & Teixeira, 2009). Quando a função era representada através de um gráfico cartesiano, alguns alunos conseguiram ultrapassar essa dificuldade. Mas nas tarefas relacionadas com as transformações de um gráfico de uma função, os alunos revelaram algumas dificuldades. Os alunos apresentaram dificuldade em recolher e manipular a informação correta e necessária a utilizar de forma a obter as soluções para a tarefa proposta (Ponte et al., 2009). Outra dificuldade revelada pelos alunos é a descrição do comportamento da variação das variáveis, assim como a passagem e a interpretação da representação gráfica de uma função, dificuldade esta salientada no estudo realizado por Matos (2007) com alunos de que nível de 8.º ano de escolaridade, apesar dos alunos em estudo serem referentes ao 10.º ano de escolaridade a mesma dificuldade é verificável.

Em suma, os alunos apresentam dificuldade em relacionar as variáveis quando estas estão representadas em diferentes tipos de representação, exceto por diagramas de setas. A noção do conceito de variável e da relação existente é fundamental para compreender as relações funcionais e as representações gráficas, que posteriormente levam à compreensão de toda a informação que a função transmite ao aluno, tal como defende Smith (2003). A primeira dificuldade apresentada, estabelecer e definir relações entre as variáveis através dos diferentes tipos de representação, conduz à existência das outras dificuldades enquanto não for colmatada durante o estudo de funções.

4.1.3. Que perceções têm os alunos sobre o desenvolvimento do raciocínio funcional na aprendizagem de funções?

Ao longo da minha intervenção pedagógica, tendo por base o estudo de tópicos de Funções, foram lecionados diversos conceitos que são introduzidos no 10.º ano escolaridade segundo o Programa e Metas Curriculares de Matemática (2013). Nessa intervenção foram propostas diversas tarefas aos alunos sobre os conceitos em estudo seguindo as características do formato de ensino exploratório, tendo existido adaptações devido ao SARS-CoV-2, mas seguindo uma linhagem de forma a manter o formato de ensino escolhido. Com esta abordagem pretendia perceber de que forma o Raciocínio Funcional contribui na aprendizagem do tópico de funções de alunos do 10.º ano. Assim, é importante perceber quais as perceções dos alunos sobre o domínio de Funções e o raciocínio funcional, o que resulta da análise das respostas dos alunos ao questionário aplicado no final da intervenção pedagógica.

Os alunos relacionam o raciocínio funcional com o raciocínio utilizado na resolução de tarefas relacionadas com a aprendizagem de novos conceitos sobre funções e/ ou referente a questões relacionadas a conceitos de tópico de funções, onde podem utilizar diferentes representações. Nesta análise, sobre o que os alunos entenderiam por raciocínio funcional, alguns consideram que é o processo do pensamento e do raciocínio utilizado para desenvolver todo o tipo de tarefas que envolve conceitos sobre funções. Segundo Kaput (2008) e Canavarro (2007), o raciocínio funcional é um dos principais eixos do pensamento algébrico, sendo um processo de raciocínio utilizado na construção e generalização de padrões e relações, tendo por base o uso de diversas ferramentas linguísticas e diferentes representações, com exploração das generalizações das relações ou funções que constituem (Blanton, 2008).

Os alunos destacam que a resolução das tarefas os ajudou na interpretação gráfica, na interpretação de expressões algébricas e promoveu a conexão entre as diferentes representações de uma função. Para estabelecerem as relações entre as variáveis, os alunos consideram que analisavam o comportamento dos valores das variáveis da função em estudo. A resolução das tarefas propostas por parte dos alunos teria de estar implícito o raciocínio funcional para que fosse possível a resolução das mesmas, e assim chegar no final à generalização dos conceitos em estudo. Da análise efetuada ao questionário final aplicado aos alunos no final da intervenção pedagógica, respondido pelos alunos, não foi uma dificuldade sentida, nem mesmo o estabelecer relações entre as variáveis foi dificuldade, o que mostra que os alunos apesar de não terem um conhecimento concreto do que é o raciocínio funcional vão assumindo que os processos do raciocínio funcional são importantes para a resolução das tarefas que envolvem os conceitos sobre funções.

Relativamente às vantagens apresentadas pelos alunos para a evolução do raciocínio funcional, ao longo da intervenção pedagógica, com a aplicação das tarefas propostas, referem que através do pensamento utilizado na resolução das tarefas conseguem diferentes estratégias de resolução para a mesma tarefa e com o número de tarefas trabalhadas o raciocínio fica mais desenvolvido. Em contrapartida, alguns alunos referem que os conceitos do tópico de funções são um pouco confusos, o que leva a escassez de tempo para terminar a resolução das tarefas.

