

ESTRATÉGIAS, DIFICULDADES E COMUNICAÇÃO ESCRITA DE UMA TURMA DE 11.º ANO NA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA MATEMÁTICO

Letícia Gabriela Martins
CIEd, Universidade do Minho
lgb.martins@hotmail.com

Maria Helena Martinho
CIEd, Universidade do Minho
mhm@ie.uminho.pt

Resumo: O uso da resolução de problemas na sala de aula é muito importante já que permite estimular o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Mais do que saber aplicar os seus conhecimentos, é essencial que saibam estabelecer estratégias para ultrapassar algum problema que tenham de enfrentar, tanto no ambiente escolar como, no futuro, a nível profissional. Para isto, desenvolver o raciocínio e a capacidade de resolver problemas são dois fatores de extrema importância e que podem ser trabalhados em simultâneo. Mas, quando se trata de desenvolver certas competências, há dificuldades que surgem e é importante detetá-las, para que possam ser ultrapassadas. Quando os alunos têm oportunidade de confrontar diferentes estratégias e trocar ideias, tomam contacto com outros raciocínios que podem ser úteis para novos problemas. E, ligado a tudo isto, torna-se necessário perceber como é que os alunos comunicam por escrito, tentando que, a cada problema resolvido, o aluno melhore também a forma como organiza a sua resposta. Assim, nesta comunicação pretende-se identificar as estratégias utilizadas e as dificuldades sentidas pelos alunos, bem como caracterizar a comunicação escrita nas respetivas resoluções. Para responder a esses objetivos, são apresentados os resultados encontrados na análise das respostas de uma turma de 11.º ano de Matemática A a um problema proposto em sala de aula. Na resolução deste problema, as estratégias a que os alunos mais recorreram foram a construção de esquemas/figuras e a construção de um modelo. Quanto às dificuldades, estas foram sentidas na interpretação de resultados e a nível de estratégia, tanto na escolha como na execução. Já na comunicação escrita, foi perceptível alguma dificuldade em fundamentar claramente as respostas, vários alunos recorreram à experimentação na fundamentação utilizada e, no que toca às representações, evidenciaram-se a simbólica e a icónica.

Palavras-chave: Resolução de problemas; Ensino Secundário; Estratégias de resolução de problemas; Dificuldades na resolução de problemas; Comunicação escrita.

Introdução

A resolução de problemas, em conjunto com o raciocínio, constitui uma das dez áreas de competências consideradas no “Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória”, documento criado pelo Ministério da Educação e Ciência (MEC) em 2017.

Ainda no mesmo documento, percebemos que uma das práticas docentes que são decisivas para o desenvolvimento desse perfil passa por “promover de modo sistemático e intencional, na sala de aula e fora dela, atividades que permitam ao aluno fazer escolhas, confrontar pontos de vista, resolver problemas e tomar decisões com base em valores” (MEC, 2017, p. 24). Esta importância na resolução de problemas é também visível no Programa do Ensino Secundário de Matemática A (MEC, 2013), pois em todos os domínios encontramos a resolução de problemas no desenvolvimento dos seus conteúdos.

No contexto do PISA 2012, conseguimos reforçar a importância de desenvolver a capacidade de resolver problemas, sendo esta competência considerada essencial no mundo profissional. Como vivemos, cada vez mais, rodeados pela tecnologia, os alunos precisam de estar mais preparados para desenvolver estratégias de resolução de problemas, e não apenas de “domínio de um repertório de factos e procedimentos” (OECD, 2014, p.26). Assim, a Matemática deve ser vista como algo mais do que um mero conjunto de exercícios em que se aplicam conhecimentos uma vez que, se um aluno realizar apenas tarefas rotineiras, a sua imaginação e a sua capacidade de raciocínio acabarão por ser bloqueadas.

Assim, tendo em consideração a relevância que tem o uso da resolução de problemas na sala de aula, este estudo centra-se nos seguintes objetivos: identificar as estratégias de resolução de problemas que os alunos utilizam, reconhecer as dificuldades reveladas pelos alunos durante a resolução de problemas e caracterizar a comunicação escrita dos alunos na apresentação das resoluções dos problemas. Com esta comunicação, pretende-se apresentar os resultados da análise das respostas de uma turma de 11.º ano de Matemática A a um problema proposto aquando deste estudo.

Enquadramento teórico

O assunto principal desta comunicação é a resolução de problemas. Mas, afinal, o que é um problema? Neste trabalho, um problema é assumido como sendo uma tarefa que se quer resolver, mas para a qual não se sabe um método prévio de resolução. Passando à resolução de problemas, é vista como o processo de descoberta do método que permite resolver o problema, ou seja, a descoberta de um caminho, previamente desconhecido, para alcançar um determinado fim que está bem definido.

Nesta secção, e agora que já estão esclarecidos os conceitos de base de problema e de resolução de problemas, será explicitada a lista de estratégias de resolução de problemas às quais se pode recorrer, as diferentes dificuldades que são esperadas por parte dos alunos e ainda os critérios que nos permitem analisar a comunicação escrita dos alunos.

Estratégias de resolução de problemas

Vários são os autores que apresentam listas de estratégias de resolução de problemas, como é o caso de Musser e Shaughnessy (1980), Posamentier e Krulik (1998) ou Lopes (2002). Este último autor, por exemplo, refere seis categorias básicas no que toca às estratégias de resolução de problemas: construir um modelo; construir uma tabela; tentar, conferir e rever; simplificar; eliminar; encontrar padrões. Na nomenclatura de Lopes, estamos a *construir um modelo* quando recorremos a uma “equação, algoritmo, fórmula, esquema, esboço, desenho, diagrama” (Lopes, 2002, p. 24). Já *construir uma tabela* é a estratégia em que recorremos à elaboração de um gráfico. Quanto a *tentar*,

conferir e rever consiste em pensar em possíveis soluções, e tentar perceber se estas obedecem às informações do problema e ao objetivo do mesmo, sendo que esta estratégia é também conhecida como tentativa e erro. *Encontrar padrões* é uma estratégia que se baseia em examinar pequenas secções do problema, de maneira a, como o nome indica, encontrar algum tipo de padrão. Encontrado este padrão, o resolvidor poderá passar para um processo de generalização. No que toca a *simplificar*, inclui a decomposição do problema em problemas mais simples ou ainda trabalhar do fim para o início. E por fim, *eliminar*, é a estratégia mais utilizada no quotidiano e consiste em organizar uma lista de possibilidades e, tendo por base as informações dadas pelo problema, ir eliminando hipóteses. Lopes (2002) acrescenta que esta última estratégia é utilizada no próprio processo de seleção da estratégia para resolver um problema, e ainda quando se recorre ao raciocínio lógico.

