APÊNDICE B

ESPECIFICAÇÃO ALGÉBRICA

DEFINIÇÕES E NOTAÇÃO

Def. B.1 : Família Indexada.

Uma família **F** de conjuntos **A** indexada por **I** é uma função que associa a cada **i** ? **I** um conjunto **A**. Esta família assume a designação de família I-indexada de conjuntos **A** e denota-se por $\{\mathbf{F_i}\}$, ou, quando **I** é subentendido, simplesmente por $\mathbf{F_i}$. As designações "família indexada por I" ou "conjunto I-indexado" são equivalentes.

•

Def. B.2 : Assinatura.

Uma assinatura ? ("signature") é um par <S, F> onde S representa o conjunto, não vazio, de símbolos identificativos de *espécies* ("sorts") e **F** é uma família de símbolos de *operadores* indexada por $S^* \times S$.

•

Dado um símbolo de operador *f* ? F_i, o seu índice *i*, que é da forma

$$i = <<s_1, \ldots, s_n>, s>$$

sendo s_j ? S, para 1 <= j <= n e j ? N_0, indica a sua funcionalidade, aridade ou tipo. Esta informação sobre *f* é em geral apresentada sob a forma

$$\mathbf{f : s_1 \ x \ldots x \ s_n \ ? \ \ s}$$

distinguindo as espécies parâmetro, a sua ordem, cf. $s_1 \ x \ldots x \ s_n$, e a espécie resultado, *s*.

Os operadores de aridade

$$\mathbf{f :} \ ? \ \ \mathbf{s}$$

(i.é, para n = 0) designam-se operadores zero-ádicos ou zero-ários, e representam *constantes* da espécie resultado, neste caso, *s*.

Def. B.3 : ? -termos.

Seja ? = <S, F> uma assinatura. Para cada espécie s ? S, o conjunto dos ?-termos é o conjunto S-indexado definido indutivamente como:

1. Toda a constante **f : ? s** é um ?-termo da espécie *s*.
2. Para todo o operador $\mathbf{f : s_1 \; x \; ... \; x \; s_n}$? **s**, e para todo o termo t_i da espécie s_i, sendo 1 ? i ? n, $\mathbf{f}(t_1, ... ,t_i, ... ,t_n)$ é um termo da espécie *s*.

Ao conjunto de todos os ?-termos da espécie *s* designa-se por $W_{?,s}$. Um ?-termo designa-se também por ?-palavra (ou “word”). A família de todos os ?-termos é, então, dada por $W_?$. = { $W_{?,s}$ } $_{s ? S}$.

•

Def. B.4 : ?-linguagem.

Sendo ? = <S, F> uma assinatura, o conjunto de todos os termos que podem ser construídos a partir das espécies de ? designa-se também por ?-linguagem, i.é $W_?$. Sendo X_s um conjunto de variáveis da espécie s ? S, ao conjunto S-indexado X = ? $_{s ? S}$ X_s dá-se o nome de *conjunto das variáveis* da assinatura ?. A linguagem dos termos com variáveis gerada pela assinatura denota-se por $W_?$ (X).

•

Def. B.5: ?-Álgebra.

Dada uma assinatura ? = <S, F>, uma **?-Álgebra** $\underline{\mathbf{A}}$ é um par representa-do por $\underline{\mathbf{A}}$ = <S_A, F_A>, onde S_A representa um conjunto S-indexado de *conjuntos portadores* (conjuntos de valores), indicando um conjunto porta-dor $s^{\underline{A}}$ por cada espécie s ? S; F_A é um conjunto de operadores $f^{\underline{A}}$, sobre tais conjuntos portadores, onde a cada símbolo de operador f ? F da forma,

$$f : s_1 \; x \; ... \; x \; s_n \; ? \; s$$

se associa uma função $f^{\underline{A}}$ da forma,

$$f^{\underline{A}} : s_1^{\underline{A}} \; x \; ... \; x \; s_n^{\underline{A}} \; ? \; s^{\underline{A}}$$

sendo n ? N_0. Se n = 0, então $f^{\underline{A}}$ é um operador 0-ário, 0-ádico ou constante. Se ?S ?= 1 a álgebra diz-se *homogénea* (ou monotipo) enquanto que se ? S ? > 1 a álgebra se diz heterogénea (ou multitipo). $\underline{A}(s)$ e $\underline{A}(f)$ são designações alternativas para, respectivamente, $s^{\underline{A}}$ e $f^{\underline{A}}$.