4.2. Limitações e Recomendações

Na realização deste trabalho, que pretendia averiguar o contributo da aprendizagem do tópico de Funções por alunos do 10.º ano de escolaridade para o desenvolvimento do Raciocínio Funcional, surgiram diversas limitações. A minha intervenção pedagógica iniciou num ensino com aulas presenciais, em que a maior limitação sentida, por vezes, era relativamente à recolha de dados, que provocava uma quebra no ritmo da aula e retirava, ainda, algum tempo da própria aula. A recolha de informação em formato de áudio foi uma das limitações, pois em momentos de muito barulho torna-se difícil realizar a análise dos dados. Posteriormente, esta recolha complicou-se devido à pandemia provocada pelo SARS-CoV-2, o que implicou uma adaptação para a recolha de dados para a realização deste trabalho. Apesar desta adaptação na recolha de dados, os alunos por vezes não enviavam dentro de prazos estipulados a resolução das tarefas. Devido a falhas tecnológicas, as gravações no formato áudio foram dificultadas e as gravações vídeo já não foram possíveis.

Na minha intervenção pedagógica pretendia que os alunos ao longo da resolução das tarefas partissem de casos particulares para a generalização dos conceitos estudados, mas este tipo de realização de tarefas exige muito tempo para que possamos discutir os dados o que nem sempre foi possível. Em aulas presenciais, devido à gestão dos objetivos curriculares imposta pelo extenso Programa e Metas Curriculares de Matemática, tal abordagem exigia muito tempo das aulas, o que se tornou complicado de gerir a duração de cada etapa da aula. Nas aulas virtuais, devido à gestão do tempo entre aulas síncronas e assíncronas, tornou-se complicado discutir todas resoluções dos alunos. Neste tipo de aulas, uma das grandes limitações é a interação com os alunos, promover o diálogo dos alunos, por vezes, estes estão muito calados sem exporem as ideias e refutarem o que lhes é apresentado para assim provocar a discussão. Em aulas presenciais este diálogo e interação aluno professor é mais fácil de ser alcançado. É pertinente realçar que algumas limitações em aulas virtuais foram sendo colmatadas ao longo do tempo, uma vez que este tipo de ensino foi enfrentado pela primeira vez, tanto para os alunos como para os professores, o que levou a pensar em estratégias conforme surgia o 'problema'. Assim, um grande desafio do trabalho durante a intervenção pedagógica foi conseguir, em aulas virtuais, a interação dos alunos, o que em aulas presenciais acontece mais naturalmente, e, posteriormente, conseguir que todos os alunos devolvessem os trabalhos realizados.

Uma das limitações sentidas é relativa ao método de trabalho e de aprendizagem dos alunos, que não estavam familiarizados com a abordagem de novos conceitos sobre o tópico de funções, uma vez que não estão habituados a fazer generalizações dos conceitos. Como a maioria dos alunos não estava habituado a este trabalho de generalização de conceitos, o realizar as tarefas em casa era uma dificuldade, sendo isto notado em aulas presenciais. Em aulas virtuais, estas limitações são mais notórias quando na realização das tarefas prévias era pedido para generalizar os conceitos em estudo sobre o tópico funções.

Para o futuro, as recomendações a nível de intervenção pedagógica em aulas presencias passa por gerir o tempo de forma a conseguir mais tempo de discussão para assim os alunos partilharem ideias e entrarem no método de aprendizagem que permite partirem de casos particulares para a generalização. Em caso de aulas virtuais, recomenda-se haver uma melhor gestão de tempo para que se possa aplicar o mesmo método de exploração dos conteúdos. Outro facto importante é encontrar estratégias para que os alunos possam participar mais neste tipo de aulas, com quadros interativos por parte dos alunos e professor, com apresentação de trabalhos por parte dos alunos e não só do professor, entre outras, de forma que os alunos possam interagir mais com os restantes colegas e expor ideias e criar as discussões. As recomendações para estudos futuros semelhantes a estes, são estudos pertinentes e necessários para se analisar o desenvolvimento do raciocínio funcional dos alunos, em vários níveis de escolaridade, até no ensino superior, e, assim, abrir leque a novas investigações neste campo. Assim como, o desenvolvimento do raciocínio funcional de formadores/ professores e futuros professores são importantes e necessários para analisar o desenvolvimento do raciocínio funcional, mesmo que estes tenham frequentado disciplinas de matemática no seu percurso de formação. A pesquisa de estudos relacionados com o desenvolvimento o raciocínio funcional de futuros professores evidenciou que existem, efetivamente, algumas investigações neste âmbito, mas que recentemente parece ter havido uma diminuição de estudos nesta área.

Apesar de todas a limitações e dificuldades sentidas ao longo da intervenção pedagógica, considero que esta investigação contribuiu de forma favorável para o objetivo proposto, dando resposta a todas as questões de investigação a que me propus responder, sendo possível estudar o contributo da aprendizagem do tópico de Funções por alunos do 10.º ano de escolaridade para o desenvolvimento do Raciocínio Funcional.

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Departamento da Educação Básica do Ministério da Educação.

Araki, P., Rogoski, K., & Silva, K. (2019). Raciocínio funcional mobilizado em atividades de modelagem matemática: encaminhamento envolvendo a experimentação investigativa. *Ensino e Tecnologia em Revista*, (1), 76-92.

Barbosa, A. (2011). *Ensino Exploratório da Matemática: práticas e desafios*. Associação de Professores de Matemática.