Nesta investigação, procurou-se identificar as estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos. Assim, foram consideradas algumas estratégias de resolução de problemas: tentativa e erro – correspondente a *tentar, conferir e rever* de Lopes (2002) –, procura de um padrão, generalização, dedução, resolução do fim para o início, construção de esquemas ou figuras, construção de tabelas e construção de um modelo. Além destas, um resolvidor de problemas pode ainda recorrer a três estratégias: resolução por partes, aplicação de fórmulas e exaustão. A *resolução por partes* consiste em resolver o problema por etapas bem definidas e independentes umas das outras. Quanto à *aplicação de fórmulas* é exatamente uma estratégia em que se recorrem a fórmulas previamente conhecidas, como seria o caso de utilizar a fórmula resolvente quando um problema envolve a resolução de uma equação do 2.º grau, por exemplo. Já a *exaustão* baseia-se num processo em que se analisa exaustivamente todas as possibilidades, fazendo uma lista das mesmas e usando argumentos para excluir algumas delas, chegando a uma só, considerada como sendo a resposta correta.

Dificuldades na resolução de problemas

Superar dificuldades é um passo importante quando queremos desenvolver a capacidade de resolução de problemas. Para as superar, temos primeiro de reconhecer essas mesmas dificuldades.

Phonapichat, Wongwanich e Sujiva (2013) referem sete tipos de dificuldades encontradas na resolução de problemas. Destas sete, apenas três delas são relativas ao papel do aluno, e é a estas que se dará destaque, e as restantes estão relacionadas com o papel do professor. A primeira passa pela dificuldade de *compreensão do problema*, total ou parcialmente, devido à falta de imaginação. A segunda é relativa à *leitura, seleção da informação e organização da mesma*, de modo a conseguir traduzir as palavras para símbolos matemáticos. A terceira refere a *falta de interesse dos alunos*, que pode ser devido à extensão do problema ou à complexidade do mesmo, o que é um fator de desmotivação. Quanto às restantes dificuldades referidas pelos autores, passam pelos professores não utilizarem problemas relacionados com a realidade presente no quotidiano dos alunos e trabalharem demasiado a ideia de memorização, de seguir exemplos e repeti-los e ainda descartar todo o processo de pensar no problema.

Ainda que não refira de modo explícito as dificuldades na resolução de problemas, D'Ambrósio (1989) faz o levantamento de dois aspetos que se deve ter em atenção na atitude dos alunos: a adequação das soluções a situações reais e a persistência. Para a autora, o facto de os alunos lidarem constantemente com a característica formal da Matemática, cria neles uma perda de autoconfiança na sua própria intuição matemática.

Com isto, os alunos perdem o seu “bom senso” matemático, afastando-os da relação existente entre a Matemática e as situações do dia a dia. Por este motivo, uma dificuldade presente na resolução de problemas poderá ser a *adequação da solução a uma situação real*. Outra dificuldade será a ausência de persistência, que muitas vezes é motivada pelo hábito excessivo de resolver apenas exercícios. D’Ambrósio (1989) afirma que é muito comum um aluno desistir quando está perante a resolução de um problema matemático, com a justificação de “não ter aprendido como resolver aquele tipo de questão” (D’Ambrósio, 1989, p. 15). Esta fundamentação é motivada pelo facto de o aluno não conseguir reconhecer de imediato qual é o processo de resolução que deve utilizar.

Uma dificuldade também pode ser vista como sendo um obstáculo. É nesta ideia que Sternberg (1998) se concentra, referindo três grandes obstáculos na resolução de problemas, que podem aparecer de forma isolada ou em simultâneo: configuração e fixação mental, fixação funcional e transferência negativa. O primeiro, *configuração e fixação mental*, aparece quando, na resolução de um problema, estamos focados em aplicar uma estratégia específica que funcionou numa outra situação, mas que não funciona no problema que estamos a enfrentar. A *fixação funcional* traduz o obstáculo de não saber aplicar os conhecimentos aprendidos noutros contextos, a contextos novos. Por último, a *transferência negativa* está relacionada com os conhecimentos anteriores que, se não estão bem cimentados, fazem com que as novas aprendizagens sejam feitas de modo mais complicado, causando dificuldades em adquirir e armazenar os novos conhecimentos.

Para esta investigação, foram consideradas dificuldades em quatro níveis distintos: persistência, interpretação, seleção de informação e estratégia. A nível de *persistência* estão incluídas dificuldades em iniciar a resolução do problema e também em concluí-lo, já que há alunos que conseguem começar um processo de resolução, mas não sabem como o concluir, desistindo. Já as dificuldades a nível de *interpretação* foram vistas sob dois pontos de vista: a interpretação do problema e a interpretação do resultado. A interpretação do problema incide no facto de o resolvidor compreender o que é pedido e os dados do problema, enquanto a interpretação do resultado estará relacionada com a atribuição de significado às soluções que se vão obtendo, tanto no contexto do problema como no contexto real. O terceiro nível enunciado, *a seleção de informação*, será relativo à dificuldade que poderá existir diante da recolha de dados do problema. Finalmente, a dificuldade a nível de *estratégia*, está presente tanto na escolha da estratégia como na sua execução.

Comunicação escrita

Quando se resolve um problema, principalmente em grupo, a comunicação é um fator muito importante. Os elementos do grupo devem saber comunicar entre si, para poderem apresentar e defender as suas ideias, e também aceitar e argumentar sobre as ideias dos restantes colegas. Além disso, é importante conseguir escrever essas ideias de modo claro, para que haja um registo escrito da resolução feita, tanto para que o grupo possa recorrer a ela sempre que ache necessário, como também para a poderem dar a ler a outras pessoas, que não assistiram a toda a discussão e ao processo de resolução do grupo.

