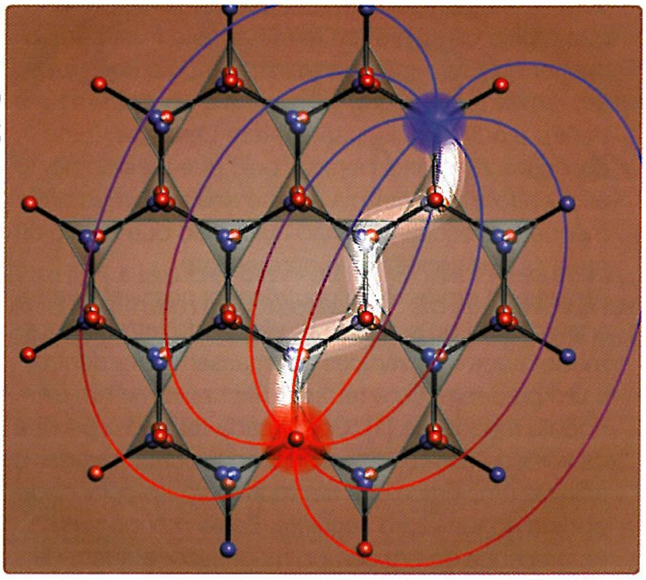
5
artigo geral
VOL. 33 - N.1



Das equações de Maxwell aos monopolos magnéticos

Filipe Moura

Centro de Matemática da Universidade do Minho

Na segunda metade do século XIX, o grande físico teórico escocês James Clerk Maxwell foi um precursor das teorias de unificação, tendo reunido a electricidade e o magnetismo, que se baseavam em leis empíricas, num conjunto de quatro equações diferenciais locais, obedecidas pelos campos eléctricos e magnéticos em cada ponto do espaço e instante de tempo: as equações de Maxwell.

Estas equações são expressas em termos dos operadores diferenciais divergência ($\vec{\nabla}\cdot$), que quando aplicado a um vector traduz o seu fluxo elementar num ponto, e rotacional ($\vec{\nabla}\times$), que traduz a circulação desse vector ao longo desse ponto. Dividem-se em dois grupos: as equações homogéneas (que admitem campos nulos como solução), e as não homogéneas (que incluem termos "fonte", a densidade de carga eléctrica ρ e a densidade de corrente eléctrica $\vec{J}$). No segundo grupo encontramos

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho \qquad (1)$$

e

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad (2)$$

A equação (1) exprime a lei de Gauss do campo electrostático – o fluxo eléctrico total através de qualquer superfície fechada é proporcional à carga eléctrica total contida no interior dessa superfície – que, para o caso de uma carga pontual, se reduz à conhecida lei de Coulomb. A equação (2) exprime a lei de Ampère: a circulação do campo magnético em torno de um fio condutor é igual à corrente que percorre esse fio. O último termo desta equação, a corrente de deslocamento, foi introduzido pelo próprio Maxwell para haver consistência com a equação da continuidade,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\vec{\nabla}\cdot\vec{J}\ , \qquad (3)$$

que traduz a conservação da carga eléctrica.
As equações de Maxwell homogéneas são

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad (4)$$

e

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (5)$$

A equação (4) exprime a lei de Gauss magnética: o fluxo magnético total através de qualquer superfície fechada é nulo. Como tal fluxo seria, por analogia com o caso eléctrico, proporcional à carga magnética total contida no interior dessa superfície, daqui se conclui que as "cargas magnéticas" não existem. A equação (5), por sua vez, exprime a lei de indução de Faraday: um fluxo magnético variável no tempo induz uma força electromotriz.
A diferença entre os campos eléctrico e magnético reside nas chamadas relações constitutivas entre os vectores $\vec{D}$ e $\vec{E}$, por um lado, e os vectores $\vec{B}$ e $\vec{H}$, por outro. Enquanto a relação entre o deslocamento eléctrico $\vec{D}$ e o campo eléctrico $\vec{E}$ é linear e homogénea, dada por

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E} \qquad (6),$$

a relação entre a indução magnética $\vec{B}$ e o campo magnético $\vec{H}$ é não homogénea (isto é, $\vec{B}$ pode ser não nulo mesmo que $\vec{H}$ se anule), e dada por

$$\vec{B}=\mu\vec{H}+\vec{M}_p \qquad (7).$$

As constantes ε e μ, características do meio, são respectivamente a permissividade eléctrica e a permeabilidade magnética, sendo a velocidade da luz dada por $\left(\sqrt{\varepsilon\mu}\right)^{-1}$. O vector $\vec{M}_p$ é a chamada magnetização permanente; anula-se no vácuo e na maior parte dos materiais, mas é não nulo para materiais ferromagnéticos como os ímanes.