Barbosa, A. (2013). O contributo da visualização no desenvolvimento do raciocínio funcional. *Investigação em Educação Matemática: Raciocínio Matemático* (pp.51-80). SPIEM.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412–446.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization*, Advances in Mathematics Education.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming.* Heinemann.

Canário, F., Amado, N., & Carreira, S. (2011). O GeoGebra na construção de modelos matemáticos: Uma experiência no estudo da variação linear. In *ATAS XXII SIEM* (pp. 845-857). Associação de Professores de Matemática.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, v. 16, n. 2, 83-118.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: O caso de Célia. In L. Santos (Ed.), *Investigação em Matemática: Práticas do Ensino da Matemática* (pp. 255-266). SPIEM.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modelling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco de referencia y un estudio. *EMA, 8* (2), 121-156

Cyrino, M. C. C. T., & Oliveira, H. M. (2011). Pensamento algébrico ao longo do ensino básico em Portugal. *Bolema*, 24(38), 97-126.

Domingos, A. M. (1994). *A aprendizagem de funções no ambiente computacional com recurso a diferentes representações*. Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa. Associação de Professores de Matemática.

Domingos, A., Saraiva, M. J., & Ferreira, R. A. (2013). Apresentação. *Investigação em Educação Matemática: Raciocínio Matemático* (pp.8-13). SPIEM.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-135). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher,& M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). Macmillan.

Kieran, C. (2001). The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics, 46*, 187-228.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Information Age.

Kleiner, I. (2012). A brief history of the function concept. In I. Kleiner (Ed.), *Excursions in the History of Mathematics* (pp. 103 -124). Springer.

Masson, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Kluwer.

Matos, A. (2007). *Explorando relações funcionais no 8.º ano*. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa. Associação de Professores de Matemática.

Matos, A., & Ponte, J. P. (2008). O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8.º Ano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 2*, 195-231.

NCTM (2000). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Associação de Professores de Matemática.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Associação de Professores de Matemática.

NCTM (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Associação de Professores de Matemática.

NCTM (2014). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (1990). O conceito de função no currículo de matemática. *Educação e Matemática*, 15,3-9.

Ponte, J. P. (1992). The history of concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, 3 (2), 3-8.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricula rem Matemática. In GTI (Ed), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico.* Ministério da Educação – Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Revista Práxis Educativa, 2*, 355-377.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior*. Revista Práxis Educativa*, 2(1), 355-377.

Ponte, J., Quaresma, M., & Branco, N. (2011). Tarefas de exploração e investigação na aula de matemática. *Educação Matemática em Foco*, 9-29.

Portugal (2005). *Lei de Bases do Sistema Educativo.* Assembleia da República.

Prates, A., Tavares, C., Dias, R., & Nunes, C. (2011). O pensamento algébrico no estudo das funções no 10.º ano de escolaridade. In *ATAS XXII SIEM* (pp. 163-178). Associação de Professores de Matemática.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257–277.

Rodrigues, A. (2016). *O raciocínio funcional de alunos de 8.º ano na resolução de tarefas*. Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade de Lisboa.

Safuanov, I. (2015). The history of the concept of a function and its teaching in Russia. In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the ninth congress of the european society for research in mathematics education* (pp.1866-1872). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function- a case study. *Educational Studies in Mathematics*, *53*, 229-254.

Saraiva, J. M., & Teixeira, M. A. (2009). Secondary school students understanding of function via exploratory and investigative tasks. *Quaderni di Ricerca in Didattica, 19*, 74-83.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 25-58). Mathematical Association of America.

Smith, E. (2003). Stasis and change: Integrating patterns, functions, and algebra throughout the K-12 curriculum. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 136-150). NCTM.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In *Algebra in the Early Grades.* Associates Taylor & Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics.

Swafford, J., & Langrall, C. (2000). Grade 6 students' pre-instructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 89–112.

Tanisli, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementar school students. *Journal of Mathematical Behavior*, 30, 206-223.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra.In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 327-334). Utrecht University.

Vale, I. (2013) Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 8(2), 64-81.

Villa-Ochoa, J. A. (2011). Raciocínio "covariacional": o caso da função quadrática. In *Atas XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 3*, 293-305.

Viseu, F., Martins, M. P., & Rocha, H. (2019). The notion of function held by basic education pre-service teachers. In L. Leite, E. Oldham, L. Carvalho, A. S. Afonso, F. Viseu, L. Dourado, & M. H. Martinho (Eds.), *Proceedings ATEE Winter Conference 2019 – Science and mathematics education in the 21st century* (pp. 120-130). ATEE and CIEd: Institute of Education, University of Minho.

Warren, E. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 171-185.