Esta importância da comunicação na resolução de problemas está presente no Programa de Matemática A (MEC, 2013). Neste documento, está referido que os alunos devem ser estimulados a expor as suas ideias, comentar o que é exposto pelos colegas e colocar

as suas dúvidas. Mais especificamente quanto à comunicação escrita, ainda no mesmo programa, há indicação para a importância de incentivar os alunos a redigir as suas respostas, apresentando o seu raciocínio da melhor forma que conseguirem, e deixando claras as conclusões que retiraram. Esta apresentação de resultados por escrito deve ser feita “em português correto e evitando uma utilização inapropriada de símbolos matemáticos como abreviaturas estenográficas” (MEC, 2013, p. 7).

Para caracterizar a comunicação escrita dos alunos, é necessário estabelecer critérios. No seu estudo, Santos e Semana (2014) elaboraram uma lista com três pontos a ter em consideração quando se analisa a comunicação escrita: a interpretação do objetivo da tarefa, as justificações apresentadas e as representações usadas. No primeiro ponto, a *interpretação do objetivo da tarefa*, as autoras consideram duas partes: a declaração da meta, onde se inclui a identificação do objetivo da tarefa e a completude da informação recolhida, e a linguagem utilizada, na qual se analisa o formato, ou seja, se a declaração da meta é transcrita ou se é reescrita utilizando as próprias palavras, e a precisão da linguagem. No segundo ponto, as *justificações apresentadas*, considera-se o tipo de justificação e a correção e completude da mesma. Os tipos de justificação apresentados pelas autoras são: vaga (justificação pouco clara ou pouco informativa), regra (justificação com uso exclusivo de regras, algoritmos ou definições), procedimental (justificação do que é feito em determinada etapa, mas sem explicar a validade da mesma) e relacional (justificação da validade de um passo, incluindo ou não a justificação do que é feito em determinada etapa, dando espaço a que haja um entendimento relacional). No último ponto, as *representações usadas*, são considerados os tipos de representação e a precisão e completude da mesma. Os tipos de representação avançados por Santos e Semana (2014) são: linguagem verbal (a linguagem natural, feita pelas palavras dos alunos e com a terminologia matemática), representação icónica (utilização de esquemas ou desenhos) e representação simbólica (recurso a símbolos numéricos e/ou algébricos).

Nesta investigação, para caracterizar a comunicação escrita dos alunos na resolução dos problemas, foram tidos em conta os seguintes pontos, tendo por base o modelo de Santos e Semana (2014), e as alterações realizadas por Martinho e Rocha (2017):

1. Compreensão do problema – o aluno:
 - mostra que entendeu o que é pedido?
 - recolheu bem e de forma completa a informação?
 - transcreveu o objetivo e as informações do problema, ou reescreveu com as suas próprias palavras?
2. Fundamentação da resposta apresentada:
 - consoante o nível de fundamentação:
 - correção
 - clareza
 - completude
 - consoante o tipo de fundamentação:
 - vaga, pouco clara ou pouco informativa
 - uso exclusivo de regras, algoritmos ou definições
 - recurso à experimentação
 - procedimental (justificação do que é feito numa das etapas, sem explicar a validade da mesma)
 - relacional (justificação da validade de uma etapa)

3. Representações utilizadas:

- linguagem verbal (linguagem natural com utilização de palavras próprias do dia a dia ou com terminologia matemática)
- representação icónica (utilização de esquemas ou desenhos)
- representação simbólica (utilização de símbolos algébricos)

Seguindo este modelo, poder-se-á fazer uma caracterização, de forma estruturada, da comunicação escrita dos alunos na resolução do problema proposto.

Contexto e Metodologia

Este estudo foi desenvolvido numa turma de 11.º ano do curso de Ciências e Tecnologias, de uma escola pública do distrito de Braga. A turma era constituída por 22 alunos, 12 raparigas e 10 rapazes, e não estava habituada a resolver problemas antes da intervenção realizada pelo primeiro autor no contexto desta experiência.

Como a finalidade desta experiência passava por perceber como é que os alunos da turma resolviam problemas, optou-se por realizar um estudo experimental com uma abordagem qualitativa e interpretativa. Segundo Bogdan e Biklen (1994), na investigação qualitativa, os dados são recolhidos através de um forte contacto entre o investigador e os indivíduos que pertencem ao estudo, já que a investigação é feita com base num diálogo constante entre estes e o investigador. Além disso, ainda de acordo com Bogdan e Biklen (1994), neste tipo de investigação, os resultados escritos incluem, maioritariamente, a transcrição de diálogos ou registos oficiais – que, no caso deste estudo, são as resoluções dos alunos da turma.

Os resultados que serão apresentados nesta comunicação fazem parte de um estudo com a duração de um mês, no qual os alunos foram confrontados com problemas distintos. Portanto, para a realização de todo o estudo, foram utilizados diferentes métodos de recolha de dados. Inicialmente, foi aplicado uma ficha de diagnóstico, composto por três problemas sem aplicação direta de nenhum conteúdo específico. Durante as aulas seguintes, foram propostos diversos problemas aos alunos, alguns com o objetivo de serem realizados individualmente e outros em grupo, e as resoluções foram recolhidas para análise. Além disto, quando os alunos trabalhavam em grupo, foi também efetuada a gravação áudio de cada grupo durante a resolução dos problemas propostos, de modo a complementar a resolução escrita e ainda a observação da postura de cada aluno perante aquela tarefa. Por fim, foi aplicada uma ficha final que continha quatro problemas, com a qual se pretendia fazer uma comparação entre a resolução que o aluno fez na ficha de diagnóstico e esta ficha final. Ademais, foi ainda aplicado um questionário, de modo a conhecer as perspetivas dos alunos relativamente à resolução de problemas, nomeadamente no que toca às dificuldades que sentiram e às estratégias que mais utilizaram.