É de notar que as equações de Maxwell homogéneas são justamente aquelas onde surge o vector não homogéneo $\vec{B}$. Estas equações podem ser reescritas de uma forma não homogénea se redefinirmos $\vec{B}$. Com efeito, substituindo (7) em (4) e (5), obtém-se respectivamente

$$\vec{\nabla}\cdot(\mu\vec{H})=-\vec{\nabla}\cdot\vec{M}_p \qquad (8)$$

e

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial(\mu\vec{H})}{\partial t}-\frac{\partial\vec{M}_p}{\partial t}\,. \qquad (9)$$

Definindo uma a indução magnética homogénea $\vec{B}_h=\mu\vec{H}$, de modo a ter-se (para materiais ferromagnéticos) $\vec{B}=\vec{B}_h+\vec{M}_p$,e ainda as densidades de "carga magnética" e "corrente magnética", dadas respectivamente por $\rho_m=-\vec{\nabla}\cdot\vec{M}_p$ e $\vec{J}_m=-\partial(\mu\vec{M}_p)/\partial t$,as equações de Maxwell homogéneas (4) e (5) (mais precisamente, (8) e (9)) podem ser escritas numa forma não homogénea, em tudo análoga a (1) e (2):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_h=\rho_m, \qquad (10)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\vec{J}_m-\frac{\partial\vec{B}_h}{\partial t}\,. \qquad (11)$$

Estas "cargas magnéticas" também obedecem à equação da continuidade. Com efeito, de (8) e (10),

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot(\mu\vec{H})=\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_h=-\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial(\mu\vec{M}_p)}{\partial t}\right),$$

ou seja,

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial t}=-\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_m\,,$$

isto é, a "carga magnética" também é conservada.

É essencial salientar que todos os resultados que temos vindo a apresentar são aplicáveis partindo do pressuposto de que a magnetização permanente $\vec{M}_p$ é não nula – as cargas e correntes magnéticas dependem deste vector. Para meios não magnetizados, em particular para o vácuo, a magnetização permanente é nula e não faz sentido falar de cargas magnéticas. Os materiais magnéticos aparecem assim sempre na forma (macroscópica) de dipolos: um pólo norte e um pólo sul, que nunca aparecem separadamente. Agora no interior destes materiais, um meio com $\vec{M}_p$ não nula, poder-se-á falar de cargas magnéticas isoladas?

No passado mês de Outubro, um grupo de cientistas do University College de Londres (UCL), liderado por Steve Bramwell, anunciou ter detectado perturbações magnéticas dentro de um material que se comportam como se fossem autênticas partículas. Estas cargas foram detectadas num material, o titanato de disprósio ($Dy_2Ti_2O_7$), que tem a propriedade de ser um gelo de spin, isto é, a temperaturas próximas do zero absoluto cristaliza em estruturas tetraédricas semelhantes às dos iões de hidrogénio num cristal de gelo. A interacção entre os spins neste material é ferromagnética, ou seja, a energia é minimizada para uma configuração de spins paralelos. Tal configuração não é possível com a referida estrutura tetraédrica (diz-se por isso que o gelo de spin é um ferromagneto frustrado): o melhor que se consegue (minimizando a energia) é ter, em cada tetraedro, dois spins a apontarem para dentro e outros dois a apontarem para fora. (Esta configuração é degenerada, pelo que mesmo no zero absoluto a entropia não se anula.) O momento magnético resultante é não nulo, pelo que este é um meio com magnetização permanente.

Através de um feixe de neutrões foi possível inverter a orientação do spin de um vértice do tetraedro, de modo a que três vértices apontassem para dentro e um para fora. Este tetraedro actua como um monopolo magnético [1]. Como cada tetraedro partilha os vértices com os tetraedros adjacentes, inverter o spin de um vértice cria um monopolo de polaridade oposta no tetraedro seguinte. Estes monopolos, na presença de um campo magnético, actuam da mesma forma que cargas eléctricas na presença de um campo eléctrico [2].

A descoberta destes monopolos pode ter aplicações tecnológicas interessantes: com efeito, a maior parte das memórias dos computadores armazenam a informação magneticamente. A eventual utilização de cargas magnéticas (em vez das eléctricas) para ler e escrever bits e formar estas memórias pode ser vantajosa em velocidade e flexibilidade. Mas, por enquanto, trata-se apenas de uma possibilidade.

Estes monopolos têm lugar perfeitamente numa teoria electromagnética macroscópica, através das equações de Maxwell para um material magnético, e só num material deste tipo podem existir, sendo descritos pelo vector $\vec{M}_p$. Dada a sua natureza de excitações colectivas ("quase-partículas") de um sistema magnético, estes monopolos não são, portanto, partículas elementares. Concluindo, esta descoberta, não deixando de ser notável, não é verdadeiramente revolucionária, pois não põe minimamente em causa a teoria electromagnética em vigor.

Filipe Moura

é licenciado em Engenharia Física Tecnológica pelo Instituto Superior Técnico (1997) e doutorou-se em Física no Instituto C.N. Yang de Física Teórica da Universidade do Estado de Nova Iorque em Stony Brook, EUA (2003). Foi colaborador da secção de Ciência do jornal "Público" e é editor da "Gazeta de Física". É investigador auxiliar no Centro de Matemática da Universidade do Minho. Trabalha em supergravidade, teorias de supercordas e buracos negros.

1. C. Castelnovo, R. Moessner e S. L. Sondhi, "Magnetic monopoles in spin ice", Nature 451, 42-45 (3 Janeiro 2008)
2. S. T. Bramwell, S. R. Giblin, S. Calder, R. Aldus, D. Prabhakaran e T. Fennell, "Measurement of the charge and current of magnetic monopoles in spin ice", Nature 461, 956-959 (15 Outubro 2009)