Anexos

Anexo 1 – Pedido de Autorização de Gravação Video/ áudio à direção da Escola

Exma. Srª. Diretora da Escola

No âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade de Minho, enquanto professora estagiária, pretendo desenvolver experiências de ensino que potenciem a aprendizagem dos alunos do tema "O Raciocínio Funcional: um estudo com alunos de 10.º ano na aprendizagem de funções". O desenvolvimento dessas experiências implica a recolha de dados, que serão obtidos através da resolução de tarefas e da observação das aulas. Para uma melhor compreensão das atividades que se desenvolvem na aula de Matemática, necessito de proceder à recolha de dados através de gravações (áudio e vídeo). Para esse fim, venho por este meio solicitar a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio e vídeo dos dados necessários à concretização das experiências de ensino e de aprendizagem na sala de aula do educando.

Comprometo-me a usar os dados apenas para fins académicos e a não divulgar o nome da escola e dos alunos, nem expor qualquer indicador que envolva do educando. Só me interessa a informação que me ajude a melhorar as minhas estratégias de ensino em prol da aprendizagem dos alunos. Comprometo-me ainda a proceder à destruição de todas as gravações após a realização do estágio.

Por fim, informo V. Ex. que, caso autorize a realização das minhas pretensões, solicitarei de seguida a autorização dos Encarregados de Educação dos alunos para a participação dos mesmos no meu projeto de investigação.

Grata pela atenção prestada,

____

(Raquel Cristina Teixeira Martins)

Braga, dezembro de 2019

Anexo 2 – Pedido de Autorização de Gravação Video/ áudio aos Encarregados de Educação

Exmo(a). Senhor(a). Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade de Minho, enquanto professora estagiária, pretendo desenvolver experiências de ensino que potenciem a aprendizagem dos alunos de tópicos do tema "O Raciocínio Funcional: um estudo com alunos de 10.º ano na aprendizagem de funções". O desenvolvimento dessas experiências de ensino implica a recolha de dados, que serão obtidos através da resolução de tarefas e da observação de aulas. Para uma melhor compreensão das atividades que se desenvolvem na aula de Matemática necessito de proceder à recolha de dados através de gravações (áudio e vídeo). Para esse fim, venho por este meio solicitar a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio e vídeo dos dados necessários à concretização das experiências de ensino e de aprendizagem na sala de aula do seu educando.
Comprometo-me a usar os dados apenas para fins académicos e a não divulgar o nome da escola e dos alunos, nem expor qualquer indicador que envolva o seu educando. Só me interessa a informação que me ajude a melhorar as minhas estratégias de ensino. Os dados das gravações serão apenas usados para efeitos do estudo a realizar e não terão qualquer influência nas classificações dos alunos. Comprometo-me ainda a proceder à destruição de todas as gravações após a realização do estágio.

Agradeço desde já a sua colaboração.

Braga, janeiro de 2020

A estagiária de Matemática

____

(Raquel Cristina Teixeira Martins)

\- -

Autorização

Eu, ____, Encarregado de Educação do(a) aluno(a) ____________________________________, autorizo que se faça o registo em áudio e vídeo das atividades de ensino e de aprendizagem nas aulas de Matemática que envolvem o meu educando desde que seja salvaguardado o anonimato do seu nome e de qualquer indicador que o indicie.

O Encarregado(a) de Educação

____

Anexo 3 – Questionário Inicial

Este questionário tem como finalidade recolher informação que me permita conhecer características dos alunos da turma relativamente à disciplina de matemática, destacando o desempenho escolar no ano anterior, em particular no que respeita à aprendizagem de tópicos de Funções.
As tuas opiniões são importantes para o estudo que estou a realizar relativamente à aprendizagem de Funções. Para obter resultados válidos, é de maior importância que respondas de forma refletida a todas as questões que te são apresentadas. Comprometo-me a utilizar os dados apenas para efeitos da investigação e de forma anónima.

Dados Gerais

1. Idade: ________
2. Sexo: ☐ M ☐ F
3. Que classificação obtiveste na disciplina de Matemática no ano anterior? ____________________
4. Quais são as tuas disciplinas preferidas? Porquê?____
   ____
   ____
5. Quais são as disciplinas que tens mais dificuldades? Porquê? ______________________________
   ____
   ____
6. Que temas mais aprecias na disciplina de Matemática? Porquê?____________________________
   ____
   ____
7. Que temas menos aprecias na disciplina de Matemática? Porquê? __________________________
   ____
   ____
8. Costumas usar materiais tecnológicos quando estudas Matemática? Sim ☐ Não ☐

Calculadora Gráfica	☐	Telemóvel	☐
Internet	☐	Tablet	☐
Computador	☐	Outros:	☐ ....

9. Com que finalidade costumas usar os materiais tecnológicos que indicaste no teu estudo a Matemática? ____

____

____

10. Quantas horas, em média, estudas por semana? __________________________________

Dessas horas de estudo, quantas são dedicadas para estudares Matemática? ____________

11. Como caracterizas a tua relação com o tema das Funções? Justifica a tua resposta__________

____

____

12. Quais são as tuas dificuldades no estudo de funções? _______________________________

____

____

13. A disciplina de matemática contribui para o desenvolvimento da capacidade de raciocínio. O que entendes por raciocínio matemático? ____

____

____

14. O que entendes por raciocínio funcional? __________________________________

____

____

Anexo 4 – Planos de aula

Plano de Aula 3

Comentários

Turma do 10.º ano do curso científico humanístico de ciências e tecnologia

Duração: 90 minutos

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) Introdução da tarefa; (ii) Exploração da tarefa; (iii) Discussão

Tópico: Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva. Função composta.