Nesta comunicação, o foco irá estar num dos problemas da ficha de diagnóstico, mais especificamente o primeiro problema da mesma. Esta escolha foi feita pelo facto de ter sido o primeiro problema com o qual a turma se confrontou, sendo que foi, também, na realização desta ficha que se sentiu um maior entrave por parte dos alunos na resolução de problemas. Como a turma não estava habituada a resolver problemas, com esta primeira abordagem foi possível identificar as dificuldades de base que a turma teria de ultrapassar durante a restante intervenção.

Apresentação dos resultados

No início deste estudo, a turma realizou uma ficha de diagnóstico com três problemas distintos. Nesta secção, irei apresentar os resultados obtidos na análise feita às respostas ao primeiro problema, relativamente às estratégias utilizadas pelos alunos, as dificuldades que estes demonstraram e ainda o modo como apresentaram as suas respostas. O problema tinha o seguinte enunciado:

Um sapo está no fundo de um poço com 10 metros de profundidade. Durante o dia, o sapo sobe 4 metros através da parede do poço, mas, durante a noite, e enquanto dorme, escorrega e desce 2 metros. Desta forma, quantos dias levará o sapo a atingir o cimo do poço?¹

Todos os alunos da turma resolveram este problema, embora apenas nove tenham dado a resposta correta. Os restantes treze chegaram a conclusões erradas devido a dificuldades e erros que cometeram ao longo da sua resolução, algo que veremos mais à frente. Antes disso, vejamos as estratégias que foram utilizadas na resolução deste problema.

Estratégias desenvolvidas pelos alunos na resolução do problema

Na resolução deste problema, as estratégias mais utilizadas foram a construção de modelos que pudessem responder ao problema e o recurso a esquemas. No que toca aos *modelos construídos*, estratégia utilizada por quase 50% da turma, a sua maioria era semelhante ao modelo construído pelo aluno A17, apresentado na figura 1.

A17

m = dia $(10 - 4m) + 2m$

dia 1 $\rightarrow (10 - 4 \times 1) + 2 \times 1 = 8 \rightarrow$ falta 8 m para chegar ao topo

dia 2 $\rightarrow (10 - 4 \times 2) + 2 \times 2 = 6 \rightarrow$ " 6 m " " " "

dia 3 $\rightarrow (10 - 4 \times 3) + 2 \times 3 = 4 \rightarrow$ " 4 m " " " "

dia 4 $\rightarrow (10 - 4 \times 4) + 2 \times 4 = 2 \rightarrow$ " 2 m " " " "

dia 5 $\rightarrow (10 - 4 \times 5) + 2 \times 5 = 0 \rightarrow$ " 0 m " " " "

R: O sapo chegou ao topo ao fim de 5 dias.

Figura 1 – Resolução do problema pelo aluno A17

Já no que toca aos *esquemas*, houve uma variedade na sua utilização. Quase todos usaram esquemas em forma de desenho, como é o caso do aluno A8 (Figura 2).

¹ Retirado de Lester, F. (1993). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In D. Fernandes, A. Borralho & G. Amaro (Eds), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 13-34). Lisboa: IEE.

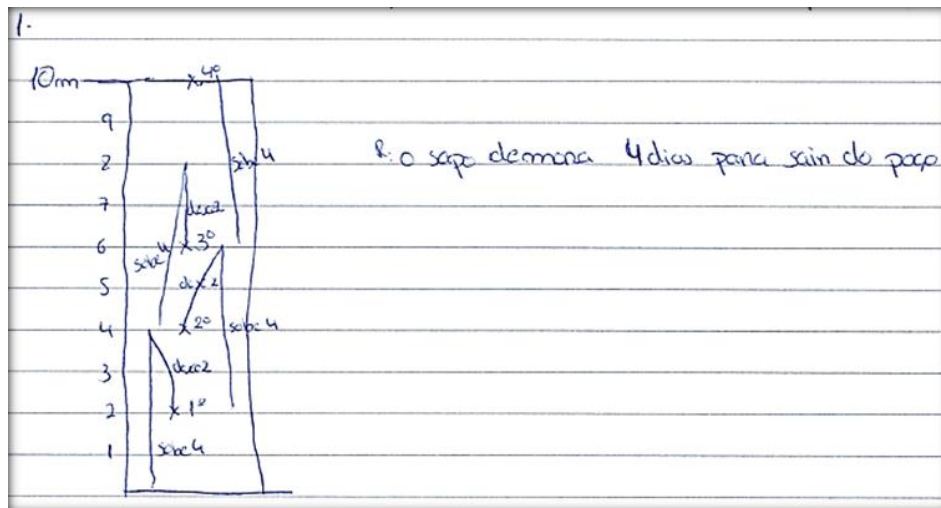


Figura 2 – Resolução do problema pelo aluno A8

Apesar de a maioria dos esquemas utilizados serem semelhantes aos da figura 2, um membro da turma recorreu a um esquema diferente, um diagrama (Figura 3).

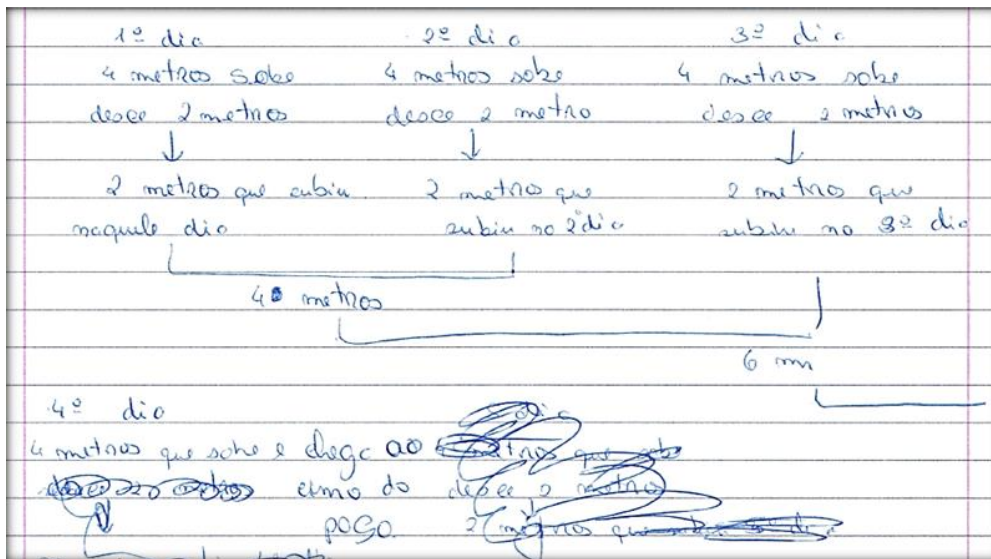


Figura 3 – Resolução do problema pelo aluno A15

Uma outra estratégia foi seguida por apenas dois alunos da turma, e foi a *construção de uma tabela* para organizar a informação. A resolução de um desses alunos pode ser vista na figura 4.