•

Note-se que uma ?-Álgebra **A** dá um significado ou semântica à assinatura ?, dizendo-se assim que é um *modelo semântico* para esta. Esta é a técnica empregue nas designadas *especificações por modelos*. Assim, a álgebra pode ser vista como definindo uma correspondência entre os elementos da assinatura e os elementos da notação de especificação, que se representa por

$$\underline{\mathbf{A}} : ? \; ? \;\; \text{SETS}$$

onde SETS designa a "categoria" dos conjuntos sobre cujas primitivas se constroem os modelos e cujas propriedades são exploradas no cálculo SETS [Oliveira 92, 94].

•

Def. B.6 : Álgebra dos Termos.

Dada uma assinatura ? = <S, F> e uma família S-indexada de variáveis da assinatura, X, a Álgebra dos Termos com variáveis, $\underline{W}_?(X)$, é uma ?-álgebra com a seguinte estrutura:

1. Os seus conjuntos portadores são $s^{\underline{W}_?(X)} = W_{?,s}(X)$, ou seja, são conjuntos contendo todos os termos, com ou sem variáveis, da espécie associada, s ? S.

2. Os seus operadores $f^{\underline{W}_?(X)}$ são tais que,

$$f^{\underline{W}_?(X)}(\acute{}t1\acute{}, .. , \acute{}tn\acute{}) = \acute{}f(t1, .. , tn)\acute{} \; ? \;\; W_{?,s}(X)$$

ou seja, são construtores de termos (ou "strings") a partir de sub-termos.

•

Def. B.7 : ?-homomorfismo.

Sejam d e e duas ?-álgebras da assinatura ? = <S, F>. Considere-se ainda $h = (h_s)_{s\ ?\ S}$, uma família de funções com as seguintes propriedades:

? para cada s ? S, h_s : d*(s)* ? e*(s)*;

? para cada f ? F, tal que f : s_1 x .. x s_n ? s, verifica-se que *h* respeita a funcionalidade de f, conforme a regra,

$$h_s\ (d(f)(x_1, .., x_n)) = e(f)(h_{s1}(x_1), \ldots , h_{sn}(x_n))$$

Então *h* é um homomorfismo de d para e, denotado por *h*: d ? e.

•

Def. B.8 : Axioma.

Dada uma assinatura ?= <S, F> e um conjunto S-indexado de variáveis X, um ?(X)-axioma é um par de termos pertencente a $W_{?,s}(X)$, ou seja dois termos de uma mesma espécie s ? S e que podem conter variáveis.

•

Def. B.9 : Especificação Axiomática (ou Teoria).

Sejam ? e X tal como na definição anterior, e seja E = $(E_s)_{s ? S}$ uma família de ?(X)-axiomas. Ao triplo SPEC = (?, X, E) dá-se o nome de especificação axiomática ou teoria.

•

Def. B.10 : Especificação Equacional.

Numa especificação axiomática equacional, o conjunto E de axiomas é encarado como um conjunto de *equações*.
Estas equações escrevem-se em geral sob a forma,

t ? t'

•

É usual em Ciências da Computação a utilização de descrições de axiomas mais complexas, e, dentro das mais simples são de considerar, designadamente:

? *Condicionais.*

a ? true ? t ? t' ; t ? t''

? *Condicionais com Erro.*

a ? true ? t ? t' ; ?

O tratamento matemático de equações condicionais é elaborado (cf. [Broy et al. 84]).

Def. B.11 : Satisfação de Equações.

Seja SPEC = (?, X, E) uma especificação equacional, ? uma assinatura, e d uma ?-álgebra. Diz-se que d satisfaz as equações em E, ou que é um modelo de E, se ¿ $_E$? ¿ $_d$ ou seja,

t ¿$_E$ t' ? d(t) = d(t')

i.é., se para todos os termos equacionalmente congruentes por E, se verifi-car que estes assumem o mesmo valor no modelo d.

•

Em concreto, dada uma ?-álgebra d, esta satisfaz uma ?-equação eq, escrevendo-se

d ? eq

se a equação é verdadeira para qualquer substituição das variáveis por valores.

Def. B.12 : Instanciação de Variáveis.

Dada uma assinatura com variáveis ?(X) e uma ?-álgebra d, chama-se *instanciação das variáveis* de X em d, a uma aplicação *?* : V ? |A|, sendo |A| o conjunto

|A| = ? $_s$? $_S$ d(s)

em que d(s) representa o modelo feito corresponder por d à espécie *s*, aplicação essa tal que

?(*x*) ? d(X(*x*))

•

Def. B.13 : Substituição.

Chama-se *substituição* a toda a instanciação ? que faz corresponder a uma variável um termo com variáveis.

Def. B.14 : Interface.

Sempre que **I = (?, X, E)** é uma especificação equacional e d satisfaz E, diremos também que **I** é uma *interface* para d.

•