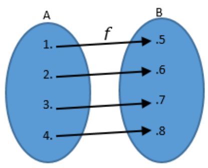
Objetivos: Reconhecer função injetivas, sobrejetivas e bijetiva. Caracterizar a função composta de duas funções.

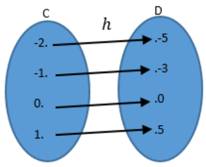
Formato de ensino: Ensino exploratório

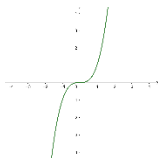
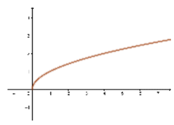
Tarefa1: Classificação de funções quanto à injetividade e sobrejetividade

Com esta tarefa pretende-se que os alunos estabeleçam a definição de função injetiva, a partir do confronto entre exemplos positivos e exemplos negativos.

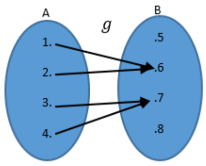
1. As seguintes representações de funções traduzem funções injetivas:

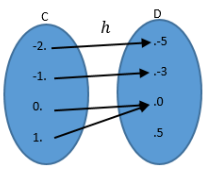


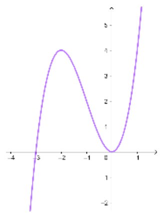
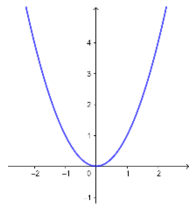


As seguintes representações de funções traduzem funções não injetivas





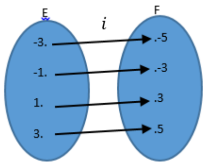



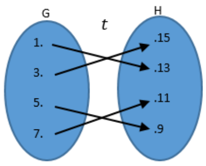
1.3. Da análise das relações estabelecidas entre os objetos e as respetivas imagens de cada uma das funções definidas, que características distinguem as que são injetivas das que não são injetivas?

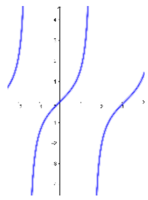
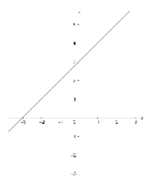
1.4. Define função injetiva.

Com esta tarefa pretende-se que os alunos estabeleçam a definição de função sobrejetiva, a partir do confronto entre exemplos positivos e exemplos negativos.

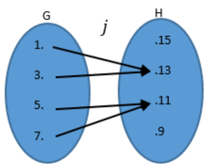
2. As seguintes representações de funções traduzem funções sobrejetivas.

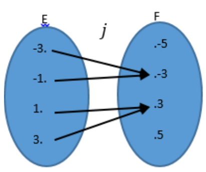


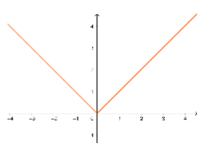
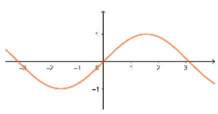


As seguintes representações de funções traduzem funções não sobrejetivas





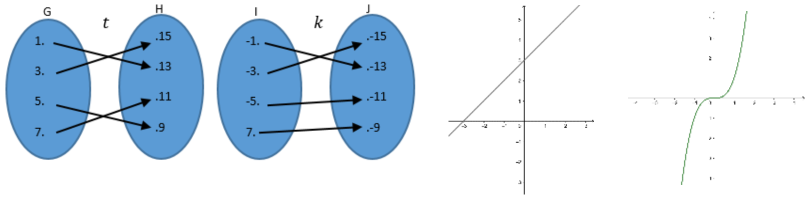



Com esta tarefa pretende-se que os alunos estabeleçam a definição de função bijetiva, a partir do confronto entre exemplos positivos e exemplos negativos.

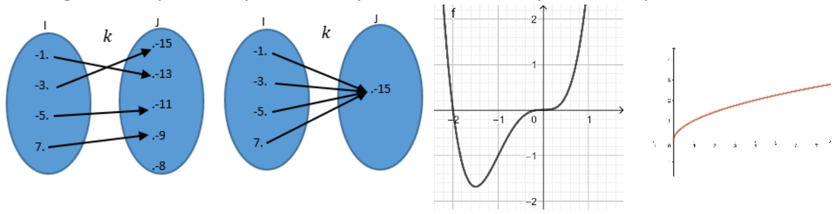
2.1. Da análise das relações estabelecidas entre o conjunto de chegada e o contradomínio de cada uma das funções definidas, que características distinguem as que são sobrejetivas das que não são sobrejetivas?

2.2. Define função sobrejetiva.

3. As seguintes representações de funções traduzem funções bijetivas



As seguintes representações de funções traduzem funções não bijetivas



3.1. Da análise das representações de cada uma das funções definidas, que características distinguem as que são bijetivas das que não são bijetivas?