	Dia	Noite
1º Dia	$0+4=4$	$4-2=2$
2º Dia	$2+4=6$	$6-2=4$
3º Dia	$4+4=8$	$8-2=6$
4º Dia	$6+4=10$	

R: O sapo levava 4 dias a atingir o topo como do peso.

Figura 4 – Resolução do problema pelo aluno A7

Além das três estratégias já mencionadas, ou seja, a construção de um modelo, o recurso a um esquema e a elaboração de uma tabela, houve um aluno que utilizou uma fórmula que, na sua perspetiva, poderia ajudar a resolver o problema. Nesse caso, a fórmula utilizada foi a *regra de três simples*, como é possível ver na figura 5.

1		1 dia = 24 horas
		Nem dia ele apenas sobe 2 metros.
	1 dia	2m
	2	10m
10m		
4m		
2m		
		$x = \frac{10 \times 2}{2} = 5 \text{ dias}$
		R: Para atingir o cimo do poço demorará 5 dias.

Figura 5 – Resolução do problema pelo aluno A1

Finalmente, em três das resoluções foi perceptível que o problema foi *resolvido por partes*. Os três alunos começaram por utilizar um modelo que lhes permitisse chegar a uma resposta mas, após obterem um valor com esse modelo, relacionaram o número obtido com a situação do problema e reformularam uma resposta com um valor distinto. Um exemplo da resolução por partes pode ser visto na figura 6.

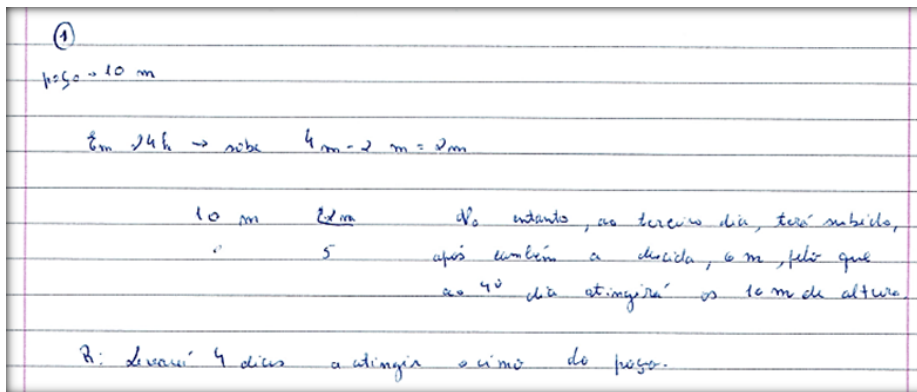


Figura 6 – Resolução do problema pelo aluno A14

Na figura 6, percebemos que o aluno começou por pensar num modelo. Esse modelo consistia em dividir os 10 metros de profundidade do poço pelos 2 metros que resultam da diferença entre aquilo que o sapo sobe durante o dia e aquilo que desce durante a noite. Assim, esta foi a primeira parte da resolução do problema. Já na segunda parte, vemos que o aluno voltou a pensar no problema, concluindo uma resposta inferior àquela que tinha obtido inicialmente, tendo mantido a resposta obtida na primeira parte como uma referência.

Dificuldades dos alunos na resolução do problema

Na análise das resoluções dos alunos, foram detetadas dificuldades na interpretação dos resultados obtidos, na escolha da estratégia e ainda no desenvolvimento da mesma. De seguida, apresentam-se resoluções que exemplificam essas dificuldades.

No que à interpretação de resultados diz respeito, verificou-se o caso de um aluno que, apesar de apresentar uma estratégia adequada, conclui de forma errada. Na figura 7, percebemos que o aluno, na sua resposta, confundiu as representações: assumiu que u_n seria o número de dias, em vez de o fazer para o valor de n .

①
$$\begin{cases} u_1 = 4 - 2 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 4 - 2 \end{cases}$$

$$u_1 = 4 - 2 = 2$$

$$u_2 = u_1 + 4 - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$$

$$u_3 = u_2 + 4 - 2 = 4 + 4 - 2 = 6$$

$$u_4 = u_3 + 4 - 2 = 6 + 4 - 2 = 8$$

$$u_5 = u_4 + 4 - 2 = 8 + 4 - 2 = 10$$

R: O sapo levou 10 dias a atingir o topo do poço

Figura 7 – Resolução do problema pelo aluno A21

Além disso, ainda na figura 7, é possível ver uma resolução em que o desenvolvimento da estratégia escolhida não foi bem conseguido. Isto porque o aluno, à semelhança de alguns colegas que seguiram uma estratégia semelhante, não se apercebeu que, no cálculo do termo de ordem 4, passou pela resposta correta, já que “6+4” já resultaria no número 10, que era o valor pretendido. Este tipo de dificuldade verificou-se em estratégias baseadas em cálculos, mas também em resoluções feitas com o recurso a esquemas, como é o caso do exemplo da figura 8.