3.2. Define função bijetiva.

Tarefa2: Função composta

Considera as funções f e g definidas por: $f(x) = \sqrt{x-4}$ e $g(x) = x^2$.

2.1. Determina os domínios das funções f e g.

2.2. Calcula $g(5)$ e $f(25)$. A partir das funções dadas, que função podes definir que te permita determinar o valor de $f(25)$?

2.3. Determina $f[g(x)]$ e de seguida calcula o valor de $f[g(5)]$.

2.4. A função que definiste chama-se função composta de f com g. Caracteriza essa função.

2.5. Caracteriza a função $(g \circ f)(x)$.

Tarefa Adicional

1.Sendo f, g e h funções reais de variável real definidas por:

$f(x) = x + 1$ $g(x) = x^2$ $h(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$. Caracterize:

a. $f \circ g$

b. $f \circ f$

c. $g \circ h$

d. $h \circ g$

Materiais: Manual do aluno; Calculadora gráfica; GeoGebra.

Esta tarefa tem por finalidade elucidar os alunos de que como determinam a imagem de um objeto do domínio de uma dada função, também podem determinar a imagem de uma função por outra função no respetivo domínio de validade.
Na construção da noção de função composta de duas funções, pretende-se também que os alunos percebam como se carateriza uma função composta.

Caso a Tarefa Adicional não seja resolvida na sala de aula será proposta como trabalho de casa.

Plano de Aula 4

Tópico: Função composta

Objetivos: Caracterizar a função composta de duas funções.

Formato de ensino: Ensino exploratório

Atividade Motivacional: Função composta

Considera as funções f e g definidas por: $f(x) = \sqrt{x-4}$ e $g(x) = x^2$.

1. Determina os domínios das funções f e g.

2. Calcula $g(5)$ e $f(25)$. A partir das funções dadas, que função podes definir que te permita determinar a imagem de 5?

3. Determina a expressão que define $f[g(x)]$ e de seguida calcula o valor de $f[g(5)]$.

4. A função que definiste chama-se função composta de f com g. Caracteriza essa função.

5. Caracteriza a função $(g \circ f)(x)$.

Prática1: Função composta

Sendo f, g e h funções reais de variável real definidas por:

$f(x) = x + 1$; $g(x) = x^2$; $h(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$, caracteriza as seguintes funções:

1. $f \circ g$

2. $f \circ f$

3. $g \circ h$

4. $h \circ g$

Prática: Injetividade, sobrejetividade e bijetividade

2.1. Recorrendo a situações da vida real, estabelece, justificando, um exemplo para cada uma das situações seguintes:

a) Função injetiva e sobrejetiva.

b) Função não injetiva e não sobrejetiva.

c) Função injetivas e não sobrejetivas.

d) Função não injetiva e sobrejetiva.

2.2. Colocar tarefas sobre o estudo de injetividade/sobrejetividade e bijetividade

3 Averigue quais das funções definidas em $\mathbb{R}$ são injetivas.

a) $f(x) = x^2 - 1$

b) $g(x) = -3x + \frac{1}{2}$

c) $h(x) = x^3 - x$

d) $i(x) = x^3 + 1$

4 Considere os conjuntos $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 4, 5\}$ e as funções:

$$\begin{array}{llll} f: & A \longrightarrow B & g: & A \longrightarrow B \\ & x \mapsto x+3 & & x \longmapsto |x| \end{array}$$

Mostre que f é sobrejetiva e que g é não sobrejetiva.

Comentários

Turma do 10.º ano do curso científico humanístico de ciências e tecnologia

Duração: 90 minutos

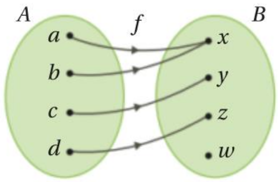
O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) Introdução da tarefa; (ii) Exploração da tarefa; (iii) Discussão

Esta tarefa tem por finalidade envolver os alunos na caracterização da função composta de duas funções.

Com os momentos de Prática pretende-se que os alunos sistematizem os conhecimentos que adquiriram no estudo da função composta de duas funções e da injetividade, sobrejetividade e bijetividade de funções.

5. Verifique se as seguintes funções são injetivas, sobrejetiva e bijetiva.

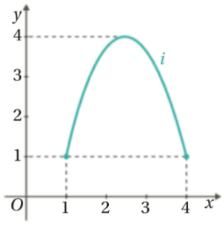
a) $f: A \longrightarrow B$



b) $g = \{-1, 0, 1, 4\} \longrightarrow \{0, 1, 16\}$
$x \longmapsto x^2$

c) $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{x-1}{3}$

d) $i: [1, 4] \longrightarrow [0, 4]$



Materiais: Manual do aluno; Calculadora gráfica.

Plano de Aula 7

Tópico: Transformações do gráfico de uma função.

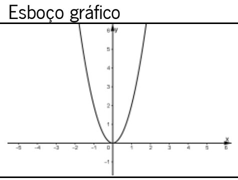
Objetivo: Reconhecer as transformações associadas ao gráfico de uma função.

Formato de ensino: Ensino exploratório

Atividade Motivacional: Transformações do gráfico de uma função

1. Seja i uma função real de variável real definida por $i(x) = 2x^2$:

1.1 Considera a seguinte tabela:

Função definida por:	Esboço gráfico	Domínio	Contradomínio	Zeros
$i(x) = 2x^2$		$D = IR$	$D' = IR$	$\{0\}$
$a(x) = i(x) + 3$				
$h(x) = i(x) - 2$				

1.1.1. Completa a tabela.

1.1.2. Da análise da informação que retiras da tabela, o que podes concluir sobre as relações existentes entre os gráficos das funções a e h e o gráfico da função i?

1.1.3. Considerando f uma função real de variável real, como obténs o gráfico de uma função g definida por $g(x) = f(x) + k$?

1.2 Considera a seguinte tabela:

Função definida por:	Esboço do gráfico	Domínio	Contradomínio	Zeros
$i(x) = 2x^2$				
$t(x) = i(x + 2)$				
$r(x) = i(x - 3)$				

1.2.1. Completa a tabela.

1.2.2. Da análise da informação que retiras da tabela, o que podes concluir sobre as relações existentes entre os gráficos das funções t e r e o gráfico da função i?

1.2.3. Considerando f uma função real de variável real, como obténs o gráfico de uma função g definida por $g(x) = f(x + k)$?

1.3 Considera a seguinte tabela:

Função definida por:	Esboço do gráfico	Domínio	Contradomínio	Zeros
$i(x) = 2x^2$				
$q(x) = i(x + 1) - 3$				
$s(x) = i(x - 2) + 1$				

1.3.1. Completa a tabela.

1.3.2. Da análise da informação que retiras da tabela, o que podes concluir sobre as relações existentes entre os gráficos das funções q e s e o gráfico da função i?

1.3.3. Considerando f uma função real de variável real, como obténs o gráfico de uma função g definida por $g(x) = f(x - a) + b$?

Comentários

Turma do 10.º ano do curso científico humanístico de ciências e tecnologia

Duração: 45 minutos

O formato de ensino adquire características do ensino exploratório, ao proporcionar que os tópicos em estudo resultem do trabalho em torno de tarefas: (i) Introdução da tarefa; (ii) Exploração da tarefa; (iii) Discussão.

Com esta tarefa pretende-se que os alunos estabeleçam a definição de translação vertical e translação horizontal de uma função.

Com esta tarefa pretende-se que os alunos estabeleçam a relação entre o gráfico de uma função e as translações associadas.

Com esta tarefa pretende-se que os alunos estabeleçam a definição e relação entre as reflexões de eixo do gráfico de uma função.

1.4 Considera a seguinte tabela:

Função definida por:	Esboço do gráfico	Domínio	Contradomínio	Zeros
$i(x) = 2x^2$				
$p(x) = -i(x)$				
$z(x) = i(-x)$				

Esta tarefa tem por finalidade elucidar os alunos de que como determinam o gráfico cartesiano de uma função através de translações.

1.4.1. Completa a tabela.

1.4.2. Da análise da informação que retiras da tabela, o que podes concluir sobre as relações existentes entre os gráficos das funções p e z e o gráfico da função i?

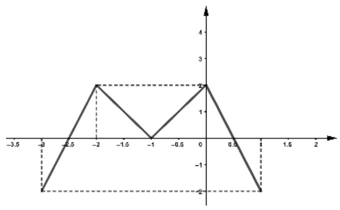
1.4.3. Considerando f uma função real de variável real, como obténs o gráfico de uma função g definida por $g(x) = -f(x)$?

1.4.4. Considerando f uma função real de variável real, como obténs o gráfico de uma função g definida por $g(x) = f(-x)$?

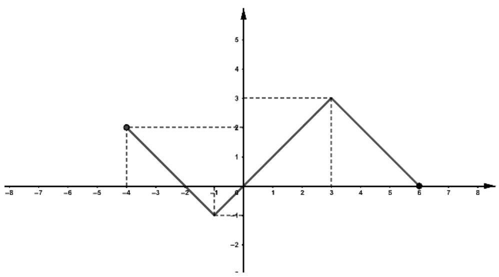
Esta tarefa tem por finalidade conciliar os conhecimentos abordados na aula.

Prática

1. No gráfico cartesiano está representada a função r real de variável real. Quais as transformações gráficas a aplicar para obter o gráfico de uma função s que seja par e não tenha zeros.



2. Considera o gráfico cartesiano que representação a função f:



2.1 Indica o domínio, o contradomínio e os zeros da função f.

2.2 Considera as seguintes funções:

$g(x) = f(x) - 2;$ $\quad p(x) = -f(x+2) - 1$

$h(x) = f(x+3);$ $\quad q(x) = f(-x) + 1$

$t(x) = f(x-1) + 2$ $\quad s(x) = -f(-x-1) + 2$

Para cada uma destas funções, esboça o gráfico cartesiano e determina o domínio, o contradomínio e os zeros.