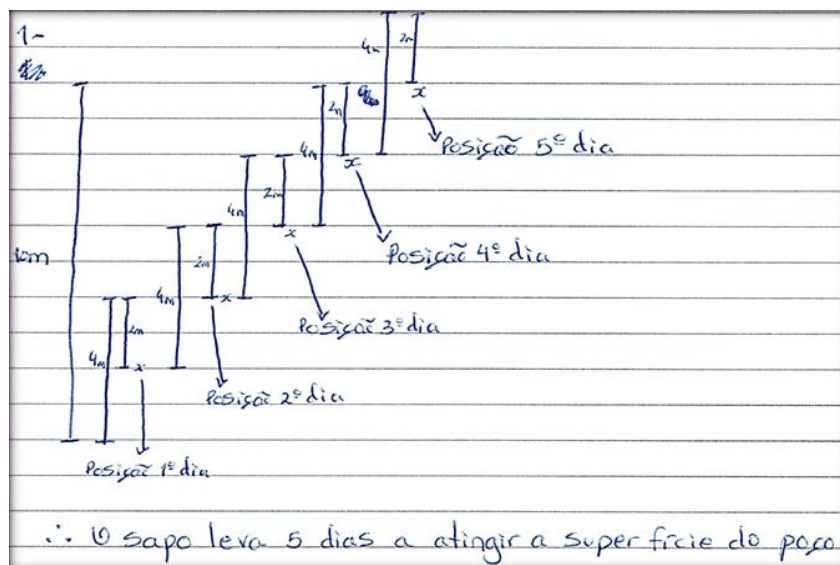


Figura 8 – Resolução do problema pelo aluno A5

Na figura 8, é possível reparar que, entre aquilo que o aluno assume ser a posição do 3.º dia e a posição do 4.º dia, o sapo já chegou ao cimo do poço, o que resolveria de imediato o problema. Mas, tal como aconteceu nas estratégias que envolveram cálculos, o aluno só termina o raciocínio quando o sapo completa o ciclo “dia-noite”, ou seja, quando o sapo sobe e desce de seguida. Assim, a dificuldade que os alunos demonstraram no desenvolvimento da estratégia, deveu-se ao facto de estarem demasiado “presos” à ideia de que a posição do sapo, no dia n , era obtida apenas após o sapo descer durante a noite, não considerando a respetiva posição após a subida durante o dia.

O último exemplo de dificuldades encontradas pode ser encontrado na resolução do aluno A1, já apresentada na figura 5. Nessa resposta, podemos ver que a estratégia escolhida poderá não ter sido a melhor. Isto porque, ao contrário do que aconteceu com as estratégias observadas nas figuras 7 e 8, aqui não foi possível passar pelo resultado correto ao longo do processo.

Comunicação escrita dos alunos na apresentação da resolução do problema

A análise da comunicação escrita começa pela compreensão do problema, por parte dos alunos. Neste aspeto, todos os alunos demonstraram ter entendido o que era pedido e também recolheram devidamente e de modo completo a informação. Além disso, todos

reescreveram os dados recolhidos com a sua própria linguagem, não se limitando a transcrever do problema. Um exemplo disso está presente na figura 9:

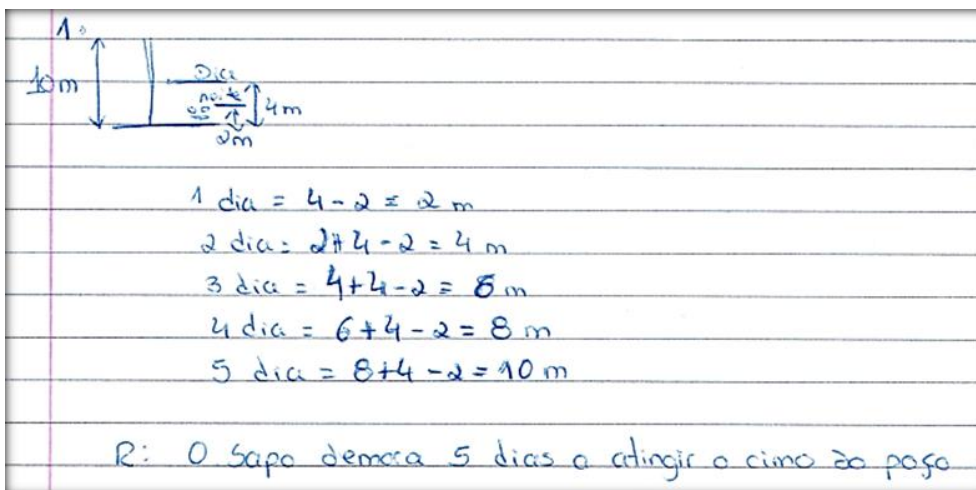


Figura 9 – Resolução do problema pelo aluno A22

Nesta figura, vemos, no canto superior esquerdo, que o aluno recolheu a informação do problema e a escreveu sob a forma de um esquema, não fazendo apenas uma transcrição da informação.

Relativamente à *fundamentação da resposta* apresentada, já foi referido que apenas nove alunos apresentaram uma resposta correta: o sapo levará quatro dias a atingir o cimo do poço. Um exemplo desta resposta pode ser visto na figura 6. Entre as restantes respostas, um aluno refere que o sapo levaria dez dias a atingir o cimo do poço (Figura 7), nove respostas indicavam que seria cinco dias, à semelhança do que vemos na figura 9, e ainda duas respostas em que o sapo demoraria quatro dias e doze horas. Por último, um dos alunos não indicou qualquer resposta, tendo sido o único a apresentar uma resolução sem resposta e, portanto, incompleta, como se percebe pela figura 10.

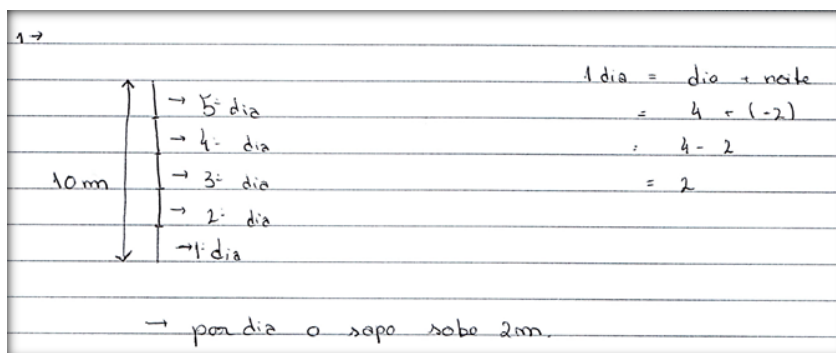


Figura 10 – Resolução do problema pelo aluno A9

Ainda dentro do nível de fundamentação da resposta, resta apresentar os resultados a nível de clareza. Apesar de alguns alunos conseguirem explicar de forma clara aquilo

que pensaram para resolver o problema, isso não é um processo fácil para todos, principalmente quando não recorrem à representação simbólica ou a esquemas. Por exemplo, recorrendo aos exemplos já utilizados, na figura 8 o aluno deixou claro o seu raciocínio através de uma sucessão definida por recorrência. O mesmo acontece na figura 9, em que o esquema utilizado deixa claro o modo como o aluno pensou. No entanto, tal não acontece na figura 11.

	n.º 4 dias			
	7 ^o	2 ^o	3 ^o	4 ^o
	2	2	2	4
d	4	4	4	4
N	-2	-2	-2	

Figura 11 – Resolução do problema pelo aluno A18

Nesta figura, o aluno mostra ter dificuldades em explicar e apresentar de forma compreensível o seu raciocínio, mesmo tendo elaborado uma tabela. Já no que toca ao tipo de fundamentação da resposta, podemos então concluir que esta resolução é um pouco vaga a esse nível, pois o aluno não deixa muita informação sobre o seu raciocínio. O mesmo pode ser visto na figura 10, sendo que, além destes dois alunos, houve mais uma resposta cuja fundamentação foi pouco clara.

O tipo de fundamentação da resposta que foi mais vezes encontrado na resolução deste problema foi o recurso à experimentação. Isto pode ser visto, por exemplo, nas figuras 8 e 9, sendo que estes alunos foram fazendo cálculos ou desenhos que lhes permitiram chegar a uma resposta. Estes processos foram desenvolvidos através de uma experimentação que consistia em fazer com que o sapo subisse quatro unidades, e descesse duas, até chegar ao resultado esperado. Apesar de o recurso à experimentação ter sido o tipo de fundamentação mais encontrado, utilizado por doze alunos, três resoluções mostravam um uso exclusivo de regras ou algoritmos. Este grupo de alunos usou exclusivamente regras conhecidas previamente, mas não justificaram as etapas seguidas nem a validade das mesmas. Um exemplo disso pode ser visto na figura 12.

$$\begin{aligned}
 x &\rightarrow \text{m}^\circ \text{ de dias} \\
 y &\rightarrow \text{altura do } \text{pao} \\
 y &= 4x - 2x \sim \\
 \therefore y &= 2x \\
 10 &= 2x \sim \\
 \therefore x &= 5 \\
 R: &\text{ São precisos 5 dias para chegar ao cimo do poço.}
 \end{aligned}$$

Figura 12 – Resolução do problema pelo aluno A6

Já no que diz respeito à fundamentação procedimental, não foi detetada em nenhuma das vinte e duas resoluções, mas a fundamentação relacional foi apresentada por quatro alunos da turma. Um exemplo deste tipo de fundamentação é encontrado na resolução do aluno A16 (Figura 13).

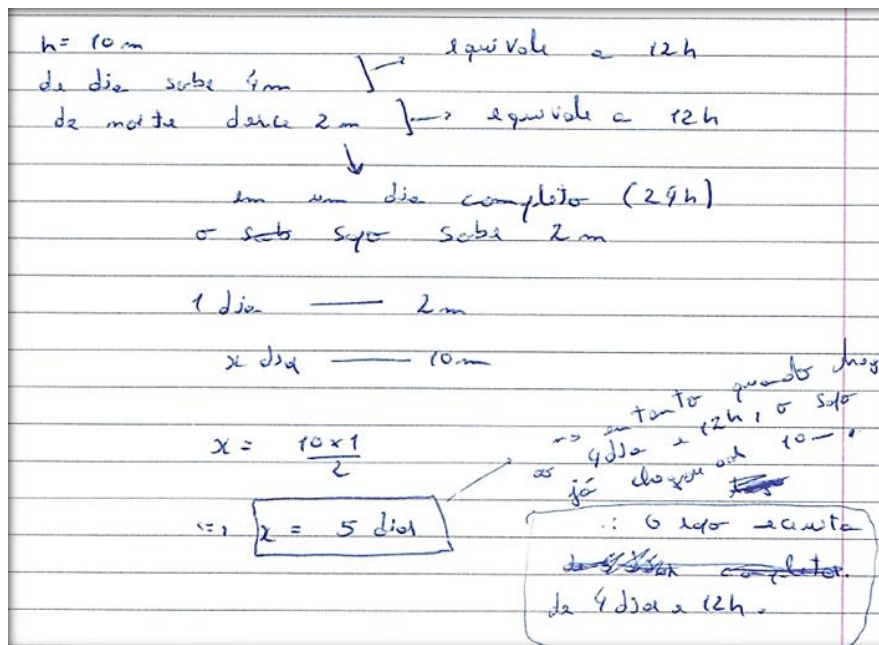


Figura 13 – Resolução do problema pelo aluno A16

Na resolução da figura 13, o aluno seguiu uma estratégia que fez com que chegasse a uma primeira resposta: “5 dias”. Mas acabou por responder ao problema com “O sapo necessita de 4 dias e 12h.”. No entanto, entre essas duas respostas, estabeleceu uma justificação para a validade dessa passagem de uma resposta para outra.

Ao longo desta apresentação de resultados, foram sendo referidas as representações utilizadas pelos alunos. No quadro 1, encontram-se as percentagens de utilização de cada uma das representações. É importante referir que, nas resoluções a este problema, apenas se está a considerar que o aluno utilizou linguagem verbal, se esta foi utilizada ao longo do processo de resolução, e não exclusivamente na sua conclusão.