3. A tabela seguinte mostra o tempo t, em minutos, gasto pelo Pedro a percorrer m metros na corrida que faz diariamente. Para medir o tempo gasto o Pedro usa o cronómetro do seu telemóvel.

t	m
0	0
2	100
4	200
6	
8	
10	

3.1 Completa a tabela supondo que se mantém a regularidade.

3.2 Escreve uma expressão algébrica que relaciona t e m.

3.3 Sabendo que o Pedro corre uma hora por dia e que ativa o cronómetro no início da corrida, caracteriza a função p que faz corresponder a extensão percorrida ao tempo marcado no cronómetro.

3.4 Desenha o gráfico cartesiano da função p.

3.5 No último sábado, antes de ativar o seu cronómetro, o Pedro andou 10 metros. Partindo da função p, define uma função f que faz corresponder a cada tempo marcado no cronómetro a extensão do percurso efetuado pelo Pedro.

3.6 No sistema cartesiano usado em 3.4 esboça o gráfico que ajude a observar o registo deste dia.

3.7 No domingo, o Pedro, assim que ativou o seu cronómetro, encontrou um amigo com o qual conversou durante 15 minutos. Logo de seguida, começou a correr. Partindo da função p, define uma função g que faz corresponder a cada tempo marcado no cronómetro a extensão da corrida efetuada pelo Pedro.

3.8 No sistema cartesiano utilizado em 3.4 esboça o gráfico que ajude a observar o registo deste dia.

Materiais: Manual do aluno; Calculadora gráfica; GeoGebra.

Anexo 5 – Questionário final

As tuas opiniões são importantes para o estudo que estou a realizar relativamente ao raciocínio funcional na aprendizagem de funções no 10.º ano é da maior importância que respondas de forma refletida a todas as questões que te são apresentadas. A informação recolhida será usada exclusivamente para fins académicos, comprometendo-me a assegurar o anonimato da mesma.

1. Das afirmações que se seguem, assinala com uma cruz **(X)** a opção que mais se adequa ao teu grau de concordância atendendo à seguinte escala: **DT:** Discordo Totalmente; **DP:** Discordo Parcialmente; **I:** Indiferente; **CP:** Concordo Parcialmente; **CT:** Concordo Totalmente.

Afirmações	**DT**	**DP**	**I**	**CP**	**CT**
Gostei de aprender os tópicos de Funções.					
Tive mais dificuldades na aprendizagem de tópicos de Funções do que noutros tópicos matemáticos.					
As tarefas realizadas permitiram-me generalizar conceitos de Funções a partir de casos particulares.					
A análise de exemplos positivos e exemplos negativos permitiu-me estabelecer definições de conceitos de Funções.					
A resolução de tarefas sobre tópicos de Funções desenvolveu a minha capacidade de raciocínio.					
A resolução das tarefas desafiou-me a estabelecer relações entre variáveis.					
As tarefas propostas desafiaram-me a pensar.					
Para estabelecer relações entre as variáveis analisei o comportamento dos seus valores.					
A resolução das tarefas propostas promoveu a conexão entre as diferentes representações de Funções (algébrica, gráfica, numérica/tabelar).					
As tarefas propostas incentivaram-me a descrever as relações de correspondência.					
As tarefas propostas incentivaram-me a identificar as relações de correspondência.					
As tarefas propostas incentivaram-me a trabalhar somente com a representação algébrica de Funções.					
As tarefas propostas incentivaram-me a trabalhar somente com a representação gráfica de Funções.					
As tarefas propostas incentivaram-me a trabalhar somente com a representação numérica/tabelar de Funções.					
A discussão de diferentes resoluções das tarefas propostas ajudou-me a entender melhor os conceitos estudados.					
Não tive dificuldades na aprendizagem de tópicos de Funções.					
Na resolução de tarefas sobre tópicos de Funções senti necessidade de recorrer à representação gráfica para clarificar o meu raciocínio.					
Senti dificuldades na passagem da representação analítica para a representação gráfica de funções					
Senti dificuldades em estabelecer relações entre as variáveis.					
Senti dificuldades em generalizar conceitos de funções					
A interpretação da informação proveniente da representação gráfica favoreceu o desenvolvimento da minha capacidade de argumentação					
Senti dificuldades em estabelecer uma relação entre a representação gráfica e a representação analítica.					
Gosto mais das aulas quando o professor expõe os conteúdos em estudo e resolve as tarefas propostas.					
Gosto mais das aulas quando descubro os conteúdos em estudo e resolvo as tarefas propostas.					

2. Devido ao Covid-19, o método de ensino passou a ser virtual (aulas assíncronas e síncronas). Indica **três vantagens** deste método de ensino.

3. Devido ao Covid-19, o método de ensino passou a ser virtual (aulas assíncronas e síncronas). Indica **três desvantagens** deste método de ensino.

4. Que dificuldades sentiste na aprendizagem das funções?

5. O que entendes por **raciocínio funcional**?

6. Indica **três vantagens** das tarefas propostas para a evolução do **raciocínio funcional** no estudo de funções.

7. Indica **três desvantagens** das tarefas propostas para a evolução do **raciocínio funcional** no estudo de funções.