Quadro 1 – Representações utilizadas nas resoluções do problema

Tipo de representação	Frequência Absoluta	Frequência Relativa (em %)
Linguagem verbal	5	23%
Representação icónica	11	50%
Representação simbólica	14	64%

Pelo que já foi visto anteriormente, apenas um aluno não apresentou uma resposta completa para o problema. Mas, apesar de quase todos os alunos terem dado uma resposta, no final do processo de resolução do problema, esta foi apenas uma frase onde

concluía o resultado a que chegaram. Ao longo do processo, a turma deu preferência ao uso de desenhos, esquemas, tabelas e algoritmos matemáticos, deixando de parte a justificação através de linguagem verbal.

Considerações Finais

Na introdução desta comunicação, foram definidos os objetivos que se pretendia responder: identificar as estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos, reconhecer as dificuldades reveladas pelos alunos durante a resolução do problema e caracterizar a comunicação escrita dos alunos na apresentação das resoluções do problema.

No que toca às estratégias, as que foram mais utilizadas foram a *construção de esquemas/figuras* e a *construção de um modelo*, ambas com 41% dos alunos a recorrer a elas. Convém acrescentar que apenas um dos alunos utilizou as estratégias em simultâneo. Além destas estratégias, quatro dos alunos da turma recorreram à *aplicação de fórmulas*, sendo que dois deles conciliaram esta estratégia com uma estratégia de *resolução por partes*. Esta última foi utilizada por um total de três estudantes. Finalmente, a estratégia menos utilizada foi a *construção de tabelas*, tendo dois alunos a recorrer a ela de modo exclusivo. A nível de dificuldades, apenas um dos alunos revelou ter dificuldades a nível de interpretação, nomeadamente em interpretar o significado do resultado que obteve. As restantes dificuldades registadas foram a nível de estratégia, já que oito alunos não conseguiram *escolher uma estratégia* que lhes permitisse chegar à resposta correta, e cinco alunos não *executaram a estratégia* escolhida da melhor maneira. Ademais, um dos obstáculos que se sentiu na escolha da estratégia, em algumas resoluções, recaiu sobre a configuração e fixação mental, referida por Sternberg (1998). Isto foi visível nos casos em que os alunos aplicaram uma *regra de três simples*, ou até quando estavam demasiado presos ao ciclo completo de “dia – noite”, sendo que estas ideias não lhes permitiram chegar à resposta correta. Tanto as estratégias utilizadas como as dificuldades sentidas foram objeto de discussão, tendo sido dado um feedback individual a cada aluno relativamente à sua resolução e esclarecendo os aspetos positivos e aquilo que poderia ser melhorado, sendo que este feedback teve um efeito direto nos alunos.

Por fim, quanto à comunicação escrita, foi notório que os alunos não tiveram dificuldades em compreender o problema. Quanto à fundamentação das respostas apresentadas, mais especificamente quanto ao nível, já foi dito anteriormente que a *correção* esteve presente em nove respostas, a *completude* apenas não se verificou na resposta de um aluno e, quanto à *clareza*, foi perceptível que cinco dos alunos não conseguiam explicar de forma clara aquilo que pensaram aquando da resolução do problema. Relativamente ao tipo de fundamentação, três alunos apresentaram uma resposta considerada *vaga, pouco clara ou pouco informativa* e a mesma quantidade de respostas tinha um *uso exclusivo de regras*. Além disso, o tipo de fundamentação *relacional* foi visto em quatro respostas e o *recurso à experimentação* foi encontrado em mais de metade das respostas, num total de doze. Quanto às representações, e tal como podia ser visto no quadro 1, as mais utilizadas foram a representação simbólica e a representação icónica, informação compatível com o facto de as estratégias mais utilizadas serem a construção de esquemas/figuras e a construção de um modelo, sendo que mais de 50% da turma utilizou cada um destes tipos de representação, e apenas 23% dos alunos recorreu à linguagem verbal. Resta concluir que, ao contrário do que aconteceu no estudo de Martinho e Rocha (2017), nas resoluções deste problema não se

encontrou nenhuma relação entre o tipo de fundamentação da resposta e a correção da mesma, já que houve respostas vagas que permitiram aos alunos alcançar a solução correta, e até fundamentações relacionais que levaram os alunos a soluções erradas. A fundamentação da resposta pode revelar as dificuldades que alguns alunos têm em expressar o seu pensamento matemático de forma clara, mas não se pode concluir que está diretamente relacionado com a capacidade de resolver um problema.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado pelo CIED – Centro de Investigação em Educação, projetos UID/CED/1661/2013 e UID/CED/1661/2016, Instituto de Educação, Universidade do Minho, através de fundos nacionais da FCT/MCTES-PT.

Referências

- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- D'Ambrósio, B. S. (1989). Como ensinar matemática hoje? *SBEM*, 4(2), 15-19.
- Lopes, C. A. (2002). *Estratégias e métodos de resolução de problemas em matemática*. Lisboa: Edições ASA.
- Martinho, M. H., & Rocha, H. (2017). A escrita matemática na resolução de um problema de geometria por alunos de Licenciatura em Educação Básica. In H. Oliveira, L. Santos, A. Henriques, A. P. Canavarro & J. P. da Ponte, *O ensino e a aprendizagem da Geometria*. Lisboa: EIEM, SPCE.
- MEC (2013). *Programa de Matemática A*. Lisboa: MEC.
- MEC (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Lisboa: MEC.
- Musser, G. L., & Shaughnessy, J. M. (1980). Problem-solving Strategies in School Mathematics. In S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics* (pp. 136-145). Reston, Virgínia: NCTM.
- OECD (2014). *PISA 2012 Results: Creative Problem Solving – Students' Skills in Tackling Real-Life Problems (Volume V)*. Disponível em: <https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-volume-V.pdf>.
- Phonapichat, P., Wongwanich, S., & Sujiva, S. (2013). An analysis of elementary school students' difficulties in mathematical problem solving. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 116 (2014), 3169-3174.
- Posamentier, A. S., & Krulik, S. (1998). *Problem-solving strategies for eficiente and elegant solutions: A resource for the mathematics teacher*. Thousand Oaks, Califórnia: Corwin Press, Inc.
- Santos, L., & Semana, S. (2014). Developing mathematics written communication through expository writing supported by assessment strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 8(1), 65-87.
- Sternberg, R. J. (1998). *In search of the human mind*. Orlando, Flórida: Harcourt Brace & Company.